

# 弹性力学简明教程（第四版）课后习题解答

徐芝纶

## 第一章 绪论

【1-1】试举例说明什么是均匀的各向异性体，什么是非均匀的各向同性体？

【分析】均匀的各项异性体就是满足均匀性假定，但不满足各向同性假定；非均匀的各向异性体，就是不满足均匀性假定，但满足各向同性假定。

【解答】均匀的各项异性体如：竹材，木材。

非均匀的各向同性体如：混凝土。

【1-2】一般的混凝土构件和钢筋混凝土构件能否作为理想弹性体？一般的岩质地基和土质地基能否作为理想弹性体？

【分析】能否作为理想弹性体，要判定能否满足四个假定：连续性，完全弹性，均匀性，各向同性假定。

【解答】一般的混凝土构件和土质地基可以作为理想弹性体；一般的钢筋混凝土构件和岩质地基不可以作为理想弹性体。

【1-3】五个基本假定在建立弹性力学基本方程时有什么作用？

【解答】（1）连续性假定：假定物体是连续的，也就是假定整个物体的体积都被组成这个物体的介质所填满，不留下任何空隙。引用这一假定后，物体的应力、形变和位移等物理量就可以看成是连续的。因此，建立弹性力学的基本方程时就可以用坐标的连续函数来表示他们的变化规律。

完全弹性假定：假定物体是完全弹性的，即物体在对应形变的外力被去除后，能够完全恢复原型而无任何形变。这一假定，还包含形变与引起形变的应力成正比的涵义，亦即两者之间是成线性关系的，即引用这一假定后，应力与形变服从胡克定律，从而使物理方程成为线性的方程，其弹性常数不随应力或形变的大小而变。

均匀性假定：假定物体是均匀的，即整个物体是由同一材料组成的，引用这一假定后整个物体的所有各部分才具有相同的弹性，所研究物体的内部各质点的物理性质都是相同的，因而物体的弹性常数不随位置坐标而变化。

各向同性假定：假定物体是各向同性的，即物体的弹性在所有各个方向都相同，引用此假定后，物体的弹性常数不随方向而变。

小变形假定：假定位移和变形是微小的。亦即，假定物体受力以后整个物体所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸，而且应变和转角都远小于 1。这样在建立物体变形以后的平衡方程时，就可以方便的用变形以前的尺寸来代替变形以后的尺寸。在考察物体的位移与形变的关系时，它们的二次幂或乘积相对于其本身都可以略去不计，使得弹性力学中的微分

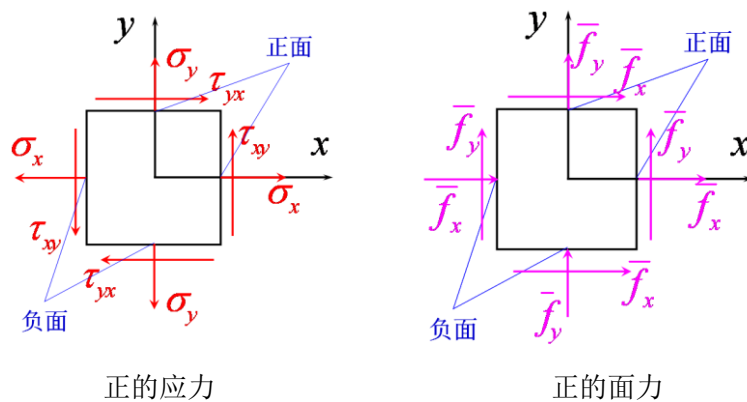
方程都简化为线性的微分方程。

**【1-4】** 应力和面力的符号规定有什么区别？试画出正坐标面和负坐标面上的正的应力和正的面力的方向。

**【解答】** 应力的符号规定是：当作用面的外法线方向指向坐标轴方向时（即正面时），这个面上的应力（不论是正应力还是切应力）以沿坐标轴的正方向为正，沿坐标轴的负方向为负。当作用面的外法线指向坐标轴的负方向时（即负面时），该面上的应力以沿坐标轴的负方向为正，沿坐标轴的正方向为负。

面力的符号规定是：当面力的指向沿坐标轴的正方向时为正，沿坐标轴的负方向为负。

由下图可以看出，正面上应力分量与面力分量同号，负面上应力分量与面力分量符号相反。



**【1-5】** 试比较弹性力学和材料力学中关于切应力的符号规定。

**【解答】** 材料力学中规定切应力符号以使研究对象顺时针转动的切应力为正，反之为负。

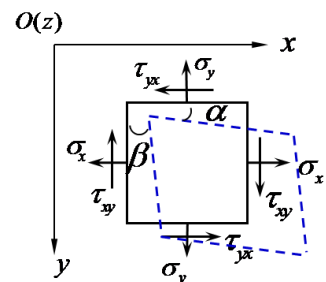
弹性力学中规定，作用于正坐标面上的切应力以沿坐标轴的正方向为正，作用于负坐标面上的切应力以沿坐标轴负方向为正，反之为负。

**【1-6】** 试举例说明正的应力对应于正的形变。

**【解答】** 正的应力包括正的正应力与正的切应力，正的形变包括正的正应变与正的切应变，本题应从两方面解答。

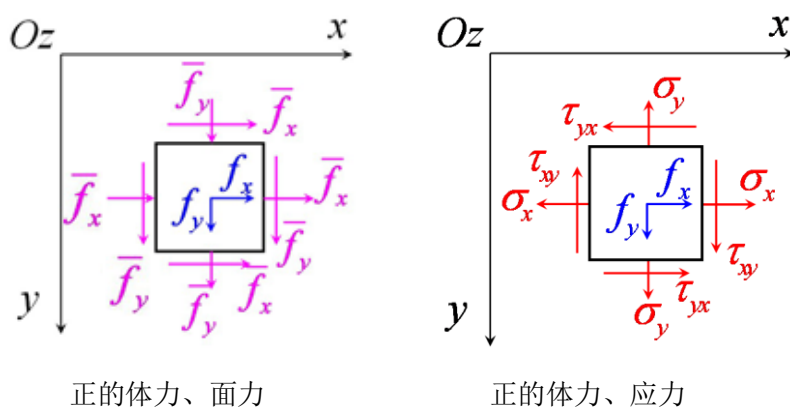
正的正应力对应于正的正应变：轴向拉伸情况下，产生轴向拉应力为正的应力，引起轴向伸长变形，为正应变。

正的切应力对应于正的切应变：在如图所示应力状态情况下，切应力均为正的切应力，引起直角减小，故为正的切应变。



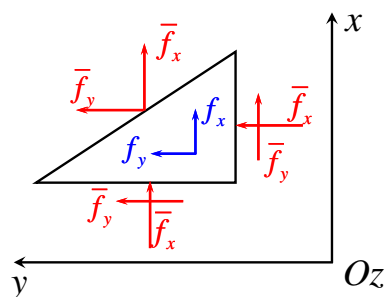
【1-7】试画出图 1-4 中矩形薄板的正的体力、面力和应力的方向。

【解答】



【1-8】试画出图 1-5 中三角形薄板的正的面力和体力的方向。

【解答】



【1-9】在图 1-3 的六面体上，y 面上切应力  $\tau_{yz}$  的合力与 z 面上切应力  $\tau_{zy}$  的合力是否相等？

【解答】切应力为单位面上的力，量纲为  $L^{-1}MT^{-2}$ ，单位为  $N/m^2$ 。因此，应力的合力应乘以相应的面积，设六面体微元尺寸如  $dx \times dy \times dz$ ，则 y 面上切应力  $\tau_{yz}$  的合力为：

$$\tau_{yz} \cdot dx \cdot dz \quad (a)$$

z 面上切应力  $\tau_{zy}$  的合力为：

$$\tau_{zy} \cdot dx \cdot dy \quad (b)$$

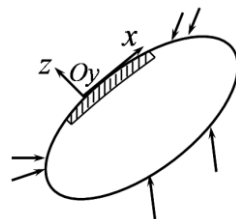
由式 (a) (b) 可见，两个切应力的合力并不相等。

【分析】作用在两个相互垂直面上并垂直于该两面交线的切应力的合力不相等，但对某点的合力矩相等，才导出切应力互等性。

## 第二章 平面问题的基本理论

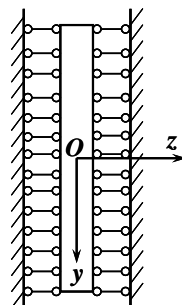
【2-1】试分析说明，在不受任何面力作用的空间体表面附近的薄层中(图 2-14)其应力状态接近于平面应力的情况。

【解答】在不受任何面力作用的空间表面附近的薄层中，可以认为在该薄层的上下表面都无面力，且在薄层内所有各点都有  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ，只存在平面应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ，且它们不沿  $z$  方向变化，仅为  $x, y$  的函数。可以认为此问题是平面应力问题。



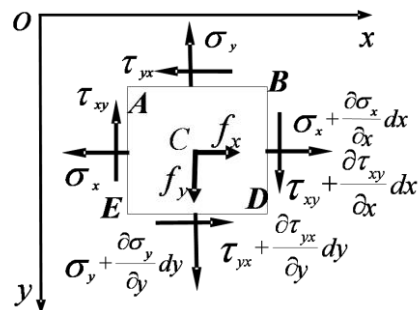
【2-2】试分析说明，在板面上处处受法向约束且不受切向面力作用的等厚度薄片(2-15)，当板边上只受  $x, y$  向的面力或约束，且不沿厚度变化时，其应变状态接近于平面应变的情况。

【解答】板上处处受法向约束时  $\varepsilon_z = 0$ ，且不受切向面力作用，则  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  (相应  $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ ) 板边上只受  $x, y$  向的面力或约束，所以仅存在  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ，且不沿厚度变化，仅为  $x, y$  的函数，故其应变状态接近于平面应变的情况。



【2-3】在图 2-3 的微分体中，若将对形心的力矩平衡条件  $\sum M_C = 0$  改为对角点的力矩平衡条件，试问将导出什么形式的方程？

【解答】将对形心的力矩平衡条件  $\sum M_C = 0$ ，改为分别对四个角点 A、B、D、E 的平衡条件，为计算方便，在  $z$  方向的尺寸取为单位 1。



$$\sum M_A = 0$$

$$\begin{aligned} & \sigma_y dx \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} + \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} - \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \cdot 1 \cdot dx - \sigma_y dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} \\ & - \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \cdot 1 \cdot dy + f_x dx dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} - f_x dx dy \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (a)$$

$$\sum M_B = 0$$

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \cdot 1 \cdot dy + \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} \\ & - \tau_{xy} dy \cdot 1 \cdot dx - \sigma_x dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} - \sigma_y dx \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} + f_x dx dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} + f_y dx dy \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (b)$$

$$\sum M_D = 0$$

$$\begin{aligned} & (\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy) dx \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} - \tau_{xy} dy \cdot 1 \cdot dx + \sigma_x dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} + \tau_{yx} dx \cdot 1 \cdot dy \\ & - \sigma_x dx \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} - (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} - f_x dx dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} + f_y dx dy \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (c)$$

$$\sum M_E = 0$$

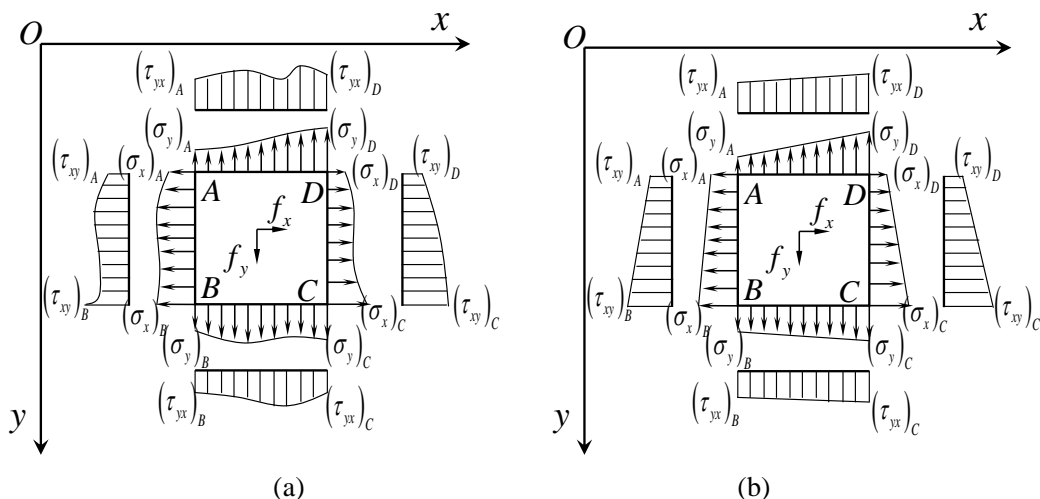
$$\begin{aligned} & -(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy) dx \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} + \sigma_x dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} + \tau_{yx} dx \cdot 1 \cdot dy + \sigma_y dx \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} - \\ & (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} - (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx) dy \cdot 1 \cdot dx - f_x dx dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} + f_y dx dy \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (d)$$

略去(a)、(b)、(c)、(d)中的三阶小量（亦即令 $d^2 x dy, dx d^2 y$ 都趋于0），并将各式都除以 $dx dy$ 后合并同类项，分别得到 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 。

【分析】由本题可得出结论：微分体对任一点取力矩平衡得到的结果都是验证了切应力互等定理。

【2-4】在图 2-3 和微分体中，若考虑每一面上的应力分量不是均匀分布的，验证将导出什么形式的平衡微分方程？

【解答】微分单元体 ABCD 的边长 $dx, dy$ 都是微量，因此可以假设在各面上所受的应力如图 a 所示，忽略了二阶以上的高阶微量，而看作是线性分布的，如图（b）所示。为计算方便，单元体在 $z$ 方向的尺寸取为一个单位。



各点正应力：

$$(\sigma_x)_A = \sigma_x ;$$

$$(\sigma_y)_A = \sigma_y$$

$$(\sigma_x)_B = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy ;$$

$$(\sigma_y)_B = \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$$

$$(\sigma_x)_D = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx;$$

$$(\sigma_y)_D = \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} dx$$

$$(\sigma_x)_C = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy;$$

$$(\sigma_y)_C = \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$$

各点切应力:

$$(\tau_{xy})_A = \tau_{xy};$$

$$(\tau_{yx})_A = \tau_{yx}$$

$$(\tau_{xy})_B = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy;$$

$$(\tau_{yx})_A = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$$

$$(\tau_{xy})_D = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx;$$

$$(\tau_{yx})_D = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx$$

$$(\tau_{xy})_C = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy;$$

$$(\tau_{yx})_C = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$$

由微分单元体的平衡条件  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ , 得

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \sigma_x + \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy \right) \right] \right\} dy + \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) + \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy \right) \right] \right\} dy - \\ & \left\{ \frac{1}{2} \left[ \tau_{yx} + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \right) \right] \right\} dx + \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \right] \right\} dx + f_x dx dy = 0 \\ & \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \sigma_y + \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} dx \right) \right] \right\} dx + \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) + \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) \right] \right\} dx - \\ & \left\{ \frac{1}{2} \left[ \tau_{xy} + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) \right] \right\} dy + \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) \right] \right\} dy + f_y dx dy = 0 \end{aligned}$$

以上二式分别展开并约简, 再分别除以  $dx dy$ , 就得到平面问题中的平衡微分方程:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0$$

【分析】由本题可以得出结论: 弹性力学中的平衡微分方程适用于任意的应力分布形式。

【2-5】在导出平面问题的三套基本方程时, 分别应用了哪些基本假定? 这些方程的适用条件是什么?

【解答】(1)在导出平面问题的平衡微分方程和几何方程时应用的基本假设是: 物体的连续性和小变形假定, 这两个条件同时也是这两套方程的适用条件。

(2)在导出平面问题的物理方程时应用的基本假定是: 连续性, 完全弹性, 均匀性和各向同性假定, 即理想弹性体假定。同样, 理想弹性体的四个假定也是物理方程的使用条件。

【思考题】平面问题的三套基本方程推导过程中都用到了哪个假定？

【2-6】在工地上技术人员发现，当直径和厚度相同的情况下，在自重作用下的钢圆环（接近平面应力问题）总比钢圆筒（接近平面应变问题）的变形大。试根据相应的物理方程来解释这种现象。

【解答】体力相同情况下，两类平面问题的平衡微分方程完全相同，故所求的应力分量相同。由物理方程可以看出，两类平面问题的物理方程主要的区别在于方程中含弹性常数的系数。由于  $E$  为 GPa 级别的量，而泊松比  $\mu$  取值一般在  $(0, 0.5)$ ，故主要控制参数为含有弹性模量的系数项，比较两类平面问题的系数项，不难看出平面应力问题的系数  $1/E$  要大于平面应变问题的系数  $(1-\mu^2)/E$ 。因此，平面应力问题情况下应变要大，故钢圆环变形大。

【2-7】在常体力，全部为应力边界条件和单连体的条件下，对于不同材料的问题和两类平面问题的应力分量  $\sigma_x$ ， $\sigma_y$  和  $\tau_{xy}$  均相同。试问其余的应力，应变和位移是否相同？

【解答】(1) 应力分量：两类平面问题的应力分量  $\sigma_x$ ， $\sigma_y$  和  $\tau_{xy}$  均相同，但平面应力问题  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ ，而平面应变问题的  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$ 。

(2) 应变分量：已知应力分量求应变分量需要应用物理方程，而两类平面问题的物理方程不相同，故应变分量  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \gamma_{xy}$  相同，而  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  不相同。

(3) 位移分量：由于位移分量要靠应变分量积分来求解，故位移分量对于两类平面问题也不同。

【2-8】在图 2-16 中，试导出无面力作用时 AB 边界上的  $\sigma_x$ ， $\sigma_y$ ， $\tau_{xy}$  之间的关系式

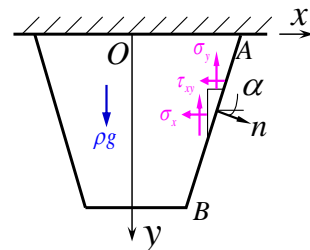


图2-16

【解答】由题可得：

$$l = \cos \alpha, m = \cos(\alpha - 90^\circ) = \sin \alpha$$

$$\bar{f}_x(AB) = 0, \bar{f}_y(AB) = 0$$

将以上条件代入公式 (2-15)，得：

$$(\sigma_x)_{AB} \cos \alpha + (\tau_{yx})_{AB} \sin \alpha = 0, \quad (\sigma_y)_{AB} \sin \alpha + (\tau_{xy})_{AB} \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_x)_{AB} = -(\tau_{yx})_{AB} \tan \alpha = (\sigma_y)_{AB} \tan^2 \alpha$$

【2-9】试列出图 2-17，图 2-18 所示问题的全部边界条件。在其端部小边界上，应用圣维南原理列出三个积分的应力边界条件。

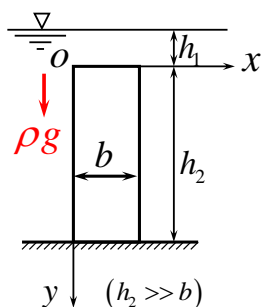


图 2-17

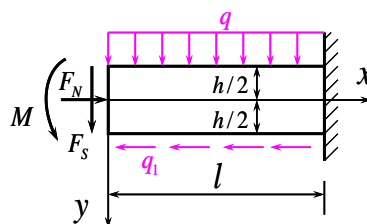


图 2-18

【分析】有约束的边界上可考虑采用位移边界条件，若为小边界也可写成圣维南原理的三个积分形式，大边界上应精确满足公式 (2-15)。

【解答】图 2-17:

	上 ( $y=0$ )	左( $x=0$ )	右 ( $x=b$ )
$l$	0	-1	1
$m$	-1	0	0
$\bar{f}_x(s)$	0	$\rho g(y+h_1)$	$-\rho g(y+h_1)$
$\bar{f}_y(s)$	$\rho g h_1$	0	0

代入公式 (2-15) 得

①在主要边界上  $x=0$ ,  $x=b$  上精确满足应力边界条件:

$$(\sigma_x)_{x=0} = -\rho g(y+h_1), (\tau_{xy})_{x=0} = 0;$$

$$(\sigma_x)_{x=b} = -\rho g(y+h_1), (\tau_{xy})_{x=b} = 0;$$

②在小边界  $y=0$  上，能精确满足下列应力边界条件:

$$(\sigma_y)_{y=0} = -\rho g h, (\tau_{xy})_{y=0} = 0$$

③在小边界  $y=h_2$  上，能精确满足下列位移边界条件:

$$(u)_{y=h_2} = 0, (v)_{y=h_2} = 0$$

这两个位移边界条件可以应用圣维南原理，改用三个积分的应力边界条件来代替，当板厚  $\delta=1$  时，可求得固定端约束反力分别为:

$$F_s = 0, F_N = -\rho g h_1 b, M = 0$$

由于  $y=h_2$  为正面，故应力分量与面力分量同号，则有:



$$\begin{cases} \int_0^b (\sigma_y)_{y=h_2} dx = -\rho gh_1 b \\ \int_0^b (\sigma_y)_{y=h_2} x dx = 0 \\ \int_0^b (\tau_{xy})_{y=h_2} dx = 0 \end{cases}$$

(2)图 2-18

①上下主要边界  $y=-h/2$ ,  $y=h/2$  上, 应精确满足公式 (2-15)

	$l$	$m$	$\bar{f}_x$ (s)	$\bar{f}_y$ (s)
$y = -\frac{h}{2}$	0	-1	0	$q$
$y = \frac{h}{2}$	0	1	$-q_1$	0

$$(\sigma_y)_{y=-h/2} = -q, (\tau_{yx})_{y=-h/2} = 0, (\sigma_y)_{y=h/2} = 0, (\tau_{yx})_{y=h/2} = -q_1$$

②在  $x=0$  的小边界上, 应用圣维南原理, 列出三个积分的应力边界条件: 负面上应力与面力符号相反, 有

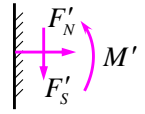
$$\begin{cases} \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=0} dx = -F_S \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} dx = -F_N \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dx = -M \end{cases}$$

③在  $x=l$  的小边界上, 可应用位移边界条件  $u_{x=l} = 0, v_{x=l} = 0$  这两个位移边界条件也可改用三个积分的应力边界条件来代替。

首先, 求固定端约束反力, 按面力正方向假设画反力, 如图所示, 列平衡方程求反力:

$$\sum F_x = 0, F_N + F'_N = q_1 l \Rightarrow F'_N = q_1 l - F_N$$

$$\sum F_y = 0, F_S + F'_S + ql = 0 \Rightarrow F'_S = -ql - F_S$$



$$\sum M_A = 0, M + M' + F_S l + \frac{1}{2} ql^2 - \frac{1}{2} q_1 l h = 0 \Rightarrow M = \frac{q_1 l h}{2} - M - F_S l - \frac{ql^2}{2}$$

由于  $x=l$  为正面, 应力分量与面力分量同号, 故

$$\begin{cases} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy = F'_N = q_1 l - F_N \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} y dy = M' = \frac{q_1 l h}{2} - M - F_S l - \frac{ql^2}{2} \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=l} dy = F'_S = -ql - F_S \end{cases}$$

【2-10】试应用圣维南原理，列出图 2-19 所示的两个问题中 OA 边上的三个积分的应力边界条件，并比较两者的面力是否是静力等效？

【解答】由于  $h \gg l$ ，OA 为小边界，故其上可用圣维南原理，写出三个积分的应力边界条件：

$$(a) \text{ 上端面 OA 面上面力 } \bar{f}_x = 0, \bar{f}_y = \frac{x}{b} q$$

由于 OA 面为负面，故应力主矢、主矩与面力主矢、主矩符号相反，有

$$\begin{cases} \int_0^b (\sigma_y)_{y=0} dx = - \int_0^b \bar{f}_y dx = - \int_0^b \frac{x}{b} q dx = - \frac{qb}{2} \\ \int_0^b (\sigma_y)_{y=0} x dx = - \int_0^b \bar{f}_y x dx = \int_0^b \frac{x}{b} q \left( \frac{b}{2} - x \right) dx = \frac{qb^2}{12} \text{ (对 OA 中点取矩)} \\ \int_0^b (\tau_{yx})_{y=0} dx = 0 \end{cases}$$

(b) 应用圣维南原理，负面上的应力主矢和主矩与面力主矢和主矩符号相反，面力主矢  $y$  向为正，主矩为负，则

$$\begin{cases} \int_0^b (\sigma_y)_{y=0} dx = -F_N = -\frac{qb}{2} \\ \int_0^b (\sigma_y)_{y=0} x dx = -M = \frac{qb^2}{12} \\ \int_0^b (\tau_{xy})_{y=0} dx = 0 \end{cases}$$

综上所述，在小边界 OA 上，两个问题的三个积分的应力边界条件相同，故这两个问题是静力等效的。

【2-11】检验平面问题中的位移分量是否为正确解答的条件是什么？

【解答】(1) 在区域内用位移表示的平衡微分方程式 (2-18)；

(2) 在  $s_\sigma$  上用位移表示的应力边界条件式 (2-19)；

(3) 在  $s_u$  上的位移边界条件式 (2-14)；

对于平面应变问题，需将  $E$ 、 $\mu$  作相应的变换。

【分析】此问题同时也是按位移求解平面应力问题时，位移分量必须满足的条件。

【2-12】检验平面问题中的应力分量是否为正确解答的条件是什么？

【解答】(1) 在区域 A 内的平衡微分方程式 (2-2)；

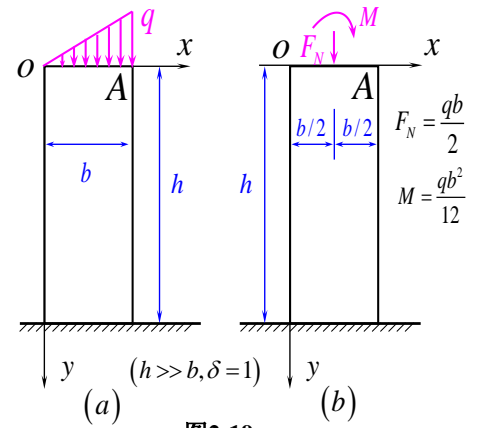


图2-19

- (2) 在区域 A 内用应力表示的相容方程式 (2-21) 或 (2-22);
- (3) 在边界上的应力边界条件式 (2-15), 其中假设只求解全部为应力边界条件的问题;
- (4) 对于多连体, 还需满足位移单值条件。

【分析】此问题同时也是按应力求解平面问题时, 应力分量必须满足的条件。

【补题】检验平面问题中的应变分量是否为正确解答的条件是什么?

【解答】用应变表示的相容方程式 (2-20)

【2-13】检验平面问题中的应力函数是否为正确解答的条件是什么?

