3.常体力下体力与面力的变换

常体力下， $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 满足的方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{平衡方程:} \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \\
&\text{相容方程:} \quad \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \\
&\text{边界条件:} \quad l(\sigma_x)_s + m(\tau_{xy})_s = \bar{X} \\
&\qquad\qquad\quad m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s = \bar{Y}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

令： $\underbrace{\sigma_x = \sigma'_x - Xx \quad \sigma_y = \sigma'_y - Yy \quad \tau_{xy}}= \tau'_{xy}$ (b)

将式(b)代入平衡方程、相容方程、边界条件，有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} = 0 \\
&\nabla^2 (\sigma'_x + \sigma'_y) = 0 \\
&l(\sigma'_x)_s + m(\tau'_{xy})_s = \bar{X} + lXx \\
&m(\sigma'_y)_s + l(\tau'_{xy})_s = \bar{Y} + mYy
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial \sigma'_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y}=0 \qquad \dfrac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma'_y}{\partial y}=0 \\ \nabla^2(\sigma'_x+\sigma'_y)=0 \\ l(\sigma'_x)_s+m(\tau'_{xy})_s=\overline{X}+lXx \\ m(\sigma'_y)_s+l(\tau'_{xy})_s=\overline{Y}+mYy \end{array}\right\} \qquad \text{(c)}$$

表明：（1）变换后的平衡方程、相容方程均为齐次方程（容易求解）；

（2）变换后问题的边界面力改变为：

$$\overline{X}'=\overline{X}+lXx \qquad \overline{Y}'=\overline{Y}+mYy$$

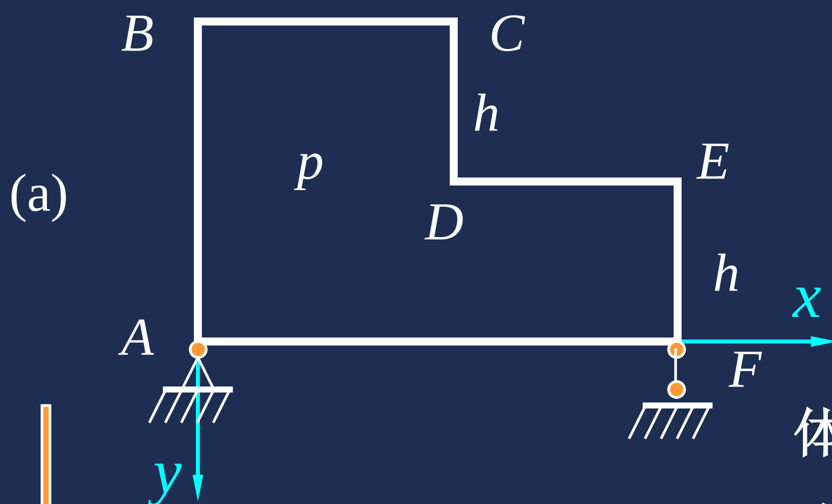
结论： 当体力X =常数，Y =常数时，可先求解无体力而面力为：

$$\overline{X}'=\overline{X}+lXx \qquad \overline{Y}'=\overline{Y}+mYy$$

问题的解：$\sigma'_x,\sigma'_y,\tau'_{xy}$ ，而原问题的解为：

$$\begin{cases} \boxed{\begin{array}{l}\sigma_x=\sigma'_x-Xx \\ \sigma_y=\sigma'_y-Yy \\ \tau_{xy}=\tau'_{xy}\end{array}} \end{cases}$$

例如：图示深梁在重力作用下的应力分析。



原问题：

体力：$X=0, Y=p$

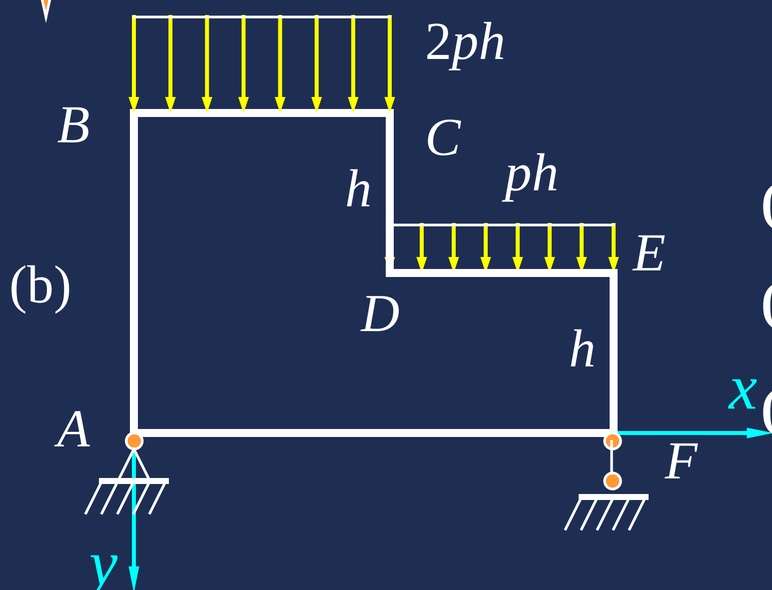
边界面力：$\overline{X}=0, \overline{Y}=0$

所求应力：$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

变换后的问题：

体力：$X'=0, Y'=0$

边界面力：$\begin{cases} \overline{X}'=\overline{X}+lXx=l\cdot 0\cdot x\equiv 0 \\ \overline{Y}'=\overline{Y}+mYy=0+mpy \end{cases}$



(1) 当 $y=0$ 时， $\overline{Y}'=(+1)\cdot p\cdot 0=0$

(2) 当 $y=-h$ 时， $\overline{Y}'=(-1)\cdot p\cdot(-h)=ph$

(3) 当 $y=-2h$ 时，$\overline{Y}'=(-1)\cdot p\cdot(-2h)=2ph$

所求得的应力：$\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}$

原问题的应力

$$\begin{cases} \sigma_x=\sigma'_x-Xx=\sigma'_x \\ \sigma_y=\sigma'_y-Yy=\sigma'_y-py \\ \tau_{xy}=\tau'_{xy} \end{cases}$$

常体力下体力与面力转换的优点（好处）：

原问题的求解方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+X=0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+Y=0$$
$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0$$
$$l(\sigma_x)_s+m(\tau_{xy})_s=\overline{X}$$
$$m(\sigma_y)_s+l(\tau_{xy})_s=\overline{Y}$$

→ 变换后问题的求解方程

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma'_y}{\partial y}=0$$
$$\nabla^2(\sigma'_x+\sigma'_y)=0$$
$$l(\sigma'_x)_s+m(\tau'_{xy})_s=\overline{X}+lXx$$
$$m(\sigma'_y)_s+l(\tau'_{xy})_s=\overline{Y}+mYy$$

常体力问题 → 无体力问题

作用：
(1) 方便分析计算（齐次方程易求解）。
(2) 实验测试时，一般体力不易施加，可用加面力的方法替代加体力。

注意：面力变换公式：$\overline{X'}=\overline{X}+lXx,\overline{Y'}=\overline{Y}+mYy$ 与坐标系的选取有关，因此，适当选取坐标系，可使面力表达式简单。