第七章　空间问题的基本理论

平衡微分方程

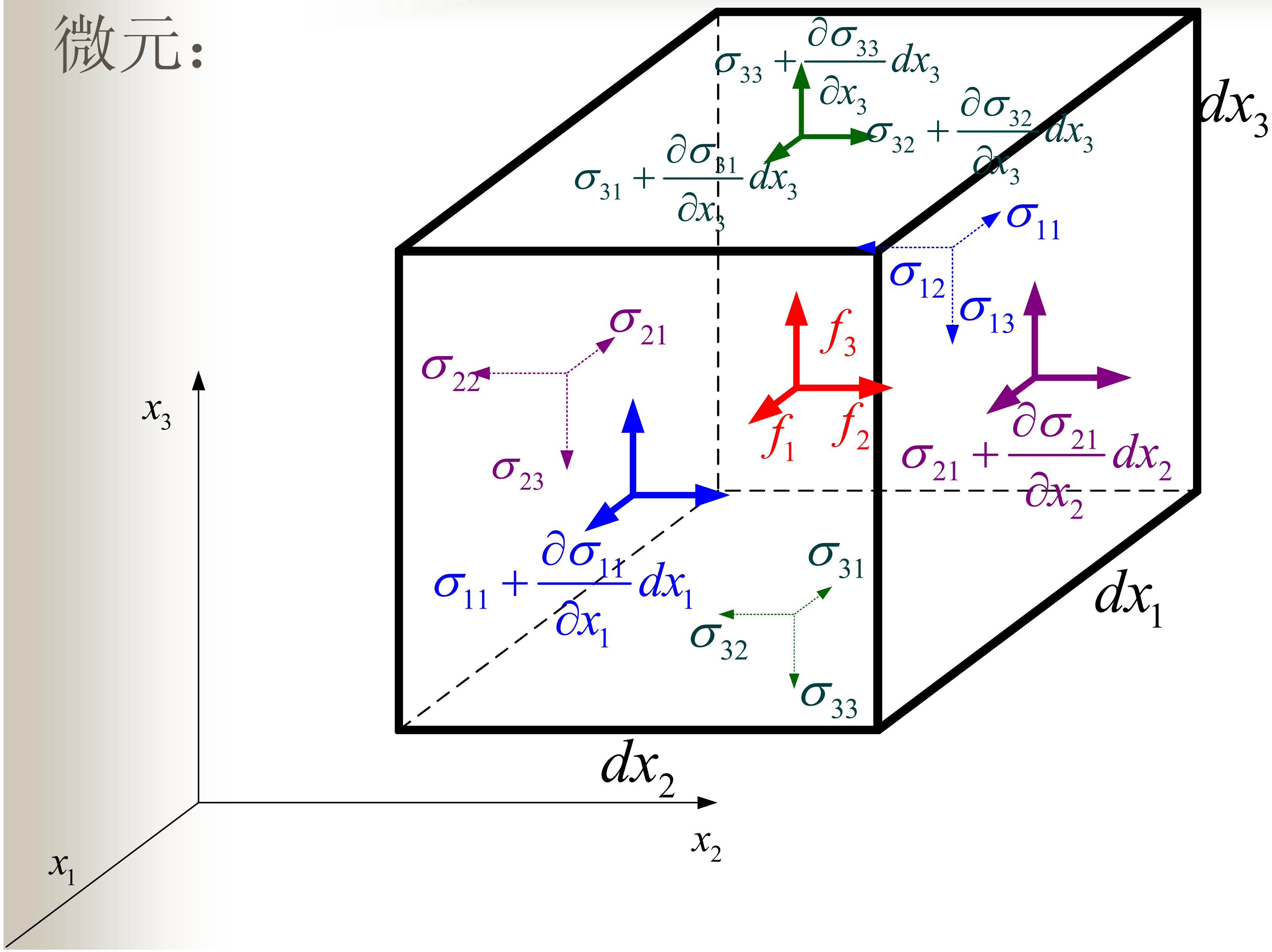
一点的应力状态

几何方程和物理方程

轴对称的基本问题

平衡微分方程

微元：


$\sigma_{33}+\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}dx_3$
$\sigma_{32}+\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3}dx_3$
$\sigma_{31}+\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3}dx_3$
dx_3
σ_{11}
σ_{12}
σ_{13}
σ_{21}
σ_{22}
σ_{23}
f_3
f_1
f_2
$\sigma_{21}+\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2$
$\sigma_{11}+\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1$
σ_{31}
σ_{32}
σ_{33}
dx_1
dx_2
x_3
x_2
x_1

平衡微分方程

考虑X方向的力平衡条件，有：

$$\left(\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3-\sigma_{11}dx_2dx_3$$

$$+\left(\sigma_{21}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_3dx_1-\sigma_{21}dx_3dx_1$$

$$+\left(\sigma_{31}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_2-\sigma_{31}dx_1dx_2+f_1dx_1dx_2dx_3=0$$

同理可列出y、z方向的力平衡条件。

平衡微分方程

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}+f_1=0;\\
&\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}+f_2=0;\\
&\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+f_3=0;
\end{aligned}\right\}\qquad \sigma_{ji,j}+f_i=0$$

