

# 弹性力学简明教程（第四版）课后习题解答

徐芝纶

## 第一章 绪论

**【1-1】**试举例说明什么是均匀的各向异性体，什么是非均匀的各向同性体？

**【分析】**均匀的各项异性体就是满足均匀性假定，但不满足各向同性假定；非均匀的各向异性体，就是不满足均匀性假定，但满足各向同性假定。

**【解答】**均匀的各项异性体如：竹材，木材。

非均匀的各向同性体如：混凝土。

**【1-2】**一般的混凝土构件和钢筋混凝土构件能否作为理想弹性体？一般的岩质地基和土质地基能否作为理想弹性体？

**【分析】**能否作为理想弹性体，要判定能否满足四个假定：连续性，完全弹性，均匀性，各向同性假定。

**【解答】**一般的混凝土构件和土质地基可以作为理想弹性体；一般的钢筋混凝土构件和岩质地基不可以作为理想弹性体。

**【1-3】**五个基本假定在建立弹性力学基本方程时有什么作用？

**【解答】**(1) 连续性假定：假定物体是连续的，也就是假定整个物体的体积都被组成这个物体的介质所填满，不留下任何空隙。引用这一假定后，物体的应力、形变和位移等物理量就可以看成是连续的。因此，建立弹性力学的基本方程时就可以用坐标的连续函数来表示他们的变化规律。

完全弹性假定：假定物体是完全弹性的，即物体在对应形变的外力被去除后，能够完全恢复原型而无任何形变。这一假定，还包含形变与引起形变的应力成正比的涵义，亦即两者之间是成线性关系的，即引用这一假定后，应力与形变服从胡克定律，从而使物理方程成为线性的方程，其弹性常数不随应力或形变的大小而变。

均匀性假定：假定物体是均匀的，即整个物体是由同一材料组成的，引用这一假定后整个物体的所有各部分才具有相同的弹性，所研究物体的内部各质点的物理性质都是相同的，因而物体的弹性常数不随位置坐标而变化。

各向同性假定：假定物体是各向同性的，即物体的弹性在所有各个方向都相同，引用此假定后，物体的弹性常数不随方向而变。

小变形假定：假定位移和变形是微小的。亦即，假定物体受力以后整个物体所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸，而且应变和转角都远小于 1。这样在建立物体变形以后的平衡方程时，就可以方便的用变形以前的尺寸来代替变形以后的尺寸。在考察物体的位移与形变的关系时，它们的二次幂或乘积相对于其本身都可以略去不计，使得弹性力学中的微分

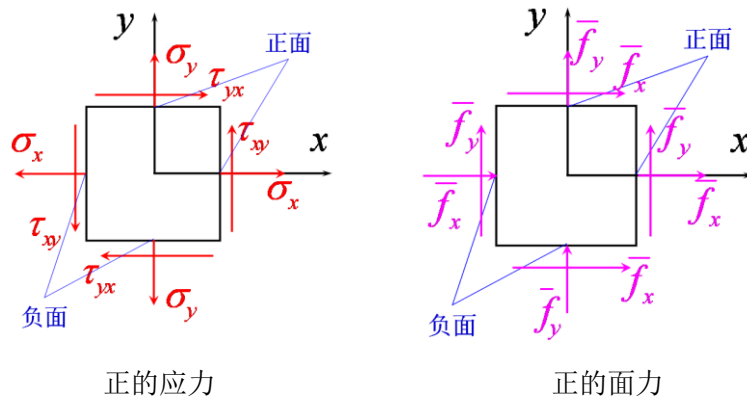
方程都简化为线性的微分方程。

**【1-4】** 应力和面力的符号规定有什么区别？试画出正坐标面和负坐标面上的正的应力和正的面力的方向。

**【解答】** 应力的符号规定是：当作用面的外法线方向指向坐标轴方向时（即正面时），这个面上的应力（不论是正应力还是切应力）以沿坐标轴的正方向为正，沿坐标轴的负方向为负。当作用面的外法线指向坐标轴的负方向时（即负面时），该面上的应力以沿坐标轴的负方向为正，沿坐标轴的正方向为负。

面力的符号规定是：当面力的指向沿坐标轴的正方向时为正，沿坐标轴的负方向为负。

由下图可以看出，正面上应力分量与面力分量同号，负面上应力分量与面力分量符号相反。



**【1-5】** 试比较弹性力学和材料力学中关于切应力的符号规定。

**【解答】** 材料力学中规定切应力符号以使研究对象顺时针转动的切应力为正，反之为负。

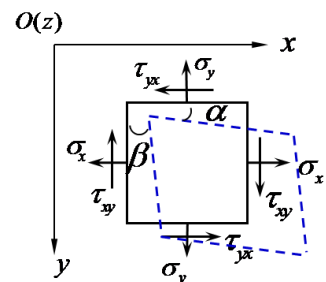
弹性力学中规定，作用于正坐标面上的切应力以沿坐标轴的正方向为正，作用于负坐标面上的切应力以沿坐标轴负方向为正，反之为负。

**【1-6】** 试举例说明正的应力对应于正的形变。

**【解答】** 正的应力包括正的正应力与正的切应力，正的形变包括正的正应变与正的切应变，本题应从两方面解答。

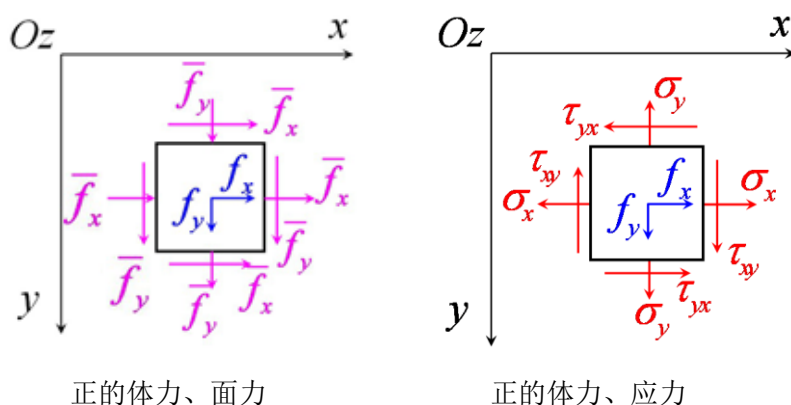
正的正应力对应于正的正应变：轴向拉伸情况下，产生轴向拉应力为正的应力，引起轴向伸长变形，为正应变。

正的切应力对应于正的切应变：在如图所示应力状态情况下，切应力均为正的切应力，引起直角减小，故为正的切应变。



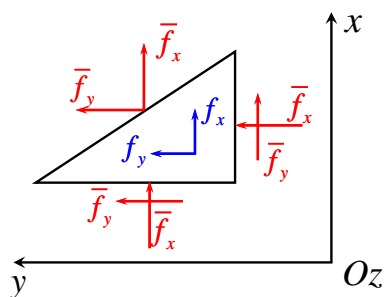
【1-7】试画出图 1-4 中矩形薄板的正的体力、面力和应力的方向。

【解答】



【1-8】试画出图 1-5 中三角形薄板的正的面力和体力的方向。

【解答】



【1-9】在图 1-3 的六面体上，y 面上切应力  $\tau_{yz}$  的合力与 z 面上切应力  $\tau_{zy}$  的合力是否相等？

【解答】切应力为单位面上的力，量纲为  $L^{-1}MT^{-2}$ ，单位为  $N/m^2$ 。因此，应力的合力应乘以相应的面积，设六面体微元尺寸如  $dx \times dy \times dz$ ，则 y 面上切应力  $\tau_{yz}$  的合力为：

$$\tau_{yz} \cdot dx \cdot dz \quad (a)$$

z 面上切应力  $\tau_{zy}$  的合力为：

$$\tau_{zy} \cdot dx \cdot dy \quad (b)$$

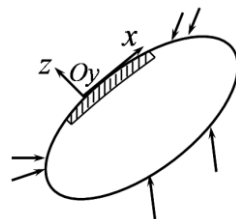
由式 (a) (b) 可见，两个切应力的合力并不相等。

【分析】作用在两个相互垂直面上并垂直于该两面交线的切应力的合力不相等，但对某点的合力矩相等，才导出切应力互等性。

## 第二章 平面问题的基本理论

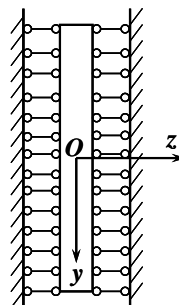
【2-1】试分析说明，在不受任何面力作用的空间体表面附近的薄层中(图 2-14)其应力状态接近于平面应力的情况。

【解答】在不受任何面力作用的空间表面附近的薄层中，可以认为在该薄层的上下表面都无面力，且在薄层内所有各点都有  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ，只存在平面应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ，且它们不沿  $z$  方向变化，仅为  $x, y$  的函数。可以认为此问题是平面应力问题。



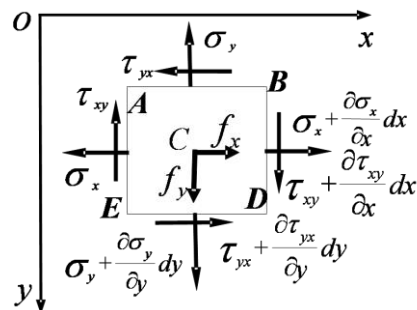
【2-2】试分析说明，在板面上处处受法向约束且不受切向面力作用的等厚度薄片(2-15)，当板边上只受  $x, y$  向的面力或约束，且不沿厚度变化时，其应变状态接近于平面应变的情况。

【解答】板上处处受法向约束时  $\varepsilon_z = 0$ ，且不受切向面力作用，则  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  (相应  $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ ) 板边上只受  $x, y$  向的面力或约束，所以仅存在  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ，且不沿厚度变化，仅为  $x, y$  的函数，故其应变状态接近于平面应变的情况。



【2-3】在图 2-3 的微分体中，若将对形心的力矩平衡条件  $\sum M_C = 0$  改为对角点的力矩平衡条件，试问将导出什么形式的方程？

【解答】将对形心的力矩平衡条件  $\sum M_C = 0$ ，改为分别对四个角点 A、B、D、E 的平衡条件，为计算方便，在  $z$  方向的尺寸取为单位 1。



$$\sum M_A = 0$$

$$\begin{aligned} & \sigma_y dx \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\right) dy \cdot 1 \cdot dx - \sigma_y dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} \\ & - \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right) dx \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx \cdot 1 \cdot dy + f_x dx dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} - f_x dx dy \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (a)$$

$$\sum M_B = 0$$

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx \cdot 1 \cdot dy + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right) dx \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} \\ & - \tau_{xy} dy \cdot 1 \cdot dx - \sigma_x dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} - \sigma_y dx \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} + f_x dx dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} + f_y dx dy \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (b)$$

$$\sum M_D = 0$$

$$\begin{aligned} & (\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy) dx \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} - \tau_{xy} dy \cdot 1 \cdot dx + \sigma_x dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} + \tau_{yx} dx \cdot 1 \cdot dy \\ & - \sigma_x dx \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} - (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} - f_x dx dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} + f_y dx dy \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (c)$$

$$\sum M_E = 0$$

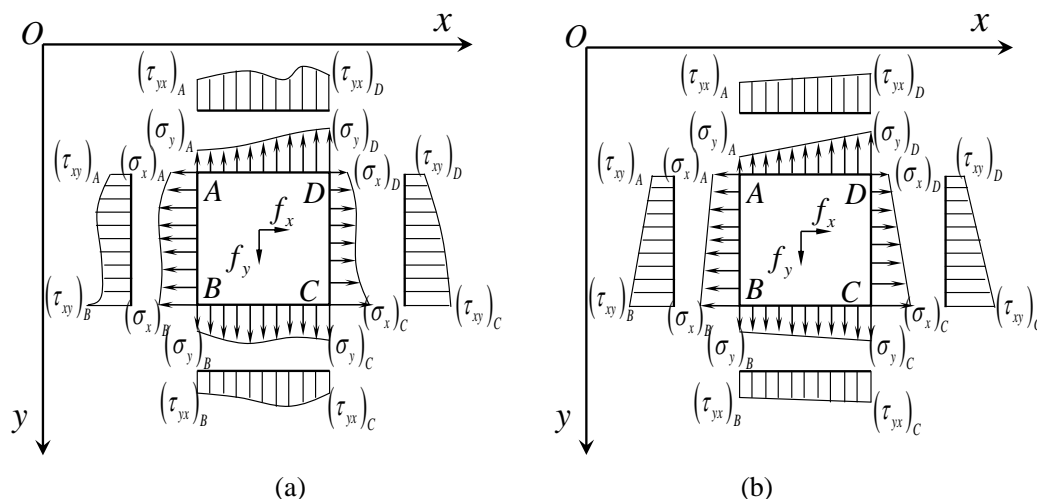
$$\begin{aligned} & -(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy) dx \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} + \sigma_x dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} + \tau_{yx} dx \cdot 1 \cdot dy + \sigma_y dx \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} - \\ & (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} - (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx) dy \cdot 1 \cdot dx - f_x dx dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} + f_y dx dy \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (d)$$

