主　要　内　容

§2-1　平面应力问题与平面应变问题
§2-2　平衡微分方程
§2-3　斜面上的应力　主应力
§2-4　几何方程　刚体位移
§2-5　斜方向的应变及位移
§2-6　物理方程
§2-7　边界条件
§2-8　圣维南原理
§2-9　按位移求解平面问题
§2-10　按应力求解平面问题　相容方程
§2-11　常体力情况下的简化
§2-12　应力函数　逆解法与半逆解法

第二章　平面问题的基本理论

要点 —— 建立平面问题的基本方程

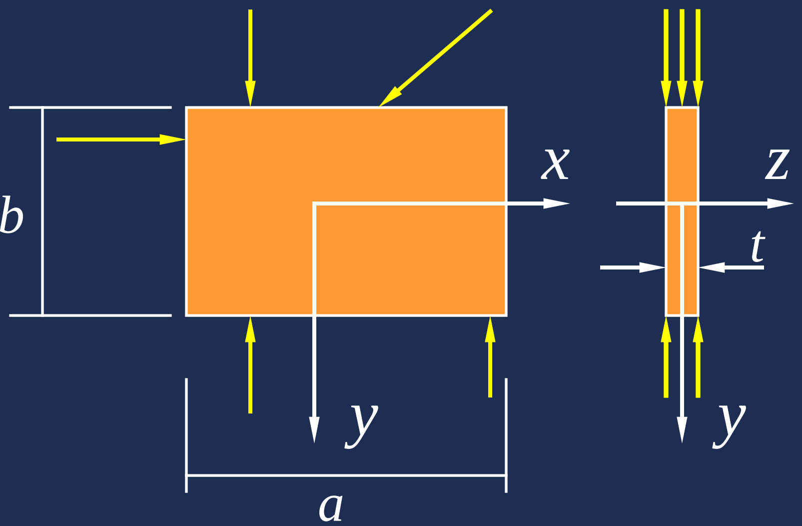
包括：平衡微分方程；几何方程；物理方程；变形协调方程；边界条件的描述；方程的求解方法等

§ 2-1　平面应力问题与平面应变问题

1. 平面应力问题

(1) 几何特征

一个方向的尺寸比另两个方向的尺寸小得多。



$t << a, t << b$　——平板

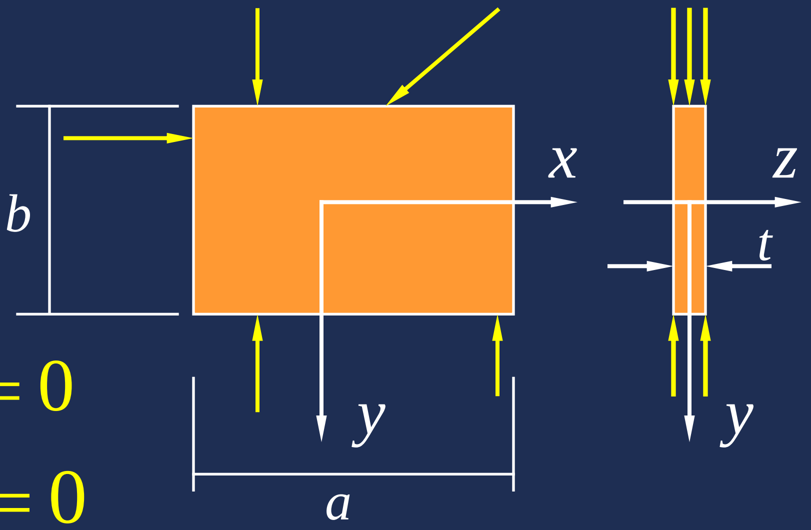
如：板式吊钩，旋转圆盘，工字形梁的腹板等

(2) 受力特征

外力（体力、面力）和约束，仅平行于板面作用，沿 z 方向不变化。

(3) 应力特征

如图选取坐标系，以板的中面为*xy*平面，垂直于中面的任一直线为 z 轴。由于板面上不受力，有



$$\begin{cases} (\sigma_z)_{z=\pm\frac{t}{2}}=0 \\ (\tau_{zx})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0 \\ (\tau_{zy})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0 \end{cases}$$

因板很薄，且外力沿 z 轴方向不变。

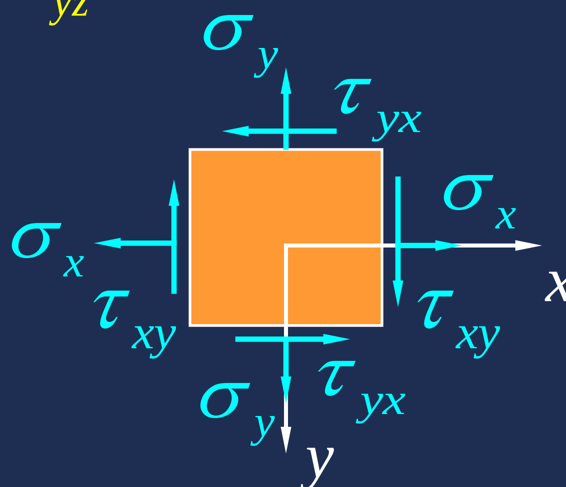
可认为整个薄板的各点都有：

$$\begin{cases} \sigma_z=0 \\ \tau_{zx}=0 \\ \tau_{zy}=0 \end{cases}$$

由剪应力互等定理，有 $\tau_{zx}=\tau_{xz}=0$ $\tau_{zy}=\tau_{yz}=0$

结论： 平面应力问题只有三个应力分量：

$$\begin{cases} \sigma_x=\sigma_x(x,y) \\ \sigma_y=\sigma_y(x,y) \\ \tau_{xy}=\tau_{yx}=\tau_{xy}(x,y) \end{cases}$$



