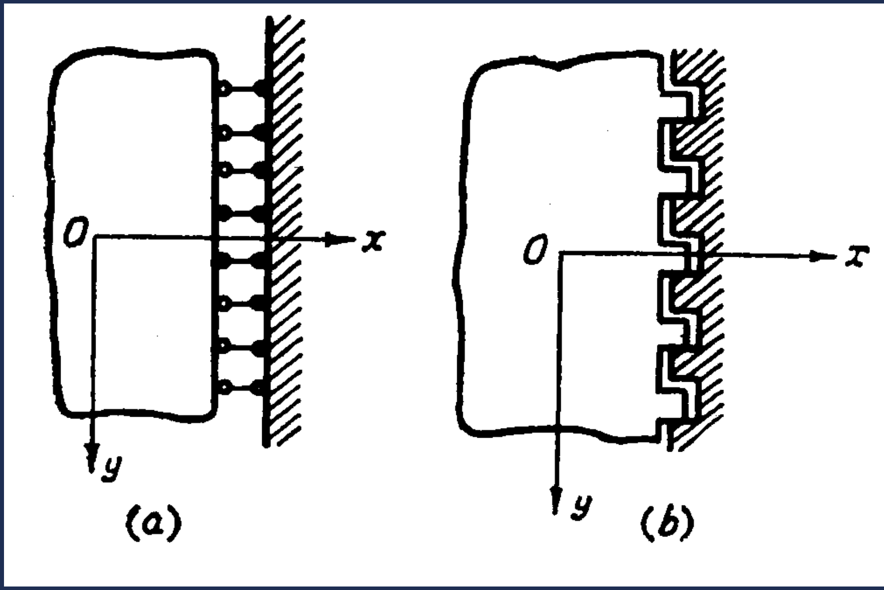
（3）混合边界条件

$$\begin{cases}\text{(1) 物体上的一部分边界为位移边界，另一部分为应力边界。}\\ \text{(2) 物体的同一部分边界上，其中一个为位移边界条件，另一为应力边界条件。如：}\end{cases}$$

图(a)：
$$\begin{cases} u_s = \overline{u} = 0 & \text{—— 位移边界条件} \\ \left(\tau_{xy}\right)_s = \overline{f}_y = 0 & \text{—— 应力边界条件} \end{cases}$$

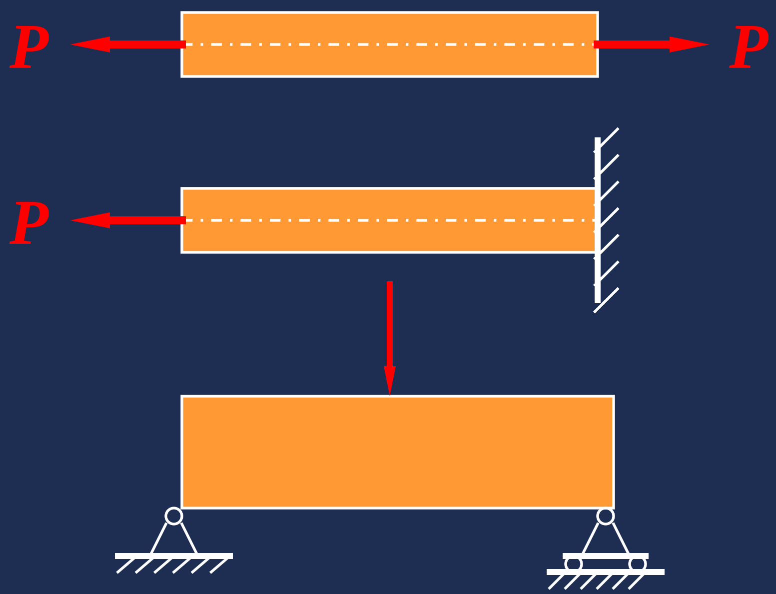
图(b)：
$$\begin{cases} \left(\sigma_x\right)_s = 0 & \text{—— 应力边界条件} \\ v_s = \overline{v} = 0 & \text{—— 位移边界条件} \end{cases}$$



