主 要 内 容

半逆解法

（1）根据问题的条件（几何形状、受力特点、边界条件等），假设部分应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 的某种函数形式；

（2）根据 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 与应力函数$\varphi(x,y)$的关系及 $\nabla^4\varphi = 0$，求出$\varphi(x,y)$ 的形式；

（3）最后利用式（2-26）计算出$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 并让其满足边界条件和位移单值条件。

—— 半逆解法的数学基础：数理方程中分离变量法。

位移分量求解：

（1） 将已求得的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 代入物理方程，求得应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$

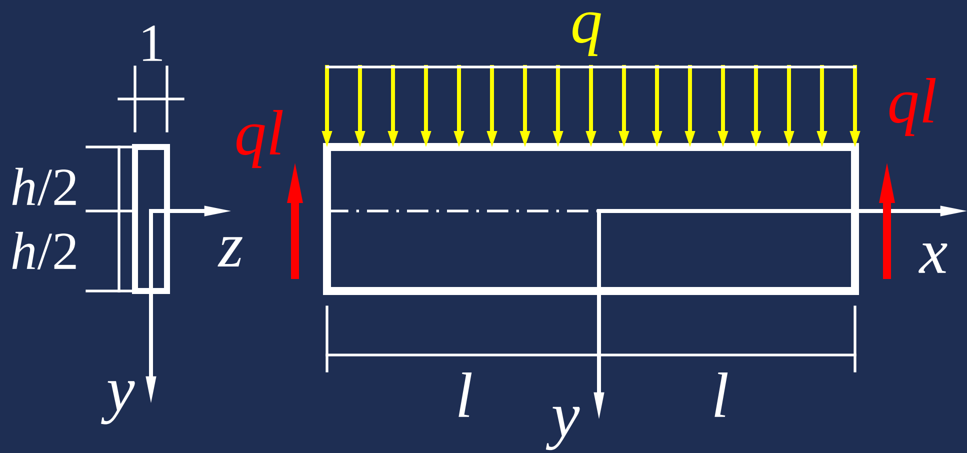
（2） 将应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 代入几何方程，并积分求得位移分量表达式；

（3） 由位移边界条件确定表达式中常数，得最终结果。

§ 3-3　简支梁受均布载荷

要点 —— 用**半逆解法**求解梁、长板类平面问题。

1. 应力函数的确定



(1) 分析：

σ_x —— 主要由弯矩引起；

τ_{xy} —— 主要由剪力引起；

σ_y ——由 q 引起（挤压应力）。

又∵ q =常数，图示坐标系和几何对称，∴ σ_y 不随 x 变化。

推得： $\boxed{\sigma_y = f(y)}$

(2) 由应力分量表达式确定应力函数 $\varphi(x,y)$ 的形式：

$$\sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = f(y)$$

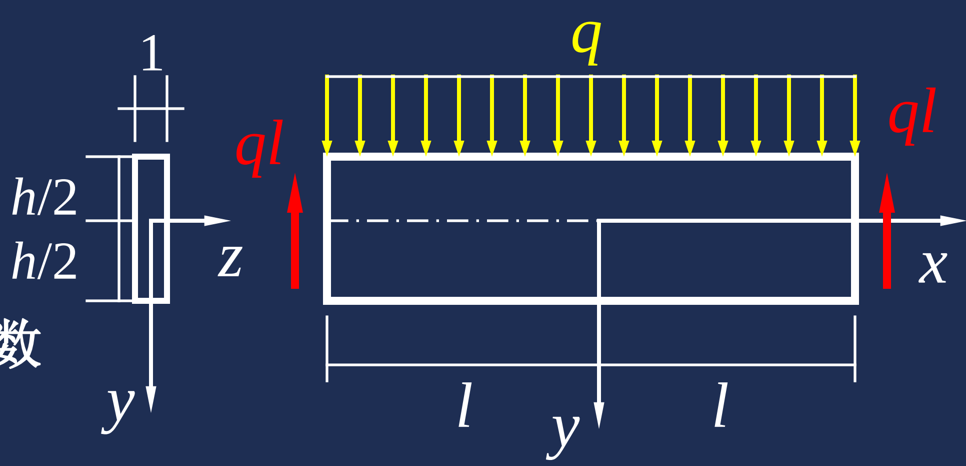
积分得：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = xf(y) + f_1(y) & \text{(a)} \\ \varphi = \dfrac{x^2}{2} f(y) + xf_1(y) + f_2(y) & \text{(b)} \end{cases}$$

$f(y), f_1(y), f_2(y)$ —— 任意的待定函数

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = xf(y) + f_1(y) & \text{(a)} \\ \varphi = \dfrac{x^2}{2} f(y) + xf_1(y) + f_2(y) & \text{(b)} \end{cases}$$

$f(y),\ f_1(y),\ f_2(y)$ —— 任意的待定函数



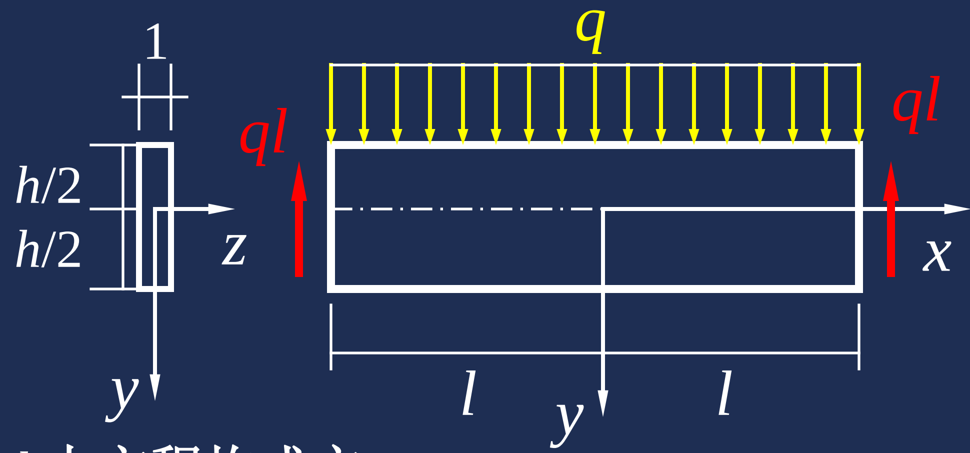
(3) 由 $\nabla^4 \varphi = 0$ 确定：$f(y),\ f_1(y),\ f_2(y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0 \\ 2\dfrac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 2f^{(2)}(y) \end{cases} \qquad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{x^2}{2} f^{(4)}(y) + xf_1^{(4)}(y) + f_2^{(4)}(y)$$

