# 教材

## 弹性力学简明教程（第三版）徐芝纶

参考书：

《弹性力学》 徐芝纶【1980 人民教育出版社】

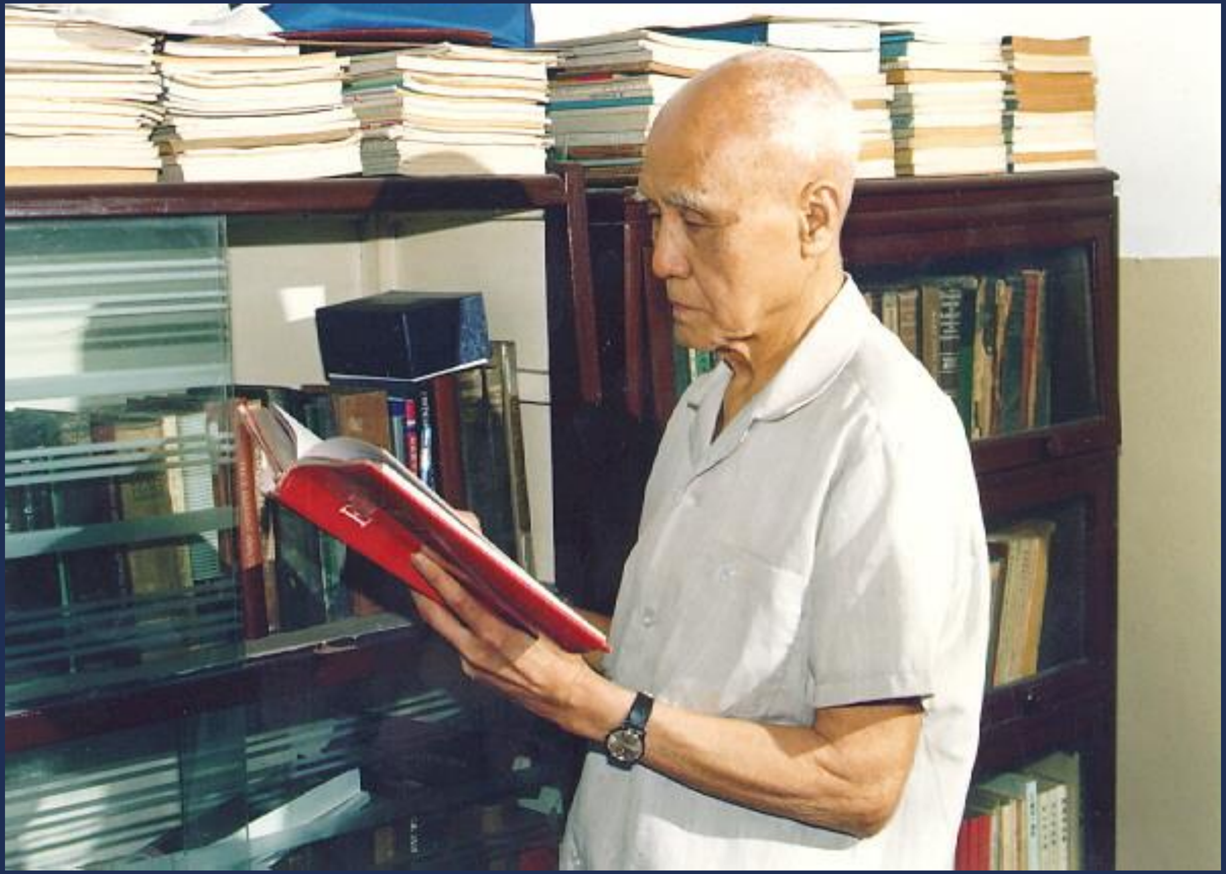
《弹性力学》 杨桂通【1998 高等教育出版社】

《弹性力学》 吴家龙【2001 高等教育出版社】

《弹性理论基础》陆明万、罗学富 【2003 清华大学出版社】

《**Theory of Elasticity**》 Timoshenko, S. P.

授课教师：航空结构工程系 徐绯



徐芝纶

1979年第一版
1983年第二版
2001年第三版

第一版获1977—1981年度全国优秀科技图书奖

第二版获1987年全国优秀教材特等奖

徐芝纶(1911-1999),江苏江都人， 中国科学院资深院士。1934年毕业于清华大学土木工程系，1936年获麻省理工学院土木工程硕士学位，1939年获哈佛大学工程科学硕士学位。1939年回国后先后在浙江大学、中央大学和上海交通大学任教，并曾任上海交大水利系主任。1952年后任河海大学教授、博士生导师，1956年一1983年曾任该校教务长、副校长。第三届全国人大代表，第五、六届全国政协委员，中国力学学会第一、二届理事，江苏省力学学会理事长。在我国，他是将有限元法应用到工程实践的先导之一。1974年他编著出版了我国第一部有限元法专著《弹性力学问题有限单元法》，书中论述了关于等参单元分析、不稳定温度场计算和基础梁板计算等方面的研究成果。