略去(a)、(b)、(c)、(d)中的三阶小量（亦即令 $d^2 x dy, dx d^2 y$ 都趋于0），并将各式都除以 $dx dy$ 后合并同类项，分别得到 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 。

【分析】由本题可得出结论：微分体对任一点取力矩平衡得到的结果都是验证了切应力互等定理。

【2-4】在图 2-3 和微分体中，若考虑每一面上的应力分量不是均匀分布的，验证将导出什么形式的平衡微分方程？

【解答】微分单元体 ABCD 的边长 $dx, dy$ 都是微量，因此可以假设在各面上所受的应力如图 a 所示，忽略了二阶以上的高阶微量，而看作是线性分布的，如图（b）所示。为计算方便，单元体在 $z$ 方向的尺寸取为一个单位。



各点正应力：

$$(\sigma_x)_A = \sigma_x ;$$

$$(\sigma_y)_A = \sigma_y$$

$$(\sigma_x)_B = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy ;$$

$$(\sigma_y)_B = \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$$

$$(\sigma_x)_D = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx;$$

$$(\sigma_y)_D = \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} dx$$

$$(\sigma_x)_C = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy;$$

$$(\sigma_y)_C = \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$$

各点切应力:

$$(\tau_{xy})_A = \tau_{xy};$$

$$(\tau_{yx})_A = \tau_{yx}$$

$$(\tau_{xy})_B = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy;$$

$$(\tau_{yx})_A = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$$

$$(\tau_{xy})_D = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx;$$

$$(\tau_{yx})_D = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx$$

$$(\tau_{xy})_C = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy;$$

$$(\tau_{yx})_C = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$$

由微分单元体的平衡条件  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ , 得

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \sigma_x + \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy \right) \right] \right\} dy + \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) + \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy \right) \right] \right\} dy - \\ & \left\{ \frac{1}{2} \left[ \tau_{yx} + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \right) \right] \right\} dx + \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \right] \right\} dx + f_x dx dy = 0 \\ & \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \sigma_y + \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} dx \right) \right] \right\} dx + \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) + \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) \right] \right\} dx - \\ & \left\{ \frac{1}{2} \left[ \tau_{xy} + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) \right] \right\} dy + \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) \right] \right\} dy + f_y dx dy = 0 \end{aligned}$$

以上二式分别展开并约简, 再分别除以  $dx dy$ , 就得到平面问题中的平衡微分方程:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0$$

【分析】由本题可以得出结论: 弹性力学中的平衡微分方程适用于任意的应力分布形式。

【2-5】在导出平面问题的三套基本方程时, 分别应用了哪些基本假定? 这些方程的适用条件是什么?

【解答】(1)在导出平面问题的平衡微分方程和几何方程时应用的基本假设是: 物体的连续性和小变形假定, 这两个条件同时也是这两套方程的适用条件。

(2)在导出平面问题的物理方程时应用的基本假定是: 连续性, 完全弹性, 均匀性和各向同性假定, 即理想弹性体假定。同样, 理想弹性体的四个假定也是物理方程的使用条件。

【思考题】平面问题的三套基本方程推导过程中都用到了哪个假定？

【2-6】在工地上技术人员发现，当直径和厚度相同的情况下，在自重作用下的钢圆环（接近平面应力问题）总比钢圆筒（接近平面应变问题）的变形大。试根据相应的物理方程来解释这种现象。

【解答】体力相同情况下，两类平面问题的平衡微分方程完全相同，故所求的应力分量相同。由物理方程可以看出，两类平面问题的物理方程主要的区别在于方程中含弹性常数的系数。由于  $E$  为 GPa 级别的量，而泊松比  $\mu$  取值一般在  $(0, 0.5)$ ，故主要控制参数为含有弹性模量的系数项，比较两类平面问题的系数项，不难看出平面应力问题的系数  $1/E$  要大于平面应变问题的系数  $(1-\mu^2)/E$ 。因此，平面应力问题情况下应变要大，故钢圆环变形大。

【2-7】在常体力，全部为应力边界条件和单连体的条件下，对于不同材料的问题和两类平面问题的应力分量  $\sigma_x$ ， $\sigma_y$  和  $\tau_{xy}$  均相同。试问其余的应力，应变和位移是否相同？

【解答】(1) 应力分量：两类平面问题的应力分量  $\sigma_x$ ， $\sigma_y$  和  $\tau_{xy}$  均相同，但平面应力问题  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ ，而平面应变问题的  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$ 。

(2) 应变分量：已知应力分量求应变分量需要应用物理方程，而两类平面问题的物理方程不相同，故应变分量  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \gamma_{xy}$  相同，而  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  不相同。

(3) 位移分量：由于位移分量要靠应变分量积分来求解，故位移分量对于两类平面问题也不同。

【2-8】在图 2-16 中，试导出无面力作用时 AB 边界上的  $\sigma_x$ ， $\sigma_y$ ， $\tau_{xy}$  之间的关系式

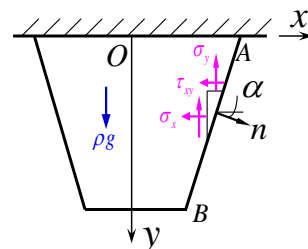


图2-16

【解答】由题可得：

$$l = \cos \alpha, m = \cos(\alpha - 90^\circ) = \sin \alpha$$

$$\bar{f}_x(AB) = 0, \bar{f}_y(AB) = 0$$

将以上条件代入公式 (2-15)，得：

$$(\sigma_x)_{AB} \cos \alpha + (\tau_{yx})_{AB} \sin \alpha = 0, \quad (\sigma_y)_{AB} \sin \alpha + (\tau_{xy})_{AB} \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_x)_{AB} = -(\tau_{yx})_{AB} \tan \alpha = (\sigma_y)_{AB} \tan^2 \alpha$$

【2-9】试列出图 2-17，图 2-18 所示问题的全部边界条件。在其端部小边界上，应用圣维南原理列出三个积分的应力边界条件。

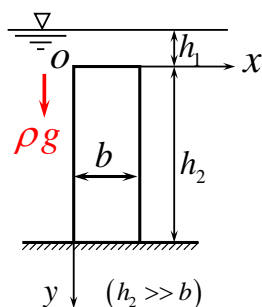


图 2-17

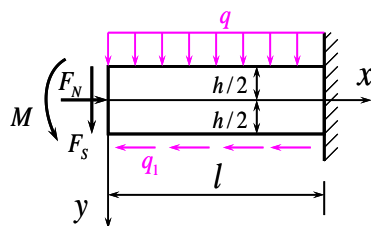


图 2-18

【分析】有约束的边界上可考虑采用位移边界条件，若为小边界也可写成圣维南原理的三个积分形式，大边界上应精确满足公式 (2-15)。

【解答】图 2-17:

	上 ( $y=0$ )	左( $x=0$ )	右 ( $x=b$ )
$l$	0	-1	1
$m$	-1	0	0
$\bar{f}_x(s)$	0	$\rho g(y+h_1)$	$-\rho g(y+h_1)$
$\bar{f}_y(s)$	$\rho g h_1$	0	0

代入公式 (2-15) 得

①在主要边界上  $x=0$ ,  $x=b$  上精确满足应力边界条件:

$$(\sigma_x)_{x=0} = -\rho g(y+h_1), (\tau_{xy})_{x=0} = 0;$$

$$(\sigma_x)_{x=b} = -\rho g(y+h_1), (\tau_{xy})_{x=b} = 0;$$

②在小边界  $y=0$  上，能精确满足下列应力边界条件:

$$(\sigma_y)_{y=0} = -\rho g h, (\tau_{xy})_{y=0} = 0$$

③在小边界  $y=h_2$  上，能精确满足下列位移边界条件:

$$(u)_{y=h_2} = 0, (v)_{y=h_2} = 0$$

这两个位移边界条件可以应用圣维南原理，改用三个积分的应力边界条件来代替，当板厚  $\delta=1$  时，可求得固定端约束反力分别为:

$$F_s = 0, F_N = -\rho g h_1 b, M = 0$$

由于  $y=h_2$  为正面，故应力分量与面力分量同号，则有:



$$\begin{cases} \int_0^b (\sigma_y)_{y=h_2} dx = -\rho gh_1 b \\ \int_0^b (\sigma_y)_{y=h_2} x dx = 0 \\ \int_0^b (\tau_{xy})_{y=h_2} dx = 0 \end{cases}$$

(2)图 2-18

①上下主要边界  $y=-h/2$ ,  $y=h/2$  上, 应精确满足公式 (2-15)

	$l$	$m$	$\bar{f}_x$ (s)	$\bar{f}_y$ (s)
$y = -\frac{h}{2}$	0	-1	0	$q$
$y = \frac{h}{2}$	0	1	$-q_1$	0

$$(\sigma_y)_{y=-h/2} = -q, (\tau_{yx})_{y=-h/2} = 0, (\sigma_y)_{y=h/2} = 0, (\tau_{yx})_{y=h/2} = -q_1$$

②在  $x=0$  的小边界上, 应用圣维南原理, 列出三个积分的应力边界条件: 负面上应力与面力符号相反, 有

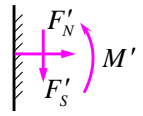
$$\begin{cases} \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=0} dx = -F_S \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} dx = -F_N \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dx = -M \end{cases}$$

③在  $x=l$  的小边界上, 可应用位移边界条件  $u_{x=l} = 0, v_{x=l} = 0$  这两个位移边界条件也可改用三个积分的应力边界条件来代替。

首先, 求固定端约束反力, 按面力正方向假设画反力, 如图所示, 列平衡方程求反力:

$$\sum F_x = 0, F_N + F'_N = q_1 l \Rightarrow F'_N = q_1 l - F_N$$

$$\sum F_y = 0, F_S + F'_S + ql = 0 \Rightarrow F'_S = -ql - F_S$$



$$\sum M_A = 0, M + M' + F_S l + \frac{1}{2} ql^2 - \frac{1}{2} q_1 l h = 0 \Rightarrow M = \frac{q_1 l h}{2} - M - F_S l - \frac{ql^2}{2}$$

由于  $x=l$  为正面, 应力分量与面力分量同号, 故

$$\begin{cases} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy = F'_N = q_1 l - F_N \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} y dy = M' = \frac{q_1 l h}{2} - M - F_S l - \frac{ql^2}{2} \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=l} dy = F'_S = -ql - F_S \end{cases}$$

