第三章　平面问题的直角坐标解答

要点 ——用逆解法、半逆解法求解平面弹性力学问题。

主 要 内 容

§ 3-1　多项式解答

适用性：由一些直线边界构成的弹性体。

目的：　考察一些简单多项式函数作为应力函数$\varphi(x,y)$，能解决什么样的力学问题。　——逆解法

1. 一次多项式

（1）$\varphi(x,y)=ax+by+c$　　其中：a、b、c 为待定系数。

（2）检验$\varphi(x,y)$ 是否满足双调和方程：$\nabla^4\varphi=\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0$

显然$\varphi(x,y)$ 满足双调和方程，因而可作为应力函数。

（3）对应的应力分量：

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-f_x x=0-f_x x=-f_x x \qquad \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-f_y y=0-f_y y=-f_y y$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=0$$

若体力：$fx=fy=0$，则有：$\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=0$

结论1：
（1） 一次多项式对应于**无体力和无应力状态**；
（2）在该函数$\varphi(x,y)$上加上或减去一个一次多项式，对应力无影响。

2. 二次多项式

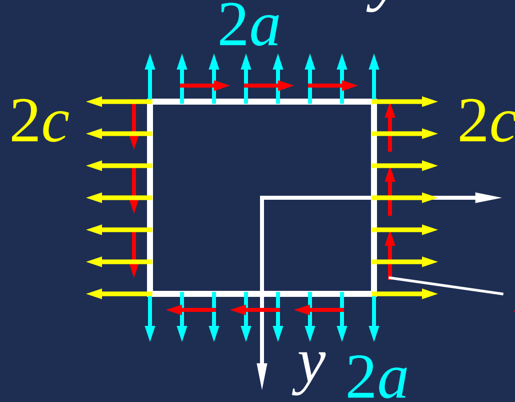
（1） $\varphi = ax^2 + bxy + cy^2$ 其中： a、b、c 为待定系数。

（2）检验$\varphi(x,y)$ 是否满足双调和方程，显然有

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}=0,\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0,\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}=0 \longrightarrow \nabla^4\varphi = 0$$ (可作为应力函数)

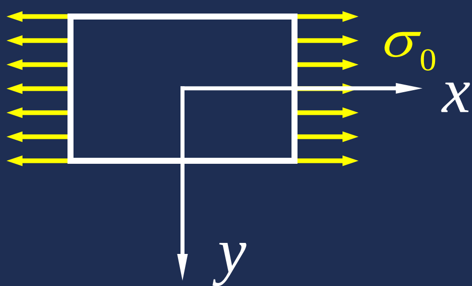
（3） 由式（2-26）计算应力分量： (假定：$f_x = f_y = 0$； $a>0$, $b>0$, $c>0$)

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 2c \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 2a \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = -b$$



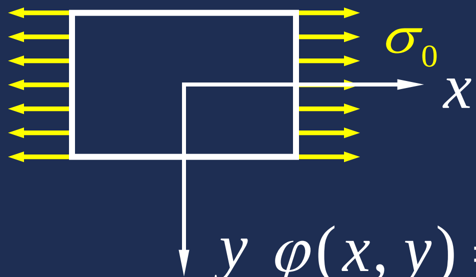
$\tau_{xy} = -b$

结论2：二次多项式对应于**均匀应力分布**。

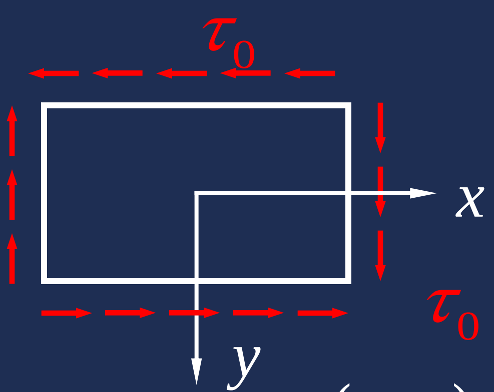


$$\varphi = \frac{\sigma_0}{2}y^2$$

例：试求图示板的应力函数。



$$\varphi(x,y)=\frac{\sigma_0}{2}y^2$$



$$\varphi(x,y)=-\tau_0 xy$$

3. 三次多项式

（1） $\varphi = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ 其中：a、b、c、d 为待定系数。

（2） 检验$\varphi(x,y)$是否满足双调和方程，显然有

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}=0,\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0,\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}=0 \longrightarrow \nabla^4\varphi=0$$ （可作为应力函数）

