Review of Lecture #12/第12次课快速复习

CHAPTER 9 Oblique Shock and Expansion Waves

第九章 斜激波和膨胀波

Presented by Wenping Song

E-mail: wpsong@nwpu.edu.cn

2019年11月20日 Wednesday

Department of Fluid Mechanics, School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, China

National Key Laboratory of Science and Technology on Aerodynamic Design and Research

Compressible Aerodynamics Course

第九章路线图

斜波产生的根源

斜激波关系式

流过尖楔与圆锥的超声速流

激波干扰与反射

脱体激波

普朗特—梅耶膨胀波

激波-膨胀波理论及其在超声速翼型中的应用

Chapter 9.7 Shock-Expansion Theory: Application to Supersonic Airfoils/激波-膨胀波理论及其对超声速翼型的应用

- **平板翼型：**

$$R' = (p_3 - p_2)c \qquad (9.46)$$

$$L' = (p_3 - p_2)c \cdot \cos\alpha \qquad (9.47)$$

$$D' = (p_3 - p_2)c \cdot \sin\alpha \qquad (9.48)$$

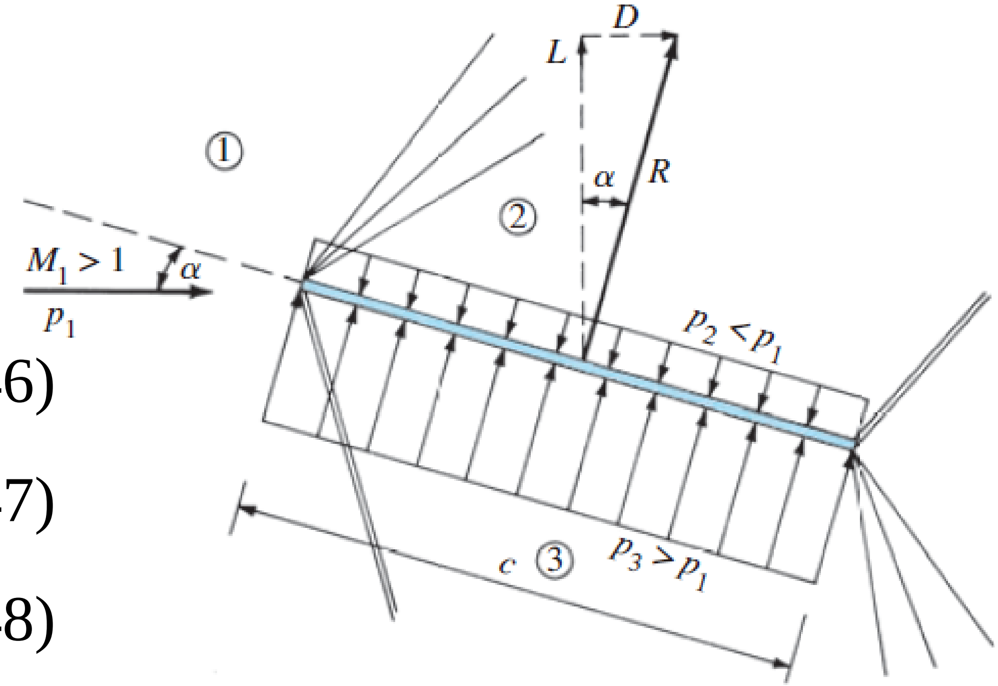
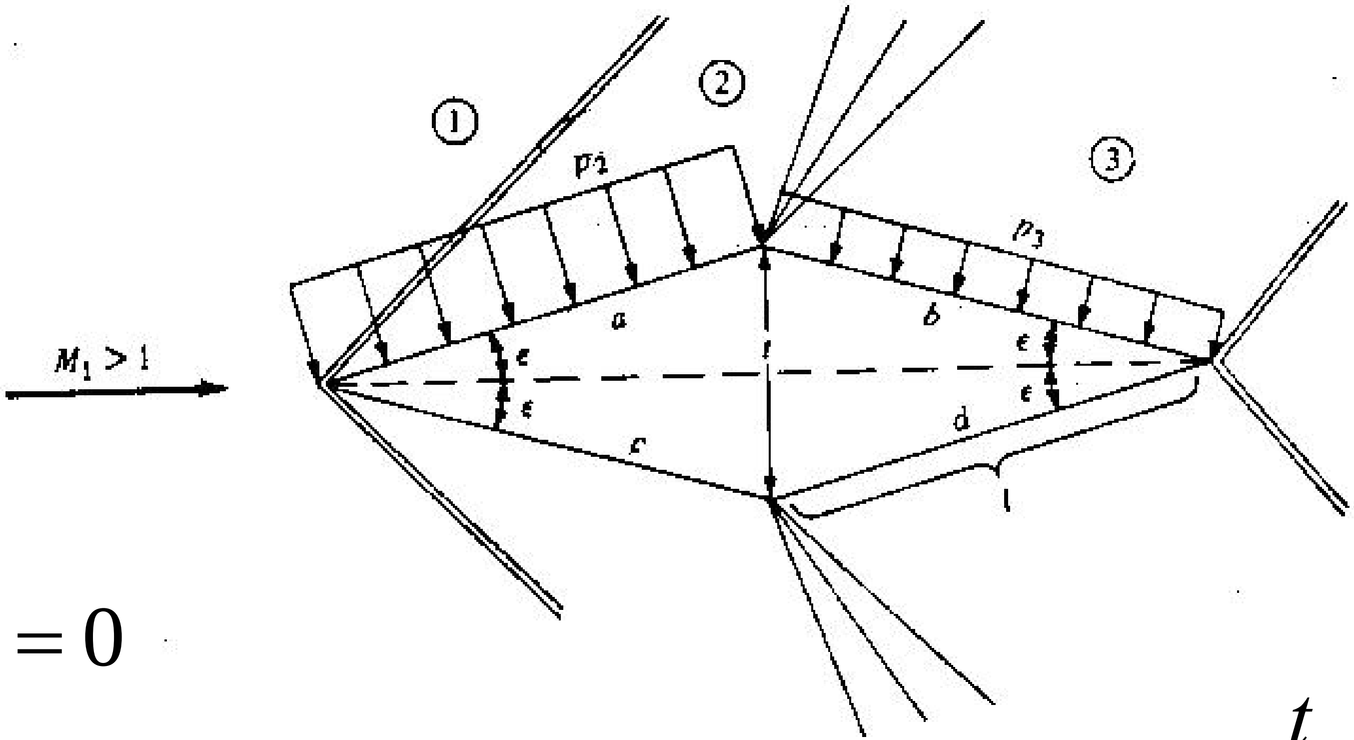


Figure 9.36 Flat plate at an angle of attack in a supersonic flow.

➢ 例2：对称菱形翼型（Diamond-shape airfoil)



$$L'=0$$

$$D'=2(p_2 l\sin\varepsilon-p_3 l\sin\varepsilon)=2(p_2-p_3)\frac{t}{2}$$

- ➢ 在超声速流中，二维物体要受到的阻力的作用，这一阻力被称为波阻
- ➢ 在同样来流马赫数下，翼型厚度越大，其零升波阻越大

问题：什么情况下可以利用激波-膨胀波理论来求解翼型的气动特性？

- 翼型是由直线段组成的，
- 流动偏转角足够小能保证没有脱体激波

在上述条件下，绕翼型的超声速流动就是由一系列斜激波、膨胀波组成的，因此，我们可以应用激波-膨胀波理论精确地求解翼型表面的压力分布进而翼型的升力和阻力。

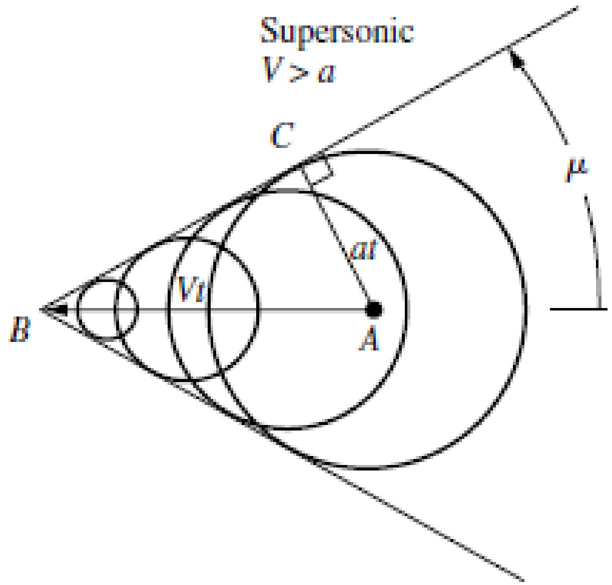
象这样由激波-膨胀波理论(*shock-expansion waves theory*)计算得到解是精确解。

注意：这里所谓的精确解是指没有对控制方程作任何简化，相对于后面要讲的“线化理论”的近似解而言。

Chapter 9.12 Summary/小结

超声速多维流动中的无限微弱扰动产生与来流夹角为马赫角 μ 的马赫波。马赫角的定义如下：

$$\mu = \sin^{-1}\frac{1}{M} \qquad (9.1)$$



(b)

Chapter 9.12 Summary/小结（续）

通过斜激波流动特性的变化由斜激波前的法向速度分量决定。对于量热完全气体，上游法向马赫数是决定性参数。通过斜激波的流动参数变化可利用第8章中的正激波关系式对应波前法向马赫数$M_{n,1}$求得。

$$M_{n,1} = M_1 \sin\beta \qquad (9.13)$$

通过斜激波的气体特性变化取决于两个参数，M_1, β 或 M_1, θ。图9.9给出了M_1, β, θ曲线，必须仔细地研究它。图9.9对应的θ-β-M关系式为：

$$\boxed{\tan\theta = 2\cot\beta \frac{M_1^2 \sin^2\beta - 1}{M_1^2(\gamma + \cos 2\beta) + 2}} \qquad (9.23)$$

Chapter 9.12 Summary/小结（续）

斜激波入射到固壁表面上将会从表面反射，反射波以保证物面处流动相切条件的形式出现。不同斜激波会相互干扰，其干扰结果取决于激波的具体形式。

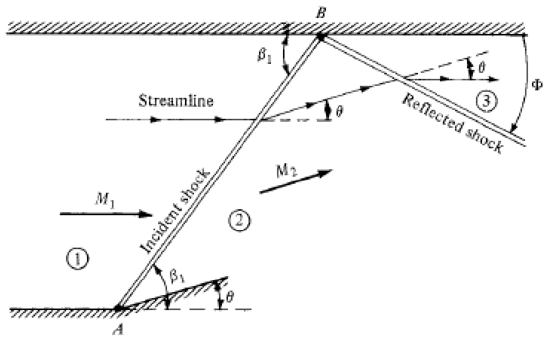
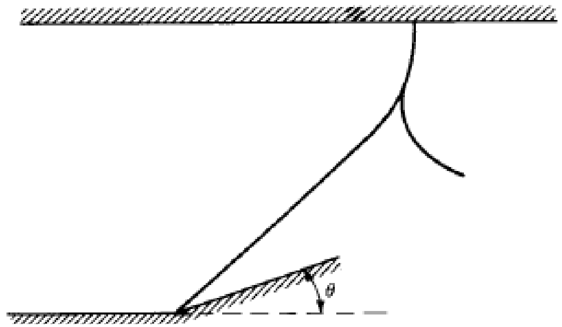


Figure 9.19 Regular reflection of a shock wave from a solid boundary.