§2-7 圣维南原理

问题的提出：

求解弹性力学问题时，使应力分量、形变分量、位移分量完全满足8个基本方程相对容易，但要使边界条件完全满足，往往很困难。



如图所示，其力的作用点处的边界条件无法列写。

1. 静力等效的概念

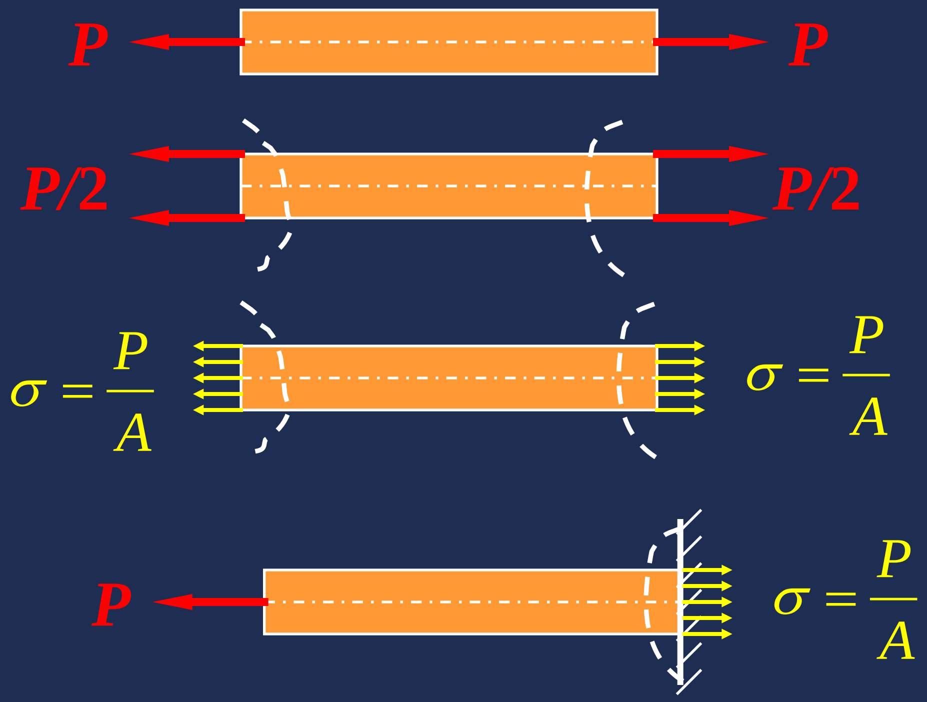
两个力系，若它们的主矢量、主矩相等，则两个力系为静力等效力系。

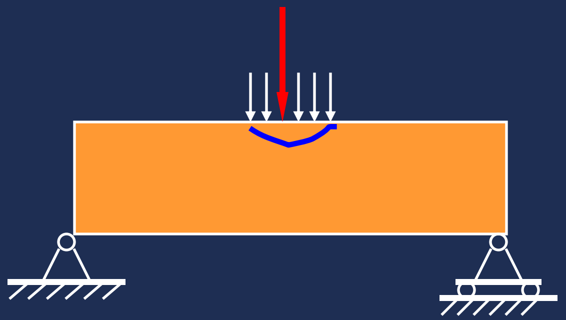
$$\boldsymbol{R}=\sum \boldsymbol{F}_i \qquad \boldsymbol{M}_O=\sum \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i)$$

这种等效只是从平衡的观点而言的，对刚体来而言完全正确，但对变形体而言一般是不等效的。

2.圣维南原理 (Saint-Venant Principle)

