第四章　平面问题的极坐标解答

要点：（1）极坐标中平面问题的基本方程：

——平衡方程、几何方程、物理方程、相容方程、边界条件。

（2）极坐标中平面问题的求解方法及应用

应用：圆盘、圆环、厚壁圆筒、楔形体、半无限平面体等的应力与变形分析。

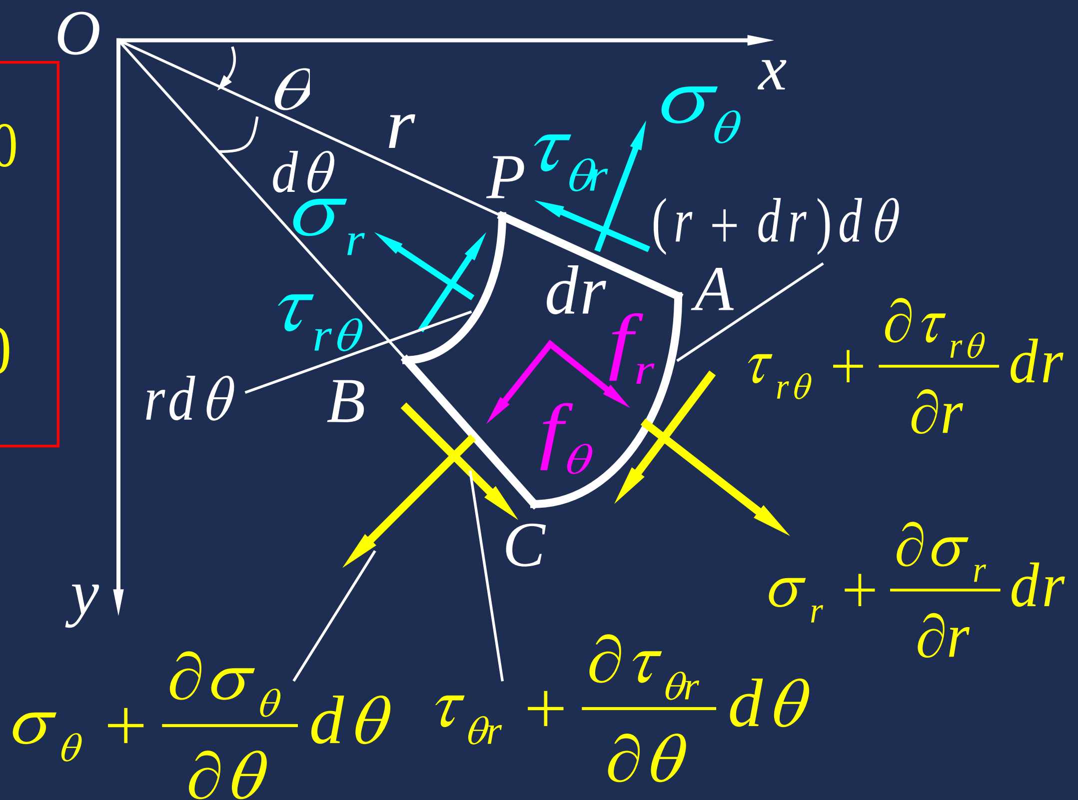
主　要　内　容

平衡微分方程

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+f_r=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}+f_\theta=0$$

（4—1）



$$\sum M=0,\quad \tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}$$

—— 剪应力互等定理

弹性力学平面问题极坐标求解的基本方程：

平衡微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + k_r = 0 \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{2\tau_{r\theta}}{r} + k_\theta = 0 \end{cases} \qquad (4-1)$$

几何方程：

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \gamma_{r\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r} \end{cases} \qquad (4-2)$$

物理方程：

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta) \qquad \gamma_{r\theta} = \dfrac{1}{G}\tau_{r\theta} = \dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{r\theta} \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r) \end{cases} \qquad (4-3)$$

(平面应力情形)

弹性力学极坐标求解归结为

（1） 由问题的条件求出满足式（4—6）的应力函数 $\varphi(r,\theta)$

$$\nabla^4\varphi=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)^2\varphi=0 \qquad (4-6)$$

（2） 由式（4—5）求出相应的应力分量：$\sigma_r,\sigma_\theta,\tau_{r\theta}$

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\qquad \sigma_\theta=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\qquad \tau_{r\theta}}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) \qquad (4-5)$$

（3） 将上述应力分量 $\sigma_r,\sigma_\theta,\tau_{r\theta}$ 满足问题的边界条件：

位移边界条件：$(u_r)_s=\bar{u}_r,\ (u_\theta)_s=\bar{u}_\theta$

应力边界条件：$\begin{cases} l(\sigma_r)_s+m(\tau_{r\theta})_s=\bar{k}_r \\ l(\tau_{r\theta})_s+m(\sigma_\theta)_s=\bar{k}_\theta \end{cases}$

（位移单值条件）

$\bar{u}_r,\bar{u}_\theta$ 为边界上已知位移，$\bar{k}_r,\bar{k}_\theta$ 为边界上已知的面力分量。

应力分量的坐标变换式

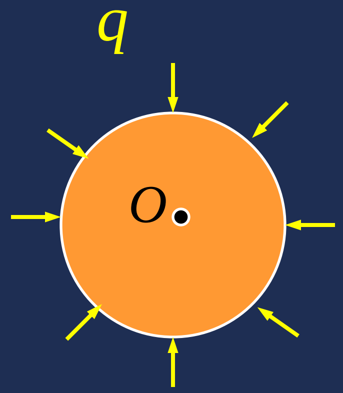
(1) 用极坐标下的应力分量表示直角坐标下的应力分量

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\cos 2\theta - \tau_{r\theta}\sin 2\theta \\ \sigma_y = \dfrac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} - \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\cos 2\theta + \tau_{r\theta}\sin 2\theta \\ \tau_{xy} = \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\sin 2\theta + \tau_{r\theta}\cos 2\theta \end{cases} \tag{4—8}$$

(2) 用直角坐标下的应力分量表示极坐标下的应力分量

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \sigma_\theta = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \end{cases} \tag{4—9}$$

3. 轴对称问题应力分量与相容方程



轴对称问题： $\varphi=\varphi(r) \Longrightarrow \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0$

由式（4—5）和（4—6）得应力分量和相容方程为：

应力分量：

$$\boxed{\begin{cases}\sigma_r=\dfrac{1}{r}\dfrac{d\varphi}{dr}\\[2ex] \sigma_\theta=\dfrac{d^2\varphi}{dr^2}\\[2ex] \tau_{r\theta}=0\end{cases}}\qquad(4\text{—}10)$$

$$\begin{cases}\sigma_r=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\\[2ex] \sigma_\theta=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\\[2ex] \tau_{r\theta}=-\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)\end{cases}\qquad(4\text{—}5)$$

相容方程：

$$\boxed{\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2\varphi=0}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)^2\varphi=0$$

（4—6）

§ 4-5　轴对称应力与相应的位移

求解方法：——逆解法

1. 轴对称问题应力分量与相容方程

（1）应力分量

$$\underbrace{\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} \qquad \sigma_\theta = \frac{d^2\varphi}{dr^2}} \qquad \tau_{r\theta} = 0 \qquad (4-10)$$

（2）相容方程

$$\nabla^4\varphi = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 \varphi = 0$$

2. 相容方程的求解

将相容方程表示为：

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right) = 0$$

将其展开，有

$$\frac{d^4\varphi}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\varphi}{dr} = 0$$

4阶变系数齐次微分方程

$$\frac{d^4\varphi}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3\varphi}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{d\varphi}{dr}=0$$ —— 4阶变系数齐次微分方程

方程两边同乘以 r^4：$$r^4\frac{d^4\varphi}{dr^4}+2r^3\frac{d^3\varphi}{dr^3}-r^2\frac{d^2\varphi}{dr^2}+r\frac{d\varphi}{dr}=0$$

