Review of Lecture #13/第13次课复习

Chapter 10 Compressible Flow through Nozzles, Diffusers, and Wind Tunnels

第十章 通过喷管、扩压器和风洞的可压缩流

主讲人：宋文萍
E-mail: wpsong@nwpu.edu.cn

2019年11月20日 Wednesday

Department of Fluid Mechanics, School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, China

National Key Laboratory of Science and Technology on Aerodynamic Design and Research

Compressible Aerodynamics Course

10.2Governing equations for quasi-one-dimensional flow
(10.2准一维流动控制方程的推导)

10.3 Nozzle flows
(10.3 喷管流动)

10.4 Diffusers
(10.4扩压器)

10.5 Supersonic wind tunnels
(10.5 超声速风洞)

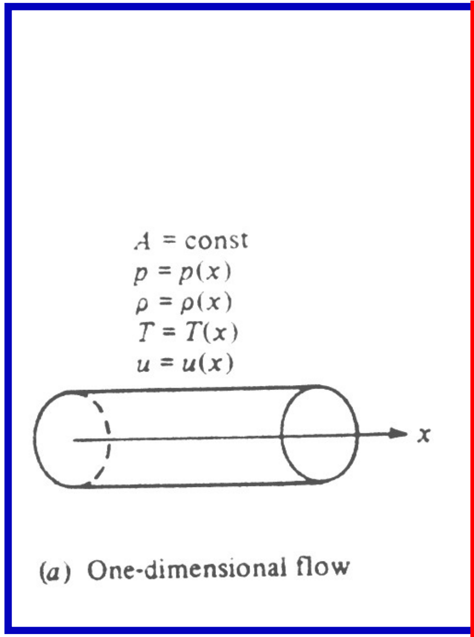
10.6 Viscous Flow：Shock-Wave/Boundary-Layer Interaction inside Nozzles

(10.6 粘性流：喷管内的激波/边界层干扰)

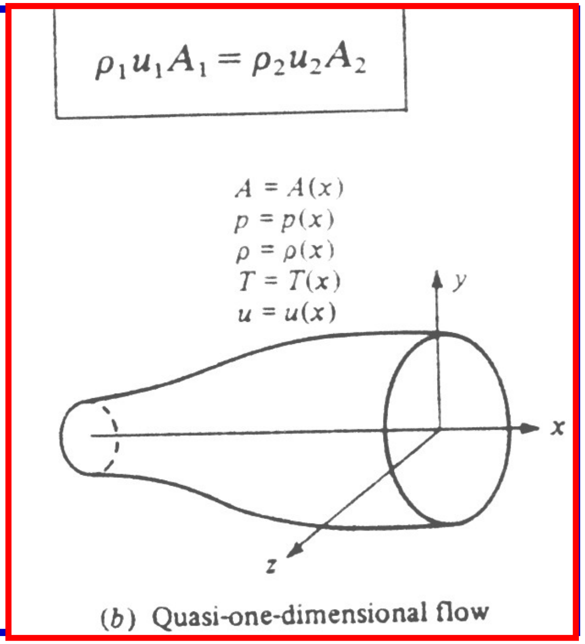
图10.5　第十章的路线图

10.2 Governing Equation for Quasi-One-Dimensional Flow

（准一维流的控制方程）



(a)一维流



(b)准一维流

图10.6

准一维流的定义：

流管面积、流动变量只是 x 的函数，即气流在每一个 x 站位是均匀的，满足函数关系 $A = A(x)$, $p = p(x)$, $\rho = \rho(x)$, $T = T(x)$, $u = u(x)$ 。这种流动被称为准一维流动。