原理：若把物体的一小部分边界上的面力，变换为分布不同但静力等效的面力，则近处的应力分布将有显著改变，而远处所受的影响可忽略不计。





3.圣维南原理的应用

(1) 对复杂的力边界，用静力等效的分布面力代替。

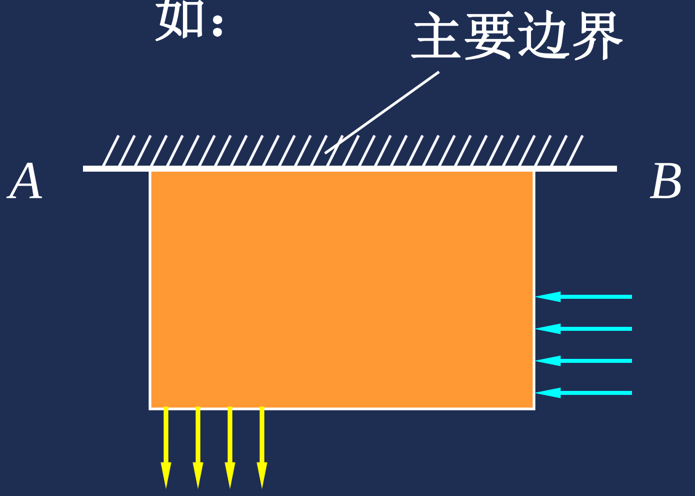
(2) 有些位移边界不易满足时，也可用静力等效的分布面力代替。

注意事项：

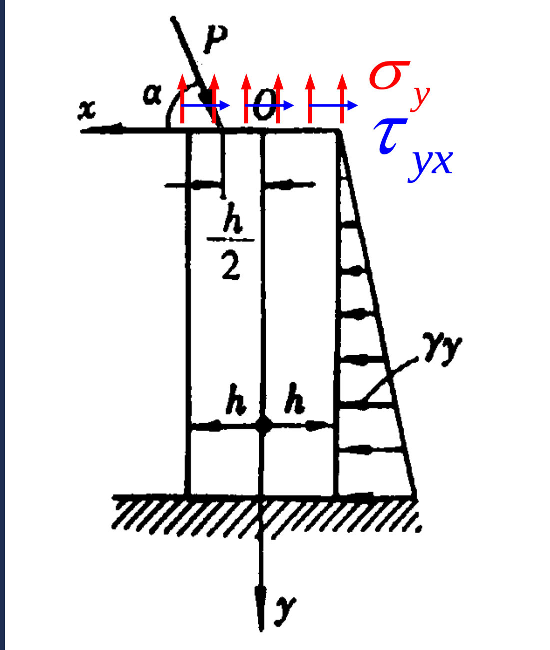
(1) 必须满足静力等效条件；

(2) 只能在次要边界上用圣维南原理，在主要边界上不能使用。

如：



例7 图示矩形截面水坝，其右侧受静水压力，顶部受集中力作用。试写出水坝的应力边界条件。



左侧面： $l=1, m=0 \quad \overline{f_x}=\overline{f_y}=0$

代入应力边界条件公式

$$l(\sigma_x)_s + m(\tau_{xy})_s = \overline{f_x}$$
$$m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s = \overline{f_y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\sigma_x)_{x=h} = 0 \\ (\tau_{xy})_{x=h} = 0 \end{cases}$$

右侧面： $l=-1, m=0 \quad \overline{f_x}=\gamma y, \overline{f_y}=0$

代入应力边界条件公式，有

$$\begin{cases} (\sigma_x)_{x=-h} = -\gamma y \\ (\tau_{xy})_{x=-h} = 0 \end{cases}$$

上端面： 为次要边界，可由圣维南原理求解。

y方向力等效：$\int_{-h}^{h} (\sigma_y)_{y=0} dx = -P\sin\alpha$

对O点的力矩等效：

$$\int_{-h}^{h} (\sigma_y)_{y=0} x\,dx = -P\frac{h}{2}\sin\alpha$$

x方向力等效：

$$\int_{-h}^{h} (\tau_{yx})_{y=0} dx = P\cos\alpha$$

注意： σ_y, τ_{xy}

必须按正向假设！

上端面：（方法2）

取图示微元体， 由微元体的平衡求得，

$$\sum F_y = 0 \quad \int_{-h}^{h} \left(\sigma_y\right)_{y=0} dx + P\sin\alpha = 0$$

$$\int_{-h}^{h} \left(\sigma_y\right)_{y=0} dx = -P\sin\alpha$$

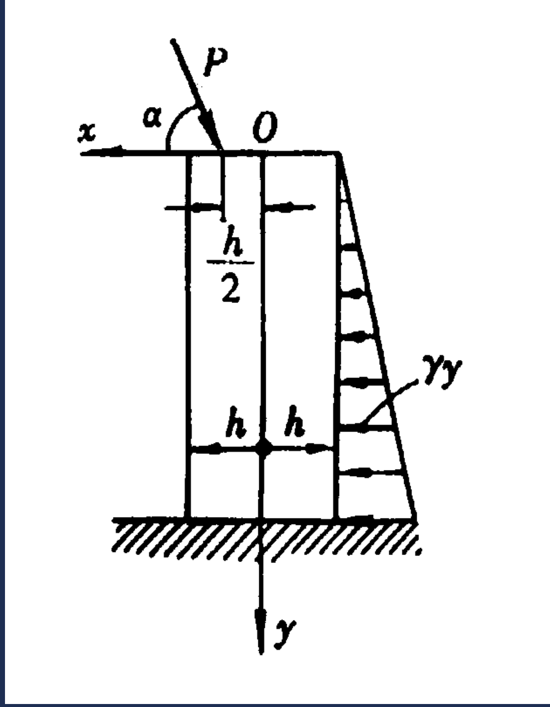
$$\sum M_O = 0 \quad \int_{-h}^{h} \left(\sigma_y\right)_{y=0} x\,dx + P\cdot\frac{h}{2}\sin\alpha = 0$$

