

文章编号:1000-6893(2009)03-0403-08

计算气动声学中的紧致滤波格式

柳占新, 黄其柏, 袁骥轩, 胡漂

(华中科技大学 机械学院, 湖北 武汉 430074)

Compact Filtering Schemes for Computational Aeroacoustics

Liu Zhanxin, Huang Qibai, Yuan Jixuan, Hu Li

(College of Mechanical Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

摘要: 从理论上分析了数值伪波产生的原因, 要消除数值伪波可用滤波方法。为了使滤波器具有理想的截断特性, 引入了修正的高斯函数。通过让滤波器的频响函数与修正的高斯函数逼近, 利用序列二次规划(SQP)方法优化了五对角紧致滤波格式。优化的滤波格式提高了计算精度和效率, 增强了数值稳定性, 更易于实施。一维和二维算例体现了优化滤波格式的性能改进。

关键词: 紧致格式; 滤波; 有限差分法; 序列二次规划; 计算气动声学

中图分类号: V211.3 **文献标识码:** A

Abstract: In this article spurious waves introduced in the computation of aeroacoustics are analyzed theoretically and filters are proposed to attenuate these waves as soon as they are generated. In order to obtain a sharp cutoff of the pentadiagonal filters, a modified Gaussian function is introduced. The transfer functions of the filters are forced to be approximated to the modified Gaussian function in a specific wavenumber domain. The sequential quadratic programming (SQP) method is employed to achieve the approximation. The accuracy, stability, and efficiency of computation are improved in the optimized filters, and they are more convenient for practical application. The improved performances of the optimized schemes are demonstrated through their application to one- and two-dimensional problems.

Key words: compact scheme; filtering; finite difference method; sequential quadratic programming; computational aeroacoustics

计算气动声学(Computational Aeroacoustics, CAA)问题通常涉及到多个频带范围的声波计算。为了精确求解, 已有很多不同种类的差分格式^[1-5]。虽然这些差分格式都有较高的计算精度和分辨率, 但在计算过程中不可避免地存在数值伪波。数值伪波常存在于计算边界、多区域的接合点以及非线性场合^[6], 它会影响计算精度甚至数值稳定性。因此在数值计算中一有伪波产生, 就要将其消除。

消除伪波常用人工阻尼和滤波方法, 但滤波方法更灵活, 便于实施。已有很多学者对滤波格式做过研究: S. K. Lele^[7]提出了广义紧致滤波格式; M. R. Visbal等^[8-9]利用Taylor级数展开法将S. K. Lele的格式进一步推广得到了一系列标准格式; C. Bogey等^[10-11]优化了一系列显示滤波格式。虽然这些滤波格式基本能满足计算要求, 但

存在以下问题: 从频谱上来看过渡带都比较宽, 对差分格式能精确求解的长波也有一定衰减;

边界格式精度较低, 且非对称边界格式本身引起数值伪波; 常常需多次调整控制参数, 不便于实施。本文从理论上阐述了数值伪波产生原因, 利用序列二次规划(SQP)方法优化了五对角紧致滤波格式, 成功解决了上述问题。

1 差分格式中的数值伪波

五对角的紧致差分格式为

$$a \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{2\Delta x} + b \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{4\Delta x} + c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6\Delta x} =$$
$$(i = 3, 4, \dots, N-4, N-3) \quad (1)$$

$$a_{im} f_i = \frac{1}{x_{n=0}} \sum_{i=0}^6 p_{in} (f_n - f_i)$$
$$a_{im} f_{N-m} = - \frac{1}{x_{n=0}} \sum_{i=0}^6 p_{in} (f_{N-n} - f_{N-i}) \quad (2)$$
$$(i = 0, 1, 2)$$

收稿日期: 2007-12-18; 修订日期: 2009-01-12

基金项目: 国家自然科学基金(50075029)

通讯作者: 柳占新 E-mail: hustliuxz@gmail.com

式中： f 为函数 f 的空间一次微分； x 和 i 分别为网格步长和网格标号； a, b, c, a_{im} 和 p_{in} 为常数。式(1)为内部差分格式，式(2)为边界差分格式。通过对式(1)和式(2)进行 Fourier 分析，可得到修正的度量波数 (Modified Scaled Wavenumber) 为

$$\bar{\omega}_I = \frac{a \sin(\omega/2) + (b/2) \sin(\omega) + (c/3) \sin(3\omega/2)}{1 + 2 \sin^2(\omega/2)} \quad (3)$$

$$\bar{\omega}_B = -i \sum_{n=0}^6 p_{in} e^{i(n-1)\omega} + \sum_{m=0}^6 a_{im} e^{i(m-1)\omega} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (4)$$