代入相容方程： $\nabla^4 \varphi = \dfrac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}$

$$= \frac{x^2}{2} f^{(4)}(y) + xf_1^{(4)}(y) + f_2^{(4)}(y) + 2f^{(2)}(y) = 0$$

$$\frac{x^2}{2} f^{(4)}(y) + x f_1^{(4)}(y) + f_2^{(4)}(y)$$
$$+ 2 f^{(2)}(y) = 0$$



方程的特点：

关于 x 的二次方程，且要求 $-l \le x \le l$ 内方程均成立。

由“高等代数”理论，须有x 的一、二次的系数、自由项同时为零。即：

$$f^{(4)}(y) = 0 \qquad f_1^{(4)}(y) = 0 \qquad f_2^{(4)}(y) + 2 f^{(2)}(y) = 0$$

对前两个方程积分：

$$\begin{cases} f(y) = Ay^3 + By^2 + Cy + D \\ f_1(y) = Ey^3 + Fy^2 + Gy \end{cases} \qquad \text{(c)}$$

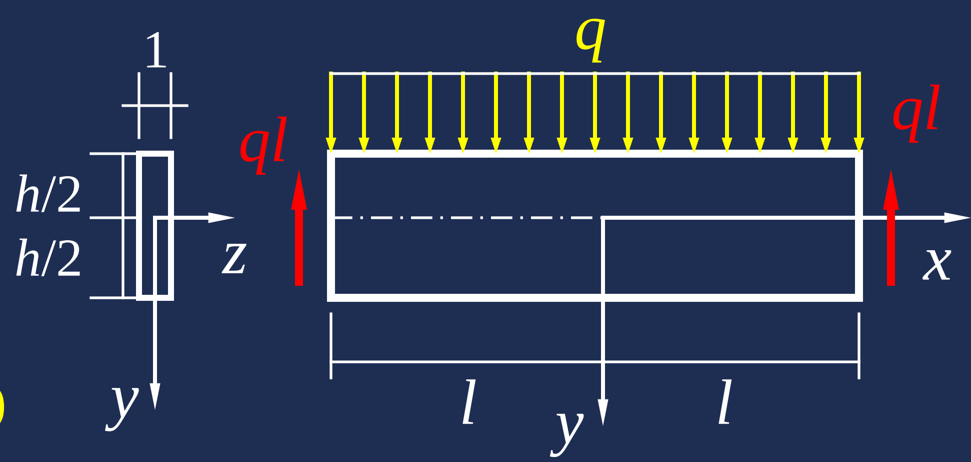
此处略去了$f_1(y)$中的常数项

对第三个方程得： $f_2^{(4)}(y) = -2 f^{(2)}(y) \quad = -12Ay - 4B$

积分得：

$$f_2(y) = -\frac{A}{10} y^5 - \frac{B}{6} y^4 + Hy^3 + Ky^2 \qquad \text{(d)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = xf(y) + f_1(y) & \text{(a)} \\ \varphi = \dfrac{x^2}{2} f(y) + xf_1(y) + f_2(y) & \text{(b)} \end{cases}$$



$$\begin{cases} f(y) = Ay^3 + By^2 + Cy + D & \text{(c)} \\ f_1(y) = Ey^3 + Fy^2 + Gy \\ f_2(y) = -\dfrac{A}{10}y^5 - \dfrac{B}{6}y^4 + Hy^3 + Ky^2 & \text{(d)} \end{cases}$$

此处略去了$f_2(y)$中的一次项和常数项

将(c) (d) 代入 (b) ，有

$$\varphi = \frac{x^2}{2}(Ay^3 + By^2 + Cy + D) + x(Ey^3 + Fy^2 + Gy) + (-\frac{A}{10}y^5 - \frac{B}{6}y^4 + Hy^3 + Ky^2) \qquad \text{(e)}$$

式中含有9个待定常数。

$$\varphi = \frac{x^2}{2}(Ay^3 + By^2 + Cy + D) + x(Ey^3 + Fy^2 + Gy)$$

$$+ (-\frac{A}{10}y^5 - \frac{B}{6}y^4 + Hy^3 + Ky^2) \qquad \text{(e)}$$

2. 应力分量的确定

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \dfrac{x^2}{2}(6Ay + 2B) + x(6Ey + 2F) - 2Ay^3 - 2By^2 + 6Hy + 2K & \text{(f)} \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = Ay^3 + By^2 + Cy + D & \text{(g)} \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} = -x(3Ay^2 + 2By + C) - (3Ey^2 + 2Fy + G) & \text{(h)} \end{cases}$$