- 【解答】(1) 在区域 A 内用应力函数表示的相容方程式 (2-25);
- (2) 在边界 S 上的应力边界条件式 (2-15), 假设全部为应力边界条件;
- (3) 若为多连体, 还需满足位移单值条件。

【分析】此问题同时也是求解应力函数的条件。

【2-14】检验下列应力分量是否是图示问题的解答:

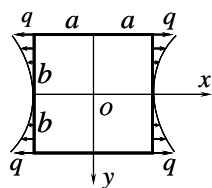


图 2-20

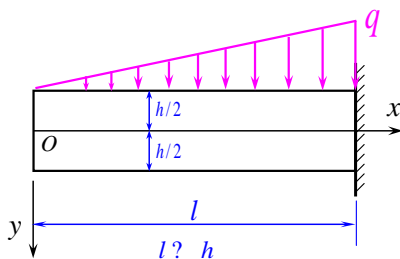


图 2-21

(a) 图 2-20,  $s_x = \frac{y^2}{b^2} q$ ,  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ 。

【解答】在单连体中检验应力分量是否是图示问题的解答, 必须满足: (1) 平衡微分方程 (2-2); (2) 用应力表示的相容方程 (2-21); (3) 应力边界条件 (2-15)。

(1) 将应力分量代入平衡微分方程式, 且  $f_x = f_y = 0$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \text{显然满足}$$

(2) 将应力分量代入用应力表示的相容方程式 (2-21), 有

$$\text{等式左} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{2q}{b^2} \neq 0 = \text{右}$$

应力分量不满足相容方程。

因此, 该组应力分量不是图示问题的解答。

(b) 图 2-21, 由材料力学公式,  $\sigma_x = \frac{M}{I} y$ ,  $\tau_{xy} = \frac{F_s S^*}{bI}$  (取梁的厚度  $b=1$ ), 得出所示问题的

解答:  $\sigma_x = -2q \frac{x^3 y}{lh^3}$ ,  $\tau_{xy} = -\frac{3q}{4} \frac{x^2}{lh^3} (h^2 - 4y^2)$ 。又根据平衡微分方程和边界条件得出:

$$\sigma_y = \frac{3q}{2} \frac{xy}{lh} - 2q \frac{xy^3}{lh^3} - \frac{q}{2} \frac{x}{l}。试导出上述公式, 并检验解答的正确性。$$

【解答】(1) 推导公式

在分布荷载作用下, 梁发生弯曲形变, 梁横截面是宽度为  $l$ , 高为  $h$  的矩形, 其对中性轴 ( $Z$  轴) 的惯性矩  $I = \frac{h^3}{12}$ , 应用截面法可求出任意截面的弯矩方程和剪力方程

$$M(x) = -\frac{q}{6l} x^3, F(x) = -\frac{qx^2}{2l}。$$

所以截面内任意点的正应力和切应力分别为:

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{I} y = -2q \frac{x^3 y}{lh^3}$$

$$\tau_{xy} = \frac{3F_s(x)}{2bh} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) = -\frac{3q}{4} \cdot \frac{x^2}{lh^3} (h^2 - 4y^2)。$$

根据平衡微分方程第二式 (体力不计)。

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

得: 
$$\sigma_y = \frac{3q}{2} \cdot \frac{xy}{lh} - 2q \frac{xy^3}{lh^3} + A$$

根据边界条件  $(\sigma_y)_{y=h/2} = 0$

得 
$$A = -\frac{q}{2} \cdot \frac{x}{l}$$

故 
$$\sigma_y = \frac{3q}{2} \cdot \frac{xy}{lh} - 2q \frac{xy^3}{lh^3} - \frac{q}{2} \cdot \frac{x}{l}$$

将应力分量代入平衡微分方程 (2-2)

第一式:

$$\text{左} = -6q \cdot \frac{x^2 y}{lh^3} + 6q \frac{x^2 y}{lh^3} = 0 = \text{右} \quad \text{满足}$$

第二式 自然满足

将应力分量代入相容方程 (2-23)

$$\text{左} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -12q \cdot \frac{xy}{lh^3} - 12q \cdot \frac{xy}{lh^3} \neq 0 = \text{右}$$

应力分量不满足相容方程。

故，该分量组分量不是图示问题的解答。

**【2-15】** 试证明：在发生最大与最小切应力的面上，正应力的数值都等于两个主应力的平均值。

**【解答】** (1) 确定最大最小切应力发生位置

任意斜面上的切应力为  $\tau_n = lm(\sigma_2 - \sigma_1)$ ，用关系式  $l^2 + m^2 = 1$  消去  $m$ ，得

$$\tau_n = \pm l \sqrt{1 - l^2} (\sigma_2 - \sigma_1) = \pm \sqrt{l^2 - l^4} (\sigma_2 - \sigma_1) = \pm \sqrt{1/4 - (1/2 - l^2)^2} (\sigma_2 - \sigma_1)$$

由上式可见当  $\frac{1}{2} - l^2 = 0$  时，即  $l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$  时， $\tau_n$  为最大或最小，为  $(\tau_n)_{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ 。因此，

切应力的最大，最小值发生在与  $x$  轴及  $y$  轴（即应力主向）成  $45^\circ$  的斜面上。

(2) 求最大，最小切应力作用面上，正应力  $\sigma_n$  的值

任一斜面上的正应力为

$$\sigma_n = l^2 (\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2$$

最大、最小切应力作用面上  $l = \pm \sqrt{1/2}$ ，带入上式，得

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2 = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

证毕。

**【2-16】** 设已求得一点处的应力分量，试求  $\sigma_1, \sigma_2, \alpha_1$

(a)  $\sigma_x = 100, \sigma_y = 50, \tau_{xy} = 10\sqrt{50}$ ; (b)  $\sigma_x = 200, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = -400$ ;

(c)  $\sigma_x = -2000, \sigma_y = 1000, \tau_{xy} = -400$ ; (d)  $\sigma_x = -1000, \sigma_y = -1500, \tau_{xy} = 500$ 。

**【解答】** 由公式 (2-6)

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{及} \quad \tan \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}, \quad \text{得} \quad \alpha_1 = \arctan \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

$$(a) \quad \left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{100 + 50}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{100 - 50}{2} \right)^2 + (10\sqrt{50})^2} = \begin{cases} 150 \\ 0 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \arctan \frac{150 - 100}{10\sqrt{50}} = 35^\circ 16'$$

$$(b) \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{cases} = \frac{200+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{200-0}{2}\right)^2 + (-400)^2} = \begin{cases} 512 \\ -312 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \arctan \frac{512-200}{-400} = \arctan(-0.78) = -37^\circ 57'$$

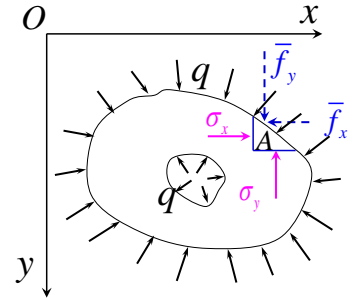
$$(c) \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{cases} = \frac{-2000+1000}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2000+1000}{2}\right)^2 + (-400)^2} = \begin{cases} 1052 \\ -2052 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \arctan \frac{1052+2000}{-400} = \arctan(-7.38) = -82^\circ 32'$$

$$(d) \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{cases} = \frac{-1000-1500}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1000+1500}{2}\right)^2 + 500^2} = \begin{cases} -691 \\ -1809 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \arctan \frac{-691+1000}{500} = \arctan 0.618 = 31^\circ 43'$$

【2-17】设有任意形状的等厚度薄板，体力可以不计，在全部边界上（包括孔口边界上）受有均匀压力  $q$ 。试证  $\sigma_x = \sigma_y = -q$  及  $\tau_{xy} = 0$  能满足平衡微分方程、相容方程和应力边界条件，也能满足位移单值条件，因而就是正确的解答。



【解答】（1）将应力分量  $\sigma_x = \sigma_y = -q, \tau_{xy} = 0$ ，和体力分量

$f_x = f_y = 0$  分别带入平衡微分方程、相容方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \end{cases} \quad (a)$$

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (b)$$

显然满足（a）（b）

（2）对于微小的三角板  $A$ ， $dx, dy$  都为正值，斜边上的方向余弦  $l = \cos(n, x), m = \cos(n, y)$ ，将  $\sigma_x = \sigma_y = -q, \tau_{xy} = 0$ ，代入平面问题的应力边界条件的表达式（2-15），且  $\bar{f}_x = -q \cos(n, x), \bar{f}_y = q \cos(n, y)$ ，则有

$$\sigma_x \cos(n, x) = -q \cos(n, x), \sigma_y \cos(n, y) = -q \cos(n, y)$$

所以  $\sigma_x = -q, \sigma_y = -q$ 。

对于单连体，上述条件就是确定应力的全部条件。

（3）对于多连体，应校核位移单值条件是否满足。

该题为平面应力情况，首先，将应力分量代入物理方程（2-12），得形变分量，

$$\varepsilon_x = \frac{(\mu-1)}{E} q, \varepsilon_y = \frac{(\mu-1)}{E} q, \gamma_{xy} = 0 \quad (d)$$

将（d）式中形变分量代入几何方程（2-8），得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(\mu-1)}{E} q, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(\mu-1)}{E} q, \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (e)$$

前两式积分得到

$$u = \frac{(\mu-1)}{E} qx + f_1(y), v = \frac{(\mu-1)}{E} qy + f_2(x) \quad (f)$$

其中  $f_1(y), f_2(x)$  分别任意的待定函数，可以通过几何方程的第三式求出，将式（f）代入式（e）的第三式，得

$$-\frac{df_1(y)}{dy} = \frac{df_2(x)}{dx}$$

等式左边只是  $y$  的函数，而等式右边只是  $x$  的函数。因此，只可能两边都等于同一个常数  $\omega$ ，于是有

$$\frac{df_1(y)}{dy} = -\omega, \frac{df_2(x)}{dx} = \omega$$

积分后得  $f_1(y) = -\omega y + u_0, f_2(x) = \omega x + v_0$

代入式（f）得位移分量

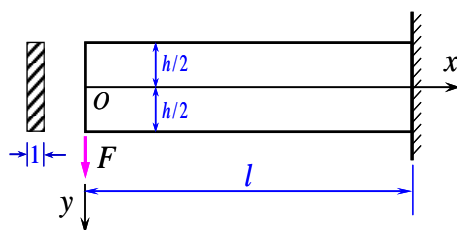
$$\begin{cases} u = \frac{(\mu-1)}{E} qx - \omega y + u_0 \\ v = \frac{(\mu-1)}{E} qy + \omega x + v_0 \end{cases} \quad (g)$$

其中  $u_0, v_0, \omega$  为表示刚体位移量的常数，需由约束条件求得

从式（g）可见，位移是坐标的单值连续函数，满足位移单值条件。因而，应力分量是正确的解答。

**【2-18】**设有矩形截面的悬臂梁，在自由端受有集中荷载  $F$ （图 2-22），体力可以不计。试根据材料力学公式，写出弯应力  $\sigma_y = 0$ ，然后证明这些表达式满足平衡微分方程和相容方程，再说明这些表达式是否就表示正确的解答。

**【解答】**（1）矩形悬臂梁发生弯曲变形，任意横截面上的弯矩方程  $M(x) = -Fx$ ，横截面对中性轴的惯性矩为  $I_z = h^3/12$ ，根据材料力学公式



$$\text{弯应力 } \sigma_x = \frac{M(x)}{I_z} y = -\frac{12F}{h^3} xy;$$

该截面上的剪力为  $F_s(x) = -F$ ，剪应力为

$$\tau_{xy} = \frac{F_s(x)S^*}{bI_z} = \frac{-F}{1 \times (h^3/12)} \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot b \cdot \left[\frac{h/2 - y}{2} + y\right] = -\frac{6F}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

取挤压应力  $\sigma_y = 0$

(2) 将应力分量代入平衡微分方程检验

$$\text{第一式: 左} = -\frac{12F}{h^2} y + \frac{12F}{h^3} y = 0 = \text{右}$$

$$\text{第二式: 左} = 0 + 0 = 0 = \text{右}$$

该应力分量满足平衡微分方程。

(3) 将应力分量代入应力表示的相容方程

$$\text{左} = \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 = \text{右} \quad \text{满足相容方程}$$

(4) 考察边界条件

①在主要边界  $y = \pm h/2$  上，应精确满足应力边界条件(2-15)

	$l$	$m$	$\overline{f_x}$	$\overline{f_y}$
$y = -\frac{h}{2}$ 上	0	-1	0	0
$y = \frac{h}{2}$ 上	0	1	0	0

代入公式 (2-15)，得

$$(\sigma_y)_{y=-h/2} = 0, (\tau_{xy})_{y=-h/2} = 0; (\sigma_y)_{y=h/2} = 0, (\tau_{yx})_{y=h/2} = 0$$

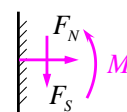
②在次要边界  $x=0$  上，列出三个积分的应力边界条件，代入应力分量主矢主矩

$$\begin{cases} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} dy = 0 = x \text{向面力主矢} \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy = 0 = \text{面力主矩} \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=0} dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left[ -\frac{6F}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) dy \right] = -F = y \text{向面力主矢} \end{cases}$$

满足应力边界条件

③在次要边界上，首先求出固定边面力约束反力，按正方向假设，即面力的主矢、

主矩， $F_N = 0, F_S = -F, M = -Fl$



其次，将应力分量代入应力主矢、主矩表达式，判断是否与面力主矢与主矩等效：



$$\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{12F}{h^3} ly dy = 0 = F_N$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} y dy = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{12F}{h^3} ly^2 dy = -Fl = M$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=l} dy = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{6F}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) dy = -F = F_S$$

满足应力边界条件，因此，它们是该问题的正确解答。

【2-19】试证明，如果体力虽然不是常量，但却是有势的力，即体力分量可以表示为

$f_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, f_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ ，其中  $V$  是势函数，则应力分量亦可用应力函数表示成为

$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + V, \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + V, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$ ，试导出相应的相容方程。

【解答】(1) 将  $f_x, f_y$  带入平衡微分方程 (2-2)

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (a)$$

将 (a) 式变换为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x - V) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (b)$$

为了满足式 (b)，可以取

$$\sigma_x - V = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \sigma_y - V = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

$$\text{即 } \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + V, \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + V, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

(2) 对体力、应力分量  $f_x, f_y, \sigma_x, \sigma_y$  求偏导数，得

$$\begin{cases} \frac{\partial f_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial f_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \end{cases} \quad (c)$$

将 (c) 式代入公式 (2-21) 得平面应力情况下应力函数表示的相容方程

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \mu) \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) \quad (2-21)$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = (1 + \mu) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)$$

整理得：

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = -(1 - \mu) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (d)$$

即平面应力问题中的相容方程为

$$\nabla^4 \Phi = -(1 - \mu) \nabla^2 V$$

将 (c) 式代入公式 (2-22) 或将 (d) 式中的替换为  $\frac{\mu}{1 - \mu}$ ，的平面应变情况下的相容方程：

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = -\frac{1 - 2\mu}{1 - \mu} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (e)$$

即  $\nabla^4 \Phi = -\frac{1 - 2\mu}{1 - \mu} \nabla^2 V$ 。

证毕。

### 第三章 平面问题的直角坐标解答

【3-1】为什么在主要边界（大边界）上必须满足精确的应力边界条件式（2-15），而在小边界上可以应用圣维南原理，用三个积分的应力边界条件（即主矢量、主矩的条件）来代替？如果在主要边界上用三个积分的应力边界条件代替式（2-15），将会发生什么问题？

【解答】弹性力学问题属于数学物理方程中的边值问题，而要使边界条件完全得到满足，往往比较困难。这时，圣维南原理可为简化局部边界上的应力边界条件提供很大的方便。将物体一小部分边界上的面力换成分布不同，但静力等效的面力（主矢、主矩均相同），只影响近处的应力分布，对远处的应力影响可以忽略不计。如果在占边界绝大部分的主要边界上用三个积分的应力边界条件来代替精确的应力边界条件（公式 2-15），就会影响大部分区域的应力分布，会使问题的解答精度不足。

【3-2】如果在某一应力边界问题中，除了一个小边界条件，平衡微分方程和其它的应力边界条件都已满足，试证：在最后的这个小边界上，三个积分的应力边界条件必然是自然满足的，固而不必校核。

【解答】区域内的每一微小单元均满足平衡条件，应力边界条件实质上是边界上微分体的平衡条件，即外力（面力）与内力（应力）的平衡条件。研究对象整体的外力是满足平衡条件的，其它应力边界条件也都满足，那么在最后的这个次要边界上，三个积分的应力边界条件是自然满足的，因而可以不必校核。

【3-3】如果某一应力边界问题中有  $m$  个主要边界和  $n$  个小边界，试问在主要边界和小边界上各应满足什么类型的应力边界条件，各有几个条件？

【解答】在  $m$  个主要边界上，每个边界应有 2 个精确的应力边界条件，公式（2-15），共  $2m$  个；在  $n$  个次要边界上，如果能满足精确应力边界条件，则有  $2n$  个；如果不能满足公式（2-15）的精确应力边界条件，则可以用三个静力等效的积分边界条件来代替 2 个精确应力边界条件，共  $3n$  个。

【3-4】试考察应力函数  $\Phi = ay^3$  在图 3-8 所示的矩形板和坐标系中能解决什么问题(体力不计)？

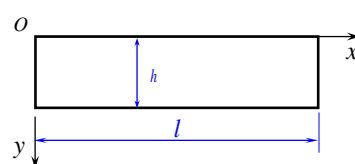


图3-8

【解答】(1)相容条件:

不论系数  $a$  取何值，应力函数  $\Phi = ay^3$  总能满足应力函数表示的相容方程，式(2-25)。

(2)求应力分量

当体力不计，将应力函数  $\Phi$  代入公式(2-24)，得

$$\sigma_x = 6ay, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$$

(3)考察边界条件

上下边界上应力分量均为零，故上下边界上无面力。

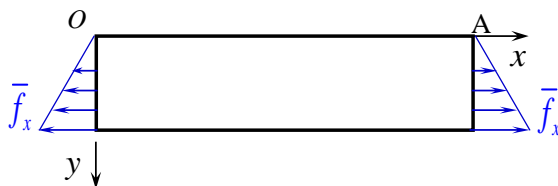
左右边界上：

当  $a > 0$  时，考察  $\sigma_x$  分布情况，注意到  $\tau_{xy} = 0$ ，故  $y$  向无面力

$$\text{左端: } \bar{f}_x = (\sigma_x)_{x=0} = 6ay \quad (0 \leq y \leq h) \quad \bar{f}_y = (\tau_{xy})_{x=0} = 0$$

$$\text{右端: } \bar{f}_x = (\sigma_x)_{x=l} = 6ay \quad (0 \leq y \leq h) \quad \bar{f}_y = (\tau_{xy})_{x=l} = 0$$

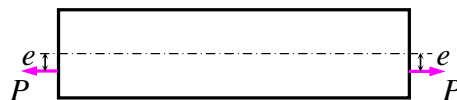
应力分布如图所示，当  $l \gg h$  时应用圣维南原理可以将分布的面力，等效为主矢，主矩



主矢的中心在矩下边界位置。即本题情况下，可解决各种偏心拉伸问题。

偏心距  $e$ ：

因为在 A 点的应力为零。设板宽为  $b$ ，集中荷载  $p$  的偏心距  $e$ ：



$$(\sigma_x)_A = \frac{P}{bh} - \frac{Pe}{bh^2/6} = 0 \Rightarrow e = h/6$$

同理可知，当  $a < 0$  时，可以解决偏心压缩问题。

【3-5】取满足相容方程的应力函数为：(1)

$$\Phi = ax^2y, (2) \Phi = bxy^2, (3) \Phi = cxy^3, \text{ 试求出应力}$$

分量（不计体力），画出图 3-9 所示弹性体边界上的面力分布，并在小边界上表示出面力的主矢量和主矩。

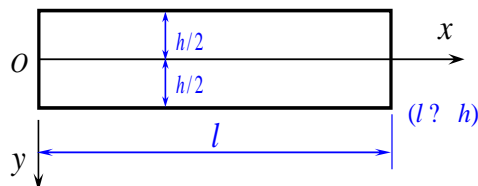


图3-9

【解答】(1) 由应力函数  $\Phi = ax^2y$ ，得应力分量表达式

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = 2ay, \tau_{xy} = \tau_{yx} = -2ax$$

$$\text{考察边界条件, 由公式 (2-15)} \quad \begin{cases} (l\sigma_x + m\tau_{yx})_s = \bar{f}_x(s) \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s = \bar{f}_y(s) \end{cases}$$

①主要边界，上边界  $y = -\frac{h}{2}$  上，面力为

$$\bar{f}_x(y = -\frac{h}{2}) = 2ax \quad \bar{f}_y(y = -\frac{h}{2}) = ah$$

②主要边界，下边界  $y = \frac{h}{2}$ ，面力为

$$\bar{f}_x(y = \frac{h}{2}) = -2ax, \quad \bar{f}_y(y = \frac{h}{2}) = ah$$

③次要边界，左边界  $x=0$  上，面力的主矢，主矩为

$$x \text{ 向主矢: } F_x = -\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} dy = 0$$

$$y \text{ 向主矢: } F_y = -\int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=0} dy = 0$$

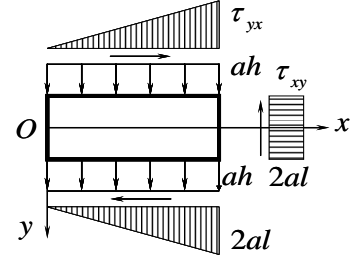
$$\text{主矩: } M = -\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy = 0$$

次要边界，右边界  $x=l$  上，面力的主矢，主矩为

$$x \text{ 向主矢: } F'_x = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy = 0$$

$$y \text{ 向主矢: } F'_y = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=l} dy = \int_{-h/2}^{h/2} (-2al) dy = -2alh$$

$$\text{主矩: } M = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} y dy = 0$$



弹性体边界上面力分布及次要边界上面力的主矢，主矩如图所示

$$(2) \Phi = bxy^2$$

将应力函数代入公式 (2-24)，得应力分量表达式

$$\sigma_x = 2bx, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -2by$$

考察应力边界条件，主要边界,由公式 (2-15) 得

$$\text{在 } y = -\frac{h}{2} \text{ 主要边界, 上边界上, 面力为 } \bar{f}_x\left(y = -\frac{h}{2}\right) = bh, \bar{f}_y\left(y = -\frac{h}{2}\right) = 0$$

$$\text{在 } y = \frac{h}{2}, \text{ 下边界上, 面力为 } \bar{f}_x\left(y = \frac{h}{2}\right) = -bh, \bar{f}_y\left(y = \frac{h}{2}\right) = 0$$

在次要边界上，分布面力可按(2-15)计算，面力的主矢、主矩可通过三个积分边界条件求得：

$$\text{在左边界 } x=0, \text{ 面力分布为 } \bar{f}_x(x=0) = 0, \bar{f}_y(x=0) = 2by$$

面力的主矢、主矩为

$$x \text{ 向主矢: } F_x = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=0} dy = 0$$

$$y \text{ 向主矢: } F_y = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=0} dy = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (-2by) dy = 0$$

$$\text{主矩: } M = -\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy = 0$$

在右边界  $x=l$  上，面力分布为

$$\bar{f}_x(x=l)=2bl, \bar{f}_y(x=l)=-2by$$

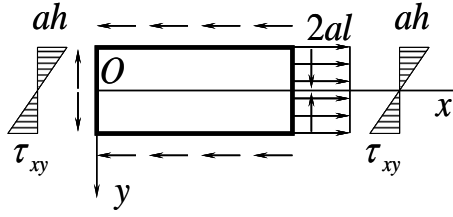
面力的主矢、主矩为

$$x \text{ 向主矢: } F'_x = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy = \int_{-h/2}^{h/2} 2bldy = 2blh$$

$$y \text{ 向主矢: } F'_y = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=l} dy = \int_{-h/2}^{h/2} (-2by) dy = 0$$

$$\text{主矩: } M' = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} y dy = \int_{-h/2}^{h/2} 2bly dy = 0$$

弹性体边界上的面力分布及在次要上面力的主矢和主矩如图所示



$$(3) \Phi = cxy^3$$

将应力函数代入公式 (2-24), 得应力分量表达式

$$\sigma_x = 6cxy, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = -3cy^2$$

考察应力边界条件, 在主要边界上应精确满足式 (2-15)

① 上边界  $y = -\frac{h}{2}$  上, 面力为

$$\bar{f}_x\left(y = -\frac{h}{2}\right) = \frac{3}{4}ch^2, \bar{f}_y\left(y = -\frac{h}{2}\right) = 0$$

② 下边界  $y = \frac{h}{2}$  上, 面力为

$$\bar{f}_x\left(y = \frac{h}{2}\right) = -\frac{3}{4}ch^2, \bar{f}_y\left(y = \frac{h}{2}\right) = 0$$

次要边界上, 分布面力可按 (2-15) 计算, 面力的主矢、主矩可通过三个积分边界求得:

③ 左边界  $x=0$  上, 面力分布为

$$\bar{f}_x(x=0) = 0, \bar{f}_y(x=0) = 3cy^2$$

面力的主矢、主矩为

$$x \text{ 向主矢: } F_x = -\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} dy = 0$$

$$y \text{ 向主矢: } F_y = -\int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=0} dy = -\int_{-h/2}^{h/2} (-3cy^2) dy = \frac{1}{4}ch^3$$

$$\text{主矩: } M = -\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy = 0$$

④右边界  $x=l$  上, 面力分布为

$$\bar{f}_x(x=l) = 6cly, \bar{f}_y(x=l) = -3cy^2$$

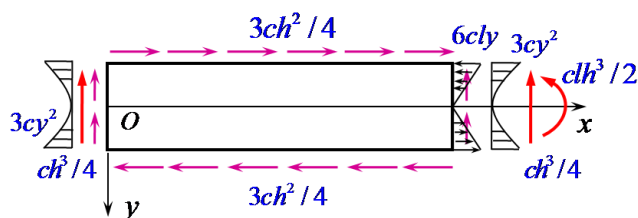
面力的主矢、主矩为

$$x \text{ 向主矢 } F'_x = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy = \int_{-h/2}^{h/2} 6cly dy = 0$$

$$y \text{ 向主矢: } F'_y = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_y)_{x=l} dy = \int_{-h/2}^{h/2} (-3cy^2) dy = -\frac{1}{4}ch^3$$

$$\text{主矩: } M' = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} y dy = \int_{-h/2}^{h/2} 6cly^2 dy = \frac{1}{2}clh^3$$

弹性体边界上的面力分布及在次要边界上面力的主矢和主矩, 如图所示



【3-6】试考察应力函数  $\Phi = \frac{F}{2h^3} xy(3h^2 - 4y^2)$ , 能满足相容方程, 并求出应力分量 (不计体力), 画出图 3-9 所示矩形体边界上的面力分布 (在小边界上画出面力的主矢量和主矩), 指出该应力函数能解决的问题。

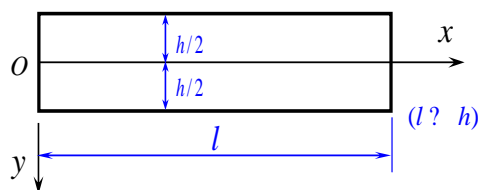


图3-9

【解答】(1) 将应力函数代入相容方程 (2-25)

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0, \text{ 显然满足}$$

(2) 将  $\Phi$  代入式 (2-24), 得应力分量表达式

$$\sigma_x = -\frac{12Fxy}{h^3}, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{3F}{2h} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$$

(3) 由边界形状及应力分量反推边界上的面力:

①在主要边界上 (上下边界) 上,  $y = \pm \frac{h}{2}$ , 应精确满足应力边界条件式 (2-15), 应力

$$(\sigma_y)_{y=\pm h/2} = 0, (\tau_{yx})_{y=\pm h/2} = 0$$

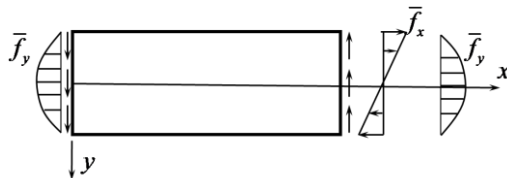
因此, 在主要边界  $y = \pm \frac{h}{2}$  上, 无任何面力, 即  $\bar{f}_x\left(y = \pm \frac{h}{2}\right) = 0, \bar{f}_y\left(y = \pm \frac{h}{2}\right) = 0$

②在  $x=0, x=l$  的次要边界上, 面力分别为:

$$x=0: \bar{f}_x = 0, \bar{f}_y = \frac{3F}{2h} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$$

$$x=l: \bar{f}_x = -\frac{12Fly}{h^3}, \bar{f}_y = -\frac{3F}{2h} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$$

因此，各边界上的面力分布如图所示：



③在  $x=0$ ,  $x=l$  的次要边界上，面力可写成主矢、主矩形式：

$x=0$  上

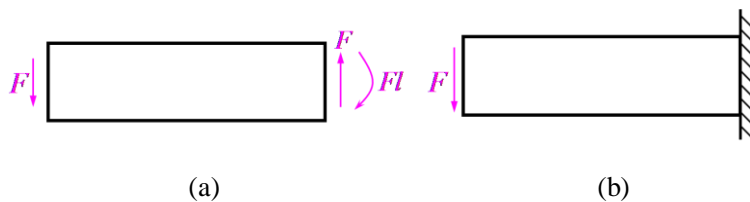
$x=l$  上

$$x\text{向主矢: } F_{N_1} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x dy = 0, \quad F_{N_2} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x dy = 0$$

$$y\text{向主矢: } F_{S_1} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_y dy = F, \quad F_{S_2} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_y dy = -F$$

$$\text{主矩: } M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x y dy = 0, \quad M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x y dy = -Fl$$

因此，可以画出主要边界上的面力，和次要边界上面力的主矢与主矩，如图：



因此，该应力函数可解决悬臂梁在自由端受集中力  $F$  作用的问题。



【3-7】试证  $\Phi = \frac{qx^2}{4}(-4\frac{y^3}{h^3} + 3\frac{y}{h} - 1) + \frac{qy^2}{10}(2\frac{y^3}{h^3} - \frac{y}{h})$  能满足相容方程，并考察它在