对于弹性动力学问题，惯性力作为体力考虑，有：

$$\sigma_{ji,j}+f_i=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

平衡微分方程

考虑微元体的力矩平衡，对通过形心沿x_3方向的轴取矩：

$$\left(\sigma_{12}dx_2dx_3\right)dx_1-\left(\sigma_{21}dx_3dx_1\right)dx_2=0$$

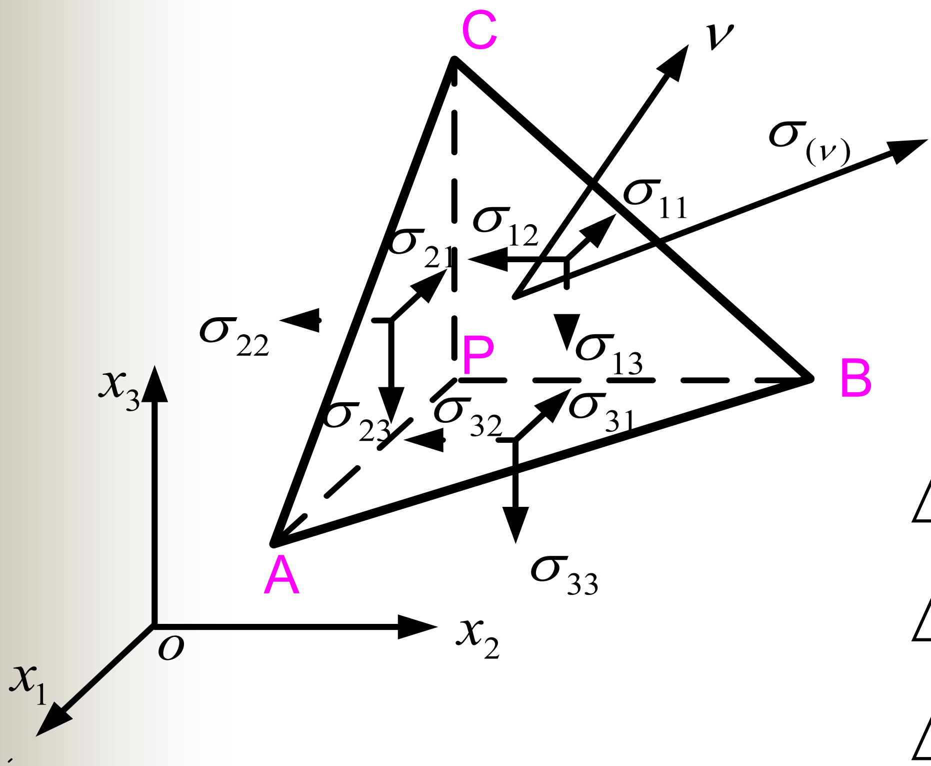
$\therefore\sigma_{12}=\sigma_{21}$; 剪应力互等定理

同理可得：

$$\sigma_{23}=\sigma_{32};\qquad \sigma_{31}=\sigma_{13}$$

体力和惯性力的存在不影响张量的对称性。

一点的应力状态



思路1：平衡法。

斜面法线：

$$\mathbf{v} = \nu_1 \mathbf{e_1} + \nu_2 \mathbf{e}_2 + \nu_3 \mathbf{e}_3 = \nu_i \mathbf{e}_i$$

$$\nu_i = \cos(\mathbf{v}, \mathbf{e}_i) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e_i}$$

$$\Delta PBC: \quad dS_1 = \nu_1 dS;$$

$$\Delta PCA: \quad dS_2 = \nu_2 dS;$$

$$\Delta PAB: \quad dS_3 = \nu_3 dS;$$

$$dV = \frac{1}{3} dh \cdot dS$$

一点的应力状态

x1方向的平衡方程：

$$\sigma_{(\nu)1} dS + f_1 dV = \sigma_{11} dS_1 + \sigma_{21} dS_2 + \sigma_{31} dS_3$$

$$\sigma_{(\nu)1} = \nu_1 \sigma_{11} + \nu_2 \sigma_{21} + \nu_3 \sigma_{31} = \nu_1 \sigma_x + \nu_2 \tau_{yx} + \nu_3 \tau_{zx}$$

同理：

$$\sigma_{(\nu)2} = \nu_1 \sigma_{12} + \nu_2 \sigma_{22} + \nu_3 \sigma_{32} = \nu_1 \tau_{xy} + \nu_2 \sigma_y + \nu_3 \tau_{zy}$$

$$\sigma_{(\nu)3} = \nu_1 \sigma_{13} + \nu_2 \sigma_{23} + \nu_3 \sigma_{33} = \nu_1 \tau_{xz} + \nu_2 \tau_{zy} + \nu_3 \sigma_y$$

一点的应力状态

写成教程使用的分量形式：

$$p_x = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}$$

$$p_y = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy}$$

$$p_z = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z$$

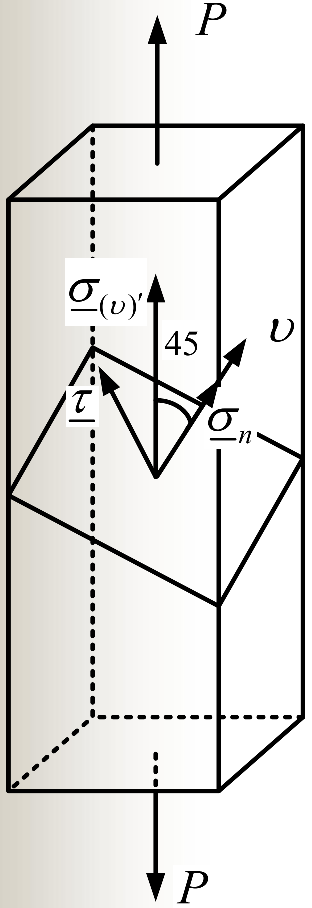
$$\sigma_n = lp_x + mp_y + np_z$$

$$\sigma_n = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx} + 2lm\tau_{xy}$$

$$p^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

$$\tau_n^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_n^2$$

EXAMPLE:



如图，受单向拉伸的方形杆。

已知：拉力P=1000N，

截面积A＝1cm²，

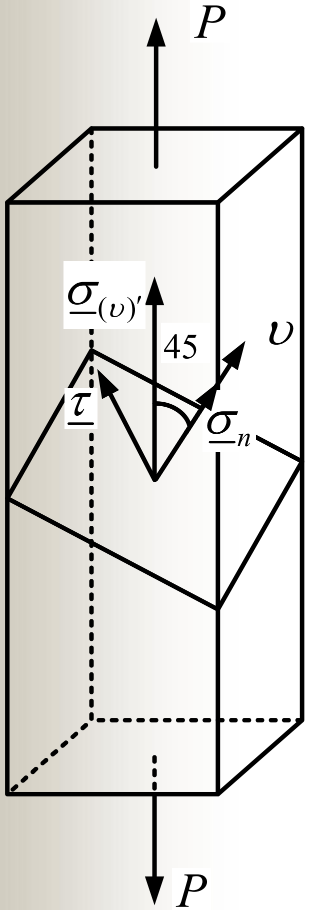
求：法线与Z轴成45度，并与x、y轴夹角相等的斜面上的应力矢量、正应力和剪应力。

解:1、求方形杆横截面上的应力。

$$\sigma_z = 10MPa$$

其余应力分量为零。

一点的应力状态



2、求斜面的法线方向余弦。

$$\nu_3 = 1/\sqrt{2}$$

$$\because \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 \qquad \nu_1 = \nu_2$$

$$\therefore \nu_1 = \nu_2 = 1/2$$

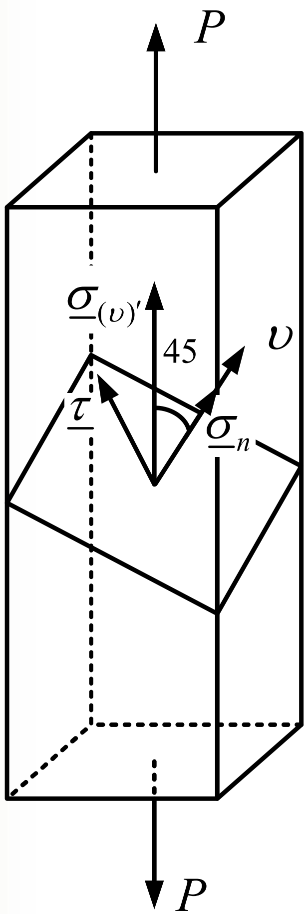
3、求斜面上的应力。

$$\boldsymbol{\sigma}_{(\nu)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu}$$

$$\sigma_{(\nu)1} = \sigma_{(\nu)2} = 0$$

$$\sigma_{(\nu)3} = \sigma_z / \sqrt{2} = 10/\sqrt{2}\,\mathrm{MPa}$$

4、求斜面上的正应力和剪应力。



$$\sigma_n = \sigma_z / 2 = 5\mathrm{MPa}$$

$$\tau = 5\mathrm{MPa}$$

一点的应力状态

- 主应力和主平面
- 主应力分析

$$(\sigma_x-\sigma)l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n=0$$
$$\tau_{xy}l+(\sigma_y-\sigma)m+\tau_{yz}n=0$$
$$\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+(\sigma_z-\sigma)n=0$$

关于l，m，n的齐次线性方程组，
非零解的条件为方程组的系数行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix}\sigma_x-\sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y-\sigma & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z-\sigma\end{vmatrix}=0$$

展开

$$\sigma^3-I_1\sigma^2+I_2\sigma-I_3=0$$

主应力 最大最小应力

主应力特征方程 $\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$

其中：

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$\left|\sigma_{ij}\right|$ 主元之和

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$$

代数主子式之和

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

应力张量元素构成的行列式

主应力 最大最小应力

- I_1、I_2、I_3 分别称为应力张量的第一、第二和第三不变量。
- 特征方程的根是确定的，即 I_1、I_2、I_3的值是不随坐标轴的改变而变化的。
- 主应力和应力主轴方向取决于载荷、形状和边界条件等，与坐标轴的选取无关。
- 如何确定弹性体内部任一点主应力和应力主轴方向。