3. 对称条件与边界条件的应用

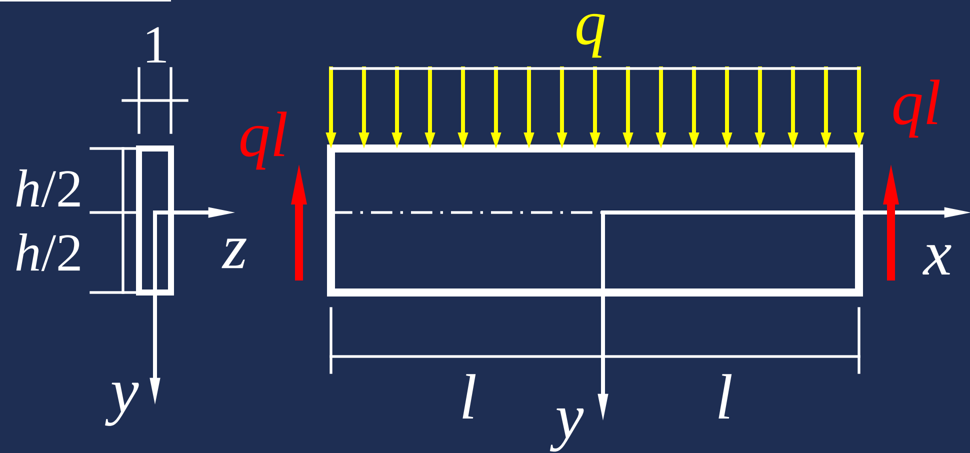
$$
\begin{cases}
\sigma_x = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \dfrac{x^2}{2}(6Ay+2B) + x(6Ey+2F) - 2Ay^3 - 2By^2 + 6Hy + 2K & \text{(f)} \\
\sigma_y = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = Ay^3 + By^2 + Cy + D & \text{(g)} \\
\tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -x(3Ay^2 + 2By + C) - (3Ey^2 + 2Fy + G) & \text{(h)}
\end{cases}
$$

3. 对称条件与边界条件的应用

（1）对称条件的应用：

由 q 对称、几何对称：

$$
\begin{cases}
\sigma_x, \sigma_y & \text{—— } x \text{ 的偶函数} \\
\tau_{xy} & \text{—— } x \text{ 的奇函数}
\end{cases}
$$

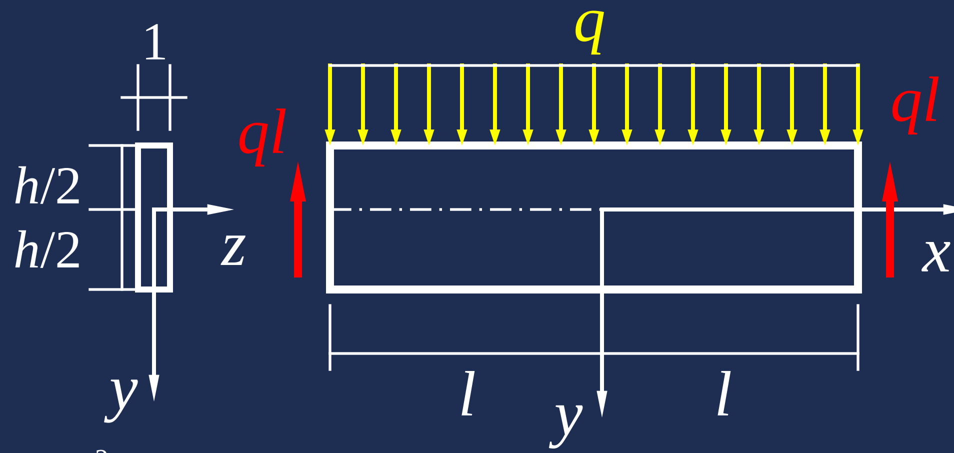


由此得：

$$
\begin{cases}
6Ey + 2F = 0 \\
3Ey^2 + 2Fy + G = 0
\end{cases}
$$

要使上式对任意的 y 成立，须有：$\boxed{E = F = G = 0}$

$$\begin{cases}\sigma_x = \dfrac{x^2}{2}(6Ay+2B) - 2Ay^3 - 2By^2 + 6Hy + 2K \\ \sigma_y = Ay^3 + By^2 + Cy + D \\ \tau_{xy} = -x(3Ay^2 + 2By + C)\end{cases}$$



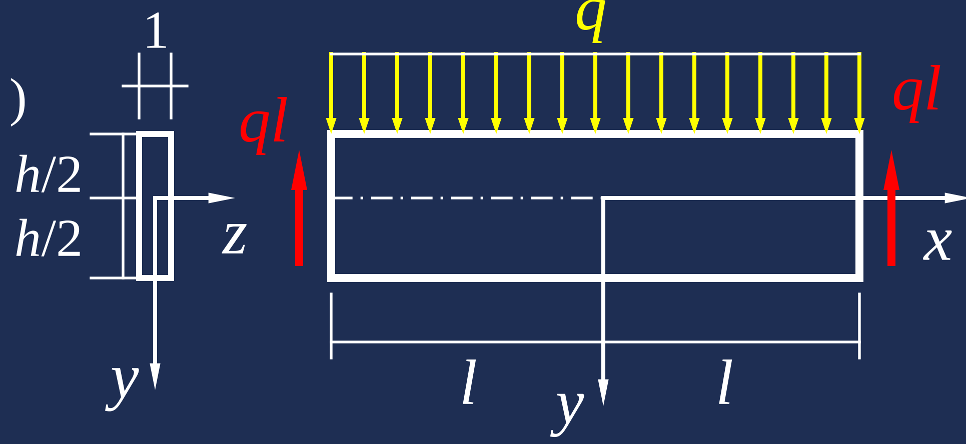
（2）边界条件的应用：

(a) 上下边界（主要边界）：

$$\begin{cases} y = -\dfrac{h}{2}, \sigma_y = -q; \\ y = \dfrac{h}{2}, \sigma_y = 0; \\ y = \pm\dfrac{h}{2}, \tau_{xy} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{h^3}{8}A + \dfrac{h^2}{4}B - \dfrac{h}{2}C + D = -q \\ \dfrac{h^3}{8}A + \dfrac{h^2}{4}B + \dfrac{h}{2}C + D = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3A\dfrac{h^2}{4} + Bh + C = 0 \\ 3A\dfrac{h^2}{4} - Bh + C = 0 \end{cases}$$