—— Euler 齐次微分方程

令：$r=e^t$（或 $t=\ln r$）有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\varphi}{dr}=\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dt},\qquad \frac{d^2\varphi}{dr^2}=\frac{d}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)=\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}-\frac{d\varphi}{dt}\right)\\
&\frac{d^3\varphi}{dr^3}=\frac{1}{r^3}\left(\frac{d^3\varphi}{dt^3}-3\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\frac{d\varphi}{dt}\right),\\
&\frac{d^4\varphi}{dr^4}=\frac{1}{r^4}\left(\frac{d^4\varphi}{dt^4}-6\frac{d^3\varphi}{dt^3}+11\frac{d^2\varphi}{dt^2}-6\frac{d\varphi}{dt}\right)
\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{代入上述方程}}$$

$$\boxed{\frac{d^4\varphi}{dt^4}-4\frac{d^3\varphi}{dt^3}+4\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0}\xrightarrow{\text{其特征方程}}\lambda^4-4\lambda^3+4\lambda^2=0$$

λ 为方程的特征值

$$\boxed{\frac{d^4\varphi}{dt^4}-4\frac{d^3\varphi}{dt^3}+4\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0}$$

$$\lambda^4-4\lambda^3+4\lambda^2=0$$

方程的特征根为：

$$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=\lambda_4=2$$

于是，方程的解为：

$$\varphi=At+Bte^{2t}+Ce^{2t}+D$$

将 $t=\ln r$ 代回：

$$\boxed{\varphi=A\ln r+Br^2\ln r+Cr^2+D} \quad (4—11)$$

—— 轴对称问题相容方程的通解，A、B、C、D 为待定常数。

3. 应力分量

将方程（4-11）代入应力分量表达式

$$\underbrace{\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\quad \sigma_\theta=\frac{d^2\varphi}{dr^2}\quad \tau_{r\theta}=0} \quad (4—10)$$

$$\boxed{\begin{cases}\sigma_r=\dfrac{A}{r^2}+B(1+2\ln r)+2C\\[2ex]\sigma_\theta=-\dfrac{A}{r^2}+B(3+2\ln r)+2C\\[2ex]\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}=0\end{cases}} \quad (4—12)$$

—— 轴对称平面问题的应力分量表达式

4. 位移分量 (u_r, u_θ)

对于平面应力问题，有物理方程

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_r}{\partial r} = \qquad \varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta) \\
&\qquad = \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\frac{A}{r^2} + (1-2\mu)B + 2(1-\mu)B\ln r + 2(1-\mu)C\right] \\
&\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r) \\
&\qquad = \frac{1}{E}\left[-(1+\mu)\frac{A}{r^2} + (3-\mu)B + 2(1-\mu)B\ln r + 2(1-\mu)C\right] \\
&\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = 0
\end{aligned}
\right.
\qquad \text{(a)}
$$

积分式（a），有

$$u_r=\frac{1}{E}\left[-(1+\mu)\frac{A}{r}+2(1-\mu)Br(\ln r-1)+(1-3\mu)Br\right.$$
$$\left.+2(1-\mu)Cr\right]+f(\theta) \qquad \text{（b）}$$

将式（b）代入式（a）中第二式，得 —— $f(\theta)$ 是任意的待定函数

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}=\frac{r}{E}\left[-(1+\mu)\frac{A}{r^2}+(3-\mu)B+2(1-\mu)B\ln r+2(1-\mu)C\right]-u_r$$
$$=\frac{4Br}{E}-f(\theta)$$

将上式积分，得：
$$u_\theta=\frac{4Br\theta}{E}-\int f(\theta)d\theta+f_1(r) \qquad \text{（c）}$$

—— $f_1(r)$ 是 r 任意函数

将式（b）代入式（a）中第三式，得

$$\gamma_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}=0 \qquad \frac{1}{r}\frac{df(\theta)}{d\theta}+\frac{df_1(r)}{dr}+\frac{1}{r}\int f(\theta)d\theta-\frac{f_1(r)}{r}=0$$

或写成：
$$f_1(r)-r\frac{df_1(r)}{dr}=\frac{df(\theta)}{d\theta}+\int f(\theta)d\theta$$

要使该式成立，两边须为同一常数。

$$\begin{cases} f_1(r) - r\dfrac{df_1(r)}{dr} = F & \text{（d）} \\ \dfrac{df(\theta)}{d\theta} + \int f(\theta)d\theta = F & \text{（e）} \end{cases}$$

式中F为常数。对其积分有：

$$f_1(r) = Hr + F \qquad \text{（f）}$$

其中 H 为常数。对式（e）两边求导

$$\frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} + f(\theta) = 0$$

其解为：$f(\theta) = I\cos\theta + K\sin\theta$ （g）

$$\int f(\theta)d\theta = F - \frac{df(\theta)}{d\theta} = F - I\sin\theta + K\cos\theta \qquad \text{（h）}$$

将式（f）（h）代入式（b）（c），得

$$\boxed{\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{E}\left[-(1+\mu)\frac{A}{r} + 2(1-\mu)Br(\ln r - 1) + (1-3\mu)Br \right. \\ &\qquad \left. + 2(1-\mu)Cr\right] + I\cos\theta + K\sin\theta \\ u_\theta &= \frac{4Br\theta}{E} + Hr - I\sin\theta + K\cos\theta \end{aligned}} \qquad \text{（4-13）}$$

平面轴对称问题小结：

（1）应力函数

$$\boxed{\varphi = A\ln r + Br^2\ln r + Cr^2 + D} \tag{4—11}$$

（2）应力分量

$$\boxed{\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{A}{r^2} + B(1+2\ln r) + 2C \\ \sigma_\theta = -\dfrac{A}{r^2} + B(3+2\ln r) + 2C \\ \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0 \end{cases}} \tag{4—12}$$

（3）位移分量

$$\boxed{\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{E}\left[-(1+\mu)\frac{A}{r} + 2(1-\mu)Br(\ln r - 1) + (1-3\mu)Br \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\mu)Cr\right] + I\cos\theta + K\sin\theta \\ u_\theta &= \frac{4Br\theta}{E} + Hr - I\sin\theta + K\cos\theta \end{aligned}} \tag{4-13}$$

式中：A、B、C、H、I、K 由应力和位移边界条件确定。

（3）位移分量

$$\boxed{\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{E}\left[-(1+\mu)\frac{A}{r}+2(1-\mu)Br(\ln r-1)+(1-3\mu)Br\right. \\ &\qquad \left. +2(1-\mu)Cr\right]+I\cos\theta+K\sin\theta \\ u_\theta &= \frac{4Br\theta}{E}+Hr-I\sin\theta+K\cos\theta \end{aligned}} \quad \text{（4-13）}$$

式中：A、B、C、H、I、K 由应力和位移边界条件确定。

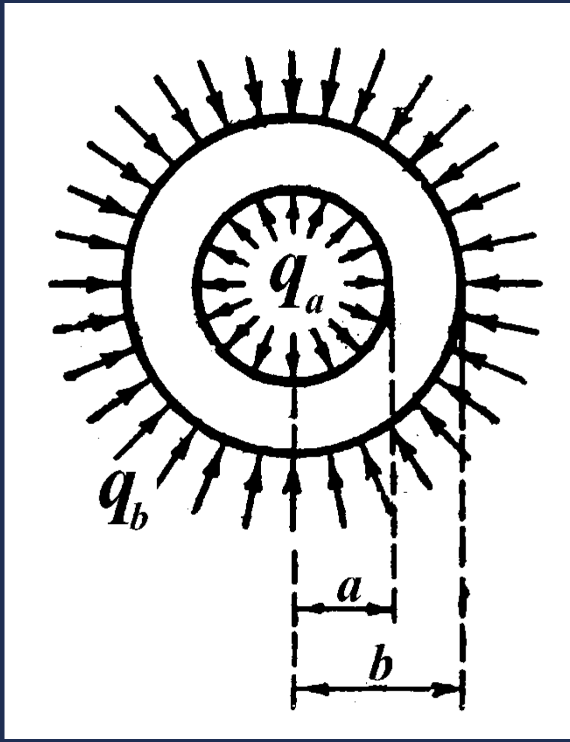
由式（4-13）可以看出： 应力轴对称并不表示位移也是轴对称的。

但在轴对称应力情况下，若物体的几何形状、受力、位移约束都是轴对称的，则位移也应该是轴对称的。 这 时，物体内各点都不会有环向位移，即不论 r 和 θ 取何值，都应有： $u_\theta=0$。