他编著出版教材11种15册；翻译出版教材4种7册。其中《工程力学教程》、《弹性理论》、《弹性力学》及《弹性力学问题的有限单元法》等五部专著被我国工科院校广泛采用。《弹性力学》一书获1977年一1981年全国优秀科技图书奖和1987年全国优秀教材特等奖。应高等教育出版社特约撰写的英文版专著《应用弹性力学》，于1991年在印度Wiley东方出版公司出版发行；继之，新加坡JohnWileyandSons有限公司也出版发行了此书。这是我国向国外推荐的第一本英文版工科教材。

- 上课时间：

  周二 7-8节（下午）—（2学时）

  周四 7-8节（下午）—（2学时）
- 作业：每周四课后交作业
- 答疑：随时答疑；
- 考试：期末闭卷考试
- 成绩：

期末（70％）＋平时（10％）＋作业（20％）

# 弹性力学的研究任务

研究弹性体由于受外力作用、边界约束或温度改变等原因而发生的应力、形变和位移。

目标：结构的强度，刚度和稳定性

# 第一章　绪　论

§1-1　弹性力学的研究内容

§1-2　弹性力学中的几个基本概念

§1-3　弹性力学中的基本假定

# §1-1　弹性力学的研究内容

## *1. 研究内容*

材力:（内容）杆件在外力或温度作用下的应力、变形、材料的宏观力学性质、破坏准则等。

（任务）解决杆件的强度、刚度、稳定性问题。

结力:（内容）杆件系统（杆系结构）在外力或温度作用下的应力、变形、位移等变化规律。

（任务）解决杆系的强度、刚度、稳定性问题。

弹力:（内容）弹性体在外力或温度作用下的应力、变形、位移等分布规律。

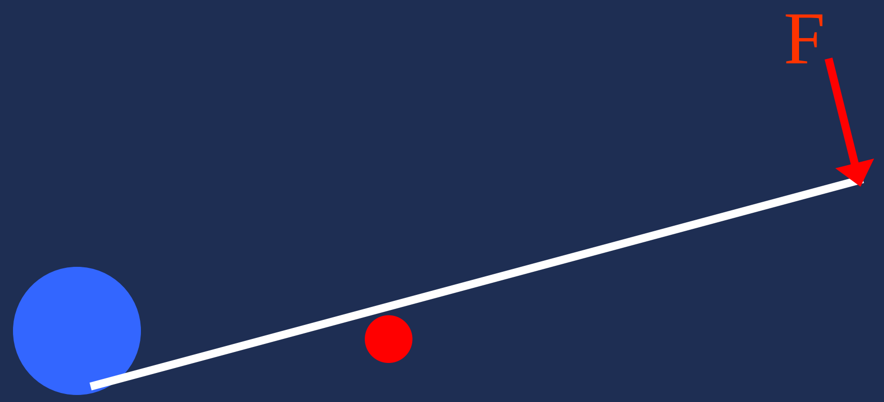
（任务）解决弹性体的强度、刚度、稳定性问题。

## 2. 弹性力学与材力、结力课程的区别

### 与理论力学的区别

假如给我一个支点，我就能撬起地球。

——阿基米德




研究对象：质点、质点系、刚体、刚体系

研究内容：物体**机械运动**的一般规律

- 能否**变形**是理论力学和变形体力学的重要区别

## 2. 弹性力学与材料力学、结构力学课程的区别

（1）研究对象

材力： 杆件（直杆、小曲率杆）

结力： 杆件系统（或结构）如桁架、刚架结构

弹力： 一般弹性实体结构：三维弹性固体、板状结构、杆件等

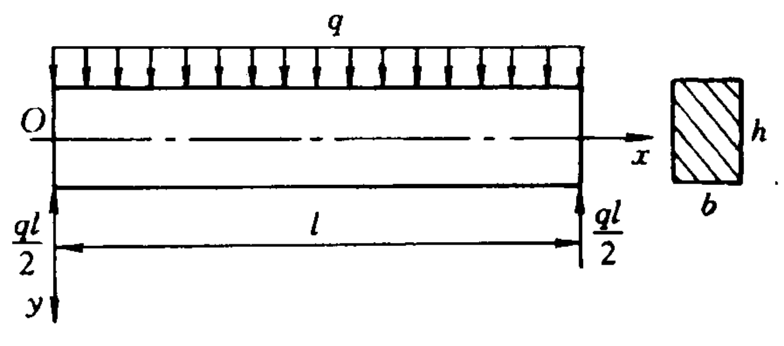
（2）研究方法

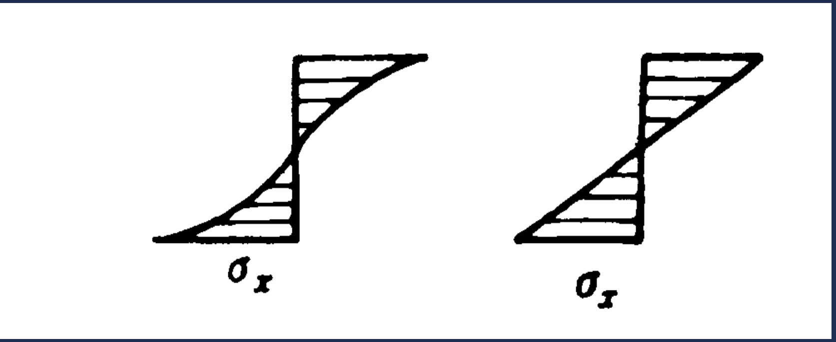
材力： 借助于直观和实验现象作一些假定，如平面假设等，然后由静力学、几何关系、物理方程三方面进行分析。