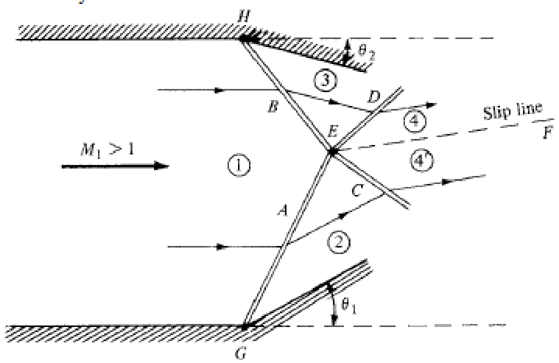


Figure 9.21 Intersection of right- and left-running shock waves.

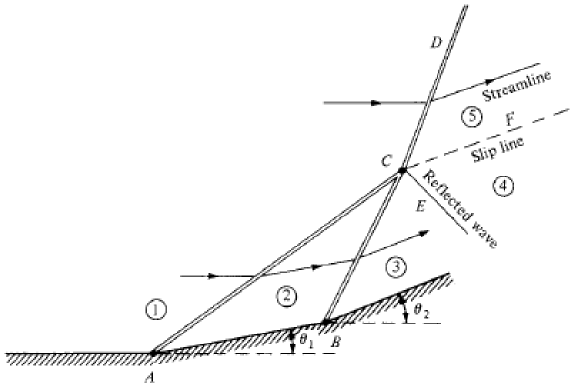


Figure 9.22 Intersection of two left-running shock waves.

Chapter 9.12 Summary/小结（续）

精确描述膨胀波内部变化的微分方程：

$$\boxed{d\theta = \sqrt{M^2 - 1}\,\frac{dV}{V}} \qquad (9.32)$$

普朗特 - 梅耶函数 ***ν*(*M*)**：

$$\boxed{\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)} - \tan^{-1}\sqrt{M^2-1}} \qquad (9.42)$$

决定中心膨胀波的参数是普朗特 - 梅耶函数 ***ν*(*M*)**。联系下游马赫数M_2、上游马赫数M_1及偏转角θ的重要方程是：

$$\theta = \nu(M_2) - \nu(M_1) \qquad (9.43)$$

Chapter 9.12 Summary/小结（续）

由直线段组成的超声速翼型的压强分布可以用斜激波、膨胀波理论精确地计算出来。

以上论述需满足的条件：

（1）流动偏转角足够小能保证没有脱体激波

（2）绕翼型的超声速流动是由一系列斜激波、膨胀波组成的

投票(匿名)　最多可选1项

设置

请对上一次课内容的掌握情况进行投票

- A　完全掌握了这部分知识内容
- B　掌握了大部分
- C　掌握了一小部分
- D　完全不懂

提交

Review of Lecture # 12 Ended！

Lecture #13/第13次课

Chapter 10 Compressible Flow through Nozzles, Diffusers, and Wind Tunnels

第十章 通过喷管、扩压器和风洞的可压缩流

主讲人：宋文萍
E-mail: wpsong@nwpu.edu.cn

2019年11月20日 Wednesday

Department of Fluid Mechanics, School of Aeronautics
Northwestern Polytechnical University, Xi'an, China

National Key Laboratory of Science and Technology
on Aerodynamic Design and Research

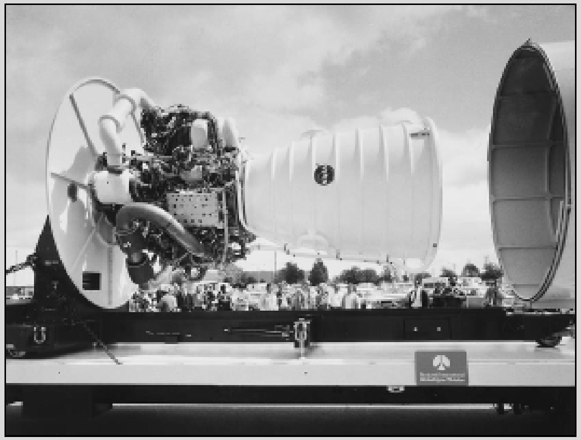


Figure 10.1 Space shuttle main rocket engine (NASA).

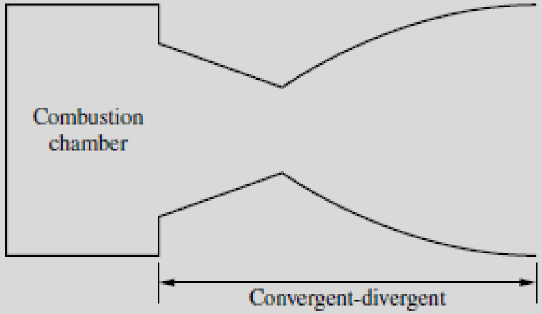


Figure 10.2 Schematic of rocket engine nozzle.

图10.1 太空飞船的主火箭发动机

可产生推力>400,000lb (1779200N = 181551Kg)

10.1 Introduction/引言

要观察超声速下飞行器的升力、阻力的产生及绕飞行器流动的流场细节，包括激波、膨胀波的构型，主要可以采用以下两种方法：

（1）Conduct flight tests using the actual vehicle
进行实际飞行器的飞行试验

（2）Run wind-tunnel tests on a small-scale model of the vehicle
用飞行器的缩小模型进行风洞实验

飞行试验：

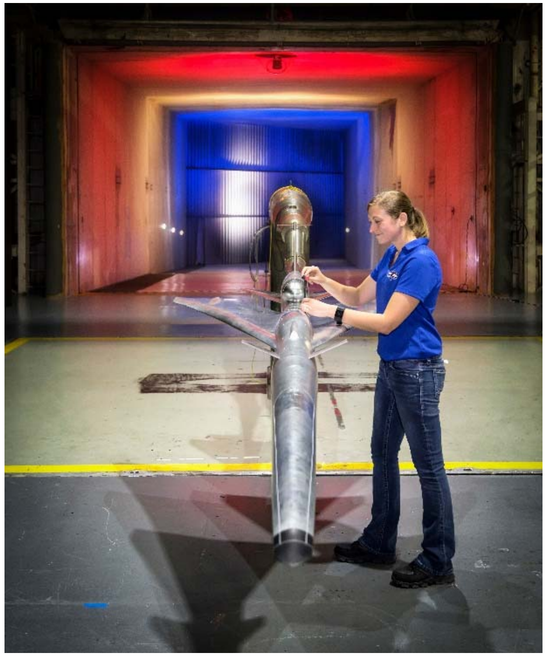
能够提供真实飞行环境下的可靠结果；

非常昂贵，没有得到充分验证时进行飞行试验极其危险的

大攻角飞行中的歼20飞机
（网络来源：百家号军/迷哨所）

风洞试验

获得到超声速空气动力学相对可靠的大量数据



NASA 8X6（英尺）超声速风洞试验段
(https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/14x22_1_edited.jpg)

在本章我们将和同学们一起探索下列问题的答案：

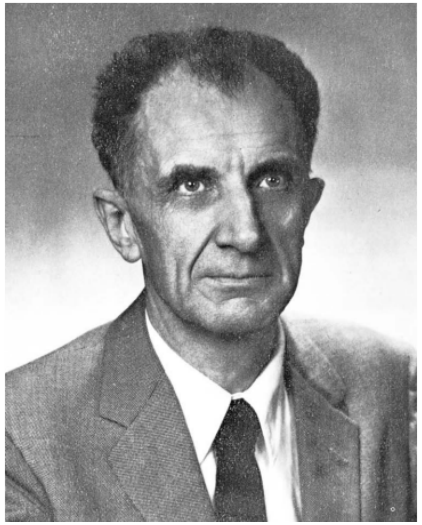
(1) What do such supersonic wind tunnels look like ?
超声速风洞的外观是什么样的？

(2) How do we produce a uniform flow of supersonic gas in a laboratory environment?
如何在风洞中产生均匀的超声速流动？

(3) What are the characteristics of supersonic wind tunnels?
超声速风洞的特征是什么？

问题：超声速风洞的外观是什么样的？

Q: What do such supersonic wind tunnels look like ?



Adolf Busemann
(1901 - 1986)
Source: (NASA.)