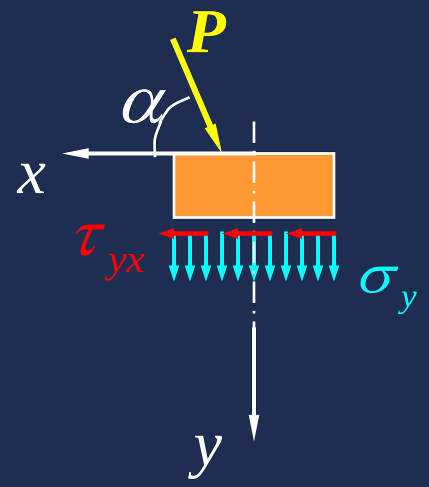
$$\int_{-h}^{h} \left(\sigma_y\right)_{y=0} x\,dx = -P\frac{h}{2}\sin\alpha$$

$$\sum F_x = 0 \quad \int_{-h}^{h} \left(\tau_{yx}\right)_{y=0} dx - P\cos\alpha = 0$$

$$\int_{-h}^{h} \left(\tau_{yx}\right)_{y=0} dx = P\cos\alpha$$

可见，与前面结果相同。





注意：σ_y, τ_{xy}

必须按正向假设！

§ 2-8 按位移求解平面问题

1.弹性力学平面问题的基本方程

（1）平衡方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases} \quad （2\text{-}2）$$

（2）几何方程：

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad （2\text{-}9）$$

（3）物理方程：

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \quad （2\text{-}15）$$

（4）边界条件：

$$\begin{cases} （1） & u_s = \bar{u}, v_s = \bar{v} \\ （2） & \begin{aligned} l(\sigma_x)_s + m(\tau_{xy})_s &= \bar{f}_x \\ m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y \end{aligned} \end{cases}$$

2.弹性力学问题的求解方法

（1）按位移求解（位移法、刚度法）

以*u*、*v* 为基本未知函数，将平衡方程和边界条件都用*u*、*v* 表示，并求出*u*、*v* ，再由几何方程、物理方程求出应力与形变分量。

（2）按应力求解（力法，柔度法）

以*应力分量*为基本未知函数，将所有方程都用*应力分量*表示，并求出*应力分量*，再由几何方程、物理方程求出形变分量与位移。

（3）混合求解

以部分*位移分量*和部分*应力分量*为基本未知函数，将，并求出这些未知量，再求出其余未知量。

3. 按位移求解平面问题的基本方程

（1）将平衡方程用位移表示

由应变表示的物理方程

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) \qquad \text{（2-19）}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}$$

将几何方程代入，有

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad \text{（a）}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

将式(a)代入平衡方程，化简有

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{E}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1-\mu}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1+\mu}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) + f_x = 0 \\ \dfrac{E}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{1-\mu}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{1+\mu}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right) + f_y = 0 \end{cases}} \qquad \text{（2-20）}$$

（2）将边界条件用位移表示

位移边界条件：$\boxed{u_s=\bar{u}, v_s=\bar{v}}$

应力边界条件：

$$l(\sigma_x)_s+m(\tau_{xy})_s=\overline{f_x}$$

$$m(\sigma_y)_s+l(\tau_{xy})_s=\overline{f_y}$$

（2-17）

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_y=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad \text{（a）}$$

$$\tau_{xy}=\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

将式（a）代入，得

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{E}{1-\mu^2}\left[l\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mu\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_s+m\dfrac{1-\mu}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_s\right]=\overline{f_x}\\[2ex] \dfrac{E}{1-\mu^2}\left[m\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}+\mu\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_s+l\dfrac{1-\mu}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_s\right]=\overline{f_y}\end{cases}} \qquad \text{（2-21）}$$

式（2-20）、（2-17）、（2-21）构成按位移求解问题的基本方程

说明：
- （1）对平面应变问题，只需将式中的E、μ作相替换即可。
- （2）一般不用于解析求解，作为数值求解的基本方程。

（3）按位移求解平面问题的基本方程

（1）平衡方程：

$$\begin{cases} \dfrac{E}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{1-\mu}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1+\mu}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+f_x=0 \\ \dfrac{E}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{1-\mu}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{1+\mu}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+f_y=0 \end{cases} \tag{2-20}$$