（3） 由式（2-26）计算应力分量： （假定：$fx = fy = 0$）

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=2cx+6dy \quad \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=2by+6ax \quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=-2bx-2cy$$

结论3：三次多项式对应于线性应力分布。

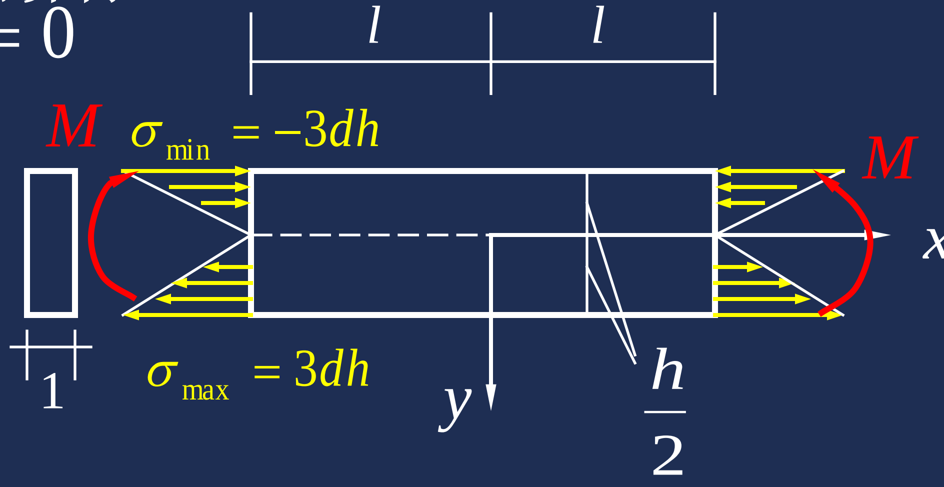
§ 3-2　矩形梁的纯弯曲

讨论： 取 $\varphi = dy^3$，$(f_x = f_y = 0)$ 可算得：

$$\sigma_x = 6dy \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0$$

图示梁对应的边界条件：

$$\begin{cases} y = \pm \dfrac{h}{2}: & \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0 \\ x = \pm l: & \sigma_x = 6dy, \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$



可见： $\varphi = dy^3$ —— 对应于矩形截面梁的**纯弯曲问题**应力分布。

常数 d 与弯矩 M 的关系：

由梁端部的边界条件： (1) $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dy = 0 \Longrightarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 6dy \cdot dy \equiv 0$

(2) $$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x y \cdot dy = M \Longrightarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 6dy^2 dy = M \Longrightarrow \frac{d}{2}h^3 = M \quad (\text{或} d = \frac{2M}{h^3})$$

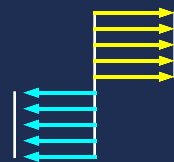
$$\Longrightarrow \sigma_x = \frac{12M}{h^3} y \Longrightarrow \sigma_x = \frac{M}{(h^3/12)} y \Longrightarrow \boxed{\sigma_x = \frac{M}{I} y}$$

可见： 此结果与材力中结果相同，说明材力中纯弯曲梁的应力结果是正确的。

说明：

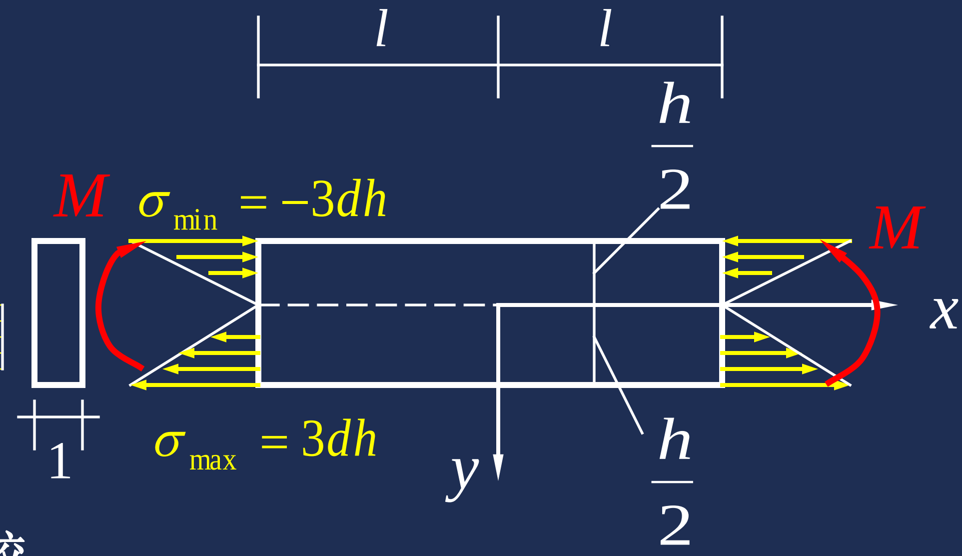
(1) 组成梁端力偶 **M** 的面力须线性分布，且中心处为零，结果才是精确的。