由此解得：$\boxed{A = -\dfrac{2q}{h^3}, \quad B = 0, \quad C = \dfrac{3q}{2h} \quad D = -\dfrac{q}{2}}$ 代入应力公式

$$
\begin{cases}
\sigma_x = -\dfrac{6q}{h^3}x^2 y + \dfrac{4q}{h^3}y^3 + 6Hy + 2K & \text{(i)} \\
\sigma_y = -\dfrac{2q}{h^3}y^3 + \dfrac{3q}{2h}y - \dfrac{q}{2} & \text{(j)} \\
\tau_{xy} = \dfrac{6q}{h^3}xy^2 - \dfrac{3q}{2h}x & \text{(k)}
\end{cases}
$$



(b) 左右边界（次要边界）：（由于对称，只考虑右边界即可。）

$$
x = l, \qquad \sigma_x\Big|_{\substack{x=l \\ -\frac{h}{2}\le y\le\frac{h}{2}}} = 0 \qquad \tau_{xy}\Big|_{\substack{x=l \\ -\frac{h}{2}\le y\le\frac{h}{2}}} = \text{未知}
$$

—— 难以满足，需借助于圣维南原理。

静力等效条件：

$$
\begin{cases}
\text{轴力 } N = 0; \\
\text{弯矩 } M = 0; \\
\text{剪力 } Q = -ql;
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
N = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)\big|_{x=l}\, dy = 0 \\
M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)\big|_{x=l}\, y\,dy = 0 \\
Q = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})\big|_{x=l}\, dy = -ql
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} N=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_x)\big|_{x=l}dy=0 \\ M=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_x)\big|_{x=l}ydy=0 \\ Q=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\tau_{xy})\big|_{x=l}dy=-ql \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(-\frac{6q}{h^3}l^2y+\frac{4q}{h^3}y^3+6Hy+2K)dy=0 \\ \longrightarrow 2Kh=0 \longrightarrow K=0 \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(-\frac{6ql^2}{h^3}y^2+\frac{4q}{h^3}y^4+6Hy^2)dy=0 \\ \longrightarrow H=\frac{ql^2}{h^3}-\frac{q}{10h} \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\frac{6ql}{h^3}y^2-\frac{3q}{2h}l)dy=-ql \end{cases}$$

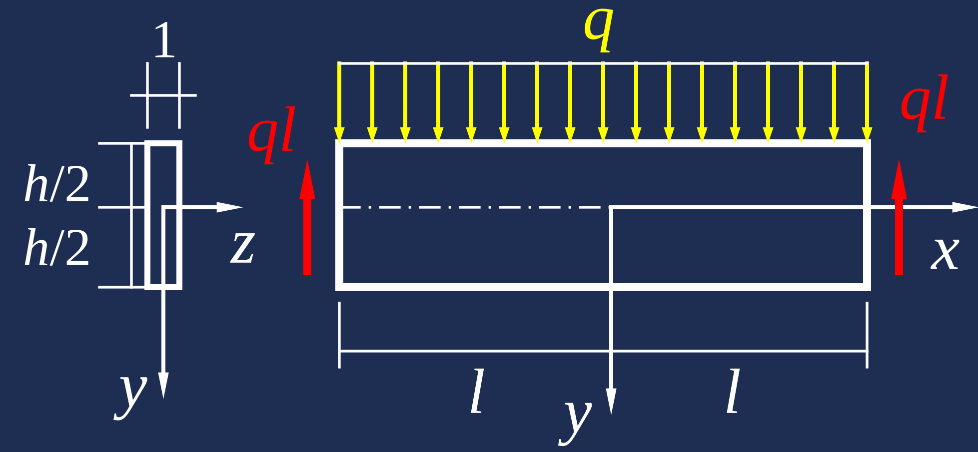
$$\left(2\frac{6ql}{h^3}\frac{y^2}{3}-2\frac{3q}{2h}ly\right)_{y=\frac{h}{2}}=-ql$$

可见，这一条件自动满足。

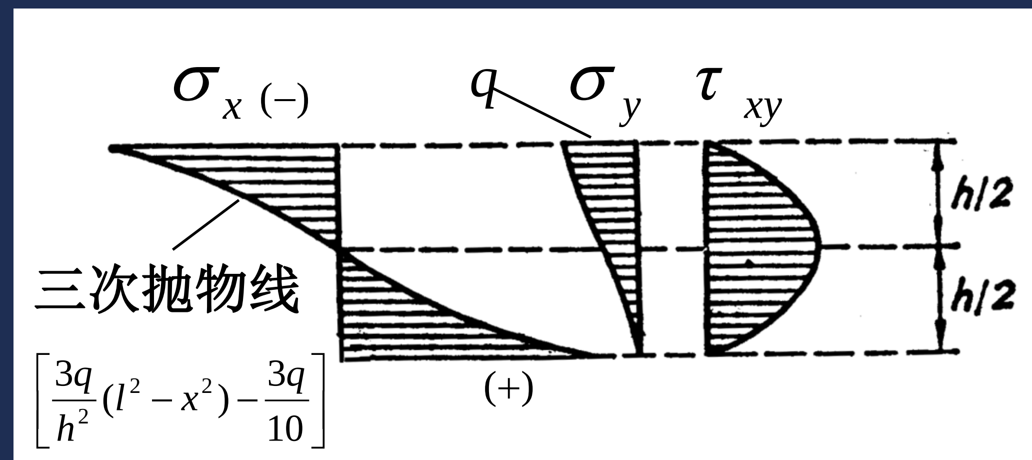
$$\begin{cases} \sigma_x=-\frac{6q}{h^3}x^2y+\frac{4q}{h^3}y^3+6Hy+2K & \text{(i)} \\ \sigma_y=-\frac{2q}{h^3}y^3+\frac{3q}{2h}y-\frac{q}{2} & \text{(j)} \\ \tau_{xy}=\frac{6q}{h^3}xy^2-\frac{3q}{2h}x & \text{(k)} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\sigma_x = \dfrac{6q}{h^3}(l^2 - x^2)y + q\dfrac{y}{h}\left(4\dfrac{y^2}{h^2} - \dfrac{3}{5}\right) \\[2ex]
\sigma_y = -\dfrac{q}{2}\left(1 + \dfrac{y}{h}\right)\left(1 - \dfrac{2y}{h}\right)^2 \\[2ex]
\tau_{xy} = -\dfrac{6q}{h^3}x\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right)
\end{cases}
$$