基于准一维流有限控制体的积分形式控制方程推导

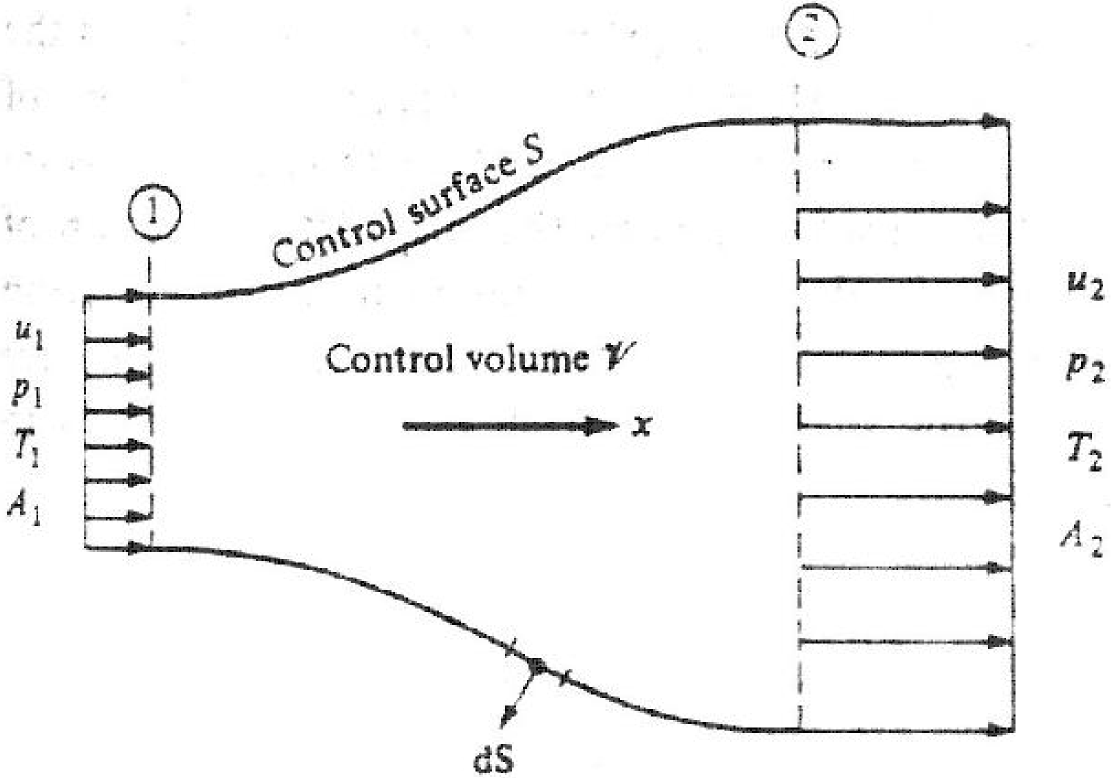


Fig.10.7 Finite control volume for quasi-one-dimensional flow
准一维流有限控制体

准一维流动控制方程归纳如下

$$\boxed{\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2} \quad 或 \quad \boxed{\rho u A = 常数} \qquad (10.1)$$

$$\boxed{p_1 A_1 + \rho_1 u_1^2 A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p dA = p_2 A_2 + \rho_2 u_2^2 A_2} \qquad (10.5)$$

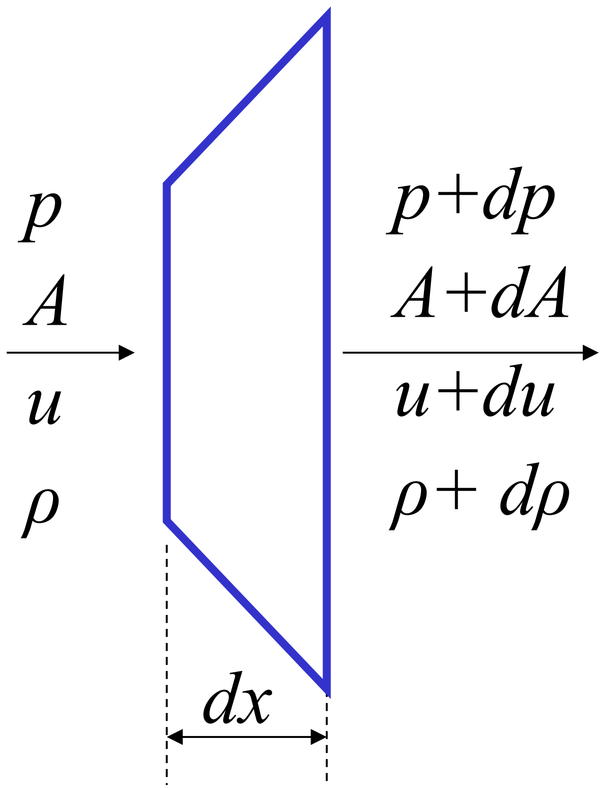
$$\boxed{h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}} \qquad (10.9)$$