（2）边界条件：

位移边界条件：

$$u_s=\bar{u},\ v_s=\bar{v} \tag{2-17}$$

应力边界条件：

$$\begin{cases} \dfrac{E}{1-\mu^2}\left[l\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mu\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_s+m\dfrac{1-\mu}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_s\right]=\overline{f_x} \\ \dfrac{E}{1-\mu^2}\left[m\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}+\mu\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_s+l\dfrac{1-\mu}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_s\right]=\overline{f_y} \end{cases} \tag{2-21}$$

例题

体力分量为：$f_x=0$、$f_y=\rho g$

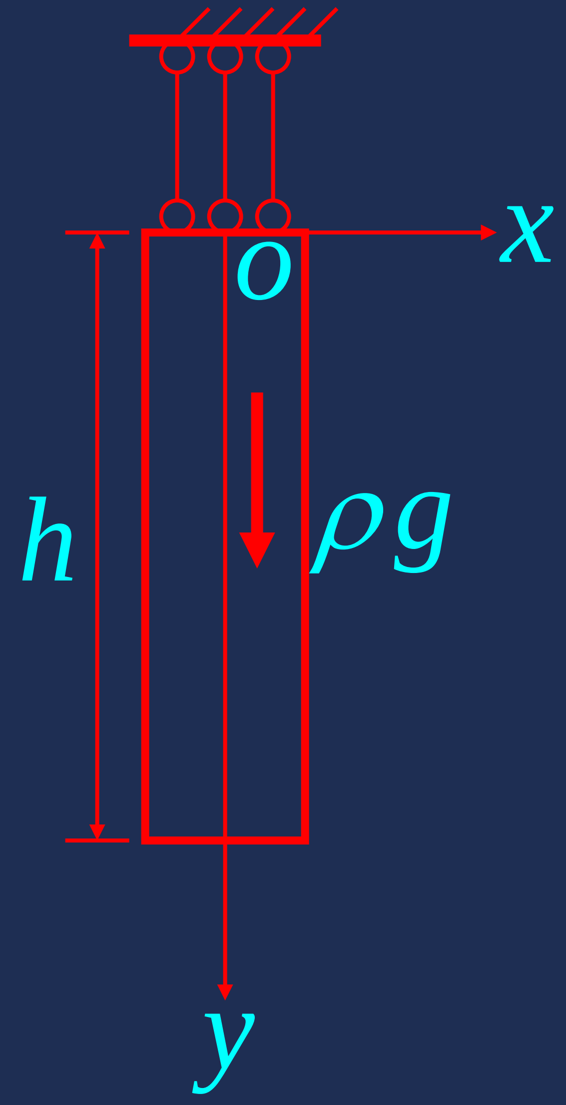
简化为一维问题，令

$$u=0、v=v(y)、\mu=0$$

边界条件为：

$$v|_{y=0}=0 \qquad \sigma_y|_{y=h}=0$$

$$\frac{d^2v}{dy^2}=-\frac{\rho g}{E} \qquad v=-\frac{\rho g}{2E}y^2+Ay+B$$



例题

$$v|_{y=0} = -\frac{\rho g}{2E}y^2 + Ay + B|_{y=0} = B = 0 \qquad A = \frac{\rho g h}{E}$$

$$\sigma_y|_{y=h} = E\varepsilon_y|_{y=h} = E\frac{dv}{dy}|_{y=h} = -\rho g y + AE|_{y=h} = -\rho g h + AE$$

$$v = \frac{\rho g}{2E}(2hy - y^2)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\rho g}{E}(h - y)$$

$$\sigma_y = \rho g(h - y)$$

§ 2-9 按应力求解平面问题　相容方程

按应力求解平面问题的未知函数：$\sigma_x(x,y),\sigma_y(x,y),\tau_{xy}(x,y)$

平衡微分方程：
$$\underbrace{\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0\quad\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+f_y=0}$$
（2-2）

2个方程方程，3个未知量，为超静定问题。需寻求补充方程，从形变、形变与应力的关系建立补充方程。

1.变形协调方程（相容方程）

将几何方程：$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$　（2-9）

作如下运算：
$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}\qquad\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 v}{\partial y\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y\partial x^2}$$

显然有：
$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}} \qquad (2\text{-}22)$$

—— 形变协调方程（或相容方程）

即：$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 必须满足上式才能保证位移分量 u、v 的存在与协调，才能求得这些位移分量。

例：$\varepsilon_x = 0 \quad \varepsilon_y = 0 \quad \gamma_{xy} = Cxy$ 其中：C为常数。

由几何方程得：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, \dfrac{\partial v}{\partial y}=0$ 积分得：$\begin{cases} u = f_1(y) \\ v = f_2(x) \end{cases}$