主应力 最大最小应力

σ_1，σ_2，σ_3分别表示特征方程的三个实数根，代表某点三个主应力。

对于应力主方向，将σ_1，σ_2，σ_3分别代入

$$(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0$$

$$\tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m_1 + \tau_{yz}n = 0$$

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0$$

和

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

则可求应力主方向。

主应力 最大最小应力

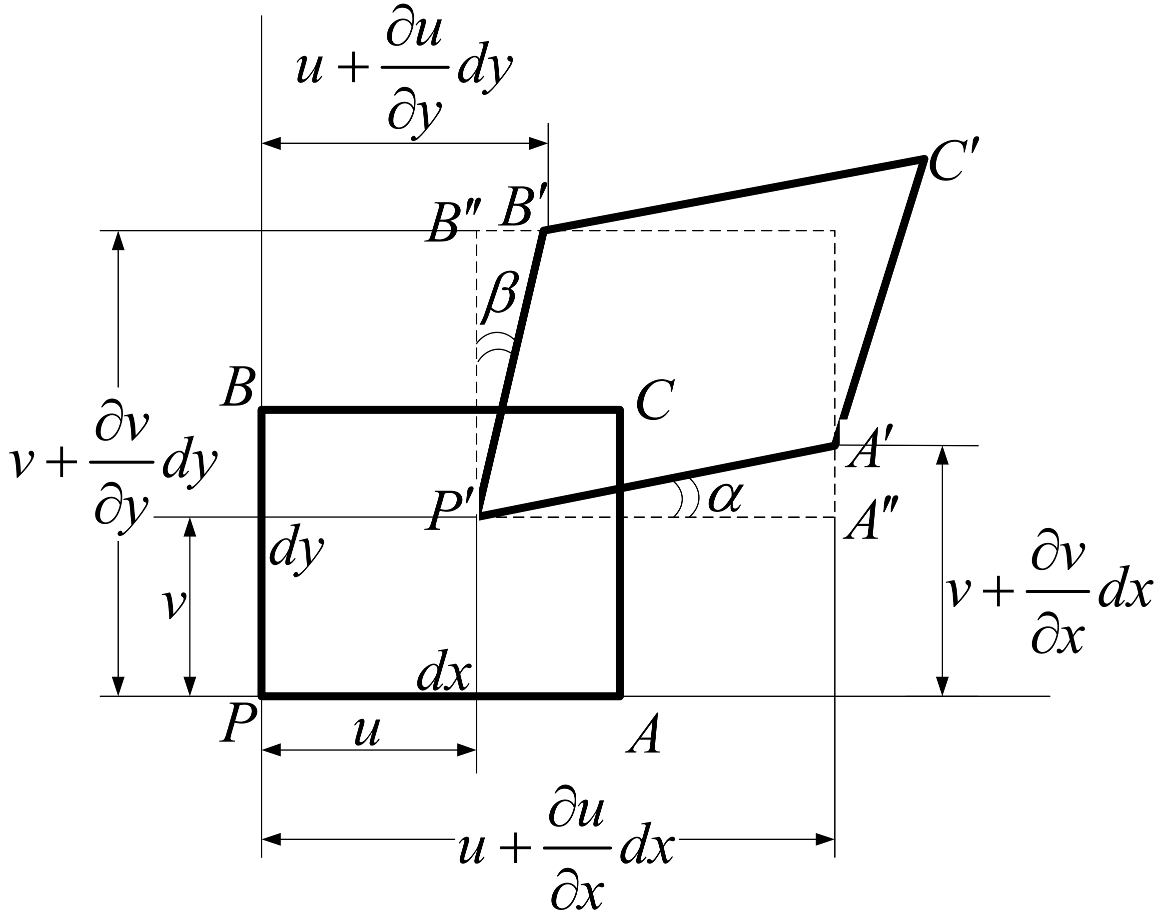
应力不变量性质

- **不变性**　•主应力和应力主方向取决于结构外力和约束条件，与坐标系无关。
- **实数性**　•特征方程的三个根，即一点的三个主应力均为实数。
- **正交性**　•任意一点三个应力主方向是相互垂直的——三个应力主轴正交的。
- **极值性**　•按代数值：主应力σ_1和σ_3是考察点处所有可能截面上正应力之最大值和最小值。

•坐标系的改变导致应力张量分量变化，但应力状态不变。
•应力不变量正是对应力状态性质的描述。

几何方程和物理方程

微分线段上的形变分量与位移分量的关系



几何方程和物理方程

应变位移公式或几何方程

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

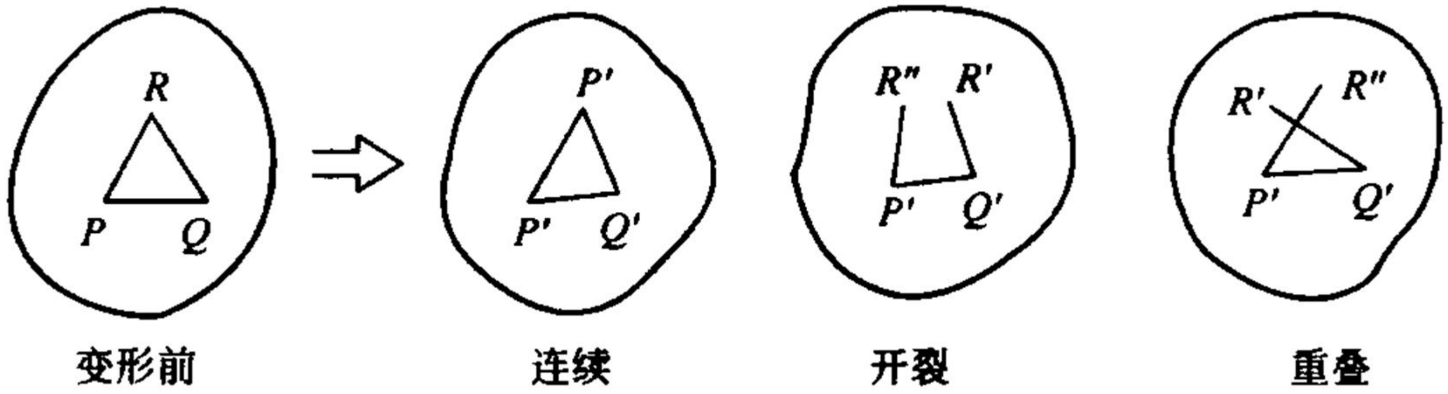
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right);$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \qquad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right);$$

形变协调条件

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

几何方程和物理方程



从几何上看，变形前连续的物体变形后应该仍然保持连续，若任意给定六个应变分量，则物体可能出现开裂或重叠现象（参见图），这样的应变场是不协调的，所以可积条件就是保证变形协调的条件，称为**应变协调方程**。

几何方程和物理方程

例：二维问题。已知 $\varepsilon_x = x \quad \varepsilon_y = x^2 + y \quad \gamma_{xy} = 0$