$$p_2 = \rho_2 R T_2 \qquad (10.11)$$

$$h_2 = c_p T_2 \qquad (10.12)$$

只要知道1截面处的 $\rho_1, u_1, p_1, T_1, h_1$,以上五个方程就可以确定2截面处的5个未知数 $\rho_2, u_2, p_2, T_2, h_2$ 。

准一维流动的微分 (differential)形式控制方程



将准一维流动微分形式的控制方程归纳如下（differential form of the governing equations）：

$$d(\rho u A)=0 \qquad (10.14)$$

$$dp=-\rho u du \qquad (10.18)$$

$$dh+udu=0 \qquad (10.19)$$

面积-速度关系式的推导 (area-velocity relation)：

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{du}{u}+\frac{dA}{A}=0 \qquad (10.20)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dp}{\rho}=\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{\rho}=-udu\\&\frac{dp}{d\rho}\equiv\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s=a^2\end{aligned}\right\}\rightarrow\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{udu}{a^2}=-\frac{u^2}{a^2}\frac{du}{u}=-M^2\frac{du}{u} \qquad (10.24)$$

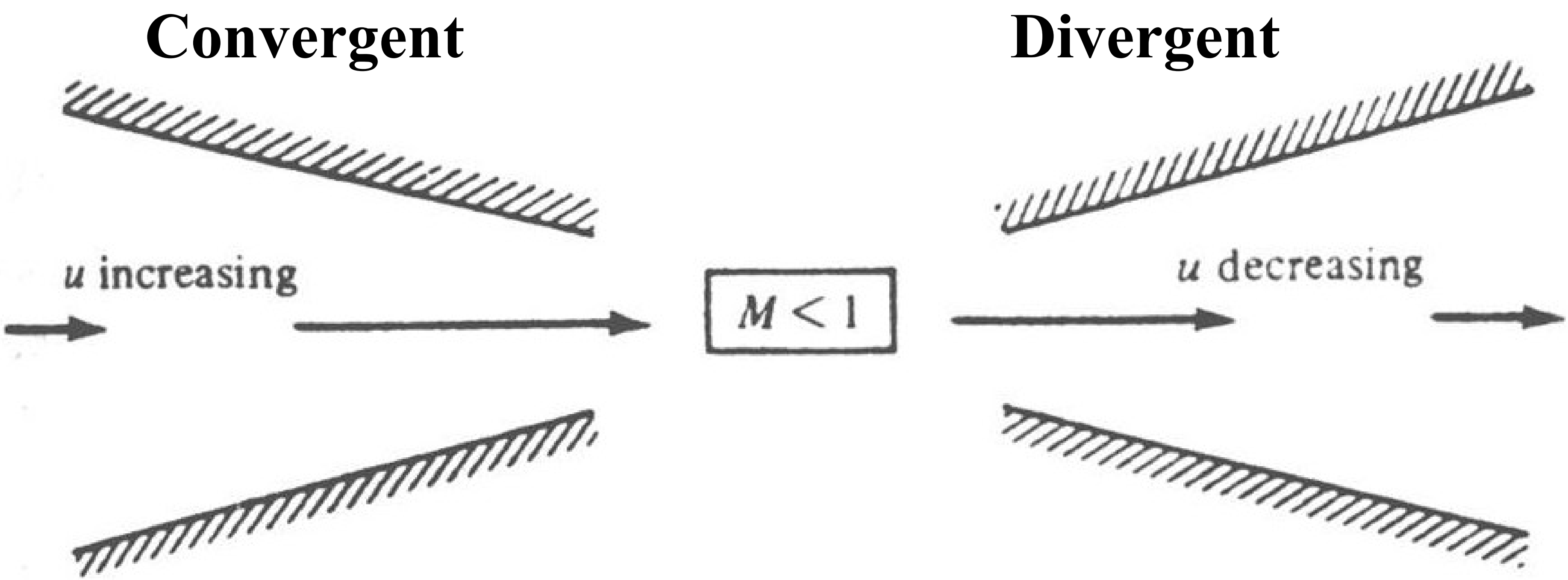
将(10.24)代入 (10.20)式得：$-M^2\frac{du}{u}+\frac{du}{u}+\frac{dA}{A}=0$