结力： 与材力类同。

弹力： 仅由静力平衡、几何方程、物理方程三方面分析，放弃了材力中的大部分假定。

## 如：梁的弯曲问题

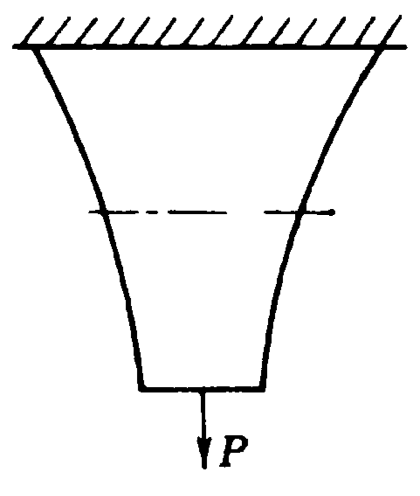


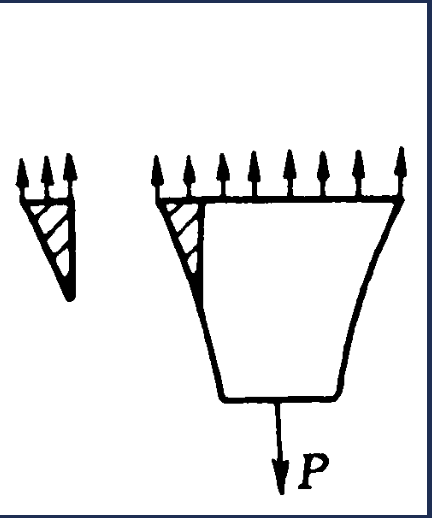




弹性力学结果　　材料力学结果

当 $l >> h$ 时，两者误差很小

## 如：变截面杆受拉伸




弹性力学以微元体为研究对象，建立方程求解，得到弹性体变形的一般规律。所得结果更符合实际。

（3）数学理论基础

材力、结力

—— 常微分方程（4阶，一个变量）。

弹力

—— 偏微分方程（高阶，二、三个变量）。

数值解法：能量法（变分法）、差分法、有限单元法等。

## 3. 与其他力学课程的关系

弹性力学 $\begin{cases} \text{数学弹性力学；} \\ \text{应用弹性力学。} \end{cases}$

弹性力学是塑性力学、断裂力学、振动理论、有限单元法等课程的基础。

## 小结：

弹性力学是固体力学的一个分支，研究弹性体由于外力作用或温度改变等原因而发生的应力、形变和位移。

本课程较为完整的表现了力学问题的数学建模过程，建立了弹性力学的基本方程和边值条件，并对一些问题进行了求解。弹性力学基本方程的建立为进一步的数值方法奠定了基础。

# §1-2　弹性力学中的几个基本概念

**基本概念：**　外力、应力、形变、位移。

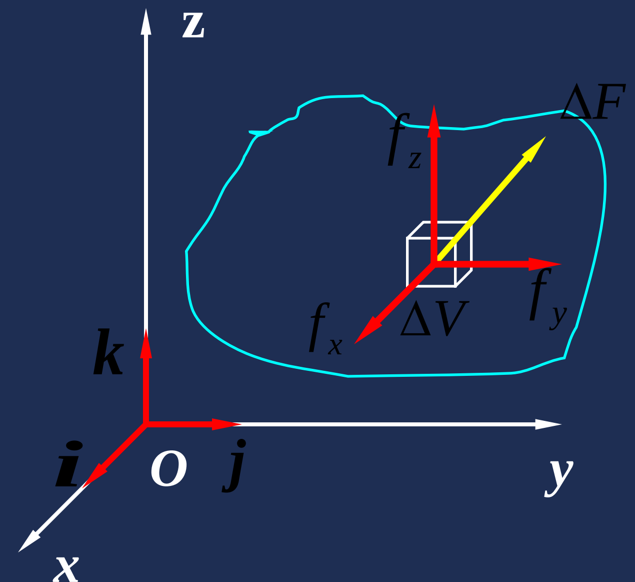
## 1. 外力

体力、面力　（材力：集中力、分布力。）

**(1) 体力** —— 弹性体内**单位体积**上所受的外力

$$f=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta V}$$ —— 体力分布集度（矢量）

$$f=f_x\mathbf{i}+f_y\mathbf{j}+f_z\mathbf{k}$$




$X$、$Y$、$Z$为体力矢量在坐标轴上的投影

单位：　$N/m^3$　　$kN/m^3$

说明：
- (1) $f$ *是坐标的连续分布函数*;
- (2) $f$ *的加载方式是任意的*(如：重力，磁场力、惯性力等)
- (3) *fx、fy、fz 的正负号由坐标方向确定。沿着坐标轴方向为正，反之为负。*