(p)

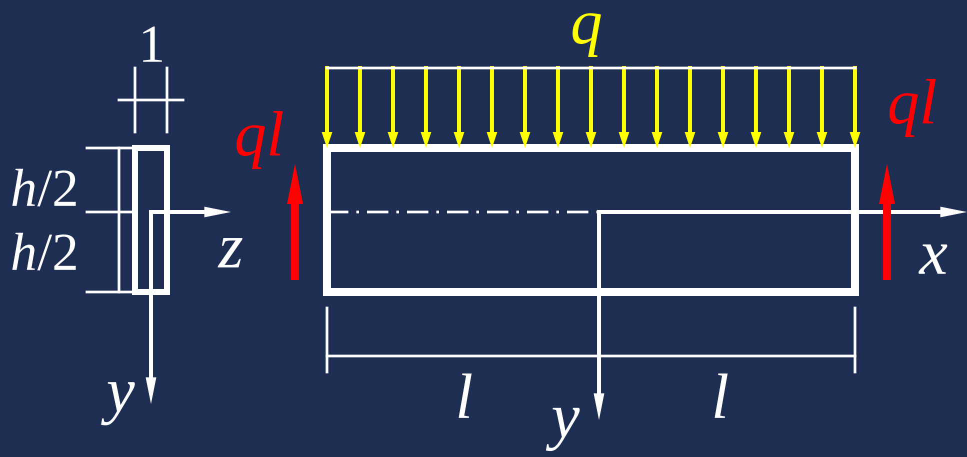


截面上的应力分布：



4. 与材料力学结果比较

$$
\begin{cases}
\sigma_x = \dfrac{6q}{h^3}(l^2 - x^2)y + q\dfrac{y}{h}(4\dfrac{y^2}{h^2} - \dfrac{3}{5}) \\[2ex]
\sigma_y = -\dfrac{q}{2}\left(1+\dfrac{y}{h}\right)\left(1-\dfrac{2y}{h}\right)^2 \\[2ex]
\tau_{xy} = -\dfrac{6q}{h^3}x\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right)
\end{cases}
\qquad (p)
$$



4. 与材料力学结果比较

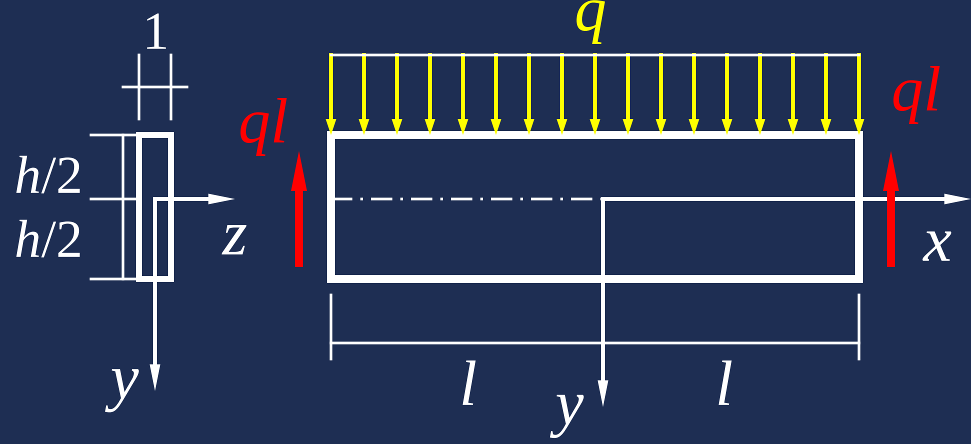
材力中几个参数：

$$
\begin{cases}
\text{截面宽：} b=1\text{，截面惯矩：} I = \dfrac{1}{12}h^3 \\[2ex]
\text{静矩：} S = \dfrac{h^2}{8} - \dfrac{y^2}{2} \qquad \text{剪力：} Q = -qx \\[2ex]
\text{弯矩：} M = \dfrac{q}{2}(l^2 - x^2)
\end{cases}
$$

将其代入式 (p)，有

$$
\begin{cases}
\sigma_x = \dfrac{M}{I}y + q\dfrac{y}{h}\left(4\dfrac{y^2}{h^2} - \dfrac{3}{5}\right) \\[2ex]
\sigma_y = -\dfrac{q}{2}\left(1+\dfrac{y}{h}\right)\left(1-\dfrac{2y}{h}\right)^2 \\[2ex]
\tau_{xy} = \dfrac{QS}{bI}
\end{cases}
\qquad \text{（3-6）}
$$

$$\left\{\begin{aligned}\sigma_x &= \boxed{\frac{M}{I}y} + q\frac{y}{h}\left(4\frac{y^2}{h^2}-\frac{3}{5}\right)\\ \sigma_y &= -\frac{q}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right)\left(1-\frac{2y}{h}\right)^2\\ \tau_{xy} &= \boxed{\frac{QS}{bI}}\end{aligned}\right. \qquad (3\text{-}6)$$



比较，得：

（1）σ_x　第一项与材力结果相同，为主要项。第二项为修正项。当 $h/l \ll 1$，该项误差很小，可略；当 h/l较大时，须修正。

（2）σ_y　为梁各层纤维间的挤压应力，材力中不考虑。

（3）τ_{xy}　与材力中相同。

注意：

按式（3-6），梁的左右边界存在水平面力：

$$\overline{X} = \pm(\sigma_x)_{x=\pm l}$$

$$= \pm q\frac{y}{h}\left(4\frac{y^2}{h^2}-\frac{3}{5}\right)$$

说明式（3-6）在两端不适用。

解题步骤小结：

用半逆解法求解梁、矩形长板类弹性力学平面问题的基本步骤：

（1） 根据问题的条件：几何特点、受力特点、约束特点（面力分布规律、对称性等），估计某个应力分量（ $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ）的变化形式。