$$\boxed{\frac{dA}{A}=(M^2-1)\frac{du}{u}} \qquad (10.25)$$

面积-速度关系式 (area-velocity relation)

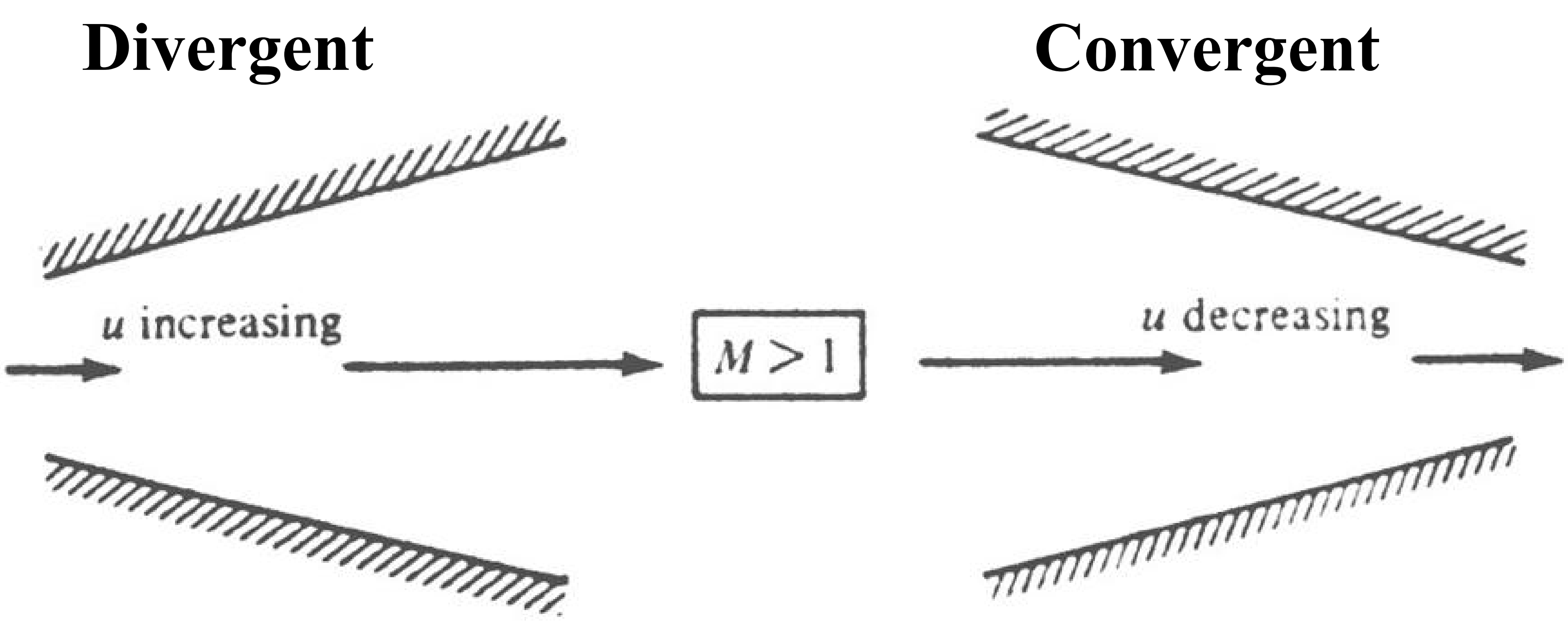
$$\boxed{\frac{dA}{A}=(M^2-1)\frac{du}{u}} \tag{10.25}$$