【2-10】试应用圣维南原理，列出图 2-19 所示的两个问题中 OA 边上的三个积分的应力边界条件，并比较两者的面力是否是静力等效？

【解答】由于  $h \gg l$ ，OA 为小边界，故其上可用圣维南原理，写出三个积分的应力边界条件：

$$(a) \text{ 上端面 OA 面上面力 } \bar{f}_x = 0, \bar{f}_y = \frac{x}{b}q$$

由于 OA 面为负面，故应力主矢、主矩与面力主矢、主矩符号相反，有

$$\begin{cases} \int_0^b (\sigma_y)_{y=0} dx = - \int_0^b \bar{f}_y dx = - \int_0^b \frac{x}{b} q dx = - \frac{qb}{2} \\ \int_0^b (\sigma_y)_{y=0} x dx = - \int_0^b \bar{f}_y x dx = \int_0^b \frac{x}{b} q \left( \frac{b}{2} - x \right) dx = \frac{qb^2}{12} \text{ (对 OA 中点取矩)} \\ \int_0^b (\tau_{yx})_{y=0} dx = 0 \end{cases}$$

(b) 应用圣维南原理，负面上的应力主矢和主矩与面力主矢和主矩符号相反，面力主矢  $y$  向为正，主矩为负，则

$$\begin{cases} \int_0^b (\sigma_y)_{y=0} dx = -F_N = -\frac{qb}{2} \\ \int_0^b (\sigma_y)_{y=0} x dx = -M = \frac{qb^2}{12} \\ \int_0^b (\tau_{xy})_{y=0} dx = 0 \end{cases}$$

综上所述，在小边界 OA 上，两个问题的三个积分的应力边界条件相同，故这两个问题是静力等效的。

【2-11】检验平面问题中的位移分量是否为正确解答的条件是什么？

【解答】(1) 在区域内用位移表示的平衡微分方程式 (2-18)；

(2) 在  $s_\sigma$  上用位移表示的应力边界条件式 (2-19)；

(3) 在  $s_u$  上的位移边界条件式 (2-14)；

对于平面应变问题，需将  $E$ 、 $\mu$  作相应的变换。

【分析】此问题同时也是按位移求解平面应力问题时，位移分量必须满足的条件。

【2-12】检验平面问题中的应力分量是否为正确解答的条件是什么？

【解答】(1) 在区域 A 内的平衡微分方程式 (2-2)；

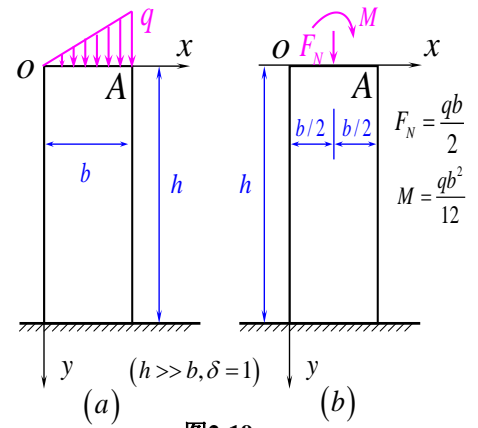


图2-19

- (2) 在区域 A 内用应力表示的相容方程式 (2-21) 或 (2-22);
- (3) 在边界上的应力边界条件式 (2-15), 其中假设只求解全部为应力边界条件的问题;
- (4) 对于多连体, 还需满足位移单值条件。

【分析】此问题同时也是按应力求解平面问题时, 应力分量必须满足的条件。

【补题】检验平面问题中的应变分量是否为正确解答的条件是什么?

【解答】用应变表示的相容方程式 (2-20)

【2-13】检验平面问题中的应力函数是否为正确解答的条件是什么?

- 【解答】(1) 在区域 A 内用应力函数表示的相容方程式 (2-25);
- (2) 在边界 S 上的应力边界条件式 (2-15), 假设全部为应力边界条件;
- (3) 若为多连体, 还需满足位移单值条件。

【分析】此问题同时也是求解应力函数的条件。

【2-14】检验下列应力分量是否是图示问题的解答:

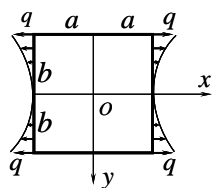


图 2-20

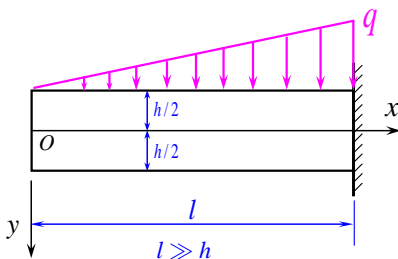


图 2-21

- (a) 图 2-20,  $\sigma_x = \frac{y^2}{b^2} q$ ,  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ 。

【解答】在单连体中检验应力分量是否是图示问题的解答, 必须满足: (1) 平衡微分方程 (2-2); (2) 用应力表示的相容方程 (2-21); (3) 应力边界条件 (2-15)。

- (1) 将应力分量代入平衡微分方程式, 且  $f_x = f_y = 0$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \text{显然满足}$$

- (2) 将应力分量代入用应力表示的相容方程式 (2-21), 有

$$\text{等式左} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{2q}{b^2} \neq 0 = \text{右}$$

应力分量不满足相容方程。

因此, 该组应力分量不是图示问题的解答。

- (b) 图 2-21, 由材料力学公式,  $\sigma_x = \frac{M}{I} y$ ,  $\tau_{xy} = \frac{F_s S^*}{bI}$  (取梁的厚度  $b=1$ ), 得出所示问题的

解答:  $\sigma_x = -2q \frac{x^3 y}{lh^3}$ ,  $\tau_{xy} = -\frac{3q}{4} \frac{x^2}{lh^3} (h^2 - 4y^2)$ 。又根据平衡微分方程和边界条件得出:

$$\sigma_y = \frac{3q}{2} \frac{xy}{lh} - 2q \frac{xy^3}{lh^3} - \frac{q}{2} \frac{x}{l}。试导出上述公式, 并检验解答的正确性。$$

【解答】(1) 推导公式

在分布荷载作用下, 梁发生弯曲形变, 梁横截面是宽度为  $l$ , 高为  $h$  的矩形, 其对中性轴 ( $Z$  轴) 的惯性矩  $I = \frac{h^3}{12}$ , 应用截面法可求出任意截面的弯矩方程和剪力方程

$$M(x) = -\frac{q}{6l} x^3, F(x) = -\frac{qx^2}{2l}。$$

所以截面内任意点的正应力和切应力分别为:

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{I} y = -2q \frac{x^3 y}{lh^3}$$

$$\tau_{xy} = \frac{3F_s(x)}{2bh} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) = -\frac{3q}{4} \cdot \frac{x^2}{lh^3} (h^2 - 4y^2)。$$

根据平衡微分方程第二式 (体力不计)。

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

得: 
$$\sigma_y = \frac{3q}{2} \cdot \frac{xy}{lh} - 2q \frac{xy^3}{lh^3} + A$$

根据边界条件  $(\sigma_y)_{y=h/2} = 0$

得 
$$A = -\frac{q}{2} \cdot \frac{x}{l}$$

故 
$$\sigma_y = \frac{3q}{2} \cdot \frac{xy}{lh} - 2q \frac{xy^3}{lh^3} - \frac{q}{2} \cdot \frac{x}{l}$$

将应力分量代入平衡微分方程 (2-2)

第一式:

$$\text{左} = -6q \cdot \frac{x^2 y}{lh^3} + 6q \frac{x^2 y}{lh^3} = 0 = \text{右} \quad \text{满足}$$

第二式 自然满足

将应力分量代入相容方程 (2-23)

$$\text{左} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -12q \cdot \frac{xy}{lh^3} - 12q \cdot \frac{xy}{lh^3} \neq 0 = \text{右}$$

应力分量不满足相容方程。

故，该分量组分量不是图示问题的解答。

**【2-15】** 试证明：在发生最大与最小切应力的面上，正应力的数值都等于两个主应力的平均值。

**【解答】** (1) 确定最大最小切应力发生位置

任意斜面上的切应力为  $\tau_n = lm(\sigma_2 - \sigma_1)$ ，用关系式  $l^2 + m^2 = 1$  消去  $m$ ，得

$$\tau_n = \pm l \sqrt{1 - l^2} (\sigma_2 - \sigma_1) = \pm \sqrt{l^2 - l^4} (\sigma_2 - \sigma_1) = \pm \sqrt{1/4 - (1/2 - l^2)^2} (\sigma_2 - \sigma_1)$$

由上式可见当  $\frac{1}{2} - l^2 = 0$  时，即  $l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$  时， $\tau_n$  为最大或最小，为  $(\tau_n)_{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ 。因此，

切应力的最大，最小值发生在与  $x$  轴及  $y$  轴（即应力主向）成  $45^\circ$  的斜面上。

(2) 求最大，最小切应力作用面上，正应力  $\sigma_n$  的值

任一斜面上的正应力为

$$\sigma_n = l^2 (\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2$$

最大、最小切应力作用面上  $l = \pm \sqrt{1/2}$ ，带入上式，得

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2 = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

证毕。

**【2-16】** 设已求得一点处的应力分量，试求  $\sigma_1, \sigma_2, \alpha_1$

$$(a) \sigma_x = 100, \sigma_y = 50, \tau_{xy} = 10\sqrt{50}; \quad (b) \sigma_x = 200, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = -400;$$

$$(c) \sigma_x = -2000, \sigma_y = 1000, \tau_{xy} = -400; \quad (d) \sigma_x = -1000, \sigma_y = -1500, \tau_{xy} = 500.$$

**【解答】** 由公式 (2-6)

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{及} \quad \tan \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}, \quad \text{得} \quad \alpha_1 = \arctan \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

$$(a) \quad \left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{100 + 50}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{100 - 50}{2} \right)^2 + (10\sqrt{50})^2} = \begin{cases} 150 \\ 0 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \arctan \frac{150 - 100}{10\sqrt{50}} = 35^\circ 16'$$

$$(b) \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{cases} = \frac{200+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{200-0}{2}\right)^2 + (-400)^2} = \begin{cases} 512 \\ -312 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \arctan \frac{512-200}{-400} = \arctan(-0.78) = -37^\circ 57'$$

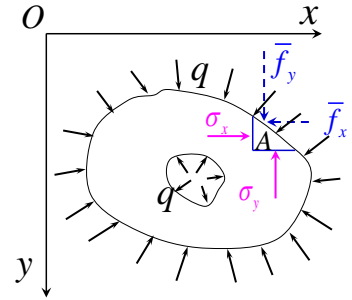
$$(c) \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{cases} = \frac{-2000+1000}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2000+1000}{2}\right)^2 + (-400)^2} = \begin{cases} 1052 \\ -2052 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \arctan \frac{1052+2000}{-400} = \arctan(-7.38) = -82^\circ 32'$$

$$(d) \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{cases} = \frac{-1000-1500}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1000+1500}{2}\right)^2 + 500^2} = \begin{cases} -691 \\ -1809 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \arctan \frac{-691+1000}{500} = \arctan 0.618 = 31^\circ 43'$$

【2-17】设有任意形状的等厚度薄板，体力可以不计，在全部边界上（包括孔口边界上）受有均匀压力  $q$ 。试证  $\sigma_x = \sigma_y = -q$  及  $\tau_{xy} = 0$  能满足平衡微分方程、相容方程和应力边界条件，也能满足位移单值条件，因而就是正确的解答。



【解答】（1）将应力分量  $\sigma_x = \sigma_y = -q, \tau_{xy} = 0$ ，和体力分量

$f_x = f_y = 0$  分别带入平衡微分方程、相容方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \end{cases} \quad (a)$$