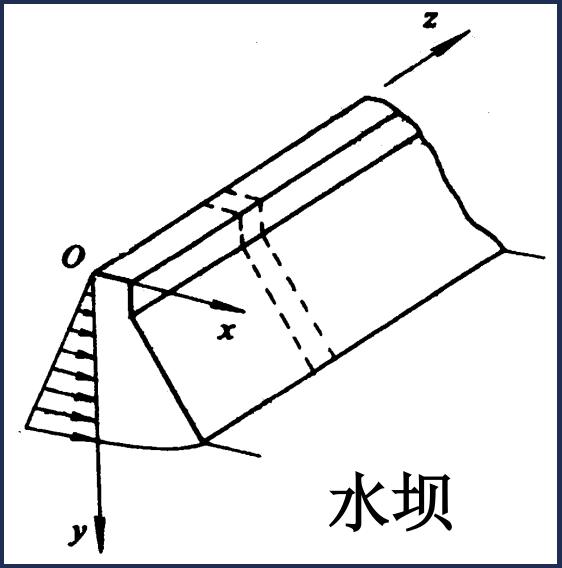
应变分量、位移分量也仅为 x、y 的函数，与 z 无关。

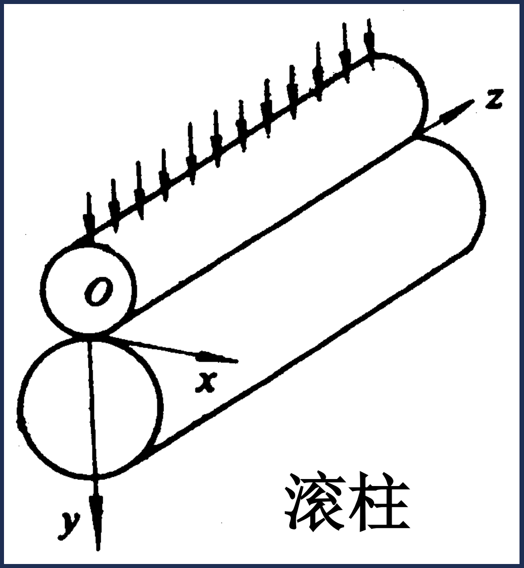
2. 平面应变问题

(1) 几何特征

一个方向的尺寸比另两个方向的尺寸大得多，且沿长度方向几何形状和尺寸不变化。

—— 近似认为无限长

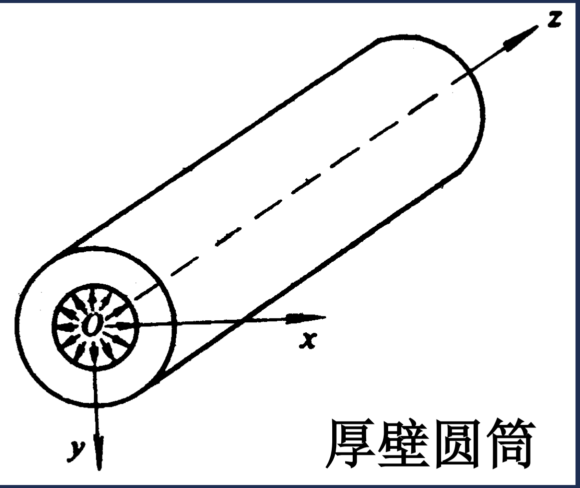




(2) 外力特征

外力（体力、面力）平行于横截面作用，且沿长度 z 方向不变化。

约束 —— 沿长度 z 方向不变化。



(3) 变形特征

如图建立坐标系：以任一横截面为 xy 面，任一纵线为 z 轴。设 z方向为无限长，则 $\sigma_{x,\cdots}$ $\varepsilon_{x,\cdots}$ $u,\cdots$ 沿 z 方向都不变化，仅为 x，y 的函数。 任一横截面均可视为对称面

因为任一横截面均可视为对称面，则有

$$w \equiv 0$$

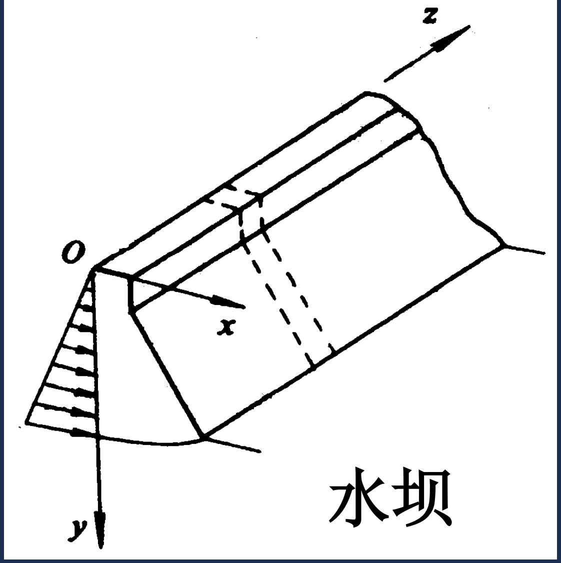
所有各点的位移矢量都平行于 xy 平面。

—— 平面位移问题

$$\varepsilon_z \equiv 0 \quad \gamma_{zy} = \gamma_{yz} \equiv 0 \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} \equiv 0$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x(x,y) \\ \varepsilon_y = \varepsilon_y(x,y) \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_{xy}(x,y) \end{cases}$$