## (2) 面力

—— 作用于物体表面单位面积上的外力

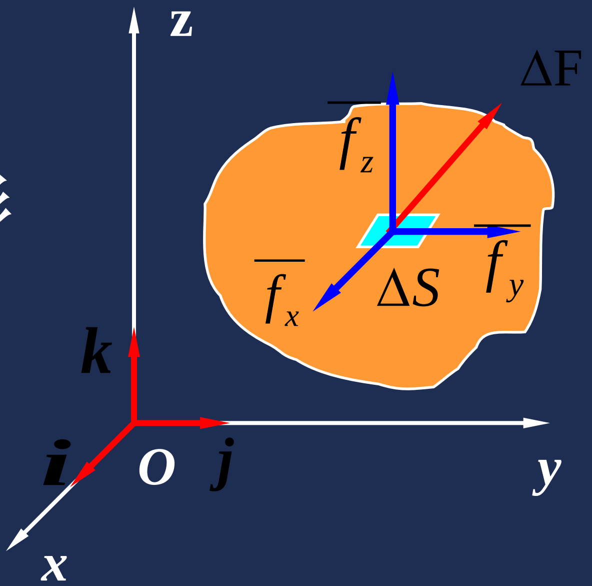
$$\boxed{\bar{f} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}}$$ —— 面力分布集度（矢量）

$$\boxed{\bar{f} = \bar{f}_x \mathbf{i} + \bar{f}_y \mathbf{j} + \bar{f}_z \mathbf{k}}$$

$\boxed{\bar{f}_x}\ \boxed{\bar{f}_y}\ \boxed{\bar{f}_z}$ —— 面力矢量在坐标轴上投影

单位： $1\text{N/m}^2 = 1\text{Pa}$ (帕)

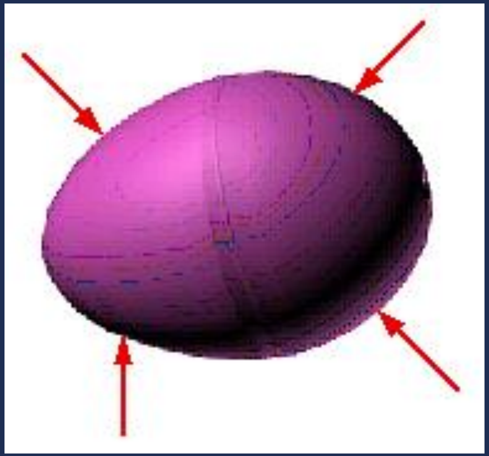
$1\text{MN/m}^2 = 10^6\text{Pa} = 1\text{MPa}$ (兆帕)




说明：
(1) $\boxed{\bar{f}}$ *是坐标的连续分布函数;*
(2) $\boxed{\bar{f}}$ *的加载方式是任意的;*
(3) $\boxed{\bar{f}_x}\ \boxed{\bar{f}_y}\ \boxed{\bar{f}_z}$ *的正负号由坐标方向确定。沿着坐标轴方向为正，反之为负。*

## 2. 应力

### (1) 一点应力的概念

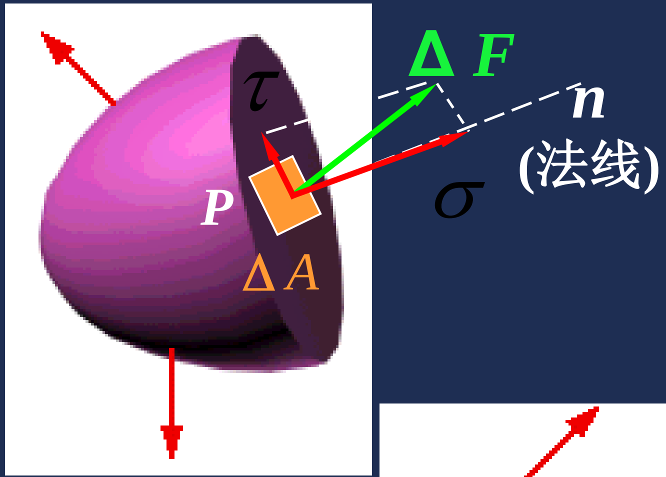


内力 $\begin{cases} \text{(1) 物体内部分子或原子间的相互作用力; (不考虑)} \\ \text{(2) 由于外力作用引起的相互作用力.} \end{cases}$