图 3-9 所示矩形板和坐标系中能解决什么问题（设矩形板的长度为  $l$ ，深度为  $h$ ，体力不计）。

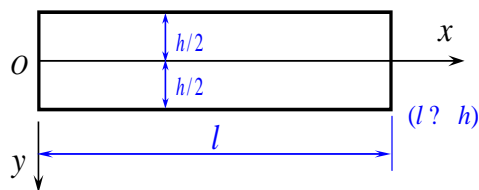


图3-9

【解答】(1)将应力函数  $\Phi$  代入式 (2-25)

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \frac{24qy}{h^3},$$

$$2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 2 \times \frac{-12qy}{h^3} = \frac{-24qy}{h^3}$$

代入 (2-25)，可知应力函数  $\Phi$  满足相容方程。

(2) 将  $\Phi$  代入公式 (2-24)，求应力分量表达式：

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x x = -\frac{6qx^2 y}{h^3} + \frac{4qy^3}{h^3} - \frac{3qy}{5h}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y y = \frac{q}{2} \left( -\frac{4y^3}{h^3} + \frac{3y}{h} - 1 \right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{6qx}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

(3)考察边界条件，由应力分量及边界形状反推面力：

①在主要边界  $y = -\frac{h}{2}$ （上面），应精确满足应力边界条件 (2-15)

$$\bar{f}_x \left( y = -\frac{h}{2} \right) = -(\tau_{yx})_{y=-h/2} = 0, \quad \bar{f}_y \left( y = -\frac{h}{2} \right) = -(\sigma_y)_{y=-h/2} = q$$

在主要边界  $y = \frac{h}{2}$ （下面），也应该满足 (2-15)

$$\bar{f}_x \left( y = \frac{h}{2} \right) = (\tau_{yx})_{y=h/2} = 0, \quad \bar{f}_y \left( y = \frac{h}{2} \right) = (\sigma_y)_{y=h/2} = 0$$

在次要边界  $x=0$  上，分布面力为

$$\bar{f}_x \left( x=0 \right) = -(\sigma_x)_{x=0} = \frac{3qy}{5h} - \frac{4qy^3}{h^3}, \quad \bar{f}_y \left( x=0 \right) = -(\tau_{xy})_{x=0} = 0$$

应用圣维南原理，可写成三个积分的应力边界条件：

$$F_N = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{3qy}{5h} - \frac{4qy^3}{h^3} \right) dy = 0$$

$$F_S = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_y dy = 0$$

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x y dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{3qy}{5h} - \frac{4qy^3}{h^3} \right) y dy = 0$$

④在次要边界  $x=l$  上，分布面力为

$$\bar{f}_x(x=l) = (\sigma_x)_{x=l} = -\frac{6ql^2 y}{h^3} + \frac{4qy^3}{h^3} - \frac{3qy}{5h}$$

$$\bar{f}_y(x=l) = (\tau_{xy})_{x=l} = -\frac{6ql}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

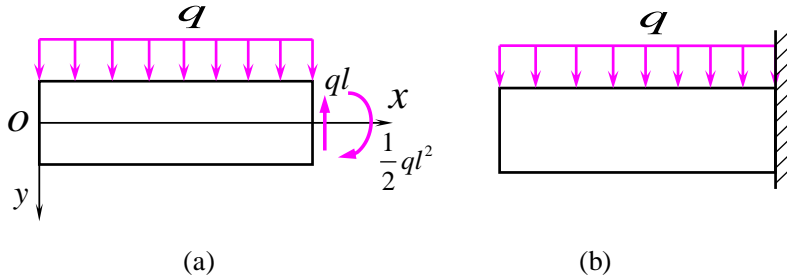
应用圣维南原理，可写成三个积分的应力边界条件：

$$F_N' = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x(x=l) dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left( -\frac{6ql^2 y}{h^3} + \frac{4qy^3}{h^3} - \frac{3qy}{5h} \right) dy = 0$$

$$F_S' = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_y(x=l) dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left[ -\frac{6ql}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right] dy = -ql$$

$$M' = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x(x=l) y dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left( -\frac{6ql^2 y}{h^3} + \frac{4qy^3}{h^3} - \frac{3qy}{5h} \right) y dy = -\frac{1}{2} ql^2$$

综上，可画出主要边界上的面力分布和次要边界上面力的主矢与主矩，如图



因此，此应力函数能解决悬臂梁在上边界受向下均布荷载  $q$  的问题。

**【3-8】** 设有矩形截面的长竖柱，密度为  $\rho$ ，在一边侧面上受均布剪力  $q$ （图 3-10），试求应力分量。

**【解答】** 采用半逆法求解。

由材料力学解答假设应力分量的函数形式。

(1) 假定应力分量的函数形式。

根据材料力学，弯曲应力  $\sigma_y$  主要与截面的弯矩有关，剪应力  $\tau_{xy}$  主要与

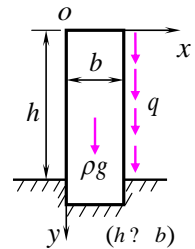


图3-10

截面的剪力有关，而挤压应力  $\sigma_x$  主要与横向荷载有关，本题横向荷载为零，则  $\sigma_x = 0$

(2)推求应力函数的形式

将  $\sigma_x = 0$ ，体力  $f_x = 0, f_y = \rho g$ ，代入公式 (2-24) 有

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x x = 0$$

对  $y$  积分，得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = f(x) \quad (a)$$

$$\Phi = yf(x) + f_1(x) \quad (b)$$

其中  $f(x), f_1(x)$  都是  $x$  的待定函数。

(3) 由相容方程求解应力函数。

将 (b) 式代入相容方程 (2-25)，得

$$y \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + \frac{d^4 f_1(x)}{dx^4} = 0 \quad (c)$$

在区域内应力函数必须满足相容方程，(c) 式为  $y$  的一次方程，相容方程要求它有无数多个根（全竖柱内的  $y$  值都应满足它），可见其系数与自由项都必须为零，即

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} = 0, \frac{d^4 f_1(x)}{dx^4} = 0$$

两个方程要求

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx, f_1(x) = Dx^3 + Ex^2 \quad (d)$$

$f(x)$  中的常数项， $f_1(x)$  中的常数项和一次项已被略去，因为这三项在  $\Phi$  的表达式中成为  $y$  的一次项及常数项，不影响应力分量。将 (d) 式代入 (b) 式，得应力函数

$$\Phi = y(Ax^3 + Bx^2 + Cx) + (Dx^3 + Ex^2) \quad (e)$$

(4) 由应力函数求应力分量

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x x = 0 \quad (f)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y y = 6Axy + 2By + 6Dx + 2E - \rho gy \quad (g)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -3Ax^2 - 2Bx - C \quad (h)$$

(5)考察边界条件

利用边界条件确定待定系数 A、B、C、D、E。

主要边界  $x=0$  上 (左):

$$(\sigma_x)_{x=0} = 0, (\tau_{xy})_{x=0} = 0$$

将 (f), (h) 代入

$$(\sigma_x)_{x=0} = 0, \text{ 自然满足}$$

$$(\tau_{xy})_{x=0} = -C = 0 \quad (i)$$

主要边界  $x=b$  上,

$$(\sigma_x)_{x=b} = 0, \text{ 自然满足}$$

$(\tau_{xy})_{x=b} = q$ , 将 (h) 式代入, 得

$$(\tau_{xy})_{x=b} = -3Ab^2 - 2Bb - C = q \quad (j)$$

在次要边界  $y=0$  上, 应用圣维南原理, 写出三个积分的应力边界条件:

$$\int_0^b (\sigma_y)_{y=0} dx = \int_0^b (6Dx + 2E) dx = 3Db^2 + 2Eb = 0 \quad (k)$$

$$\int_0^b (\sigma_y)_{y=0} x dx = \int_0^b (6Dx + 2E) x dx = 2Db^3 + Eb^2 = 0 \quad (l)$$

$$\int_0^b (\tau_{yx})_{y=0} dx = \int_0^b (-3Ax^2 - 2Bx - C) dx = -Ab^3 - Bb^2 - Cb = 0 \quad (m)$$

由式 (i), (j), (k), (l), (m) 联立求得

$$A = -\frac{q}{b^2}, \quad B = \frac{q}{b}, \quad C = D = E = 0$$

代入公式 (g), (h) 得应力分量

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = \frac{2qx}{b} \left( 1 - 3\frac{x}{b} \right) - \rho gy, \quad \tau_{xy} = \frac{q}{b} x \left( \frac{3}{b} x - 2 \right)$$

【3-9】图 3-11 所示的墙，高度为  $h$ ，宽度为  $b$ ， $h \gg b$ ，在两侧面上受到均布剪力  $q$  的作用，试应用应力函数  $\Phi = Axy + Bx^3y$  求解应力分量。

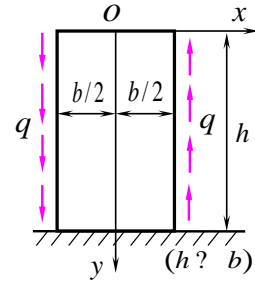


图3-11

【解答】按半逆解法求解。

(1)将应力函数代入相容方程 (2-25) 显然满足。

(2)由公式 (2-24) 求应力分量表达式，体力为零，有

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 6Bxy, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -A - 3Bx^2$$

(3)考察边界条件：

在主要边界  $x = -b/2$  上，精确满足公式 (2-15)

$$(\sigma_x)_{x=-b/2} = 0, (\tau_{xy})_{x=-b/2} = -q$$

第一式自然满足，第二式为

$$-A - \frac{3}{4}Bb^2 = -q \quad (a)$$

②在主要边界  $x = b/2$  上，精确满足式(2-15)

$$(\sigma_x)_{x=b/2} = 0, (\tau_{xy})_{x=b/2} = -q$$

第一式自然满足，第二式为

$$-A - \frac{3}{4}Bb^2 = -q \quad (b)$$

③在次要边界  $y=0$  上，可用圣维南原理，写出三个积分的应力边界条件：

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\sigma_y)_{y=0} dx = 0 \quad \text{满足}$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\sigma_y)_{y=0} x dx = 0 \quad \text{满足}$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\tau_{yx})_{y=0} dx = \int_{-b/2}^{b/2} (-A - 3Bx^2) dx = -Ab - \frac{1}{4}Bb^3 = 0 \quad (c)$$

联立 (a) (c) 得系数

$$A = -\frac{q}{2}, B = \frac{2q}{b^2}$$

代入应力分量表达式，得

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = \frac{12q}{b^2}xy, \tau_{xy} = \frac{q}{2} \left( 1 - 12\frac{x^2}{b^2} \right)$$

【3-10】设单位厚度的悬臂梁在左端受到集中力和力矩作用，体力可以不计， $l \gg h$  (图3-12)，试用应力函数  $\Phi = Axy + By^2 + Cy^3 + Dxy^3$  求解应力分量。

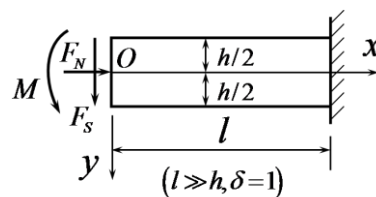


图3-12

【解答】采用半逆解法求解

(1) 将应力函数代入相容方程 (2-25)，显然满足

(2) 由应力函数求应力分量，代入公式(2-24)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = 2B + 6By + 6Dxy \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = -(A + 3Dy^2) \end{array} \right. \quad (a)$$

(3) 考察边界条件

① 主要边界  $y = \pm h/2$  上，应精确满足应力边界条件

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_{y=\pm h/2} &= 0, \quad \text{满足} \\ (\tau_{xy})_{y=\pm h/2} &= 0, \quad \text{得 } A + \frac{3}{4}Dh^2 = 0 \end{aligned} \quad (b)$$

② 在次要边界  $x=0$  上，应用圣维南原理，写出三个积分的应力边界条件

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} dy &= -F_N \Rightarrow \int_{-h/2}^{h/2} (2B + 6Cy) dy = -F_N \Rightarrow B = -\frac{F_N}{2h} \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy &= -M \Rightarrow \int_{-h/2}^{h/2} (2B + 6Cy) y dy = -M \Rightarrow C = -\frac{2M}{h^3} \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=0} dy &= -F_s \Rightarrow \int_{-h/2}^{h/2} [-(A + 3Dy^2)] dy = -F_s \Rightarrow Ah + \frac{1}{4}Dh^3 = F_s \end{aligned} \quad (c)$$

联立方程 (b) (c) 得

$$A = \frac{3F_s}{2h}, D = -\frac{2F_s}{h^3}$$

最后一个次要边界 ( $x=l$ ) 上，在平衡微分方程和上述边界条件均已满足的条件下是必然满足的，故不必在校核。

将系数 A、B、C、D 代入公式 (a)，得应力分量

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = -\frac{F_N}{h} - \frac{12M}{h^3}y - \frac{12F_s}{h^3}xy \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\frac{3F_s}{2h} \left( 1 - 4\frac{y^2}{h^2} \right) \end{array} \right.$$

【3-11】设图 3-13 中的三角形悬臂梁只受重力作用，而梁的

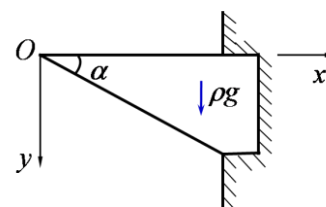


图3-13

密度为  $\rho$ ，试用纯三次式的应力函数求解。

【解答】采用半逆解法求解

(1) 检验应力函数是否满足相容方程 (2-25)

设应力函数  $\Phi = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$ ，不论上式中的系数如何取值，纯三次式的应力函数总能满足相容方程 (2-25)

(2) 由式 (2-24) 求应力分量

由体力分量  $f_x = 0, f_y = \rho g$ ，将应力函数代入公式 (2-24) 得应力分量：

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x = 2Cx + 6Dy \quad (a)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y = 6Ax + 2By - \rho gy \quad (b)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -2Bx - 2Cy \quad (c)$$

(3) 考察边界条件：由应力边界条件确定待定系数。

①对于主要边界  $y = 0$ ，其应力边界条件为：

$$(\sigma_y)_{y=0} = 0, (\tau_{yx})_{y=0} = 0 \quad (d)$$

将式 (d) 代入式 (b), (c)，可得

$$A = 0, B = 0 \quad (e)$$

②对于主要边界  $y = x \tan \alpha$  (斜面上)，应力边界条件：

在斜面上没有面力作用，即  $\bar{f}_x = \bar{f}_y = 0$ ，该斜面外法线方向余弦为， $l = -\sin \alpha$ ，

$m = \cos \alpha$ 。由公式 (2-15)，得应力边界条件

$$\left. \begin{aligned} -\sin \alpha \cdot (\sigma_x)_{y=x \tan \alpha} + \cos \alpha \cdot (\tau_{yx})_{y=x \tan \alpha} &= 0 \\ -\sin \alpha \cdot (\tau_{xy})_{y=x \tan \alpha} + \cos \alpha \cdot (\sigma_y)_{y=x \tan \alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

将式 (a)、(b)、(c)、(e) 代入式 (f)，可解得

$$C = \frac{\rho g}{2} \cot \alpha, D = -\frac{\rho g}{3} \cot^2 \alpha \quad (g)$$

将式 (e)、(g) 代入公式 (a)、(b)、(c)，得应力分量表达式：

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \rho g x \cot \alpha - 2\rho g y \cot^2 \alpha \\ \sigma_y &= -\rho g y \\ \tau_{xy} &= -\rho g y \cot \alpha \end{aligned} \right.$$

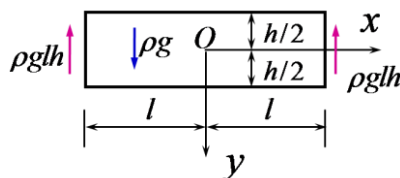
【分析】本题题目已经给定应力函数的函数形式，事实上，也可通过量纲分析法确定应

力函数的形式。

按量纲分析法确定应力函数的形式：三角形悬臂梁内任何一点的应力与  $\alpha$ ,  $x$ ,  $y$  和  $\rho g$  有关。由于应力分量的量纲是  $L^{-1}MT^{-2}$ ，而  $x, y$  的量纲是  $L$ ， $\rho g$  的量纲是  $L^{-1}MT^{-2}$ ，又是量纲一的数量，因此，应力分量的表达式只可能是  $x$  和  $y$  的纯一项式，即应力分量的表达式只可能是  $A\rho gx, B\rho gy$  这两种项的结合，其中  $A, B$  是量纲一的量，只与  $\alpha$  有关。应力函数又比应力分量的长度量纲高二次，即为  $x$  和  $y$  的纯三次式，故可假设应力函数的形式为  $\Phi = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$ 。

【3-12】设图 3-5 中简支梁只受重力作用，而梁的密度为  $\rho$ ，试用 § 3-4 中的应力函数 (e) 求解应力分量，并画出截面上的应力分布图。

【分析】与 § 3-4 节例题相比，本题多了体力分量  $f_x = 0, f_y = \rho g$ 。去除了上边界的面力。依据 § 3-4，应力分量的函数形式是由材料力学解答假设的。



【解答】按半逆解法求解。

(1) 由 § 3-4 可知应力函数的函数形式为

$$\Phi = \frac{x^2}{2}(Ay^3 + By^2 + Cy + D) + x(Ey^3 + Fy^2 + Gy) - \frac{A}{10}y^5 - \frac{B}{6}y^4 + Hy^3 + Ky^2, \text{ 由 § 3-4 可}$$

知， $\Phi$  必然满足相容方程 (2-25)。

(2) 应力分量的表达式：

$$\sigma_x = \frac{x^2}{2}(6Ay + 2B) + x(6Ey + 2F) - 2Ay^3 - 2By^2 + 6Hy + 2K \quad (a)$$

$$\sigma_y = Ay^3 + By^2 + Cy + D - \rho gy \quad (b)$$

$$\tau_{xy} = -x(3Ay^2 + 2By + C) - (3Ey^2 + 2Fy + G) \quad (c)$$

【注】 $\sigma_y$  项多了  $-\rho gy$

这些应力分量是满足平衡微分方程和相容方程的。因此，如果能够适当选择常数  $A, B, \dots, K$ ，使所有的边界条件都被满足，则应力分量式 (a)、(b)、(c) 就是正确的解答。

(3) 考虑对称性

因为  $yz$  面是梁和荷载的对称面，所以应力分布应当对称于  $yz$  面。这样  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  是  $x$  的



偶函数，而  $\tau_{xy}$  是  $x$  的奇函数，于是由式 (a) 和式 (c) 可见

$$E = F = G = 0 \quad (d)$$

(4) 考察边界条件:

①在主要边界  $y = \pm h/2$  上，应精确满足应力边界条件 (2-15)，

$$(\sigma_y)_{y=\pm h/2} = 0, (\tau_{yx})_{y=\pm h/2} = 0$$

将应力分量式 (b)、(c) 代入，并注意到  $E = F = G = 0$ ，可得：

$$\begin{cases} \frac{h^3}{8}A + \frac{h^2}{4}B + \frac{h}{2}C + D - \frac{\rho g}{2}h = 0 \\ -\frac{h^3}{8}A + \frac{h^2}{4}B - \frac{h}{2}C + D + \frac{\rho g}{2}h = 0 \\ -x(\frac{3}{4}Ah^2 + hB + C) = 0 \\ -x(\frac{3}{4}Ah^2 - hB + C) = 0 \end{cases}$$

联立此四个方程，得：

$$A = -\frac{2\rho g}{h^2}, B = 0, C = \frac{3}{2}\rho g, D = 0 \quad (e)$$

将式 (d)、(e) 代入式 (a)、(b)、(c)

$$\sigma_x = -\frac{6\rho g}{h^2}x^2y + \frac{4\rho g}{h^2}y^3 + 6Hy + 2K \quad (f)$$

$$\sigma_y = -\frac{2\rho g}{h^2}y^3 + \frac{\rho g}{2}y \quad (g)$$

$$\tau_{xy} = \frac{6\rho g}{h^2}xy^2 - \frac{3\rho g}{2}x \quad (h)$$

②考察次要边界条件

由于问题的对称性，只需考虑其中的一边，如右边。右边界  $x = l$  上， $\bar{f}_x = 0$ ，不论  $y$  取任何值 ( $-h/2 \leq y \leq h/2$ )，都有  $\sigma_x = 0$ 。由 (f) 式可见，这是不可能的，除非  $\rho, H, K$  均为零。因此，只能用应力  $\sigma_x$  的主矢、主矩为零，即

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy = 0 \quad (i)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} y dy = 0 \quad (j)$$

将 (f) 式代入式 (i) 得

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left( -\frac{6\rho g}{h^2}x^2y + \frac{4\rho g}{h^2}y^3 + 6Hy + 2K \right) dy = 0$$

积分后得  $K = 0$  (k)

将式 (f) 代入式 (i), 得

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left( -\frac{6\rho g}{h^2} l^2 y + \frac{4\rho g}{h^2} y^3 + 6Hy + 2K \right) y dy = 0$$

积分后得

$$H = \rho g \left( \frac{l^2}{h^2} - \frac{1}{10} \right) \quad (1)$$

将 (k)、(1) 代入式 (f), 得

$$\sigma_x = -\frac{6\rho g}{h^2} x^2 y + \frac{4\rho g}{h^2} y^3 + 6\rho g \left( \frac{l^2}{h^2} - \frac{1}{10} \right) y \quad (m)$$

考察右边界上切应力分量  $\tau_{xy}$  错误!未找到引用源。的边界条件:

右边界上  $\bar{f}_y = -\rho g l h$ , 则  $\tau_{xy}$  的主矢为

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=l} dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{6\rho g}{h^2} x y^2 - \frac{3\rho g}{2} x \right)_{x=l} dy = -\rho g l h = \bar{f}_y$$

可知满足应力边界条件。

将式 (g), (h), (m) 略加整理, 得应力分量的最后解答:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{6\rho g}{h^2} x^2 y + \frac{4\rho g}{h^2} y^3 + 6\rho g \left( \frac{l^2}{h^2} - \frac{1}{10} \right) y \\ \sigma_y = -\frac{2\rho g}{h^2} y^3 + \frac{\rho g}{2} y \\ \tau_{xy} = \frac{6\rho g}{h^2} x y^2 - \frac{3\rho g}{2} x \end{cases} \quad (n)$$

(5) 应力分量及应力分布图

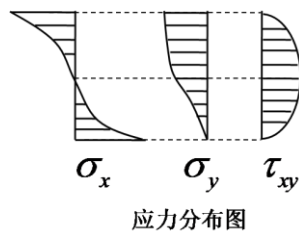
梁截面的宽度取为 1 个单位, 则惯性矩  $I = \frac{h^3}{12}$ , 静矩是  $S = \frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2}$ 。

根据材料力学截面法可求得截面的内力, 可知梁横截面上的弯矩方程和剪力方程分别为

$$M(x) = \rho g h \frac{l^2 - x^2}{2}, F_s(x) = -\rho g h x$$

则式 (n) 可写成:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{M(x)}{I} y + \rho g y \left( \frac{4y^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right) \\ \sigma_y = \frac{\rho g}{2} y \left( 1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{F_s(x) S}{bI} \end{cases}$$



【分析】比较弹性力学解答与材料力学解答，可知，只有切应力  $\tau_{xy}$  完全相同，正应力  $\sigma_x$  中的第一项与材料力学结果相同，第二项为弹性力学提出的修正项； $\sigma_y$  表示纵向纤维间的挤压应力，而材料力学假设为零。对于  $l \gg h$  的浅梁，修正项很小，可忽略不计。

【3-13】图 3-14 所示的悬臂梁，长度为  $l$ ，高度为  $h$ ， $l \gg h$ ，在上边界受均布荷载  $q$ ，

试检验应力函数  $\Phi = Ay^5 + Bx^2y^3 + Cy^3 + Dx^2 + Ex^2y$  能

否成为此问题的解？如可以，试求出应力分量。

【解答】用半逆解法求解。

(1) 相容条件：

将应力函数  $\Phi$  代入相容方程式 (2-25)，得

$$120Ay + 24By = 0$$

要使  $\Phi$  满足相容方程，应使

$$A = -\frac{1}{5}B \quad (a)$$

(2) 求应力分量，代入式 (2-24)

$$\begin{cases} \sigma_x = 20Ay^3 + 6Bx^2y + 6Cy = 20Ay^3 - 30Ax^2y + 6Cy \\ \sigma_y = 2By^3 + 2D + 2Ey = -10Ay^3 + 2D + 2Ey \\ \tau_{xy} = -6Bxy^2 - 2Ex = 30Axy^2 - 2Ex \end{cases} \quad (b)$$

(3) 考察边界条件

①在主要边界  $y = \pm h/2$  上，应精确到满足应力边界条件

$$(\sigma_y)_{y=h/2} = 0, \text{ 即 } -\frac{10}{8}Ah^3 + 2D + Eh = 0 \quad (c)$$

$$(\sigma_y)_{y=-h/2} = -q, \text{ 即 } \frac{10}{8}Ah^3 + 2D - Eh = -q \quad (d)$$

$$(\tau_{yx})_{y=\pm h/2} = 0, \text{ 即 } \frac{30}{4}Axh^2 - 2Ex = 0 \quad (e)$$

联立式 (a)、(c)、(d)、(e)，可得：

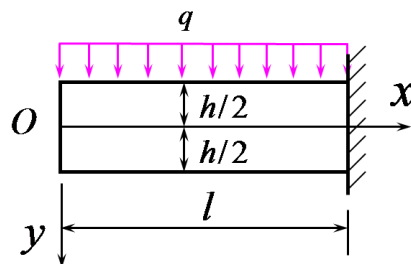


图3-14

$$A = \frac{q}{5h^3}, D = -\frac{q}{4}, E = \frac{3q}{4h}, B = -\frac{q}{h^3} \quad (f)$$

②在次要边界  $x=0$  上，主矢和主矩都为零，应用圣维南原理，写出三个积分的应力边界条件：

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} dy = 0 \quad \text{满足条件}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy = \int_{-h/2}^{h/2} (20Ay^3 + 6Cy) y dy = 0 \Rightarrow \frac{Ah^5}{2} + Ch^3 = 0 \quad (g)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=0} dy = 0 \quad \text{满足}$$

将 A 的值带入 (g)，得

$$C = -\frac{q}{10h} \quad (h)$$

将各系数代入应力分量表达式 (b)，得

$$\begin{cases} \sigma_x = q \frac{y}{h} \left( 4 \frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5} - 6 \frac{x^2}{h^2} \right) \\ \sigma_y = -\frac{q}{2} \left( 1 - 3 \frac{y}{h} + 4 \frac{y^3}{h^3} \right) \\ \tau_{xy} = -\frac{3q}{2} \frac{x}{h} \left( 1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right) \end{cases}$$

【3-14】矩形截面的柱体受到顶部的集中力  $\sqrt{2}F$  和力矩  $M$  的作用（图 3-15），不计体力，试用应力函数  $\Phi = Ay^2 + Bxy + Cxy^3 + Dy^3$  求解其应力分量。

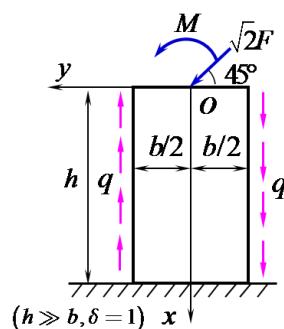


图3-15

【解答】采用半逆解法求解。

(1) 相容条件：

将应力函数代入相容方程(2-25)，显然满足。

(2) 求应力分量：将  $\Phi$  代入 (2-24)

$$\begin{cases} \sigma_x = 2A + 6Cxy + 6Dy \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -B - 3Cy^2 \end{cases} \quad (a)$$

(3) 考察边界条件。

①在主要边界  $y = \pm b/2$  上，应精确满足应力边界条件

$$(\sigma_y)_{y=\pm b/2} = 0 \quad \text{满足}$$

$$(\tau_{xy})_{y=\pm b/2} = -q, \Rightarrow B + \frac{3}{4}Cb^2 = q \quad (b)$$

②在次要边界  $x=0$  上, 可用圣维南原理, 写出三个积分应力边界条件

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\sigma_x)_{x=0} dy = -F \quad (2Ay + 3Dy^2) \Big|_{-b/2}^{b/2} = -F \quad (c)$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy = -M \quad \left( \frac{1}{2}Ay^2 + 2Dy^3 \right) \Big|_{-b/2}^{b/2} = -M \quad (d)$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\tau_{xy})_{x=0} dy = -F \quad (-By - Cy^3) \Big|_{-b/2}^{b/2} = -F \quad (e)$$

联立 (b)、(c)、(d)、(e) 式得

$$A = -\frac{F}{2b}, \quad B = -\frac{1}{2}\left(q - \frac{3F}{b}\right), \quad C = \frac{2}{b^2}\left(q - \frac{F}{b}\right), \quad D = -\frac{2M}{b^3} \quad (f)$$