式中： $i = -1$ ； $\bar{\omega} = kx$ 为度量波数 (Scaled Wavenumber)， k 为波数； $\bar{\omega}_I$ 和 $\bar{\omega}_B$ 分别为内部和边界格式的实际度量波数。 $\bar{\omega}_I$ 与 $\bar{\omega}_B$ 之差的实部代表色散误差，虚部代表耗散误差。为了精确计算，应保证 $\bar{\omega}$ 充分接近 ω 。为此，文献[4]优化了两式的系数使整个格式具有高计算精度和分辨率，同时又满足渐进稳定条件。优化后 $\bar{\omega}$ 与 ω 的对比如图 1 所示。由图 1 或式(3)和式(4)可以看出，无论系数为何值，当 $\omega = 0$ 时 $\bar{\omega} = 0$ ，即度量波数为 0 的波完全不能正确计算，在计算中应彻底消除它。

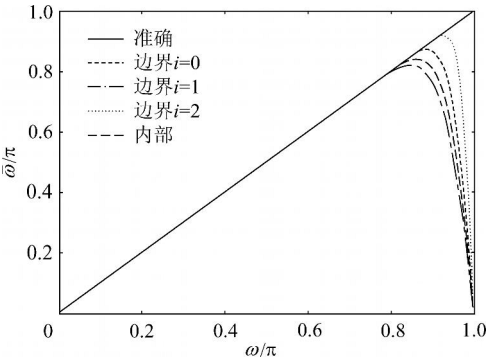


图 1 优化紧致差分格式的实际度量波数

Fig. 1 Modified scaled-wavenumber of optimized compact finite-difference schemes

实际上，计算中的数值色散误差是数值格式的群速度改变的结果^[12]。理论上声波的群速度就是声速 c ，是一个定值。假定时间积分无误差，则差分格式的群速度为

$$V = c(d\bar{\omega}/d\omega) \quad (5)$$

由式(5)可以看出，只有 $\bar{\omega}$ 对 ω 的导数等于 1 时差分格式的群速度才与声速相等。文献[4]和文献[5]优化的差分格式的 $d\bar{\omega}/d\omega$ 如图 2 所示。

从图 2 中可以看出，在高波数段 $d\bar{\omega}/d\omega$ 与 1 偏离较大，计算中产生数值伪波。群速度为正的伪波叫色散波，群速度为负的伪波叫寄生波^[13]。群速度的绝对值越大，产生的伪波长越短。这些短波是产生点到点的振荡的主要原因。伪波的存在，影响计算精度甚至稳定性，必须在它一产生的时候就将其消除。数值滤波是消除伪波的简易有效方法。

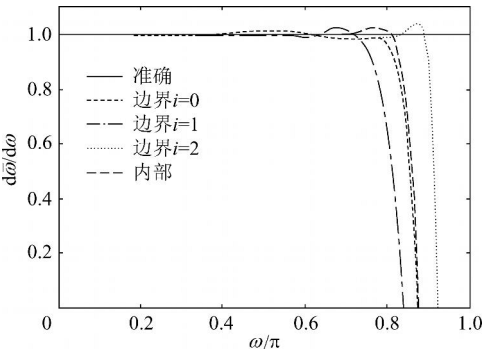


图 2 优化紧致差分格式的 $d\bar{\omega}/d\omega$ 图

Fig. 2 $d\bar{\omega}/d\omega$ of optimized compact finite-difference schemes

2 优化的紧致滤波格式

2.1 内部滤波格式

内部五对角中心滤波格式为

$$f_{i-2} + f_{i-1} + f_i + f_{i+1} + f_{i+2} = \sum_{l=0}^n \frac{p_l}{2} (f_{i+l} + f_{i-l}) \quad (6)$$

式中： f 为函数 f 滤波后的值； p_l 和 p_{-l} 为常数。通过将式(6)左右两边 Taylor 展开，可以得到标准的紧致滤波格式。M. R. Visbal 等^[9-10]正是用这种方法得到不同 Taylor 精度的三对角 ($n=0$) 滤波格式，并把 α 作为控制变量，取值范围为 $[0, 0.5]$ 。这种 $2n$ 阶滤波器 (简称为标准滤波器，记为 $stdO(n, x)$ ，其中： n 为 Taylor 精度； x 为 α 的取值) 需要 $2n+1$ 个网格节点。

对式(6)进行 Fourier 变换可得

$$F_T(\omega) = \frac{\sum_{l=0}^n p_l \cos(l\omega)}{1 + 2 \cos \omega + 2 \cos(2\omega)} \quad (7)$$

式中： $F_T(\omega)$ 为滤波器的频响函数。本文优化的目的就是要使滤波器的过渡带变窄，尽可能具有理想的截断特性，衰减数值伪波特别是点到点的

振荡,同时不影响通带内的波的求解。为此,引入以下修正的高斯函数

$$F_G(\omega) = 1 - \exp\left[-\frac{(\ln 2)}{\Delta\omega^2}\right]$$

(8)

式中: $\Delta\omega$ 为高斯函数的半宽,可以根据需要自由选择。这个修正的高斯函数满足滤波器所需的所有特点。因此可以通过式(7)逼近式(8)来优化滤波器的系数,优化目标转变为求以下积分的最小值

$$G = \int_0^{0.8} (F_T(\omega) - F_G(\omega))^2 d\omega$$

(9)