对这种情形，有 $\boxed{B=H=I=K=0}$ 式（4-13）变为：

$$\left\{\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{E}\left[-(1+\mu)\frac{A}{r}+2(1-\mu)Cr\right] \\ u_\theta &= 0 \end{aligned}\right. \quad \text{[4-13（a）]}$$

§ 4-6　圆环或圆筒受均布压力　压力隧洞



已知：　q_a, q_b, a, b　　求：应力分布。

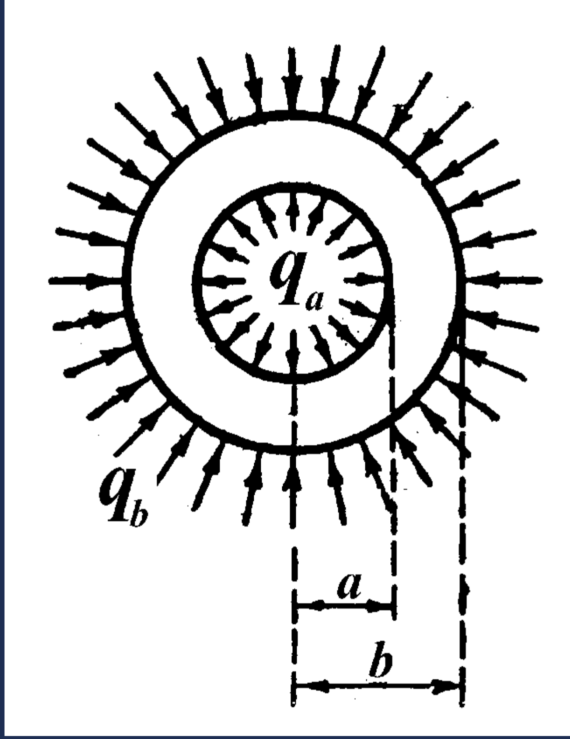
确定应力分量的表达式：

$$
\begin{cases}
\sigma_r = \dfrac{A}{r^2} + B(1 + 2\ln r) + 2C \\
\sigma_\theta = -\dfrac{A}{r^2} + B(3 + 2\ln r) + 2C \\
\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0
\end{cases}
\tag{4—12}
$$

边界条件：
$$
\begin{cases}
\tau_{r\theta}\big|_{r=a} = 0 \qquad \tau_{r\theta}\big|_{r=b} = 0 \\
\sigma_r\big|_{r=a} = -q_a \qquad \sigma_r\big|_{r=b} = -q_b
\end{cases}
\tag{a}
$$

将式（4-12）代入，有：
$$
\begin{cases}
\dfrac{A}{a^2} + B(1 + 2\ln a) + 2C = -q_a \\
\dfrac{A}{b^2} + B(1 + 2\ln b) + 2C = -q_b
\end{cases}
\tag{b}
$$

$$\begin{cases} \dfrac{A}{a^2} + B(1+2\ln a) + 2C = -q_a \\ \dfrac{A}{b^2} + B(1+2\ln b) + 2C = -q_b \end{cases} \qquad \text{(b)}$$



式中有三个未知常数，二个方程不通用确定。

对于多连体问题，位移须满足位移单值条件。

$$u_\theta = \boxed{\frac{4Br\theta}{E}} + Hr - I\sin\theta + K\cos\theta$$

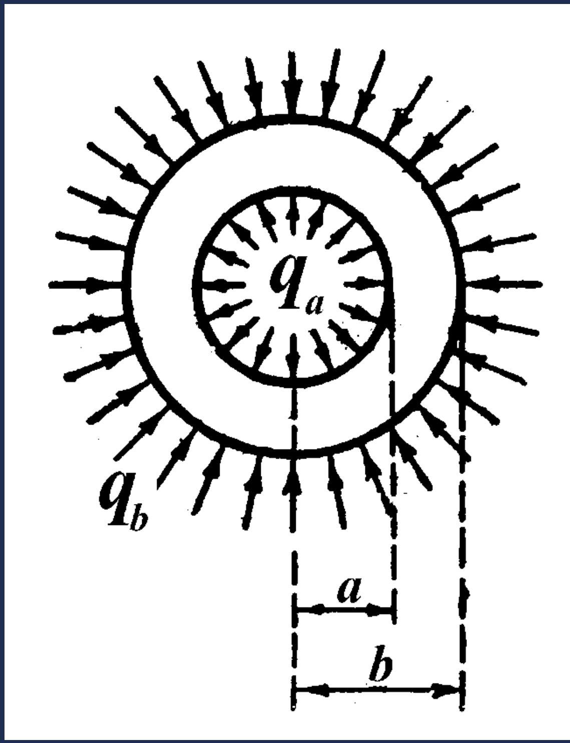
位移多值项

要使单值，须有：$B = 0$ ，由式（b）得

$$A = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}(q_b - q_a), \qquad 2C = \frac{(q_a a^2 - q_b b^2)}{b^2 - a^2}$$

将其代回应力分量式（4-12），有：

$$
\begin{cases}
\sigma_r = -\dfrac{\dfrac{b^2}{r^2}-1}{\dfrac{b^2}{a^2}-1}q_a - \dfrac{1-\dfrac{a^2}{r^2}}{1-\dfrac{a^2}{b^2}}q_b \\
\sigma_\theta = \dfrac{\dfrac{b^2}{r^2}+1}{\dfrac{b^2}{a^2}-1}q_a - \dfrac{1+\dfrac{a^2}{r^2}}{1-\dfrac{a^2}{b^2}}q_b
\end{cases} \qquad (4\text{-}14)
$$

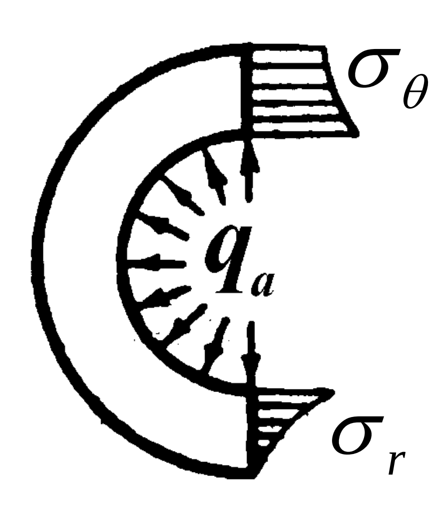


（1）若： $a = 0, q_a = 0 \Rightarrow \sigma_r = -q_b,\ \sigma_\theta = -q_b$ (二向等压情况)

（2）若： $q_b = 0$(而 $q_a \neq 0$)

$$
\sigma_r = -\frac{\dfrac{b^2}{r^2}-1}{\dfrac{b^2}{a^2}-1}q_a\ (<0) \qquad \sigma_\theta = \frac{\dfrac{b^2}{r^2}+1}{\dfrac{b^2}{a^2}-1}q_a\ (>0)
$$