—— 平面应变问题



注：(1)平面应变问题中 $\varepsilon_z \equiv 0$ 但是，$\sigma_z \neq 0 \left(\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right)$

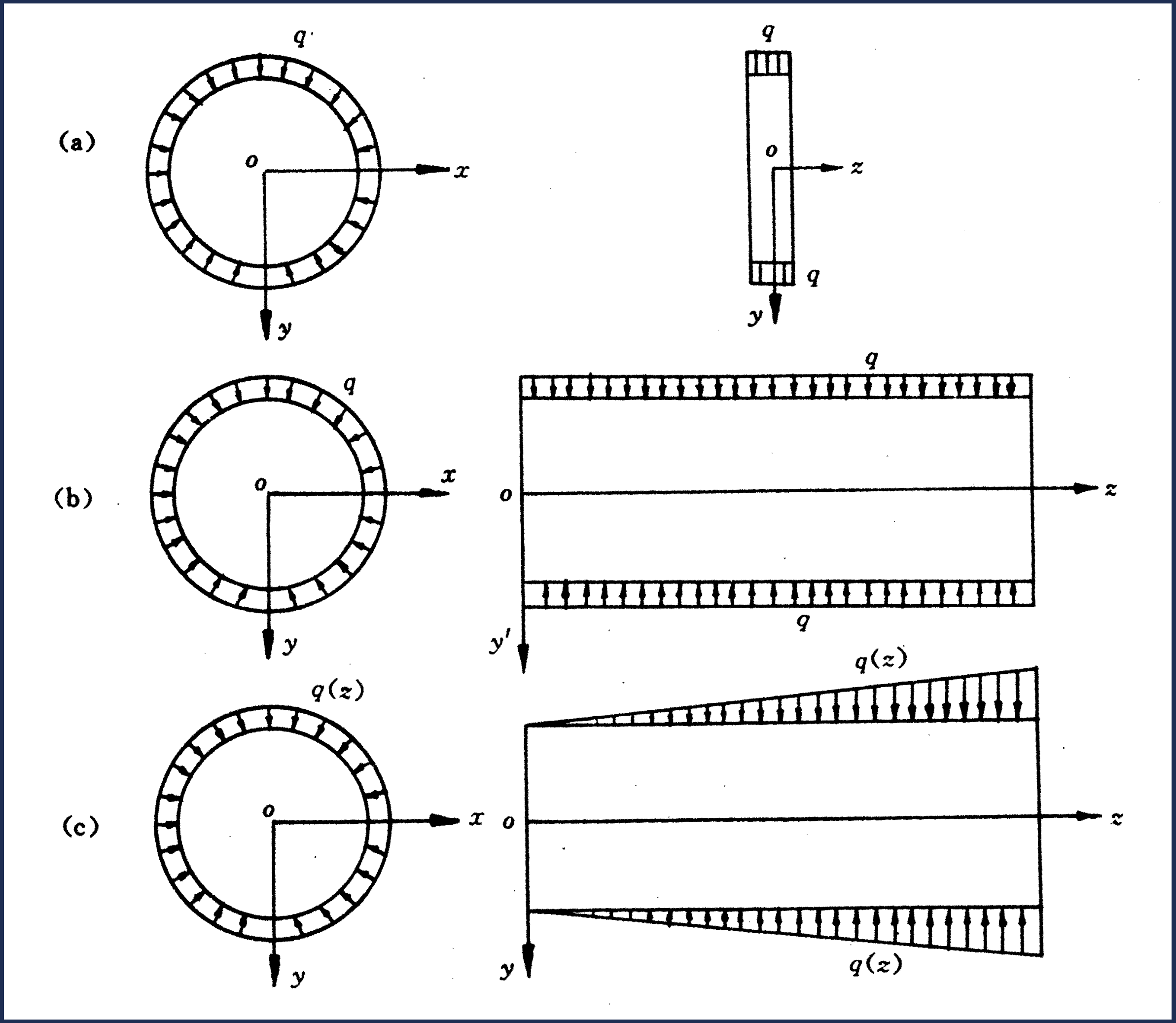
(2)平面应变问题中应力分量：$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} (\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0)$

—— 仅为 xy 的函数。

可近似为平面应变问题的例子：

煤矿巷道的变形与破坏分析；挡土墙；重力坝等。

如图所示三种情形，是否都属平面问题？是平面应力问题还是平面应变问题？



平面应力问题

平面应变问题

非平面问题

3. 平面问题的求解

问题：
- 已知：外力（体力、面力）、边界条件，
- 求：$\underbrace{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \quad \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} \quad u, v}$