显然, G 是关于滤波器系数的非线性函数。式(9)的积分区间之所以选 $[0, 0.8]$, 是因为它是 $[4, 5]$ 的内部紧致差分格式的精确求解区间。优化过程中还必须满足以下约束条件:

- (1) $F_T(\omega) = 0$: 完全衰减点到点的振荡。

(2) $F_T(0) = 1$: 满足适定性条件; 无限波长的波能精确求解, 完全不需衰减。

(3) m 点格式的滤波器具有 $m - 3$ 阶 Taylor 精度: 使得能精确求解的长波尽量不受影响。

(4) $\forall \omega \in [0, 1] \quad |F_T(\omega)| \leq 1$: 不放大任何波长的波, 满足数值稳定性要求。

至此,优化目标已转化为一个带有约束的优化问题。可以通过 SQP 方法来优化^[4-5,14]。优化过程中,所有的格式最少具有 4 阶 Taylor 精度。在计算中高阶 Taylor 精度 ($m > 4$) 的滤波格式的计算精度并不比 4 阶高,这里的高阶滤波格式仅包括 $\Delta\omega = 0.15$ 时的 6 阶和 8 阶格式(记为: opO6 $\Delta\omega = 0.15$ 和 opO8 $\Delta\omega = 0.15$, 下同)。4 阶滤波格式包括 opO4 $\Delta\omega = 0.10$, opO4 $\Delta\omega = 0.15$ 和 opO4 $\Delta\omega = 0.20$ 3 种,它们足以满足不同需求。优化的系数如表 1 和表 2 所示。优化后的频响函数与标准 10 阶格式的对比如图 3 和图 4 所示。

表 1 4 阶滤波格式的优化系数

Table 1 Optimized coefficients of 4-order filtering schemes

系数	opO4 $\Delta\omega = 0.20$	opO4 $\Delta\omega = 0.15$	opO4 $\Delta\omega = 0.10$
	0.567 395 275 5	0.639 391 801 4	0.659 836 535 3
	0.120 921 677 4	0.150 330 326 6	0.161 481 436 6
p_0	0.966 545 998 8	0.993 163 421 7	0.998 971 936 7
p_1	1.184 971 552 8	1.289 038 470 1	1.321 215 165 5
p_2	0.221 770 954 1	0.296 558 706 2	0.322 346 035 2
p_3	0.003 345 400 1	0.000 683 657 8	0.000 102 806 3

表 2 高阶滤波格式的优化系数

Table 2 Optimized coefficients of high-order filtering schemes

系数	opO6 $\Delta\omega = 0.15$	opO8 $\Delta\omega = 0.15$
	0.630 721 291 0	0.619 277 927 5
	0.145 273 709 9	0.138 991 947 8
p_0	0.992 041 645 9	0.990 297 005 6
p_1	1.274 175 948 5	1.254 727 512 3
p_2	0.284 180 736 5	0.268 742 948 6
p_3	0.001 819 052 4	0.003 465 355 1
p_4	-0.000 227 381 5	-0.000 770 078 9
p_5	0	0.000 077 007 9

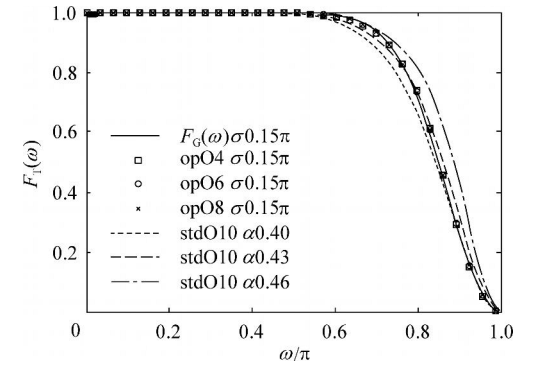


图 3 $\Delta\omega = 0.15$ 时不同滤波器的频响函数对比

Fig. 3 Transfer functions of optimized filters of different orders with $\Delta\omega = 0.15$

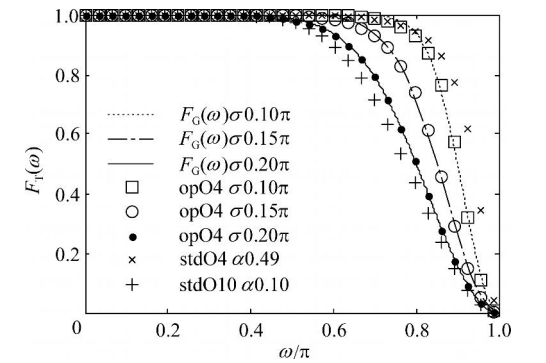


图 4 4 阶优化滤波器的频响函数与标准格式对比

Fig. 4 Transfer functions of optimized 4-order filters with different half-widths

