主　要　内　容

§2-4　几何方程　刚体位移

　　　斜方向的应变及位移

§2-5　物理方程

§2-6　边界条件

§2-7　圣维南原理

§2-8　按位移求解平面问题

§2-9　按应力求解平面问题　相容方程

§2-10　常体力情况下的简化　应力函数

§ 2-4　几何方程　　刚体位移

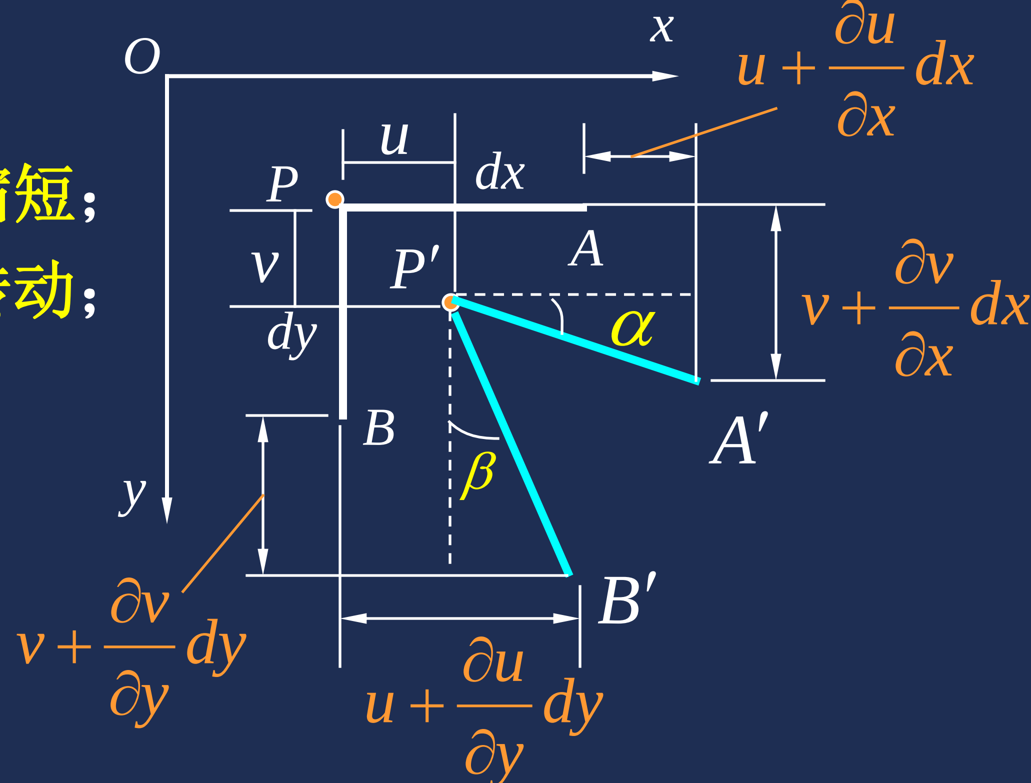
建立：平面问题中应变与位移的关系 —— 几何方程

1. 几何方程

一点的变形 $\begin{cases} \text{线段的伸长或缩短；} \\ \text{线段间的相对转动；} \end{cases}$

考察P点邻域内线段的变形：

$$PA = dx \qquad PB = dy$$



变形前 ⟶ 变形后

$$P \longrightarrow P' \begin{cases} u \\ v \end{cases}$$

$$A \longrightarrow A' \begin{cases} u+\dfrac{\partial u}{\partial x}dx \\ v+\dfrac{\partial v}{\partial x}dx \end{cases} \qquad B \longrightarrow B' \begin{cases} u+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy \\ v+\dfrac{\partial v}{\partial y}dy \end{cases}$$

注：这里略去了二阶以上高阶无穷小量。

PA的正应变：

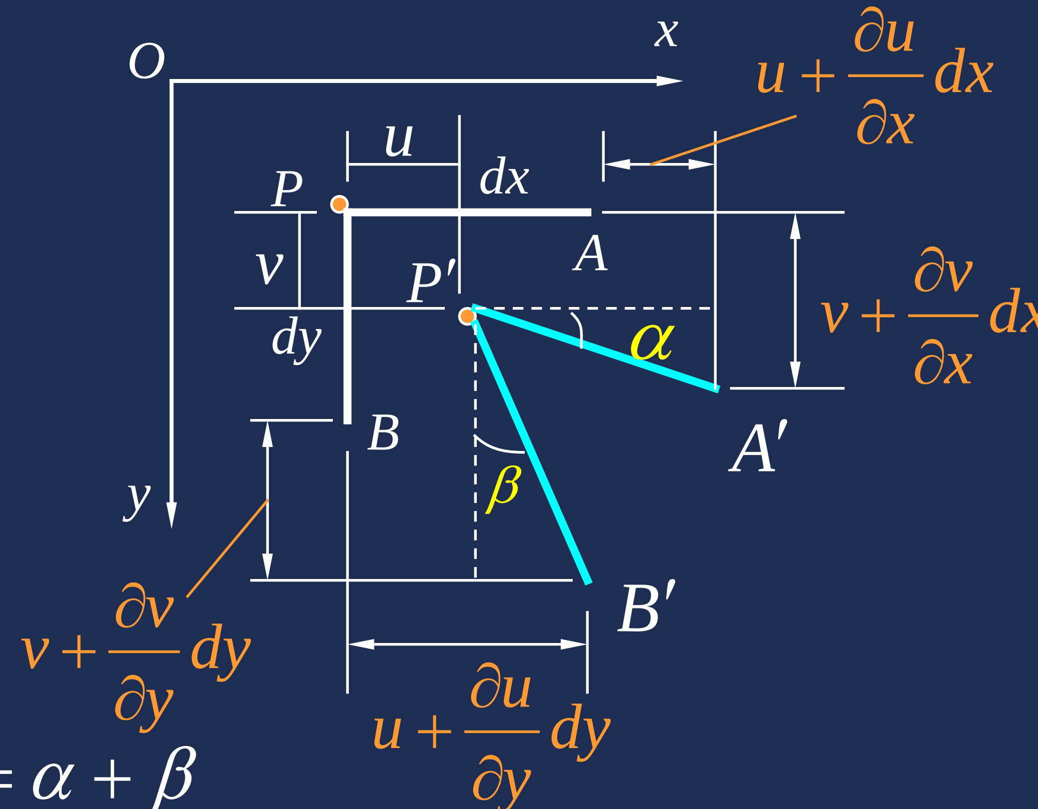
$$\varepsilon_x = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x}dx - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