将各系数 (f) 代入式 (a), 得应力分量解答

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{F}{b} + \frac{12}{b^2}\left(q - \frac{F}{b}\right)xy - \frac{12M}{b^3}y \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \frac{1}{2}\left(q - \frac{3F}{b}\right) - \frac{6}{b^2}\left(q - \frac{F}{b}\right)y^2 \end{cases}$$

【分析】本题题目中原教材给出的坐标轴有误, 无法计算。 $x, y$  坐标互换后可以计算, 但计算结果与题目提示解答几乎完全不同, 又将  $y$  轴调为水平向左为正方向, 才得到提示结果。可见, 在求解问题时, 坐标轴的方向及原点的位置与解答关系密切, 坐标轴不同可得到完全不同的结果。

【3-15】挡水墙的密度为  $\rho_1$ , 厚度为  $b$ (图 3-16), 水的密度为  $\rho_2$ , 试求应力分量。

【解答】(1) 假设应力分量的函数形式。因为在  $y = -b/2$  边界上,  $\sigma_y = 0$ ;  $y = b/2$  边界上,  $\sigma_y = -\rho_2 gx$ , 所以可以假设在区域内  $\sigma_y$  为

$$\sigma_y = xf(y)$$

(2) 推求应力函数的形式。由  $\sigma_y$  推求  $\Phi$  的形式

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = xf(y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{x^2}{2}f(y) + f_1(y)$$

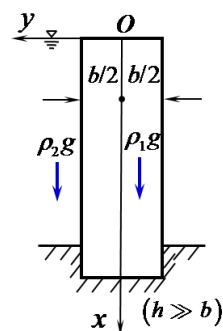


图3-16

$$\Phi = \frac{x^3}{6} f(y) + x f_1(y) + f_2(y)$$

(3) 由相容方程求应力函数。将  $\Phi$  代入  $\nabla^4 \Phi = 0$ ，得

$$\frac{x^3}{6} \frac{d^4 f}{dy^4} + x \frac{d^4 f_1}{dy^4} + \frac{d^4 f_2}{dy^4} + 2x \frac{d^2 f}{dy^2} = 0$$

要使上式在任意的  $x$  处都成立，必须

$$\frac{d^4 f}{dy^4} = 0 \Rightarrow f(y) = Ay^3 + By^2 + Cy + D;$$

$$\frac{d^4 f_1}{dy^4} + 2 \frac{d^2 f}{dy^2} = 0 \Rightarrow f_1(y) = -\frac{A}{10} y^5 - \frac{B}{6} y^4 + Gy^3 + Hy^2 + Iy;$$

$$\frac{d^4 f_2}{dy^4} = 0 \Rightarrow f_2(y) = Ey^3 + Fy^2$$

代入  $\Phi$  即得应力函数的解答，其中已经略去了与应力无关的一次项，得应力函数为：

$$\Phi = \frac{x^3}{6} (Ay^3 + By^2 + Cy + D) + x \left( -\frac{Ay^5}{10} - \frac{By^4}{6} + Gy^3 + Hy^2 + Iy \right) + (Ey^3 + Fy^2)$$

(4) 由应力函数求应力分量，将  $\Phi$  代入公式 (2-24)，注意体力  $f_x = \rho_1 g, f_y = 0$ ，求得应力分量表达式

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x x = x^3 \left( Ay + \frac{B}{3} \right) + x \left( -2Ay^3 - 2By^2 + 6Cy + 2H \right) + \\ &\quad (6Ey + 2F) - \rho_1 g x \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y y = x (Ay^3 + By^2 + Cy + D) \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{x^2}{2} (3Ay^2 + 2By + C) + \left( \frac{A}{2} y^4 + \frac{2B}{3} y^3 - 3Gy^2 - 2Hy - I \right) \end{aligned}$$

(5) 考察边界条件

在主要边界  $y = \pm b/2$  上，应精确满足应力边界条件

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_{y=b/2} &= -\rho_2 g x \Rightarrow x \left( A \frac{b^3}{8} + B \frac{b^2}{4} + C \frac{b}{2} + D \right) = -\rho_2 g x \\ (\sigma_y)_{y=-b/2} &= 0 \Rightarrow x \left( -A \frac{b^3}{8} + B \frac{b^2}{4} - C \frac{b}{2} + D \right) = 0 \\ (\tau_{xy})_{y=\pm b/2} &= 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{2} \left( A \frac{3b^2}{4} \pm Bb + C \right) + \left( A \frac{b^4}{32} \pm B \frac{b^3}{12} - G \frac{3b^2}{4} \mp Hb - I \right) = 0 \end{aligned}$$

由上式得到

$$A \frac{3b^2}{4} \pm Bb + C = 0$$

$$A \frac{b^4}{32} \pm B \frac{b^3}{12} - G \frac{3b^2}{4} \mp Hb - I = 0$$

求解各系数，得

$$A = \frac{2}{b^3} \rho_2 g, B = 0, C = -\frac{3}{2b} \rho_2 g, D = -\frac{1}{2} \rho_2 g, H = 0$$

$$I = \frac{b}{16} \rho_2 g - \frac{3b^2}{4} G \quad (a)$$

在次要边界  $x=0$  上，列出三个积分的应力边界条件

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\sigma_x)_{x=0} dy = 0 \Rightarrow F = 0$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} (\tau_{xy})_{x=0} dy = 0 \Rightarrow I = \frac{b}{80} \rho_2 g - \frac{b^2}{4} G \quad (b)$$

由式(a)、(b)解出

$$I = -\frac{b}{80} \rho_2 g, G = \frac{1}{10b} \rho_2 g$$

将各系数代入应力分量的表达式，得

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{2\rho_2 g}{b^3} x^3 y + \frac{3\rho_2 g}{5b} xy - \frac{4\rho_2 g}{b^3} xy^3 - \rho_1 gx \\ \sigma_y = \rho_2 gx \left( \frac{2y^3}{b^3} - \frac{3y}{2b} - \frac{1}{2} \right) \\ \tau_{xy} = -\rho_2 gx^2 \left( \frac{3y^2}{b^2} - \frac{3}{4b} \right) - \rho_2 gy \left( -\frac{y^3}{b^3} + \frac{3y}{10b} - \frac{b}{80y} \right) \end{cases}$$

**【3-16】** 试分析简支梁受均布荷载时，平截面假设是否成立？

**【解答】** 弹性力学解答和材料力学解答的差别是由于各自的解法不同。简言之，弹性力学的解法是严格考虑区域内的平衡微分方程、几何方程和物理方程。以及在边界上的边界条件而求解的，因而得出的解答较精确。而在材料力学的解法中，没有严格考虑上述条件，因而得出的是近似的解答。例如，材料力学引用了平面截面假设而简化了几何关系，但这个假设对于一般的梁是近似的。所以，严格地说，平截面假设不成立。

【3-17】试证明刚体位移  $u_0, v_0$  和  $\omega_0$  实际上表示弹性体中原点的平移和转动分量，并应

用 §3-3 的解答加以验证（注：微分体的转动分量  $\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ ）

【解答】为了区分原点的转动分量与任意点处的转动分量，定义原点的转动分量为  $\omega_0$ ，任意点处的转动分量为  $\omega$ 。

由 § 3-3 可知，任意点处的平动分量为：

$$\begin{cases} u = \frac{M}{EI} xy - \omega_0 y + u_0 \\ v = -\frac{\mu M}{2EI} y^2 - \frac{M}{2EI} x^2 + \omega_0 x + v_0 \end{cases}$$

则任意点处的转动分量为

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{M}{EI} x + \omega_0 - \frac{M}{EI} x - \omega_0 \right) = -\frac{M}{EI} x + \omega_0$$

因此，原点的平动和转动分量，即  $x=y=0$  时

$$u = u_0, v = v_0, \omega = \omega_0$$

得证。



## 第四章 平面问题的极坐标解答

### 本章学习重点与难点

#### 重点

##### 一、基本方程和基本未知量

对于圆域、圆环域及楔形体等具有弧形边界的弹性体,宜采用极坐标求解。极坐标形式的基本方程和基本未知量各有八个。轴对称问题的基本方程,可由极坐标系中的一般方程简化得到。

#### 基本方程、基本未知量、相容方程

名称	一般情况	轴对称情况
平衡微分方程	$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{\rho} + f_r = 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \rho} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{\rho} + f_\varphi = 0. \end{cases}$	$\frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{\rho} + f_r = 0$
几何方程	$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial \rho}, \quad \epsilon_\varphi = \frac{u_r}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho}. \end{cases}$	$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{du_r}{d\rho}, \\ \epsilon_\varphi = \frac{u_r}{\rho}. \end{cases}$
物理方程 (平面应力)	$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\varphi), \\ \epsilon_\varphi = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \mu \sigma_r), \\ \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{G} \tau_{r\varphi} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{r\varphi}. \end{cases}$	$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\varphi), \\ \epsilon_\varphi = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \mu \sigma_r). \end{cases}$
基本未知量	$\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}, \epsilon_r, \epsilon_\varphi, \gamma_{r\varphi}, u_r, u_\varphi$	$\sigma_r, \sigma_\varphi, \epsilon_r, \epsilon_\varphi, u_r$
相容方程	$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 \Phi = 0$	$\left( \frac{\partial^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{d\rho} \right)^2 \Phi = 0$

## 二、应力分量的坐标变换式

应力分量的坐标变换式

直角坐标转换为极坐标	$\begin{cases} \sigma_\rho = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \sigma_\varphi = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \tau_{\rho\varphi} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{cases}$
极坐标转换为直角坐标	$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_\rho \cos^2 \varphi + \sigma_\varphi \sin^2 \varphi - 2\tau_{\rho\varphi} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \sigma_y = \sigma_\rho \sin^2 \varphi + \sigma_\varphi \cos^2 \varphi + 2\tau_{\rho\varphi} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \tau_{xy} = (\sigma_\rho - \sigma_\varphi) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{\rho\varphi} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{cases}$

## 三、轴对称应力和相应的位移

将相容方程化成  $\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\Phi}{d\rho} \right) \right] \right\} = 0$ , 逐次积分, 得到轴对称应力状态下应力函数的通解

$$\Phi = A \ln \rho + B \rho^2 \ln \rho + C \rho^2 + D.$$

代入教材中式(4-9)得应力分量

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{A}{\rho^2} + B(1 + 2 \ln \rho) + 2C, \\ \sigma_\varphi = -\frac{A}{\rho^2} + B(3 + 2 \ln \rho) + 2C, \\ \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho} = 0. \end{cases}$$

上式所示的应力分量与  $\varphi$  无关, 因而称为平面轴对称应力分布, 适用于两类平面问题。

对应的位移分量

$$\begin{cases} u_\rho = \frac{1}{E} \left[ - (1 + \mu) \frac{A}{\rho} + 2(1 - \mu) B \rho (\ln \rho - 1) + (1 - 3\mu) B \rho + 2(1 - \mu) C \rho \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi, \\ u_\varphi = \frac{4B\rho\varphi}{E} + H\rho - I \sin \varphi + K \cos \varphi. \end{cases}$$

上式所示的位移分量仅适用于平面应力问题(对于平面应变问题可将  $E$  换为  $E/(1-\mu^2)$ ,  $\mu$  换为  $\mu/(1-\mu)$ )。式中的  $H, I, K$  是刚体位移。显然, 在不存在刚体位移或存在轴对称约束时位移分量也是轴对称的(此时,  $u_\varphi = 0, B = H = I = K = 0$ ), 否则与  $\varphi$  有关(即非轴对称的问题)。

在得到极坐标形式的基本方程时, 比较与直角坐标形式的基本方程的异同点, 注意各个物理量在两个坐标系之间的转换关系。

## 四、应力函数的选取

1. 用量纲分析法。
2. 由内力特征确定的方法。

用应力函数  $\Phi(\rho, \varphi)$  求解平面问题时, 注意所研究的弹性体是单连体还是多连体, 若是多连体, 则求得的应力分量除了满足给定的边界条件外, 还需满足位移单值条件。

## 五、判断主要边界和次要边界

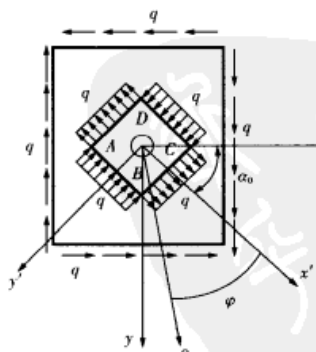
圆环(圆筒)及曲梁的内外弧形边界, 楔形体的两侧面都是主要边界, 需精确满足边界条件。曲梁的端部为次要边界, 可运用圣维南原理使边界条件得到近似满足。此外, 在处理楔形体等问题时, 经常采用离外力作用点较远处取隔离体平衡的方式, 以确定待定系数。

## 难点

- 一、应力分量的坐标变换式。
- 二、轴对称问题的应力分布和相应的位移。
- 三、如何选取应力函数。

## 典型例题讲解

**例 4-1** 如图所示, 矩形薄板在四边受纯剪切力作用, 切应力大小为  $q$ 。如果离板边较远处有一小圆孔, 试求孔边的最大和最小正应力。



例 4-1 图

**【解】** (1) 根据材料力学公式, 求极值应力和最大正应力的方位角  $\alpha_0$ 。

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2},$$

其中  $\sigma_x = \sigma_y = 0, \tau_x = q$ , 得

$$\sigma_{\max} = q, \quad \sigma_{\min} = -q。$$

最大正应力  $\sigma_{\max}$  所在截面的方位角为  $\alpha_0$

$$\tan \alpha_0 = -\frac{\tau_x}{\sigma_{\max} - \sigma_y} = -\frac{q}{q - 0} = -1,$$

所以  $\alpha_0 = -\pi/4$ 。

若在该纯剪切的矩形薄板中,沿与板边成  $\pi/4$  方向截取矩形  $ABCD$ ,则在其边界上便承受集度为  $q$  的拉力和压力,如图所示。这样就把受纯剪切作用的板看作与一对边受拉,另一对边受压的板等效。

(2)取极坐标系如图。应用教材中式(4-18),得矩形薄板  $ABCD$  内的应力分量为

$$\sigma_r = q \cos 2\varphi \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right) \left(1 - 3 \frac{a^2}{\rho^2}\right), \quad (a)$$

$$\sigma_\varphi = -q \cos 2\varphi \left(1 + 3 \frac{a^2}{\rho^2}\right), \quad (b)$$

$$\tau_{r\varphi} = -q \sin 2\varphi \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right) \left(1 + 3 \frac{a^2}{\rho^2}\right). \quad (c)$$

其中  $a$  为小孔的半径,而孔边最大与最小正应力由式(b),在  $\rho=a$  处得到

$$\sigma_\varphi = -q \cos 2\varphi \left(1 + 3 \frac{a^2}{a^2}\right) = -4q \cos 2\varphi,$$

当  $\varphi=0, \pi$  时,孔边最小正应力为  $(\sigma_\varphi)_{\min} = -4q$ ,

当  $\varphi=\pm\pi/2$  时,孔边最大正应力为  $(\sigma_\varphi)_{\max} = 4q$ 。

分析:矩形板  $ABCD$  边界上各点的应力状态与板内无孔时的应力状态相同。也可以应用叠加法,求解薄板的各种较复杂的平面应力(应变)问题。

例 4-2 如图所示楔形体右侧面受均布荷载  $q$  作用,试求应力分量。

【解】(1)楔形体内任一点的应力分量决定于  $q, \rho, \alpha, \varphi$ , 其中  $q$  的量纲为  $NL^{-2}$ , 与应力的量纲相同。因此,各应力分量的表达式只可能取  $Kq$  的形式,而  $K$  是以  $\alpha, \varphi$  表示的无量纲函数,亦即应力表达式中不能出现  $\rho$ ,再由  $\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}$  知,应力函数  $\Phi$  应是  $\varphi$  的函数乘以  $\rho^2$ ,可设

$$\Phi = \rho^2 f(\varphi) \quad (a)$$

将式(a)代入双调和方程

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 \Phi = 0, \\ & \frac{1}{\rho^2} \left[ \frac{d^4 f(\varphi)}{d\varphi^4} + 4 \frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} \right] = 0, \\ & \frac{d^4 f(\varphi)}{d\varphi^4} + 4 \frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} = 0, \end{aligned}$$

得

上式的通解为



例 4-2 图

$$f(\varphi) = A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi + C\varphi + D,$$

将上式代入式(a),得应力函数为

$$\Phi = \rho^2 (A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi + C\varphi + D). \quad (b)$$

(2)应力表达式为

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 2(-A \cos 2\varphi - B \sin 2\varphi + C\varphi + D), \\ \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} = 2(A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi + C\varphi + D), \\ \tau_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial \varphi} = 2A \sin 2\varphi - 2B \cos 2\varphi - C. \end{cases} \quad (c)$$

(3)应力边界条件

$$(\sigma_\varphi)_{\varphi=0} = -q, \quad \text{得 } 2(A + D) = -q; \quad (d)$$

$$(\sigma_\varphi)_{\varphi=\alpha} = 0, \quad \text{得 } A \cos 2\alpha + B \sin 2\alpha + C\alpha + D = 0; \quad (e)$$

$$(\tau_{\rho\varphi})_{\varphi=0} = 0, \quad \text{得 } -2B - C = 0; \quad (f)$$

$$(\tau_{\rho\varphi})_{\varphi=\alpha} = 0, \quad \text{得 } 2A \sin 2\alpha - 2B \cos 2\alpha - C = 0. \quad (g)$$

联立求解式(d)-(g),得各系数

$$\begin{aligned} A &= -\frac{q \tan \alpha}{4(\tan \alpha - \alpha)}, \quad B = \frac{q}{4(\tan \alpha - \alpha)}, \\ C &= -\frac{q}{2(\tan \alpha - \alpha)}, \quad D = -\frac{q(\tan \alpha - 2\alpha)}{4(\tan \alpha - \alpha)}. \end{aligned}$$

将系数代入式(c),得应力分量

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -q + \frac{\tan \alpha (1 + \cos 2\varphi) - (2\varphi + \sin 2\varphi)}{2(\tan \alpha - \alpha)}, \\ \sigma_\varphi = -q + \frac{\tan \alpha (1 - \cos 2\varphi) - (2\varphi - \sin 2\varphi)}{2(\tan \alpha - \alpha)} q, \\ \tau_{\rho\varphi} = \frac{(1 - \cos 2\varphi) - \tan \alpha \sin 2\varphi}{2(\tan \alpha - \alpha)} q. \end{cases} \quad (h)$$

分析:应力函数表达式(a)中不出现 $\alpha$ ,这是因为 $f(\varphi)$ 中包含了 $\alpha$ 角(在应用应力边界条件时, $\varphi=\alpha$ 处 $(\sigma_\varphi)_{\varphi=\alpha}=0, (\tau_{\rho\varphi})_{\varphi=\alpha}=0$ 中体现)。

## 习题全解

4-1 试比较极坐标和直角坐标中的平衡微分方程、几何方程和物理方程,指出哪些项是相似的,哪些项是极坐标中特有的?并说明产生这些项的原因。

【解】(1)极坐标,直角坐标中的平衡微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{\rho} + f_\rho = 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{2\tau_{\rho\varphi}}{\rho} + f_\varphi = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + f_y = 0. \end{cases}$$

将极坐标中的平衡微分方程与直角坐标中的平衡微分方程相比较,第一式中,前两项与直角坐标相似;而 $\frac{\sigma_\rho}{\rho}$ 项是由于正 $\rho$ 面上的面积大于负 $\rho$ 面上的面积而产生的,  $-\frac{\sigma_\varphi}{\rho}$ 是由于正负 $\varphi$ 面上的正应力 $\sigma_\varphi$ 在通过微分体中心的 $\rho$ 方向有投影而引起的。第二式中,前两项也与直角坐标相似;而 $\frac{\tau_{\varphi\rho}}{\rho}$ 是由于正 $\rho$ 面面积大于负 $\rho$ 面而产生的,  $\frac{\tau_{\rho\varphi}}{\rho}$ 是由于正负 $\varphi$ 面上的切应力 $\tau_{\varphi\rho}$ 在通过微分体中心的 $\varphi$ 方向有投影而引起的。由于 $\tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho}$ ,仍可将这两个切应力只作为一个未知函数处理。

(2)极坐标,直角坐标中的几何方程

$$\begin{aligned} \epsilon_\rho &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \epsilon_\varphi = \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \quad \gamma_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho}, \\ \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

将极坐标中的几何方程与直角坐标的几何方程相比较,第二式中的第一项 $\frac{u_\rho}{\rho}$ 是在极坐标中才有的,表示由于径向位移而引起的环形线段的伸长应变;第三式中的 $-\frac{u_\varphi}{\rho}$ 是由于环向位移而引起的环向线段的转角,这项也是在极坐标中才有的。

(3)极坐标,直角坐标中的物理方程

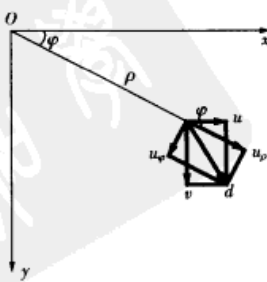
$$\begin{aligned} \epsilon_\rho &= \frac{1}{E}(\sigma_\rho - \mu\sigma_\varphi), \quad \epsilon_\varphi = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \mu\sigma_\rho), \quad \gamma_{\rho\varphi} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{\rho\varphi}, \\ \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}. \end{aligned}$$

极坐标中的物理方程与直角坐标的物理方程是相似的。

4-2 试导出极坐标和直角坐标中位移分量的坐标变换式。

【解】 参看图,位移矢量是服从几何加减运算法则的。

位移矢量为 $d$ ,它在 $(x, y)$ 和 $(\rho, \varphi)$ 坐标系中的分量分别表示为 $(u, v)$ 和 $(u_\rho, u_\varphi)$ ,所以



解 4-2 图

$$\begin{cases} u_\rho = u \cos \varphi + v \sin \varphi, \\ u_\varphi = -u \sin \varphi + v \cos \varphi. \end{cases} \quad (\text{a})$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (\text{b})$$

所以

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \end{bmatrix} \quad (\text{c})$$

若写成一般形式,则位移分量的变换关系为

$$u = u_\rho \cos \varphi - u_\varphi \sin \varphi, \quad v = u_\rho \sin \varphi + u_\varphi \cos \varphi.$$

或

$$u_\rho = u \cos \varphi + v \sin \varphi, \quad u_\varphi = -u \sin \varphi + v \cos \varphi.$$

4-3 在轴对称位移问题中,试导出按位移求解的基本方程。并证明  $u_\rho = A\rho + \frac{B}{\rho}, u_\varphi = 0$  可以满足此基本方程。

【解】 (1) 设  $u_\rho = u_\rho(\rho), u_\varphi = 0$ , 代入几何方程, 教材中式(4-2)得形变分量

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \gamma_{\rho\varphi} = 0. \quad (\text{a})$$

将式(a)代入物理方程, 教材中式(4-3)得用位移表示的应力分量

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \mu \frac{u_\rho}{\rho} \right), \\ \sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \mu \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} \right), \\ \tau_{\rho\varphi} = 0. \end{cases} \quad (\text{b})$$

将式(b)代入平衡微分方程, 教材中式(4-1), 在轴对称问题中, 平衡方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{\rho} = 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{2\tau_{\rho\varphi}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (\text{c})$$

式(c)中的第二式自然满足, 第一式为

$$\frac{d^2 u_\rho}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du_\rho}{d\rho} - \frac{u_\rho}{\rho^2} = 0. \quad (\text{d})$$

上式即为求  $u_\rho$  的基本方程。

(2) 将  $u_\rho = A\rho + \frac{B}{\rho}, u_\varphi = 0$  代入式(d), 很显然满足方程。

4-4 试导出轴对称位移问题中, 按应力求解时的相容方程。

【解】 (1) 在轴对称的情况下,  $\tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho} = 0$ , 只有  $\sigma_\rho, \sigma_\varphi$  为基本未知函数, 且它们仅为  $\rho$  的函数。几何方程, 教材中式(4-2)的前二式成为

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial \rho} = \frac{du_r}{d\rho}, \\ \epsilon_\varphi = \frac{u_r}{\rho} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{u_r}{\rho}. \end{cases} \quad (a)$$

对式(a)中的第二式求导,得

$$\frac{d\epsilon_\varphi}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{du_r}{d\rho} - \frac{u_r}{\rho} \right), \quad (b)$$

将式(a)中的  $\epsilon_r, \epsilon_\varphi$  代入式(b),得

$$\frac{d\epsilon_\varphi}{d\rho} = \frac{1}{\rho} (\epsilon_r - \epsilon_\varphi). \quad (c)$$

(2)将物理方程,教材中式(4-3)、(4-4)中的用应力分量表示的形变分量代入式(c)中,就得到按应力求解时的相容方程,即

平面应力的相容方程:

$$\frac{d}{d\rho} (\sigma_\varphi - \mu\sigma_r) = \frac{(1+\mu)}{\rho} (\sigma_r - \sigma_\varphi).$$

平面应变的相容方程:

$$\frac{d}{d\rho} [(1-\mu)\sigma_\varphi - \mu\sigma_r] = \frac{(\sigma_r - \sigma_\varphi)}{\rho}.$$

4-5 试由一阶导数的坐标变换式,导出二阶导数的坐标变换式[教材 § 4-3 中的(a),(b),(c)]

【解】 一阶导数的坐标变换公式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

二阶导数的变换可以由一阶导数得出

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \\ &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \sin^2 \varphi \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) - 2 \cos \varphi \sin \varphi \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \\ &= \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \cos^2 \varphi \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) + 2 \cos \varphi \sin \varphi \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \right]. \end{aligned}$$

4-6 试由应力分量的坐标变换式

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \varphi + \sigma_\varphi \sin^2 \varphi - 2\tau_{r\varphi} \sin \varphi \cos \varphi,$$

和二阶导数  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$  的坐标变换式[教材 § 4-3 中的式(b)],导出用应力函数  $\Phi(\rho, \varphi)$  表示应力分量  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}$  的表达式[教材 § 4-3 中的式(4-5)].



【解】  $\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ , 比较等式两边的系数可得教材中式(4-5), 即

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \\ \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \\ \tau_{\rho\varphi} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right). \end{cases}$$

4-7 实心圆盘在  $\rho=r$  的周界上受有均布压力  $q$  的作用, 试导出其解答。

【解】 实心圆盘是轴对称的, 可引用轴对称应力解答, 教材中式(4-11), 即

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{A}{\rho^2} + B(1 + 2\ln \rho) + 2C, \\ \sigma_\varphi = -\frac{A}{\rho^2} + B(3 + 2\ln \rho) + 2C, \\ \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho}. \end{cases} \quad (a)$$

首先, 在圆盘的周界( $\rho=r$ )上, 有边界条件  $(\sigma_\rho)_{\rho=r} = -q$ , 由此得

$$\frac{A}{r^2} + B(1 + 2\ln r) + 2C = -q, \quad (b)$$

其次, 在圆盘的圆心, 当  $\rho \rightarrow 0$  时式(a)中  $\sigma_\rho, \sigma_\varphi$  的第一、第二项均趋于无限大, 这是不可能的。按照有限值条件(即, 除了应力集中点以外, 弹性体上的应力应为有限值。), 当  $\rho=0$  时, 必须有  $A=B=0$ 。

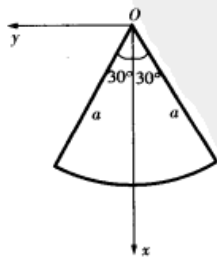
把上述条件代入式(b)中, 得

$$C = -q/2.$$

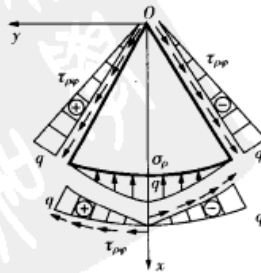
所以, 得应力的解答为

$$\sigma_\rho = \sigma_\varphi = -q, \quad \tau_{\rho\varphi} = 0.$$

4-8 试考察应力函数  $\Phi = \frac{q}{6a} \rho^3 \cos 3\varphi$ , 能解决题 4-8 图所示弹性体的何种受力问题?