- 对于 $M<1$（**亚音速流动**），括号内值为负，因此速度的增加（正的du）与面积的减小（负的dA）相联系。同样，速度的减小（负的du）与面积的增加（正的 dA）相联系。
- 对于$M>1$ (**超音速流**) 括号内的值为正，因此速度的增加（正的du）与面积的增加（正的 dA）相联系。同样，速度的减小（负的du）与面积的减小（负的 dA）相联系。
- 对于$M=1$ (**声速流**), 即使 du 为有限值，仍对应 $dA=0$。在数学上，这对应于截面积分布函数$A(x)$达到当地最大或最小。在物理上，$M=1$只能对应于管道面积最小处。



对于亚声速可压缩流动:1)要使流动速度增加，我们必须使管道截面收缩；2)要使速度减小，我们必须使管道扩张。

结论：**Subsonic compressible flow is qualitatively (but not quantitatively) similar to incompressible flow.** 亚声速可压缩流动定性地（但不是定量地）与不可压缩流动相似。



对于超声速流动:1)要使流动速度增加，我们必须使管道截面扩张；2）要使速度减小，我们必须使管道截面收缩。

结论：**They are the direct *opposite* of the trends for subsonic flow.** 与亚声速流变化趋势完全相反。

问题：为什么在亚声速流中，要使速度增大，必须缩小管道截面积A，而在超声速流动中要使速度增大，必须增大管道截面积 A 呢？

提示：从质量守恒的角度去理解

由我们推导出的密度与速度关系(10.24)式就可以明显看出:

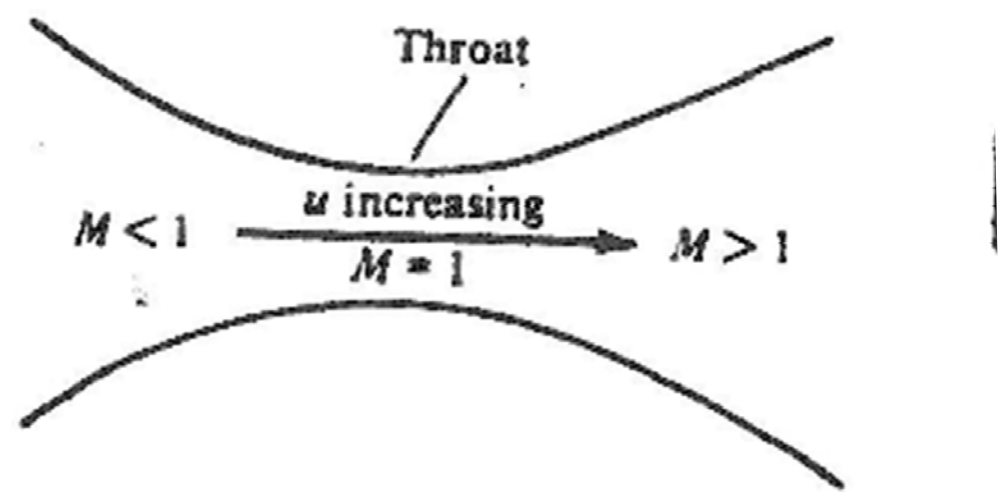
$$\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{udu}{a^2}=-\frac{u^2}{a^2}\frac{du}{u}=-M^2\frac{du}{u} \qquad (10.24)$$