PB的正应变：

$$\varepsilon_y = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial y}dy - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

P点的剪应变：

P点两**直角线段夹角**的变化 $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$



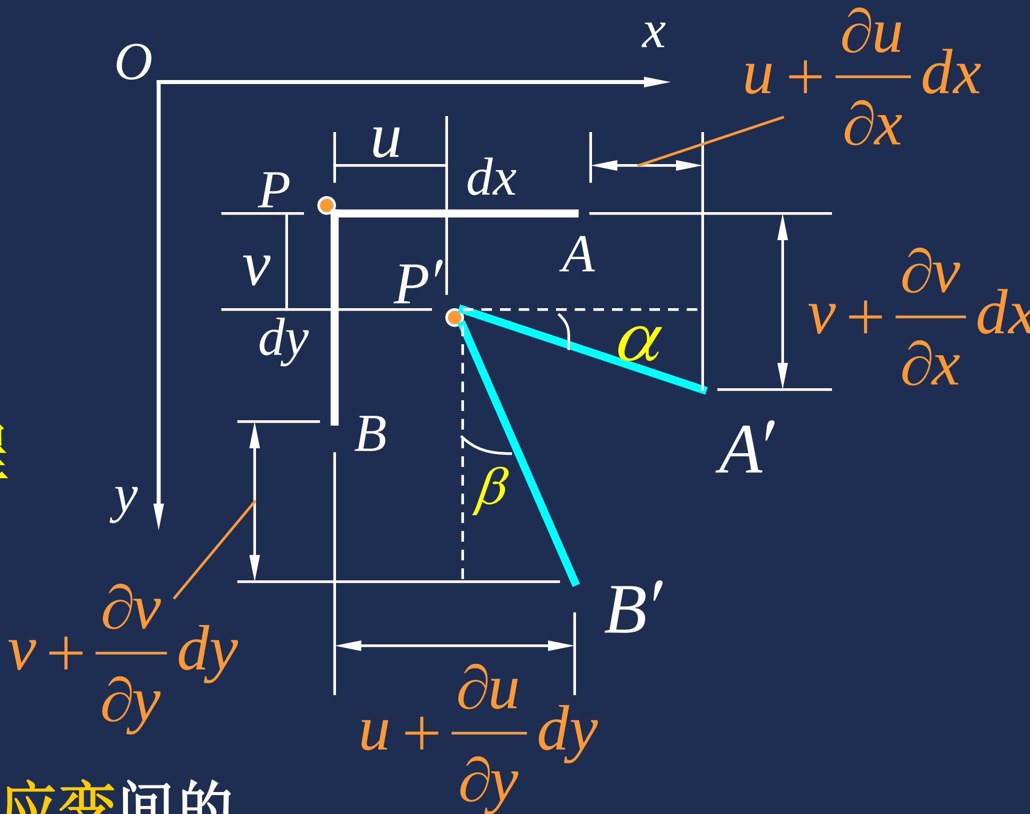
$$\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{v + \frac{\partial v}{\partial x}dx - v}{dx} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \approx \alpha \\ \tan\beta = \dfrac{u + \frac{\partial u}{\partial y}dy - u}{dy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \approx \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

整理得：

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}\\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}} \quad (2\text{-}9)$$

——几何方程



说明：

（1）反映任一点的位移与该点应变间的关系，是弹性力学的基本方程之一。

（2）当 u、v 已知，则 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$ 可完全确定；反之，已知 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$，不能确定$u$、$v$。（∵积分需要确定积分常数，由边界条件决定。）

（3） γ_{xy}—— 以两线段夹角减小为正，增大为负。

2. 刚体位移

当$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \gamma_{xy} = 0$时，

物体无变形，只有刚体位移。即：

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{(a)} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 & \text{(b)} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 & \text{(c)} \end{cases}$$

由(a)、(b)可求得：

$$\begin{cases} u = f_1(y) \\ v = f_2(x) \end{cases} \qquad \text{(d)}$$

将(d)代入(c)，得：

$$\frac{df_1(y)}{dy} + \frac{df_2(x)}{dx} = 0$$

或写成：$-\dfrac{df_1(y)}{dy} = \dfrac{df_2(x)}{dx}$

∵上式中，左边仅为 y 的函数，右边仅 x 的函数，∴两边只能等于同一常数，即

$$\frac{df_1(y)}{dy} = -\omega \qquad \frac{df_2(x)}{dx} = \omega \qquad \text{(d)}$$