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

(1) $P$点的内力面分布集度 ----$P$点的应力

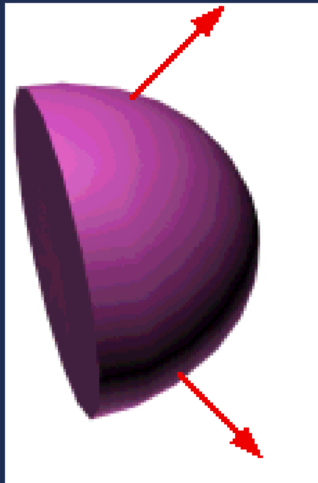
(2) 应力矢量. $\Delta F$ 的极限方向




由外力引起的在 $P$点的某一面上内力分布集度

应力分量 $\begin{cases} \text{应力的法向分量 } \sigma \text{ —— 正应力} \\ \text{应力的切向分量 } \tau \text{ —— 剪应力} \end{cases}$

单位: 与面力相同 MPa (兆帕)



应力关于坐标连续分布的

$$\begin{cases} \sigma = \sigma(x, y, z) \\ \tau = \tau(x, y, z) \end{cases}$$

## (2) 一点的应力状态

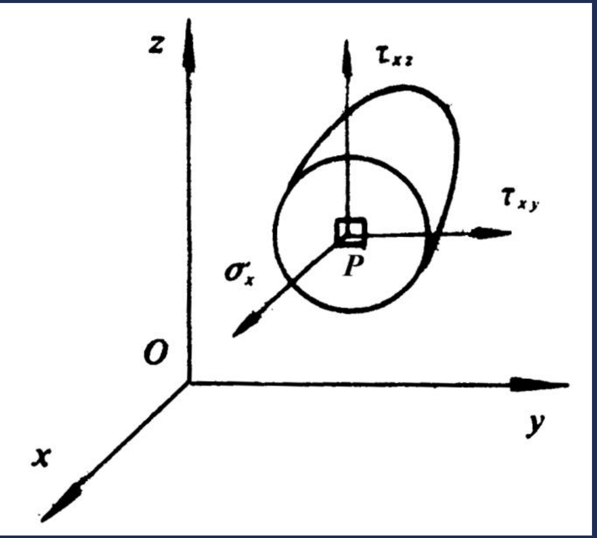
通过一点*P* 的各个面上应力状况的集合

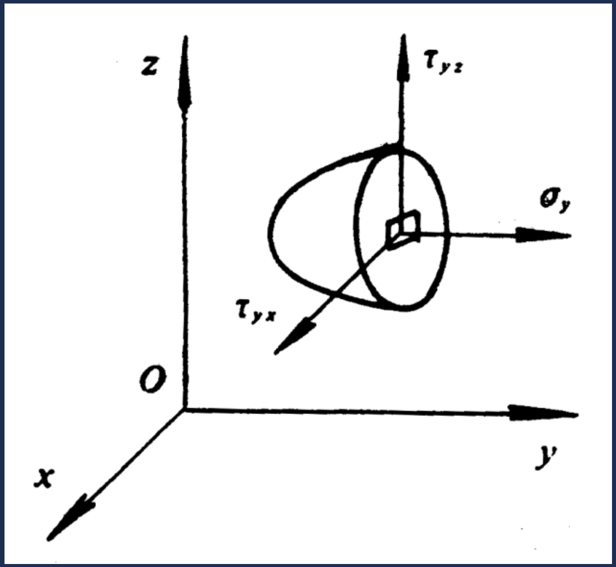
—— 称为一点的应力状态

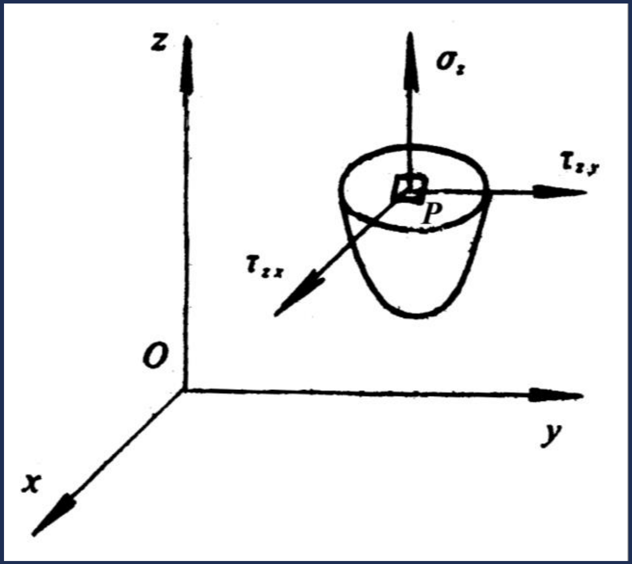
*x*面的应力： $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$