—— 仅为 $x\ y$ 的函数

需建立三个方面的关系：

（1）静力学关系：

应力与体力、面力间的关系；—— 平衡微分方程

（2）几何学关系：

形变与位移间的关系；—— 几何方程

（3）物理学关系：

形变与应力间的关系。—— 物理方程

建立边界条件：
- （1）应力边界条件；
- （2）位移边界条件；

§ 2-2　平衡微分方程

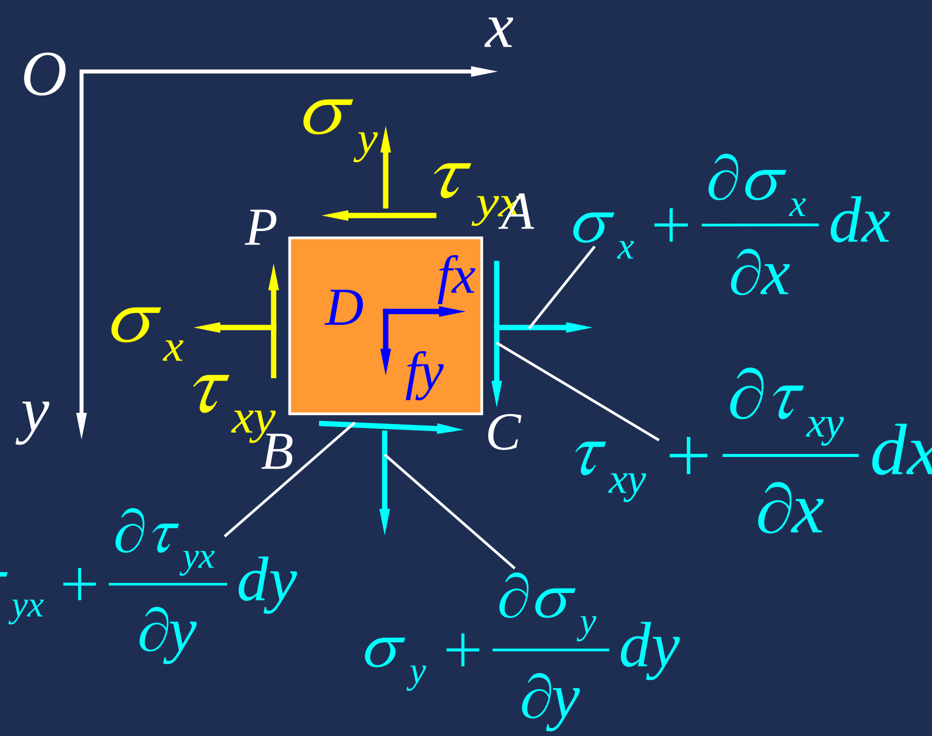
取微元体**PABC**（***P点附近***），

$$PA = dx \quad PB = dy$$

Z 方向取单位长度。

设P点应力已知：$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$

体力：fx，fy



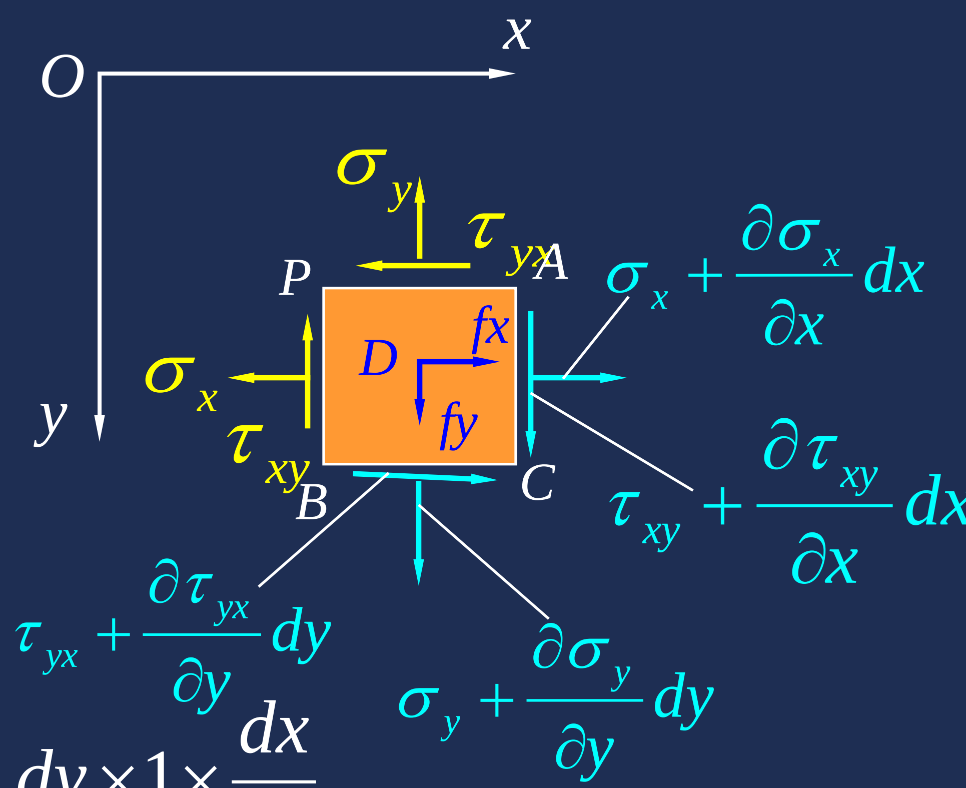
AC面：

$$\begin{cases} \sigma_x + \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \dfrac{1}{2!} \dfrac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} (dx)^2 + \cdots \\ \qquad \approx \sigma_x + \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \\ \tau_{xy} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx + \dfrac{1}{2!} \dfrac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} (dx)^2 + \cdots \approx \tau_{xy} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \end{cases}$$

BC面：

$$\begin{cases} \sigma_y + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \\ \tau_{yx} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \end{cases}$$

注： *这里用了小变形假定，以变形前的尺寸代替变形后尺寸。*



由微元体***PABC***平衡，得

$$\sum M_D = 0$$

$$(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx) dy \times 1 \times \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dy \times 1 \times \frac{dx}{2}$$

$$-(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dx \times 1 \times \frac{dy}{2} - \tau_{yx} dx \times 1 \times \frac{dy}{2} = 0$$

整理得： $\tau_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx = \tau_{yx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$