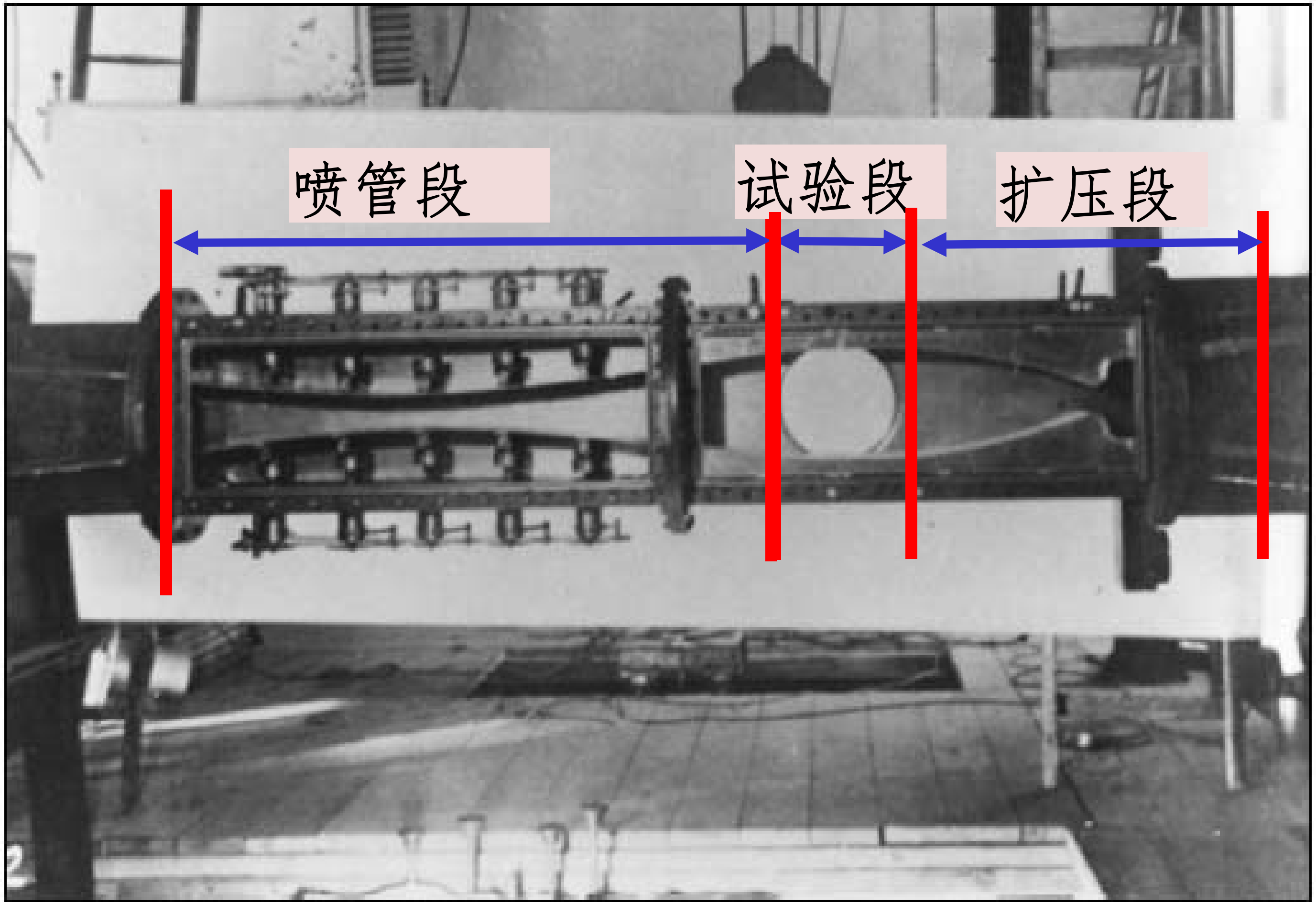


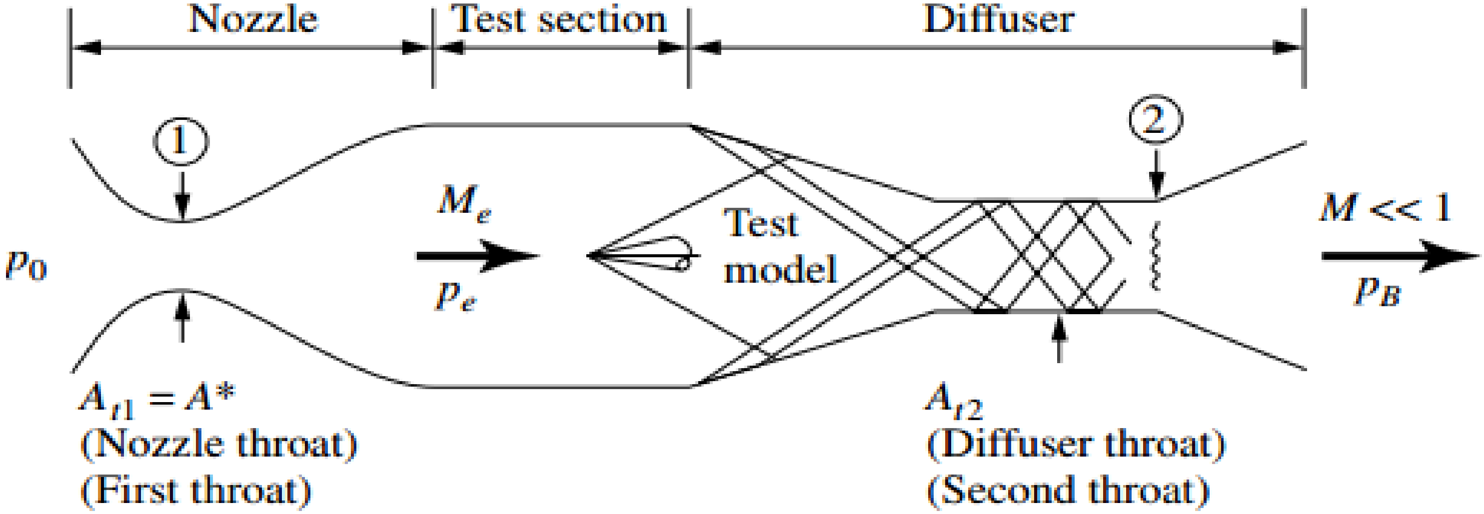
Figure 10.3 The first practical supersonic wind tunnel, built by A. Busemann in Germany in the mid-1930s. (*Courtesy of the John Anderson Collection.*)

Figure 10.4 A large hypersonic wind tunnel at the U.S. Air Force Wright Aeronautical Laboratory, Dayton, Ohio. (*Courtesy of the U.S. Air Force and the John Anderson Collection.*)

问题：如何在风洞中产生均匀的超声速流动？

Q：How do we produce a uniform flow of supersonic gas in a laboratory environment?

喷管　试验段　扩压段（扩压器）



10.2Governing equations for quasi-one-dimensional flow
(10.2准一维流动控制方程的推导)

10.3 Nozzle flows
(10.3 喷管流动)

10.4 Diffusers
(10.4扩压器)

10.5 Supersonic wind tunnels
(10.5 超声速风洞)

10.6 Viscous Flow：Shock-Wave/Boundary-Layer Interaction inside Nozzles

(10.6 粘性流：喷管内的激波/边界层干扰)

图10.5　第十章的路线图

本章的相关基础知识对于高速风洞，火箭发动机、高能气体化学激光武器、喷气发动机等的设计都至关重要。对于全面认识可压缩流动的特性十分重要。

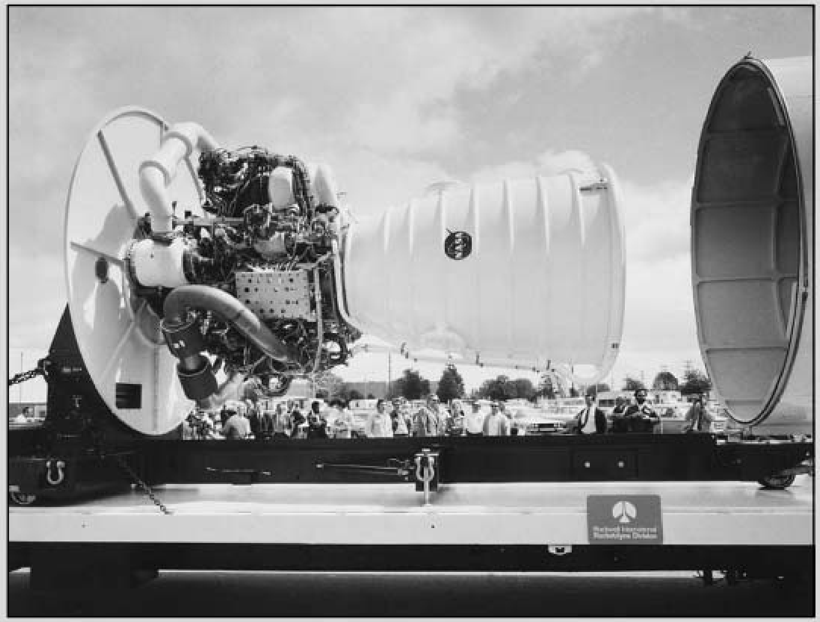


Figure 10.1 Space shuttle main rocket engine (NASA).

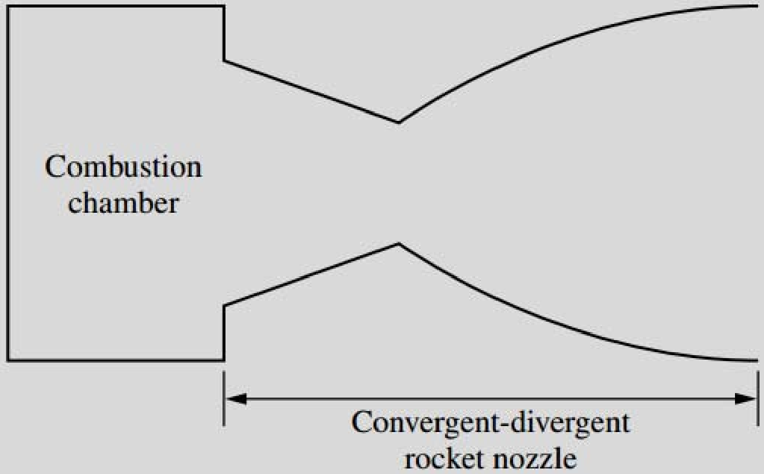


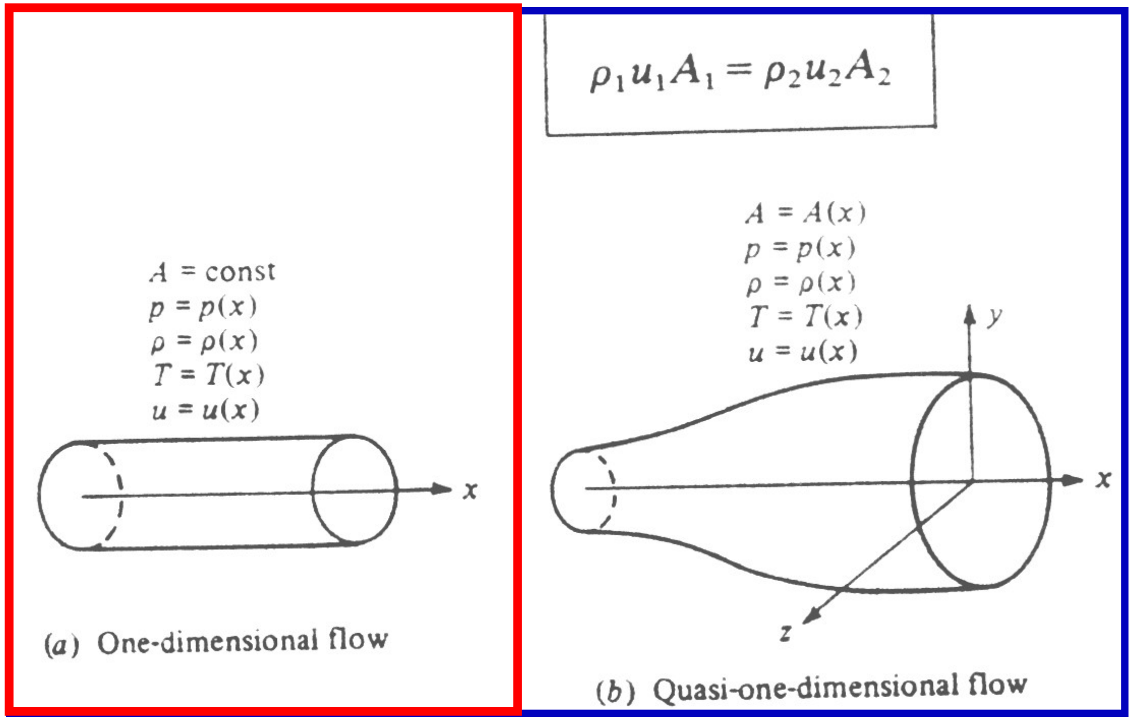
Figure 10.2 Schematic of rocket engine nozzle.