(2) 若按其它形式分布，如：



则此结果不精确，有误差；

但按圣维南原理，仅在两端误差较大，离端部较远处误差较小。



$$\sigma_x = 6dy \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0$$

(3) 当 l 远大于 h 时，误差较小；反之误差较大。

$$\boxed{\sigma_x = \frac{M}{I} y}$$

4. 四次多项式

（1） $\varphi = ax^4 + bx^3 y + cx^2 y^2 + dxy^3 + ey^4$

（2） 检验$\varphi(x,y)$ 是否满足双调和方程

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 24a \quad 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 8c \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 24e \Longrightarrow \text{代入：} \nabla^4 \varphi = 0$$

得 $24a + 8c + 24e = 0 \Longrightarrow 3a + c + 3e = 0$

可见，对于函数：

$$\varphi = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$$

其待定系数，须满足下述关系才能作为应函数： $\boxed{3a + c + 3e = 0}$

（3）应力分量：

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 2cx^2 + 6dxy + 12ey^2 \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 2cy^2 + 6bxy + 12ax^2 \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = -3bx^2 - 4cxy - 3dy^2 \end{cases}$$

—— 应力分量为 x、y 的二次函数。

（4）特例：

$$\varphi = ax^4 + ey^4$$ （须满足：$a + e = 0$）

$$\begin{cases} \sigma_y = 12ax^2 \\ \sigma_x = 12ey^2 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

总结：（多项式应力函数 φ 的性质）

（1）多项式次数 $n < 4$ 时，则系数可以任意选取，总可满足 $\nabla^4\varphi = 0$ 。

多项式次数 $n \geq 4$ 时，则系数须满足一定条件，才能满足 $\nabla^4\varphi = 0$。

多项式次数 n 越高，则系数间需满足的条件越多。

（2）一次多项式，对应于无体力和无应力状态；任意应力函数 $\varphi(x,y)$ 上加上或减去一个一次多项式，对应力无影响。

（3）二次多项式，对应均匀应力状态，即全部应力为常量；三次多项式，对应于线性分布应力。

（4）用多项式构造应力函数 $\varphi(x,y)$ 的方法 —— 逆解法（只能解决简单直线应力边界问题）。

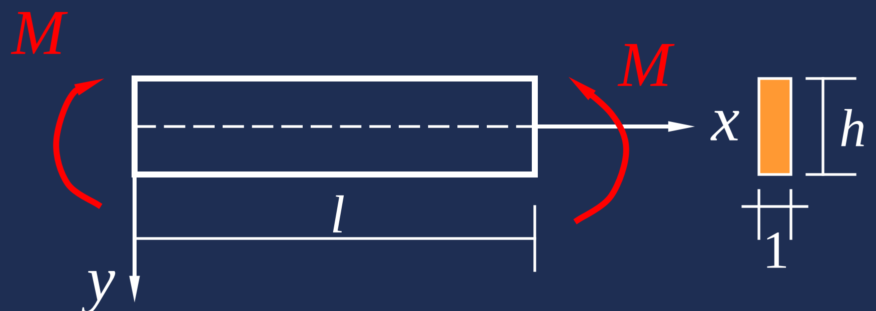
问题：

按应力求解平面问题，其基本未知量为：$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ，本节说明如何由 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 求出形变分量、位移分量？

§ 3-3　位移分量的求出

以纯弯曲梁为例，说明如何由 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 求出形变分量、位移分量?