积分(e)，得：

$$\begin{cases} f_1(y) = u_0 - \omega y \\ f_2(x) = v_0 + \omega x \end{cases} \qquad \text{(e)}$$

其中，u_0、v_0为积分常数。（x、y 方向的刚体位移），代入（d）得：

$$\boxed{\begin{aligned} u &= u_0 - \omega y \\ v &= v_0 + \omega x \end{aligned}} \qquad \text{(2-10)}$$

—— 刚体位移表达式

讨论：

$$\boxed{\begin{aligned} u &= u_0 - \omega y \\ v &= v_0 + \omega x \end{aligned}} \qquad (2\text{-}10)$$

—— 刚体位移表达式

（1）当$u_0 \neq 0, \omega = v_0 = 0$时，

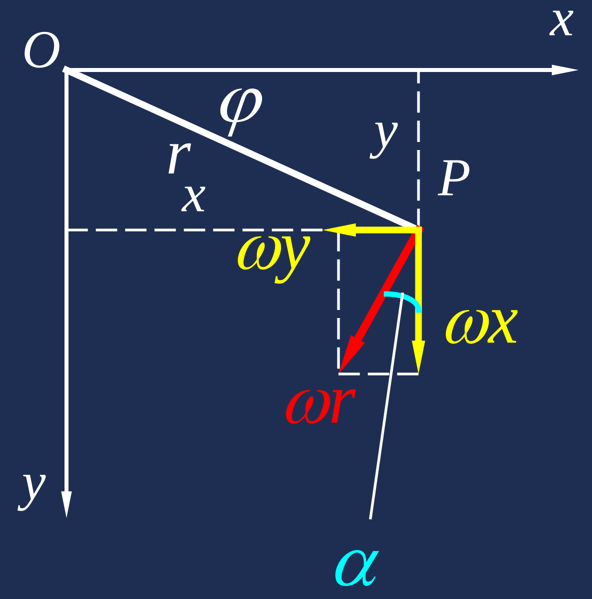
则$u = u_0, v = 0$，仅有x方向平移。

（2）当$v_0 \neq 0, \omega = u_0 = 0$时，

则$v = v_0, u = 0$，仅有y方向平移。

（3）当$\omega \neq 0, v_0 = u_0 = 0$时，

则$\begin{cases} u = -\omega y \\ v = \omega x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{u^2 + v^2} = \omega\sqrt{x^2 + y^2}$



$$\tan\alpha = \frac{\omega y}{\omega x} = \frac{y}{x} = \tan\varphi \qquad \therefore \alpha = \varphi$$

—— P点沿切向绕O点转动

说明：$\omega r \perp OP$

ω —— 绕O点转过的角度（刚性转动）

斜方向的应变及位移

1. 斜方向的正应变ε_N

问题： 已知$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$，求任意方向的线应变$\varepsilon_N$和线段夹角的变化。

设 P 点的坐标为 $(x，y)$，N 点的坐标为（$x+dx$，$y+dy$），PN 的长度为 dr，PN 的方向余弦为：

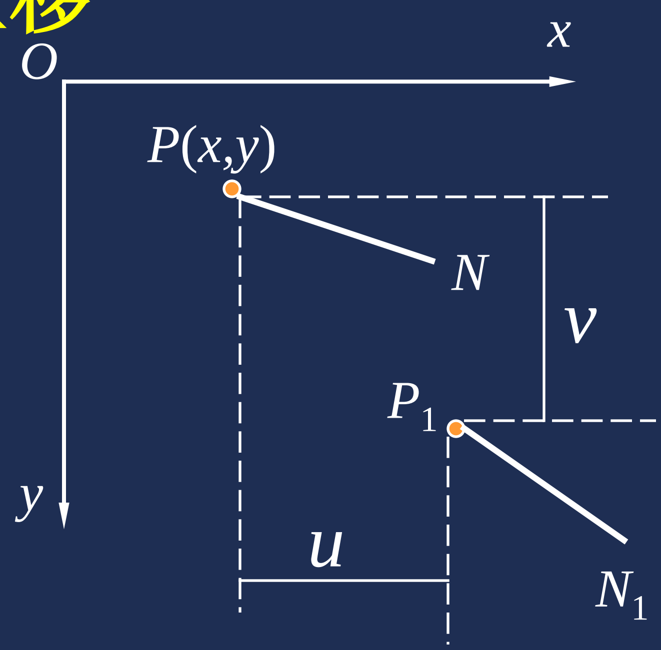
$$\cos(PN, x) = l, \cos(PN, y) = m$$

于是PN 在坐标轴上的投影为：

$$dx = l dr, dy = m dr$$

N 点位移：

$$\begin{cases} u_N = u + du = u + \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy \\ v_N = v + dv = v + \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy \end{cases}$$