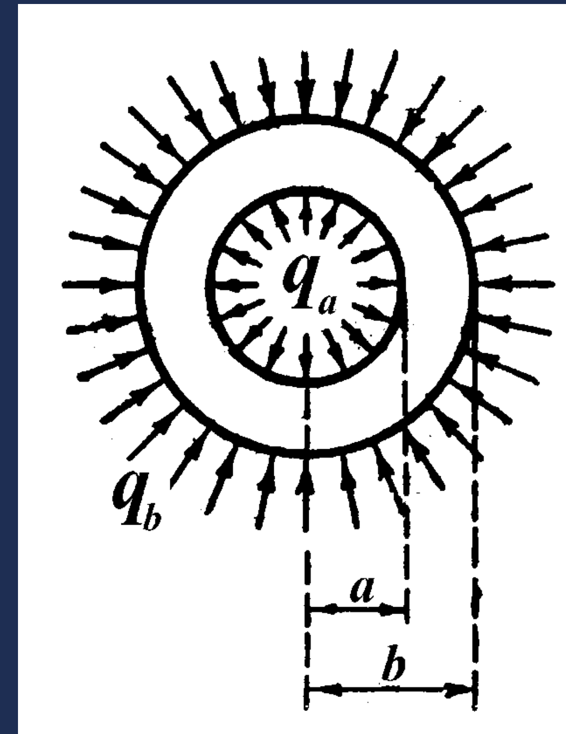
（压应力） （拉应力）



（3）若： $q_a = 0, (q_b \neq 0)$

$$\sigma_r = -\frac{1-\dfrac{a^2}{r^2}}{1-\dfrac{a^2}{b^2}} q_b \ (<0) \qquad \sigma_\theta = -\frac{1+\dfrac{a^2}{r^2}}{1-\dfrac{a^2}{b^2}} q_b \ (<0)$$

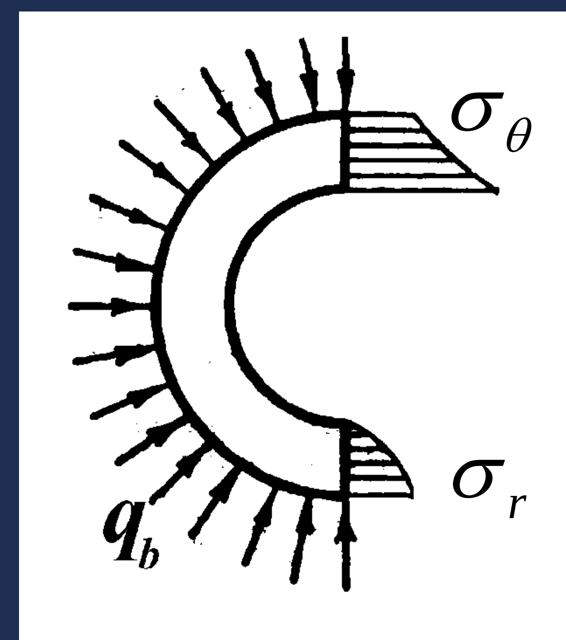
（压应力） （压应力）



（4）若：$b \to \infty (q_a \neq 0)$

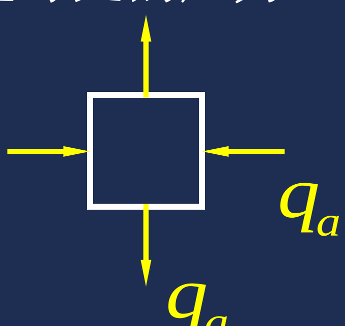
—— 具有圆形孔道的无限大弹性体。

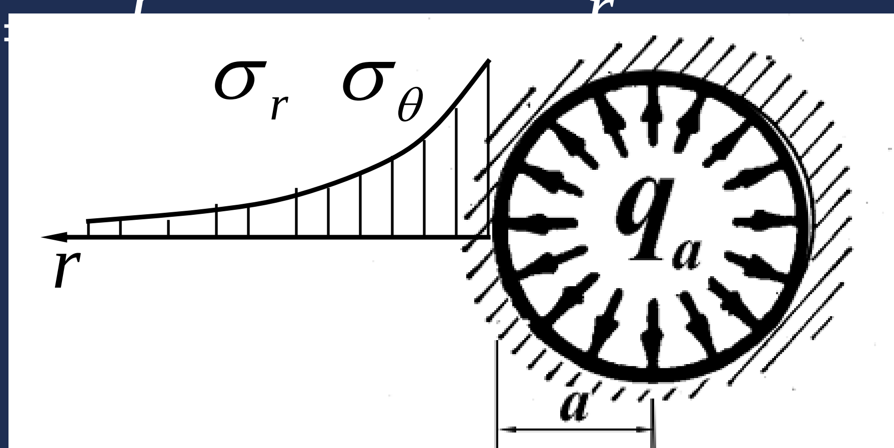
$$\sigma_r = -\frac{a^2}{r^2} q_a \qquad \sigma_\theta = \frac{a^2}{r^2} q_a$$