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (b)$$

显然满足（a）（b）

（2）对于微小的三角板  $A$ ， $dx, dy$  都为正值，斜边上的方向余弦  $l = \cos(n, x), m = \cos(n, y)$ ，将  $\sigma_x = \sigma_y = -q, \tau_{xy} = 0$ ，代入平面问题的应力边界条件的表达式（2-15），且  $\bar{f}_x = -q \cos(n, x), \bar{f}_y = q \cos(n, y)$ ，则有

$$\sigma_x \cos(n, x) = -q \cos(n, x), \sigma_y \cos(n, y) = -q \cos(n, y)$$

所以  $\sigma_x = -q, \sigma_y = -q$ 。

对于单连体，上述条件就是确定应力的全部条件。

（3）对于多连体，应校核位移单值条件是否满足。

该题为平面应力情况，首先，将应力分量代入物理方程（2-12），得形变分量，

$$\varepsilon_x = \frac{(\mu-1)}{E} q, \varepsilon_y = \frac{(\mu-1)}{E} q, \gamma_{xy} = 0 \quad (d)$$

将（d）式中形变分量代入几何方程（2-8），得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(\mu-1)}{E} q, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(\mu-1)}{E} q, \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (e)$$

前两式积分得到

$$u = \frac{(\mu-1)}{E} qx + f_1(y), v = \frac{(\mu-1)}{E} qy + f_2(x) \quad (f)$$

其中  $f_1(y), f_2(x)$  分别任意的待定函数，可以通过几何方程的第三式求出，将式（f）代入式（e）的第三式，得

$$-\frac{df_1(y)}{dy} = \frac{df_2(x)}{dx}$$

等式左边只是  $y$  的函数，而等式右边只是  $x$  的函数。因此，只可能两边都等于同一个常数  $\omega$ ，于是有

$$\frac{df_1(y)}{dy} = -\omega, \frac{df_2(x)}{dx} = \omega$$

积分后得  $f_1(y) = -\omega y + u_0, f_2(x) = \omega x + v_0$

代入式（f）得位移分量

$$\begin{cases} u = \frac{(\mu-1)}{E} qx - \omega y + u_0 \\ v = \frac{(\mu-1)}{E} qy + \omega x + v_0 \end{cases} \quad (g)$$

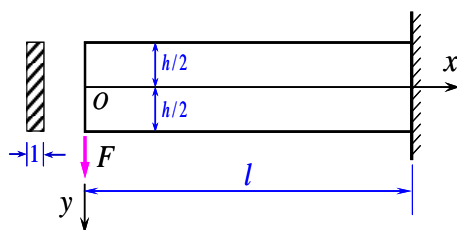
其中  $u_0, v_0, \omega$  为表示刚体位移量的常数，需由约束条件求得

从式（g）可见，位移是坐标的单值连续函数，满足位移单值条件。因而，应力分量是正确的解答。

**【2-18】**设有矩形截面的悬臂梁，在自由端受有集中荷载  $F$ （图 2-22），体力可以不计。试根据材料力学公式，写出弯应力  $\sigma_y = 0$ ，然后证明这些表达式满足平衡微分方程和相容方程，再说明这些表达式是否就表示正确的解答。

**【解答】**（1）矩形悬臂梁发生弯曲变形，任意横截面上的弯矩方程  $M(x) = -Fx$ ，横截面对中性轴的惯性矩为

$I_z = h^3/12$ ，根据材料力学公式



$$\text{弯应力 } \sigma_x = \frac{M(x)}{I_z} y = -\frac{12F}{h^3} xy;$$

该截面上的剪力为  $F_s(x) = -F$ ，剪应力为

$$\tau_{xy} = \frac{F_s(x)S^*}{bI_z} = \frac{-F}{1 \times (h^3/12)} \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot b \cdot \left[\frac{h/2 - y}{2} + y\right] = -\frac{6F}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

取挤压应力  $\sigma_y = 0$

(2) 将应力分量代入平衡微分方程检验

$$\text{第一式: 左} = -\frac{12F}{h^2} y + \frac{12F}{h^3} y = 0 = \text{右}$$

$$\text{第二式: 左} = 0 + 0 = 0 = \text{右}$$

该应力分量满足平衡微分方程。

(3) 将应力分量代入应力表示的相容方程

$$\text{左} = \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 = \text{右} \quad \text{满足相容方程}$$

(4) 考察边界条件

①在主要边界  $y = \pm h/2$  上，应精确满足应力边界条件(2-15)

	$l$	$m$	$\overline{f_x}$	$\overline{f_y}$
$y = -\frac{h}{2}$ 上	0	-1	0	0
$y = \frac{h}{2}$ 上	0	1	0	0

代入公式 (2-15)，得

$$(\sigma_y)_{y=-h/2} = 0, (\tau_{xy})_{y=-h/2} = 0; (\sigma_y)_{y=h/2} = 0, (\tau_{yx})_{y=h/2} = 0$$

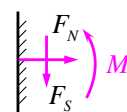
②在次要边界  $x=0$  上，列出三个积分的应力边界条件，代入应力分量主矢主矩

$$\begin{cases} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} dy = 0 = x \text{向面力主矢} \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy = 0 = \text{面力主矩} \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=0} dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left[ -\frac{6F}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) dy \right] = -F = y \text{向面力主矢} \end{cases}$$

满足应力边界条件

③在次要边界上，首先求出固定边面力约束反力，按正方向假设，即面力的主矢、

主矩， $F_N = 0, F_S = -F, M = -Fl$



其次，将应力分量代入应力主矢、主矩表达式，判断是否与面力主矢与主矩等效：



$$\begin{aligned}\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy &= -\int_{-h/2}^{h/2} \frac{12F}{h^3} ly dy = 0 = F_N \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} y dy &= -\int_{-h/2}^{h/2} \frac{12F}{h^3} ly^2 dy = -Fl = M \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=l} dy &= -\int_{-h/2}^{h/2} \frac{6F}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) dy = -F = F_S\end{aligned}$$

满足应力边界条件，因此，它们是该问题的正确解答。

【2-19】试证明，如果体力虽然不是常量，但却是有势的力，即体力分量可以表示为

$f_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, f_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ ，其中  $V$  是势函数，则应力分量亦可用应力函数表示成为

$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + V, \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + V, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$ ，试导出相应的相容方程。

【解答】(1) 将  $f_x, f_y$  带入平衡微分方程 (2-2)

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (a)$$

将 (a) 式变换为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x - V) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (b)$$

为了满足式 (b)，可以取

$$\sigma_x - V = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \sigma_y - V = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

$$\text{即 } \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + V, \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + V, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

(2) 对体力、应力分量  $f_x, f_y, \sigma_x, \sigma_y$  求偏导数，得

$$\begin{cases} \frac{\partial f_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial f_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \end{cases} \quad (c)$$

将 (c) 式代入公式 (2-21) 得平面应力情况下应力函数表示的相容方程

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \mu) \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) \quad (2-21)$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = (1 + \mu) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)$$

整理得：

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = -(1 - \mu) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (d)$$

即平面应力问题中的相容方程为

$$\nabla^4 \Phi = -(1 - \mu) \nabla^2 V$$

将 (c) 式代入公式 (2-22) 或将 (d) 式中的替换为  $\frac{\mu}{1 - \mu}$ ，的平面应变情况下的相容方程：

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = -\frac{1 - 2\mu}{1 - \mu} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (e)$$

即  $\nabla^4 \Phi = -\frac{1 - 2\mu}{1 - \mu} \nabla^2 V$ 。

证毕。

### 第三章 平面问题的直角坐标解答

【3-1】为什么在主要边界（大边界）上必须满足精确的应力边界条件式（2-15），而在小边界上可以应用圣维南原理，用三个积分的应力边界条件（即主矢量、主矩的条件）来代替？如果在主要边界上用三个积分的应力边界条件代替式（2-15），将会发生什么问题？

【解答】弹性力学问题属于数学物理方程中的边值问题，而要使边界条件完全得到满足，往往比较困难。这时，圣维南原理可为简化局部边界上的应力边界条件提供很大的方便。将物体一小部分边界上的面力换成分布不同，但静力等效的面力（主矢、主矩均相同），只影响近处的应力分布，对远处的应力影响可以忽略不计。如果在占边界绝大部分的主要边界上用三个积分的应力边界条件来代替精确的应力边界条件（公式 2-15），就会影响大部分区域的应力分布，会使问题的解答精度不足。

【3-2】如果在某一应力边界问题中，除了一个小边界条件，平衡微分方程和其它的应力边界条件都已满足，试证：在最后的这个小边界上，三个积分的应力边界条件必然是自然满足的，固而不必校核。

【解答】区域内的每一微小单元均满足平衡条件，应力边界条件实质上是边界上微分体的平衡条件，即外力（面力）与内力（应力）的平衡条件。研究对象整体的外力是满足平衡条件的，其它应力边界条件也都满足，那么在最后的这个次要边界上，三个积分的应力边界条件是自然满足的，因而可以不必校核。

【3-3】如果某一应力边界问题中有  $m$  个主要边界和  $n$  个小边界，试问在主要边界和小边界上各应满足什么类型的应力边界条件，各有几个条件？

【解答】在  $m$  个主要边界上，每个边界应有 2 个精确的应力边界条件，公式（2-15），共  $2m$  个；在  $n$  个次要边界上，如果能满足精确应力边界条件，则有  $2n$  个；如果不能满足公式（2-15）的精确应力边界条件，则可以用三个静力等效的积分边界条件来代替 2 个精确应力边界条件，共  $3n$  个。

【3-4】试考察应力函数  $\Phi = ay^3$  在图 3-8 所示的矩形板和坐标系中能解决什么问题(体力不计)？

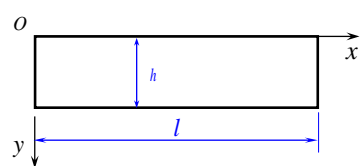


图3-8

【解答】(1)相容条件:

不论系数  $a$  取何值，应力函数  $\Phi = ay^3$  总能满足应力函数表示的相容方程，式(2-25).

(2)求应力分量

当体力不计，将应力函数  $\Phi$  代入公式(2-24)，得

$$\sigma_x = 6ay, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$$

### (3) 考察边界条件

上下边界上应力分量均为零，故上下边界上无面力。

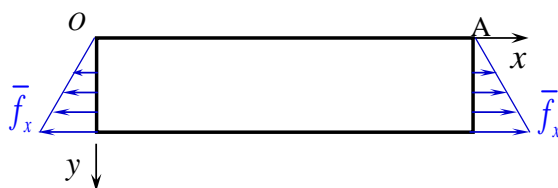
左右边界上：

当  $a > 0$  时，考察  $\sigma_x$  分布情况，注意到  $\tau_{xy} = 0$ ，故  $y$  向无面力

$$\text{左端: } \bar{f}_x(\sigma_x)_{x=0} = 6ay \quad (0 \leq y \leq h) \quad \bar{f}_y = (\tau_{xy})_{x=0} = 0$$

$$\text{右端: } \bar{f}_x(\sigma_x)_{x=l} = 6ay \quad (0 \leq y \leq h) \quad \bar{f}_y = (\tau_{xy})_{x=l} = 0$$

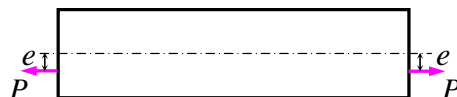
应力分布如图所示，当  $l \gg h$  时应用圣维南原理可以将分布的面力，等效为主矢，主矩



主矢的中心在矩下边界位置。即本题情况下，可解决各种偏心拉伸问题。

偏心距  $e$ ：

因为在 A 点的应力为零。设板宽为  $b$ ，集中荷载  $p$  的偏心距  $e$ ：



$$(\sigma_x)_A = \frac{p}{bh} - \frac{pe}{bh^2/6} = 0 \Rightarrow e = h/6$$

同理可知，当  $a < 0$  时，可以解决偏心压缩问题。

【3-5】取满足相容方程的应力函数为：(1)

$\Phi = ax^2y$ , (2)  $\Phi = bxy^2$ , (3)  $\Phi = cxy^3$ , 试求出应力

分量（不计体力），画出图 3-9 所示弹性体边界上的面力分布，并在小边界上表示出面力的主矢量和主矩。

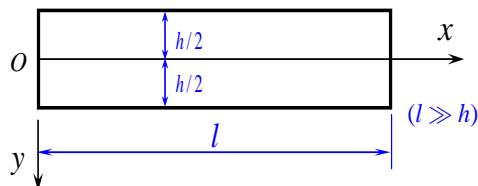


图3-9

【解答】(1) 由应力函数  $\Phi = ax^2y$ ，得应力分量表达式

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = 2ay, \tau_{xy} = \tau_{yx} = -2ax$$