图10.1 航天飞机的主火箭发动机可产生推力>400,000lb（约181.4吨)

图10.2 火箭发动机喷管示意图

10.2 Governing Equation for Quasi-One-Dimensional Flow
（准一维流的控制方程）

什么是准一维流？

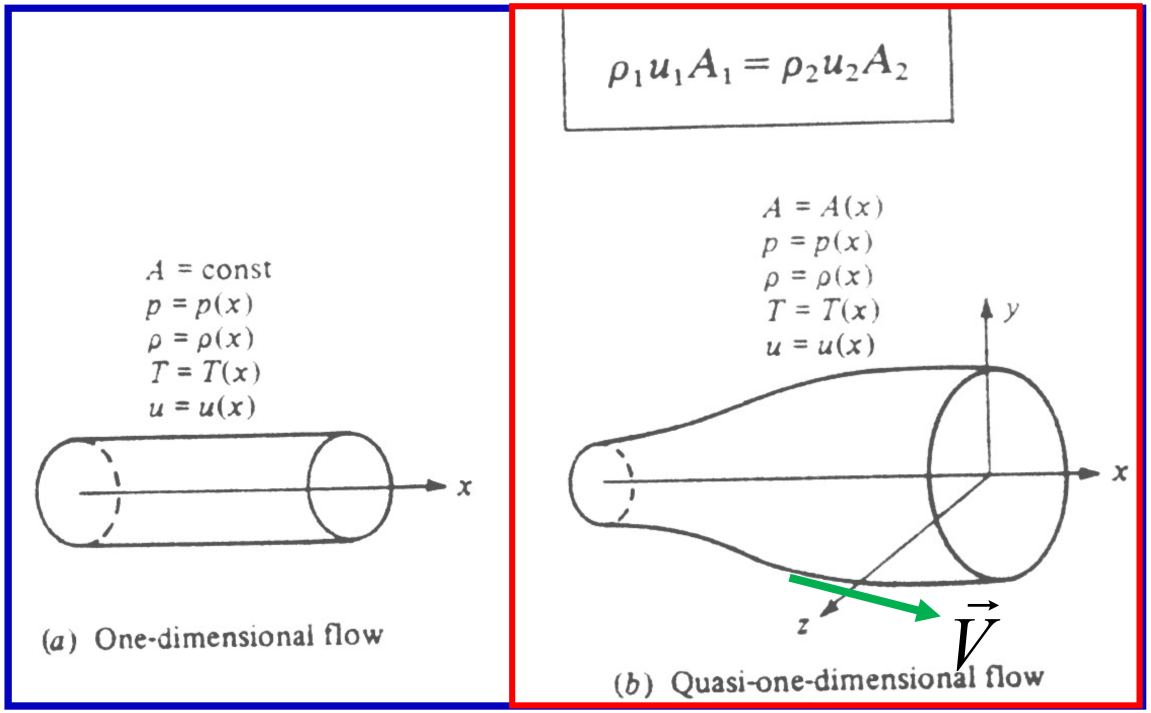


(*a*)一维流 (*b*)准一维流

Figure 10.6 One-dimensional and quasi-one-dimensional flows

图10.6 一维流和准一维流

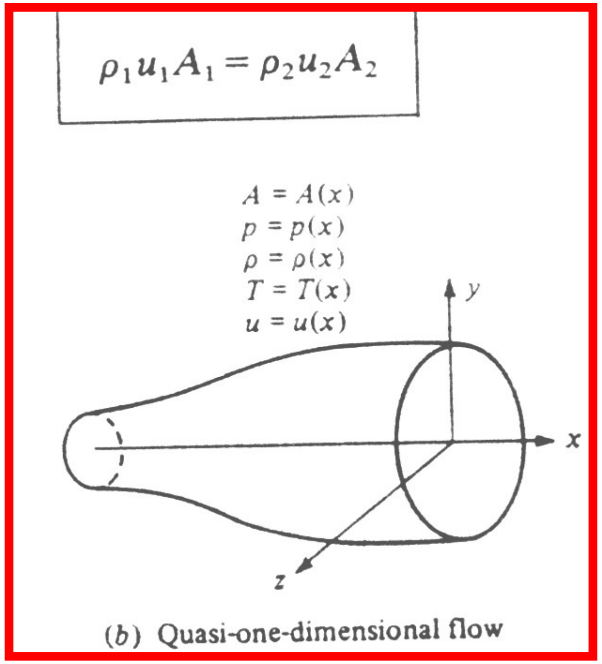
一维流：$p = p(x), \rho = \rho(x), T = T(x), u = u(x)$ **A=const**



(*a*)一维流　　　　(*b*)准一维流

Figure 10.6 One-dimensional and quasi-one-dimensional flows

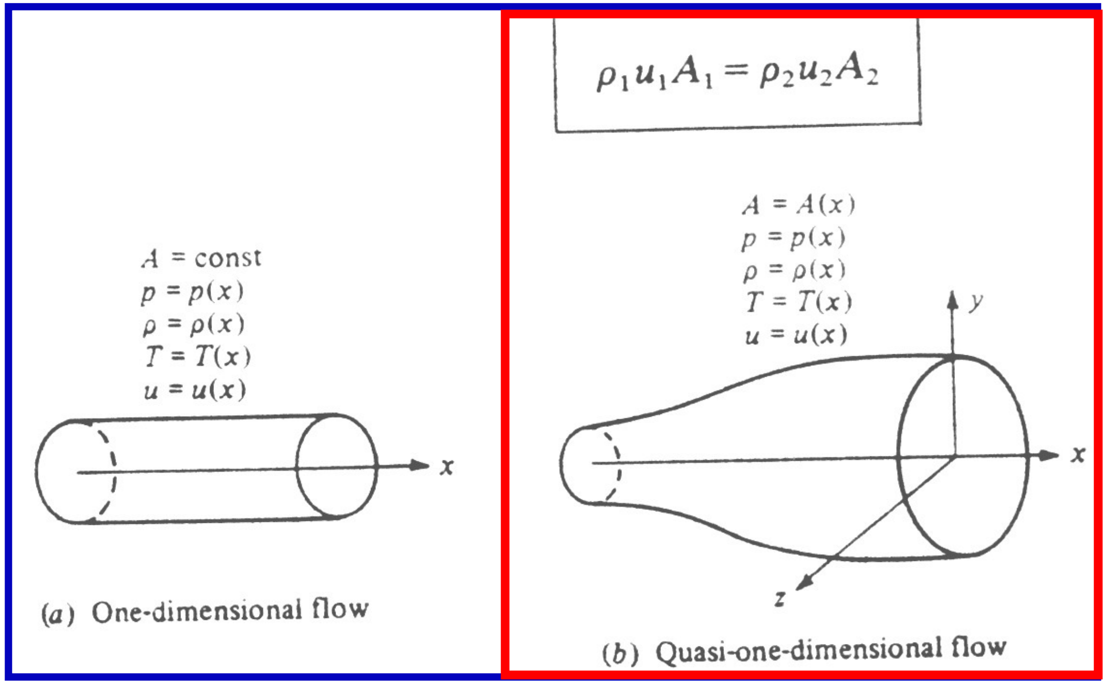
图10.6 一维流和准一维流



(b) Quasi-one-dimensional flow

准一维流的定义：

流管面积、流动变量只是 x 的函数，即气流在每一个 x站位是均匀的，满足函数关系 $A = A(x)$, $p = p(x)$, $\rho = \rho(x)$, $T=T(x)$,$u = u(x)$ 。这种流动被称为准一维流动。