*y*面的应力： $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$

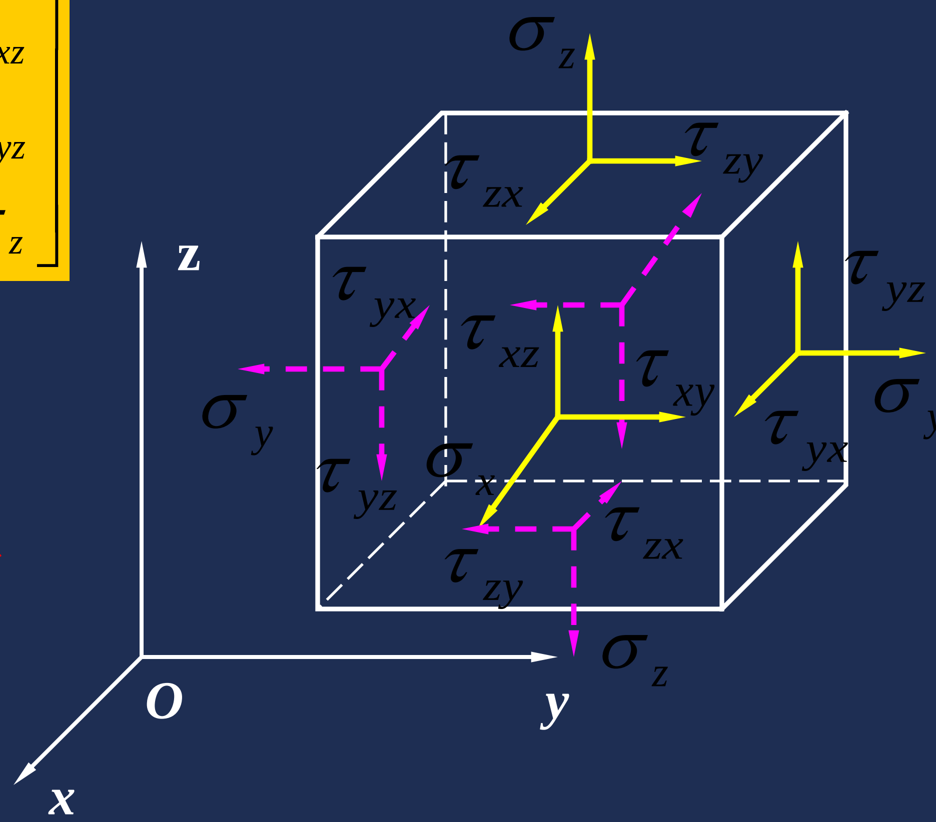
*z*面的应力： $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$



用矩阵表示：$[\sigma]=\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$




其中，只有6个量独立。

$$\begin{cases} \tau_{xy}=\tau_{yx} \\ \tau_{yz}=\tau_{zy} \\ \tau_{zx}=\tau_{xz} \end{cases}$$

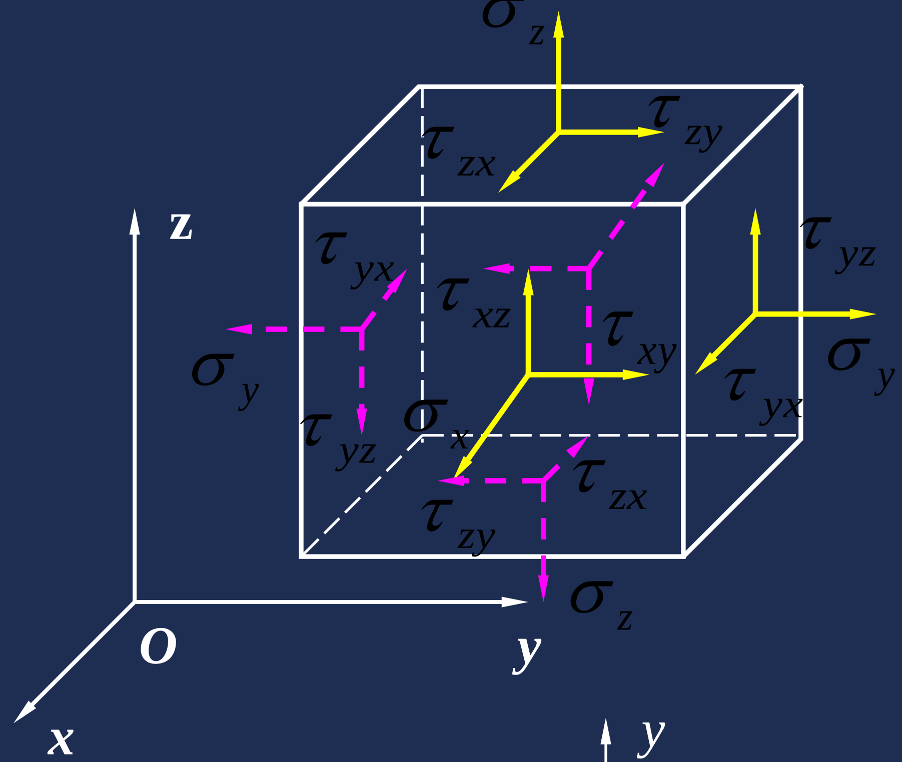
剪应力互等定理

应力符号的意义：

$\tau_{xy}$
- 第1个下标 $x$ 表示$\tau$所在面的法线方向；
- 第2个下标 $y$ 表示$\tau$的方向.