由几何方程的第三式得：$\gamma_{xy}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=Cxy$

$$\Rightarrow \quad \frac{df_1(y)}{dy}+\frac{df_2(x)}{dx}=Cxy$$

显然，此方程是不可能的，因而不可能求出满足几何方程的解。

2. 变形协调方程的应力表示

（1）平面应力情形

将物理方程代入相容方程，得：

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x-\mu\sigma_y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y-\mu\sigma_x)$$

$$=2(1+\mu)\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} \quad \text{(a)}$$

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\\ \varepsilon_y=\dfrac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)\\ \gamma_{xy}=\dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{cases} \quad \text{（2-15）}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \quad \text{（2-22）}$$

利用平衡方程将上述化简：

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=-\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}-f_x \qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=-\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}-f_y$$

$$\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial y\partial x}=-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\frac{\partial f_x}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}-\frac{\partial f_y}{\partial y}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0\\ \dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+f_y=0\end{cases} \quad \text{（2-2）}$$

将上述两边相加：

$$2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}=-\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right) \quad \text{（b）}$$

将 (b) 代入 (a)，得：

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x-\mu\sigma_y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y-\mu\sigma_x)=-(1+\mu)\left[\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)\right]$$

将 上式整理得：

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-(1+\mu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)} \quad \text{（2-23）}$$

应力表示的相容方程

（平面应力情形）

（2）平面应变情形

将 上式中的泊松比μ代为： $\dfrac{\mu}{1-\mu}$ ， 得

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{1}{1-\mu}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)} \quad \text{（2-24）}$$

应力表示的相容方程

（平面应变情形）

注意： 当体力 f_x、f_y 为常数时，两种平面问题的相容方程相同，即

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0} \quad \text{（2-25）}$$

3.按应力求解平面问题的基本方程

（1）平衡方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases} \quad （2\text{-}2）$$

（2）相容方程（形变协调方程）

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\mu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$$

（平面应力情形）　（2-23）

（3）边界条件：

$$\begin{cases} l(\sigma_x)_s + m(\tau_{xy})_s = \overline{f_x} \\ m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s = \overline{f_y} \end{cases} \quad （2\text{-}18）$$

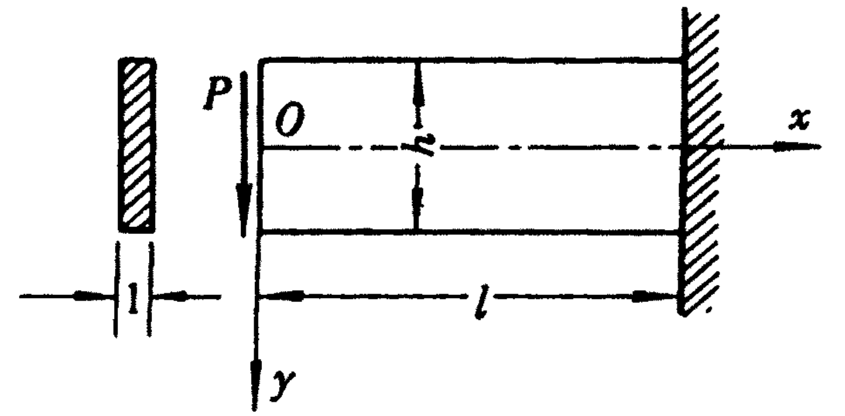
说明：

（1）对位移边界问题，不易按应力求解。

（2）对应力边界问题，且为**单连通问题**，满足上述方程的解是唯一正确解。

（3）对**多连通问题**，满足上述方程外，还需满足**位移单值条件**，才是唯一正确解。

例9 图示矩形截面悬臂梁，在自由端受集中力**P**作用，不计体力。试根据材料力学公式，写出弯曲应力σ_x 和剪应力 τ_{xy} 的表达式，并取挤压应力 σ_y =0，然后说明这些表达式是否代表正确解。



解 材料力学解答：

$$\left\{\begin{aligned} &\sigma_x = \frac{M}{I}y = -\frac{P}{I}xy \\ &\tau_{xy} = \frac{QS}{IB} = -\frac{P}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \\ &\sigma_y = 0 \end{aligned}\right. \quad \text{(a)}$$

式（a）满足平衡方程和相容方程？
式（a）是否满足边界条件？

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{P}{I}y, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{P}{I}y, \\ &\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\ &X = Y = 0 \end{aligned}\right.$$

代入平衡微分方程：

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ &\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{aligned}\right. \quad \text{(2-2)}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} &-\frac{P}{I}y + \frac{P}{I}y + 0 = 0 \\ &0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}\right.$$