考察边界条件，由公式 (2-15) 
$$\begin{cases} (l\sigma_x + m\tau_{yx})_s = \bar{f}_x(s) \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s = \bar{f}_y(s) \end{cases}$$

①主要边界，上边界  $y = -\frac{h}{2}$  上，面力为

$$\bar{f}_x(y = -\frac{h}{2}) = 2ax \quad \bar{f}_y(y = -\frac{h}{2}) = ah$$

②主要边界，下边界  $y = \frac{h}{2}$ ，面力为

$$\bar{f}_x(y = \frac{h}{2}) = -2ax, \quad \bar{f}_y(y = \frac{h}{2}) = ah$$

③次要边界，左边界  $x=0$  上，面力的主矢，主矩为

$$x \text{ 向主矢: } F_x = -\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} dy = 0$$

$$y \text{ 向主矢: } F_y = -\int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=0} dy = 0$$

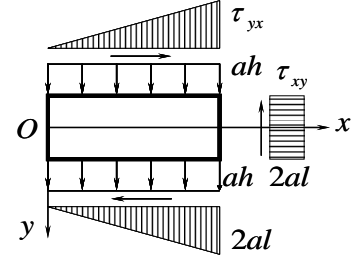
$$\text{主矩: } M = -\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy = 0$$

次要边界，右边界  $x=l$  上，面力的主矢，主矩为

$$x \text{ 向主矢: } F'_x = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy = 0$$

$$y \text{ 向主矢: } F'_y = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=l} dy = \int_{-h/2}^{h/2} (-2al) dy = -2alh$$

$$\text{主矩: } M = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} y dy = 0$$



弹性体边界上面力分布及次要边界上面力的主矢，主矩如图所示

$$(2) \Phi = bxy^2$$

将应力函数代入公式 (2-24)，得应力分量表达式

$$\sigma_x = 2bx, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -2by$$

考察应力边界条件，主要边界,由公式 (2-15) 得

$$\text{在 } y = -\frac{h}{2} \text{ 主要边界, 上边界上, 面力为 } \bar{f}_x\left(y = -\frac{h}{2}\right) = bh, \bar{f}_y\left(y = -\frac{h}{2}\right) = 0$$

$$\text{在 } y = \frac{h}{2}, \text{ 下边界上, 面力为 } \bar{f}_x\left(y = \frac{h}{2}\right) = -bh, \bar{f}_y\left(y = \frac{h}{2}\right) = 0$$

在次要边界上，分布面力可按(2-15)计算，面力的主矢、主矩可通过三个积分边界条件求得：

$$\text{在左边界 } x=0, \text{ 面力分布为 } \bar{f}_x(x=0) = 0, \bar{f}_y(x=0) = 2by$$

面力的主矢、主矩为

$$x \text{ 向主矢: } F_x = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=0} dy = 0$$

$$y \text{ 向主矢: } F_y = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=0} dy = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (-2by)_{x=0} dy = 0$$

$$\text{主矩: } M = -\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy = 0$$

在右边界  $x=l$  上，面力分布为

$$\bar{f}_x(x=l) = 2bl, \bar{f}_y(x=l) = -2by$$

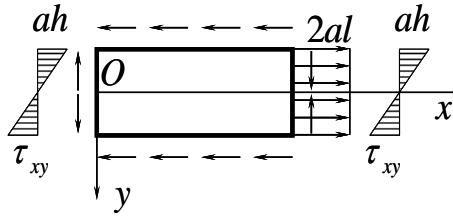
面力的主矢、主矩为

$$x \text{ 向主矢: } F'_x = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy = \int_{-h/2}^{h/2} 2bldy = 2blh$$

$$y \text{ 向主矢: } F'_y = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=l} dy = \int_{-h/2}^{h/2} (-2by) dy = 0$$

$$\text{主矩: } M' = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} y dy = \int_{-h/2}^{h/2} 2bly dy = 0$$

弹性体边界上的面力分布及在次要上面力的主矢和主矩如图所示



$$(3) \Phi = cxy^3$$

将应力函数代入公式 (2-24), 得应力分量表达式

$$\sigma_x = 6cxy, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = -3cy^2$$

考察应力边界条件, 在主要边界上应精确满足式 (2-15)

① 上边界  $y = -\frac{h}{2}$  上, 面力为

$$\bar{f}_x\left(y = -\frac{h}{2}\right) = \frac{3}{4}ch^2, \bar{f}_y\left(y = -\frac{h}{2}\right) = 0$$

② 下边界  $y = \frac{h}{2}$  上, 面力为

$$\bar{f}_x\left(y = \frac{h}{2}\right) = -\frac{3}{4}ch^2, \bar{f}_y\left(y = \frac{h}{2}\right) = 0$$

次要边界上, 分布面力可按 (2-15) 计算, 面力的主矢、主矩可通过三个积分边界求得:

③ 左边界  $x=0$  上, 面力分布为

$$\bar{f}_x(x=0) = 0, \bar{f}_y(x=0) = 3cy^2$$

面力的主矢、主矩为

$$x \text{ 向主矢: } F_x = -\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} dy = 0$$

$$y \text{ 向主矢: } F_y = -\int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=0} dy = -\int_{-h/2}^{h/2} (-3cy^2) dy = \frac{1}{4}ch^3$$

$$\text{主矩: } M = -\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy = 0$$

④右边界  $x=l$  上, 面力分布为

$$\bar{f}_x(x=l) = 6cly, \bar{f}_y(x=l) = -3cy^2$$

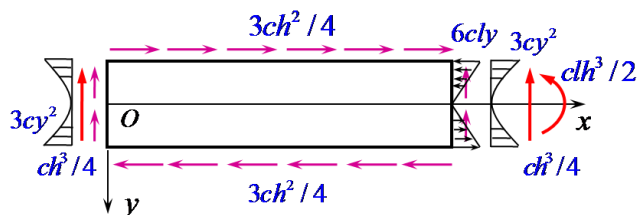
面力的主矢、主矩为

$$x \text{ 向主矢 } F'_x = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy = \int_{-h/2}^{h/2} 6cly dy = 0$$

$$y \text{ 向主矢: } F'_y = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_y)_{x=l} dy = \int_{-h/2}^{h/2} (-3cy^2) dy = -\frac{1}{4}ch^3$$

$$\text{主矩: } M' = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} y dy = \int_{-h/2}^{h/2} 6cly^2 dy = \frac{1}{2}clh^3$$

弹性体边界上的面力分布及在次要边界上面力的主矢和主矩, 如图所示



【3-6】试考察应力函数  $\Phi = \frac{F}{2h^3} xy(3h^2 - 4y^2)$ ,

能满足相容方程, 并求出应力分量 (不计体力), 画出图 3-9 所示矩形体边界上的面力分布 (在小边界上画出面力的主矢量和主矩), 指出该应力函数能解决的问题。

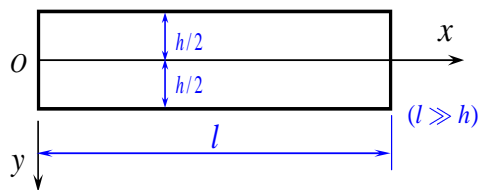


图3-9

【解答】(1) 将应力函数代入相容方程 (2-25)

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0, \text{ 显然满足}$$

(2) 将  $\Phi$  代入式 (2-24), 得应力分量表达式

$$\sigma_x = -\frac{12Fxy}{h^3}, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{3F}{2h} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$$

(3) 由边界形状及应力分量反推边界上的面力:

①在主要边界上 (上下边界) 上,  $y = \pm \frac{h}{2}$ , 应精确满足应力边界条件式 (2-15), 应力

$$(\sigma_y)_{y=\pm h/2} = 0, (\tau_{yx})_{y=\pm h/2} = 0$$

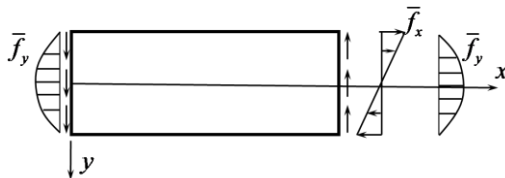
因此, 在主要边界  $y = \pm \frac{h}{2}$  上, 无任何面力, 即  $\bar{f}_x\left(y = \pm \frac{h}{2}\right) = 0, \bar{f}_y\left(y = \pm \frac{h}{2}\right) = 0$

②在  $x=0, x=l$  的次要边界上, 面力分别为:

$$x=0: \bar{f}_x = 0, \bar{f}_y = \frac{3F}{2h} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$$

$$x=l: \bar{f}_x = -\frac{12Fly}{h^3}, \bar{f}_y = -\frac{3F}{2h} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$$

因此，各边界上的面力分布如图所示：



③在  $x=0$ ,  $x=l$  的次要边界上，面力可写成主矢、主矩形式：

$x=0$  上

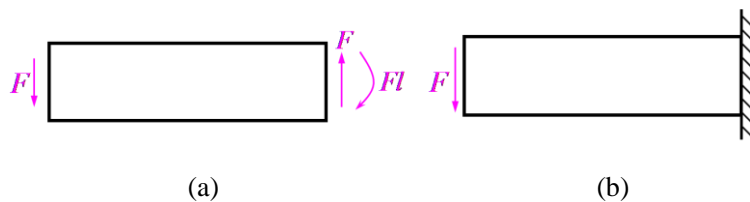
$x=l$  上

$$x\text{向主矢: } F_{N_1} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x dy = 0, \quad F_{N_2} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x dy = 0$$

$$y\text{向主矢: } F_{S_1} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_y dy = F, \quad F_{S_2} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_y dy = -F$$

$$\text{主矩: } M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x y dy = 0, \quad M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x y dy = -Fl$$

因此，可以画出主要边界上的面力，和次要边界上面力的主矢与主矩，如图：



因此，该应力函数可解决悬臂梁在自由端受集中力  $F$  作用的问题。



【3-7】试证  $\Phi = \frac{qx^2}{4}(-4\frac{y^3}{h^3} + 3\frac{y}{h} - 1) + \frac{qy^2}{10}(2\frac{y^3}{h^3} - \frac{y}{h})$  能满足相容方程，并考察它在

图 3-9 所示矩形板和坐标系中能解决什么问题（设矩形板的长度为  $l$ ，深度为  $h$ ，体力不计）。

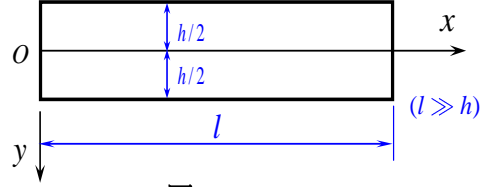


图3-9

【解答】(1)将应力函数  $\Phi$  代入式 (2-25)

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \frac{24qy}{h^3},$$

$$2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 2 \times \frac{-12qy}{h^3} = \frac{-24qy}{h^3}$$

代入 (2-25)，可知应力函数  $\Phi$  满足相容方程。

(2) 将  $\Phi$  代入公式 (2-24)，求应力分量表达式:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x x = -\frac{6qx^2 y}{h^3} + \frac{4qy^3}{h^3} - \frac{3qy}{5h}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y y = \frac{q}{2}(-\frac{4y^3}{h^3} + \frac{3y}{h} - 1)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{6qx}{h^3}(\frac{h^2}{4} - y^2)$$

(3)考察边界条件，由应力分量及边界形状反推面力:

①在主要边界  $y = -\frac{h}{2}$  (上面)，应精确满足应力边界条件 (2-15)

$$\bar{f}_x \left( y = -\frac{h}{2} \right) = -(\tau_{yx})_{y=-h/2} = 0, \quad \bar{f}_y \left( y = -\frac{h}{2} \right) = -(\sigma_y)_{y=-h/2} = q$$