1. 形变分量与位移分量



（1）形变分量

由前节可知，其应力分量为：

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{M}{I} y = \dfrac{My}{\left(h^3/12\right)} \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

平面应力情况下的物理方程：

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \end{cases}$$

将式（a）代入得：

$$\underbrace{\varepsilon_x = \frac{1}{E}\frac{My}{I} \quad \varepsilon_y = -\frac{\mu}{E}\frac{My}{I} \quad \gamma_{xy} = 0} \qquad \text{(b)}$$

（2）位移分量

将式（b）代入几何方程得：

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{E}\dfrac{My}{I} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\mu}{E}\dfrac{My}{I} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad \text{(c)}$$

（2）位移分量

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{E}\dfrac{My}{I} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\mu}{E}\dfrac{My}{I} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{(c)}$$

将式（c）前两式积分，得：

$$\begin{cases} u = \dfrac{M}{EI}xy + f_1(y) \\ v = -\mu\dfrac{M}{2EI}y^2 + f_2(x) \end{cases} \quad \text{(d)}$$

式中： $f_1(y), f_2(x)$ 为待定函数。

将式 (d) 代入 (c) 中第三式，得：

$$\frac{M}{EI}x + f_1'(y) + f_2'(x) = 0$$

整理得： $\dfrac{M}{EI}x + f_2'(x) = -f_1'(y)$

（仅为 x 的函数）（仅为 y 的函数）

要使上式成立，须有

$$\begin{cases} f_1'(y) = -\omega \\ \dfrac{M}{EI}x + f_2'(x) = \omega \end{cases} \quad \text{(e)}$$

式中：ω为常数。 积分上式，得

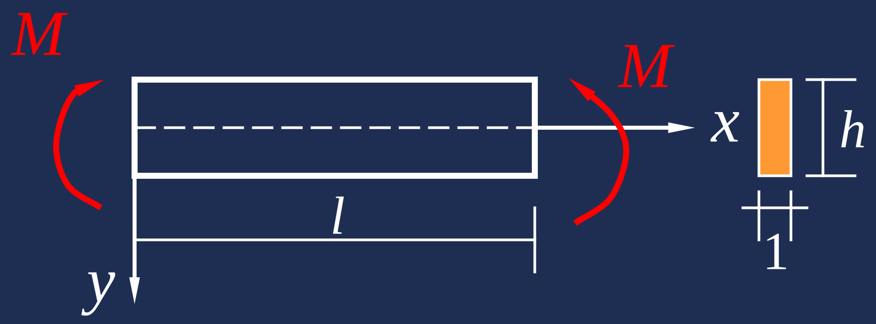
$$\begin{cases} f_1(y) = -\omega y + u_0 \\ f_2(x) = -\dfrac{M}{2EI}x^2 + \omega x + v_0 \end{cases}$$

将上式代入式（d），得

$$\begin{cases} u = \dfrac{M}{EI}xy - \omega y + u_0 \\ v = -\dfrac{\mu M}{2EI}y^2 - \dfrac{M}{2EI}x^2 + \omega x + v_0 \end{cases} \quad \text{(f)}$$

（2）位移分量

$$\begin{cases} u = \dfrac{M}{EI}xy - \omega y + u_0 \\ v = -\dfrac{\mu M}{2EI}y^2 - \dfrac{M}{2EI}x^2 + \omega x + v_0 \end{cases} \qquad \text{(f)}$$



式中：u_0、v_0、ω 由位移边界条件确定。

讨论：

（1）$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{M}{EI}x - \omega \xrightarrow{\text{当 } x = x_0 = \text{常数}} \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=x_0} = \dfrac{M}{EI}x_0 - \omega \equiv \text{常数}$

$\beta = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ —— u 关于铅垂方向的变化率，即铅垂方向线段的转角。

$\beta|_{x=x_0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=x_0} = \dfrac{M}{EI}x_0 - \omega \equiv \text{常数}$ **说明：** *同一截面上的各铅垂线段转角相同。*

$\boxed{\textit{横截面保持平面}}$ —— *材力中“平面”的假设成立。*

（2） 将下式中的第二式对 x 求二阶导数：

$$\begin{cases} u = \dfrac{M}{EI}xy - \omega y + u_0 \\ v = -\dfrac{\mu M}{2EI}y^2 - \dfrac{M}{2EI}x^2 + \omega x + v_0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{M}{EI} = 常数$$