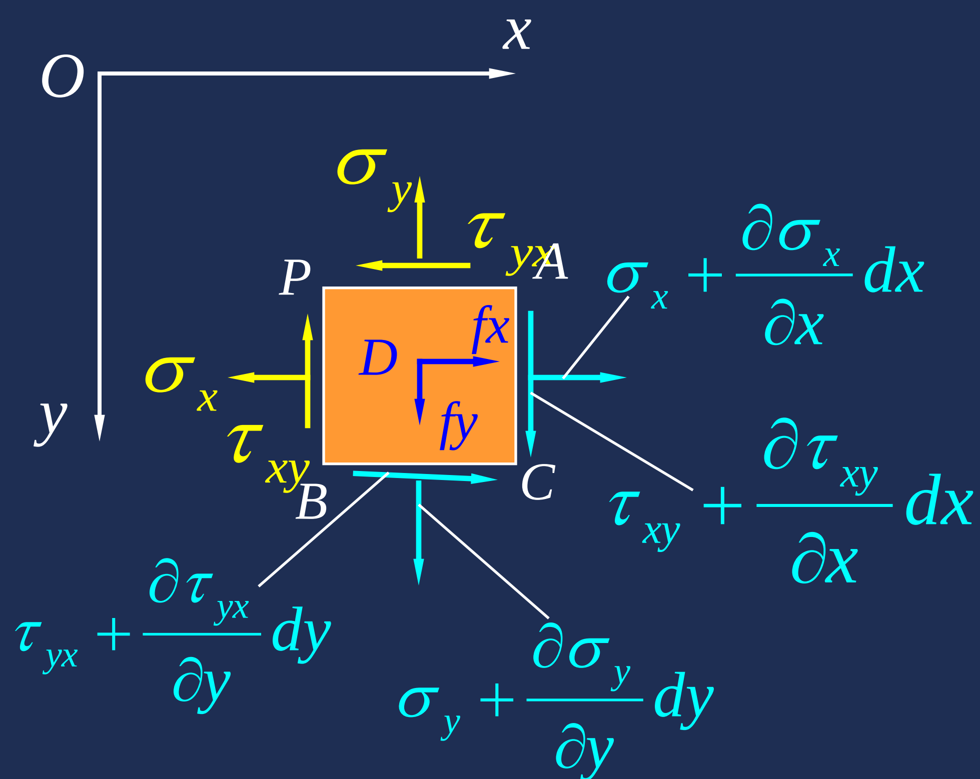
当 $dx \to 0, dy \to 0$ 时，有 $\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$ ——剪应力互等定理

$$\sum F_x = 0$$

$$(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx)dy\times 1 - \sigma_x dy \times 1$$

$$+(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy)dx\times 1 - \tau_{yx}dx\times 1$$

$$+ f_x dx\times dy\times 1 = 0$$



两边同除以$dx\,dy$，并整理得：

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \quad (\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}dy)dx\times 1 - \sigma_y dx\times 1 + (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}dy)dx\times 1$$

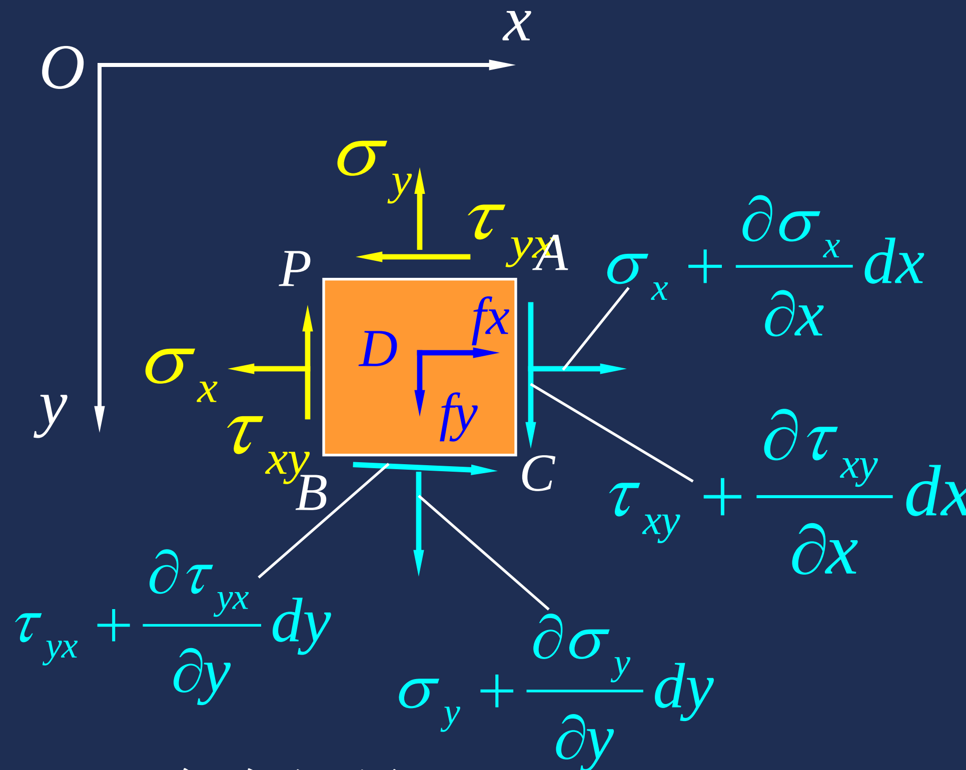
$$-\tau_{xy}dy\times 1 + f_y dx\times dy\times 1 = 0$$