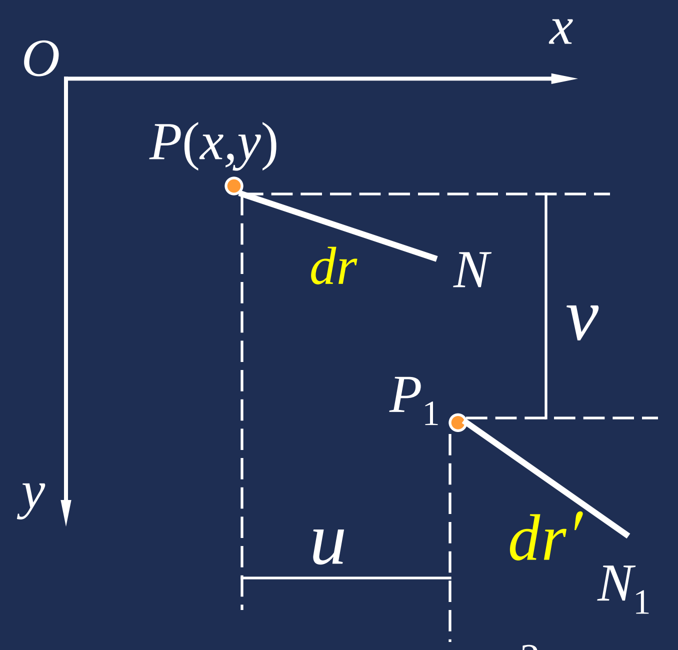


变形后的P_1N_1在坐标方向的投影：

$$\begin{cases} dx + u_N - u = dx + \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy \\ dy + v_N - v = dy + \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy \end{cases}$$

设PN变形后的长度 $P_1N_1=dr'$，PN 方向的应变为ε_N， 由应变的定义：

$$\varepsilon_N = \frac{dr' - dr}{dr} \quad 或 dr' = dr + \varepsilon_N dr$$



$$(dr')^2 = (dr + \varepsilon_N dr)^2$$

$$= (dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy)^2 + (dy + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy)^2$$

两边同除以 $(dr)^2$，得

$$(1+\varepsilon_N)^2 = \left(\frac{dx}{dr} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dr}\right)^2$$

$$= \left[l\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m\frac{\partial u}{\partial y}\right]^2 + \left[m\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + l\frac{\partial v}{\partial x}\right]^2$$

化开上式，并将 $\varepsilon_N, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 的二次项略去，有

$$1 + 2\varepsilon_N = l^2(1 + 2\frac{\partial u}{\partial x}) + 2lm\frac{\partial u}{\partial y} + m^2(1 + 2\frac{\partial v}{\partial y}) + 2lm\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$1+2\varepsilon_N = l^2\left(1+2\frac{\partial u}{\partial x}\right)+2lm\frac{\partial u}{\partial y}+m^2\left(1+2\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2lm\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \underline{l^2+m^2}+2l^2\frac{\partial u}{\partial x}+2m^2\frac{\partial v}{\partial y}+2lm\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$$

$$1 \qquad\qquad \varepsilon_x \qquad\qquad \varepsilon_y \qquad\qquad \gamma_{xy}$$

$$\boxed{\varepsilon_N = l^2\varepsilon_x + m^2\varepsilon_y + lm\gamma_{xy}} \qquad （2-11）$$

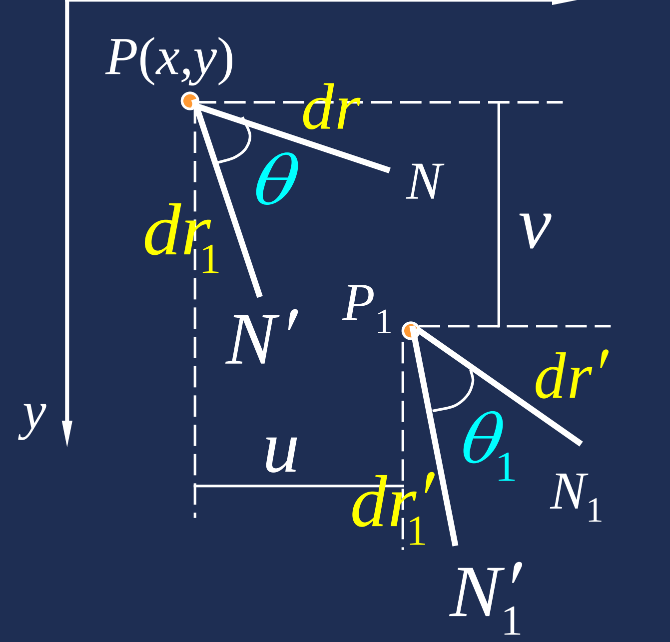
2. P点两线段夹角的改变

变形前：$\begin{cases} PN \text{ 的方向余弦} & l, m \\ PN' \text{ 的方向余弦} & l', m' \end{cases}$

$$\cos\theta = l'l + m'm$$

变形后：$\begin{cases} P_1N_1 \text{ 的方向余弦} & l_1, m_1 \\ P_1N_1' \text{ 的方向余弦} & l_1', m_1' \end{cases}$