（2） 由 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 与应力函数 $\varphi(x, y)$ 的关系式（2-26），求得应力函数 $\varphi(x, y)$ 的具体形式（具有待定函数）。

（3） 将具有待定函数的应力函数 $\varphi(x, y)$ 代入相容方程：$\nabla^4\varphi = 0$ 确定 $\varphi(x, y)$ 中的待定函数形式。

（4） 由 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 与应力函数 $\varphi(x, y)$ 的关系式（2-26），求得应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 。

（5） 由边界条件确定 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 中的待定常数。

附：应力函数确定的“材料力学方法”

要点： 利用材料力学中应力与梁内力的关系，假设某个应力分量的函数形式。

适用性： 直梁、长板条等受连续分布面力、杆端集中力、杆端集中力偶等。

应力函数常可表示为：

$$\varphi(x,y)=f(x)g(y)$$

设法由边界面力先确定 $f(x)$或$g(y)$ 其中之一，然后将其代入 $\nabla^4\varphi=0$ 确定另外一个函数。

材力中，应力分量与梁内力的关系为：

$$\begin{cases}\sigma_x=M(x)f_1(y)\\ \tau_{xy}=Q(x)f_2(y)\end{cases}$$

式中： $M(x)$ —— 弯矩方程；

$Q(x)$ —— 剪力方程。

当有横向分布力$q(x)$作用时，纵向纤维间存在挤压应力 σ_y ，同时，横向分布力$q(x)$的挤压作用时，对轴向应力 σ_x 也产生影响。

应力分量与梁内力的关系可表示为：

$$\begin{cases} \sigma_x = M(x) f_1(y) + q(x) f_2(y) \\ \sigma_y = q(x) f_3(y) \\ \tau_{xy} = Q(x) f_4(y) \end{cases}$$

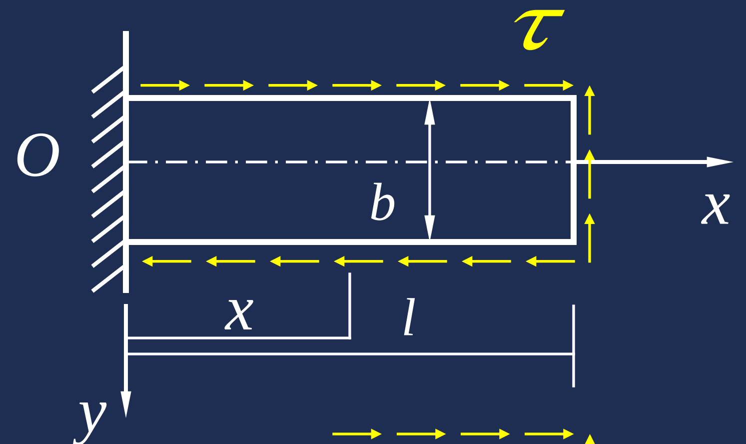
考虑挤压应力影响导致

然后由：

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \\ \nabla^4 \varphi = 0 \end{cases}$$

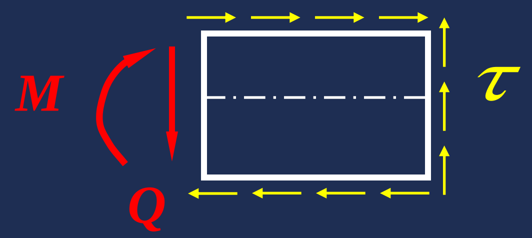
确定应力函数 φ 的具体形式。

例：悬臂梁，厚度为单位1，τ=常数。求：应力函数 φ 及梁内应力。



解：(1) 应力函数的确定

取任意截面，其内力如图：



$$\begin{cases} Q(x) = \tau b \\ M(x) = -\tau(l-x)b + \tau b(l-x) = 0 \end{cases}$$

取 τ_{xy} 作为分析对象，可假设：

$$\tau_{xy} = Q(x)f(y) = \tau b f(y) \qquad \text{(a)}$$

—— $f(y)$为待定函数

由 τ_{xy} 与应力函数 φ 的关系，有：

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \tau b f(y) \qquad \text{(b)}$$

对 x 积分一次，有：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\tau b x f(y) + f_0(y)$$

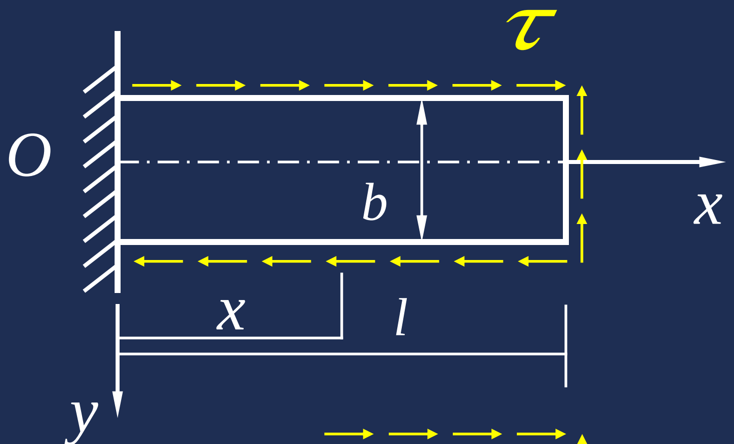
对 y 再积分一次，有：

$$\boxed{\varphi = -\tau b x f_1(y) + f_2(y) + f_3(x)} \qquad \text{(c)}$$

其中：

$$\begin{cases} f_1(y) = \int f(y)dy \\ f_2(y) = \int f_0(y)dy \end{cases}$$

$$\boxed{\varphi = -\tau b x f_1(y) + f_2(y) + f_3(x)}$$ （c）

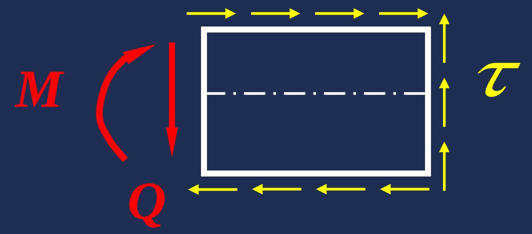


由 $\nabla^4\varphi = 0$ 确定待定函数：

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = 0$$

$$-\tau b x f_1^{(4)}(y) + f_2^{(4)}(y) + f_3^{(4)}(x) = 0$$

（d）



要使上式对任意的x，y成立，有

$$\begin{cases} f_1^{(4)}(y) = 0 & \text{(e)} \\ f_2^{(4)}(y) + f_3^{(4)}(x) = 0 & \text{(f)} \end{cases}$$