题 4-8 图



解 4-8 图

【解】 本题应按逆解法求解。

(1)相容条件:

把应力函数代入相容方程 $\nabla^4 \Phi = 0$ ,显然是满足的。

(2)由应力函数求应力分量表达式

$$\sigma_\rho = -\frac{q\rho}{a} \cos 3\varphi, \quad \sigma_\varphi = \frac{q\rho}{a} \cos 3\varphi, \quad \tau_{\rho\varphi} = \frac{q\rho}{a} \sin 3\varphi.$$

求出边界上的面力

$$\varphi = \pm 30^\circ \text{ 面上, } \sigma_\varphi = 0, \quad \tau_{\rho\varphi} = \pm \frac{q\rho}{a};$$

$$\rho = a \text{ 面上, } \sigma_\rho = -q \cos 3\varphi, \quad \tau_{\rho\varphi} = q \sin 3\varphi.$$

面力分布如解4-8图所示,因此上述应力函数可解决如图所示的受力问题。

**4-9** 半平面体表面上受有均布水平力 $q$ ,试用应力函数 $\Phi = \rho^2 (B \sin 2\varphi + C\varphi)$ 求解应力分量,如题4-9图所示。

**【解】** (1)相容条件:

将应力函数 $\Phi$ 代入相容方程 $\nabla^4 \Phi = 0$ ,显然满足。

(2)由 $\Phi$ 求应力分量表达式

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -2B \sin 2\varphi + 2C\varphi, \\ \sigma_\varphi = 2B \sin 2\varphi + 2C\varphi, \\ \tau_{\rho\varphi} = -2B \cos 2\varphi - C. \end{cases}$$

(3)考察边界条件:注意本题有两个 $\varphi$ 面,即

$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ,分别为 $\pm \varphi$ 面。在 $\pm \varphi$ 面上,应力符

号以正面正向、负面负向为正。因此,有

$$(\sigma_\varphi)_{\varphi=\pm\pi/2} = 0, \quad \text{得 } C = 0;$$

$$(\tau_{\rho\varphi})_{\varphi=\pm\pi/2} = -q, \quad \text{得 } B = -\frac{q}{2}.$$

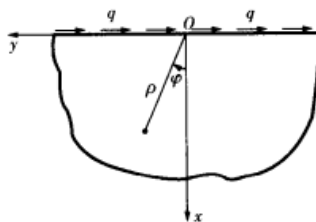
将各系数代入应力分量表达式,得

$$\begin{cases} \sigma_\rho = q \sin 2\varphi, \\ \sigma_\varphi = -q \sin 2\varphi, \\ \tau_{\rho\varphi} = q \cos 2\varphi. \end{cases}$$

**4-10** 试证应力函数 $\Phi = \frac{M}{2\pi} \varphi$ 能满足相容方程,并求出对应的应力分量。若在内半径为 $r$ ,外半径为 $R$ 且厚度为1的圆环中发生上述应力,试求出边界上的面力。

**【解】** (1)极坐标的相容条件:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Phi = 0$$



题4-9图

将应力函数  $\Phi = \frac{M}{2\pi}\varphi$  代入,得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \frac{M}{2\pi}\varphi = \nabla^2 \Phi = 0,$$

而

$$\nabla^4 \Phi = \nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0.$$

应力函数  $\Phi$  满足相容条件。

(2) 由应力函数求应力分量

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0, \\ \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} = 0, \\ \tau_{\rho\varphi} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{\rho^2} \frac{M}{2\pi}. \end{cases}$$

(3) 内、外边界上对应的面力

在内边界( $\rho=r$ )上,  $(\sigma_\rho)_{\rho=r}=0$ ,  $\tau_{\rho\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{M}{2\pi}$ ;

在外边界( $\rho=R$ )上,  $(\sigma_\rho)_{\rho=R}=0$ ,  $\tau_{\rho\varphi} = \frac{1}{R^2} \frac{M}{2\pi}$ 。

4-11 设上题所述的圆环在  $\rho=r$  处被固定, 试求位移分量。

【解】 本题为平面应力的情况, 将应力分量  $\sigma_\rho=0, \sigma_\varphi=0, \tau_{\rho\varphi}=\frac{1}{\rho^2} \frac{M}{2\pi}$  代入极坐标中平面应力问题的物理方程, 教材中式(4-3), 得应变分量表达式

$$\begin{cases} \epsilon_\rho = \frac{1}{E} (\sigma_\rho - \mu \sigma_\varphi) = 0, \\ \epsilon_\varphi = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \mu \sigma_\rho) = 0, \\ \gamma_{\rho\varphi} = \frac{1}{G} \tau_{\rho\varphi} = \frac{M}{2\pi G \rho^2}. \end{cases}$$

再将应变分量代入几何方程, 教材中式(4-2)

$$\epsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad (a)$$

$$\epsilon_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho}, \quad (b)$$

$$\gamma_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho}. \quad (c)$$

根据边界条件, 当  $\rho=r$  时, 边界是固定的。由  $\epsilon_\rho=0$ , 得

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} = 0,$$

所以

$$u_\rho = u_\rho(\varphi).$$

当  $\rho=r$  时, 对任意  $\varphi$  角都有  $u_\rho=0$ , 即  $u_\rho(\varphi)=0$ , 由式(b)可知

$$\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} = 0,$$

因此

$$u_{\varphi} = u_{\varphi}(\rho).$$

再由式(c),可得

$$\gamma_{\rho\varphi} = \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi}}{\rho},$$

根据剪应力与剪应变之间的关系,得

$$\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi}}{\rho} = \frac{M}{2\pi G \rho^2}. \quad (d)$$

为求位移分量  $u_{\varphi}$ , 必须求解式(d), 令  $\rho = e^t$ , 对式(d)进行代换, 得

$$\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \rho} = \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \rho} = \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial t} \frac{1}{e^t},$$

将上式代入式(d), 得

$$\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial t} \frac{1}{e^t} - \frac{u_{\varphi}}{e^t} = \frac{M}{2\pi G e^{2t}},$$

将上式简化, 得

$$\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial t} - u_{\varphi} = \frac{M}{2\pi G} e^{-t}. \quad (e)$$

方程式(d)的通解为

$$u_{\varphi} = u_{\varphi 1} + u_{\varphi 2}$$

设

$$u_{\varphi 1} = A e^t, \quad u_{\varphi 2} = B e^{-t}.$$

代入式(d), 得

$$-B e^{-t} - B e^{-t} = \frac{M}{2\pi G} e^{-t},$$

所以

$$B = -\frac{M}{4\pi G}.$$

由此得

$$u_{\varphi} = A e^t - \frac{M}{4\pi G} e^{-t} = A \rho - \frac{M}{4\pi G \rho},$$

根据边界条件, 当  $\rho = r$  时,  $(u_{\varphi})_{\rho=r} = 0$ , 即

$$(u_{\varphi})_{\rho=r} = A r - \frac{M}{4\pi G r} = 0,$$

所以

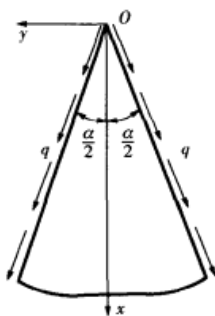
$$A = \frac{M}{4\pi G r^2}.$$

由此得位移分量为

$$u_{\rho} = 0,$$

$$u_{\varphi} = \frac{M}{4\pi G r} \left( \frac{\rho}{r} - \frac{r}{\rho} \right).$$

4-12 楔形体在两侧面上受有均布剪力  $q$ , 如题 4-12 图所示, 试求其应力分量。



题 4-12 图

【解】 (1)应用应力函数  $\Phi = \rho^2 (A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi + C\varphi + D)$ , 进行求解。

由应力函数  $\Phi$  得应力分量

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -2(A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi - C\varphi - D), \\ \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} = 2(A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi + C\varphi + D), \\ \tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = 2A \sin 2\varphi - 2B \cos 2\varphi - C. \end{cases}$$

(2)考察边界条件:根据对称性,得

$$(\sigma_\varphi)_{\alpha/2} = 0; \quad (a)$$

$$(\tau_{r\varphi})_{\alpha/2} = q; \quad (b)$$

$$(\sigma_\varphi)_{-\alpha/2} = 0; \quad (c)$$

$$(\tau_{r\varphi})_{-\alpha/2} = -q. \quad (d)$$

$$\text{由式(a)得} \quad 2A \cos \varphi + 2B \sin \varphi + C\varphi + 2D = 0; \quad (e)$$

$$\text{由式(b)得} \quad 2A \sin \varphi - 2B \cos \varphi - C = q; \quad (f)$$

$$\text{由式(c)得} \quad 2A \cos \varphi - 2B \sin \varphi - C\varphi + 2D = 0; \quad (g)$$

$$\text{由式(d)得} \quad -2A \sin \varphi - 2B \cos \varphi - C = -q. \quad (h)$$

式(e)、(f)、(g)、(h)联立求解,得

$$A = \frac{q}{2 \sin \alpha}, \quad B = C = 0, \quad D = -\frac{q}{2} \cot \alpha.$$

将以上各系数代入应力分量,得

$$\begin{cases} \sigma_r = -q \left( \frac{\cos 2\varphi}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right), \\ \sigma_\varphi = q \left( \frac{\cos 2\varphi}{\sin \alpha} - \cot \alpha \right), \\ \tau_{r\varphi} = q \frac{\sin 2\varphi}{\sin \alpha}. \end{cases}$$

4-13 设有内半径为  $r$ , 外半径为  $R$  的圆筒受内压力  $q$ , 试求内半径和外半径的改变, 并求圆筒厚度的改变。

【解】 本题为轴对称问题, 只有径向位移而无环向位移。当圆筒只受内压力  $q$  的情况下, 取应力分量表达式, 教材中式(4-11), 注意到  $B=0$ 。

内外的应力边界条件要求

$$\begin{aligned} (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=r} &= 0, & (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=R} &= 0; \\ (\sigma_{\rho})_{\rho=r} &= -q, & (\sigma_{\rho})_{\rho=R} &= 0. \end{aligned}$$

由表达式可见, 前两个关于  $\tau_{\rho\varphi}$  的条件是满足的, 而后两个条件要求

$$\begin{cases} \frac{A}{r^2} + 2C = -q, \\ \frac{A}{R^2} + 2C = 0. \end{cases}$$

由上式解得

$$A = -\frac{qr^2R^2}{(R^2-r^2)}, \quad C = \frac{qr^2}{2(R^2-r^2)}. \quad (a)$$

把  $A, B, C$  值代入轴对称应力状态下对应的位移分量, 教材中式(4-12)

$$u_{\rho} = \frac{qr^2}{E(R^2-r^2)} \left[ (1-\mu)\rho + (1+\mu)\frac{R^2}{\rho} \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi, \quad (b)$$

$$u_{\varphi} = H\rho - I \sin \varphi + K \cos \varphi = 0. \quad (c)$$

式(c)中的  $\rho, \varphi$  取任何值等式都成立, 所以各自由项的系数为零

$$H = I = K = 0.$$

所以, 轴对称问题的径向位移式(b)为

$$u_{\rho} = \frac{qr^2}{E(R^2-r^2)} \left[ (1-\mu)\rho + (1+\mu)\frac{R^2}{\rho} \right],$$

而圆筒是属于平面应变问题, 故上式中  $E \rightarrow \frac{E}{1-\mu^2}, \mu \rightarrow \frac{\mu}{1-\mu}$  代替, 则有

$$u_{\rho} = q \frac{\left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\right)R^2 + \left(1 - \frac{\mu}{1-\mu}\right)\rho^2}{\frac{Er}{1-\mu^2} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right)}.$$

此时内径改变为

$$u_r = q \frac{\left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\right)R^2 + \left(1 - \frac{\mu}{1-\mu}\right)r^2}{\frac{Er}{1-\mu^2} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right)} = \frac{qr(1-\mu^2)}{E} \left(\frac{R^2+r^2}{R^2-r^2} + \frac{\mu}{1-\mu}\right),$$

外径改变为

$$u_R = q \frac{\left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\right)R^2 + \left(1 - \frac{\mu}{1-\mu}\right)R^2}{\frac{ER}{1-\mu^2} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right)} = \frac{qr(1-\mu^2)}{E} \cdot \frac{2rR}{R^2-r^2}.$$

圆环厚度的改变为

$$u_R - u_r = -\frac{qr(1-\mu^2)}{E} \left( \frac{R-r}{R+r} + \frac{\mu}{1-\mu} \right).$$

**4-14** 设有一刚体,具有半径为  $R$  的圆柱形孔道,孔道内放置外半径为  $R$  而内半径为  $r$  的圆筒,圆筒受内压力为  $q$ ,试求圆筒的应力。

**【解】** 本题为轴对称问题,故环向位移  $u_\varphi = 0$ ,另外还要考虑位移的单值条件。

(1) 应力分量

引用轴对称应力解答,教材中式(4-11)。取圆筒解答中的系数为  $A, B, C$ ,刚体解答中的系数为  $A', B', C'$ ,由多连体中的位移单值条件,有

$$B = 0, \quad (a)$$

$$B' = 0. \quad (b)$$

现在,取圆筒的应力表达式为

$$\sigma_\rho = \frac{A}{\rho^2} + 2C, \quad \sigma_\varphi = -\frac{A}{\rho^2} + 2C. \quad (c)$$

刚体的应力表达式

$$\sigma'_\rho = \frac{A'}{\rho^2} + 2C', \quad \sigma'_\varphi = -\frac{A'}{\rho^2} + 2C', \quad (d)$$

考虑边界条件和接触条件来求解常数  $A, A', C, C'$  和相应的位移解答。

首先,在圆筒的内面,有边界条件  $(\sigma_\rho)_{\rho=r} = -q$ ,由此得

$$\frac{A}{r^2} + 2C = -q. \quad (e)$$

其次,在远离圆孔处,应当几乎没有应力,于是有

$$(\sigma'_\rho)_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \quad (\sigma'_\varphi)_{\rho \rightarrow \infty} = 0,$$

由此得

$$2C' = 0. \quad (f)$$

再次,圆筒和刚体的接触面上,应当有

$$(\sigma_\rho)_{\rho=R} = (\sigma'_\rho)_{\rho=R}.$$

于是有式(c)及式(d)得

$$\frac{A}{R^2} + 2C = \frac{A'}{R^2} + 2C'. \quad (g)$$

(2) 平面应变问题的位移分量

应用教材中式(4-12)的第一式,稍加简化可以写出圆筒和刚体的径向位移表达式

$$u_\rho = \frac{1+\mu}{E} \left[ 2(1-2\mu)C\rho - \frac{A}{\rho} \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi, \quad (h)$$

$$u'_\rho = 0. \quad (i)$$

刚体的径向位移为零,在接触面上,圆筒与刚体的位移相同且都为零,即

$$(u_\rho)_{\rho=R} = (u'_\rho)_{\rho=R} = 0.$$

将式(h)和式(i)代入,得

$$\frac{1+\mu}{E} \left[ 2(1-2\mu)CR - \frac{A}{R} \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi = 0$$

方程在接触面上的任意点都成立,  $\varphi$  取任何值都成立, 方程两边的自由项必须相等。于是得

$$\frac{1+\mu}{E} \left[ 2(1-2\mu)CR - \frac{A}{R} \right] = 0.$$

简化并利用式(f),得

$$A = 2(1-2\mu)R^2 C. \quad (j)$$

(3) 圆筒的应力

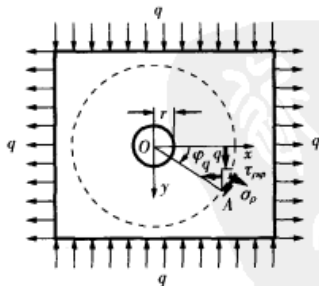
把式(j)代入式(e),得

$$A = -\frac{(1-2\mu)qr^2R^2}{[(1-2\mu)R^2 + r^2]}, \quad C = -\frac{qr^2}{2[(1-2\mu)R^2 + r^2]}.$$

圆筒的应力为

$$\sigma_\rho = \frac{\frac{1-2\mu}{r^2} + \frac{1}{R^2}}{\frac{1-2\mu}{r^2} + \frac{1}{R^2}} q, \quad \sigma_\varphi = \frac{\frac{1-2\mu}{r^2} - \frac{1}{R^2}}{\frac{1-2\mu}{r^2} + \frac{1}{R^2}} q.$$

4-15 在薄板内距边界较远的某一点处, 应力分量为  $\sigma_x = \sigma_y = 0, \tau_{xy} = q$ , 如该处有一小圆孔, 试求孔边的最大正应力。



解 4-15 图

【解】 (1) 求出两个主应力, 即

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm q.$$

原来的问题变为矩形薄板在左右两边受均布拉力  $q$  而在上下两边受均布压力  $q$ , 如图所示。

应力分量  $\sigma_x = q, \sigma_y = -q, \tau_{xy} = 0$  代入坐标变换式, 教材中式(4-7), 得到外



边界上的边界条件

$$(\sigma_\rho)_{\rho=R} = q \cos 2\varphi, \quad (a)$$

$$(\tau_{\rho\varphi})_{\rho=R} = -q \sin 2\varphi. \quad (b)$$

在孔边, 边界条件是

$$(\sigma_\rho)_{\rho=r} = 0, \quad (c)$$

$$(\tau_{\rho\varphi})_{\rho=r} = 0. \quad (d)$$

由边界条件式(a)、(b)、(c)、(d)可见, 用半逆解法时, 可假设  $\sigma_\rho$  为  $\rho$  的某一函数乘以  $\cos 2\varphi$ , 而  $\tau_{\rho\varphi}$  为  $\rho$  的另一函数乘以  $\sin 2\varphi$ 。而

$$\sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\varphi} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right).$$

因此可假设

$$\Phi = f(\rho) \cos 2\varphi. \quad (e)$$

将式(e)代入相容方程, 教材中式(4-6), 得

$$\cos \left[ \frac{d^4 f(\rho)}{d\rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{d^3 f(\rho)}{d\rho^3} - \frac{9}{\rho^2} \frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} + \frac{9}{\rho^3} \frac{df(\rho)}{d\rho} \right] = 0.$$

删去因子  $\cos 2\varphi$  以后, 求解这个常微分方程, 得

$$f(\rho) = A\rho^4 + B\rho^3 + C + \frac{D}{\rho^2},$$

其中  $A, B, C, D$  为待定常数, 代入式(e), 得应力函数

$$\Phi = \cos 2\varphi \left( A\rho^4 + B\rho^2 + C + \frac{D}{\rho^2} \right), \quad (f)$$

由应力函数得应力分量的表达式

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -\cos 2\varphi \left( 2B + \frac{4C}{\rho^2} + \frac{6D}{\rho^4} \right), \\ \sigma_\varphi = \cos 2\varphi \left( 12A\rho^2 + 2B + \frac{6D}{\rho^4} \right), \\ \tau_{\rho\varphi} = \sin 2\varphi \left( 6A\rho^3 + 2B - \frac{2C}{\rho^2} - \frac{6D}{\rho^4} \right). \end{cases}$$

将上式代入应力边界条件

$$\text{由式(a)得} \quad -2B + \frac{4C}{R^2} + \frac{6D}{R^4} = -q; \quad (g)$$

$$\text{由式(b)得} \quad 6AR^2 + 2B - \frac{2C}{R^2} - \frac{6D}{R^4} = -q; \quad (h)$$

$$\text{由式(c)得} \quad 2B + \frac{4C}{r^2} + \frac{6D}{r^4} = 0; \quad (i)$$

$$\text{由式(d)得} \quad 6Ar^2 + 2B - \frac{2C}{r^2} - \frac{6D}{r^4} = 0. \quad (j)$$

联立求解式(g)~(j), 并命  $\frac{r}{R} \rightarrow 0$ , 得

$$A = 0, \quad B = -\frac{q}{2}, \quad C = qr^2, \quad D = -\frac{qr^4}{2}.$$

将各系数代入应力分量的表达式,得

$$\begin{cases} \sigma_\rho = q \cos 2\varphi \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right) \left(1 - 3\frac{r^2}{\rho^2}\right), \\ \sigma_\varphi = -q \cos 2\varphi \left(1 + 3\frac{r^2}{\rho^2}\right), \\ \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho} = -q \sin 2\varphi \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right) \left(1 + 3\frac{r^2}{\rho^2}\right). \end{cases}$$

沿着孔边  $\rho=r$ , 环向正应力是

$$\sigma_\varphi = -4q \cos 2\varphi.$$

最大环向正应力为  $(\sigma_\varphi)_{\max} = 4q$ 。

**4-16** 同习题 4-15, 但  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = q$ 。

**【解】** (1) 求出两个主应力, 即

$$\begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} 2q, \\ 0. \end{cases}$$

(2) 原来的问题变为矩形薄板只在左右两边受均布拉力  $2q$ , 如解 4-16 图

(a) 所示。可以将荷载分解为两部分: 第一部分是四边的均布拉力  $\frac{q_1 + q_2}{2} =$

$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = q$ , 如解 4-16 图 (b); 第二部分是左右两边的均布拉力  $\frac{q_1 - q_2}{2} =$

$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = q$  和上下两边的均布压力  $\frac{q_1 - q_2}{2} = q$ , 如解 4-16 图 (c)。对于第一部

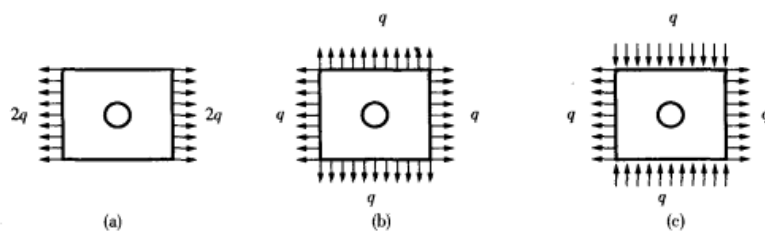
分荷载, 可应用解答, 教材中式 (4-17); 对于第二部分解答, 可应用解答, 教材中式 (4-18)。将两部分解答叠加, 即得原荷载作用下的应力分量 (基尔斯的解答)。

$$\begin{cases} \sigma_\rho = q \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right) + q \cos 2\varphi \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right) \left(1 - 3\frac{r^2}{\rho^2}\right), \\ \sigma_\varphi = q \left(1 + \frac{r^2}{\rho^2}\right) - q \cos 2\varphi \left(1 + 3\frac{r^2}{\rho^2}\right), \\ \tau_{\rho\varphi} = -q \sin 2\varphi \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right) \left(1 + 3\frac{r^2}{\rho^2}\right). \end{cases}$$

沿着孔边  $\rho=r$ , 环向正应力是

$$\sigma_\varphi = 2q - 4q \cos 2\varphi.$$

最大环向正应力为  $(\sigma_\varphi)_{\max} = 6q$ 。



解 4-16 图

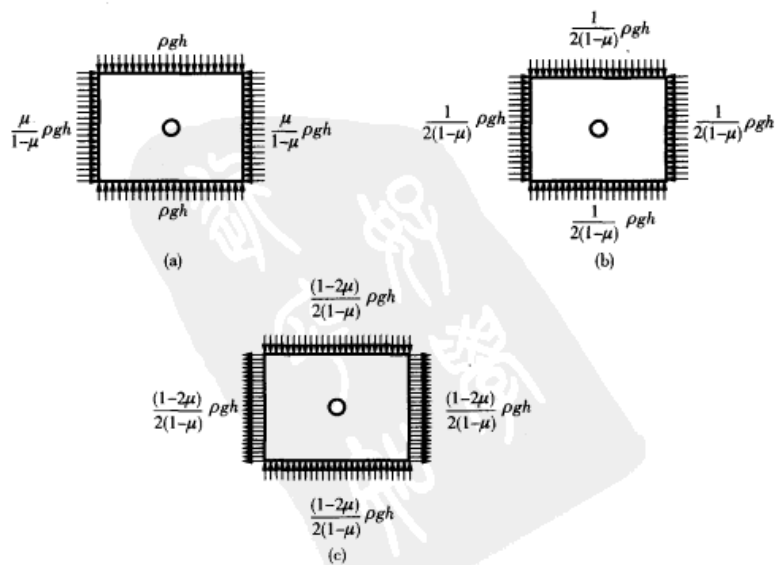
4-17 在距表面为  $h$  的弹性地基中,挖一直径为  $d$  的水平圆形孔道,设  $h \gg d$ ,弹性地基的密度为  $\rho$ ,弹性模量为  $E$ ,泊松比为  $\mu$ 。试求小圆孔附近的最大、最小应力。

【解】(1)距地表为  $h$  处,无孔时的铅直应力  $\sigma_z = -\rho gh$ ,由水平向条件  $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$ ,可得

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\mu}{1-\mu}\rho gh。$$

$x$  向为水平圆形孔道的轴向,在横向  $y, z$  平面的主应力为

$$\sigma_1 = -\rho gh, \quad \sigma_3 = -\frac{\mu}{1-\mu}\rho gh。$$



解 4-17 图

(2) 原来的问题变为管道在左右两边受均布压力  $\frac{\mu}{1-\mu}\rho gh$ , 在上下两边受均布压力  $-\rho gh$ , 如解 4-17 图(a)。可以将荷载分解为两部分: 第一部分是四边的均布压力  $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\rho gh}{2(1-\mu)}$ , 如解 4-17 图(b)。第二部分是左右两边的均布拉力  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{(1-2\mu)\rho gh}{2(1-\mu)}$  和上下两边的均布压力  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{(1-2\mu)\rho gh}{2(1-\mu)}$ , 如解 4-17 图(c)。对于第一部分荷载, 可应用解答, 教材中式(4-17); 对于第二部分解答, 可应用解答, 教材中式(4-18)。将两部分解答叠加, 即得原荷载作用下的应力分量(基尔斯的解答)。

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{\rho gh}{2(1-\mu)}\left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right) + \frac{(1-2\mu)\rho gh}{2(1-\mu)}\cos 2\varphi\left(1 - 3\frac{r^2}{\rho^2}\right), \\ \sigma_\varphi = -\frac{\rho gh}{2(1-\mu)}\left(1 + \frac{r^2}{\rho^2}\right) - \frac{(1-2\mu)\rho gh}{2(1-\mu)}\cos 2\varphi\left(1 + 3\frac{r^2}{\rho^2}\right), \\ \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = -\frac{(1-2\mu)\rho gh}{2(1-\mu)}\sin 2\varphi\left(1 - 3\frac{r^2}{\rho^2}\right). \end{cases}$$

沿着孔边  $\rho = r$ , 环向正应力是

$$\sigma_\varphi = -\frac{\rho gh}{(1-\mu)} - \frac{2(1-2\mu)\rho gh}{(1-\mu)}\cos 2\varphi.$$

最大环向正应力为

$$(\sigma_\varphi)_{\max} = \frac{1-4\mu}{1-\mu}\rho gh, \quad (\sigma_\varphi)_{\min} = -\frac{3-4\mu}{1-\mu}\rho gh.$$

4-18 设半平面体在直边界上受有集中力偶, 单位宽度上力偶矩为  $M$ , 如图 4-18 所示, 试求应力分量。

【解】应用半逆解法求解。

(1) 按量纲分析方法, 单位宽度上的力偶矩与力的量纲相同。应力应与  $M, \rho, \varphi$  有关, 由于应力的量纲是单位面积上的力, 即  $L^{-1}MT^{-2}$ , 应力只能以  $M/\rho^2$  形势组合。

(2)  $\Phi$  应比应力的长度量纲高二次幂, 可假设  $\Phi = \Phi(\rho)$ 。

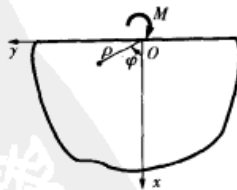
(3) 将  $\Phi$  代入相容方程, 得

$$\frac{1}{\rho^4}\left(\frac{d^4\Phi}{d\varphi^4} + 4\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\right) = 0.$$

删去因子  $\frac{1}{\rho^4}$ , 得一个关于  $\Phi(\rho)$  的常微分方程。令其解为  $\Phi = e^{\lambda\varphi}$ , 代入上式, 可得到一个关于  $\lambda$  的特征方程,

$$\lambda^2(\lambda^2 + 4) = 0, \quad (a)$$

其解为  $\lambda = 2i, -2i, 0, 0$ 。于是得到  $\Phi$  的四个解  $ae^{2i\varphi}, be^{-2i\varphi}, c\varphi, d$ ; 前两项又



题 4-18 图

可以组合为正弦、余弦函数。由此得

$$\Phi = A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi + C\varphi + D. \quad (b)$$

本题中结构对称于  $\varphi=0$  的  $x$  轴, 而  $M$  是反对称荷载, 因此, 应力应反对称于  $x$  轴, 为  $\varphi$  的奇函数, 从而得  $A=D=0$ 。

$$\Phi = B \sin 2\varphi + C\varphi. \quad (c)$$

(4) 由应力函数  $\Phi$  得应力分量的表达式

$$\begin{cases} \sigma_{\rho} = -\frac{1}{\rho^2} 4B \sin 2\varphi, \\ \sigma_{\varphi} = 0, \\ \tau_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho^2} (2B \cos 2\varphi + C). \end{cases}$$