上列应变场是否可能？

解：
$$\because \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 2 \neq 0$$

该应变场不可能存在。

几何方程和物理方程

体应变的概念：每单位体积的体积改变

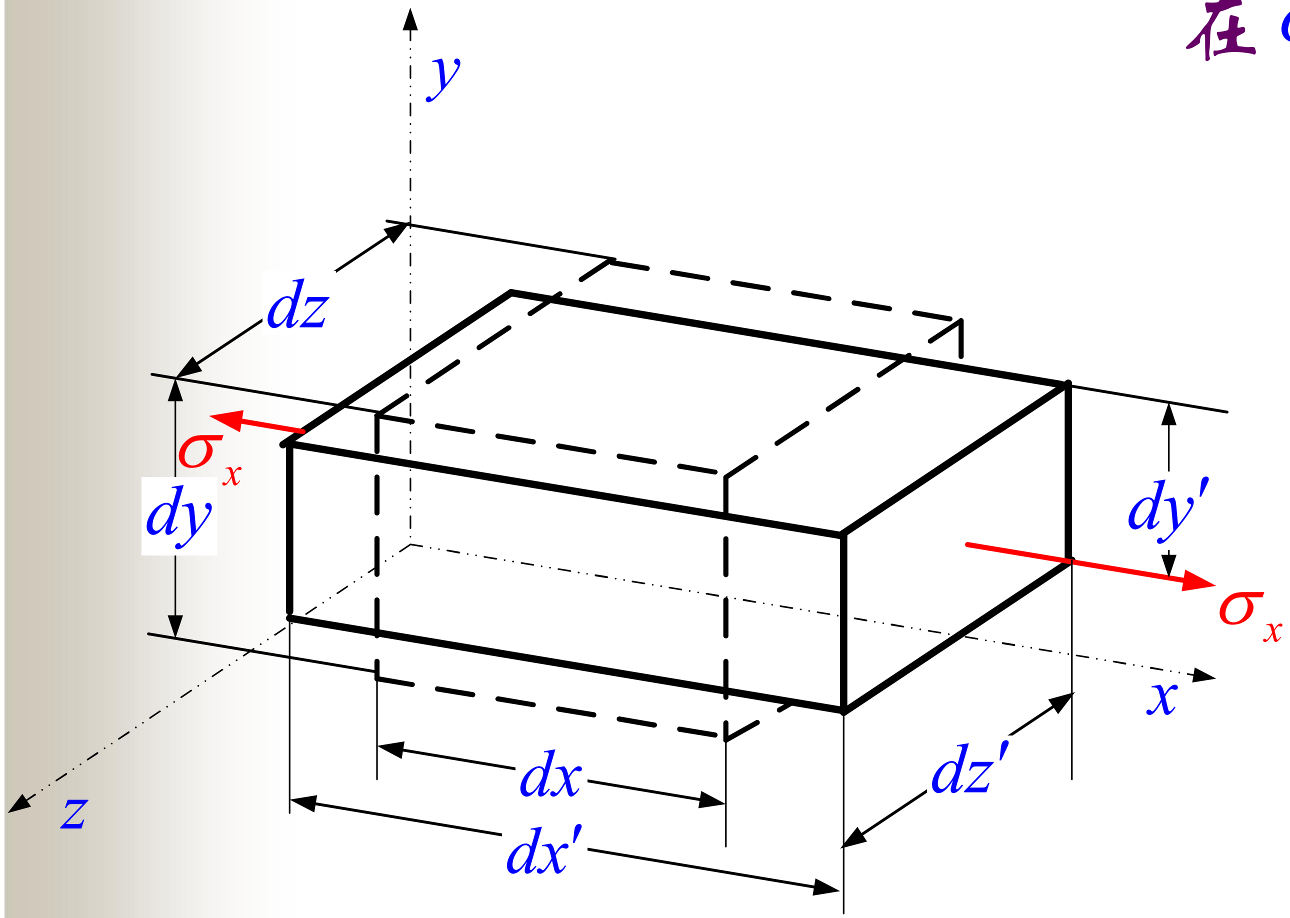
$$\theta = \frac{(dx+\varepsilon_x dx)(dy+\varepsilon_y dy)(dz+\varepsilon_z dz)-dxdydz}{dxdydz}$$
$$= (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)-1$$
$$= \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x+\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z$$