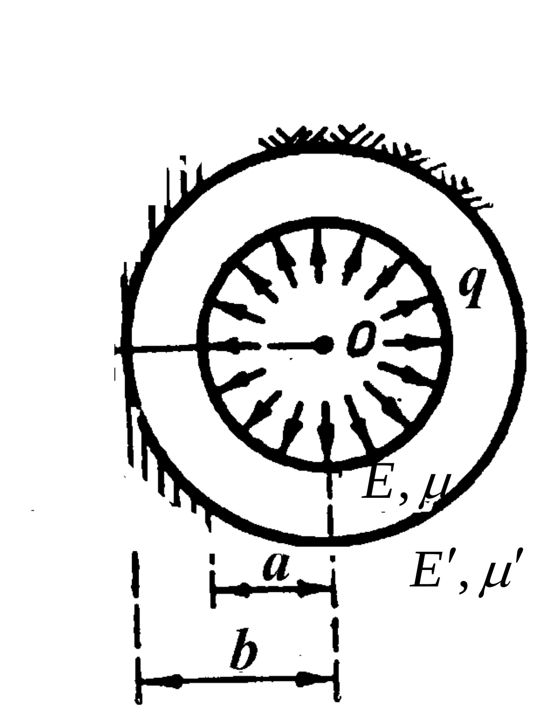
$\sigma_r =$

边缘处的应力：





§ 4-7 压力隧洞



问题：厚壁圆筒埋在无限大弹性体内，受内压 q 作用，求圆筒的应力。

1. 分析：

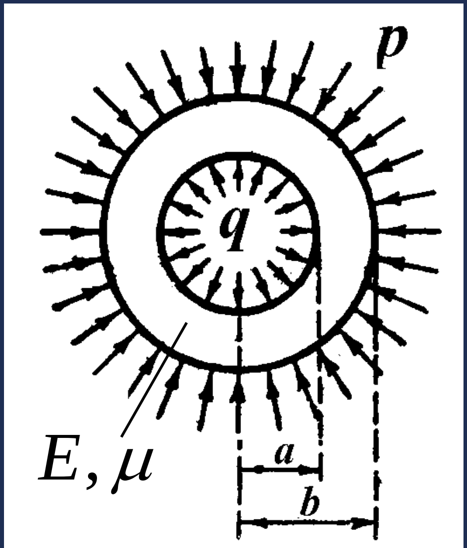
与以前相比较，相当于两个轴对称问题：

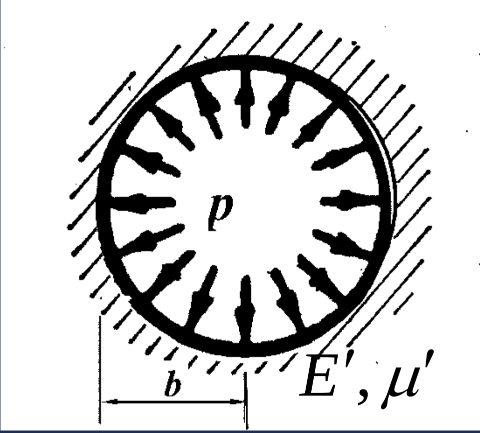
(a) 受内外压力作用的厚壁圆筒；
(b) 仅受外压作用的无限大弹性体。

确定外压 p 的两个条件：

径向变形连续：$u_r\big|_{r=b} = u'_r\big|_{r=b}$

径向应力连续：$\sigma_r\big|_{r=b} = \sigma'_r\big|_{r=b}$





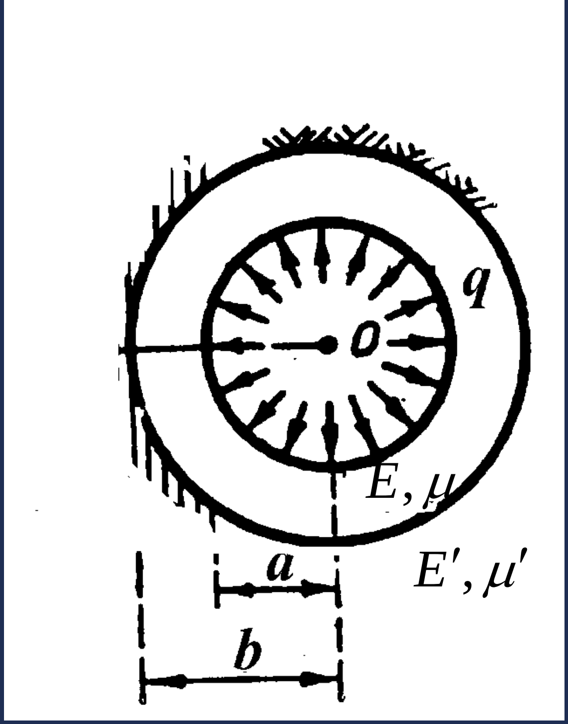
2. 求解

2. 求解

(1) 圆筒的应力与边界条件

应力：$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{A}{r^2} + 2C \\ \sigma_\theta = -\dfrac{A}{r^2} + 2C \end{cases}$ （a）

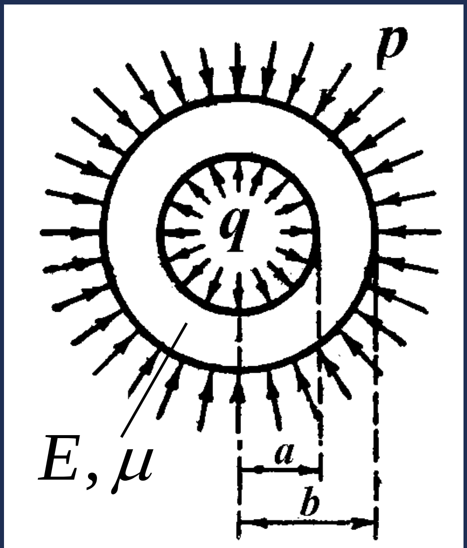
边界条件：$\sigma_r\Big|_{r=a} = -q \qquad \sigma_r\Big|_{r=b} = -p$

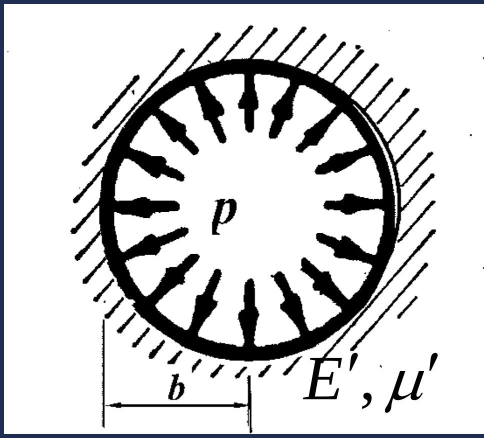


(2) 无限大弹性体的应力与边界条件

应力：$\begin{cases} \sigma_r' = \dfrac{A'}{r^2} + 2C' \\ \sigma_\theta' = -\dfrac{A'}{r^2} + 2C' \end{cases}$ （b）

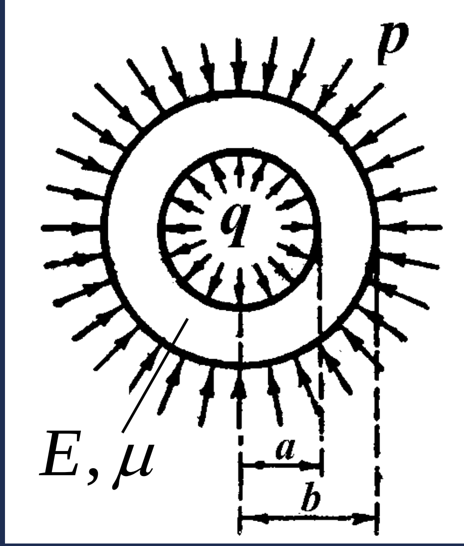
边界条件：$\begin{cases} \sigma_r'\Big|_{r=b} = -p \\ \sigma_r\Big|_{r\to\infty} = 0 \end{cases}$

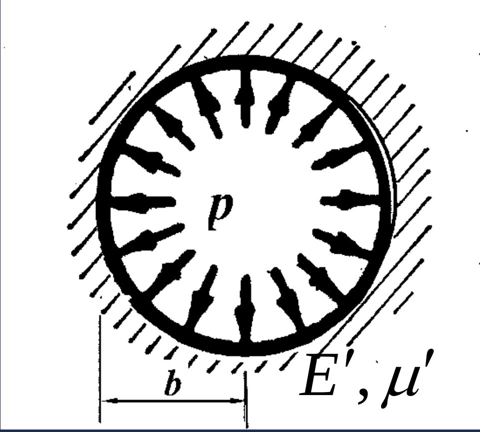




将式（a）、（b）代入相应的边界条件，得到如下方程：

$$\begin{cases} \dfrac{A}{a^2} + 2C = -q \\ \dfrac{A}{b^2} + 2C = -p \end{cases} \quad \text{(c)} \qquad \begin{cases} \dfrac{A'}{b^2} + 2C' = -p \\ 2C' = 0 \end{cases} \quad \text{(d)}$$





4个方程不能解5个未知量，需由位移连续条件确定。

$$u_r\Big|_{r=b} = u'_r\Big|_{r=b}$$

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{1-\mu^2}{E}\left[-\left(1+\dfrac{\mu}{1-\mu}\right)\dfrac{A}{r} + 2\left(1-\dfrac{\mu}{1-\mu}\right)Cr\right] + I\cos\theta + K\sin\theta \\ u'_r = \dfrac{1-\mu'^2}{E'}\left[-\left(1+\dfrac{\mu'}{1-\mu'}\right)\dfrac{A'}{r} + 2\left(1-\dfrac{\mu'}{1-\mu'}\right)C'r\right] + I'\cos\theta + K'\sin\theta \end{cases}$$

上式也可整理为：

$$
\begin{cases}
u_r = \dfrac{1+\mu}{E}\left[2(1-2\mu)Cr - \dfrac{A}{r}\right] + I\cos\theta + K\sin\theta \\
u_r' = \dfrac{1+\mu'}{E'}\left[2(1-2\mu')C'r - \dfrac{A'}{r}\right] + I'\cos\theta + K'\sin\theta
\end{cases}
$$