$$\cos\theta_1 = l_1'l_1 + m_1'm_1$$

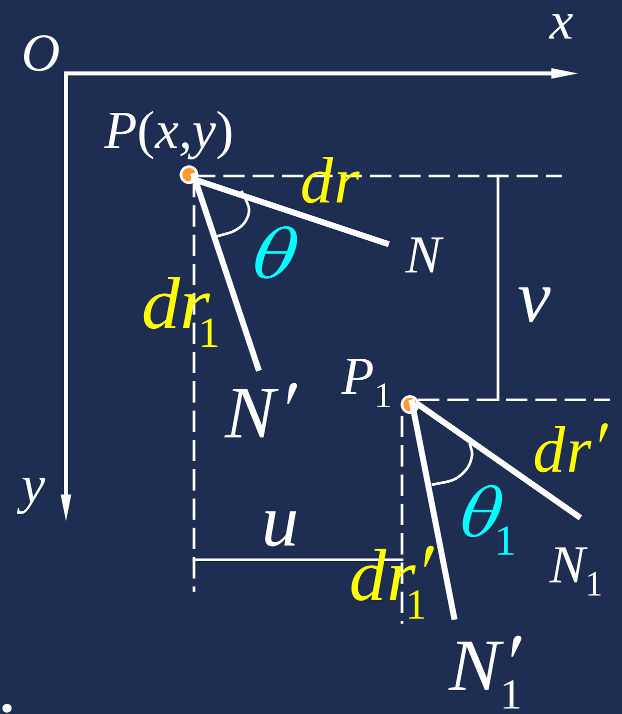


$$\begin{cases} l_1 = \cos(P_1N_1, x) = \dfrac{dx + \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy}{dr(1+\varepsilon_N)} \\ m_1 = \cos(P_1N_1, y) = \dfrac{dy + \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy}{dr(1+\varepsilon_N)} \end{cases}$$

利用：$\begin{cases} dx = dr \cdot l \\ dy = dr \cdot m \\ \dfrac{1}{(1+\varepsilon_N)} \approx 1 - \varepsilon_N \\ \text{略去二阶小量；} \end{cases}$

化简，得：$\begin{cases} l_1 = l\left(1 + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_N\right) + m\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ m_1 = m\left(1 + \dfrac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon_N\right) + l\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

2. P点两线段夹角的改变



变形前：$\begin{cases} PN \quad \text{的方向余弦} \quad l, m \\ PN' \quad \text{的方向余弦} \quad l', m' \end{cases}$

变形后：$\begin{cases} P_1N_1 \quad \text{的方向余弦} \quad l_1, m_1 \\ P_1N_1' \quad \text{的方向余弦} \quad l_1', m_1' \end{cases}$

$$\begin{cases} l_1 = l\left(1+\dfrac{\partial u}{\partial x}-\varepsilon_N\right)+m\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ m_1 = m\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial y}-\varepsilon_N\right)+l\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

同理，得：

$$\begin{cases} l_1' = l'\left(1+\dfrac{\partial u}{\partial x}-\varepsilon_{N'}\right)+m'\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ m_1' = m'\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial y}-\varepsilon_{N'}\right)+l'\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

PN 与 PN'变形后的夹角改变为： $\theta_1-\theta$

$$\begin{cases} \cos\theta = l'l+m'm \\ \cos\theta_1 = l_1'l_1+m_1'm_1 \end{cases}$$

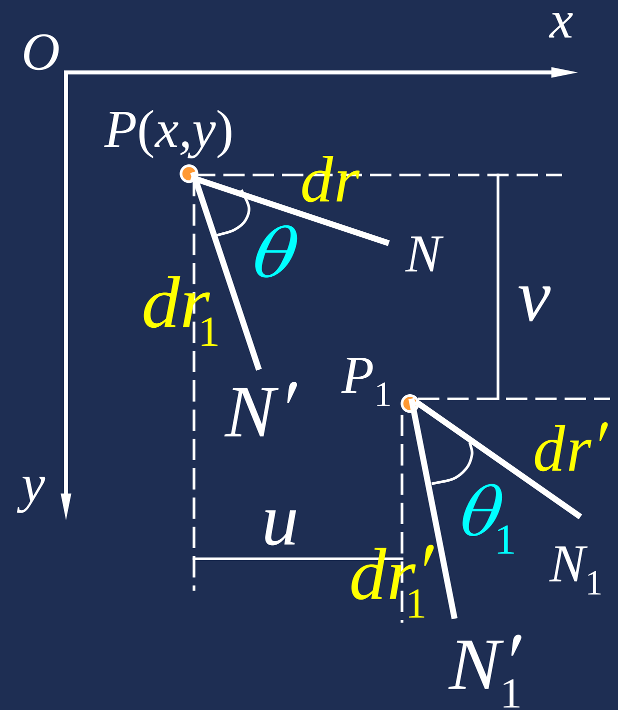
代入，并利用：$\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 并略去高阶小量，有

$$\cos\theta_1 = \underbrace{(l'l+m'm)}_{\cos\theta}(1+\varepsilon_N-\varepsilon_{N'})+2(l'l\varepsilon_x+m'm\varepsilon_y)+(lm'+l'm)\gamma_{xy}$$

2. P点两线段夹角的改变

变形前：$\begin{cases} PN \text{ 的方向余弦} & l, m \\ PN' \text{ 的方向余弦} & l', m' \end{cases}$

变形后：$\begin{cases} P_1N_1 \text{ 的方向余弦} & l_1, m_1 \\ P_1N_1' \text{ 的方向余弦} & l_1', m_1' \end{cases}$



PN 与 PN'变形后的夹角改变为： $\theta_1 - \theta$

$$\begin{cases} \cos\theta = l'l + m'm \\ \cos\theta_1 = l_1'l_1 + m_1'm_1 \end{cases}$$

$$\boxed{\cos\theta_1 = \cos\theta\left(1 + \varepsilon_N - \varepsilon_{N'}\right) + 2(l'l\varepsilon_x + m'm\varepsilon_y) + (lm' + l'm)\gamma_{xy}}$$