(5) 考察边界条件。由于原点  $O$  有集中力偶作用, 应分别考察大边界上的条件和原点附近的条件。

在  $\rho \neq 0, \varphi = \pm \pi/2$  的边界上, 有

$$(\sigma_{\varphi})_{\rho \neq 0, \varphi = \pm \pi/2} = 0, \quad (\tau_{\rho\varphi})_{\rho \neq 0, \varphi = \pm \pi/2} = 0.$$

前一式自然满足, 而第二式成为

$$2B = C. \quad (d)$$

为了考虑原点  $O$  附近有集中力偶的作用, 取出以  $O$  为中心,  $\rho$  为半径的一小部分脱离体, 并列出其平衡条件

$$\begin{cases} \sum F_x = 0, \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(\sigma_{\rho})_{\rho=\rho} \cos \varphi \rho d\varphi - (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=\rho} \sin \varphi \rho d\varphi] = 0, \\ \sum F_y = 0, \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(\sigma_{\rho})_{\rho=\rho} \sin \varphi \rho d\varphi + (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=\rho} \cos \varphi \rho d\varphi] = 0, \\ \sum M_o = 0, \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=\rho} \rho^2 d\varphi + M = 0. \end{cases}$$

上式中前两式自然满足, 而第三式成为

$$2B = -\frac{M}{\pi}, \quad (e)$$

将式(e)代入式(d), 得

$$C = -\frac{M}{\pi}.$$

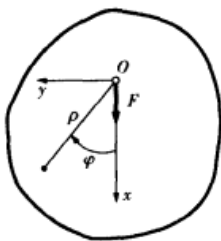
将各系数代入应力分量的表达式, 得

$$\begin{cases} \sigma_{\rho} = \frac{2M}{\pi} \frac{\sin 2\varphi}{\rho^2}, \\ \sigma_{\varphi} = 0, \\ \tau_{\rho\varphi} = -\frac{M}{\pi} \frac{\cos 2\varphi + 1}{\rho^2}. \end{cases}$$

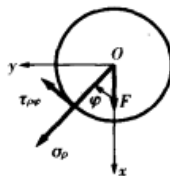
4-19 设有厚度为 1 的无限大薄板, 在板内小孔中受集中力  $F$ , 如题 4-19 图

所示,试用如下的应力函数求解:

$$\Phi = A\rho \ln \rho \cos \varphi + B\rho \varphi \sin \varphi.$$



题 4-19 图



解 4-19 图

【解】(1)相容条件:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Phi &= \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Phi = \frac{2A}{\rho} \cos \varphi + \frac{2B}{\rho} \cos \varphi, \\ \nabla^2 \nabla^2 \Phi &= \frac{4(A+B)}{\rho^3} \cos \varphi - \frac{2(A+B)}{\rho^3} \cos \varphi - \frac{2(A+B)}{\rho^3} \cos \varphi = 0.\end{aligned}$$

可见,满足相容方程,可作为应力函数解题。

应力分量表达式

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\rho} (A + 2B) \cos \varphi, \\ \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} = \frac{A}{\rho} \cos \varphi, \\ \tau_{\rho\varphi} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = \frac{A}{\rho} \sin \varphi. \end{cases}$$

(2)任取一半径为  $\rho$  的圆板为隔离体,如解 4-19 图所示,由竖直方向力的平衡条件求出常数  $B$ 。

$$\int_0^{2\pi} [\sigma_\rho \cos \varphi - \tau_{\rho\varphi} \sin \varphi] \rho d\varphi + F = 0,$$

将应力分量代入上式,化简得

$$A \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi + B \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = -F, \quad (a)$$

解得

$$B = -F/2\pi.$$

其余两个平衡条件自然满足,常数  $A$  则由位移单值条件确定,应用物理方程和几何方程可得

$$\begin{aligned}\epsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} &= \frac{1}{E} (\sigma_\rho - \mu \sigma_\varphi) = \frac{1}{E\rho} [(1-\mu)A + 2B] \cos \varphi, \\ u_\rho &= \frac{\ln \rho}{E} [(1-\mu)A + 2B] \cos \varphi + f(\varphi).\end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{\varphi} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{u_{\rho}}{\rho} = \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi} - \mu \sigma_{\rho}) = \frac{1}{E \rho} [(1-\mu)A - 2\mu B], \\ u_{\varphi} &= \frac{\sin \varphi}{E} \{ [(1-\mu)A - 2\mu B] - \ln \rho [(1-\mu)A + 2B] \} - \int f(\varphi) d\varphi + f_1(\rho).\end{aligned}\quad (c)$$

$$\gamma_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\rho}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi}}{\rho} = \frac{1}{G \rho} A \sin \varphi. \quad (d)$$

将式(b)、(c)代入式(d)后得

$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi} - \frac{2}{E} [2A + (1-\mu)B] \sin \varphi + \int f(\varphi) d\varphi = -\rho \frac{df_1(\rho)}{d\rho} + f_1(\rho), \quad (e)$$

式(e)等号的左边和右边分别为  $\varphi, \rho$  的函数, 为使等式成立, 等式两边分别与一常数  $L$  相等, 即

$$\begin{aligned}\rho \frac{df_1(\rho)}{d\rho} - f_1(\rho) &= L, \quad \frac{df_1(\rho)}{f_1(\rho) - L} = \frac{d\rho}{\rho}, \quad f_1(\rho) = H\rho + L, \\ \frac{df(\varphi)}{d\varphi} - \frac{2}{E} [2A + (1-\mu)B] \sin \varphi + \int f(\varphi) d\varphi &= L,\end{aligned}\quad (f)$$

式(f)对  $\varphi$  求一阶导数, 得

$$\frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} - \frac{2}{E} [2A + (1-\mu)B] \cos \varphi + f(\varphi) = 0, \quad (g)$$

式(g)的通解为

$$f(\varphi) = I \cos \varphi + K \sin \varphi + \frac{2A + (1-\mu)B}{E} \varphi \sin \varphi, \quad (h)$$

式(h)代入式(f)后, 得

$$-\int f(\varphi) d\varphi = -I \sin \varphi + K \cos \varphi + \frac{1}{E} [2A + (1-\mu)B] (-\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) - L, \quad (i)$$

将式(i)代入式(c)可得环向位移表达式

$$\begin{aligned}u_{\varphi} &= \frac{1}{E} [(1-\mu)A - 2\mu B] \sin \varphi - \frac{1}{E} [(1-\mu)A + 2B] \ln \rho \sin \varphi \\ &\quad - I \sin \varphi + K \cos \varphi + \frac{1}{E} [2A + (1-\mu)B] (-\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) + H\rho.\end{aligned}\quad (j)$$

其中的常数  $H, I, K$  代表刚体的位移分量。无限大薄板在板内小孔中受集中力, 可认为各点位移是由形变引起的, 故  $H = I = K = 0$ 。

(3) 由位移单植条件确定  $A$

$$(u_{\varphi})_{\varphi=0} = (u_{\varphi})_{\varphi=2\pi}, \quad \text{得} \frac{1}{E} [2A + (1-\mu)B] \varphi \cos \varphi = 0,$$

$$2A + (1-\mu)B = 0,$$

$$\text{得} \quad A = \frac{\mu-1}{2} B = \frac{F(1-\mu)}{4\pi}.$$

将各系数代入应力分量的表达式,得

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{F}{4\pi\rho}(3+\mu)\cos\varphi, \\ \sigma_\varphi = \frac{F}{4\pi\rho}(1-\mu)\cos\varphi, \\ \tau_{r\varphi} = \frac{F}{4\pi\rho}(1-\mu)\sin\varphi. \end{cases}$$





## 第七章 空间问题的基本理论

### 本章学习重点与难点

#### 重点

##### 一、基本方程、基本未知量

空间问题基本方程及基本未知量各有 15 个。

名称	基本方程	基本未知量
平衡微分方程	$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + f_z = 0. \end{cases}$	应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$
几何方程	$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$	应变分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$
物理方程	$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}, \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}. \end{cases}$	位移分量 $u, v, w$

##### 二、边界条件

空间问题的三类边界条件。其中,  $S_\sigma$  表示物体上受面力作用的边界面;  $S_u$  表示物体的给定约束位移的边界。  $l, m, n$  为边界面的方向余弦。

应力边界条件	位移边界条件	混合边界条件
在 $S_\sigma$ 上 $\begin{cases} (l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx})_i = \bar{f}_x, \\ (m\sigma_y + n\tau_{xy} + l\tau_{xy})_i = \bar{f}_y, \\ (n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz})_i = \bar{f}_z. \end{cases}$	在 $S_u$ 上 $\begin{cases} (u)_i = \bar{u}, \\ (v)_i = \bar{v}, \\ (w)_i = \bar{w}. \end{cases}$	在 $S_\sigma$ 上; 在 $S_u$ 上

### 三、一点的应力状态

$p_x, p_y, p_z$  为过一点任意斜截面上的全应力在坐标轴上的投影;  $\sigma_n, \tau_n$  则是全应力在斜截面法向、切向的投影分量。以上投影分量可由三个坐标面上六个独立的应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$  确定。

全应力在坐标轴上的投影	全应力在斜截面上的法向、切向投影
$\begin{cases} p_x = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}, \\ p_y = m\sigma_y + n\tau_{xy} + l\tau_{xy}, \\ p_z = n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz}. \end{cases}$	$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= l^2\sigma_x^2 + m^2\sigma_y^2 + n^2\sigma_z^2 + 2lm\tau_{xy} + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{xz}, \\ \tau_n^2 &= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_n^2. \end{aligned}$

### 四、主应力, 最大与最小的应力

1. 经过任一点  $P$  的剪应力等于零的斜截面称为应力主面, 其法线方向称为应力主方向, 该方向的正应力称为主应力, 用  $\sigma$  表示。有

$$p_x = l\sigma, \quad p_y = m\sigma, \quad p_z = n\sigma.$$

#### 2. 主应力的求解方程

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0, \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0, \\ \tau_{xy}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0. \end{cases}$$

方向余弦的关系式为  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , 关于  $l, m, n$  的三个齐次线性方程, 系数行列式应该等于零, 展开得  $\sigma$  的三次方程。

$$\sigma^3 - \Theta_1\sigma^2 + \Theta_2\sigma - \Theta_3 = 0.$$

方程有三个实根:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  是过任一点的三个垂直应力主面上的三个主应力。系数  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  分别是应力状态的第一、二、三不变量:

$$\Theta_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$\Theta_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2,$$

$$\Theta_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy}.$$

#### 3. 最大、最小应力

三个主应力中, 代数值最大的就是该点的最大正应力, 代数值最小的就是该点的最小正应力。

最大、最小的切应力为  $\pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ , 其中  $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$ 。

#### 五、轴对称问题的基本方程

在空间的轴对称问题中共有十个基本方程(一般问题中有十五个)

平衡微分方程	几何方程	物理方程
$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + f_r = 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + f_z = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \epsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}, \\ \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}. \end{cases}$	$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_\varphi + \sigma_z)], \\ \epsilon_\varphi = \frac{1}{E} [\sigma_\varphi - \mu(\sigma_r + \sigma_z)], \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\varphi)], \\ \gamma_{rz} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{rz}. \end{cases}$

#### 难点

- 一、对主应力、主平面、主方向和应力状态不变量概念的明确掌握。
- 二、空间非轴对称问题基本方程的推导。

### 典型例题讲解

**例 7-1** 试求对应于无应力状态, 即  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$  时的位移分量。

**【解】** 将已知条件代入几何方程, 教材中式(7-8), 得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \frac{\partial v}{\partial y} = 0, & \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (a)$$

对式(a)的前三个式子积分, 得

$$u = f_1(y, z), \quad v = f_2(x, z), \quad w = f_3(x, y). \quad (b)$$

$f_1, f_2, f_3$  为任意函数, 代入式(a)的后三式, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial f_2(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial f_3(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x, z)}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial f_3(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f_1(y, z)}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (c)$$

为求函数  $f_1(y, z)$ , 将上式中的第一、三式分别对  $y, z$  求一阶导。因此, 可从微分方程中消去  $f_2(x, z), f_3(x, y)$ , 得

$$\frac{\partial^2 f_1(y, z)}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_1(y, z)}{\partial z^2} = 0, \quad (\text{d})$$

$f_1(y, z)$  中应含有常数项、 $y$  项、 $z$  项、 $yz$  项, 可设

$$f_1(y, z) = a_0 + a_1 y + a_2 z + a_3 yz,$$

其中  $a_0, a_1, a_2, a_3$  为任意常数。

同理, 可设

$$f_2(x, z) = b_0 + b_1 x + b_2 z + b_3 zx,$$

$$f_3(x, y) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy.$$

将  $f_1, f_2, f_3$  代入式(c), 得

$$(a_1 + b_1) + (a_3 + b_3)z = 0,$$

$$(b_2 + c_2) + (b_3 + c_3)x = 0,$$

$$(a_2 + c_1) + (a_3 + c_3)y = 0.$$

若对任意的  $x, y, z$  值, 以上三式均成立, 必有

$$(a_1 + b_1) = 0, \quad (a_3 + b_3) = 0, \quad (b_2 + c_2) = 0,$$

$$(b_3 + c_3) = 0, \quad (a_2 + c_1) = 0, \quad (a_3 + c_3) = 0,$$

显然有  $a_3 = b_3 = c_3 = 0$ 。于是得

$$f_1(y, z) = a_0 - b_1 y + a_2 z,$$

$$f_2(x, z) = b_0 - c_2 z + b_1 x,$$

$$f_3(x, y) = c_0 - a_2 x + c_2 y.$$

将上述的函数表达式代入式(b), 并将任意常数  $a_0, b_0, c_0, c_2, a_2, b_1$  更换为  $u_0, v_0, w_0$  和  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$

$$\begin{cases} f_1(y, z) = u_0 + \omega_y z - \omega_z y, \\ f_2(x, z) = v_0 + \omega_z x - \omega_x z, \\ f_3(x, y) = w_0 + \omega_x y - \omega_y x. \end{cases} \quad (\text{e})$$

分析: 式(e)中所给出的是应变分量为零时的位移, 即与形变无关的位移, 必为刚性位移。其中,  $u_0, v_0, w_0$  分别为沿三个正交坐标轴的刚体平移;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  分别为绕三个坐标轴的刚体转动。

**例 7-2** 已知物体内某点的应力分量为  $\sigma_x = 20\text{MPa}, \sigma_y = 0, \sigma_z = 10\text{MPa}, \tau_{xy} = 0, \tau_{yz} = 10\text{MPa}, \tau_{zx} = 20\text{MPa}$ 。试求经过此点的平面  $2x - y + z = 1$  上的沿坐标轴方向的应力分量, 以及该平面上的正应力和剪应力。

**【解】** (1) 先求出平面  $2x - y + z = 1$  的法线方向余弦为

$$l = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad m = -\frac{\sqrt{6}}{6}, \quad n = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

(2) 求沿坐标轴的应力分量  $p_x, p_y, p_z$ 。将应力分量及方向余弦代入教材中式(7-2), 得

$$p_x = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx} = 24.495\text{MPa},$$

$$p_y = m\sigma_y + n\tau_{xy} + l\tau_{xy} = 4.082\text{MPa},$$

$$p_z = n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz} = 16.33\text{MPa}.$$

(3)求正应力、剪应力。

$$\sigma_n = lp_x + mp_y + np_z = 25\text{MPa},$$

$$\tau_n = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_n^2} = 16.073\text{MPa}.$$

分析:六个坐标面上的应力分量完全确定一点的应力状态。只要六个坐标面上的应力分量确定,就可以求出过该点的任意斜截面上的正应力和切应力。

## 习题全解

7-1 试证明:在与三个主应力成相同角度的面上,正应力等于三个主应力的平均值。

【证明】由题知  $l=m=n$ , 方向余弦的关系式有,

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

所以  $l=m=n=\sqrt{3}/3$ 。

该面上的正应力为

$$\sigma_n = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}\Theta.$$

7-2 设某一物体发生如下的位移:

$$u = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z,$$

$$v = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z,$$

$$w = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z.$$

试证明:各个形变分量在物体内为常量(即所谓均匀变形);在变形以后,物体内的平面保持为平面,直线保持为直线,平行面保持平行,平行线保持平行,正平行六面体变成斜平行六面体,圆球面变为椭球面。

【证明】(1)将位移分量代入几何方程,得下列形变分量

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a_1, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = b_3 + c_2,$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = b_2, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = a_3 + c_1,$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = c_3, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_2 + b_1.$$

它们反映了常量的线应变和切应变。

(2)变形后,物体内的平面保持为平面。变形前平面的方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (\text{a})$$

平面上的任一点  $(x, y, z)$  变形后将移动到新位置  $(x', y', z')$

## 第八章 空间问题的解答

### 本章学习重点与难点

#### 重点

##### 一、按位移求解空间问题

就是在给定的边界条件下求解以位移分量( $u, v, w$ )表示的基本方程, 求出位移分量后, 可由弹性方程求得应力分量。

弹性方程式中 $\left(\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$ , $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$	基本微分方程式中 $(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})$
$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1+\mu} \left( \frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \tau_{yx} = G \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \sigma_y = \frac{E}{1+\mu} \left( \frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \tau_{xz} = G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \sigma_z = \frac{E}{1+\mu} \left( \frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \tau_{xy} = G \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{cases}$	$\begin{cases} G \left( \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nabla^2 u \right) + f_x = 0, \\ G \left( \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \nabla^2 v \right) + f_y = 0, \\ G \left( \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nabla^2 w \right) + f_z = 0. \end{cases}$

类似地可得到空间轴对称问题的基本微分方程

$$\begin{cases} \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \nabla^2 u_\rho - \frac{u_\rho}{\rho^2} \right) + f_\rho = 0, \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nabla^2 u_z \right) + f_z = 0. \end{cases}$$

$$\text{式中 } \theta = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

##### 二、按位移求解空间问题实例

1. 半空间体受重力及均布压力(略)
2. 半空间体在边界上受法向集中力(略)

在按位移求解弹性力学问题时, 未知函数是位移分量, 它们应满足的条件是:

- (1) 区域内的平衡微分方程; (2)  $s_\rho$  上的应力边界条件; (3)  $s_\rho$  上的位移边界条件。

##### 三、按应力求解空间问题

就是在给定边界条件下, 求解平衡微分方程式和以应力分量( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ )表示的相容方程。若是多连体, 则相应的位移分量要满足位移单值

条件。

#### 以应变表示的相容方程

$\begin{cases} \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x \partial y}. \end{cases}$
---	--

#### 以应力表示的相容方程

一般情况	$\begin{cases} (1+\mu)\nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = -\frac{1+\mu}{1-\mu} \left[ (2-\mu) \frac{\partial f_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial f_z}{\partial z} \right], \\ (1+\mu)\nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = -\frac{1+\mu}{1-\mu} \left[ (2-\mu) \frac{\partial f_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial f_z}{\partial z} + \mu \frac{\partial f_x}{\partial x} \right], \\ (1+\mu)\nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = -\frac{1+\mu}{1-\mu} \left[ (2-\mu) \frac{\partial f_z}{\partial z} + \mu \frac{\partial f_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_y}{\partial y} \right], \\ (1+\mu)\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = -(1+\mu) \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial z} \right), \\ (1+\mu)\nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} = -(1+\mu) \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} + \frac{\partial f_z}{\partial x} \right), \\ (1+\mu)\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = -(1+\mu) \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \right). \end{cases}$
常体力	$\begin{cases} (1+\mu)\nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0, (1+\mu)\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = 0, \\ (1+\mu)\nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0, (1+\mu)\nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} = 0, \\ (1+\mu)\nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0, (1+\mu)\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = 0. \end{cases}$

#### 四、按应力求解空间问题的实例

1. 等截面直杆的扭转(略)
2. 扭转问题的薄膜比拟(略)
3. 椭圆截面杆的扭转(略)
4. 矩形截面杆的扭转(略)

在按应力求解弹性力学问题时,未知函数是应力分量,它们应满足的条件是:

- (1)区域内的平衡微分方程;(2)区域内的相容方程;(3) $s_\sigma$ 上的应力边界条件;(4) $s_u$ 上的位移边界条件;(5)多连体中的位移单值条件。相容方程是区域内的位移连续性条件,位移单值条件是各多连体中的位移连续性条件。

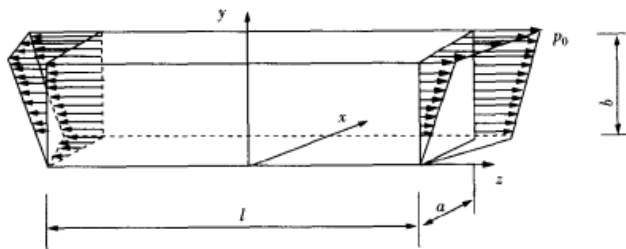
## 难点

一、按位移求解空间问题。

二、按应力求解空间问题。

## 典型例题讲解

**例 8-1** 一横截面为矩形的等直杆,其横截面的宽度为  $a$ ,长为  $b$ ,杆件长为  $l$ ;建立如图所示的坐标轴,已知应力分量  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$ 。在杆的两端作用有  $z$  方向的分布荷载,荷载集度为  $p(x, y) = p_0 \left( \frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} \right)$ ,不计体力,试求  $\sigma_z = f(x, y)$  应力表达式。



例 8-1 图

**【解】** (1)平衡条件。很显然,应力分量满足平衡方程,教材中式(7-1)。

(2)相容条件。由题知,体积应力  $\Theta = \sigma_z = f(x, y)$ 。由教材中式(8-13)的前三式

$$(1 + \mu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0, \quad \text{得} \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 0, \quad (a)$$

$$(1 + \mu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0, \quad \text{得} \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (b)$$

$$(1 + \mu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0, \quad \text{得} \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial z^2} = 0. \quad (c)$$

根据式(a)、(b)、(c)知  $\sigma_z$  的表达式应为线性函数,可设为

$$\sigma_z = f(x, y) = Ax + By + C. \quad (d)$$

(3)应力边界条件确定待定系数  $A, B, C$ 。

在矩形截面等直杆的上、下两面( $y = b, 0$ )有应力边界条件,即

$$(\sigma_y)_{y=0,b} = 0, \quad (\tau_{yz})_{y=0,b} = 0, \quad (\tau_{yx})_{y=0,b} = 0.$$

在前、后两面( $x = 0, a$ )有应力边界条件,即

$$(\sigma_x)_{x=0,a} = 0, \quad (\tau_{xy})_{x=0,a} = 0, \quad (\tau_{xz})_{x=0,a} = 0.$$

可见精确满足主要边界的应力边界条件。



在左、右两个边界( $x = -l/2, l/2$ )上,也可以精确满足应力的边界条件

$$(\sigma_x)_{x=0,y=0} = f(0,0) = C = 0, \quad (e)$$

$$(\sigma_x)_{x=0,y=b} = f(0,b) = Bb = \frac{p_0}{2}, \quad \text{得 } B = \frac{p_0}{2b}, \quad (f)$$

$$(\sigma_x)_{x=a,y=0} = f(a,0) = Aa = \frac{p_0}{2}, \quad \text{得 } A = \frac{p_0}{2a}. \quad (g)$$

综合以上三式(e)、(f)、(g)得

$$\sigma_x = f(x,y) = p_0 \left( \frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} \right).$$

分析:本题中按应力求解空间问题时,六个应力分量在弹性区域内满足平衡微分方程、相容方程和应力边界条件。

**例 8-2** 有直径为  $a$  的圆截面柱体和边长为  $a$  的正方形截面柱体,分别受有扭矩  $M$ ,试求各自的最大切应力;哪一种截面的抗扭刚度较大。

**【解】** (1)两种截面柱体的最大切应力

根据半轴为  $a$  和  $b$  的椭圆截面杆扭转的最大切应力公式,教材中式(8-23)

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{\pi ab^2},$$

得直径为  $a$  的圆截面柱体扭转的最大切应力

$$\tau_{\max 1} = \frac{2M}{\pi a^3}. \quad (a)$$

根据边长为  $a$  和  $b$  的矩形截面杆扭转的最大切应力公式,教材中式(8-32)

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{ab^2},$$

得边长为  $a$  的正方形截面柱体扭转的最大切应力

$$\tau_{\max 2} = \frac{3M}{a^3}. \quad (b)$$

(2)两种截面柱体单位长度的扭转角

根据教材中式(8-28)

$$K = \frac{(a^2 + b^2)M}{\pi a^3 b^3 G},$$

得圆截面柱体单位长度的扭转角

$$K_1 = \frac{2M}{\pi a^4 G}. \quad (c)$$

根据教材中式(8-33)

$$K = \frac{3M}{ab^3 G},$$

得正方形截面柱体单位长度的扭转角

$$K_2 = \frac{3M}{a^4 G}. \quad (d)$$

**分析:**圆截面柱体与正方形截面柱体的最大切应力比值和扭转角的比值为  $2/(3\pi)$ , 说明在相同扭矩的作用下, 圆截面柱体抵抗变形的能力强, 即抗扭刚度较大。

### 习题全解

**8-1** 设有任意形状的等截面杆, 密度为  $\rho$ , 上端悬挂, 下端自由, 如题 8-1 图所示。试考察应力分量  $\sigma_x=0, \sigma_y=0, \sigma_z=\rho gz, \tau_{xz}=0, \tau_{xy}=0, \tau_{yz}=0$ , 是否能满足所有一切条件。

**【解】** 按应力求解空间问题时, 须要使得六个应力分量在弹性体区域内满足平衡微分方程, 教材中式(7-1); 满足相容方程, 教材中式(8-13); 并在边界上满足应力边界条件, 教材中式(7-5)。

(1)  $f_x=f_y=0, f_z=-\rho g$ , 很显然, 应力分量满足如下平衡微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + f_z = 0. \end{cases}$$

(2)  $\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \rho gz$ , 应力分量也满足贝尔特拉米相容方程

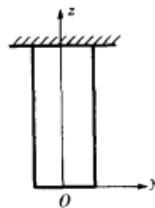
$$\begin{cases} (1+\mu)\nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0, & (1+\mu)\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = 0, \\ (1+\mu)\nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0, & (1+\mu)\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = 0, \\ (1+\mu)\nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0, & (1+\mu)\nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} = 0. \end{cases}$$

(3) 考察应力边界条件: 柱体的侧面和下端面,  $\bar{f}_x = \bar{f}_y = \bar{f}_z = 0$ 。在  $(x, y)$  平面上应考虑为任意形状的边界(侧面方向余弦分别为  $n=0, l, m$  为任意的; 在下端面方向余弦分别为  $n=-1, l=m=0$ )。应用一般的应力边界条件, 将应力和面力分量、方向余弦分别代入下式

$$\begin{cases} (l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{xz})_s = \bar{f}_x, \\ (m\sigma_y + n\tau_{xy} + l\tau_{yz})_s = \bar{f}_y, \\ (n\sigma_z + l\tau_{zx} + m\tau_{zy})_s = \bar{f}_z. \end{cases}$$

直杆的侧面和下端的应力边界条件都能满足。因此, 所给应力分量是本问题的解。

**8-2** 设有任意形状的空间弹性体, 在全部边界上(包括在孔洞边界上)受有均布压力  $q$ , 试证应力分量



题 8-1 图

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -q, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

能满足一切条件,因而就是正确的解答。

【解】 同上题。应力应满足平衡微分方程、相容方程及应力边界条件(在  $s_0$  上),多连体还应满足位移单值条件。

(1)平衡条件:

$f_x = f_y = f_z = 0$ ,很显然,应力分量满足平衡微分方程。

(2)相容条件:

$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -3q$ ,应力分量也满足贝尔特拉米相容方程。

(3)应力边界条件。考虑一般的应力边界条件:法线的方向余弦为  $l, m, n$ , 界面为任意斜面,受到法向压力  $q$  的作用。同样,满足应力的边界条件。

(4)位移单值条件。为了考虑多连体中的位移单值条件,由应力求出对应的位移,然后再检查是否满足单值条件。

将应力分量代入教材中式(7-12),得形变分量表达式

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \frac{2\mu-1}{E}q, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0.$$

将形变分量代入几何方程,得

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\mu-1}{E}q, \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2\mu-1}{E}q, \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{2\mu-1}{E}q. \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

积分得位移分量的表达式

$$u = \frac{2\mu-1}{E}qx + f_1(y, z), \quad v = \frac{2\mu-1}{E}qy + f_2(x, z), \quad w = \frac{2\mu-1}{E}qz + f_3(x, y).$$

其中的  $f_1, f_2$  和  $f_3$  分别是  $y, z$  和  $x, z$  及  $x, y$  的待定函数,可以通过几何方程的后三个式子求出。

$$\begin{cases} \frac{df_3(x, y)}{dy} = -\frac{df_2(x, z)}{dz}, \\ \frac{df_3(x, y)}{dx} = -\frac{df_1(y, z)}{dz}, \\ \frac{df_2(x, z)}{dx} = -\frac{df_1(y, z)}{dy}. \end{cases}$$

满足上述三个等式,只可能每个等式的左右两边等于同一个常数  $\omega$ ,积分以后得

$$\begin{cases} f_1 = -\omega y + \omega z + u_0, \\ f_2 = \omega x - \omega z + v_0, \\ f_3 = -\omega x + \omega y + w_0. \end{cases}$$

代入位移分量表达式得

$$\begin{cases} u = \frac{2\mu-1}{E}x - \omega y + \omega z + u_0, \\ v = \omega x + \frac{2\mu-1}{E}y - \omega z + v_0, \\ w = -\omega x + \omega y + \frac{2\mu-1}{E}z + w_0. \end{cases}$$

其中,  $u_0, v_0, w_0, \omega$  分量分别表示位移和刚体转动, 与形变无关。多连体上各个点的位移分量都是  $x, y, z$  的线性函数, 所以满足位移单值条件。

8-3 试由教材中式(8-5)的侧压力系数分析, 当  $\mu$  接近于 0 或者 1/2 时, 此弹性体分别接近于什么样的物体?