两边同除以$dx\,dy$，并整理得：

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0}$$

平面问题的平衡微分方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+f_x=0\\[2ex]\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}+f_y=0\end{cases} \tag{2-2}$$



说明：

（1）两个平衡微分方程，三个未知量： $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}=\tau_{yx}$

——超静定问题，需找补充方程才能求解。

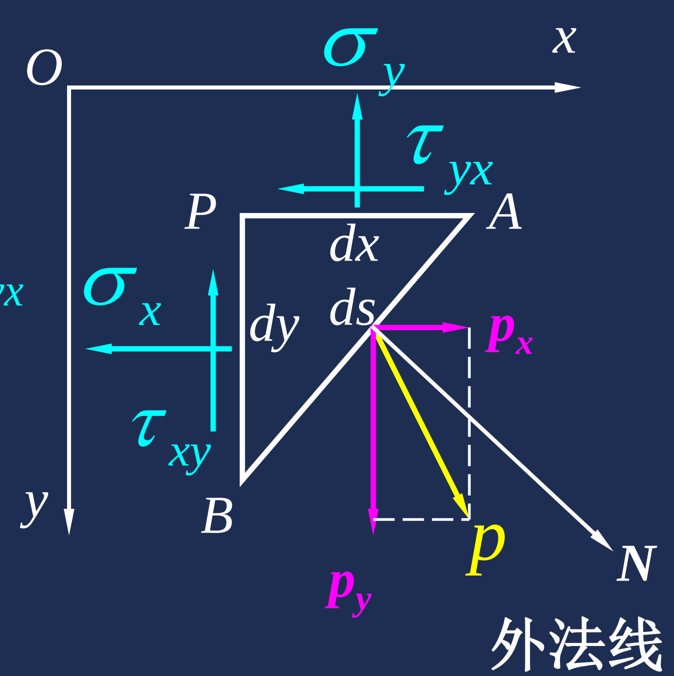
（2）对于平面应变问题，x、y方向的平衡方程相同，z方向自成平衡，上述方程两类平面问题均适用；

（3）平衡方程中不含E、μ，方程与材料性质无关（钢、石料、混凝土等）；

（4）平衡方程对整个弹性体内都满足，包括边界。

§ 2-3 斜面上的应力　主应力

1. 斜面上的应力



（1）斜面上应力在坐标方向的分量p_x，p_y

设P点的应力分量已知：$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$

斜面AB上的应力矢量：$\boldsymbol{p}$

斜面外法线 N 的关于坐标轴的方向余弦：

$$\begin{cases} \cos(N,x) = l \\ \cos(N,y) = m \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dx = ds \cdot m \\ dy = ds \cdot l \end{cases}$$

由微元体平衡：

$$\sum F_x = 0, \quad -\sigma_x dy \times 1 - \tau_{yx} dx \times 1 + p_x ds \times 1 = 0$$

$$-\sigma_x ds \cdot l \times 1 - \tau_{yx} ds \cdot m \times 1 + p_x ds \times 1 = 0$$

整理得：

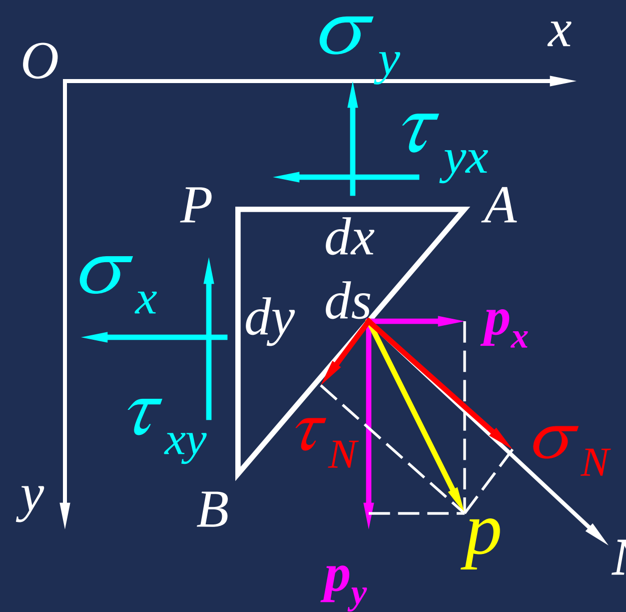
$$p_x = l\sigma_x + m\tau_{yx} \qquad \text{（2-3）}$$

$$\sum F_y = 0, \quad -\sigma_y dx \times 1 - \tau_{xy} dy \times 1 + p_y ds \times 1 = 0$$

整理得：

$$p_y = m\sigma_y + l\tau_{xy} \qquad \text{（2-4）}$$

$$\begin{cases} p_x = l\sigma_x + m\tau_{yx} & \text{(2-3)} \\ p_y = m\sigma_y + l\tau_{xy} & \text{(2-4)} \end{cases}$$



（2）斜面上的正应力与剪应力

$$\begin{cases} \sigma_N = lp_x + mp_y \\ \tau_N = lp_y - mp_x \end{cases}$$

将式（2-3）（2-4）代入，并整理得：

$$\begin{cases} \sigma_N = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + 2lm\tau_{xy} & \text{(2-5)} \\ \tau_N = lm(\sigma_y - \sigma_x) + (l^2 - m^2)\tau_{xy} & \text{(2-6)} \end{cases}$$