显然，平衡微分方程满足。

代入相容方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(-\frac{P}{I}xy+0\right)\equiv 0$$

⇒ 式（a）满足相容方程。

再验证，式（a）是否满足边界条件？

上、下侧边界：

$$(\sigma_y)_{y=\pm\frac{h}{2}}=0,\ (\tau_{yx})_{y=\pm\frac{h}{2}}=0$$

——满足

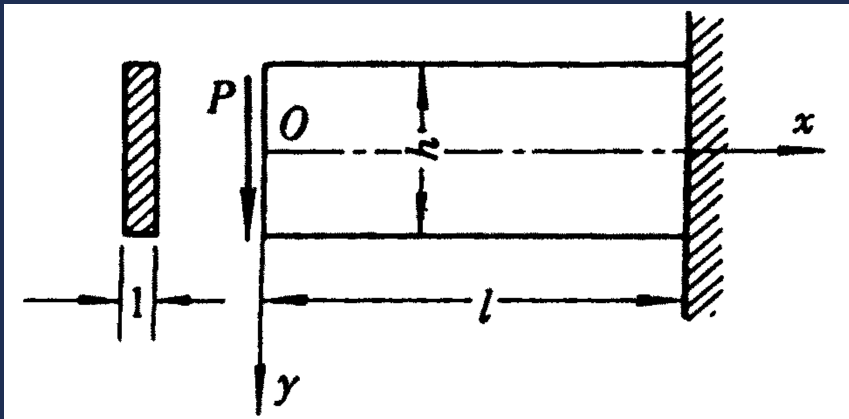
左侧边界：

$$(\sigma_x)_{x=0}=0$$

——满足

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\tau_{xy})_{x=0}\,dy=-P$$

——近似满足



右侧边界：

$$\begin{cases}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\tau_{xy})_{x=l}\,dy=-P\\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_x)_{x=l}\,dy=0\\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_x)_{x=l}\,ydy=-Pl\end{cases}$$

近似满足

结论：式（a）为正确解

§ 2-10 常体力情况下的简化

1. 常体力下平面问题的相容方程

令： $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ —— 拉普拉斯（Laplace）算子

则相容方程可表示为：

$$
\begin{cases}
\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\mu)\left(\dfrac{\partial f_x}{\partial x} + \dfrac{\partial f_y}{\partial y}\right) & \text{—— 平面应力情形} \\[2ex]
\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -\dfrac{1}{1-\mu}\left(\dfrac{\partial f_x}{\partial x} + \dfrac{\partial f_y}{\partial y}\right) & \text{—— 平面应变情形}
\end{cases}
$$

当体力 X、Y 为常数时，两种平面问题的相容方程相同，即

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad \text{或} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \qquad \text{（2-25）}$$

2.常体力下平面问题的基本方程

（1）平衡方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0 \\ \dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+f_y=0 \end{cases} \qquad \text{（2-2）}$$

（2）相容方程（形变协调方程）

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0$$

（3）边界条件

$$\begin{cases} l(\sigma_x)_s+m(\tau_{xy})_s=\overline{f_x} \\ m(\sigma_y)_s+l(\tau_{xy})_s=\overline{f_y} \end{cases} \qquad \text{（2-18）}$$

（4）位移单值条件

—— 对多连通问题而言。

讨论：

（1） $\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0$

—— Laplace方程，或称调和方程。

满足：$\nabla^2 f(x,y)=0$ 的函数 $f(x,y)$ 称为调和函数（解析函数）。

（2）常体力下，方程中不含E、μ

（a）两种平面问题，计算结果 σ_x σ_y,τ_{xy} 相同（但 $\sigma_z,\varepsilon_x,\varepsilon_y,$ γ_{xy},u,v ）不同。

（b）不同材料，具有相同外力和边界条件时，其计算结果相同。

—— 光弹性实验原理。

（3）用平面应力试验模型，代替平面应变试验模型，为实验应力分析提供理论基础。

§2-10 应力函数

1. 平衡微分方程解的形式

常体力下问题的基本方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}+f_y=0 \end{cases} \qquad (a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0 \qquad (b)$$