从图 3 可以看出:优化滤波器的频响函数与 $F_G(\omega)$ 几乎完全重合;优化的滤波器对低频的影响比标准格式小,无论标准格式的控制变量取何值,总不能得到如修正高斯函数那样陡峭的截断特性。从图 4 可以看出:3 个优化的 4 阶滤波器的有效衰减范围涵盖了 $[0.10, 0.49]$ 的标准 10 阶滤波器的范围。对于标准滤波器来说当 $\Delta\omega \in [0, 0.10]$ 时,效果与显式滤波器相当,易导致不稳

定性^[15],故一般都取 $[0.10,0.49]$ 。因此优化的 3 个 4 阶滤波器能够满足各种需求。

2.2 边界滤波格式

式(6)只能用在 $4 \leq i \leq N-3$ 的节点处。边界滤波常有两种方法^[8-9]:一种方法是用低阶的中心(对称)格式,如在 $i=2$ 处用 2 阶标准中心滤波器,在 $i=3$ 处用 4 阶标准中心滤波器;另一种方法是用不对称(也称做单侧:One Side)边界格式。由于低阶中心格式对精确求解的长波也有衰减,本文采用不对称边界格式,研究发现由于边界点 $i=1$ 处的格式对整个格式稳定性产生很大干扰,故点 $i=1$ 处不滤波。整个边界格式为

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^5 a_{im} f_i &= \sum_{n=1}^6 b_{in} f_n \\ \sum_{m=1}^5 a_{im} f_{N+1-m} &= \sum_{n=1}^6 b_{in} f_{N+1-n} \end{aligned} \tag{10}$$

$(i=2,3)$

为了使整个格式保持五对角,令 $a_{22}=a_{33}=1$, $a_{25}=0$ 。通过对式(10)进行 Fourier 变换可得

$$F_T(\omega) = \frac{\sum_{n=1}^6 b_{in} \exp[i(n-1)\omega]}{\sum_{m=1}^5 a_{im} \exp[i(m-1)\omega]} \tag{11}$$

$(i=2,3)$

显然 $F_T(\omega)$ 为复数。为了简化 $i=3$ 处的频响函数,令 $a_{31}=a_{35}$, $a_{32}=a_{34}$ 。为了保证边界滤波器具有高的计算精度和良好的稳定性,需要其频响函数实部逼近修正的高斯函数,虚部逼近零。故定义以下积分:

$$G = \int_0^r \{ [\operatorname{Re}(F_T(\omega)) - F_G(\omega)]^2 + [\operatorname{Im}(F_T(\omega))]^2 \} d\omega \tag{12}$$

优化的目标就是求使 G 最小的系数。由于优化的边界差分格式精确求解区间为 $[0,0.7]$,故 r 取 0.7。优化时需满足以下条件:

- (1) $F_T(\omega) = 0$ 。

(2) $F_T(0) = 1$ 。

(3) 4 阶 Taylor 精度。

(4) $\forall \omega \in (0,1) \quad | \operatorname{Re}(F_T(\omega)) | \leq 1$ 。

同内部格式一样,可以用 SQP 方法优化。优化后的系数如表 3 和表 4 所示。优化后的边界滤波器(表示为 opOneSide α)与低阶边界滤波器

(表述为 LO $n \alpha$)以及标准边界滤波器(表示为 stdOneSide α)的比较如图 5~图 8 所示。

表 3 边界 $i=2$ 处优化的滤波器系数

Table 3 Optimized coefficients of boundary filters at $i=2$

系数	opOneSide 0.10	opOneSide 0.15	opOneSide 0.20
a_{21}	0.315 572 152 3	0.309 625 699 5	0.321 754 715 6
a_{23}	1.073 368 782 1	1.138 064 629 3	1.270 396 680 6
a_{24}	0.380 749 643 7	0.410 669 616 9	0.468 915 865 6
b_{21}	0.315 316 174 5	0.308 468 802 3	0.317 903 605 3
b_{22}	1.001 279 889 2	1.005 784 486 2	1.019 255 551 7
b_{23}	1.070 809 003 8	1.126 495 656 8	1.231 885 577 3
b_{24}	0.383 309 422 1	0.422 238 589 4	0.507 426 968 9
b_{25}	-0.001 279 889 2	-0.005 784 486 2	-0.019 255 551 7
b_{26}	0.000 255 977 8	0.001 156 897 2	0.003 851 110 3

表 4 边界 $i=3$ 处优化的滤波器系数

Table 4 Optimized coefficients of boundary filters at $i=3$

系数	opOneSide 0.10	opOneSide 0.15	opOneSide 0.20
a_{31}	0.160 429 499 1	0.147 786 841 2	0.134 683 585 6
a_{32}	0.658 891 545 7	0.635 755 362 2	0.577 987 151 7
b_{31}	0.160 333 377 0	0.147 034 873 8	0.131 140 058 5
b_{32}	0.659 372 156 1	0.639 515 199 4	0.595 704 787 3
b_{33}	0.999 038 779 1	0.992 480 325 6	0.964 564 728 8
b_{34}	0.659 852 766 6	0.643 275 036 6	0.613 422 422 9
b_{35}	0.159 948 888 7	0.144 027 004 0	0.116 965 950 0
b_{36}	0.000 096 122 1	0.000 751 967 4	0.003 543 527 1