由式（e）求得

$$f_1(y) = Ay^3 + By^2 + Cy \quad \text{(g)}$$

由式（f）得

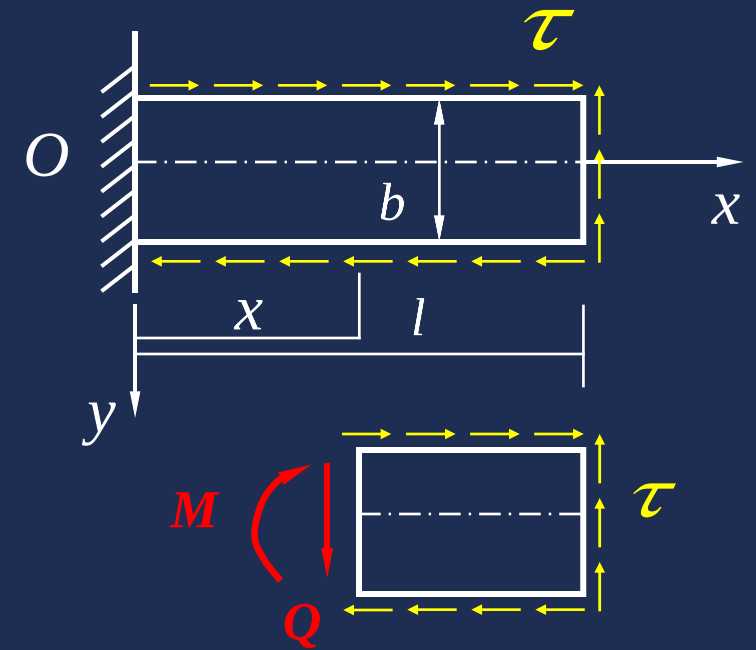
$$\begin{cases} f_2^{(4)}(y) = \omega & \text{(h)} \\ f_3^{(4)}(x) = -\omega & \text{(i)} \end{cases}$$

积分式（h）和（i）得

$$f_2(y) = A_1 y^4 + B_1 y^3 + C_1 y^2 \quad \text{(j)}$$

$$f_3(x) = A_2 x^4 + B_2 x^3 + C_2 x^2 \quad \text{(k)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi = &-\tau b x(Ay^3 + By^2 + Cy) \\ &+ (A_1 y^4 + B_1 y^3 + C_1 y^2) \\ &+ (A_2 x^4 + B_2 x^3 + C_2 x^2)\end{aligned}} \qquad (l)$$



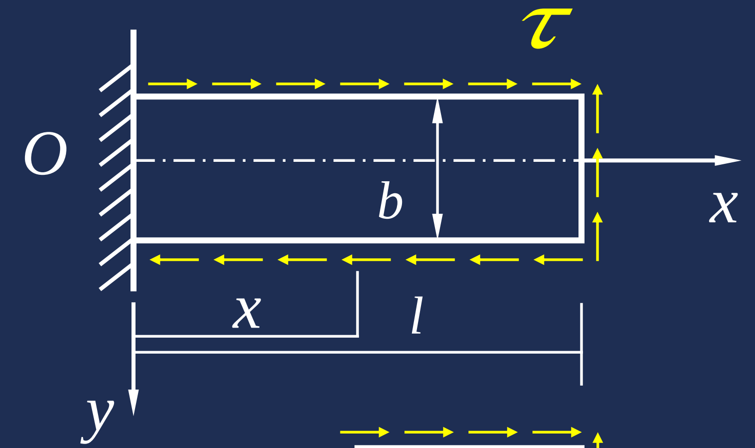
包含9个待定常数，由边界条件确定。

(2) 应力分量的确定

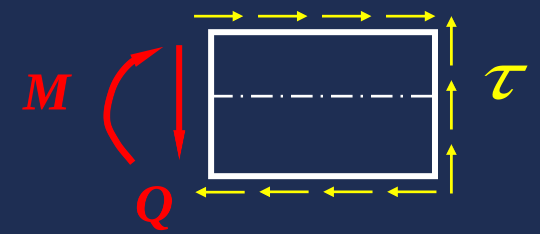
$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\tau b x(6Ay + 2B) + 12A_1 y^2 + 6B_1 y + 2C_1 \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 12A_2 x^2 + 6B_2 x + 2C_2 \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \tau b(3Ay^2 + 2By + C) \end{cases} \qquad (m)$$

(3) 利用边界条件确定常数

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\tau b x(6Ay + 2B) + 12A_1 y^2 + 6B_1 y + 2C_1 \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 12A_2 x^2 + 6B_2 x + 2C_2 \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \tau b(3Ay^2 + 2By + C) \end{cases}$$



(3) 利用边界条件确定常数



$$\begin{cases} (\sigma_x)_{x=l} = 0, (\tau_{xy})_{x=l} = -\tau \\ (\sigma_y)_{y=\frac{b}{2}} = 0, (\tau_{xy})_{y=\frac{b}{2}} = -\tau \\ (\sigma_y)_{y=-\frac{b}{2}} = 0, (\tau_{xy})_{y=-\frac{b}{2}} = \tau \end{cases}$$