利用： $u_r\big|_{r=b} = u_r'\big|_{r=b}$

$$
\frac{1+\mu}{E}\left[2(1-2\mu)Cb - \frac{A}{b}\right] + I\cos\theta + K\sin\theta
$$
$$
= \frac{1+\mu'}{E'}\left[2(1-2\mu')C'b - \frac{A'}{b}\right] + I'\cos\theta + K'\sin\theta \qquad \text{(e)}
$$

要使对任意的 θ 成立，须有

$$
\begin{cases}
\dfrac{1+\mu}{E}\left[2(1-2\mu)Cb - \dfrac{A}{b}\right] = \dfrac{1+\mu'}{E'}\left[2(1-2\mu')\overset{\overset{0}{\|}}{C'}b - \dfrac{A'}{b}\right] \\
I = I' \qquad K = K'
\end{cases} \qquad \text{(f)}
$$

对式（f）整理有，有

$$n\left[2(1-2\mu)C-\frac{A}{b^2}\right]+\frac{A'}{b^2}=0 \quad \text{(g)}$$

式（g）中： $n=\dfrac{E'(1+\mu)}{E(1+\mu')}$

将式（g）与式（c）（d）联立求解

$$\begin{cases}\sigma_r=-q\dfrac{[1+(1-2\mu)n]\dfrac{b^2}{r^2}-(1-n)}{[1+(1-2\mu)n]\dfrac{b^2}{a^2}-(1-n)}\\[2ex] \sigma_\theta=q\dfrac{[1+(1-2\mu)n]\dfrac{b^2}{r^2}+(1-n)}{[1+(1-2\mu)n]\dfrac{b^2}{a^2}-(1-n)}\\[2ex] \sigma_r'=-\sigma_\theta'=-q\dfrac{2(1-\mu)n\dfrac{b^2}{r^2}}{[1+(1-2\mu)n]\dfrac{b^2}{a^2}-(1-n)}\end{cases} \quad \text{(4-16)}$$

当 $n<1$ 时，应力分布如图所示。

讨论：

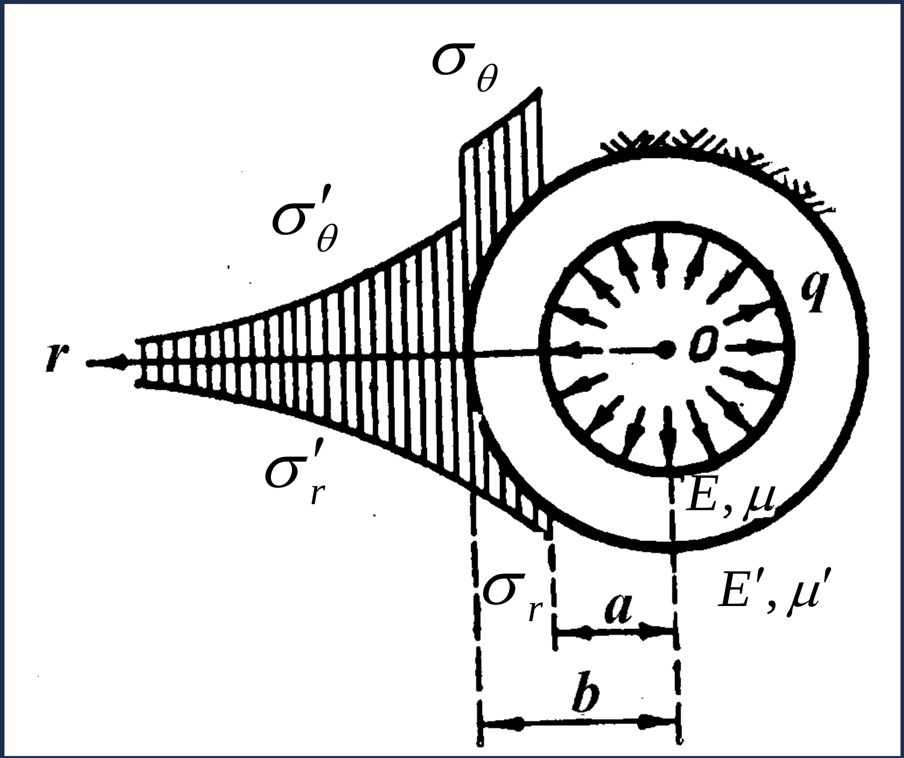
压力隧洞问题为最简单的接触问题（面接触）。

（1）完全接触：

接触面间既不互相脱离，也不互相滑动。接触条件为

应力：
$$\begin{cases} \sigma_r\big|_{r=b} = \sigma'_r\big|_{r=b} \\ \tau_{r\theta}\big|_{r=b} = \tau'_{r\theta}\big|_{r=b} \end{cases}$$

位移：
$$\begin{cases} u_r\big|_{r=b} = u'_r\big|_{r=b} \\ u_\theta\big|_{r=b} = u'_\theta\big|_{r=b} \end{cases}$$



（1）非完全接触（光滑接触）

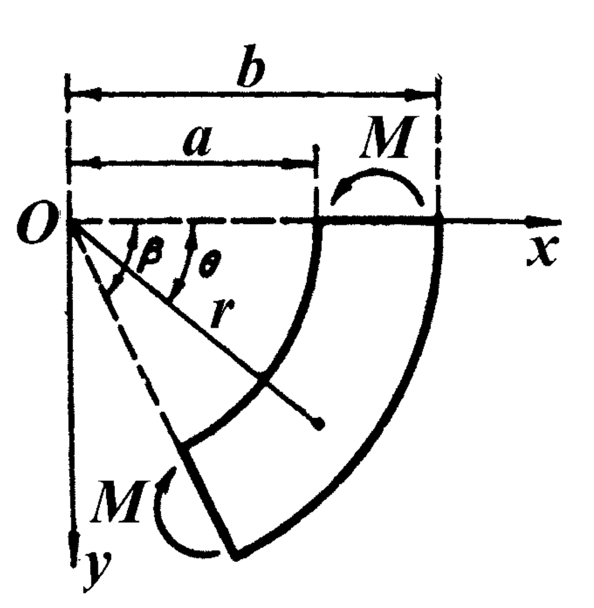
接触条件：

应力：
$$\sigma_r\big|_{r=b} = \sigma'_r\big|_{r=b}$$
$$\tau_{r\theta}\big|_{r=b} = \tau'_{r\theta}\big|_{r=b} = 0$$

位移：
$$u_r\big|_{r=b} = u'_r\big|_{r=b}$$

§　　曲梁的纯弯曲

1. 曲梁的应力



1．问题及其描述

矩形截面曲梁：内半径为 a，外半径为 b，在两端受有大小相等而转向相反的弯矩 M 作用（梁的厚度为单位1），O 为曲梁的曲率中心，两端面间极角为β。

取曲梁的曲率中心 O 为坐标的原点，并按图示建立坐标系。

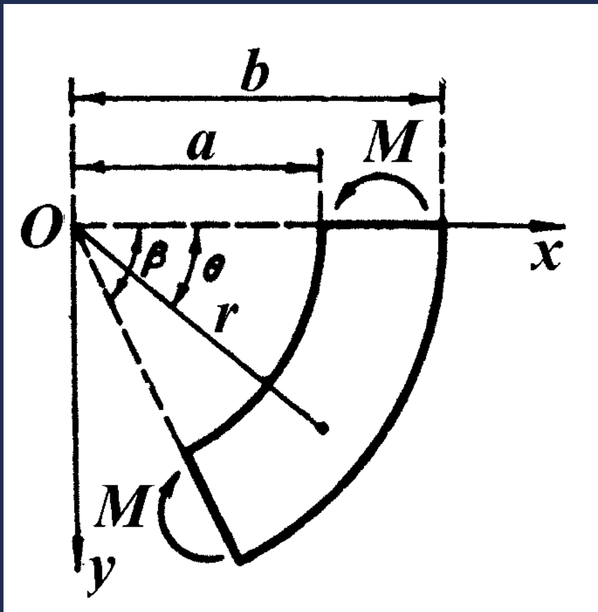
由于各截面上弯矩 M 相同，因而可假定各截面上应力相同，构成一轴对称问题（对称轴为 z 轴）。