（2-12）

从中求出变形后两线段间的夹角 θ_1，进一步求出 $\theta_1 - \theta$

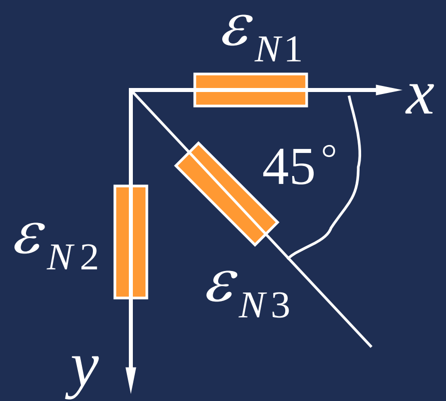
3. 斜方向应变公式的应用

3. 斜方向应变公式的应用

（1） 已知一点的应变 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ，可计算任意方向的应变 ε_N。ε_N 的最大值、最小值。主应变、主应变方向等。

（2）已知一点任意三方向的应变 $\varepsilon_{N1}, \varepsilon_{N2}, \varepsilon_{N3}$，可求得该点的应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$。

$$\begin{cases} \varepsilon_{N1} = l_1^2 \varepsilon_x + m_1^2 \varepsilon_y + l_1 m_1 \gamma_{xy} \\ \varepsilon_{N2} = l_2^2 \varepsilon_x + m_2^2 \varepsilon_y + l_2 m_2 \gamma_{xy} \\ \varepsilon_{N3} = l_3^2 \varepsilon_x + m_3^2 \varepsilon_y + l_3 m_3 \gamma_{xy} \end{cases}$$



若 用45° 应变花测构件表面应变：

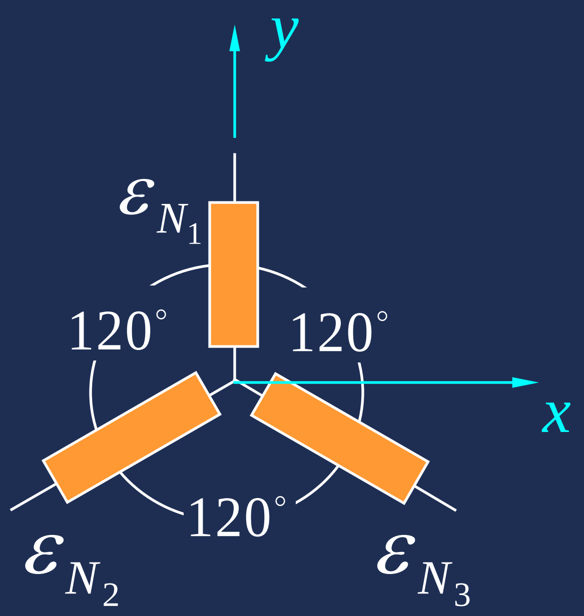
$$\begin{cases} l_1 = 1, m_1 = 0 \\ l_2 = 0, m_2 = 1 \\ l_3 = m_3 = \sqrt{2}/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_{N1} \\ \varepsilon_y = \varepsilon_{N2} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{N3} - \varepsilon_{N1} - \varepsilon_{N2} \end{cases} \Rightarrow \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$$

若 用120° 应变花测构件表面应变，即：

$$\varepsilon_{N1}, \varepsilon_{N2}, \varepsilon_{N3}$$

求得该点的应变分量： $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$

$$\Longrightarrow \quad \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$$



§2-5　物理方程

建立：平面问题中应力与应变的关系

物理方程也称：本构方程、本构关系、物性方程。

1. 各向同性弹性体的物理方程

在完全弹性和各向同性的情况下，物性方程即为材料力学中的广义虎克（**Hooke**）定律。

$$
\left\{
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right] \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right]
\end{aligned}
\right.
\qquad
\begin{aligned}
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz} \\
\gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx} \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}
\end{aligned}
\qquad (2\text{-}13)
$$

其中：E为拉压弹性模量；G为剪切弹性模量；μ为侧向收缩系数，又称泊松比。

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

（1）平面应力问题的物理方程

由于平面应力问题中 $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned}}$$

（2-15）

—— 平面应力问题的物理方程

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx} \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned}}$$

注：

(1)

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}$$

—— 物理方程的另一形式

(2) $\varepsilon_z \neq 0 \Longrightarrow \varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$

（2）平面应变问题的物理方程

由于平面应变问题中 $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$

由式（2-13）第三式，得 $\sigma_z = -\mu(\sigma_x + \sigma_y)$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right) \\
\varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right) \\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned} \qquad (2\text{-}16)$$

—— 平面应变问题的物理方程

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right] \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz} \\
\gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx} \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}
\end{aligned} \qquad (2\text{-}13)$$

注：

(1) 平面应变问题中 $\varepsilon_z = 0$，但 $\sigma_z \neq 0$

$$\sigma_z = -\mu(\sigma_x + \sigma_y)$$

(2) 平面应变问题 物理方程的另一形式：?