由图 5 和图 6 可以看出,优化的边界格式与相应的修正高斯函数几乎重合。标准的不对称边界格式在某些度量波数下放大了伪波,计算中会严重影响数值稳定性。而低阶对称格式对低度量波数的衰减作用较大,没有陡的截断特性。从图 7 和图 8 可以看出,优化的边界滤波器在 $[0,0.7]$ 内几乎与零重合。

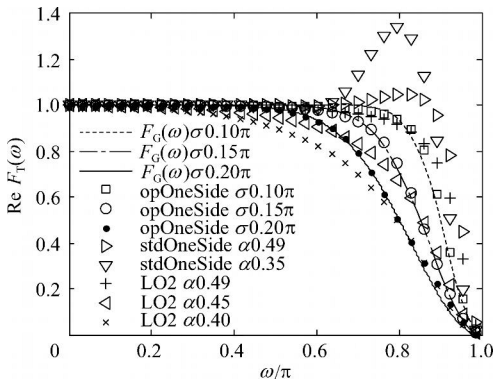
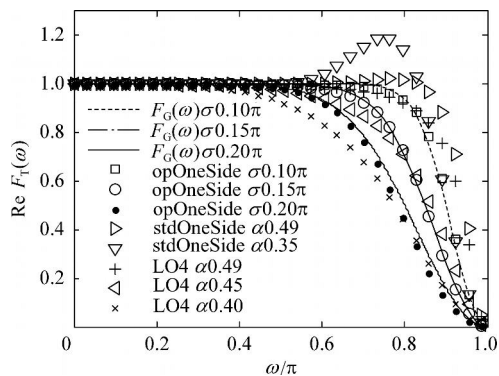
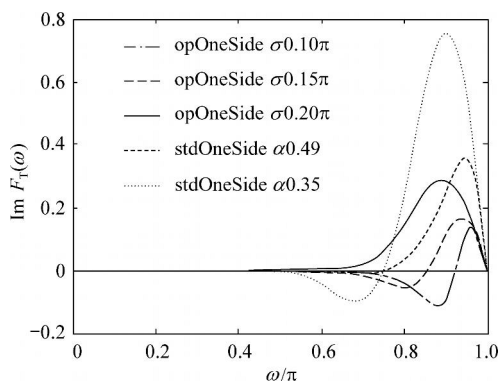
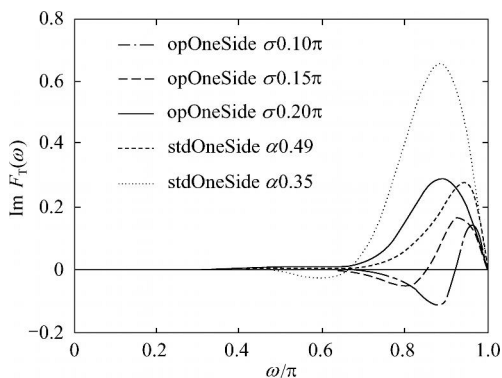


图 5 边界 $i=2$ 处滤波器频响函数实部对比

Fig. 5 Comparison of real part of transfer functions at boundary point $i=2$

图 6 边界 $i=3$ 处滤波器频响应函数实部对比Fig. 6 Comparison of real part of transfer functions at boundary point $i=3$ 图 7 边界 $i=2$ 处滤波器频响应函数虚部对比Fig. 7 Comparison of imaginary part of transfer functions at boundary point $i=2$ 图 8 边界 $i=3$ 处滤波器频响应函数虚部对比Fig. 8 Comparison of imaginary part of transfer functions at boundary point $i=3$

3 应用实例

为了体现优化滤波器的性能改进,本节考虑两个算例。计算中空间离散采用优化的五对角紧致差分格式^[14],时间积分采用 5 阶低色散低耗散

龙格-库塔 (LDDRK) 方法^[16]。为了获得收敛的数值解,每个算例都必须滤波。由于标准不对称边界影响数值稳定性,这里仅比较优化滤波器和采用对称边界的 10 阶标准滤波器。

3.1 算例 1

考虑一维平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

初始条件为以下梯形脉冲

$$u(x, 0) = \begin{cases} x - 20 & x \in [20, 30] \\ 10 & x \in (30, 40) \\ -x + 50 & x \in [40, 50] \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (14)$$

求解区域为 $x \in [1, 100]$ 。计算中采用 4 种不同的空间间隔: $\Delta x = 0.5, 1.0, 2.0, 4.0$ 。为了减小时间积分误差的影响, CFL 取 0.1 ($\text{CFL} = c \Delta t / \Delta x$)。在 Runge-Kutta 方法的最后一步对 u 滤波。当 $\Delta x = 0.5$ 时,若用 opO4 0.10 滤波器,则存在不完全滤波。因此本算例中 opO4 0.10 不参与比较。