- 严格来讲， 图10.6b所示的流动是三维流动，准一维流只是对变截面管内（管道面积变化不太剧烈）真实三维流动的近似。

- 准一维流动的流动变量$p(x)$, $\rho(x)$, $T(x)$，$u(x)$可以看作真实三维流动变量在每一个x站位的平均值

多选题 1分

设置

下面有关准一维流动的描述，说法正确的是

A 准一维流动和一维流动没有区别

B 满足 $A = A(x)$, $p = p(x)$, $\rho = \rho(x)$, $u = u(x)$的流动是准一维流动

C 准一维流是对截面积变化不太剧烈的变截面管内真实三维流动的近似

D 准一维流动的流动变量$p(x)$, $\rho(x)$, $u(x)$可以看作真实三维流动变量在每一个x站位的平均值

提交

准一维流有限控制体

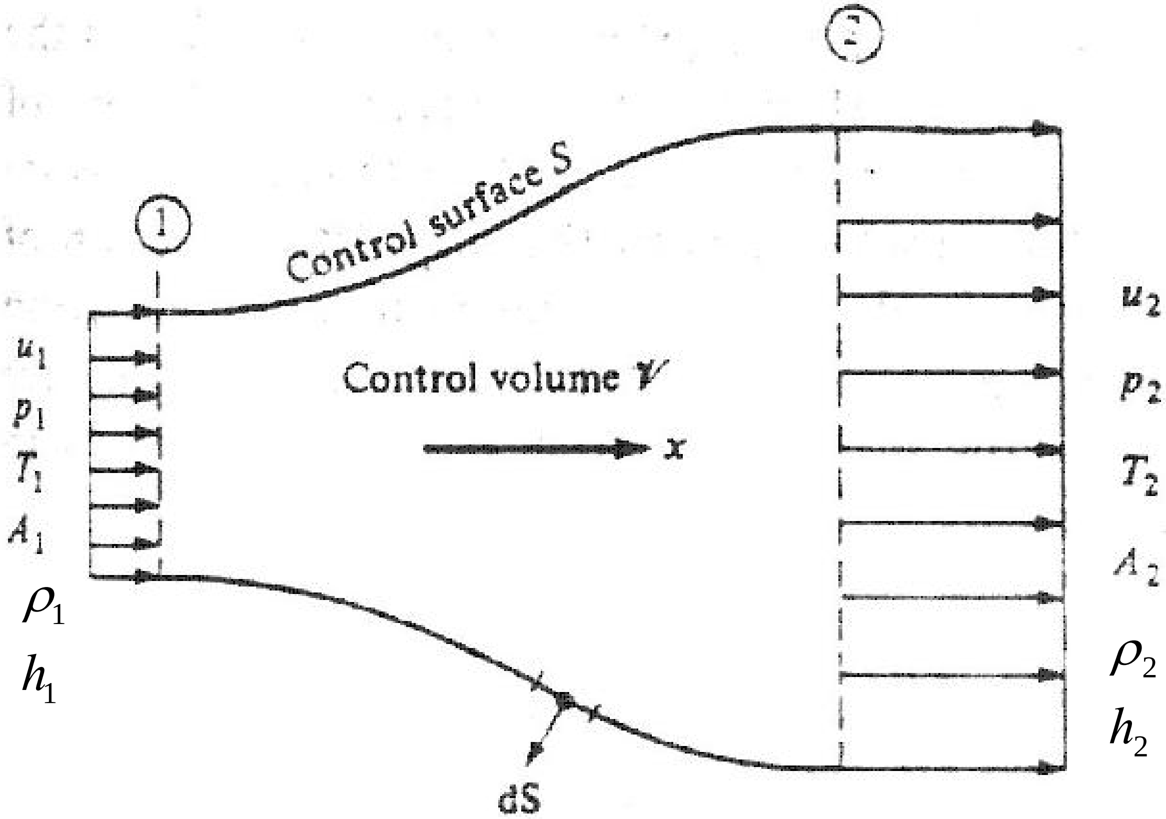


Fig.10.7 Finite control volume for quasi-one-dimensional flow

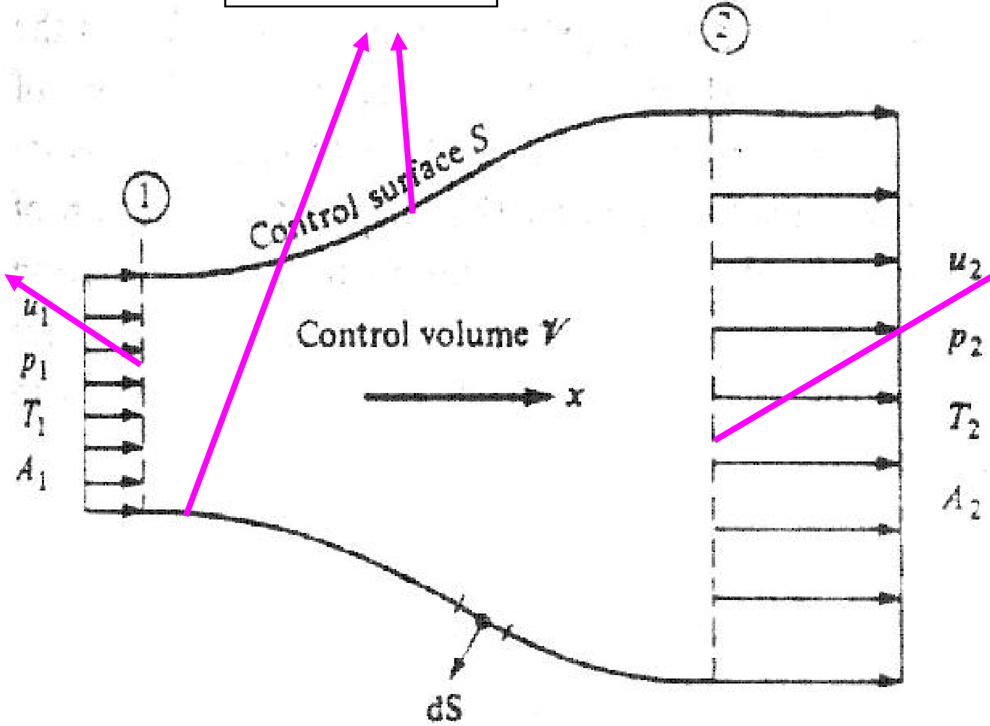
➢ 连续方程：

$$\oiint_S \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad (7.39)$$

$$\iint_{A_1} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = -\rho_1 u_1 A_1$$

$$\mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\iint_{A_2} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \rho_2 u_2 A_2$$



$$\boxed{\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2} \quad \text{或：} \quad \boxed{\rho u A = \text{常数}} \qquad (10.1)$$

➢ 动量方程

在定常、无粘、绝热和忽略体积力作用的假设下, 积分形式的动量方程可以写成:

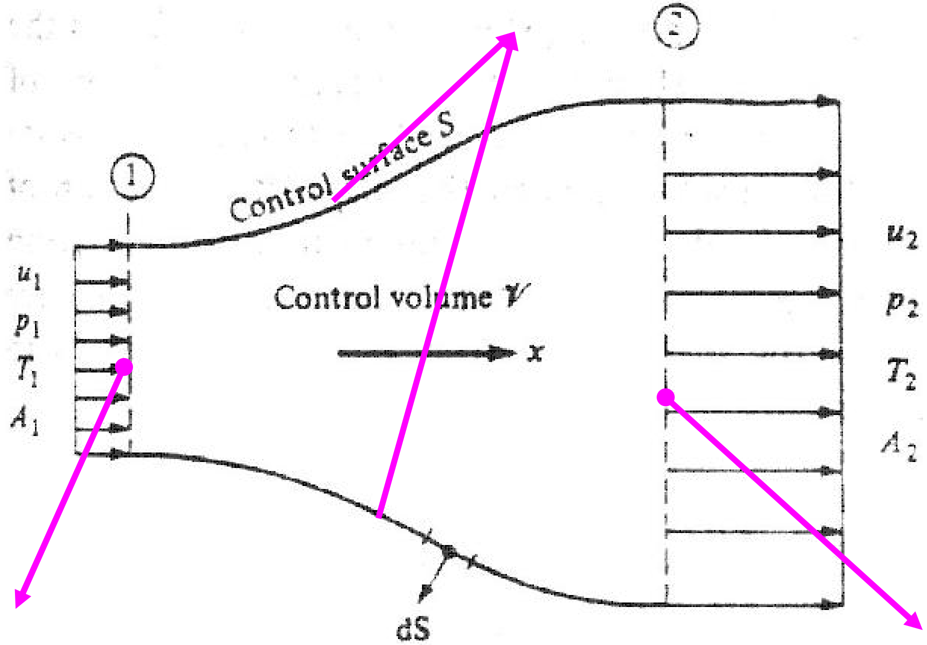
$$\oiint_S (\rho \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S})\mathbf{V} = -\oiint_S p\mathrm{d}\mathbf{S} \qquad (10.2)$$

对应 x 方向分量:

$$\oiint_S (\rho \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S})u = -\oiint_S \left(p\mathrm{d}\mathbf{S}\right)_x \qquad (10.3)$$

$\oiint_S (\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S})u$的积分：

$$\boxed{\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S}=0}$$



$$\iint_{A_1} (\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S})u = \rho u_1(-A_1)u_1$$
$$= -\rho_1 u_1^{\,2} A_1$$

$$\iint_{A_2} (\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S})u = \rho u_2(+A_2)u_2$$
$$= \rho_2 u_2^{\,2} A_2$$

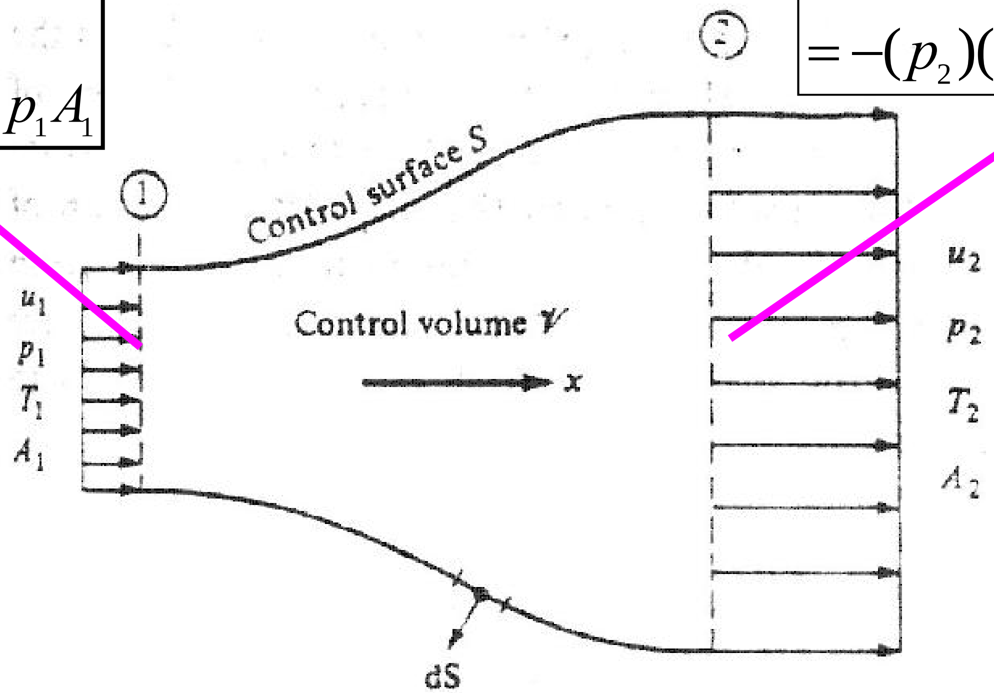
$$\oiint_S (\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S})u = -\rho_1 u_1^{\,2} A_1 + \rho_2 u_2^{\,2} A_2$$

$$-\oint\!\!\!\oint_{S} (p d\mathbf{S})_x \text{的积分:}$$

（1）截面A1和A2处的积分

$$-\iint_{A_1} (p d\mathbf{S})_x = -(p_1)(-A_1) = p_1 A_1$$

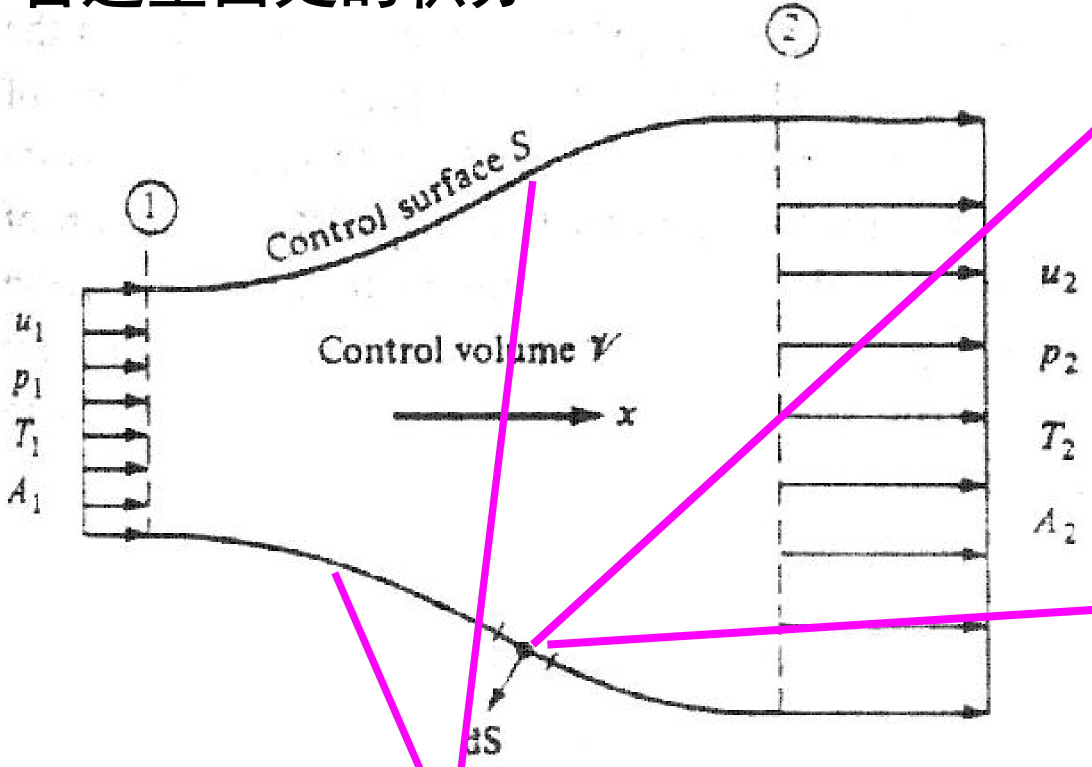
$$-\iint_{A_2} (p d\mathbf{S})_x = -(p_2)(A_2) = -p_2 A_2$$