根据小应变假设，略去线应变的乘积项

$$\theta = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

几何方程和物理方程

各向同性弹性体：



在 σ_x 的作用下：

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E}$$

几何方程和物理方程

同理，在σ_y的作用下：

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_y}{E}$$

在σ_z的作用下：

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_z}{E}$$

正应变与正应力的关系：

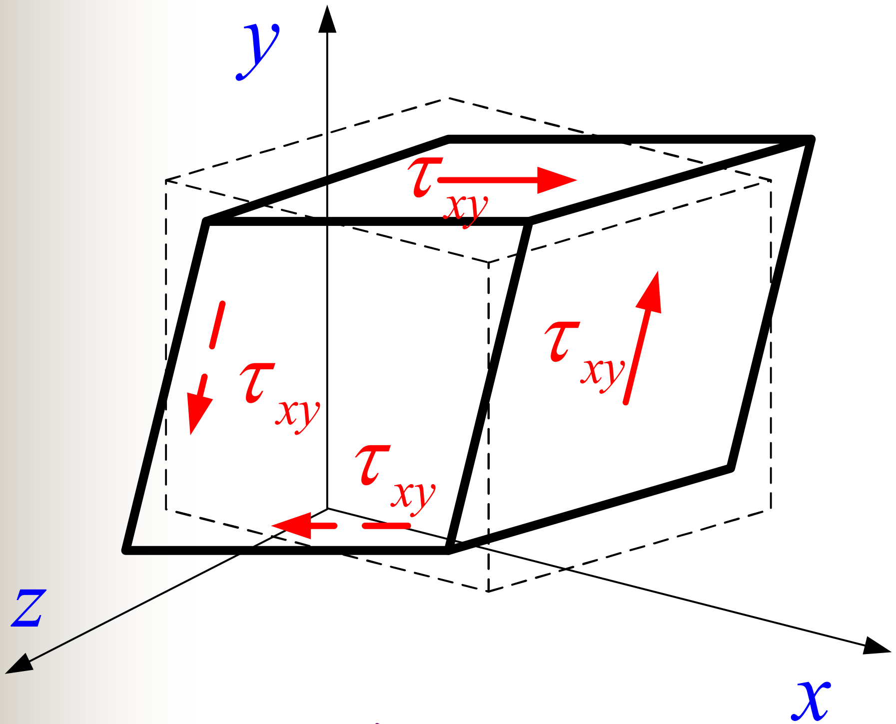
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

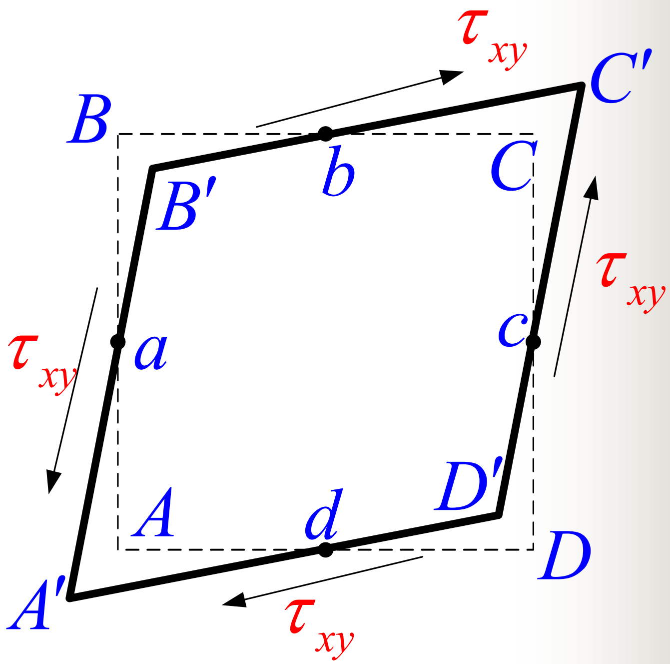
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

几何方程和物理方程

各向同性弹性体：





在 纯剪力的作用下：

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

几何方程和物理方程

各向同性弹性体：

广义胡克定理

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] = \frac{1+\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\Theta;$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] = \frac{1+\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\Theta;$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \frac{1+\nu}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}\Theta;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy};$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz};$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx};$$

E：杨氏模量

G：剪切模量

ν：泊松比

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

体积应力

其中， $\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

几何方程和物理方程

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right]=\frac{1+\nu}{E}\sigma_x-\frac{\nu}{E}\Theta;$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu\left(\sigma_z+\sigma_x\right)\right]=\frac{1+\nu}{E}\sigma_y-\frac{\nu}{E}\Theta;$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right]=\frac{1+\nu}{E}\sigma_z-\frac{\nu}{E}\Theta;$$

以上三项相加

$$\theta=\frac{1-2\nu}{E}\Theta$$

$$\theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\quad,\quad\Theta=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$$

说明：体积应力与体积应变间存在线性关系

几何方程和物理方程

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E}\Theta$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}\Theta$$

$$\sigma_0 = K\theta$$

体积弹性模量：

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

引入拉密常数 $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ 和G：

广义胡克定理

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\theta; \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy};$$