若用 10 阶标准滤波器,需要调整 5 个控制参数 (1 个中心滤波器, 4 个低阶边界滤波器)。每一个控制变量都对整个格式的稳定性 and 计算精度有影响。因此要得到一个稳定的且计算精度较高的标准滤波器,需要经过多次尝试,不利于实际工程应用。在本例中当 $\Delta x = 4$ 时,无论 Δt 取何值,总不能得到稳定的数值解。

计算中各个滤波器的 l^2 范数误差如图 9 所示。其中 l^2 范数定义为

$$E(l^2) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f_{\text{num}}(i) - f_{\text{exact}}(i))^2} \quad (15)$$

图 9 中的直线是分别将网格节点上的数据经过线性最小二乘法拟合后的结果。从图 9 可以看出 Δx 相同时,任何一种优化的滤波格式都比标准格式精确,其中优化的 4 阶滤波器拟合曲线在 y 轴上的截距要比标准滤波器的截距小近 2 个单位,即精度提高近 2 个量级。从图 9 还可看出在 4 种不同网格间距下,优化的高阶格式误差都不比 4 阶格式小。因此,在实际使用中,只需用优化的 4 阶格式。图 10 是当 $\Delta x = 2, t = 40$ 时优化的 4 阶格式与标准格式计算结果对比。从图 10 可以看出,优化的格式计算结果与准确值几乎重合,而标准滤波格式则未完全消除数值伪波。

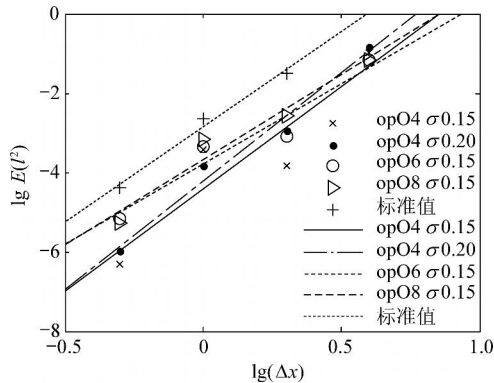


图 9 算例 1 的 l^2 误差
Fig 9 l^2 -norm error of problem 1

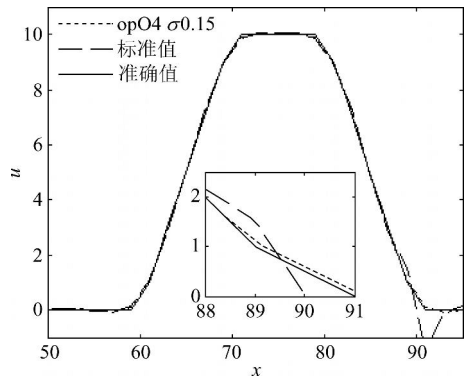


图 10 $x=2, t=40$ 时的结果对比 (算例 1)
Fig. 10 Result comparison of problem 1 with $x=2$ at time $t=40$

3.2 算例 2

本算例为第一届 CAA 标准算例^[17]。模拟声波被固壁反射问题。其控制方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{16}$$

矩阵 U, E, F 的表达式分别为

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} Ma_x u + u \\ Ma_x v \\ Ma_x p + u \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} Ma_y u \\ Ma_y v + p \\ Ma_y p + v \end{pmatrix} \tag{17}$$

式中: ρ, u, v, p 分别为密度、 x 和 y 方向的速度、压强; Ma_x 和 Ma_y 分别为 x 和 y 方向的马赫数。所有变量都已无量纲化。计算的初始条件为

$$u = v = 0$$
$$p = 0.01 \exp \left[-(\ln 2) \left(x^2 + (y - 15)^2 \right) \right] \tag{18}$$

求解区域为 $(x, y) \in [-50, 50] \times [0, 110]$ 。壁面边界位于 $y=0$ 处。 Ma_x 和 Ma_y 设为零。采用 4 种不同的均匀计算网格 ($x = y = 0.5, 1.0, 2.0, 4.0$)。CFL 取 0.2。计算中共用两种边界条件: 计算区域的左右以及上部用理想匹配层吸收边界^[18], 边界层厚度为 10 个网格点; 区域的下部用壁面边界 $v=0$ 。

为了获得稳定的解, 必须运用数值滤波。在时间积分的最后一步分别对 U 的 4 个变量滤波, 每次按先 x 方向后 y 方向的顺序滤波。计算时发现, 无论 x 取何值, 所有的优化滤波器都是稳定的, 但是用标准滤波器时需要多次改变控制变量的值才能得到稳定结果。本例中作为对比的标准滤波器为内部格式 $\sigma=0.35$, 其他所有边界格式 $\sigma=0.30$ 。