在主要边界  $y = \frac{h}{2}$  (下面)，也应该满足 (2-15)

$$\bar{f}_x (y = h/2) = (\tau_{yx})_{y=h/2} = 0, \quad \bar{f}_y (y = h/2) = (\sigma_y)_{y=h/2} = 0$$

在次要边界  $x=0$  上，分布面力为

$$\bar{f}_x (x=0) = -(\sigma_x)_{x=0} = \frac{3qy}{5h} - \frac{4qy^3}{h^3}, \quad \bar{f}_y (x=0) = -(\tau_{xy})_{x=0} = 0$$

应用圣维南原理，可写成三个积分的应力边界条件:

$$F_N = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{3qy}{5h} - \frac{4qy^3}{h^3} \right) dy = 0$$

$$F_S = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_y dy = 0$$

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x y dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{3qy}{5h} - \frac{4qy^3}{h^3} \right) y dy = 0$$

④在次要边界  $x=l$  上, 分布面力为

$$\bar{f}_x(x=l) = (\sigma_x)_{x=l} = -\frac{6ql^2 y}{h^3} + \frac{4qy^3}{h^3} - \frac{3qy}{5h}$$

$$\bar{f}_y(x=l) = (\tau_{xy})_{x=l} = -\frac{6ql}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

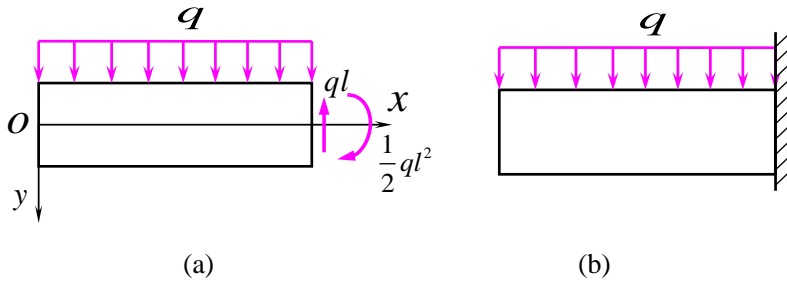
应用圣维南原理, 可写成三个积分的应力边界条件:

$$F_N' = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x(x=l) dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left( -\frac{6ql^2 y}{h^3} + \frac{4qy^3}{h^3} - \frac{3qy}{5h} \right) dy = 0$$

$$F_S' = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_y(x=l) dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left[ -\frac{6ql}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right] dy = -ql$$

$$M' = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x(x=l) y dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left( -\frac{6ql^2 y}{h^3} + \frac{4qy^3}{h^3} - \frac{3qy}{5h} \right) y dy = -\frac{1}{2} ql^2$$

综上, 可画出主要边界上的面力分布和次要边界上面力的主矢与主矩, 如图



因此, 此应力函数能解决悬臂梁在上边界受向下均布荷载  $q$  的问题。

**【3-8】** 设有矩形截面的长竖柱, 密度为  $\rho$ , 在一边侧面上受均布剪力  $q$  (图 3-10), 试求应力分量。

**【解答】** 采用半逆法求解。

由材料力学解答假设应力分量的函数形式。

(1) 假定应力分量的函数形式。

根据材料力学, 弯曲应力  $\sigma_y$  主要与截面的弯矩有关, 剪应力  $\tau_{xy}$  主要与

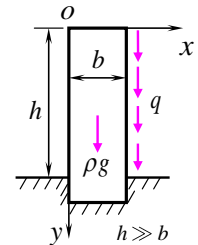


图3-10

截面的剪力有关, 而挤压应力  $\sigma_x$  主要与横向荷载有关, 本题横向荷载为零, 则  $\sigma_x = 0$

(2)推求应力函数的形式

将  $\sigma_x = 0$ ，体力  $f_x = 0, f_y = \rho g$ ，代入公式 (2-24) 有

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x x = 0$$

对  $y$  积分，得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = f(x) \quad (a)$$

$$\Phi = yf(x) + f_1(x) \quad (b)$$

其中  $f(x), f_1(x)$  都是  $x$  的待定函数。

(3) 由相容方程求解应力函数。

将 (b) 式代入相容方程 (2-25)，得

$$y \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + \frac{d^4 f_1(x)}{dx^4} = 0 \quad (c)$$

在区域内应力函数必须满足相容方程，(c) 式为  $y$  的一次方程，相容方程要求它有无数个根（全竖柱内的  $y$  值都应满足它），可见其系数与自由项都必须为零，即

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} = 0, \frac{d^4 f_1(x)}{dx^4} = 0$$

两个方程要求

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx, f_1(x) = Dx^3 + Ex^2 \quad (d)$$

$f(x)$  中的常数项， $f_1(x)$  中的常数项和一次项已被略去，因为这三项在  $\Phi$  的表达式中成为  $y$  的一次项及常数项，不影响应力分量。将 (d) 式代入 (b) 式，得应力函数

$$\Phi = y(Ax^3 + Bx^2 + Cx) + (Dx^3 + Ex^2) \quad (e)$$

(4) 由应力函数求应力分量

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x x = 0 \quad (f)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y y = 6Axy + 2By + 6Dx + 2E - \rho gy \quad (g)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -3Ax^2 - 2Bx - C \quad (h)$$

(5)考察边界条件

利用边界条件确定待定系数 A、B、C、D、E。

主要边界  $x=0$  上 (左):

$$(\sigma_x)_{x=0} = 0, (\tau_{xy})_{x=0} = 0$$

将 (f), (h) 代入

$$(\sigma_x)_{x=0} = 0, \text{ 自然满足}$$

$$(\tau_{xy})_{x=0} = -C = 0 \quad (i)$$

主要边界  $x=b$  上,

$$(\sigma_x)_{x=b} = 0, \text{ 自然满足}$$

$(\tau_{xy})_{x=b} = q$ , 将 (h) 式代入, 得

$$(\tau_{xy})_{x=b} = -3Ab^2 - 2Bb - C = q \quad (j)$$

在次要边界  $y=0$  上, 应用圣维南原理, 写出三个积分的应力边界条件:

$$\int_0^b (\sigma_y)_{y=0} dx = \int_0^b (6Dx + 2E) dx = 3Db^2 + 2Eb = 0 \quad (k)$$

$$\int_0^b (\sigma_y)_{y=0} x dx = \int_0^b (6Dx + 2E) x dx = 2Db^3 + Eb^2 = 0 \quad (l)$$

$$\int_0^b (\tau_{yx})_{y=0} dx = \int_0^b (-3Ax^2 - 2Bx - C) dx = -Ab^3 - Bb^2 - Cb = 0 \quad (m)$$

由式 (i), (j), (k), (l), (m) 联立求得

$$A = -\frac{q}{b^2}, \quad B = \frac{q}{b}, \quad C = D = E = 0$$

代入公式 (g), (h) 得应力分量

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = \frac{2qx}{b} \left( 1 - 3\frac{x}{b} \right) - \rho gy, \quad \tau_{xy} = \frac{q}{b} x \left( \frac{3}{b} x - 2 \right)$$

【3-9】图 3-11 所示的墙，高度为  $h$ ，宽度为  $b$ ， $h \gg b$ ，在两侧面上受到均布剪力  $q$  的作用，试应用应力函数  $\Phi = Axy + Bx^3y$  求解应力分量。

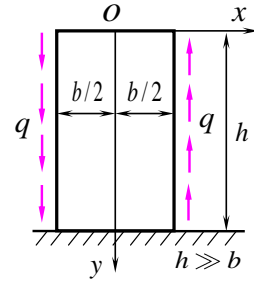


图3-11

【解答】按半逆解法求解。

(1)将应力函数代入相容方程 (2-25) 显然满足。

(2)由公式 (2-24) 求应力分量表达式，体力为零，有

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 6Bxy, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -A - 3Bx^2$$

(3)考察边界条件：

在主要边界  $x = -b/2$  上，精确满足公式 (2-15)

$$(\sigma_x)_{x=-b/2} = 0, (\tau_{xy})_{x=-b/2} = -q$$

第一式自然满足，第二式为

$$-A - \frac{3}{4}Bb^2 = -q \quad (a)$$

②在主要边界  $x = b/2$  上，精确满足式(2-15)

$$(\sigma_x)_{x=b/2} = 0, (\tau_{xy})_{x=b/2} = -q$$

第一式自然满足，第二式为

$$-A - \frac{3}{4}Bb^2 = -q \quad (b)$$

③在次要边界  $y=0$  上，可用圣维南原理，写出三个积分的应力边界条件：

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\sigma_y)_{y=0} dx = 0 \quad \text{满足}$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\sigma_y)_{y=0} x dx = 0 \quad \text{满足}$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\tau_{yx})_{y=0} dx = \int_{-b/2}^{b/2} (-A - 3Bx^2) dx = -Ab - \frac{1}{4}Bb^3 = 0 \quad (c)$$

联立 (a) (c) 得系数

$$A = -\frac{q}{2}, B = \frac{2q}{b^2}$$

代入应力分量表达式，得

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = \frac{12q}{b^2}xy, \tau_{xy} = \frac{q}{2} \left( 1 - 12\frac{x^2}{b^2} \right)$$

【3-10】设单位厚度的悬臂梁在左端受到集中力和力矩作用，体力可以不计， $l \gg h$  (图 3-12)，试用应力函数  $\Phi = Axy + By^2 + Cy^3 + Dxy^3$  求解应力分量。

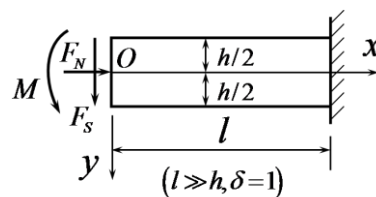


图3-12

【解答】采用半逆解法求解

(1) 将应力函数代入相容方程 (2-25)，显然满足

(2) 由应力函数求应力分量，代入公式(2-24)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = 2B + 6By + 6Dxy \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = -(A + 3Dy^2) \end{array} \right. \quad (a)$$

(3) 考察边界条件

① 主要边界  $y = \pm h/2$  上，应精确满足应力边界条件

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_{y=\pm h/2} &= 0, \quad \text{满足} \\ (\tau_{xy})_{y=\pm h/2} &= 0, \quad \text{得 } A + \frac{3}{4}Dh^2 = 0 \end{aligned} \quad (b)$$

② 在次要边界  $x=0$  上，应用圣维南原理，写出三个积分的应力边界条件

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} dy &= -F_N \Rightarrow \int_{-h/2}^{h/2} (2B + 6Cy) dy = -F_N \Rightarrow B = -\frac{F_N}{2h} \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy &= -M \Rightarrow \int_{-h/2}^{h/2} (2B + 6Cy) y dy = -M \Rightarrow C = -\frac{2M}{h^3} \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=0} dy &= -F_s \Rightarrow \int_{-h/2}^{h/2} [-(A + 3Dy^2)] dy = -F_s \Rightarrow Ah + \frac{1}{4}Dh^3 = F_s \end{aligned} \quad (c)$$

联立方程 (b) (c) 得

$$A = \frac{3F_s}{2h}, D = -\frac{2F_s}{h^3}$$

最后一个次要边界 ( $x=l$ ) 上，在平衡微分方程和上述边界条件均已满足的条件下是必然满足的，故不必在校核。

将系数 A、B、C、D 代入公式 (a)，得应力分量

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = -\frac{F_N}{h} - \frac{12M}{h^3}y - \frac{12F_s}{h^3}xy \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\frac{3F_s}{2h} \left( 1 - 4\frac{y^2}{h^2} \right) \end{array} \right.$$