应力正负号的规定：

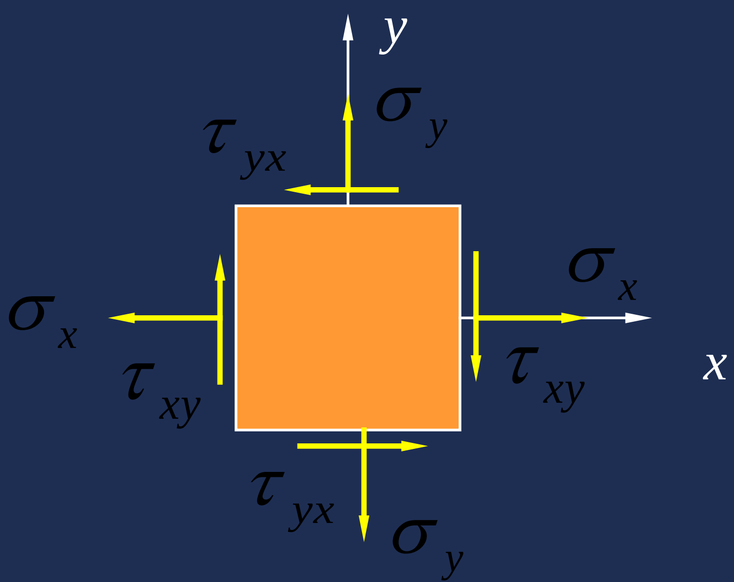
- 正应力—— 拉为正，压为负。
- 剪应力—— 坐标正面上，与坐标正向一致时为正；
  坐标负面上，与坐标正向相反时为正。




与材力中剪应力***τ***正负号规定的区别：

规定使得单元体顺时的剪应力***τ***为正，反之为负。

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}$$




在用应力莫尔圆时必须此规定求解问题

## 3. 形变

### (1) 一点形变的度量

形变 —— 物体的形状改变

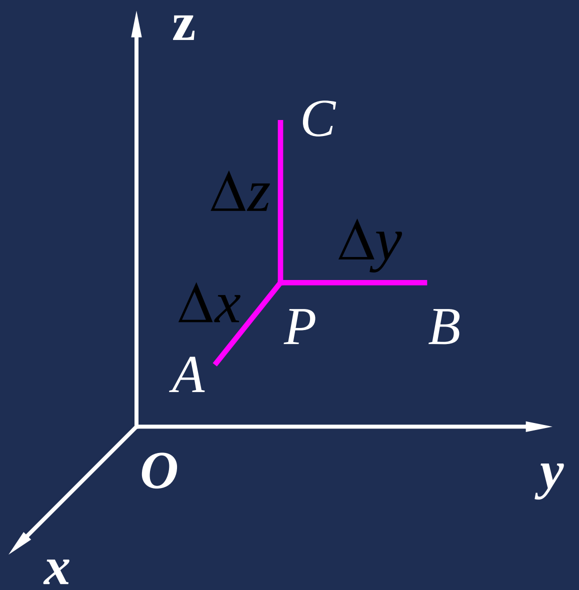
（1）线段长度的改变 ——用线（正）应变$\varepsilon$度量

（2）两线段间夹角的改变。 ——用剪应变$\gamma$度量

（剪应变——两垂直线段夹角（直角）的改变量）

三个方向的线应变： $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$

三个平面内的剪应变： $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$



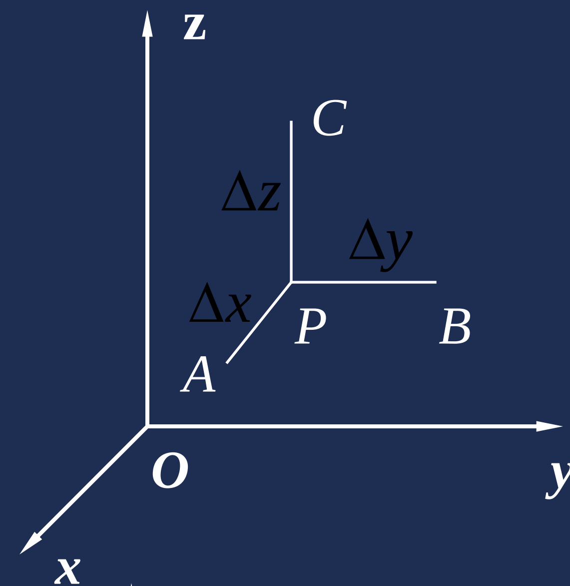

应变的正负：

线应变： 伸长时为正，缩短时为负；

剪应变： 以直角变小时为正，变大时为负；

## (2) 一点应变状态

—— 代表一点 $P$ 的邻域内线段与线段间夹角的改变




$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz}\\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z\end{bmatrix}$$