——任意斜截面上应力计算公式

说明：

（1）运用了剪应力互等定理：$\tau_{xy} = \tau_{yx}$

（2）τ_N 的正负号规定：

将 *N* 转动90°而到达切应力的方向是顺时针的，则该 τ_N 为正；反之为负。

（3）若*AB*面为物体的边界*S*，则 $p_x = \overline{f}_x \quad p_y = \overline{f}_y$

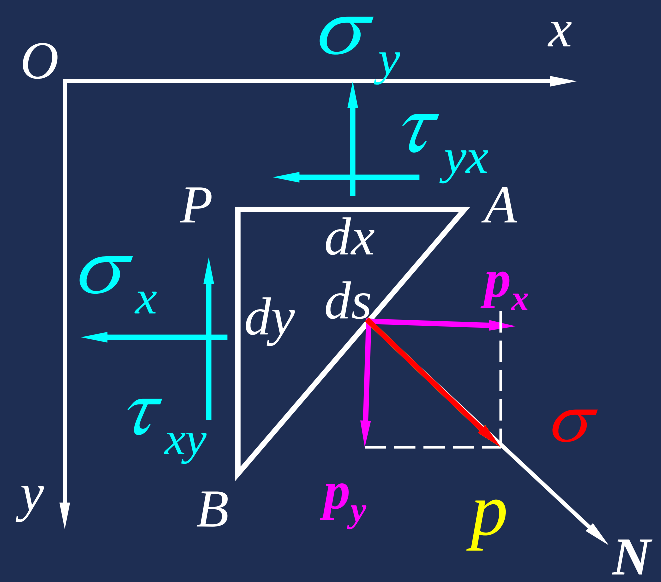
$$\boxed{\begin{aligned} l(\sigma_x)_s + m(\tau_{xy})_s &= \overline{f}_x \\ m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s &= \overline{f}_y \end{aligned}} \quad \text{(2-18)}$$

——平面问题的应力边界条件

2. 一点的主应力与应力主向

（1）主应力

若某一斜面上 $\tau_N=0$，则该斜面上的正应力 σ_N 称为该点一个主应力 σ ；



当 $\tau_N=0$ 时，有 $\sigma_N=\sigma=s$

$$\begin{cases} p_x=l\sigma \\ p_y=m\sigma \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} l\sigma_x+m\tau_{yx}=l\sigma \\ m\sigma_y+l\tau_{xy}=m\sigma \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_x=l\sigma_x+m\tau_{yx} \\ p_y=m\sigma_y+l\tau_{xy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_N=lp_x+mp_y \\ \tau_N=lp_y-mp_x \end{cases}$$

求解得： $\dfrac{m}{l}=\dfrac{\sigma-\sigma_x}{\tau_{yx}}$ $\qquad \dfrac{m}{l}=\dfrac{\tau_{yx}}{\sigma-\sigma_y}$

$$\longrightarrow \sigma^2-(\sigma_x+\sigma_y)\sigma+(\sigma_x\sigma_y-\tau_{xy}^2)=0$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\sigma_1\\\sigma_2\end{matrix}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}} \qquad (2\text{-}7)$$

——平面应力状态主应力的计算公式

由式（2-7）易得：

$$I=\boxed{\sigma_1+\sigma_2=\sigma_x+\sigma_y}$$ —— 平面应力状态应力第一不变量

$$\begin{cases}\dfrac{m}{l}=\dfrac{\tau_{yx}}{\sigma-\sigma_y}\\[2ex]\dfrac{m}{l}=\dfrac{\sigma-\sigma_x}{\tau_{yx}}\end{cases}$$

（2）应力主向

主应力 σ 所在的平面 —— 称为主平面；

主应力 σ 所在平面的法线方向 —— 称为应力主向；

设 σ_1 与 x 轴的夹角为 α_1， σ_1 与坐标轴正向的方向余弦为 l_1、m_1，则

$$\tan\alpha_1=\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1}=\frac{\cos(90^\circ-\alpha_1)}{\cos\alpha_1}=\frac{m_1}{l_1}=\frac{\sigma_1-\sigma_x}{\tau_{xy}}\quad(\text{或}=\frac{\tau_{xy}}{\sigma_1-\sigma_y})$$

设 σ_2 与 x 轴的夹角为 α_2， σ_2 与坐标轴正向的方向余弦为 l_2、m_2，则

$$\tan\alpha_2=\frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_2}=\frac{\cos(90^\circ-\alpha_2)}{\cos\alpha_2}=\frac{m_2}{l_2}=\frac{\sigma_2-\sigma_x}{\tau_{xy}}\quad(\text{或}=\frac{\tau_{xy}}{\sigma_2-\sigma_y})$$

应力主向的计算公式：

$$\boxed{\begin{aligned}\tan\alpha_1 &= \frac{\sigma_1-\sigma_x}{\tau_{xy}}\\ \tan\alpha_2 &= \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2-\sigma_y}\end{aligned}} \qquad \text{（2-8）}$$