（3）两类平面问题物理方程的转换：

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \qquad （2\text{-}15）$$
$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}$$

—— **平面应力问题的物理方程**

$$\varepsilon_x = \frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right) \qquad （2\text{-}16）$$
$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}$$

—— **平面应变问题的物理方程**

(1) 平面应力问题 ⟹ 平面应变问题

材料常数的转换为：

$$\begin{cases} E \Rightarrow \dfrac{E}{1-\mu^2} \\ \mu \Rightarrow \dfrac{\mu}{1-\mu} \end{cases}$$

(2) 平面应变问题 ⟹ 平面应力问题

材料常数的转换为：

$$\begin{cases} E \Rightarrow \dfrac{E(1+2\mu)}{(1+\mu)^2} \\ \mu \Rightarrow \dfrac{\mu}{1+\mu} \end{cases}$$

§ 2-6　边界条件

1. 弹性力学平面问题的基本方程

（1）平衡方程：

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+f_x=0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+f_y=0$$

（2-2）

（2）几何方程：

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

（2-9）

（3）物理方程：

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)$$
$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)$$
$$\gamma_{xy}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}$$

（2-15）

未知量数：$\underbrace{\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy},\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy},u,v}_{8个}$

方程数：　8个

结论：在适当的边界条件下，上述8个方程可解。

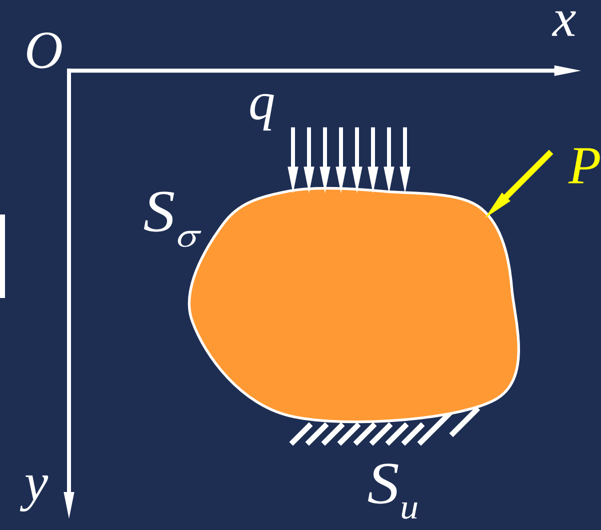
2. 边界条件及其分类

边界条件：建立边界上的物理量与内部物理量间的关系。

是力学计算模型建立的重要环节。

边界分类
- （1）位移边界 S_u
- （2）应力边界 S_σ
- （3）混合边界

—— 三类边界



$$S = S_\sigma + S_u$$

（1）位移边界条件

位移分量已知的边界 —— 位移边界

用u_s、 v_s表示边界上的位移分量，$\overline{u}, \overline{v}$ 表示边界上位移分量的已知函数，则位移边界条件可表达为：

$$\begin{cases} u_s = \overline{u} \\ v_s = \overline{v} \end{cases} \qquad \text{（2-17）}$$

—— 平面问题的位移边界条件

说明：

当$\overline{u} = \overline{v} = 0$时，称为固定位移边界。

（2）应力边界条件

给定面力分量 $\overline{f}_x, \overline{f}_y$ 边界 —— 应力边界

由前面斜面的应力分析，得

$$\begin{cases} p_x = l\sigma_x + m\tau_{yx} \\ p_y = m\sigma_y + l\tau_{xy} \end{cases}$$

式中取： $p_x = \overline{f}_x \quad p_y = \overline{f}_y$

$$\sigma_x = (\sigma_x)_s, \sigma_y = (\sigma_y)_s, \tau_{xy} = (\tau_{xy})_s$$

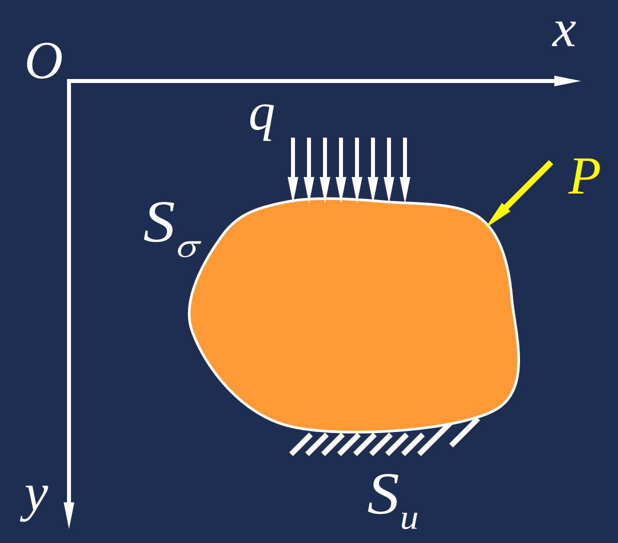
得到：

$$\boxed{\begin{aligned} l(\sigma_x)_s + m(\tau_{xy})_s &= \overline{f}_x \\ m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s &= \overline{f}_y \end{aligned}} \quad \text{（2-18）}$$