边界条件、位移单值条件。

式(a)为非齐次方程，其解：

全解 = 齐次方程通解

+非齐次方程的特解。

(1) 特解

常体力下特解形式：

$$\begin{cases} (1)\ \boxed{\sigma_x=-f_x x,\ \sigma_y=-f_y y,\ \tau_{xy}=0;} \\ (2)\ \sigma_x=0,\ \sigma_y=0,\ \tau_{xy}=-f_x y-f_y x; \\ (3)\ \sigma_x=-f_x x-f_y y,\ \sigma_y=-f_x x-f_y y, \\ \qquad \tau_{xy}=0;\cdots\cdots \end{cases} \qquad (c)$$

(2) 通解

式(a) 的齐次方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0 \end{cases} \qquad (d)$$

的通解。

(2) 通解

式(a) 的齐次方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \text{(d)}$$

的通解。 将式(d)第一式改写为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-\tau_{xy})$$

由微分方程理论，必存在一函数 $A(x,y)$，使得

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial A(x,y)}{\partial y} & \text{(e)} \\ -\tau_{xy} = \dfrac{\partial A(x,y)}{\partial x} & \text{(f)} \end{cases}$$

同理，将式(d)第二式改写为

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-\tau_{yx})$$

也必存在一函数 $B(x,y)$，使得

$$\begin{cases} \sigma_y = \dfrac{\partial B(x,y)}{\partial x} & \text{(g)} \\ -\tau_{xy} = \dfrac{\partial B(x,y)}{\partial y} & \text{(h)} \end{cases}$$

比较式(f)与(h)，有

$$\frac{\partial A(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial B(x,y)}{\partial y}$$

由微分方程理论，必存在一函数 $\varphi(x,y)$，使得

同理，将式(d)第二式改写为

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-\tau_{yx})$$

也必存在一函数 $B(x,y)$，使得

$$\begin{cases} \sigma_y = \dfrac{\partial B(x,y)}{\partial x} & \text{(g)} \\ -\tau_{xy} = \dfrac{\partial B(x,y)}{\partial y} & \text{(h)} \end{cases}$$

比较式(f)与(h)，有

$$\frac{\partial A(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial B(x,y)}{\partial y}$$

由微分方程理论，必存在一函数 $\varphi(x,y)$，使得

$$\begin{cases} A(x,y) = \dfrac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} & \text{(i)} \\ B(x,y) = \dfrac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} & \text{(j)} \end{cases}$$

将式 **(i)**、**(j)** 代入 **(e)**、**(f)**、**(g)**、**(h)**，得通解

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad \text{(k)}$$

(2) 通解

式(a) 的齐次方程：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0\\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0\end{aligned} \tag{d}$$

的通解：

$$\boxed{\left\{\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\\ \sigma_y&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\\ \tau_{xy}&=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right.} \tag{k}$$

—— 对应于平衡微分方程的齐次方程通解。

(3) 全解

取特解为：

$$\boxed{\sigma_x=-f_x x,\sigma_y=-f_y y,\tau_{xy}=0;}$$

则其全解为：

$$\boxed{\left\{\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-f_x x\\ \sigma_y&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-f_y y\\ \tau_{xy}&=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right.} \tag{2-26}$$

—— 常体力下平衡方程（a）的全解。

由式（2-26）看：不管$\varphi(x,y)$是什么函数，都能满足平衡方程。

$\varphi(x,y)$ —— 平面问题的应力函数

—— **Airy** 应力函数

2.相容方程的应力函数表示

将式（2-26）代入常体力下的相容方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0 \qquad (2\text{-}25)$$

$$\begin{cases}\sigma_x=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-f_x x\\ \sigma_y=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-f_y y\\ \tau_{xy}=-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\end{cases} \qquad (2\text{-}26)$$

有：$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-f_x x+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-f_y y\right)=0$

注意到体力*fx*、*fy* 为常量，有

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)=0$$

将上式展开，有

$$\boxed{\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0} \qquad (2\text{-}27)$$

—— 应力函数表示的相容方程

给出了应力函数满足的条件。

2.相容方程的应力函数表示

将式（2-26）代入常体力下的相容方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0 \qquad (2\text{-}25)$$

有：$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-f_x x+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-f_y y\right)=0$$

注意到体力 fx、fy 为常量，有

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)=0$$

将上式展开，有

$$\boxed{\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0} \qquad (2\text{-}27)$$

—— 应力函数表示的相容方程

给出了应力函数满足的条件。

式（2-27）可简记为：

$$\nabla^2\nabla^2(\varphi)=0$$

或： $$\nabla^4\varphi=0$$

式中： $$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\nabla^4=\nabla^2\nabla^2$$

$$\nabla^4=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

满足方程(2-27)的函数$\varphi(x,y)$ 称为重调和函数（或双调和函数）

结论：

应力函数φ应为一重调和函数