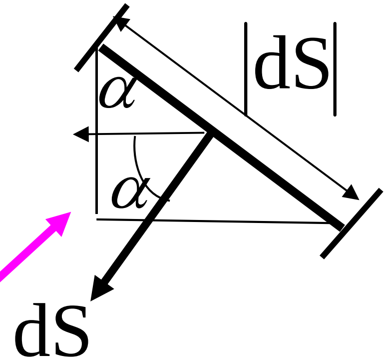


$$-\iint_{A_1} (pdS)_x dx - \iint_{A_2} (pdS)_x dx = p_1 A_1 - p_2 A_2$$

$-\oiint_{S}(p\mathrm{d}\mathbf{S})_x$的积分：

（2）管道壁面处的积分





$$(\mathrm{dS})_x = -|\mathrm{dS}|\cos\alpha$$
$$= -dA$$

$$\boxed{(pdS)_x = -pdA}$$

$$\boxed{-\iint_{A_{ul}}(pdS)_x = -\int_{A_1}^{A_2} -pdA = \int_{A_1}^{A_2} pdA} \quad （10.4）$$

把上面的积分结果代入我们前面已给出的x方向动量方程：

$$\oiint_S (\rho \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}) u = -\oiint_S (p \mathrm{d}\mathbf{S})_x \qquad (10.3)$$

得：

$$-\rho_1 u_1^2 A_1 + \rho_2 u_2^2 A_2 = p_1 A_1 - p_2 A_2 + \int_{A_1}^{A_2} p dA$$

整理得：

$$\boxed{p_1 A_1 + \rho_1 u_1^2 A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p dA = p_2 A_2 + \rho_2 u_2^2 A_2} \qquad (10.5)$$

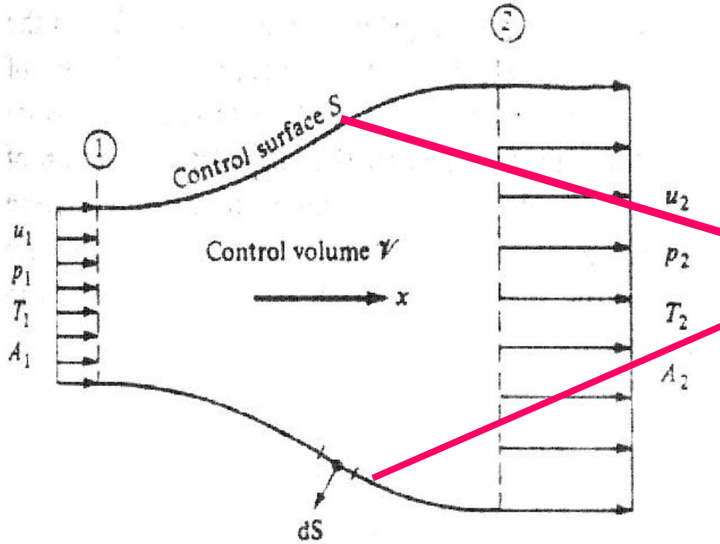
➤ 能量方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_v \rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)dv+\oiint_S \rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\mathbf{V}\bullet\mathbf{dS} \tag{2.95}$$
$$=\iiint_v \dot{q}\rho dv+\dot{Q}_{viscous}-\oiint_S p\mathbf{V}\bullet\mathbf{dS}+\iiint \rho(\mathbf{f}\bullet\mathbf{V})dv+\dot{W}_{viscous}$$

在定常、无粘、绝热并忽略体积力的假设下，积分形式的能量方程可以写成：

$$\oiint_S \rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=-\oiint_S p\mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{10.6}$$

$$\oiint_S \rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S} = -\oiint_S p\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S} \quad (10.6)$$



$$\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S}=0$$

$$\rho_1\left(e_1+\frac{u_1^2}{2}\right)(-u_1A_1)+\rho_2\left(e_2+\frac{u_2^2}{2}\right)(u_2A_2) = -(-p_1u_1A_1+p_2u_2A_2)$$

即： $$p_1u_1A_1+\rho_1u_1A_1\left(e_1+\frac{u_1^2}{2}\right) = p_2u_2A_2+\rho_2u_2A_2\left(e_2+\frac{u_2^2}{2}\right) \quad (10.7)$$

$$\frac{p_1u_1A_1+\rho_1u_1A_1(e_1+\frac{u_1^{\ 2}}{2})}{\rho_1u_1A_1}=\frac{p_2u_2A_2+\rho_2u_2A_2(e_2+\frac{u_2^{\ 2}}{2})}{\rho_2u_2A_2}$$

$$\frac{p_1}{\rho_1}+e_1+\frac{u_1^{\ 2}}{2}=\frac{p_2}{\rho_2}+e_2+\frac{u_2^{\ 2}}{2} \qquad (10.8)$$

因为： $h=e+\dfrac{p}{\rho}$

所以：

$$\boxed{h_1+\frac{u_1^{\ 2}}{2}=h_2+\frac{u_2^{\ 2}}{2}} \qquad (10.9)$$

或

$$h_0=const. \qquad (10.10)$$

- 状态方程:

$$p_2 = \rho_2 R T_2 \tag{10.11}$$

- 对于量热完全气体焓与温度的关系为:

$$h_2 = c_p T_2 \tag{10.12}$$

将控制方程归纳如下：

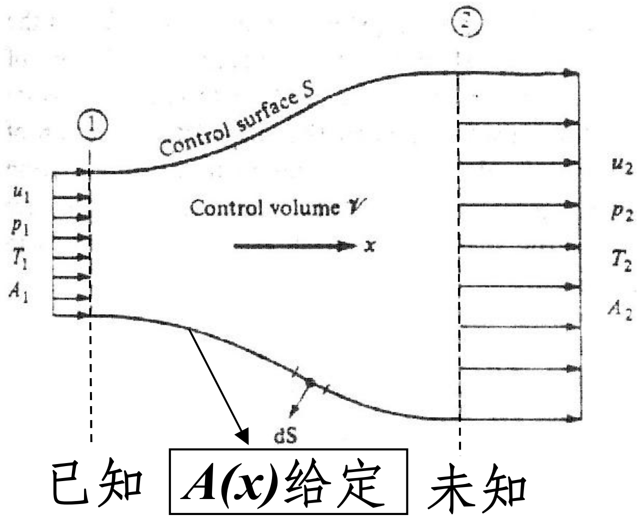
$$\boxed{\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2} \quad \text{或} \quad \boxed{\rho u A = \text{常数}} \qquad (10.1)$$

$$\boxed{p_1 A_1 + \rho_1 u_1^2 A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p dA = p_2 A_2 + \rho_2 u_2^2 A_2} \qquad (10.5)$$

$$\boxed{h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}} \qquad (10.9)$$

$$p_2 = \rho_2 R T_2 \qquad (10.11)$$

$$h_2 = c_p T_2 \qquad (10.12)$$



只要知道1截面处的 $\rho_1, u_1, p_1, T_1, h_1$ ，以上五个方程就可以确定2截面处的5个未知数 $\rho_2, u_2, p_2, T_2, h_2$ 。

准一维流动的面积-速度关系式推导

- 为了解准一维流动的一些重要物理特性
- 我们先通过前面所得到的积分形式控制方程推导准一维流动的微分(differential)形式控制方程
- 然后借助微分形式的控制方程推导出准一维流动的***面积-速度关系式(area-velocity relation)***

准一维流动的微分 (differential)形式控制方程的推导：

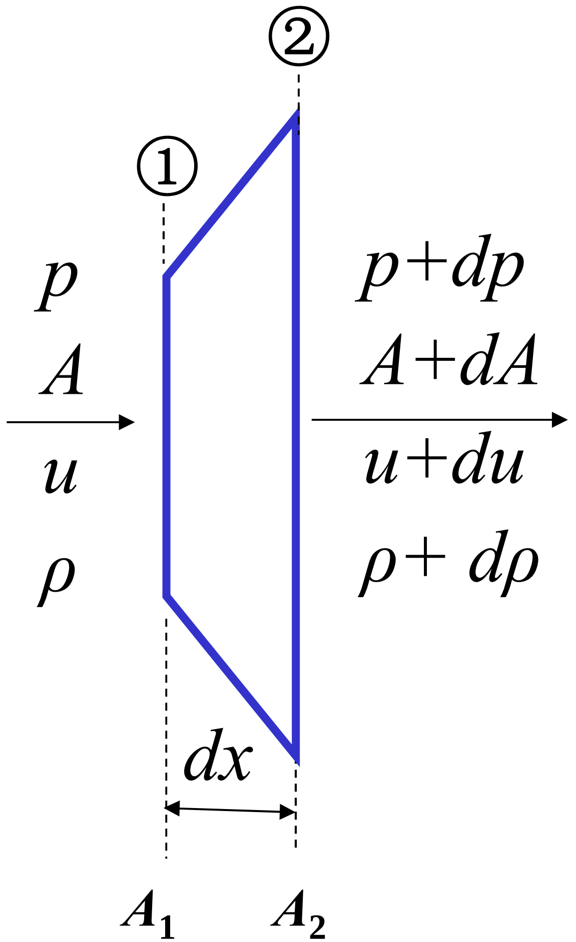


Fig.10.8 Incremental control volume flow

图10.8 微段控制体

[1] 微分形式连续方程推导：

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \qquad (10.1)$$

$$\begin{aligned}\rho u A &= (\rho + d\rho)(u + du)(A + dA) \\ &= (\rho u + \rho du + u d\rho + d\rho du)(A + dA) \\ &\approx \rho u A + \rho A du + A u d\rho + \rho u dA \\ &= \rho u A + d(\rho u A)\end{aligned}$$

$$\boxed{d(\rho u A) = 0} \qquad (10.14)$$

$\boxed{\rho u A = \text{常数}}$ 直接微分 $\Rightarrow$ $\boxed{d(\rho u A) = 0}$

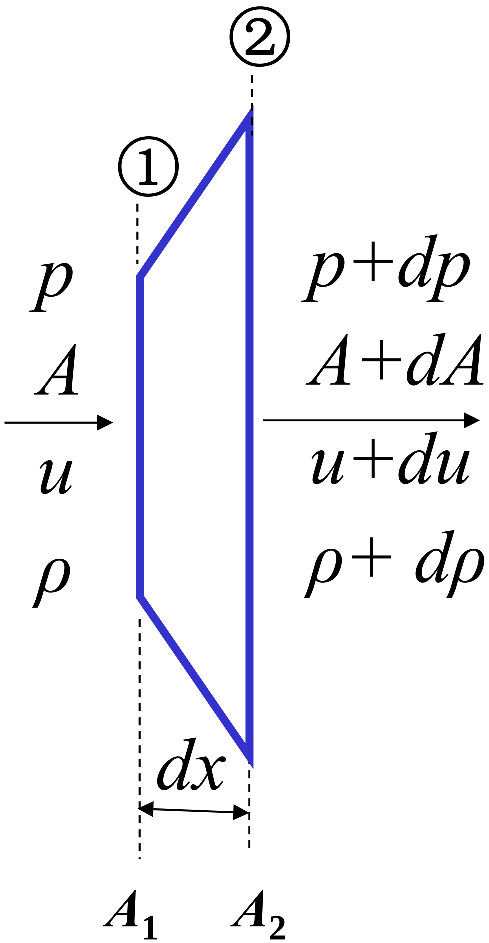


Fig.10.8 Incremental control volume flow

图10.8 微段控制体

[2]微分形式动量方程的推导：

$$p_1 A_1 + \rho_1 u_1^2 A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p dA = p_2 A_2 + \rho_2 u_2^2 A_2 \quad (10.5)$$