为了系统对比, 定义如下 l^2 范数误差

$$E(l^2) = \frac{\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (p_{num}(i, j) - p_{exact}(i, j))^2}{N_x N_y} \tag{19}$$

时间 $t=80$ 时用各种滤波器算得的 l^2 误差对比如图 11 和图 12 所示, 图中的直线是分别将网格节点上的数据经过线性最小二乘法拟合后的结果。从图 11 可以看出在 x 相同时, 所有的优化滤波器的 l^2 误差都比标准滤波器小; 而在优化的滤波器中, 高阶计算精度并不比 4 阶高。由图 12 可以看出, 优化的所有 4 阶滤波器都可以计算此例, 但在 $x=0.5, 4.0$ 时 op04 $\sigma=0.10$ 存在过度滤波, 计算精度较差, 但无论 x 取何值, 都能得到稳定的数值解。为了进一步对比, 图 13 和图 14 列出了 $t=80$ 时的压力云图, 图 14 还列出了此时轴 $x=0$ 处的压力波形。

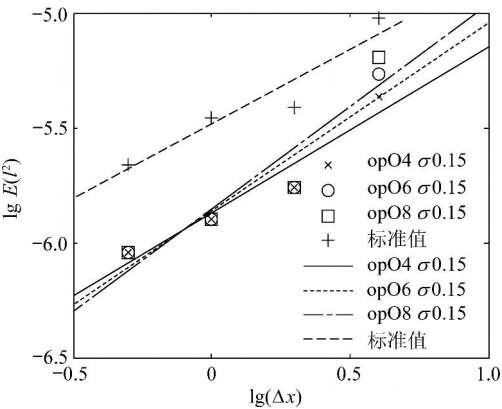


图 11 不同阶次滤波器 l^2 误差对比 ($t=80, x=2$)
Fig 11 l^2 -norm error comparison of filters with different orders ($t=80, x=2$)

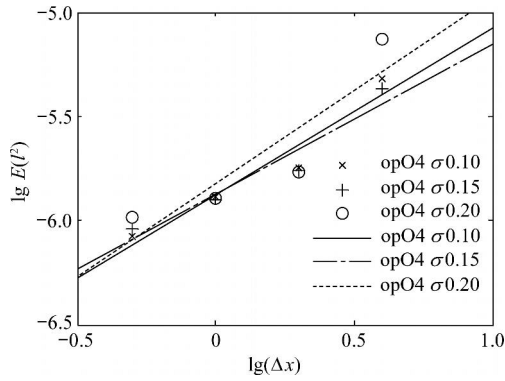


图 12 优化的不同半宽 4 阶滤波器 l^2 误差对比
($t=80, x=2$)

Fig. 12 l^2 -norm error comparison of 4-order filters with different half-widths ($t=80, x=2$)

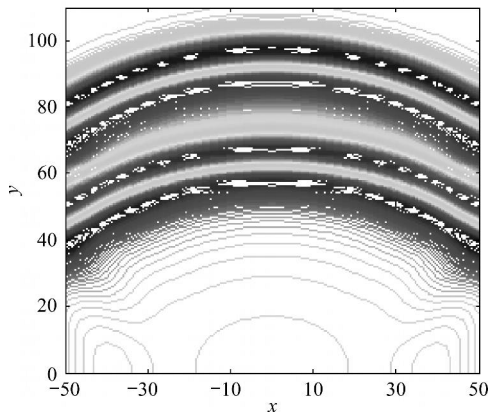


图 13 opO4 0.15 滤波器压力云图($t=80, x=2$)

Fig. 13 Pressure contour of opO4 0.15 filter($t=80, x=2$)

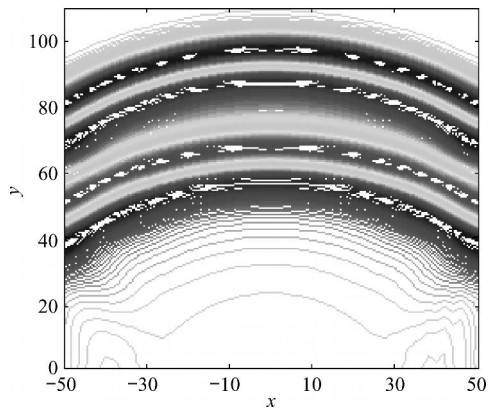


图 14 标准滤波器压力云图($t=80, x=2$)

Fig. 14 Pressure contour of standard filter($t=80, x=2$)

对比图 13 和图 14 可以看出,用优化滤波器计算的云图的等高线更光滑,更贴近真值。从图 15 可以看出,用优化滤波器得到的计算结果和真

值重合得很好,而标准滤波器在 $y=50$ 处存在过度耗散误差较大。

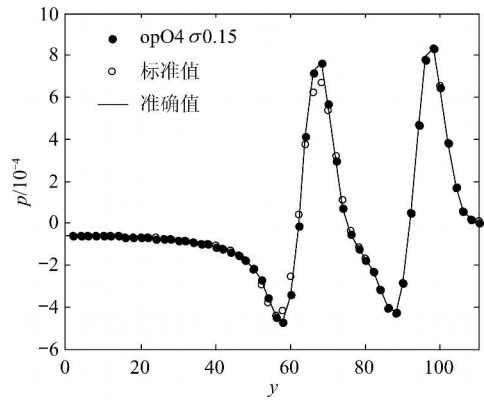


图 15 沿着轴 $x=0$ 的压力波形对比($t=80, x=2$)