说明：在微小位移下，梁纵向纤维的曲率相同。即

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{M}{EI}}$$

—— 材料力学中挠曲线微分方程

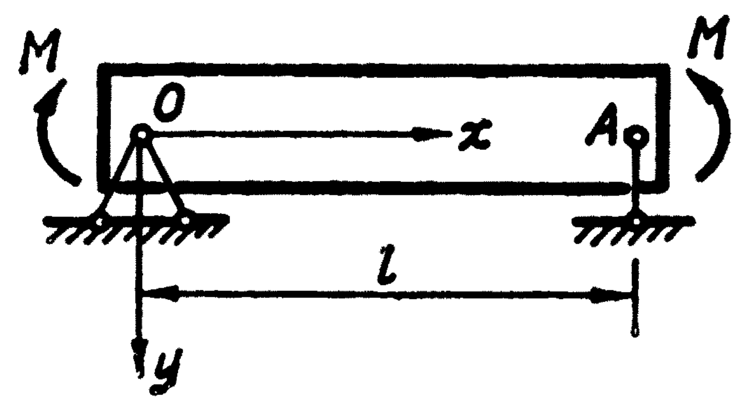
2. 位移边界条件的利用

$$\begin{cases} u = \dfrac{M}{EI}xy - \omega y + u_0 \\ v = -\dfrac{\mu M}{2EI}y^2 - \dfrac{M}{2EI}x^2 + \omega x + v_0 \end{cases} \qquad \text{(f)}$$

（1）两端简支

其边界条件：

$$u\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0 \quad v\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0 \quad v\Big|_{\substack{x=l\\y=0}} = 0$$



将其代入(f)式，有

$$u_0 = 0 \qquad v_0 = 0$$

$$-\frac{Ml^2}{2EI} + \omega l + v_0 = 0 \Rightarrow \omega = \frac{Ml}{2EI}$$

将其代回(f)式，有

$$\boxed{\begin{cases} u = \dfrac{M}{EI}\left(x - \dfrac{l}{2}\right)y \\ v = \dfrac{M}{2EI}(l-x)x - \dfrac{\mu M}{2EI}y^2 \end{cases}} \qquad \text{(3-3)}$$

梁的挠曲线方程：

$$v\Big|_{y=0} = \frac{M}{2EI}(l-x)x$$

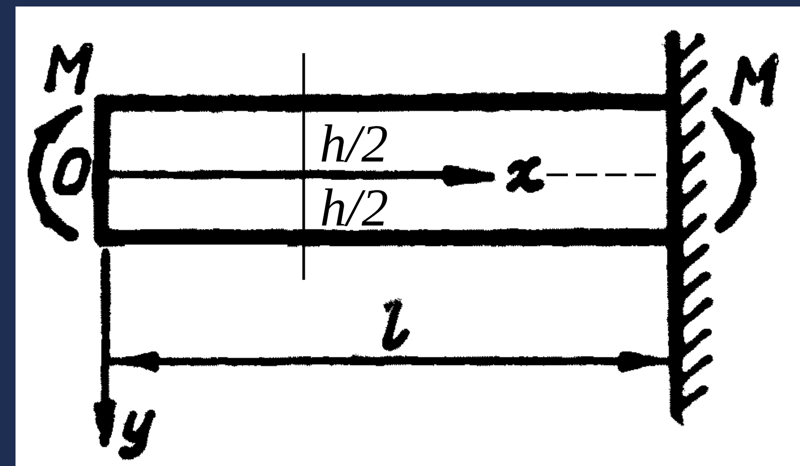
—— 与材力中结果相同

（2）悬臂梁

边界条件 $\begin{cases} u\big|_{x=l}=0 \\ v\big|_{x=l}=0 \end{cases}$ $\left(-\dfrac{h}{2}\le y\le\dfrac{h}{2}\right)$

$$\begin{cases} u=\dfrac{M}{EI}xy-\omega y+u_0 \\ v=-\dfrac{\mu M}{2EI}y^2-\dfrac{M}{2EI}x^2+\omega x+v_0 \end{cases} \quad \text{(f)}$$

由式（f）可知，此边界条件无法满足。



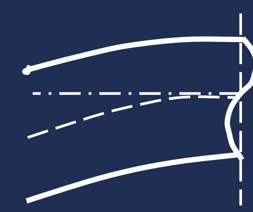
边界条件改写为：

$$\underbrace{u\Big|_{\substack{x=l\\y=0}}=0,\ v\Big|_{\substack{x=l\\y=0}}}=0 \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{x=l\\y=0}}=0$$