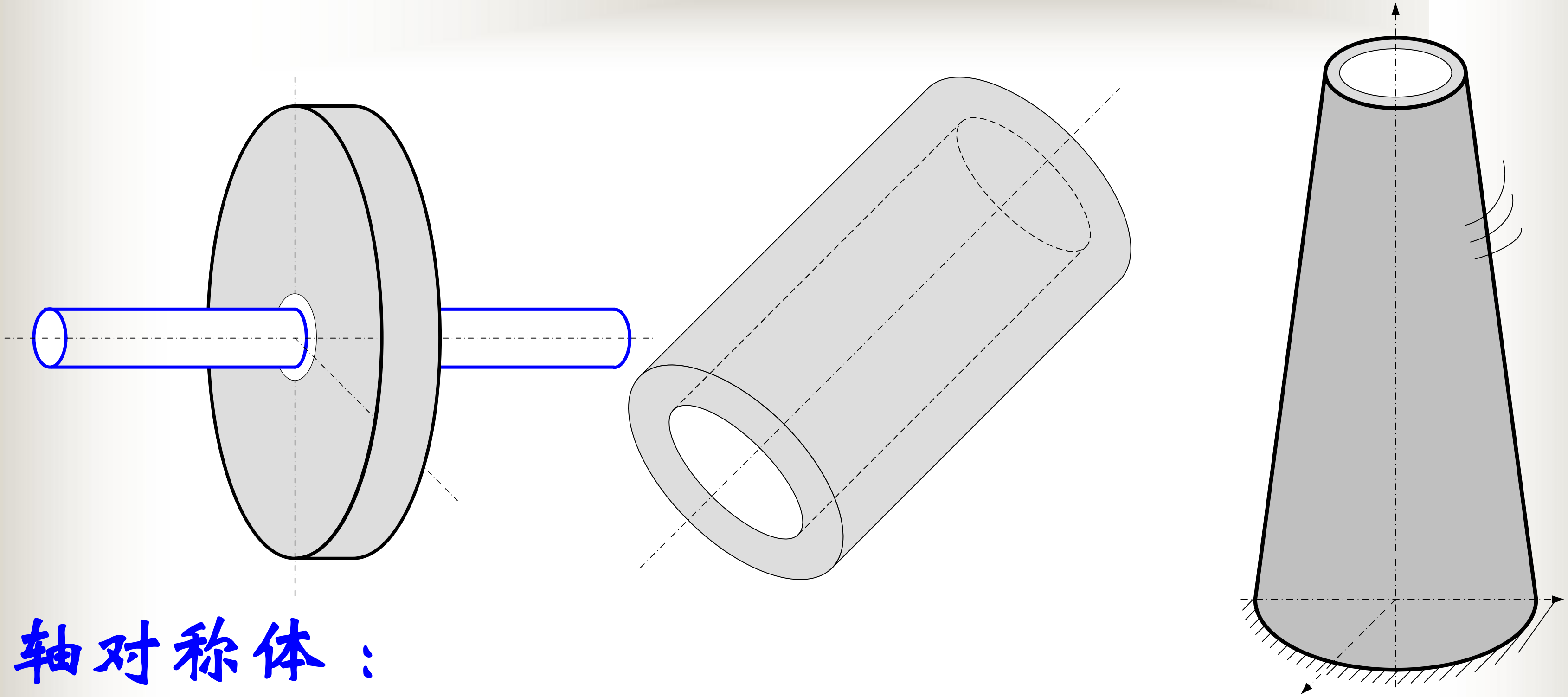
$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\theta; \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz};$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\theta; \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx};$$

弹性常数互换表

	基本常数		
	E,ν	λ, G	K, G
E	——	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	$\frac{9KG}{3K+G}$
ν	——	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	$\frac{3K-2G}{6K+2G}$
λ	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	——	$K-\frac{2}{3}G$
G	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	——	——
K	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\lambda+\frac{2}{3}G$	——

轴对称问题的基本方程



轴对称体：

对称轴一侧的平面图形绕对称轴旋转一周形成

轴对称问题： 轴对称体承受的**载荷和约束**也是**轴对称**的，则其变形状态也将是轴对称的。

轴对称问题的基本方程

空间轴对称问题的特点：

其变形状态对任何径向r－z平面都是对称的

（1）所有物理量均与环向坐标θ无关，因而简化为平面r－z内的二维问题。

（2）环向位移u_θ为零，即所有质点只能在r－z平面内运动，平面始终保持平面。

（3）剪应力$\tau_{r\theta}$和$\tau_{z\theta}$为零，非零应力分量只有四个，即 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$

轴对称问题的基本方程

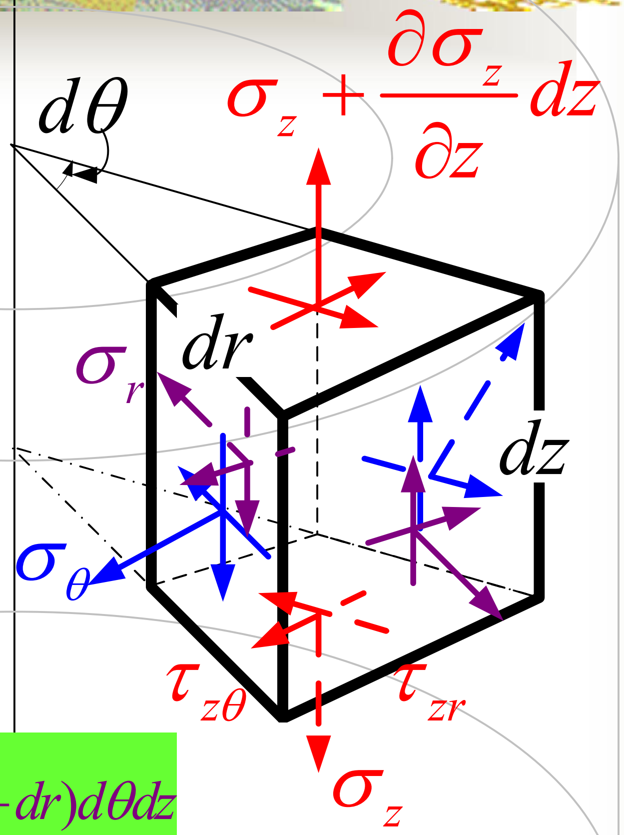
1. 平衡方程

负面：

r	σ_r	$\tau_{r\theta}$	τ_{rz}	$rd\theta dz$
θ	$\tau_{\theta r}$	σ_θ	$\tau_{\theta z}$	$drdz$
z	τ_{zr}	$\tau_{z\theta}$	σ_z	$rd\theta dr$

正面：

r	$\sigma_r+\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}dr$	$\tau_{r\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}dr$	$\tau_{rz}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}dr$	$(r+dr)d\theta dz$
θ	$\tau_{\theta r}+\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}d\theta$	$\sigma_\theta+\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}d\theta$	$\tau_{\theta z}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}d\theta$	$drdz$
z	$\tau_{zr}+\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z}dz$	$\tau_{z\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}dz$	$\sigma_z+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz$	$rd\theta dr$



轴对称问题的基本方程

空间轴对称问题的基本方程：

平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+f_r=0;$$

$$\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}+f_z=0;$$

几何方程

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial x};\qquad \varepsilon_\theta=\frac{u_r}{r};\qquad \varepsilon_z=\frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$\gamma_{zr}=\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z};$$