Fig. 15 Pressure waveform along axis of $x=0$ ($t=80, x=2$)

4 结 论

优化了五对角紧致滤波格式。优化滤波格式与标准 10 阶格式相比有如下优点:

- (1) 提高了计算精度。 x 相同时,优化滤波器的计算精度要高于标准滤波器。
- (2) 更具适应性。有些问题用标准滤波器不能求解,而用优化的格式则可以得到稳定的数值解。
- (3) 提高了计算效率。计算实例表明优化的高阶滤波器计算精度并不比 4 阶高。因此在需要滤波的时候只要从优化的 4 阶滤波器中选择一个最佳的进行计算。优化的 4 阶滤波器是 7 点格式,而标准 10 阶滤波器是 11 点格式。因此优化格式减少了计算量,提高了计算效率。
- (4) 易于实施。标准 10 阶格式共有 5 个控制参数,每个参数都对计算精度和数值稳定性有影响,在计算中要得到一个理想的标准格式组合,需要大量的尝试,不利于实际工程应用。而用优化格式,则只需要从优化的 4 阶格式中选择一个最佳滤波器,便于实施。

参 考 文 献

[1] Ashcroft G, Zhang X. Optimized prefactored compact schemes [J]. Journal of Computational Physics, 2003, 190(2):459-477.

[2] Svard M, Carpenter M H, Nordstrom J. A stable high-order finite difference scheme for the compressible Navier-Stokes equations, far-field boundary conditions[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 225(1):1020-1038.

- [3] Kim J W. Optimized boundary compact finite difference schemes for computational aeroacoustics [J]. Journal of Computational Physics, 2007, 225(1):995-1019.
- [4] 柳占新, 黄其柏, 胡漂, 等. 计算气动声学中的高精度紧致差分格式研究[J]. 航空动力学报, 2009, 24(1):83-90. Liu Zhanxin, Huang Qibai, Hu Li, et al. Study on the high-accuracy compact-finite-difference schemes for computational aeroacoustics [J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(1):83-90. (in Chinese)
- [5] Liu Z X, Huang Q B, Zhao Z G, et al. Optimized compact finite difference schemes with high accuracy and maximum resolution [J]. International Journal of Aeroacoustics, 2008, 7(2):123-146.
- [6] Colonius T, Lele S K. Computational aeroacoustics: progress on nonlinear problems of sound generation [J]. Progress in Aerospace Sciences, 2004, 40(6):345-416.
- [7] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution [J]. Journal of Computational Physics, 1992, 103(1):16-42.
- [8] Visbal M R, Gaitonde D V. Computation of aeroacoustic on general geometries using compact differencing and filtering schemes[R]. AIAA-99-33696, 1999.
- [9] Visbal M R, Gaitonde D V. On the use of higher-order finite-difference schemes on curvilinear and deforming meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2002, 181(1):155-185.
- [10] Bogey C, Bailly C. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations [J]. Journal of Computational Physics, 2004, 194(1):194-214.
- [11] Berland J, Bogey C, Marsden O, et al. High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale and boundary problem[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 224(2):622-637.
- [12] Tam C K W. Recent advances in computational aeroacoustics [J]. Fluid Dynamics Research, 2006, 38(9):591-615.
- [13] Tam C K W, Webb J C, Dong Z. A study of the short wave components in computational acoustics[J]. Journal of Computational Acoustics, 1993(1):1-30.
- [14] 孙国正. 优化设计及应用[M]. 北京:人民交通出版社, 2000. Sun Guozheng. Optimization design and application [M]. Beijing: China Communications Press, 2000. (in Chinese)
- [15] Zhang X, Blaisdell A, Lyrintzis S. High-order compact schemes with filters on multi-block domains[J]. Journal of Scientific Computing, 2004, 21(3):321-339.
- [16] Hu F Q, Hussaini M Y, Manthe J L. Low-dissipation and low-dispersion Runge-Kutta schemes for computational acoustics[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 124(1):177-191.
- [17] Hardin J C, Ristorcelli J R, Tam C K W. ICASE/LaRC workshop on benchmark problems in computational aeroacoustics[R]. Virginia: Langley Research Center, 1994.
- [18] Hu F Q. On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a perfectly matched layer[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 129(1):201-219.

作者简介:

柳占新(1980 -) 男,博士研究生。主要研究方向:计算气动声学。

Tel :027-87541174

E-mail :hustliuzx @gmail.com

(责任编辑:鲍亚平)