2．应力分量

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{A}{r^2} + B(1 + 2\ln r) + 2C \\ \sigma_\theta = -\dfrac{A}{r^2} + B(3 + 2\ln r) + 2C \\ \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0 \end{cases}$$

3. 边界条件

（1）$\begin{cases} \tau_{r\theta}\big|_{r=a}=0, & \tau_{r\theta}\big|_{r=b}=0 \\ \tau_{r\theta}\big|_{\theta=0}=0, & \tau_{r\theta}\big|_{\theta=\beta}=0 \end{cases}$ —— 自然满足



（2）$\sigma_r\big|_{r=a}=0, \quad \sigma_r\big|_{r=b}=0$

将应力分量代入，有

$$\begin{cases} \dfrac{A}{a^2}+B(1+2\ln a)+2C=0 & \text{(a)} \\ \dfrac{A}{b^2}+B(1+2\ln b)+2C=0 & \text{(b)} \end{cases}$$

注：此处为单连体问题，$B\neq 0$

（3）端部：

$$\int_a^b \sigma_\theta dr=0 \qquad \text{(c)}$$

$$\int_a^b \sigma_\theta r dr=M \qquad \text{(d)}$$

由轴对称问题应力分量式

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} \qquad \sigma_\theta=\frac{d^2\varphi}{dr^2}$$

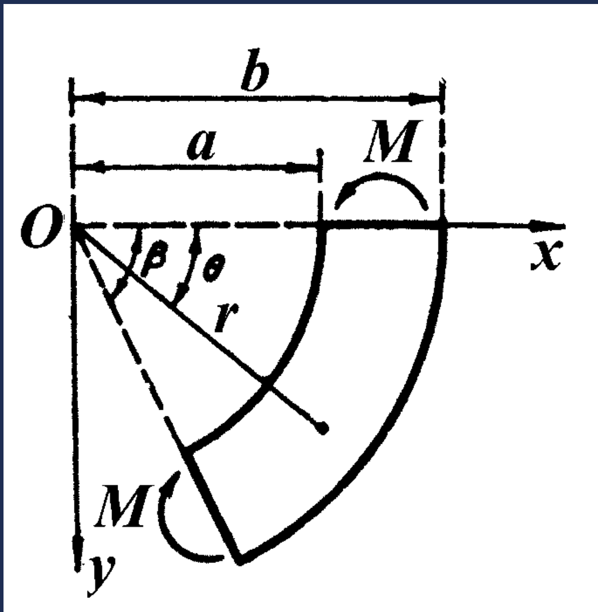
$$r\sigma_r=\frac{d\varphi}{dr}$$

将其代入式（c）

$$\begin{cases} \int_a^b \sigma_\theta dr = 0 & \text{（c）} \\ \int_a^b \sigma_\theta r dr = M & \text{（d）} \end{cases}$$

轴对称问题应力分量式：

$$\begin{cases} r\sigma_r = \dfrac{d\varphi}{dr} \\ \sigma_\theta = \dfrac{d^2\varphi}{dr^2} \end{cases}$$



代入式（c），有

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = \int_a^b \frac{d^2\varphi}{dr^2} dr = \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_a^b = \left(r\sigma_r\right)_a^b$$

$$= b\left(\sigma_r\right)_{r=b} - a\left(\sigma_r\right)_{r=a} = 0 \qquad \left(\because \left(\sigma_r\right)_{r=a} = \left(\sigma_r\right)_{r=b} = 0\right)$$

代入式（d），有

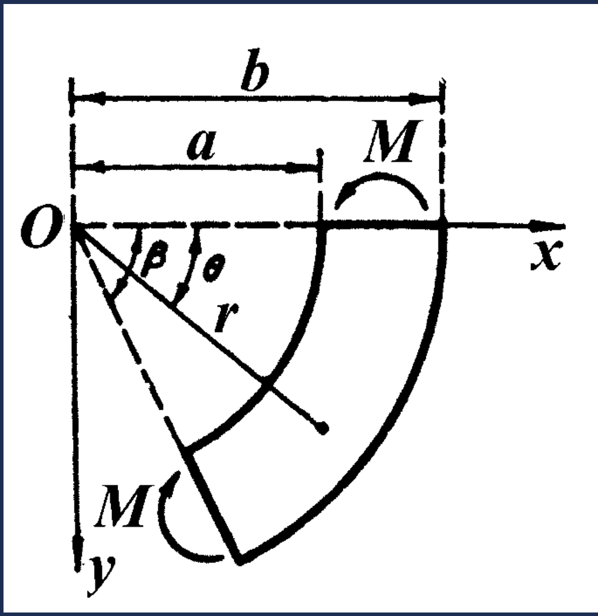
（分部积分）

$$\int_a^b \sigma_\theta r dr = \int_a^b r \frac{d^2\varphi}{dr^2} dr = \int_a^b r d\left(\frac{d\varphi}{dr}\right) = \left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)_a^b - \int_a^b \frac{d\varphi}{dr} dr$$

$$= \left(r^2\sigma_r\right)_a^b - \varphi\Big|_a^b = b^2 \underbrace{\sigma_r\Big|_{r=b}}_{=0} - a^2 \underbrace{\sigma_r\Big|_{r=a}}_{=0} - \varphi\Big|_a^b$$

$$= -\varphi\Big|_a^b = M$$

$$\int_a^b \sigma_\theta r dr = -\varphi \Big|_a^b = -\varphi \Big|_{r=b} + \varphi \Big|_{r=a} = M$$



$$\boxed{\varphi = A\ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D}$$

将其代入，有

$$-\left(A\ln b + Bb^2\ln b + Cb^2 + \cancel{D}\right) + \left(A\ln a + Ba^2\ln a + Ca^2 + \cancel{D}\right) = M$$

整理，有

$$\begin{cases} A(\ln a - \ln b) + B(a^2\ln a - b^2\ln b) + C(a^2 - b^2) = M & \text{（d）} \\ \dfrac{A}{a^2} + B(1 + 2\ln a) + 2C = 0 & \text{（a）} \\ \dfrac{A}{b^2} + B(1 + 2\ln b) + 2C = 0 & \text{（b）} \end{cases}$$

联立求解式（a）（b）（d）,可求得:

$$A=\frac{4M}{N}\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{a}\qquad B=\frac{2M}{a^2N}\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)$$

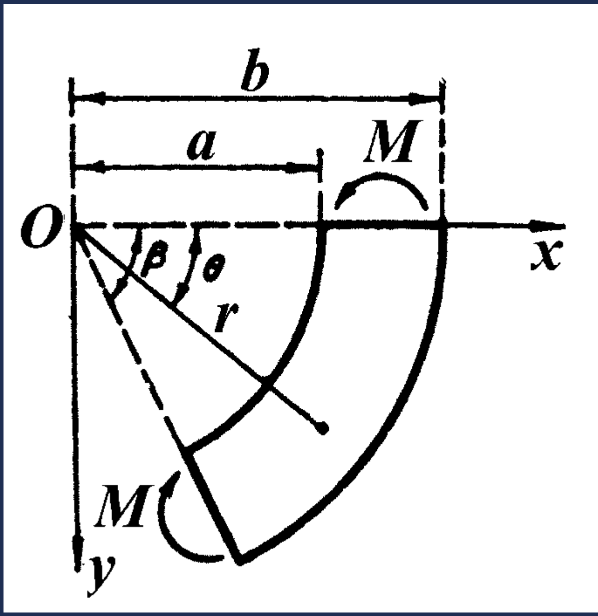
$$C=-\frac{M}{a^2N}\left[\frac{b^2}{a^2}-1+2\left(\frac{b^2}{a^2}\ln b-\ln a\right)\right]$$