【解】 侧向压力系数是

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \frac{\sigma_y}{\sigma_z} = \frac{\mu}{1-\mu},$$

它表示侧面压力与铅直压力之比。

(1) 当  $\mu=1/2$  时,  $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z$ , 此时已成为三向相同的应力状态。从  $\mu$  (取值范围,  $0<\mu<1/2$ ) 本身来讲,  $\mu$  大则侧向变形大, 侧向压力也大。 $\mu=1/2$ , 说明物体的刚度极小, 抵抗变形的能力极差, 即柔度极大, 实质上已与流体的力学性能相同。

(2) 当  $\mu=0$  时, 正应力不会引起侧向变形, 说明物体的刚度极大, 抵抗变形的能力极强, 力学性能已与刚体相同。

8-4 当体力不计时, 试证体应变为调和函数, 位移分量和应力分量为重调和函数, 即它们满足下列方程:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \theta &= 0, \quad \nabla^4(u, v, w) = 0, \\ \nabla^4(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) &= 0. \end{aligned}$$

【证明】 体力为零时, 用位移表示的平衡微分方程, 即教材中式(8-2)简化为

$$\begin{cases} \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nabla^2 u = 0, \\ \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \nabla^2 v = 0, \\ \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nabla^2 w = 0. \end{cases} \quad (a)$$

将以上三式分别对  $x, y, z$  求导, 然后相加, 得

$$\frac{1}{1-2\mu} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \nabla^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \quad (b)$$

其中  $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ ,

式(b)简化为

$$\frac{1}{1-2\mu} \nabla^2 \theta + \nabla^2 \theta = 0, \quad \nabla^2 \theta \left( \frac{1}{1-2\mu} + 1 \right) = 0,$$

因为  $\mu < 1/2$ , 所以

$$\nabla^2 \theta = 0. \quad (c)$$

即体积应变为调和函数, 由教材中式(7-13)得

$$\nabla^2 \Theta = 0. \quad (d)$$

即体积应力为调和函数。将式(a)的各式进行拉普拉斯算子  $\nabla^2$  的演算, 并且注意到式(c), 则有

$$\nabla^2 \nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 \nabla^2 v = 0, \quad \nabla^2 \nabla^2 w = 0. \quad (e)$$

即位移函数为双调和函数。

当体力不计时, 米歇尔相容方程, 即教材中式(8-12)得位移分量的基本微分方程。

$$\begin{cases} (1+\mu)\nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0, & (1+\mu)\nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0, \\ (1+\mu)\nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0, & (1+\mu)\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = 0, \\ (1+\mu)\nabla^2 \tau_{xz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} = 0, & (1+\mu)\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = 0. \end{cases} \quad (f)$$

将以上六个式子进行拉普拉斯算子  $\nabla^2$  的演算, 并且注意到式(d), 则有

$$\begin{cases} \nabla^4 \sigma_x = 0, & \nabla^4 \sigma_y = 0, & \nabla^4 \sigma_z = 0, \\ \nabla^4 \tau_{yz} = 0, & \nabla^4 \tau_{xz} = 0, & \nabla^4 \tau_{xy} = 0. \end{cases} \quad (g)$$

**8-5** 半空间体在边界平面的一个圆面积上受有均布压力  $q$ 。设圆面积的半径为  $a$ , 试求圆心下方距边界为  $h$  处的位移。

**【解】** 半空间体在边界上受法向集中力时,  $z$  轴上各点的位移有布西内斯克解答:

$$u_z = \frac{(1+\mu)F}{2\pi ER} \left[ 2(1-\mu) + \frac{z^2}{R^2} \right].$$

根据本题的荷载情况, 可作如下代换:

$$z \rightarrow h, R \rightarrow \sqrt{\rho^2 + h^2}, F \rightarrow dF = q 2\pi \rho d\rho.$$

然后从  $0 \sim a$  对  $\rho$  积分。

$u_z$  的表达式为

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{(1+\mu)q}{E} \int_0^a \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \left[ 2(1-\mu) + \frac{h^2}{\rho^2 + h^2} \right] d\rho \\ &= \frac{(1+\mu)q}{E} \left[ \int_0^a \frac{2(1-\mu)\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} + \int_0^a \frac{h^2 \rho d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{(1+\mu)q}{E} \left[ (1-\mu) \int_0^a \frac{d(\rho^2 + h^2)}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} + \frac{h^2}{2} \int_0^a \frac{d(\rho^2 + h^2)}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} \right]. \end{aligned}$$

积分, 得到  $z$  点的位移

$$u_z = \frac{(1+\mu)q}{E} \left[ \frac{2(1-\mu)a^2 + (1-2\mu)h^2}{\sqrt{a^2 + h^2}} - (1-2\mu)h \right].$$

**8-6** 半空间体在边界平面的一个矩形面积上受有均布压力  $q$ 。设矩形面积的

边长为  $a$  及  $b$ , 试求矩形中心及四角处的沉降。

【解】 引用布西内斯克解答, 在  $z=0$  的表面上的沉降是

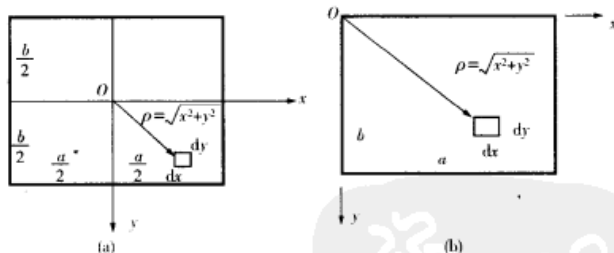
$$\eta = (u_z)_{z=0} = \frac{1-\mu^2}{\pi E} \frac{F}{\rho}.$$

(1) 求矩形中心点的沉降, 采用图(a)的坐标系, 将  $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ ,  $dF = q dx dy$  代入并积分

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{(1-\mu^2)q dx dy}{\pi E \sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{(1-\mu^2)q}{\pi E} \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} \frac{q dx}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{(1-\mu^2)q}{\pi E} \int_{-b/2}^{b/2} \ln \left[ \frac{a^2/2 + y^2 + a \sqrt{a^2/4 + y^2}}{y^2} \right] dy, \end{aligned}$$

再应用分部积分得到

$$\eta_0 = \frac{2(1-\mu^2)q}{\pi E} \left( b \operatorname{arsinh} \frac{a}{b} + a \operatorname{arsinh} \frac{a}{b} \right).$$



解 8-6 图

(2) 求矩形角点处的沉降, 采用图(b)的坐标系

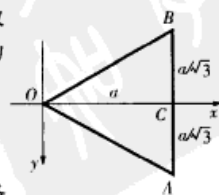
$$\begin{aligned} \eta_0' &= \int_0^a \int_0^b \frac{(1-\mu^2)q dx dy}{\pi E \sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{(1-\mu^2)q}{\pi E} \left( b \operatorname{arsinh} \frac{a}{b} + a \operatorname{arsinh} \frac{a}{b} \right). \end{aligned}$$

8-7 扭杆的横截面为等边三角形  $OAB$ , 其高度为  $a$ , 取坐标轴如题 8-7 图所示, 则  $AB, OA, OB$  三边的方程分别为  $x-a=0, x-\sqrt{3}y=0, x+\sqrt{3}y=0$ 。试证应力函数

$$\Phi = m(x-a)(x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y)$$

能满足一切条件, 并求出最大应力及扭角。

【解】 (1) 扭杆无孔洞, 应力函数  $\Phi$  显然满足侧面边界条件  $(\Phi)_{\text{侧面}} = 0$ 。由杆满足端部的边界条件, 教材中式(8-18)得



题 8-7 图

$$2 \iint_A m(x-a)(x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y) dx dy = M,$$

$$2m \int_0^a \int_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} (x^3 - 3xy^2 - ax^2 + 3ay^2) dx dy = M,$$

$$2m \int_0^a \frac{4}{3\sqrt{3}} (x^4 - ax^3) dx = M,$$

$$\text{积分求得 } m = -\frac{15\sqrt{3}}{2a^5} M.$$

(2) 将  $\Phi$  代入相容方程, 教材中式(8-21)

$$\nabla^2 \Phi = -2GK,$$

$$\nabla^2 \Phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (x^3 - 3xy^2 - ax^2 + 3ay^2) = 4am = -\frac{30\sqrt{3}}{a^4} M.$$

再将  $m$  代入上式结果, 得

$$-\frac{30\sqrt{3}}{a^4} M = -2GK,$$

$$\text{得 } K = \frac{15\sqrt{3}M}{Ga^4}.$$

(3) 由教材中式(8-15)求切应力分量得

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{45\sqrt{3}}{a^5} M(x-a)y,$$

$$\tau_{yx} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{15\sqrt{3}}{2a^5} M(3x^2 - 2ax - 3y^2).$$

(4) 由薄膜比拟法知, 在扭杆的边界上, 三个边的中点将发生最大剪应力, 为方便计算, 考虑  $C$  点:

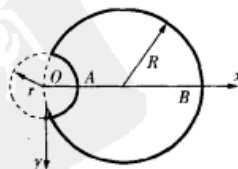
$$\tau_{\max} = (\tau_{xy})_{x=a, y=0} = \frac{15\sqrt{3}}{2a^3} M, \quad (\tau_{xz})_{x=a, y=0} = 0.$$

(5) 单位长度上扭角为

$$K = -\frac{C}{2G} = \frac{15\sqrt{3}M}{Ga^4}.$$

**8-8** 半径为  $R$  的圆截面扭杆, 有半径为  $r$  的圆弧槽。取坐标轴如题 8-8 图所示, 则圆截面边界的方程为  $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$ , 圆弧槽的方程为  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ 。试证应力函数

$$\begin{aligned} \Phi &= -GK \frac{(x^2 + y^2 - r^2)(x^2 + y^2 - 2Rx)}{2(x^2 + y^2)} \\ &= -\frac{GK}{2} \left[ x^2 + y^2 - r^2 - \frac{2Rx(x^2 + y^2 - r^2)}{x^2 + y^2} \right] \end{aligned}$$



题 8-8 图

能满足教材中式(8-17)及(8-21)。试求最大切应力和边界上离圆弧槽较远处(例

如 B 点)的应力,设圆弧槽很小( $r$  远小于  $R$ ),试求槽边的应力集中因子  $f$ 。

【解】(1)应力函数  $\Phi$  中含扭杆周界方程,故满足边界条件  $(\Phi)_{,t} = 0$ 。

(2)将应力函数  $\Phi$  代入相容方程,教材中式(8-21)

$$\Phi = -\frac{GK}{2} \left[ x^2 + y^2 - r^2 - 2Rx + 2Rr^2 \frac{x}{x^2 + y^2} \right],$$

$$\text{而 } \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}.$$

其中,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{GK}{2} \left[ 2x - 2R + 2Rr^2 \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right],$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{GK}{2} \left[ 2 + 2Rr^2 \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 + 4x(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4} \right].$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{GK}{2} \left[ 2y - 2Rr^2 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right],$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{GK}{2} \left[ 2 + 2Rr^2 \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 + 8xy^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4} \right].$$

则

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2GK.$$

很显然,满足相容方程。

(3)切应力分量和应力集中因子

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{GK}{2} \left[ 2y - 2Rr^2 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right],$$

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{GK}{2} \left[ 2x - 2R + 2Rr^2 \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right].$$

$\tau_{\max}$  发生在 A 点:

$$\tau_{\max} = \tau_A = (\tau_{zy})_{x=b, y=0} = GK(2R - r), \quad (\tau_{xz})_{x=b, y=0} = 0,$$

$$\tau_B = (\tau_{zy})_{x=2R, y=0} = GK \left( R - \frac{r^2}{4R} \right), \quad (\tau_{xz})_{x=2R, y=0} = 0.$$

因为圆弧槽很小( $r$  远小于  $R$ ),槽边的应力集中因子  $f$

$$f = \frac{\tau_A}{\tau_B} = \lim_{r/R \rightarrow 0} \frac{GK(2R - r)}{GK(R - r^2/4R)} = 2.$$

8-9 设有一边长为  $a$  的正方形截面杆,与一面积相同的圆截面杆,受有相同的扭矩  $M$ ,试比较两者的最大切应力和单位长度的扭角。

【解】(1)根据教材中式(8-34)和式(8-35)可知任意矩形杆的最大切应力和扭转角的表达式,

$$\tau_{\max} = \frac{M}{ab^2\beta}, \quad K = \frac{M}{ab^3G\beta_1},$$

对于边长为  $a$  的正方形截面杆,  $a = b, \beta = 0.208, \beta_1 = 0.141$ 。



将值代入上式,得

$$\tau_{\max} = \frac{M}{ab^2\beta} = 4.808 \frac{M}{a^3}, \quad K = \frac{M}{ab^3G\beta_1} = 7.092 \frac{M}{a^4G}.$$

(2) 根据教材中式(8-27)和式(8-28)可知椭圆截面杆的最大切应力和扭转角的表达式

$$\tau'_{\max} = \frac{2M}{\pi a' b'^3}, \quad K' = \frac{(a'^3 + b'^3)M}{\pi a'^3 b'^3 G}.$$

对于面积为  $a^2$  的圆截面杆,上式中  $a' = b' = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$ .

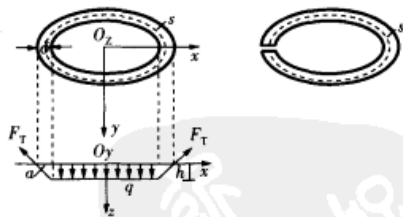
将值代入上式,得

$$\tau'_{\max} = \frac{2M}{\pi a' b'^3} = \frac{2\sqrt{\pi}M}{a^3}, \quad K' = \frac{(a'^3 + b'^3)M}{\pi a'^3 b'^3 G} = \frac{2\pi M}{a^4 G}.$$

(3) 比较两杆的最大切应力和单位长度的扭转角。

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau'_{\max}} = 1.3562, \quad \frac{K}{K'} = 1.1288.$$

**8-10** 设有闭口薄壁杆,杆壁具有均匀厚度  $\delta$ ,杆壁中线的长度为  $s$ ,而中线包围的面积为  $A$ 。另有一开口薄壁杆,是由此薄壁杆切开而成。设两杆受有相同的扭矩  $M$ ,试求两杆的最大切应力之比和单位长度扭角之比。



解 8-10 图

(a) 闭口薄壁杆件; (b) 开口薄壁杆件

**【解】** (1) 求解闭口薄壁杆件的扭转问题,应用薄膜比拟法。闭口薄壁杆,杆壁具有均匀厚度  $\delta$ ,杆壁中线的长度为  $s$ ,而中线包围的面积为  $A$ 。由于图示闭口截面为复连通域,取外边界  $s_1$  上  $(\Phi)_{s_1} = 0$ ,则内边界  $s_2$  上不再可以任意选择,应取  $(\Phi)_{s_2} = h$ ,如图所示。在内边界  $s_2$  上相当于有一块无重刚性板悬挂于边界上,且受到  $q$  作用。

由于切应力对应于薄膜的斜率,因此

$$\tau = h/\delta, \quad (a)$$

又有

$$M = 2V = 2Ah,$$

得到

$$h = M/2A. \quad (b)$$

由此得出闭口薄壁杆的切应力公式

$$\tau = M/2A\delta.$$

为求扭转角  $K$ , 可以考虑内边界  $s_z$  上无重钢板的平衡条件,

$$\int_s F_T ds \sin \alpha = qA,$$

其中  $\sin \alpha = h/\delta$ , 代入上式, 整理后得

$$\frac{h}{A} \int_s \frac{ds}{\delta} = \frac{q}{F_T}. \quad (c)$$

由薄膜比拟,  $q/F_T = 2GK$ , 并将式(b)代入上式, 得闭口薄壁杆的扭角

$$K = \frac{MS}{4A^2 G} \int_s \frac{ds}{\delta}.$$

若薄壁杆厚度  $\delta$  为常量, 则

$$K = \frac{MS}{4A^2 G \delta}.$$

(2) 对于开口的相同截面的薄壁杆, 如图(b)所示, 由教科书中式(8-32)、(8-33), 可见其最大的切应力和扭角为

$$\tau'_{\max} = 3M/s\delta^2, \quad K' = 3M/s\delta^3 G.$$

(3) 闭口薄壁杆与开口薄壁杆最大切应力与单位长度扭转角之比为

$$\tau_{\max}/\tau'_{\max} = s\delta/6A, \quad K/K' = s^2\delta^2/12A^2.$$



## 第九章 薄板弯曲问题

### 本章学习重点与难点

#### 重点

##### 一、有关概念及计算假定

###### (一)有关概念

1. 平板:由两个平行面和垂直于这两个平行面的柱体或棱柱面所围成的物体,称为平板。

2. 中面:平分厚度  $\delta$  的平面称为板的中间平面。

3. 薄板:如果板的厚度远  $\delta$  小于中面的最小尺寸  $b$ ,则称为薄板。

4. 挠度:中面各点在垂直于中面方向的位移(未知量),称为挠度。

5. 薄板弹性曲面:当薄板弯曲时,中面所弯成的曲面,称为薄板弹性曲面。

###### (二)计算假定

1. 形变分量  $\epsilon_x, \gamma_{xz}, \gamma_{yx}$  都可以不计。

2. 应力分量  $\sigma_z$  所引起的形变可以不计,即

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \\ \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}. \end{cases}$$

3. 薄板中面内的各点都没有平行于中面的位移,即

$$(u)_{z=0} = 0, \quad (v)_{z=0} = 0.$$

以上三个计算假定是根据小挠度薄板的内力和变形特征归纳并提出的,用来简化空间问题的基本方程和边界条件。三个计算假定已为大量的实践所验证,并由此建立了小挠度薄板的理论。

##### 二、弹性曲面的微分方程,薄板横截面上的内力

薄板的弹性曲面微分方程

$$D \nabla^4 w = q.$$

式中,  $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$  为薄板的弯曲刚度,它的量纲是  $L^2MT^{-2}$ 。

用挠度  $w$  表示的应力和内力

应力分量	内力分量
$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \tau_{xz} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( z^2 - \frac{\delta^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \\ \tau_{yz} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( z^2 - \frac{\delta^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{cases}$	$\begin{cases} M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ F_{sx} = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \\ F_{sy} = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{cases}$

应力与内力, 内力与内力的关系

应力与内力	内力与内力
$\begin{cases} \sigma_x = \frac{12M_x}{\delta^3} z, \sigma_y = \frac{12M_y}{\delta^3} z, \\ \tau_{xy} = \frac{12M_{xy}}{\delta^3} z, \tau_{xz} = \frac{6F_{sx}}{\delta^3} \left( \frac{\delta^2}{4} - z^2 \right), \\ \tau_{yz} = \frac{6F_{sy}}{\delta^3} \left( \frac{\delta^2}{4} - z^2 \right), \\ \sigma_z = -2q \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{\delta} \right)^2 \left( 1 + \frac{z}{\delta} \right). \end{cases}$	$\begin{cases} F_{sx} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \\ F_{sy} = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, \\ \frac{\partial F_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{sy}}{\partial y} + q = 0, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0. \end{cases}$

以上各内力是作用在薄板单位宽度上的, 故弯矩和扭矩的量纲都是为  $\text{LMT}^{-2}$ , 而剪力的量纲为  $\text{MT}^{-2}$ 。

### 三、边界条件

在薄板弯曲问题中, 取挠度  $w(x, y)$  为基本未知函数, 应满足边界条件:

固定边边界条件  $\left( w, \frac{\partial w}{\partial n} \right)_i = 0$ ;

简支边边界条件  $(w, M_n)_i = 0$ ;

自由边边界条件  $(M_n, F_{sn})_i = 0$ 。

$n$  表示边界的外法线。

### 四、四边简支矩形薄板的重三角级数解(纳维解法)

纳维把挠度  $w$  的表达式取为如下的重三角级数

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}。$$

式中的  $m, n$  为正整数。挠曲面方程要满足四边简支矩形板的全部边界条件, 并将其代入微分方程, 以确定待定系数  $A_{mn}$

$$A_{mn} = \frac{4 \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{\pi^4 ab D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2},$$

得挠度的表达式, 由此可以求得内力。

#### 五、矩形薄板的单三角级数解(莱维解法)

对于有两个对边被简支的矩形薄板, 莱维把挠度的表达式取为如下的单三角级数

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

式中,  $Y_m$  是  $y$  的任意函数, 而  $m$  为正整数。显然, 挠度表达式满足简支边的边界条件, 通过求解得  $Y_m$

$$Y_m = A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} + f_m(y).$$

式中,  $A_m, B_m, C_m, D_m$  为任意常数, 由另外两边的边界条件确定;

$f_m(y)$  是一个特解。

#### 六、矩形薄板的差分解

##### 1. 差分方程

在矩形薄板的中面上划分成间距为  $h$  的网格, 利用第五章的差分公式, 可由弹性曲面的微分方程式得任一结点 0 的差分方程为

$$20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) + (w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12}) = q_0 h^4 / D.$$

##### 2. 边界条件(如图 9-1 所示)

设  $AB$  为简支边:  $w_0 = 0, w_1 = -w_3$ ;

设  $AB$  为固定边:  $w_0 = 0, w_1 = w_3$ 。

##### 3. 内力的差分表示

以结点 0 为例, 该处的内力可以用结点 0 处和附近结点处的挠度表示:

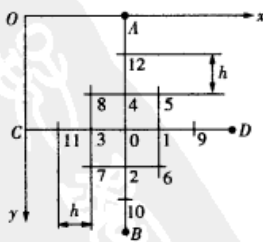


图 9-1

$$\text{弯矩} \begin{cases} (M_x)_0 = \frac{D}{h^2} [2(1+\mu)w_0 - (w_1 + w_3) - \mu(w_2 + w_4)], \\ (M_y)_0 = \frac{D}{h^2} [2(1+\mu)w_0 - (w_2 + w_4) - \mu(w_1 + w_3)]. \end{cases}$$

$$\text{扭矩} \quad (M_{xy})_0 = \frac{(1-\mu)D}{h^2} [(w_5 + w_7) - (w_6 + w_8)].$$

$$\text{剪力} \begin{cases} (F_{S_x})_0 = \frac{D}{2h^2} [4(w_1 - w_3) - w_5 - w_6 + w_7 + w_8 - w_9 + w_{11}], \\ (F_{S_y})_0 = \frac{D}{2h^2} [4(w_2 - w_4) + w_5 - w_6 - w_7 + w_8 - w_{10} + w_{12}]. \end{cases}$$

## 七、圆形薄板的弯曲

## 1. 圆板挠曲面微分方程及内力表达式见表 9-1

表 9-1 圆板弯曲时的挠曲面微分方程、内力、合剪力表达式

名称	一般情况	轴对称情况
挠曲面方程	$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)^2 w = \frac{q}{D}$	$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}\right)^2 w = \frac{q}{D}$
内力	$\begin{cases} M_\rho = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \mu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right], \\ M_\varphi = -D \left[ \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \right], \\ M_{\rho\varphi} = -D(1-\mu) \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right], \\ F_{S\rho} = -D \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 w, \\ F_{S\varphi} = -D \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 w. \end{cases}$	$\begin{cases} M_\rho = -D \left( \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \mu \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right), \\ M_\varphi = -D \left( \mu \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right), \\ M_{\rho\varphi} = 0, \\ F_{S\rho} = -D \frac{d}{d\rho} \nabla^2 w, \\ F_{S\varphi} = 0. \end{cases}$
和剪力	$\begin{cases} F_{S\rho}^1 = F_{S\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_{\rho\varphi}}{\partial \varphi}, \\ F_{S\varphi}^1 = F_{S\varphi} + \frac{\partial M_{\rho\varphi}}{\partial \rho}. \end{cases}$	$\begin{cases} F_{S\rho}^1 = F_{S\rho}, \\ F_{S\varphi}^1 = 0. \end{cases}$
算子	$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$	$\nabla^2 = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}$

圆板所受荷载若对称于  $z$  轴,称为轴对称弯曲问题,此时板的挠度和内力仅是  $\rho$  的函数,而与  $\varphi$  无关。

## 2. 圆板弯曲时的边界条件见表 9-2

设  $\rho=a$  处分别是固定边界、简支边界、自由边界,且无给定的位移或外力。

表 9-2 圆板弯曲时的边界条件

边界	一般情况	轴对称情况
固定边	$(w)_{\rho=a} = 0, \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)_{\rho=a} = 0$	$(w)_{\rho=a} = 0, \left(\frac{dw}{d\rho}\right)_{\rho=a} = 0$
简支边	$(w)_{\rho=a} = 0, (M_\rho)_{\rho=a} = 0$	$(w)_{\rho=a} = 0, (M_\rho)_{\rho=a} = 0$

续表

边界	一般情况	轴对称情况
自由边	$(M_\rho)_{\rho=a}=0, (F'_{S_\rho})_{\rho=a}=0。$	$(M_\rho)_{\rho=a}=0, F_{S_\rho}=0。$

3. 圆板轴对称时, 挠曲面方程的通解为

$$w(\rho) = A_0 \ln \rho + B_0 \rho^2 \ln \rho + C_0 \rho^2 + D_0 + w_1,$$

式中  $w_1$  为挠曲面方程的特解, 由板面荷载确定。

$$w_1 = \frac{1}{D} \int \frac{d\rho}{\rho} \int \rho d\rho \int \frac{d\rho}{\rho} \int \rho q(\rho) d\rho。$$