【3-11】设图 3-13 中的三角形悬臂梁只受重力作用，而梁的

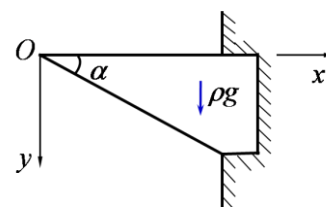


图3-13

密度为  $\rho$ ，试用纯三次式的应力函数求解。

【解答】采用半逆解法求解

(1) 检验应力函数是否满足相容方程 (2-25)

设应力函数  $\Phi = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$ ，不论上式中的系数如何取值，纯三次式的应力函数总能满足相容方程 (2-25)

(2) 由式 (2-24) 求应力分量

由体力分量  $f_x = 0, f_y = \rho g$ ，将应力函数代入公式 (2-24) 得应力分量：

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x = 2Cx + 6Dy \quad (a)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y = 6Ax + 2By - \rho gy \quad (b)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -2Bx - 2Cy \quad (c)$$

(3) 考察边界条件：由应力边界条件确定待定系数。

①对于主要边界  $y = 0$ ，其应力边界条件为：

$$(\sigma_y)_{y=0} = 0, (\tau_{yx})_{y=0} = 0 \quad (d)$$

将式 (d) 代入式 (b), (c)，可得

$$A = 0, B = 0 \quad (e)$$

②对于主要边界  $y = x \tan \alpha$  (斜面上)，应力边界条件：

在斜面上没有面力作用，即  $\bar{f}_x = \bar{f}_y = 0$ ，该斜面外法线方向余弦为， $l = -\sin \alpha$ ，

$m = \cos \alpha$ 。由公式 (2-15)，得应力边界条件

$$\left. \begin{aligned} -\sin \alpha \cdot (\sigma_x)_{y=x \tan \alpha} + \cos \alpha \cdot (\tau_{yx})_{y=x \tan \alpha} &= 0 \\ -\sin \alpha \cdot (\tau_{xy})_{y=x \tan \alpha} + \cos \alpha \cdot (\sigma_y)_{y=x \tan \alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

将式 (a)、(b)、(c)、(e) 代入式 (f)，可解得

$$C = \frac{\rho g}{2} \cot \alpha, D = -\frac{\rho g}{3} \cot^2 \alpha \quad (g)$$

将式 (e)、(g) 代入公式 (a)、(b)、(c)，得应力分量表达式：

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \rho g x \cot \alpha - 2\rho g y \cot^2 \alpha \\ \sigma_y &= -\rho g y \\ \tau_{xy} &= -\rho g y \cot \alpha \end{aligned} \right.$$

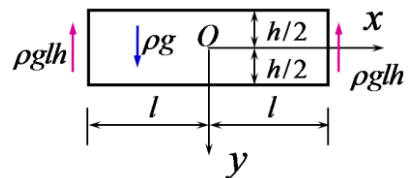
【分析】本题题目已经给定应力函数的函数形式，事实上，也可通过量纲分析法确定应

力函数的形式。

按量纲分析法确定应力函数的形式：三角形悬臂梁内任何一点的应力与  $\alpha$ ,  $x$ ,  $y$  和  $\rho g$  有关。由于应力分量的量纲是  $L^{-1}MT^{-2}$ ，而  $x, y$  的量纲是  $L$ ， $\rho g$  的量纲是  $L^{-1}MT^{-2}$ ，又是量纲一的数量，因此，应力分量的表达式只可能是  $x$  和  $y$  的纯一项式，即应力分量的表达式只可能是  $A\rho gx, B\rho gy$  这两种项的结合，其中  $A, B$  是量纲一的量，只与  $\alpha$  有关。应力函数又比应力分量的长度量纲高二次，即为  $x$  和  $y$  的纯三次式，故可假设应力函数的形式为  $\Phi = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$ 。

【3-12】设图 3-5 中简支梁只受重力作用，而梁的密度为  $\rho$ ，试用 § 3-4 中的应力函数 (e) 求解应力分量，并画出截面上的应力分布图。

【分析】与 § 3-4 节例题相比，本题多了体力分量  $f_x = 0, f_y = \rho g$ 。去除了上边界的面力。依据 § 3-4，应力分量的函数形式是由材料力学解答假设的。



【解答】按半逆解法求解。

(1) 由 § 3-4 可知应力函数的函数形式为

$$\Phi = \frac{x^2}{2}(Ay^3 + By^2 + Cy + D) + x(Ey^3 + Fy^2 + Gy) - \frac{A}{10}y^5 - \frac{B}{6}y^4 + Hy^3 + Ky^2, \text{ 由 § 3-4 可}$$

知， $\Phi$  必然满足相容方程 (2-25)。

(2) 应力分量的表达式：

$$\sigma_x = \frac{x^2}{2}(6Ay + 2B) + x(6Ey + 2F) - 2Ay^3 - 2By^2 + 6Hy + 2K \quad (a)$$

$$\sigma_y = Ay^3 + By^2 + Cy + D - \rho gy \quad (b)$$

$$\tau_{xy} = -x(3Ay^2 + 2By + C) - (3Ey^2 + 2Fy + G) \quad (c)$$

【注】 $\sigma_y$  项多了  $-\rho gy$

这些应力分量是满足平衡微分方程和相容方程的。因此，如果能够适当选择常数  $A, B, \dots, K$ ，使所有的边界条件都被满足，则应力分量式 (a)、(b)、(c) 就是正确的解答。

(3) 考虑对称性

因为  $yz$  面是梁和荷载的对称面，所以应力分布应当对称于  $yz$  面。这样  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  是  $x$  的



偶函数，而  $\tau_{xy}$  是  $x$  的奇函数，于是由式 (a) 和式 (c) 可见

$$E = F = G = 0 \quad (d)$$

(4) 考察边界条件:

①在主要边界  $y = \pm h/2$  上，应精确满足应力边界条件 (2-15)，

$$(\sigma_y)_{y=\pm h/2} = 0, (\tau_{yx})_{y=\pm h/2} = 0$$

将应力分量式 (b)、(c) 代入，并注意到  $E = F = G = 0$ ，可得：

$$\begin{cases} \frac{h^3}{8}A + \frac{h^2}{4}B + \frac{h}{2}C + D - \frac{\rho g}{2}h = 0 \\ -\frac{h^3}{8}A + \frac{h^2}{4}B - \frac{h}{2}C + D + \frac{\rho g}{2}h = 0 \\ -x(\frac{3}{4}Ah^2 + hB + C) = 0 \\ -x(\frac{3}{4}Ah^2 - hB + C) = 0 \end{cases}$$

联立此四个方程，得：

$$A = -\frac{2\rho g}{h^2}, B = 0, C = \frac{3}{2}\rho g, D = 0 \quad (e)$$

将式 (d)、(e) 代入式 (a)、(b)、(c)

$$\sigma_x = -\frac{6\rho g}{h^2}x^2y + \frac{4\rho g}{h^2}y^3 + 6Hy + 2K \quad (f)$$

$$\sigma_y = -\frac{2\rho g}{h^2}y^3 + \frac{\rho g}{2}y \quad (g)$$

$$\tau_{xy} = \frac{6\rho g}{h^2}xy^2 - \frac{3\rho g}{2}x \quad (h)$$

②考察次要边界条件

由于问题的对称性，只需考虑其中的一边，如右边。右边界  $x = l$  上， $\bar{f}_x = 0$ ，不论  $y$  取任何值 ( $-h/2 \leq y \leq h/2$ )，都有  $\sigma_x = 0$ 。由 (f) 式可见，这是不可能的，除非  $\rho, H, K$  均为零。因此，只能用应力  $\sigma_x$  的主矢、主矩为零，即

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy = 0 \quad (i)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} y dy = 0 \quad (j)$$

将 (f) 式代入式 (i) 得

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left( -\frac{6\rho g}{h^2}x^2y + \frac{4\rho g}{h^2}y^3 + 6Hy + 2K \right) dy = 0$$

积分后得  $K = 0$  (k)

将式 (f) 代入式 (i), 得

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left( -\frac{6\rho g}{h^2} l^2 y + \frac{4\rho g}{h^2} y^3 + 6Hy + 2K \right) y dy = 0$$

积分后得

$$H = \rho g \left( \frac{l^2}{h^2} - \frac{1}{10} \right) \quad (1)$$

将 (k)、(1) 代入式 (f), 得

$$\sigma_x = -\frac{6\rho g}{h^2} x^2 y + \frac{4\rho g}{h^2} y^3 + 6\rho g \left( \frac{l^2}{h^2} - \frac{1}{10} \right) y \quad (m)$$

考察右边界上切应力分量  $\tau_{xy}$  的边界条件:

右边界上  $\bar{f}_y = -\rho g l h$ , 则  $\tau_{xy}$  的主矢为

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=l} dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{6\rho g}{h^2} xy^2 - \frac{3\rho g}{2} x \right) dy = -\rho g l h = \bar{f}_y$$

可知满足应力边界条件。

将式 (g), (h), (m) 略加整理, 得应力分量的最后解答:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{6\rho g}{h^2} x^2 y + \frac{4\rho g}{h^2} y^3 + 6\rho g \left( \frac{l^2}{h^2} - \frac{1}{10} \right) y \\ \sigma_y = -\frac{2\rho g}{h^2} y^3 + \frac{\rho g}{2} y \\ \tau_{xy} = \frac{6\rho g}{h^2} xy^2 - \frac{3\rho g}{2} x \end{cases} \quad (n)$$

(5) 应力分量及应力分布图

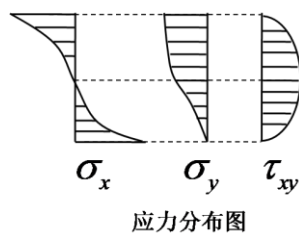
梁截面的宽度取为 1 个单位, 则惯性矩  $I = \frac{h^3}{12}$ , 静矩是  $S = \frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2}$ 。

根据材料力学截面法可求得截面的内力, 可知梁横截面上的弯矩方程和剪力方程分别为

$$M(x) = \rho g h \frac{l^2 - x^2}{2}, F_s(x) = -\rho g h x$$

则式 (n) 可写成:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{M(x)}{I} y + \rho g y \left( \frac{4y^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right) \\ \sigma_y = \frac{\rho g}{2} y \left( 1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{F_s(x) S}{bI} \end{cases}$$



【分析】比较弹性力学解答与材料力学解答，可知，只有切应力  $\tau_{xy}$  完全相同，正应力  $\sigma_x$  中的第一项与材料力学结果相同，第二项为弹性力学提出的修正项； $\sigma_y$  表示纵向纤维间的挤压应力，而材料力学假设为零。对于  $l \gg h$  的浅梁，修正项很小，可忽略不计。

【3-13】图 3-14 所示的悬臂梁，长度为  $l$ ，高度为  $h$ ， $l \gg h$ ，在上边界受均布荷载  $q$ ，试检验应力函数  $\Phi = Ay^5 + Bx^2y^3 + Cy^3 + Dx^2 + Ex^2y$  能否成为此问题的解？如可以，试求出应力分量。

【解答】用半逆解法求解。

(1) 相容条件：

将应力函数  $\Phi$  代入相容方程式 (2-25)，得

$$120Ay + 24By = 0$$

要使  $\Phi$  满足相容方程，应使

$$A = -\frac{1}{5}B \quad (a)$$

(2) 求应力分量，代入式 (2-24)

$$\begin{cases} \sigma_x = 20Ay^3 + 6Bx^2y + 6Cy = 20Ay^3 - 30Ax^2y + 6Cy \\ \sigma_y = 2By^3 + 2D + 2Ey = -10Ay^3 + 2D + 2Ey \\ \tau_{xy} = -6Bxy^2 - 2Ex = 30Axy^2 - 2Ex \end{cases} \quad (b)$$