（中点不动）　　（轴线在端部不转动）

代入式（f），有

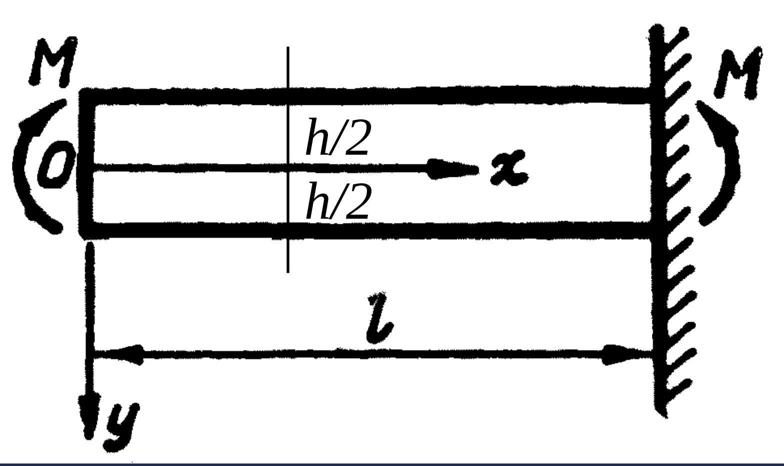
$$u_0=0 \qquad -\frac{M}{2EI}l^2+\omega l+v_0=0 \qquad -\frac{M}{EI}l+\omega=0$$



可求得： $u_0=0$ 　 $v_0=-\dfrac{Ml^2}{2EI}$ 　 $\omega=\dfrac{Ml}{EI}$

$$u=-\frac{M}{EI}(l-x)y \qquad v=-\frac{M}{2EI}(l-x)^2-\frac{\mu M}{2EI}y^2$$

$$
\begin{cases}
u = -\dfrac{M}{EI}(l-x)y \\
v = -\dfrac{M}{2EI}(l-x)^2 - \dfrac{\mu M}{2EI}y^2
\end{cases}
\quad (3\text{-}4)
$$



挠曲线方程：

$$v\big|_{y=0} = -\frac{M}{2EI}(l-x)^2$$ 与材料力学中结果相同

说明：（1）求位移的过程：

（a）将应力分量代入物理方程

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

（b）再将应变分量代入几何方程

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

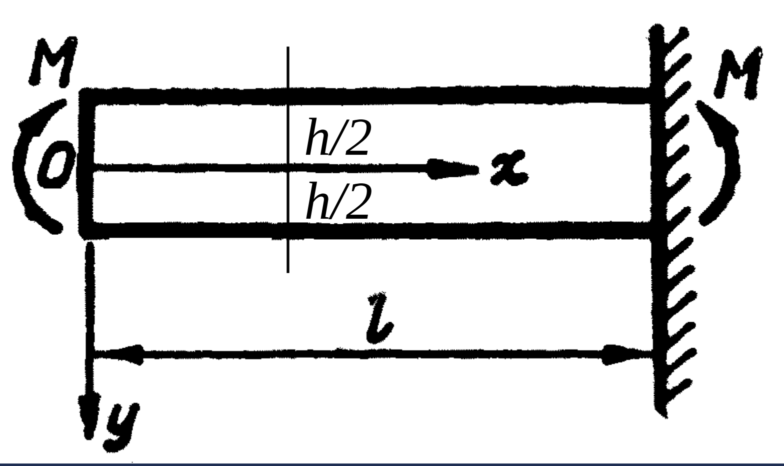
（c）再利用位移边界条件，确定常数。

（2）若为平面应变问题，则将材料常数E、μ作相应替换。

（3）若取固定端边界条件为：

$$\underbrace{u\Big|_{\substack{x=l\\y=0}}=0,\ v\Big|_{\substack{x=l\\y=0}}=0}\qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\substack{x=l\\y=0}}=0$$

（中点不动）



（中点处竖向线段转角为零）

得到：

$$u_0=0\qquad -\frac{Ml^2}{2EI}+\omega l+v_0=0\qquad \frac{Ml}{EI}-\omega=0$$

求得：

$$\underbrace{u_0=0\quad v_0=-\frac{Ml^2}{2EI}}\qquad \omega=\frac{Ml}{EI}$$

此结果与前面情形相同。

$$u=\frac{M}{EI}xy-\omega y+u_0$$

$$v=-\frac{\mu M}{2EI}y^2-\frac{M}{2EI}x^2+\omega x+v_0$$