难点

一、四边简支矩形薄板的重三角级数解。

二、矩形薄板的单三角级数解。

三、矩形薄板的差分解。

四、圆形薄板的弯曲。

## 典型例题讲解

**例 9-1** 有一块边长为  $a$  的正方形薄板, 两对边固定, 另两对边简支, 受均布荷载  $q_0$  作用, 如图示。试用差分法求出最大挠度。采用  $4 \times 4$  网格,  $h = a/4$ 。

**【解】** 薄板弹性曲面微分方程, 改为差分方程时, 对每一个内结点均应列出一个差分方程。

$$(\nabla^4 w)_0 = (q/D)_0。 \quad (a)$$

由于对称, 只需取  $w_1, w_2, w_3, w_4$  为未知值。分别为结点 1, 2, 3, 4 列出差分方程, 并应用边界条件。

$BC$  线为简支边, 边界内、结点的  $w$  相反;  $AB$  线为固定边, 边界内、结点的  $w$  相同。将边界外虚结点的  $w$  值直接用边界内相应结点的  $w$  值表示, 可为结点 1, 2, 3, 4 列出式(a)型的差分方程, 得

$$20w_1 - 8(2w_2 + 2w_3) + 2(4w_4) = q_0 h^4 / D;$$

$$20w_2 - 8(2w_4 + w_1) + 2(2w_3) + w_2 + w_2 = q_0 h^4 / D;$$

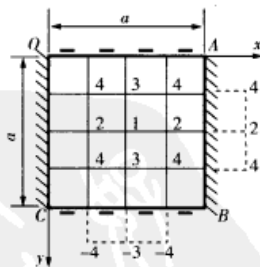
$$20w_3 - 8(2w_4 + w_1) + 2(2w_2) - w_3 + w_3 = q_0 h^4 / D;$$

$$20w_4 - 8(w_2 + w_3) + 2(2w_1) + w_4 - w_4 + w_4 + w_3 = q_0 h^4 / D。$$

整理后得

$$20w_1 - 16w_2 - 16w_3 + 8w_4 = q_0 h^4 / D; \quad (b)$$

$$-8w_1 + 22w_2 + 4w_3 - 16w_4 = q_0 h^4 / D; \quad (c)$$



例 9-1 图

$$-8w_1 + 4w_2 + 20w_3 - 16w_4 = q_0 h^4 / D; \quad (d)$$

$$2w_1 - 8w_2 - 820w_3 + 22w_4 = q_0 h^4 / D. \quad (e)$$

联立求解式(a)、(b)、(c)和(d),得

$$w_1 = 0.6314q_0 h^4 / D,$$

$$w_2 = 0.4145q_0 h^4 / D,$$

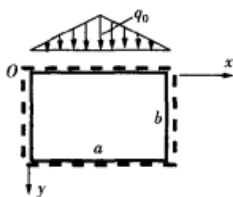
$$w_3 = 0.4664q_0 h^4 / D,$$

$$w_4 = 0.3084q_0 h^4 / D.$$

由对称性可见,最大挠度发生在结点1处。最大挠度为

$$w_{\max} = w_1 = 0.6314q_0 h^4 / D = 0.00247q_0 a^4 / D.$$

**例9-2** 有一四边简支矩形板,板面荷载如图所示。试用纳维解法求薄板的挠度。



例9-2图

**【解】** 挠度表达式为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (a)$$

荷载表达式为

$$0 \leq x \leq \frac{a}{2}, \quad q(x, y) = \frac{2x}{a} q_0;$$

$$\frac{a}{2} \leq x \leq a, \quad q(x, y) = (a-x) \frac{q_0}{a}.$$

其中,

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4 \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{\pi^4 abD \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \\ &= \frac{4 \left( \int_0^{\frac{a}{2}} \sin \frac{n\pi y}{b} dy \left[ \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{2q_0}{a} x \sin \frac{m\pi x}{a} dx + \int_{\frac{a}{2}}^a \frac{2q_0}{a} (a-x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \right] \right)}{\pi^4 abD \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \\ &= \frac{4 \times \frac{2b}{n\pi} \left[ \frac{4q_0}{a} \left( \frac{a}{m\pi} \right)^2 \sin \frac{\pi}{2} \right]}{\pi^4 abD \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \end{aligned}$$



$$= (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{32q_0}{\pi^3 m^2 n D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2},$$

式中,  $m=1,3,5,\dots; n=1,3,5,\dots$

将  $A_{mn}$  代入式(a), 得挠度表达式

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} 32q_0}{\pi^3 D m^2 n \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

分析: 纳维解法只适用于四边简支的矩形板所受的各种荷载, 级数运算较简单但在计算时级数收敛较慢。

### 习题全解

9-1 设有半椭圆形薄板, 题9-1图, 边界 AOB 为简支边, ACB 为固定边, 受有荷载  $q=q_1 \frac{x}{a}$ 。试证  $w=mx \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2$  能满足一切条件, 其中  $m$  是待定常数。试求挠度和弯矩以及它们的最大值。

【解】(1) 沿着简支边 AB ( $x=0$ ), 薄板的挠度  $w$  等于零, 所以边界条件是

$$(w)_{x=0} = 0. \quad (a)$$

固定边的边界条件是

$$\left( w, \frac{\partial w}{\partial n} \right)_s = 0. \quad (b)$$

由  $(w)_s = 0$ , 显然  $\left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)_s = 0$ 。因此, 从方向导数的公式可推出

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right)_s = 0. \quad (c)$$

为了满足边界条件(b), 可以令  $\left( w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right)_s = 0$ 。

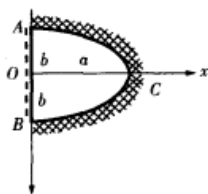
$$\text{其中, } \frac{\partial w}{\partial x} = m \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 + 4m \frac{x^2}{a^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 4m \frac{xy}{b^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

很显然,  $w=mx \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2$  能满足简支边和固定边的边界条件式(a)、(b)。

(2) 对于荷载  $q=q_1 \frac{x}{a}$ , 将挠度表达式代入方程  $D \nabla^4 w = q_1 \frac{x}{a}$ , 即

$$D \nabla^4 w = Dmx \left( \frac{120}{a^4} + \frac{48}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right) = q_1 \frac{x}{a}.$$



题9-1图

解得

$$m = \frac{q_1 a^3}{24 \left( 5 + 2 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4} \right) D}.$$

(3) 求最大挠度和最大弯矩

将  $m$  代入挠度方程, 得

$$w = \frac{q_1 a^3}{24 \left( 5 + 2 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4} \right) D} x \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2. \quad (d)$$

当  $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$  时, 挠度有极大值, 即

$$\frac{\partial w}{\partial x} = m \left( \frac{5}{a^4} x^4 + \frac{1}{b^4} y^4 + \frac{6}{a^2 b^2} x^2 y^2 - \frac{6}{a^2} x^2 - \frac{2}{b^2} y^2 + 1 \right) = 0, \quad (e)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = m x y \left( \frac{4}{b^4} y^2 + \frac{4}{a^2 b^2} x^2 - \frac{4}{b^2} \right) = 0. \quad (f)$$

$x=0$  的各点挠度为零, 薄板关于  $x$  轴对称, 挠度最大值应该在  $y=0$  的各点, 从式(f)中也可以得知,  $y=0$  可以满足条件。将  $y=0$  代入式(e), 得

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} a, y=0 \text{ 时挠度有极值。}$$

$$w_{\max} = \frac{2\sqrt{5} q_1 a^4}{375 \left( 5 + 2 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4} \right) D}.$$

根据教材(9-10)的第一式, 得内力

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ &= -Dm \left( \frac{20}{a^4} x^3 + \frac{12}{a^2 b^2} x y^2 - \frac{12}{a^2} x + \frac{12\mu}{b^4} x y^2 \right). \end{aligned}$$

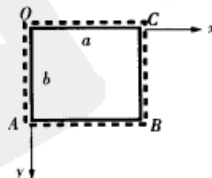
而最大弯矩为

$$(M_x)_{x=a, y=0} = -\frac{8Dm}{a} = -\frac{q_1 a^2}{3 \left( 5 + 2 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4} \right)}.$$

**9-2** 四边简支的矩形薄板, 如题 9-2 图所示, 边长为  $a$  和  $b$ , 受有荷载

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

试证  $w = m \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$  能满足一切条件, 并求出挠度、弯矩和反力。



题 9-2 图

**【解】** (1) 沿着简支边  $OA$  ( $x=0$ )、 $AB$  ( $y=b$ )、 $BC$

$(x=a)$ 和 $CO(y=0)$ 薄板的挠度 $w$ 等于零,挠度 $w=m\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$ 满足四个边的边界条件

$$(w)_{x=0}=0, \quad (w)_{x=a}=0,$$

$$(w)_{y=0}=0, \quad (w)_{y=b}=0.$$

对于荷载 $q=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$ ,将挠度表达式代入方程 $D\nabla^4 w=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$ ,即

$$D\nabla^4 w = Dm\pi^4\left(\frac{1}{a^4} + \frac{2}{a^2b^2} + \frac{1}{b^4}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} = q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},$$

解得

$$m = \frac{q_0 a^4}{D\pi^4\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2}.$$

(2)求最大挠度和最大弯矩,挠度为

$$w = \frac{q_0 a^4}{D\pi^4\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b},$$

最大挠度值为

$$w_{\max} = \frac{q_0 a^4}{D\pi^4\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2}.$$

根据教材中式(9-10),得内力

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = Dm\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\mu}{b^2}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = Dm\pi^2\left(\frac{\mu}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

最大弯矩为

$$(M_x)_{\max} = \frac{q_0 a^2\left(1 + \mu \frac{a^2}{b^2}\right)}{\pi^2\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2}.$$

(3)角点反力公式为

$$F_{Ri} = 2(M_{xy})_i = -2D(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_i = \frac{2(1-\mu)q_0 a^2}{\pi^2\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \frac{b}{a} \left(\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\right)_i.$$

角点反力的正负方向根据扭矩的正负方向规定来确定。在题9-2图中,  
 $F_{R0} = F_{RB} = -F_R$ (向下),  $F_{RA} = F_{RC} = F_R$ (向下)。

总的分布剪力为

$$F_{Sx}' = F_{Sx} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}
 &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\
 &= \pi^3 m D \left[ \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \frac{1}{a} + \frac{(1-\mu)}{ab^2} \right] \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},
 \end{aligned}$$

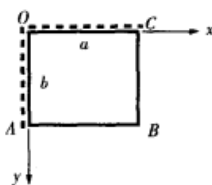
所以

$$(F_{sx})_{\max} = \frac{q_0 a \left[ 1 + (2-\mu) \frac{a^2}{b^2} \right]}{\pi \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)}.$$

**9-3** 矩形薄板 OABC 的 OA 边和 OC 边是简支边, AB 边和 CB 边是自由边, 如题 9-3 图所示, 在 B 点受有横向集中力  $F$ , 试证  $w = mxy$  能满足一切条件, 其中  $m$  是待定常数。试求挠度, 内力和反力。

**【解】** (1) OA ( $x=0$ ) 边和 OC ( $y=0$ ) 边是简支边, 边界条件是

$$\begin{cases} (w)_{x=0} = 0, & \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0} = 0, \\ (w)_{y=0} = 0, & \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0, \end{cases}$$



题 9-3 图

CB ( $x=a$ ) 边和 AB ( $y=b$ ) 边是自由边, 边界条件是

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0, & \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0, \\ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0, & \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=b} = 0. \end{cases}$$

很显然,  $w = mxy$  满足上述四个边的边界条件。

本题中薄板每单位面积的横向荷载  $q=0$ ,  $w = mxy$  也满足薄板的弹性曲面微分方程

$$D \nabla^4 w = q.$$

(2) 在 B 点有集中外荷载  $F$ , 角点的条件为

$$F_{RB} = -F,$$

根据教材中式(9-18), 得

$$-F = F_{RBA} + F_{RBC} = (M_{yx})_B + (M_{xy})_B = 2(M_{xy})_B,$$

$$-F = -2D(1-\mu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_B = -2D(1-\mu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a, y=b},$$

$$\text{解得, } m = \frac{F}{2D(1-\mu)}.$$

$$\text{所以, } w = \frac{F}{2D(1-\mu)} xy, \quad w_{\max} = \frac{Fab}{2D(1-\mu)}.$$

(3) 求内力和反力

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0,$$

$$M_{xy} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{F}{2},$$

$$F_{sx} = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w = 0, \quad F_{sy} = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w = 0,$$

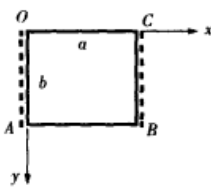
$$F_{sx}^i = F_{sx} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0, \quad F_{sy}^i = F_{sy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0.$$

角点反力的正负号根据扭矩的正负方向规定来确定,在图中, $F_{RO}$ , $F_{RB}$ 以向上为正, $F_{RA}$ , $F_{RC}$ 以向下为正。

$$F_{Ri} = 2(M_{xy})_i = -2D(1-\mu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_i = -2mD(1-\mu) = -F.$$

$$F_{RA} = F_{RC} = -F_R \text{ (与荷载反向,向上)}, F_{RO} = F_{RB} = -F_R \text{ (与荷载同向,向下)}.$$

9-4 矩形薄板 OABC 的 OA 边和 BC 边是简支边, OC 边和 AB 边是自由边,如题 9-4 图所示,不受横向荷载 ( $q=0$ ),但在两个简支边上受均布力矩  $M$ ,在两个自由边上受均布力矩  $\mu M$ 。试证  $w=f(x)$  能满足一切条件,并求出挠度,弯矩和反力。



题 9-4 图

【解】(1) 本题中也无横向荷载,  $q=0$ , 把  $w=f(x)$  代入弹性曲面微分方程

$$D \nabla^4 w = D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = 0,$$

其中,  $w=f(x)$  只是  $x$  的函数,  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0$ 。

$$D \nabla^4 w = D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0,$$

$D$  不为零, 积分得

$$w = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad (a)$$

(2) OA ( $x=0$ ), CB ( $x=a$ ) 是广义的简支边, 其边界条件是

$$(w)_{x=0,a} = 0, \quad (b)$$

$$(M_x)_{x=0,a} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0,a} = M, \quad (c)$$

将式(a)代入式(b)、(c), 得

$$A = 0, \quad B = -\frac{M}{2D}, \quad C = \frac{M}{2D}a, \quad D = 0.$$

$$w = -\frac{M}{2D}(x^2 - ax). \quad (e)$$

当  $x = \frac{a}{2}$  时,  $w_{\max} = \frac{Ma^2}{8D}$ 。

$OC(y=0), AB(y=b)$  是广义的自由边, 其边界条件是

$$(w)_{y=0,b} = 0, \quad (f)$$

$$(M_y)_{y=0,b} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0,b} = \mu M, \quad (g)$$

将式(e)代入自由边的边界条件, 式(f)、(g), 显然, 满足边界条件。

(3) 求弯矩和反力

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = M,$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \mu M,$$

$$M_{xy} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0,$$

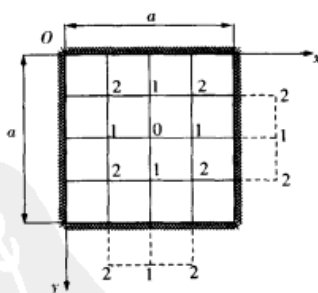
$$F_{sx}^i = F_{sx} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0,$$

$$F_{sy}^i = F_{sy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0,$$

$$F_{Ri} = 2(M_{xy})_i = -2D(1-\mu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_i = 0.$$

**9-5** 正方形薄板, 边长为  $a$ , 四边固定, 受均布荷载  $q_0$ , 取  $h=a/4$ , 用差分法求解。

**【解】** 薄板弹性曲面微分方程, 改为差分方程时, 对每一个内结点均应列出一个差分方程。由于对称, 只需取  $w_0, w_1, w_2$  为未知值。分别为结点 0, 1, 2 列出差分方程, 并应用边界条件。



解 9-5 图

对于图中的 0 点,

$$(\nabla^4 w)_0 = (q/D)_0,$$

写成差分方程为

$$20w_0 - 8(4w_1) + 2(4w_2) = q_0 h^4 / D, \quad (a)$$

对于 1 点, 写成差分方程为

$$20w_1 - 8(w_0 + 2w_1) + 2(2w_1) + 2w_1 = q_0 h^4 / D, \quad (b)$$

对于 2 点, 写成差分方程为

$$20w_2 - 8(2w_1) + 2(w_0) + 4w_2 = q_0 h^4 / D. \quad (c)$$

将式(a)、(b)和(c)简化, 并联立求解得

$$w_0 = 0.4606 q_0 h^4 / D,$$

$$w_1 = 0.3089 q_0 h^4 / D,$$

$$w_2 = 0.2093 q_0 h^4 / D.$$

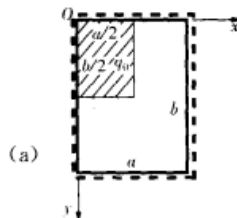
由对称性可见, 最大挠度发生在结点 0 处。最大挠度为

$$w_{\max} = w_0 = 0.4606q_0h^4/D = 0.0018q_0a^4/D。$$

9-6 四边简支的矩形板,题9-6图,在 $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ 和 $0 \leq y \leq \frac{b}{2}$ 的范围内受均布荷载 $q_0$ ,试用重三角级数求解挠度。

【解】对四边简支的矩形薄板,边界条件是

$$\begin{cases} (w)_{x=0}=0, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0}=0, \\ (w)_{x=a}=0, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=a}=0, \\ (w)_{y=0}=0, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0}=0, \\ (w)_{y=b}=0, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=b}=0, \end{cases}$$



题9-6图

应用纳维解法,取 $w$ 的表达式为如下的重三角级数

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (b)$$

其中的 $m, n$ 是正整数。代入(a)式,可见满足全部边界条件。

根据教材§9-5中式(e),知

$$A_{mn} = \frac{4 \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{\pi^4 abD \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (c)$$

当薄板在 $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ 和 $0 \leq y \leq \frac{b}{2}$ 的范围内受均布荷载 $q_0$ ,式(c)中的积分项为

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy &= q_0 \int_0^{a/2} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^{b/2} \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\ &= \frac{q_0 ab}{\pi^2 mn} \times \begin{cases} 1, & (m=1, 3, 5, \dots; n=1, 3, 5, \dots) \\ [1 - (-1)^{m/2}][1 - (-1)^{n/2}], & (m=1, 3, 5, \dots; n=1, 3, 5, \dots) \end{cases} \end{aligned}$$

代入 $A_{mn}$ ,最后的挠度的表达式

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{4q_0}{\pi^6 Dmn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \\ &\quad \sum_{\frac{m}{2}=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{\frac{n}{2}=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{16q_0}{\pi^6 Dmn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

9-7 圆形薄板,半径为 $a$ ,边界简支,受均布荷载 $q_0$ ,试求挠度及弯矩,并求出它们的最大值。

【解】对于受均布荷载 $q = q_0$ 的薄板,由教材§9-9中式(e),知挠度的解答为

$$w = C_1 \ln \rho + C_2 \rho^2 \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4 + \frac{q_0}{64D} \rho^4. \quad (a)$$

本题中的薄板无孔,仅有外边界  $\rho=a$  的边界条件。此时,应考虑薄板中心点 ( $\rho=0$ ) 处,挠度和内力不可能为无限大,但式(a)中的第一、第二项为无限大,因此,常数  $C_1$  和  $C_2$  都应等于零。于是得

$$w = C_3 \rho^2 + C_4 + \frac{q_0}{64D} \rho^4, \quad (b)$$

由教材中式(9-24)得出弯矩和扭矩

$$\begin{cases} M_\rho = -2(1+\mu)DC_3 - \frac{3+\mu}{16}q_0\rho^2, \\ M_\varphi = -2(1+\mu)DC_3 - \frac{1+3\mu}{16}q_0\rho^2, \\ M_{\varphi\rho} = M_{\rho\varphi} = 0. \end{cases} \quad (c)$$

半径为  $a$  的薄板具有简支边,则边界条件为

$$(w)_{\rho=a} = 0, \quad (M_\rho)_{\rho=a} = 0.$$

将式(b)和式(c)的第一式代入上面边界条件,得

$$a^2 C_3 + C_4 + \frac{q_0}{64D} a^4 = 0,$$

$$-2(1+\mu)DC_3 - \frac{3+\mu}{16}q_0 a^2 = 0.$$

由此求得

$$C_3 = -\frac{q_0(3+\mu)a^2}{32(1+\mu)D}, \quad C_4 = \frac{q_0(5+\mu)a^4}{64(1+\mu)D}.$$

代入式(b)及式(c),即得

$$\begin{cases} w = -\frac{q_0(3+\mu)a^2}{32(1+\mu)D}\rho^2 + \frac{q_0(5+\mu)a^4}{64(1+\mu)D} + \frac{q_0}{64D}\rho^4, \\ M_\rho = \frac{q_0(3+\mu)a^2}{16} - \frac{3+\mu}{16}q_0\rho^2, \\ M_\varphi = \frac{q_0(3+\mu)a^2}{16} - \frac{1+3\mu}{16}q_0\rho^2. \end{cases}$$

在  $\rho=0$  处,挠度和弯矩有最大值

$$w_{\max} = \frac{q_0(5+\mu)a^4}{64(1+\mu)D}, \quad M_\rho = \frac{q_0(3+\mu)a^2}{16}.$$

**9-8** 固定边圆形薄板,半径为  $a$ ,受轴对称荷载  $q=q_1 \frac{\rho}{a}$ ,试求挠度、弯矩和反力以及它们的最大值。

**【解】** 由教材 §9-9 中式(b),知圆形薄板挠度的解答为

$$w = C_1 \ln \rho + C_2 \rho^2 \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4 + w_1. \quad (a)$$



对于受轴对称荷载  $q = q_1 \frac{\rho}{a}$  的薄板, 其中的特解  $w_1$  为

$$w_1 = \frac{1}{D} \int \frac{1}{\rho} \int \rho \int \frac{1}{\rho} \int q \rho d\rho^4 = \frac{1}{D} \int \frac{1}{\rho} \int \rho \int \frac{1}{\rho} \int \frac{q_1 \rho^2}{a} d\rho^4 = \frac{q_1}{225Da} \rho^5.$$

本题中的薄板无孔, 仅有外边界  $\rho = a$  的边界条件。此时, 应考虑薄板中心点 ( $\rho = 0$ ) 处, 挠度和内力不可能为无限大, 常数  $C_1$  和  $C_2$  都应等于零。于是得

$$w = C_3 \rho^2 + C_4 + \frac{q_1}{225Da} \rho^5, \quad \frac{dw}{d\rho} = 2C_3 + \frac{q_1}{45Da} \rho^4. \quad (b)$$

由教材中式(9-24)得出弯矩和扭矩

$$\begin{cases} M_\rho = -2(1+\mu)DC_3 - \frac{4+\mu}{45a} q_1 \rho^3, \\ M_\varphi = -2(1+\mu)DC_3 - \frac{1+4\mu}{45a} q_1 \rho^3, \\ M_{\varphi\rho} = M_{\rho\varphi} = 0, \\ F_{\varphi\rho} = F_{\rho\varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} = -\frac{4Dq_1}{15} \rho^2. \end{cases} \quad (c)$$

半径为  $a$  的薄板具有固定边, 则边界条件为

$$(w)_{\rho=a} = 0, \quad \left(\frac{dw}{d\rho}\right)_{\rho=a} = 0.$$

将式(b)代入上述边界条件, 得

$$a^2 C_3 + C_4 + \frac{q_1}{225Da} a^5 = 0,$$

$$2C_3 + \frac{q_1}{45Da} a^4 = 0.$$

由此求得

$$C_3 = -\frac{q_1 a^2}{90D}, \quad C_4 = \frac{q_1 a^4}{150D}.$$

代入式(b)及式(c), 即得

$$\begin{cases} w = -\frac{q_1 a^2}{90D} \rho^2 + \frac{q_1 a^4}{150D} + \frac{q_1}{225Da} \rho^5, \\ M_\rho = \frac{(1+\mu)q_1 a^2}{45} - \frac{4+\mu}{45a} q_1 \rho^3, \\ M_\varphi = \frac{(1+\mu)q_1 a^2}{45} - \frac{1+4\mu}{45a} q_1 \rho^3, \\ M_{\varphi\rho} = M_{\rho\varphi} = 0, \\ F_{\varphi\rho} = F_{\rho\varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} = -\frac{q_1}{3a} \rho^2. \end{cases}$$

挠度、弯矩以及反力的最大值为

$$w_{\max} = \frac{q_1 a^4}{150D}, \quad (M_\rho)_{\rho=a} = -\frac{q_1 a^2}{15},$$

$$(M_\rho)_{\rho=0} = (M_\varphi)_{\rho=0} = -\frac{(1+\mu)q_1 a^2}{45}, \quad (F_{\varphi\rho}^1)_{\rho=a} = -\frac{q_1 a}{3}.$$

9-9 极坐标中的应力变换式是

$$\sigma_x = \sigma_\rho \cos^2 \varphi + \sigma_\varphi \sin^2 \varphi - 2\tau_{\rho\varphi} \cos \varphi \sin \varphi,$$

将上式两边乘以  $zdz$ , 并沿板厚从  $-\frac{\delta}{2}$  到  $\frac{\delta}{2}$  积分, 便可得出薄板弯矩的变换式

$$M_x = M_\rho \cos^2 \varphi + M_\varphi \sin^2 \varphi - 2M_{\rho\varphi} \cos \varphi \sin \varphi. \quad (a)$$

而弯矩  $M_x$  又可以表示为

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (b)$$

试证: 将挠度  $w$  的二阶导数变换式代入式(b), 并与式(a)相比, 便可导出极坐标中薄板的  $M_\rho$ ,  $M_\varphi$  及  $M_{\rho\varphi}$  的公式, 即教材中式(9-10)中的弯矩、扭矩公式。

【证明】 将挠度  $w$  的二阶导数变换式代入式(b), 得

$$M_x = -D \left\{ \cos^2 \varphi \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \right) + \sin^2 \varphi \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - 2 \cos \varphi \sin \varphi \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right] + \mu \sin^2 \varphi \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \right) + \mu \cos^2 \varphi \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + 2\mu \cos \varphi \sin \varphi \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right] \right\}.$$

整理得

$$M_x = -D \left\{ \cos^2 \varphi \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\mu}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \sin^2 \varphi \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \right) - 2(1+\mu) \cos \varphi \sin \varphi \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right] \right\}. \quad (c)$$

将式(c)与式(a)相比, 便可导出极坐标中薄板的  $M_\rho$ ,  $M_\varphi$  及  $M_{\rho\varphi}$  的公式

$$\begin{cases} M_\rho = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \mu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right], \\ M_\varphi = -D \left[ \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \right], \\ M_{\rho\varphi} = -D(1-\mu) \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right]. \end{cases}$$

9-10 在  $z$  面上, 切应力之间有关系式

$$\tau_{xz} = \tau_{x\rho} \cos \varphi - \tau_{x\varphi} \sin \varphi,$$

或由切应力互等关系写成

$$\tau_{xz} = \tau_{\rho z} \cos \varphi - \tau_{\varphi z} \sin \varphi,$$

将上式两边乘以  $dz$ , 并沿板厚从  $-\frac{\delta}{2}$  到  $\frac{\delta}{2}$  积分, 得到横向剪力的变换式

$$F_{xz} = F_{\rho z} \cos \varphi - F_{\varphi z} \sin \varphi. \quad (c)$$

而  $F_{\rho z}$  又可以表示为

$$F_{sx} = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w). \quad (d)$$

试证:将一阶导数 $\frac{\partial}{\partial x}$ 的变换式代入式(d),并与式(c)相比,便可导出极坐标中薄板的横向剪力公式,即教材中式(9-10)中的 $F_{s\rho}$ 和 $F_{s\varphi}$ 的公式。

【证明】 将挠度 $w$ 的一阶导数变换式代入式(d),得

$$F_{sx} = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) = -D \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} (\nabla^2 w) + D \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nabla^2 w). \quad (e)$$

将式(e)与式(c)两式相比,便可导出极坐标中薄板的横向剪力 $F_{s\rho}, F_{s\varphi}$ 的公式

$$\begin{cases} F_{s\rho} = -D \frac{\partial}{\partial \rho} (\nabla^2 w), \\ F_{s\varphi} = -D \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nabla^2 w). \end{cases}$$



## 参 考 文 献

1. 徐芝纶. 弹性力学简明教程. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2002
2. 徐芝纶. 弹性力学(上、下册). 第三版. 北京: 高等教育出版社, 1990
3. 王润富. 弹性力学简明教程学习指导. 北京: 高等教育出版社, 2004
4. 林小松, 樊友景. 《弹性力学》题解. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2003
5. 王俊民. 弹性力学学习方法解题指导. 上海: 同济大学出版社, 2000
6. 杨桂通. 弹性力学. 北京: 高等教育出版社, 1998
7. 陆明万, 罗学富. 弹性力学基础. 北京: 清华大学出版社, 1990
8. 王龙甫. 弹性力学. 第一版. 北京: 科学出版社, 1978
9. 赵学仁. 弹性力学基础. 北京: 北京理工大学出版社, 1994
10. 王佩纶. 弹性力学学习指导与例题分析. 南京: 南京工学院出版社, 1988



# 目 录

第一章 绪 论	1
本章学习重点与难点	1
典型例题讲解	1
习题全解	2
第二章 平面问题的基本理论	5
本章学习重点与难点	5
典型例题讲解	8
习题全解	9
第三章 平面问题的直角坐标解答	26
本章学习重点与难点	26
典型例题讲解	27
习题全解	30
第四章 平面问题的极坐标解答	46
本章学习重点与难点	46
典型例题讲解	48
习题全解	50
第五章 用差分法和变分法解平面问题	70
本章学习重点与难点	70
典型例题讲解	73
习题全解	77
第六章 用有限单元法解平面问题	93
本章学习重点与难点	93
典型例题讲解	95
习题全解	99
第七章 空间问题的基本理论	118
本章学习重点与难点	118
典型例题讲解	120
习题全解	122

---

第八章 空间问题的解答 .....	128
本章学习重点与难点 .....	128
典型例题讲解 .....	130
习题全解 .....	132
第九章 薄板弯曲问题 .....	141
本章学习重点与难点 .....	141
典型例题讲解 .....	145
习题全解 .....	147
参 考 文 献 .....	158