(3) 考察边界条件

①在主要边界  $y = \pm h/2$  上，应精确到满足应力边界条件

$$(\sigma_y)_{y=h/2} = 0, \text{ 即 } -\frac{10}{8}Ah^3 + 2D + Eh = 0 \quad (c)$$

$$(\sigma_y)_{y=-h/2} = -q, \text{ 即 } \frac{10}{8}Ah^3 + 2D - Eh = -q \quad (d)$$

$$(\tau_{yx})_{y=\pm h/2} = 0, \text{ 即 } \frac{30}{4}Axh^2 - 2Ex = 0 \quad (e)$$

联立式 (a)、(c)、(d)、(e)，可得：

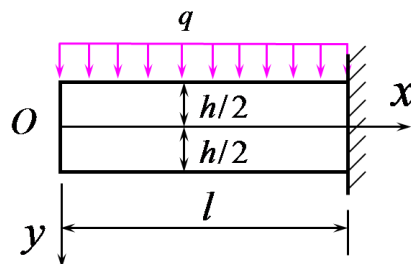


图3-14

$$A = \frac{q}{5h^3}, D = -\frac{q}{4}, E = \frac{3q}{4h}, B = -\frac{q}{h^3} \quad (f)$$

②在次要边界  $x=0$  上，主矢和主矩都为零，应用圣维南原理，写出三个积分的应力边界条件：

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} dy = 0 \quad \text{满足条件}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy = \int_{-h/2}^{h/2} (20Ay^3 + 6Cy) y dy = 0 \Rightarrow \frac{Ah^5}{2} + Ch^3 = 0 \quad (g)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=0} dy = 0 \quad \text{满足}$$

将 A 的值带入 (g)，得

$$C = -\frac{q}{10h} \quad (h)$$

将各系数代入应力分量表达式 (b)，得

$$\begin{cases} \sigma_x = q \frac{y}{h} \left( 4 \frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5} - 6 \frac{x^2}{h^2} \right) \\ \sigma_y = -\frac{q}{2} \left( 1 - 3 \frac{y}{h} + 4 \frac{y^3}{h^3} \right) \\ \tau_{xy} = -\frac{3q}{2} \frac{x}{h} \left( 1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right) \end{cases}$$

【3-14】矩形截面的柱体受到顶部的集中力  $\sqrt{2}F$  和力矩  $M$  的作用（图 3-15），不计体力，试用应力函数  $\Phi = Ay^2 + Bxy + Cxy^3 + Dy^3$  求解其应力分量。

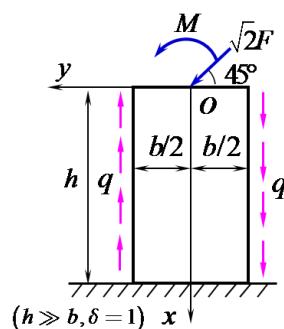


图3-15

【解答】采用半逆解法求解。

(1) 相容条件：

将应力函数代入相容方程(2-25)，显然满足。

(2) 求应力分量：将  $\Phi$  代入 (2-24)

$$\begin{cases} \sigma_x = 2A + 6Cxy + 6Dy \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -B - 3Cy^2 \end{cases} \quad (a)$$

(3) 考察边界条件。

①在主要边界  $y = \pm b/2$  上，应精确满足应力边界条件

$$(\sigma_y)_{y=\pm b/2} = 0 \quad \text{满足}$$

$$(\tau_{xy})_{y=\pm b/2} = -q, \Rightarrow B + \frac{3}{4}Cb^2 = q \quad (\text{b})$$

②在次要边界  $x=0$  上, 可用圣维南原理, 写出三个积分应力边界条件

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\sigma_x)_{x=0} dy = -F \quad (2Ay + 3Dy^2) \Big|_{-b/2}^{b/2} = -F \quad (\text{c})$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy = -M \quad \left( \frac{1}{2}Ay^2 + 2Dy^3 \right) \Big|_{-b/2}^{b/2} = -M \quad (\text{d})$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\tau_{xy})_{x=0} dy = -F \quad (-By - Cy^3) \Big|_{-b/2}^{b/2} = -F \quad (\text{e})$$

联立 (b)、(c)、(d)、(e) 式得

$$A = -\frac{F}{2b}, \quad B = -\frac{1}{2}\left(q - \frac{3F}{b}\right), \quad C = \frac{2}{b^2}\left(q - \frac{F}{b}\right), \quad D = -\frac{2M}{b^3} \quad (\text{f})$$

将各系数 (f) 代入式 (a), 得应力分量解答

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{F}{b} + \frac{12}{b^2}\left(q - \frac{F}{b}\right)xy - \frac{12M}{b^3}y \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \frac{1}{2}\left(q - \frac{3F}{b}\right) - \frac{6}{b^2}\left(q - \frac{F}{b}\right)y^2 \end{cases}$$

【分析】本题题目中原教材给出的坐标轴有误, 无法计算。 $x, y$  坐标互换后可以计算, 但计算结果与题目提示解答几乎完全不同, 又将  $y$  轴调为水平向左为正方向, 才得到提示结果。可见, 在求解问题时, 坐标轴的方向及原点的位置与解答关系密切, 坐标轴不同可得到完全不同的结果。

【3-15】挡水墙的密度为  $\rho_1$ , 厚度为  $b$ (图 3-16), 水的密度为  $\rho_2$ , 试求应力分量。

【解答】(1) 假设应力分量的函数形式。因为在  $y = -b/2$  边界上,  $\sigma_y = 0$ ;  $y = b/2$  边界上,  $\sigma_y = -\rho_2 gx$ , 所以可以假设在区域内  $\sigma_y$  为

$$\sigma_y = xf(y)$$

(2) 推求应力函数的形式。由  $\sigma_y$  推求  $\Phi$  的形式

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = xf(y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{x^2}{2}f(y) + f_1(y)$$

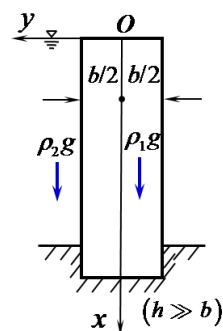


图3-16

$$\Phi = \frac{x^3}{6} f(y) + x f_1(y) + f_2(y)$$

(3) 由相容方程求应力函数。将  $\Phi$  代入  $\nabla^4 \Phi = 0$ ，得

$$\frac{x^3}{6} \frac{d^4 f}{dy^4} + x \frac{d^4 f_1}{dy^4} + \frac{d^4 f_2}{dy^4} + 2x \frac{d^2 f}{dy^2} = 0$$

要使上式在任意的  $x$  处都成立，必须

$$\frac{d^4 f}{dy^4} = 0 \Rightarrow f(y) = Ay^3 + By^2 + Cy + D;$$

$$\frac{d^4 f_1}{dy^4} + 2 \frac{d^2 f}{dy^2} = 0 \Rightarrow f_1(y) = -\frac{A}{10} y^5 - \frac{B}{6} y^4 + Gy^3 + Hy^2 + Iy;$$

$$\frac{d^4 f_2}{dy^4} = 0 \Rightarrow f_2(y) = Ey^3 + Fy^2$$

代入  $\Phi$  即得应力函数的解答，其中已经略去了与应力无关的一次项，得应力函数为：

$$\Phi = \frac{x^3}{6} (Ay^3 + By^2 + Cy + D) + x \left( -\frac{Ay^5}{10} - \frac{By^4}{6} + Gy^3 + Hy^2 + Iy \right) + (Ey^3 + Fy^2)$$

(4) 由应力函数求应力分量，将  $\Phi$  代入公式 (2-24)，注意体力  $f_x = \rho_1 g, f_y = 0$ ，求得应力分量表达式

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x x = x^3 \left( Ay + \frac{B}{3} \right) + x \left( -2Ay^3 - 2By^2 + 6Cy + 2H \right) + \\ &\quad (6Ey + 2F) - \rho_1 gx \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y y = x \left( Ay^3 + By^2 + Cy + D \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{x^2}{2} (3Ay^2 + 2By + C) + \left( \frac{A}{2} y^4 + \frac{2B}{3} y^3 - 3Gy^2 - 2Hy - I \right) \end{aligned}$$

(5) 考察边界条件

在主要边界  $y = \pm b/2$  上，应精确满足应力边界条件

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_{y=b/2} &= -\rho_2 gx \Rightarrow x \left( A \frac{b^3}{8} + B \frac{b^2}{4} + C \frac{b}{2} + D \right) = -\rho_2 gx \\ (\sigma_y)_{y=-b/2} &= 0 \Rightarrow x \left( -A \frac{b^3}{8} + B \frac{b^2}{4} - C \frac{b}{2} + D \right) = 0 \\ (\tau_{xy})_{y=\pm b/2} &= 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{2} \left( A \frac{3b^2}{4} \pm Bb + C \right) + \left( A \frac{b^4}{32} \pm B \frac{b^3}{12} - G \frac{3b^2}{4} \mp Hb - I \right) = 0 \end{aligned}$$

由上式得到

$$A \frac{3b^2}{4} \pm Bb + C = 0$$

$$A \frac{b^4}{32} \pm B \frac{b^3}{12} - G \frac{3b^2}{4} \mp Hb - I = 0$$

求解各系数，得

$$A = \frac{2}{b^3} \rho_2 g, B = 0, C = -\frac{3}{2b} \rho_2 g, D = -\frac{1}{2} \rho_2 g, H = 0$$

$$I = \frac{b}{16} \rho_2 g - \frac{3b^2}{4} G \quad (a)$$

在次要边界  $x=0$  上，列出三个积分的应力边界条件

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\sigma_x)_{x=0} dy = 0 \Rightarrow F = 0$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\tau_{xy})_{x=0} dy = 0 \Rightarrow I = \frac{b}{80} \rho_2 g - \frac{b^2}{4} G \quad (b)$$

由式(a)、(b)解出

$$I = -\frac{b}{80} \rho_2 g, G = \frac{1}{10b} \rho_2 g$$

将各系数代入应力分量的表达式，得

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{2\rho_2 g}{b^3} x^3 y + \frac{3\rho_2 g}{5b} xy - \frac{4\rho_2 g}{b^3} xy^3 - \rho_1 gx \\ \sigma_y = \rho_2 gx \left( \frac{2y^3}{b^3} - \frac{3y}{2b} - \frac{1}{2} \right) \\ \tau_{xy} = -\rho_2 gx^2 \left( \frac{3y^2}{b^2} - \frac{3}{4b} \right) - \rho_2 gy \left( -\frac{y^3}{b^3} + \frac{3y}{10b} - \frac{b}{80y} \right) \end{cases}$$

**【3-16】**试分析简支梁受均布荷载时，平截面假设是否成立？

**【解答】**弹性力学解答和材料力学解答的差别是由于各自的解法不同。简言之，弹性力学的解法是严格考虑区域内的平衡微分方程、几何方程和物理方程。以及在边界上的边界条件而求解的，因而得出的解答较精确。而在材料力学的解法中，没有严格考虑上述条件，因而得出的是近似的解答。例如，材料力学引用了平面截面假设而简化了几何关系，但这个假设对于一般的梁是近似的。所以，严格地说，平截面假设不成立。

【3-17】试证明刚体位移  $u_0, v_0$  和  $\omega_0$  实际上表示弹性体中原点的平移和转动分量，并应

用§3-3 的解答加以验证（注：微分体的转动分量  $\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ ）

【解答】为了区分原点的转动分量与任意点处的转动分量，定义原点的转动分量为  $\omega_0$ ，任意点处的转动分量为  $\omega$ 。

由 § 3-3 可知，任意点处的平动分量为：

$$\begin{cases} u = \frac{M}{EI} xy - \omega_0 y + u_0 \\ v = -\frac{\mu M}{2EI} y^2 - \frac{M}{2EI} x^2 + \omega_0 x + v_0 \end{cases}$$

则任意点处的转动分量为

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{M}{EI} x + \omega_0 - \frac{M}{EI} x - \omega_0 \right) = -\frac{M}{EI} x + \omega_0$$

因此，原点的平动和转动分量，即  $x=y=0$  时

$$u = u_0, v = v_0, \omega = \omega_0$$

得证。