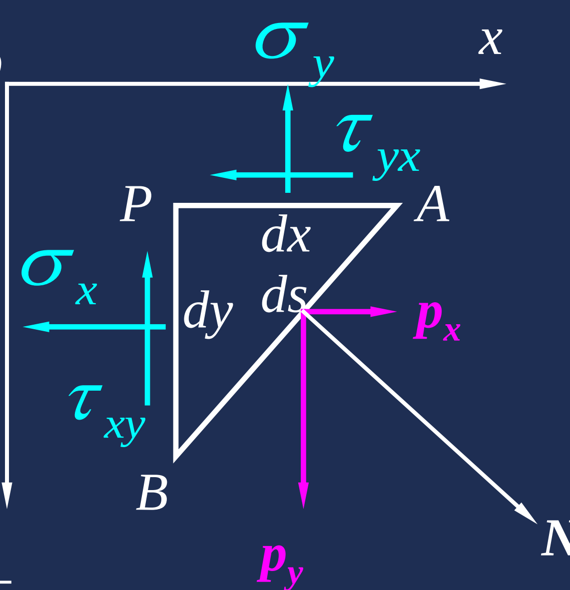
—— 平面问题的应力边界条件

式中： l、m 为边界外法线关于 x、y 轴的方向余弦。如：

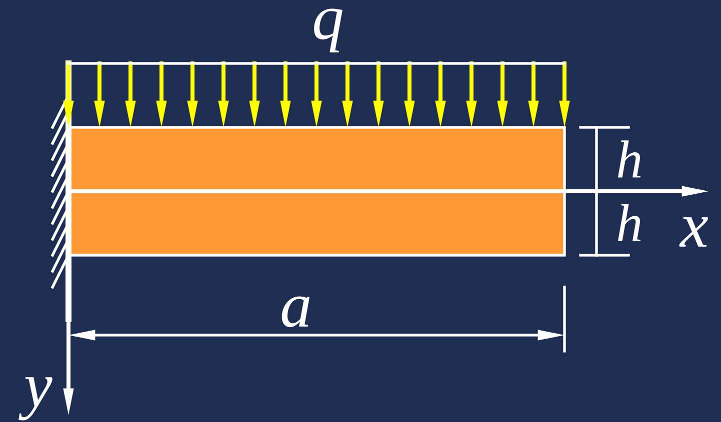
$$\begin{cases} \text{垂直 } x \text{ 轴的边界：} l = \pm 1, m = 0. (\sigma_x)_s = \overline{f}_x, (\tau_{xy})_s = \overline{f}_y \\ \text{垂直 } y \text{ 轴的边界：} l = 0, m = \pm 1. (\sigma_y)_s = \overline{f}_y, (\tau_{yx})_s = \overline{f}_x \end{cases}$$



$$S = S_\sigma + S_u$$



例1 如图所示，试写出其边界条件。



(1) $x = 0,\ \begin{cases} u_s = 0 \\ v_s = 0 \end{cases}$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

(2) $x = a,\ \begin{cases} l = 1, m = 0 \\ \overline{f}_x = 0, \overline{f}_y = 0 \end{cases}$

$$l(\sigma_x)_s + m(\tau_{xy})_s = \overline{f}_x$$

$$m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s = \overline{f}_y$$

$$\Rightarrow (\sigma_x)_s = 0, (\tau_{xy})_s = 0$$

(3) $y = -h,\ \begin{cases} l = 0, m = -1 \\ \overline{X} = 0, \overline{Y} = q \end{cases}$

$$(\sigma_x)_s \cdot 0 + (\tau_{xy})_s \cdot (-1) = 0$$

$$(\sigma_y)_s \cdot (-1) + (\tau_{xy})_s \cdot 0 = q$$

$$\Rightarrow (\sigma_y)_s = -q, (\tau_{xy})_s = 0$$

(4) $y = +h,\ \begin{cases} l = 0, m = +1 \\ \overline{X} = 0, \overline{Y} = 0 \end{cases}$

$$(\sigma_x)_s \cdot 0 + (\tau_{xy})_s \cdot (+1) = 0$$

$$(\sigma_y)_s \cdot (+1) + (\tau_{xy})_s \cdot 0 = 0$$

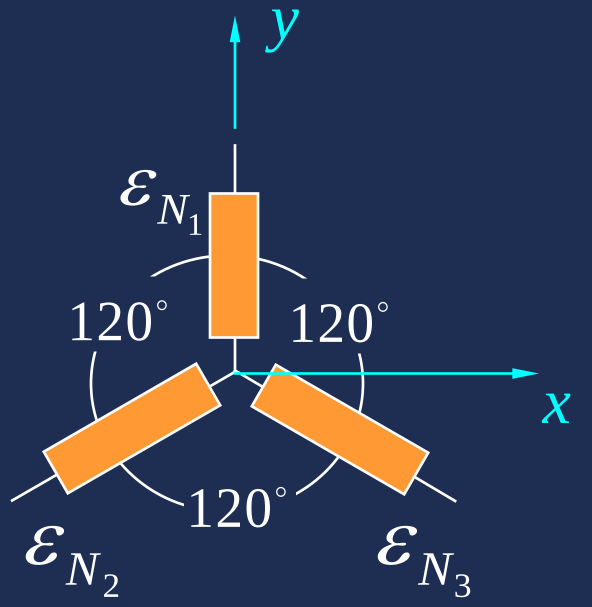
$$\Rightarrow (\sigma_y)_s = 0, (\tau_{xy})_s = 0$$

作业:

题1 用120° 应变花测得构件表面应变:

$$\varepsilon_{N1}, \varepsilon_{N2}, \varepsilon_{N3}$$

求该点的应变分量: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$



题2 将平面应变问题的物理方程(**2-16**),变换为用应变表示应力形式。

P34 2-14, 2-15 (选2)
第四版 2-15, 2-16