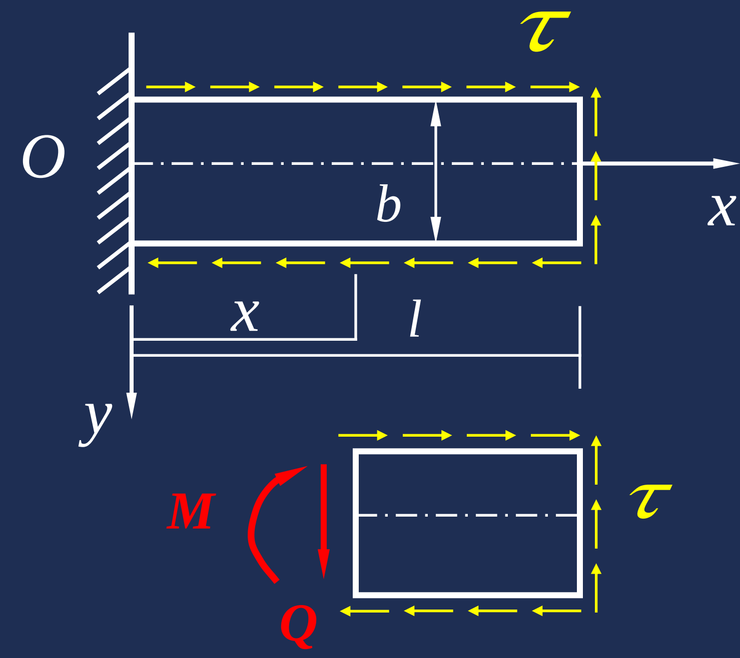
代入可确定常数为:

$$(o) \quad \begin{cases} A = B = A_1 = B_1 = C_1 = 0 \\ A_2 = B_2 = C_2 = 0 \\ C = -\dfrac{1}{b} \end{cases}$$

代入式（m）得

$$\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\tau \end{cases}$$

$$\boxed{\varphi = \tau x y}$$



注： 也可利用 $q(x)=0$，考虑

$$\sigma_x = M(x) f(y) = 0$$

进行分析。此时有：

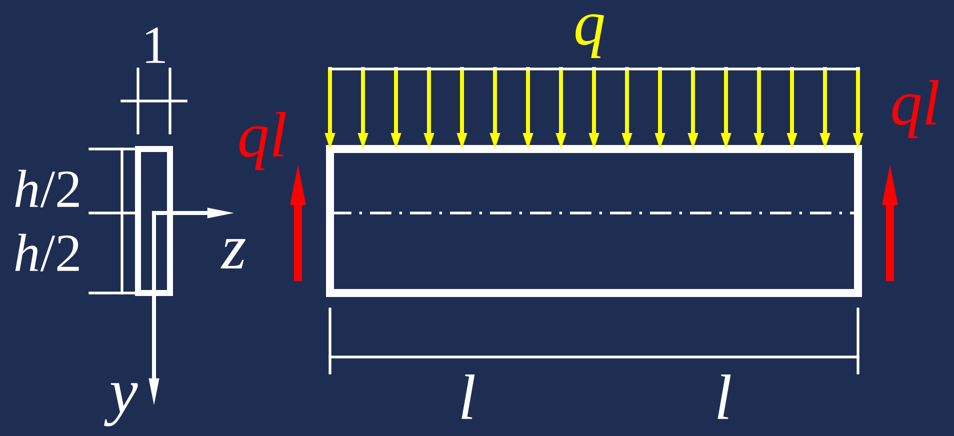
$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = f_1(x) \\ \varphi = y f_1(x) + f_2(x) \end{cases}$$

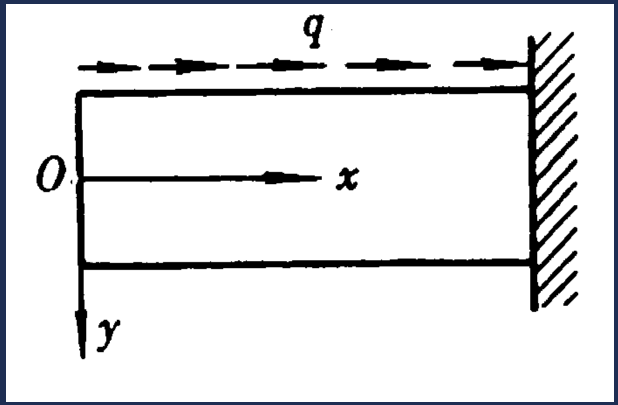
$f_1(x), f_2(x)$ 为待定函数，由相容方程确定。

剪力：$Q(x) = -qx$

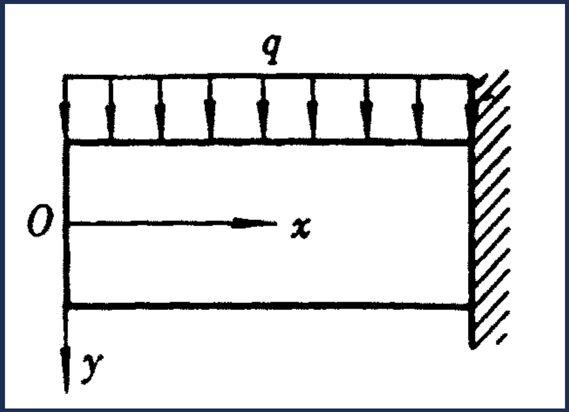
可假设剪应力：

$$\tau_{xy} = -qxf(y)$$

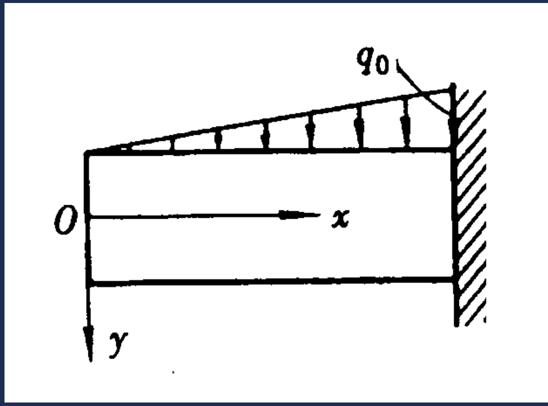




$\sigma_y = 0$



$\sigma_y = f(y)$



$\sigma_y = xf(y)$