将(10.5)应用于图(10.8)所示的微段控制体：

$$pA + \rho u^2 A + pdA = (p+dp)(A+dA) + (\rho + d\rho)(u+du)^2 (A+dA) \quad (10.15)$$

展开（**10.15**）式，忽略所有微分的乘积：

$dpdA$、$d\rho du$、$d\rho(du)^2$、$d\rho dA$、$\cdots$

$$Adp + Au^2 d\rho + \rho u^2 dA + 2\rho u A du = 0 \qquad (10.16)$$

我们将微分形式的连续方程 $d(\rho u A) = 0$ 展开，

$$\rho u dA + \rho A du + A u d\rho = 0$$

同乘以速度u:

$$\rho u^2 dA + \rho u A du + A u^2 d\rho = 0 \qquad (10.17)$$

(10.16)-(10.17)得:

$$\boxed{dp = -\rho u du} \qquad (10.18)$$

方程（10.18）是定常、无粘、准一维流动的微分形式动量方程，这一方程也被称为欧拉方程。

[3]微分形式的能量方程的推导:

对能量方程 $h+\frac{u^2}{2}=const.$ 直接微分求得:

$$\boxed{dh+udu=0} \qquad (10.19)$$

将准一维流动微分形式的控制方程（differential form of the governing equations）归纳如下：

微分形式连续方程： $d(\rho uA)=0$ (10.14)

微分形式动量方程： $dp=-\rho udu$ (10.18)

微分形式能量方程： $dh+udu=0$ (10.19)

注意:准一维流动与真正一维流动的区别（连续方程不同）：

真正一维流动连续方程为： $d(\rho u)=0$

面积-速度关系式的推导 (area-velocity relation)：

将微分形式连续方程 $d(\rho uA)=0$ 展开后，

同除以 $\rho uA = const.$，可得：

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{du}{u}+\frac{dA}{A}=0 \qquad (10.20)$$

将微分形式动量方程 $dp=-\rho udu$ 变形为：

$$\frac{dp}{\rho}=\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{\rho}=-udu \qquad (10.21)$$

由声速定义，可得：$$\frac{dp}{d\rho}\equiv\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s=a^2 \qquad (10.22)$$

即：

$$\frac{dp}{d\rho}=a^2 \qquad (10.23)$$

面积-速度关系式的推导 (area-velocity relation):

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{du}{u}+\frac{dA}{A}=0 \qquad (10.20)$$

$$\frac{dp}{\rho}=\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{\rho}=-udu \qquad (10.21)$$

$$\frac{dp}{d\rho}=a^2 \qquad (10.23)$$

$$\left.\begin{array}{l} (10.21) \\ (10.23) \end{array}\right\} a^2\frac{d\rho}{\rho}=-udu$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{udu}{a^2}=-\frac{u^2}{a^2}\frac{du}{u}=-M^2\frac{du}{u}} \qquad (10.24)$$

面积-速度关系式的推导 (area-velocity relation)：

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho}+\frac{du}{u}+\frac{dA}{A}=0} \qquad (10.20)$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho}=-M^2\frac{du}{u}} \qquad (10.24)$$

将(10.24)代入 (10.20)式得： $$-M^2\frac{du}{u}+\frac{du}{u}+\frac{dA}{A}=0$$

$$\boxed{\frac{dA}{A}=(M^2-1)\frac{du}{u}} \qquad (10.25)$$

面积-速度关系式 (area-velocity relation)

$$\boxed{\frac{dA}{A}=(M^2-1)\frac{du}{u}} \tag{10.25}$$

This equation is very important, it tells the following information:

1、For $0 \le M < 1$ (**subsonic flow**), the quantity in parentheses in Eq. (10.25) is negative. Hence, an increase in velocity (positive du) is associated with a decrease in area (negative dA) . Likewise, a decrease in velocity (negative du) is associated with an increase in area (positive dA).

Read P679

1、对于 $0 \le M < 1$ （**亚声速流动**），（10.25）式中括号内的值为负，因此速度的增加（正的du）与面积的减小（负的dA）相联系。同样，速度的减小（负的du）与面积的增加（正的dA）相联系。

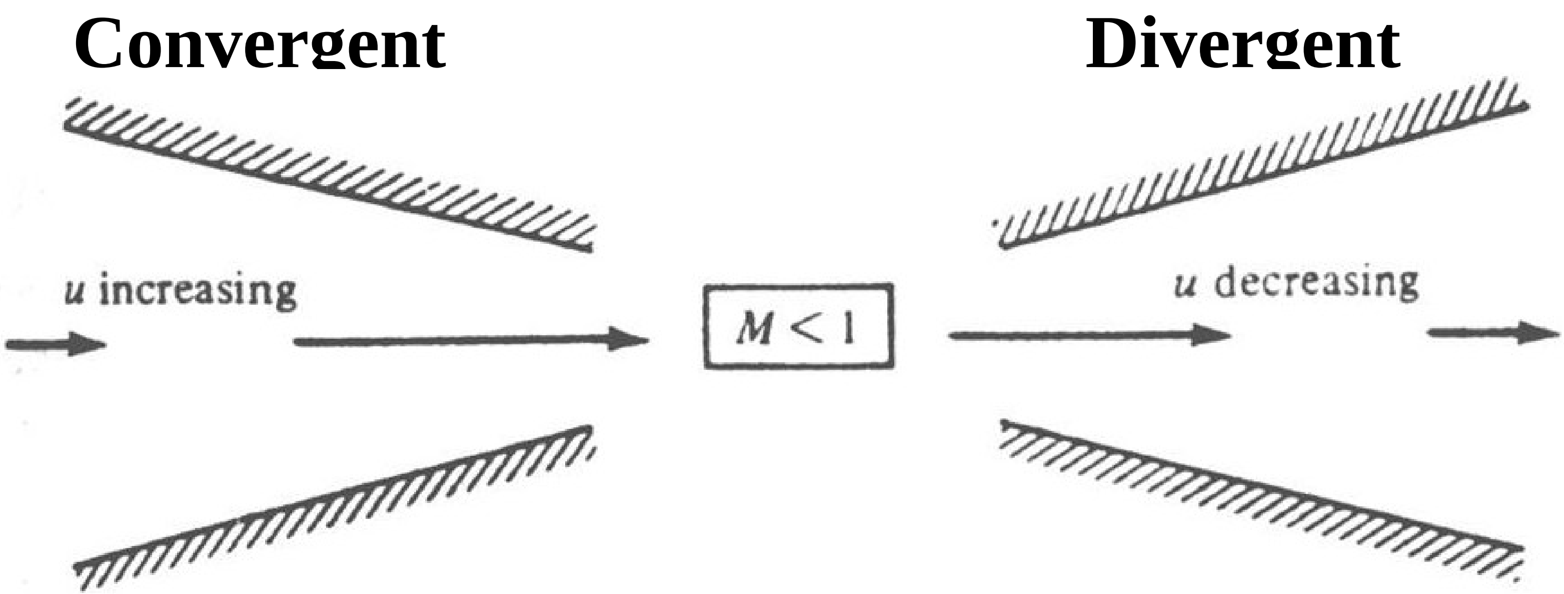


Figure10.9 Compressible flow in converging and diverging ducts(top)

对于亚声速可压缩流动:1)要使流动速度增加，我们必须使管道截面收缩；2)要使速度减小，我们必须使管道扩张。

结论：Subsonic compressible flow is qualitatively (but not quantitatively) similar to incompressible flow. 亚声速可压缩流动定性地（但不是定量地）与不可压缩流动相似。

面积-速度关系式 (area-velocity relation) （续）

$$\boxed{\frac{dA}{A}=(M^2-1)\frac{du}{u}} \qquad (10.25)$$

2、For M>1 **(supersonic flow),** the quantity in parentheses in Eq.(10.25) is positive. Hence, an increase in velocity (positive du) is associated with an increase in area (positive dA) . Likewise, a decrease in velocity (negative du) is associated with a decrease in area(negative dA).