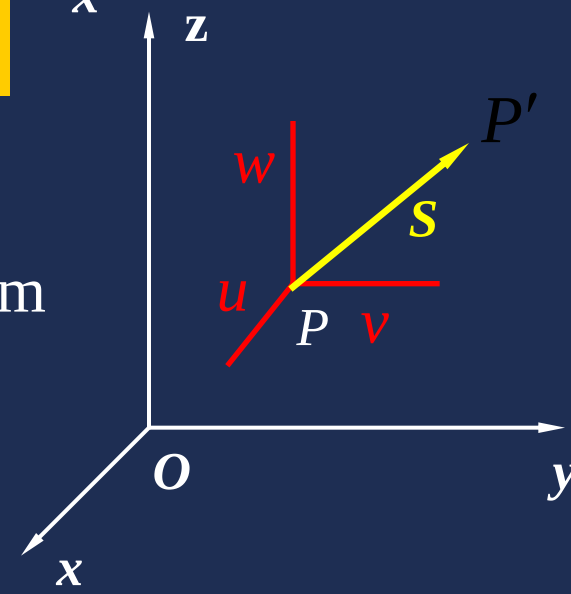
其中 $\left\{\begin{array}{l}\gamma_{xy}=\gamma_{yx}\\ \gamma_{yz}=\gamma_{zy}\\ \gamma_{zx}=\gamma_{xz}\end{array}\right.$

注：
- 应变无量纲；
- 应变分量均为位置坐标的函数，即

$$\varepsilon_x=\varepsilon_x(x,y,z),\cdots;\qquad \gamma_{xy}=\gamma_{xy}(x,y,z),\cdots$$

## 4. 位移

一点的位移 —— 矢量$S$　　量纲：m 或 mm




位移分量：
- $u$ —— $x$方向的位移 分量；
- $v$ —— $y$方向的位移 分量；
- $w$ —— $z$方向的位移 分量。

## 弹性力学问题：

已知外力、物体的形状和大小（边界）、材料特性（$E$、$\mu$）、约束条件等，求解应力、应变、位移分量。

## 需建立三个方面的关系：

（1）静力学关系：

应力与体力、面力间的关系；

（2）几何学关系：

形变与位移间的关系；

（3）物理学关系：

形变与应力间的关系。

# §1-3　弹性力学中的基本假定

## 1. 连续性假定

整个物体的体积都被组成物体的介质充满，不留下任何空隙。

该假定在研究物体的宏观力学特性时，与工程实际吻合较好；研究物体的微观力学性质时不适用。

作用：使得$\sigma$、$\varepsilon$、$u$ 等量表示成坐标的连续函数。

$$\left\{\begin{aligned} &\sigma=\sigma(x,y,z)\\ &\varepsilon_x=\varepsilon_x(x,y,z)\\ &u=u(x,y,z)\end{aligned}\right.$$

保证 $p=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta F}{\Delta s}$ 中极限的存在。

## 2. 线弹性假定

假定物体完全服从虎克（Hooke）定律，应力与应变间成线性比例关系（正负号变化也相同）。

比例常数 —— 弹性常数（$E$、$\mu$）

脆性材料—— 一直到破坏前，都可近似为线弹性的；

塑性材料—— 比例阶段，可视为线弹性的。

作用： 可使求解方程线性化

## 3. 均匀性假定

假定整个物体是由同一种材料组成 的，各部分材料性质相同。

作用：

弹性常数（$E$、$\mu$）——不随位置坐标而变化；

取微元体分析的结果可应用于整个物体。

## 4. 各向同性假定

假定物体内一点的弹性性质在所有各个方向都相同。

作用：弹性常数（$E$、$\mu$）——不随坐标方向而变化；

- 金属 —— 上述假定符合较好；
- 木材、岩石 —— 上述假定不符合，称为各向异性材料；

符合上述4个假定的物体，称为理想弹性体。

## 5. 小变形假定

假定位移和形变是微小的，即物体受力后物体内各点位移远远小物体的原来的尺寸。

$$\varepsilon << 1, \gamma << 1$$

作用：
- 建立方程时，可略去高阶微量；
- 可用变形前的尺寸代替变形后的尺寸。

⟶ 使求解的方程线性化。

工程力学问题建立力学模型的过程中，一般作三方面进行简化：

**结构简化**

如空间问题向平面问题的简化，向轴对称问题的简化，实体结构向板、壳结构的简化。

**受力简化**

如：根据圣维南原理，复杂力系简化为等效力系等。

**材料简化**

根据各向同性、连续、均匀等假设进行简化。

在建立数学模型的过程中，通常要注意分清问题的性质进行简化：

**线性化**

对高阶小量进行处理，能进行线性化的，进行线性化。

模型建立以后，对计算的结果进行分析整理，返回实际问题进行验证，一般通过实验验证：

**直接实验验证**

直接实验比较简单时可以直接进行，但有时十分困难。

**相似模型实验**

相似实验的模型一般应与实际问题的边界条件和形态是几何相似的。

# 本章结束!

作业：P.7-8

1,2,3,7,8