轴对称问题的基本方程

空间轴对称问题的基本方程：

应变-应力公式

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right];$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_z + \sigma_r\right)\right];$$

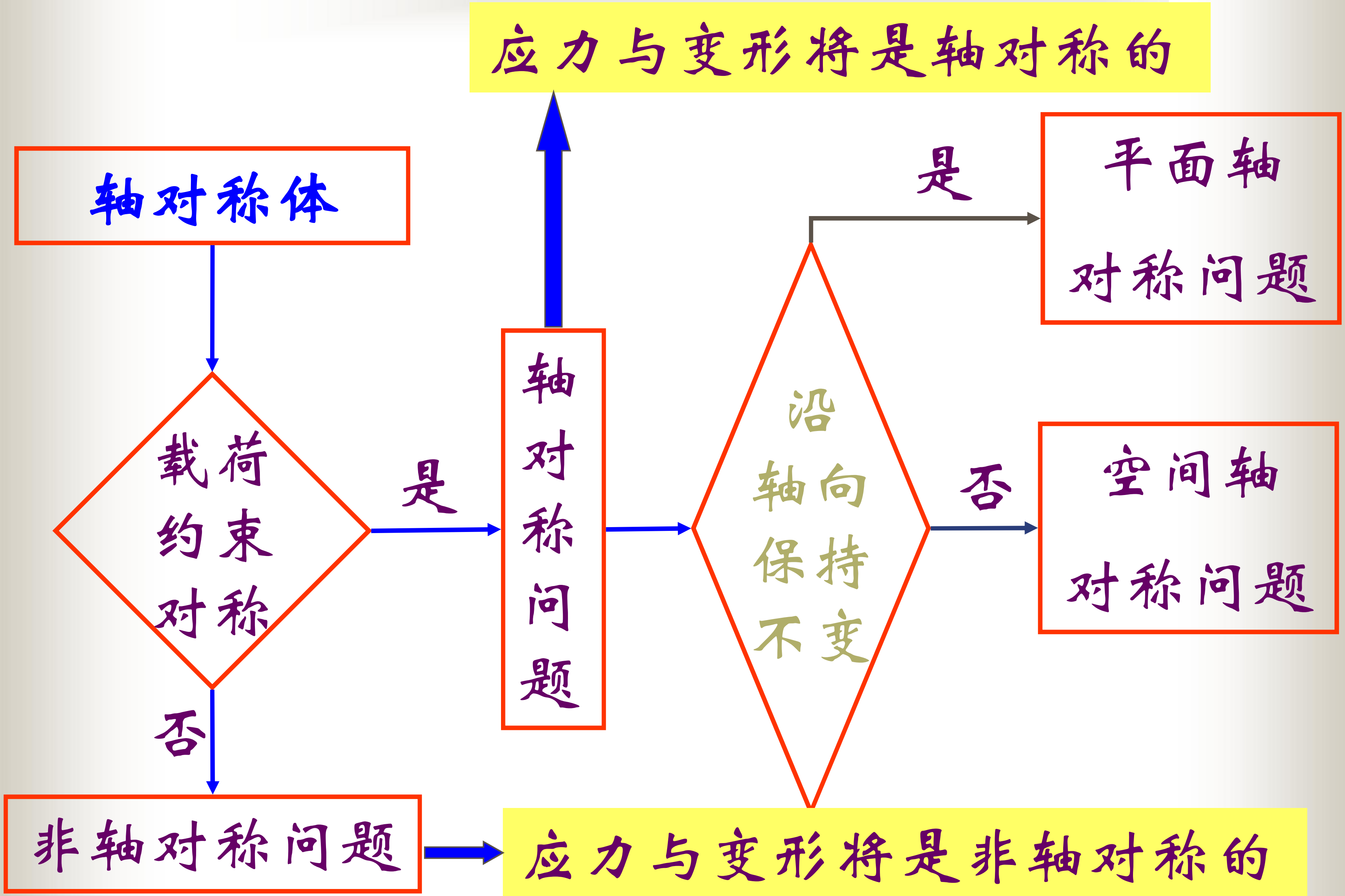
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right];$$

$$\gamma_{zr} = \frac{1}{G}\tau_{zr};$$

柱坐标

正交坐标

轴对称问题的基本方程



应力与变形将是轴对称的
轴对称体
载荷约束对称
是
否
轴对称问题
沿轴向保持不变
是
平面轴对称问题
否
空间轴对称问题
非轴对称问题
应力与变形将是非轴对称的

平面轴对称问题的基本方程

特点：当几何形状、载荷、约束都沿轴向保持不变时，空间轴对称问题退化为平面轴对称问题。

1）平面轴对称问题是轴对称问题

——与环向坐标无关

2）平面轴对称问题是平面问题

——与轴向坐标z无关

平面轴对称问题是沿径向r的一维问题。

平面轴对称问题的基本方程

基本方程

平衡方程：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+f_r=0$$

几何方程：

$$\varepsilon_r=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r};\qquad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r};$$

物理方程（平面应力情况）：

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E}(\sigma_r-\nu\sigma_\theta);\qquad \gamma_{r\theta}=0;$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{1}{E}(\sigma_\theta-\nu\sigma_r);$$

$$\varepsilon_z=-\frac{\nu}{E}(\sigma_r+\sigma_\theta)=-\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta);$$

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r+\nu\varepsilon_\theta);$$

$$\sigma_\theta=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta+\nu\varepsilon_r);$$

$$\tau_{r\theta}=0;$$