由 $\sigma_1+\sigma_2=\sigma_x+\sigma_y$ 得

$$\sigma_2-\sigma_y=-(\sigma_1-\sigma_x)$$

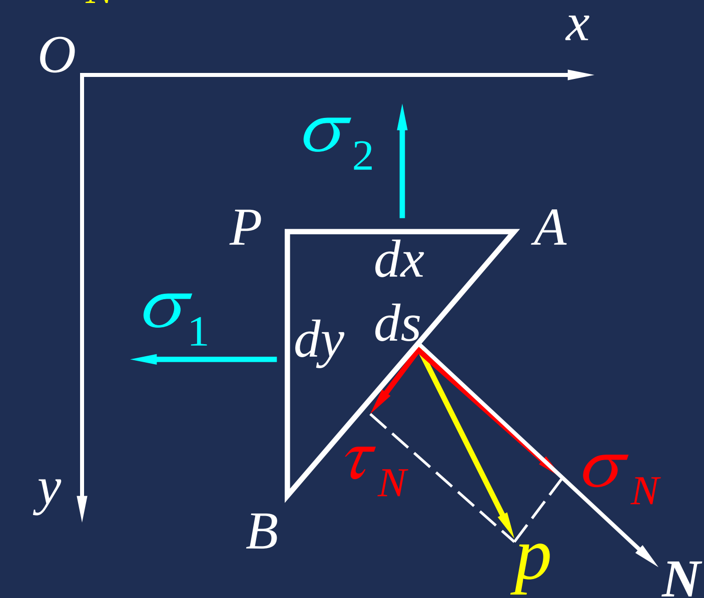
$$\tan\alpha_2=-\frac{\tau_{xy}}{\sigma_1-\sigma_x}$$

显然有 $\tan\alpha_1\tan\alpha_2=-1$

表明：$\boldsymbol{\sigma}_1$ 与 $\boldsymbol{\sigma}_2$ 互相垂直。

结论 任一点*P*，一定存在两 互相垂直的主应力$\boldsymbol{\sigma}_1$ 、 $\boldsymbol{\sigma}_2$。

（3）σ_N 的主应力表示

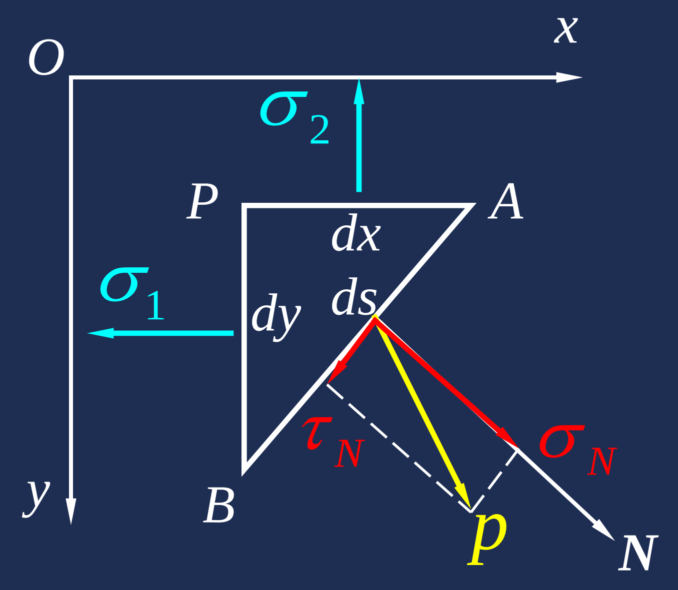


由 $\begin{cases}\sigma_N=l^2\sigma_x+m^2\sigma_y+2lm\tau_{xy}\\ \tau_N=lm(\sigma_y-\sigma_x)+(l^2-m^2)\tau_{xy}\end{cases}$

$$\begin{cases}\sigma_N=l^2\sigma_1+m^2\sigma_2\\ \quad\;\;=l^2(\sigma_1-\sigma_2)+\sigma_2\\ \tau_N=lm(\sigma_2-\sigma_1)\end{cases}$$

$\boldsymbol{\sigma}_1$ 与 $\boldsymbol{\sigma}_2$ 分别为最大和最小应力。

（4）最大、最小剪应力



由 $\begin{cases} \tau_N = lm(\sigma_2 - \sigma_1) \\ l^2 + m^2 = 1 \quad m = \pm\sqrt{(1 - l^2)} \end{cases}$

$$\tau_N = \pm l\sqrt{1 - l^2}(\sigma_2 - \sigma_1)$$

$$\tau_N = \pm\sqrt{l^2 - l^4}(\sigma_2 - \sigma_1)$$

$$\tau_N = \pm\sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - l^2\right)^2}(\sigma_2 - \sigma_1)$$

显然，当 $\frac{1}{2} - l^2 = 0(l = \pm\sqrt{\frac{1}{2}})$ 时，τ_N为最大、最小值：

$$\boxed{\begin{matrix}\tau_{\max} \\ \tau_{\min}\end{matrix} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}}$$

由 $l = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ 得， $\tau_{\max}$、 $\tau_{\min}$ 的方向与σ_1 （σ_2）成45°。

小结：

（1）斜面上的应力

$$\begin{cases} X_N = l\sigma_x + m\tau_{yx} & (2\text{-}3) \\ Y_N = m\sigma_y + l\tau_{xy} & (2\text{-}4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_N = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + 2lm\tau_{xy} & (2\text{-}5) \\ \tau_N = lm(\sigma_y - \sigma_x) + (l^2 - m^2)\tau_{xy} & (2\text{-}6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_N = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 = l^2(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2 \\ \tau_N = lm(\sigma_2 - \sigma_1) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} l(\sigma_x)_s + m(\tau_{xy})_s &= \overline{f}_x \\ m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s &= \overline{f}_y \end{aligned}} \quad \textbf{(2-18)}$$

——平面问题的应力边界条件

（2）一点的主应力、应力主向、最大最小应力

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \qquad (2\text{-}7)$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{\sigma_1-\sigma_x}{\tau_{xy}}$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2-\sigma_y} \qquad (2\text{-}8)$$

表明：σ_1 与 σ_2 互相垂直。

$$\left.\begin{matrix}\tau_{\max}\\ \tau_{\min}\end{matrix}\right\} = \pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

$\tau_{\max}$、$\tau_{\min}$ 的方向与σ_1（σ_2）成45°。