对于M>1 (超声速流)(10.25）式中括号内的值为正，因此速度的增加（正的 du）与面积的增加（正的dA）相联系。同样，速度的减小（负的 du）与面积的减小（负的dA）相联系。

Divergent **Convergent**

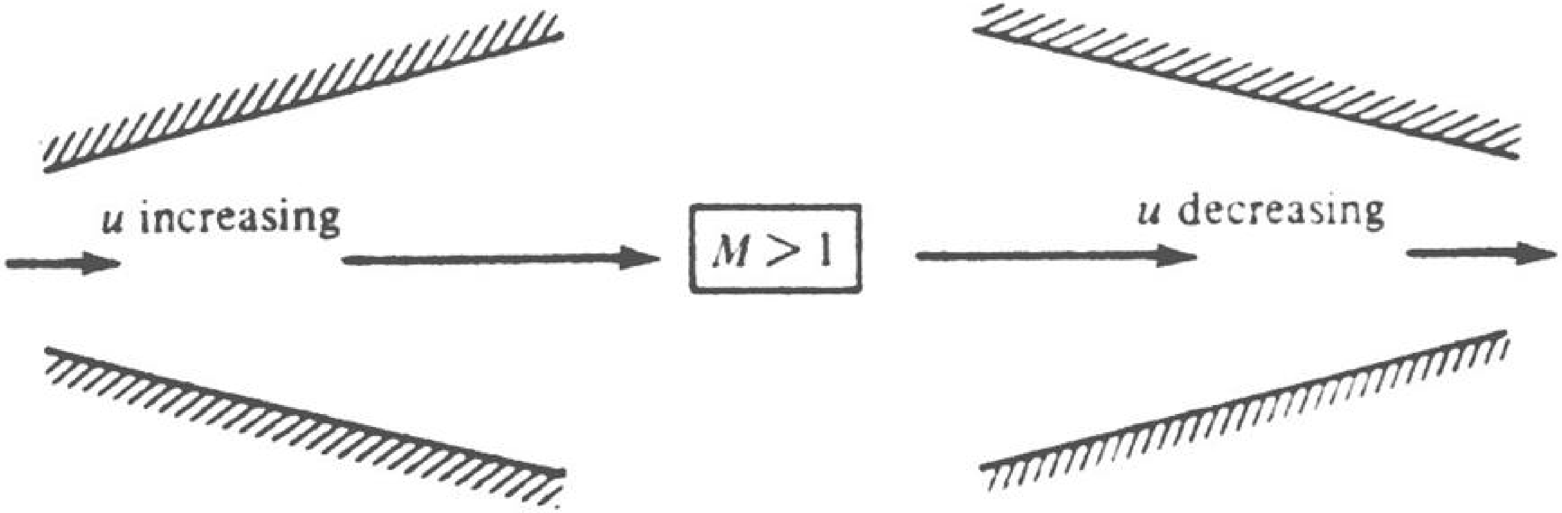


Figure10.9 Compressible flow in converging and diverging ducts(bottom)

对于超声速流动:1)要使流动速度增加，我们必须使管道截面扩张；2）要使速度减小，我们必须使管道截面收缩。

结论：They are the direct *opposite* of the trends for subsonic flow. 与亚声速流变化趋势完全相反。

问题：为什么在亚声速流中，要使速度增大，必须缩小管道截面积A，而在超声速流动中要使速度增大，必须增大管道截面积 A 呢？

提示：从质量守恒的角度去理解

由我们推导出的密度与速度关系(10.24)式就可以明显看出:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{udu}{a^2} = -\frac{u^2}{a^2}\frac{du}{u} = -M^2\frac{du}{u} \qquad (10.24)$$

很明显:

1) 在亚声速时, $M^2 < 1$，密度下降比速度增大慢, 为保证质量守恒 $\rho uA = const.$，要使速度增大， 必须减小面积A;

2) 在超声速时，$M^2 > 1$，密度下降比速度增大快得多，为保证质量守恒 $\rho uA = const.$，要使速度增大，必须增大截面积 A。

面积-速度关系式 (area-velocity relation) （续）

$$\boxed{\frac{dA}{A}=(M^2-1)\frac{du}{u}} \qquad (10.25)$$

3. For $M = 1$(**sonic flow**), Eq. (10.25) shows that $dA = 0$ even though a finite du exists. Mathematically, this corresponds to a local maximum or minimum in the area distribution. Physically, it corresponds to a minimum area, as discussed below.

对于$M = 1$(**声速流**)，(10.25)式指出即使 du 为有限值，仍对应$dA = 0$。在数学上，这对应于截面积分布函数 $A(x)$ 达到当地最大或最小。在物理上，如我们下面讨论的那样，$M = 1$只能对应于管道面积最小处。

问题：如何将静止气体等熵地加速为超声速流？

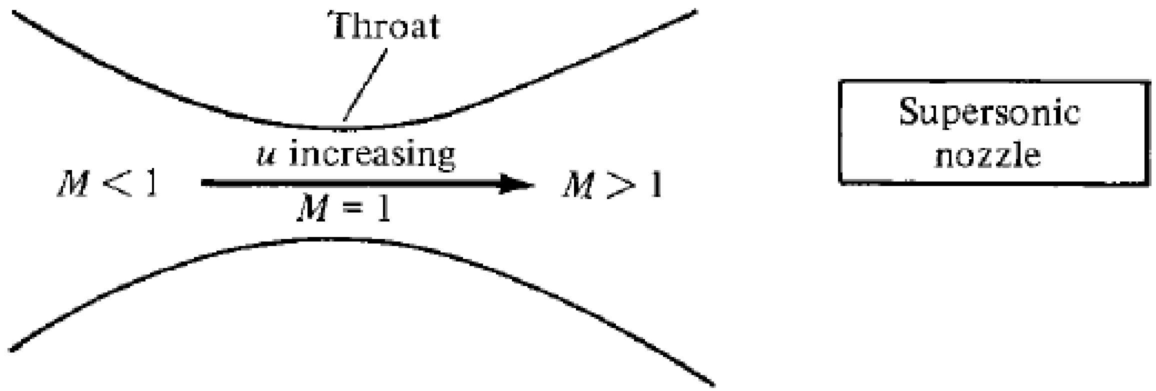


Figure 10.10 Illustration supersonic nozzle （top）

- 必须将管道设计成如图（**10.10**）所示的“收缩- 扩张管道”（**convergent-divergent duct)**；
- 瑞典工程师拉瓦尔在十九世纪末首先实现了通过这种喷管将气流加速到超声速，因此超声速喷管也被称为拉瓦尔管。

- **重要结论：“马赫数等于1只可能出现在最小截面积处”。喷管的最小截面积处也被称为喉道(throat)。**

问题：如何将超声速流减速为亚声速？

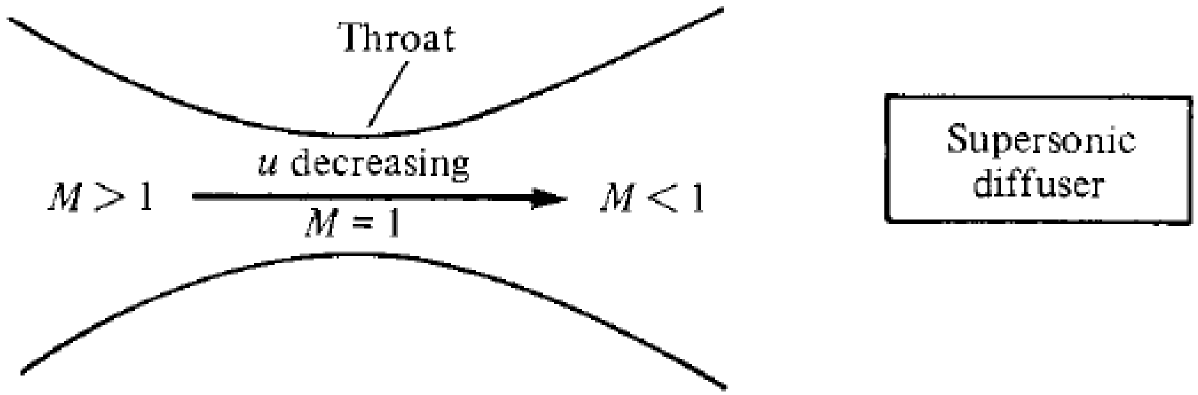


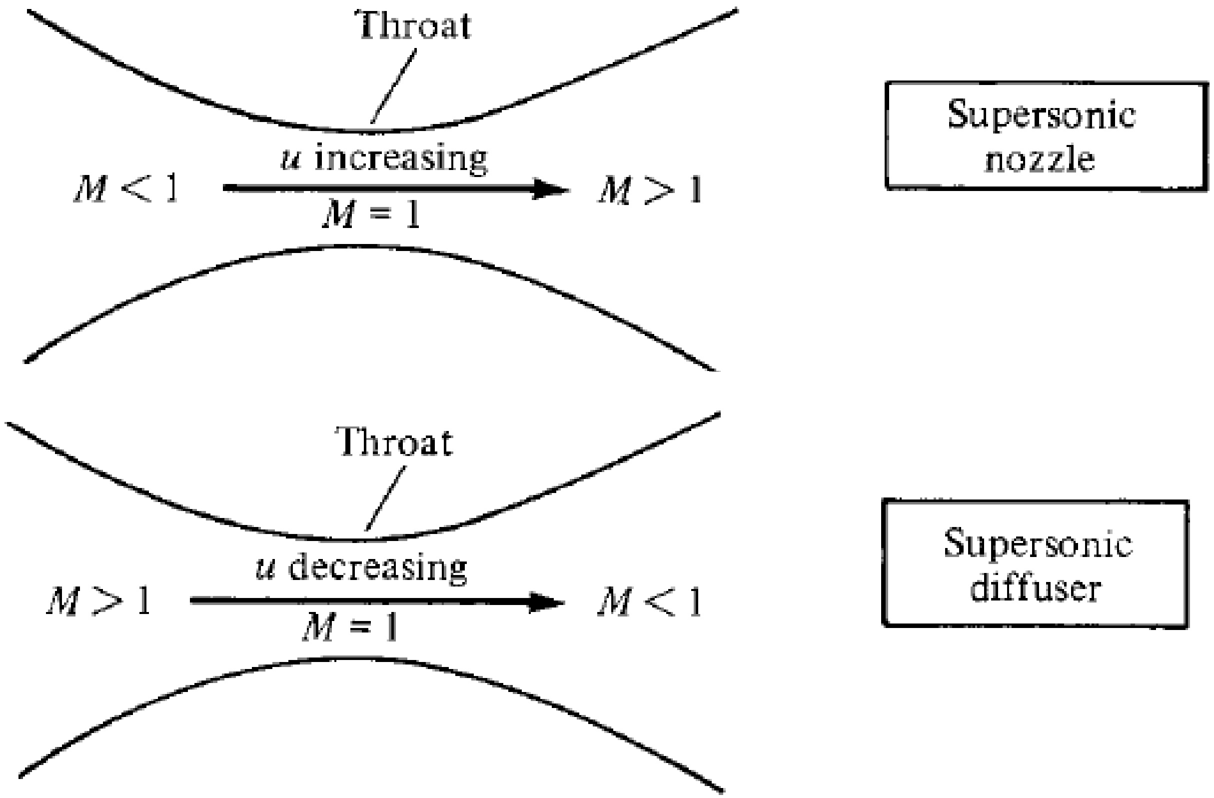
Figure 10.10 Illustration a supersonic diffuser (bottom)

问题：真实情况下这种理想扩压器可能实现吗？

答案是：不能！

在超声速气流通过收缩管道减速时，由于收缩管道壁面向来流方向偏转，由第九章学过的知识可知，真实情况下会出现激波，因此不可能等熵地由超声速减速至亚声速。

超声速喷管与超声速扩压器的说明和比较/ Illustration and comparison of a supersonic nozzle and a supersonic diffuser



可实现的

不可实现的理想状态

Figure 10.10 Illustration and comparison of a supersonic nozzle and a supersonic diffuser.

10.2小结:

1. 给出了准一维流动的定义。
2. 推导了准一维流动的积分形式控制方程。
3. 推导了准一维流动的微分形式控制方程。
4. 推导了重要的面积-速度关系式(10.25)并分析了其内在的物理意义。

作业：暂无

Lecture # 13 Ended !

欢迎关注“气动与多学科优化”课题组微信公众号