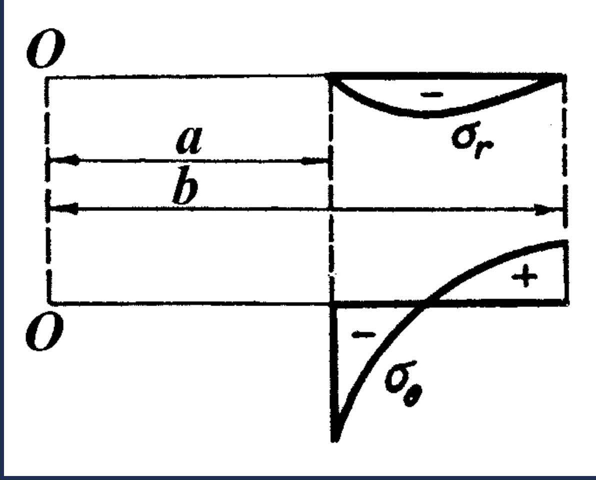
其中： $$N=\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)^2-4\frac{b^2}{a^2}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2$$

将其代入应力分量式，有

$$\begin{cases}\sigma_r=-\dfrac{4M}{a^2N}\left(\dfrac{b^2}{a^2}\ln\dfrac{b}{r}+\ln\dfrac{r}{a}-\dfrac{b^2}{r^2}\ln\dfrac{b}{a}\right)\\ \sigma_\theta=\dfrac{4M}{a^2N}\left(\dfrac{b^2}{a^2}-1-\dfrac{b^2}{a^2}\ln\dfrac{b}{r}-\ln\dfrac{r}{a}-\dfrac{b^2}{r^2}\ln\dfrac{b}{a}\right)\\ \tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}=0\end{cases}\tag{f}$$

其截面上的应力分布如图：





讨论：

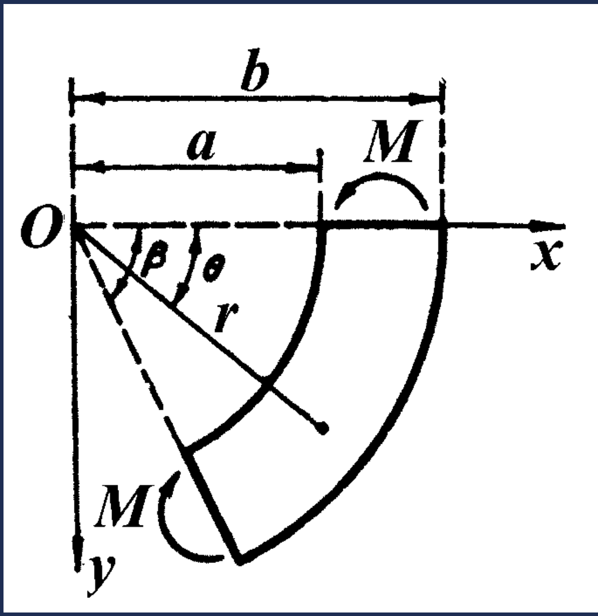
（1） $r=a$时，σ_θ取得最大值；

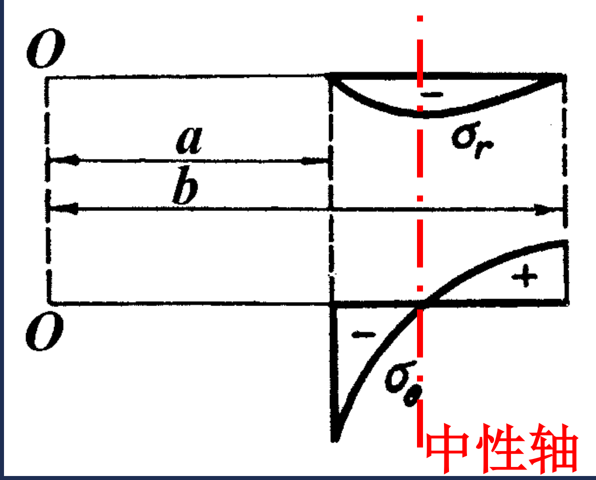
（2） 中性轴（ $\sigma_\theta=0$处 ）距内侧纤维较近，离外侧较远，中性轴不过截面形心。

（3）与材料中比较：

σ_θ 关于截面不再成线性分布，而是成双曲线分布。但在曲率不大时这种影响较小；

挤压应力 σ_r 实际不为零；





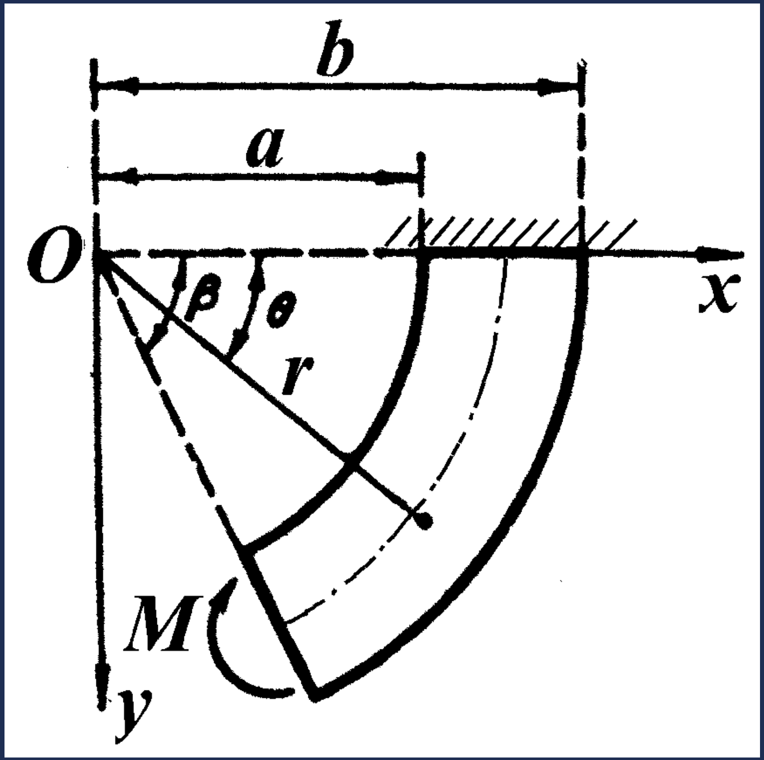
2. 曲梁的位移

2. 曲梁的位移

假定：$\theta = 0, r = r_0 = \dfrac{a+b}{2}$ 处，有

$$(u_r)_{\substack{\theta=0\\ r=r_0}} = 0, \quad (u_\theta)_{\substack{\theta=0\\ r=r_0}} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)_{\substack{\theta=0\\ r=r_0}} = 0$$



代入位移分量式（4-13），确定得

$$\begin{cases} H = K = 0 \\ I = \dfrac{1}{E}\left[(1+\mu)\dfrac{A}{r_0} - 2(1-\mu)Br_0 \ln r_0 + B(1+\mu)r_0 - 2C(1-\mu)r_0\right] \end{cases}$$

代回位移分量式（4-13），即得相应的位移分量。这里只给出环向位移：

$$\boxed{u_\theta = \frac{4Br\theta}{E} - I\sin\theta}$$

$$\boxed{u_\theta = \frac{4Br\theta}{E} - I\sin\theta}$$

将上式对变量 r 求导，得

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{4B\theta}{E}$$

由上式可知：当θ一定时，曲梁截面任意径向线段dr 转角都相同，即平面保持平面。

表明：材力中纯弯曲曲梁的平面保持平面假设是正确的。