很明显:

1) 在亚声速时, $M^2<1$，密度下降比速度增大慢, 为保证质量守恒 $\rho uA=const.$，要使速度增大， 必须减小面积A;

2) 在超声速时，$M^2>1$，密度下降比速度增大快得多，为保证质量守恒 $\rho uA=const.$，要使速度增大，必须增大截面积 A。

问题：如何将静止气体等熵地加速为超声速流？



- 必须将管道设计成如图所示的“收缩-扩张管道”（**convergent-divergent duct**)；
- 由瑞典工程师拉瓦尔在十九世纪末首先实现，因此这种先收缩后扩张的喷管也被称为拉瓦尔管。

- **重要结论：“马赫数等于1只可能出现在最小截面积处”。喷管的最小截面积处也被称为喉道 (throat)。**

超声速喷管与超声速扩压器的说明和比较/ Illustration and comparison of a supersonic nozzle and a supersonic diffuser

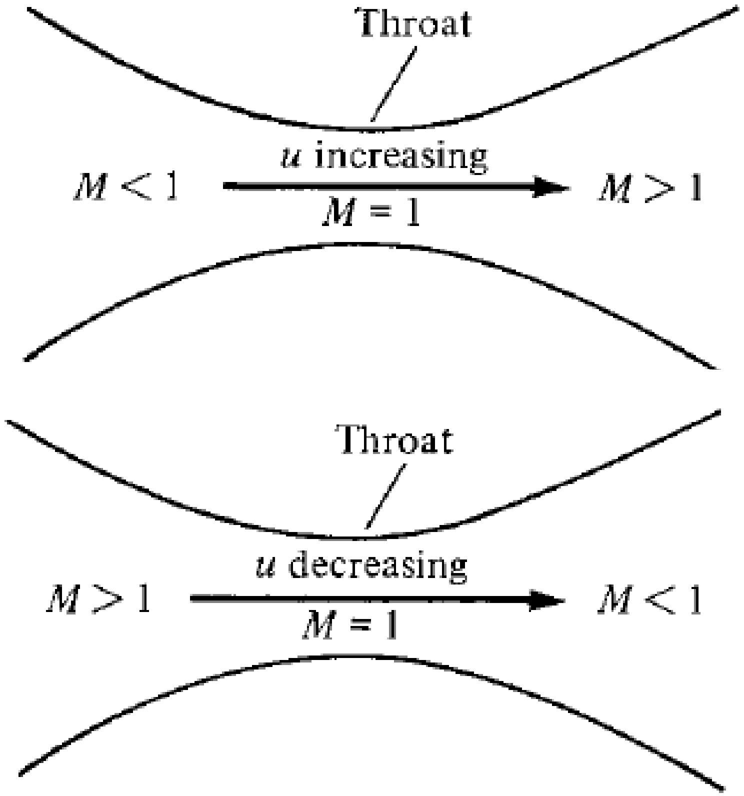


Figure 10.10 Illustration and comparison of a supersonic nozzle and a supersonic diffuser.

Supersonic nozzle ← 可实现的

Supersonic diffuser ← 不可实现的理想状态

投票 最多可选1项

设置

请对上一次课内容的掌握情况进行投票

- A 完全掌握了这部分知识内容
- B 掌握了大部分
- C 掌握了一小部分
- D 完全不懂

提交

Review of Lecture # 13
Ended !

Lecture #14/第14次课

Chapter 10 Compressible Flow through Nozzles, Diffusers, and Wind Tunnels

第十章 通过喷管、扩压器和风洞的可压缩流

主讲人：宋文萍
E-mail: wpsong@nwpu.edu.cn

2019年11月20日 Wednesday

Department of Fluid Mechanics, School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi’an, China

National Key Laboratory of Science and Technology on Aerodynamic Design and Research

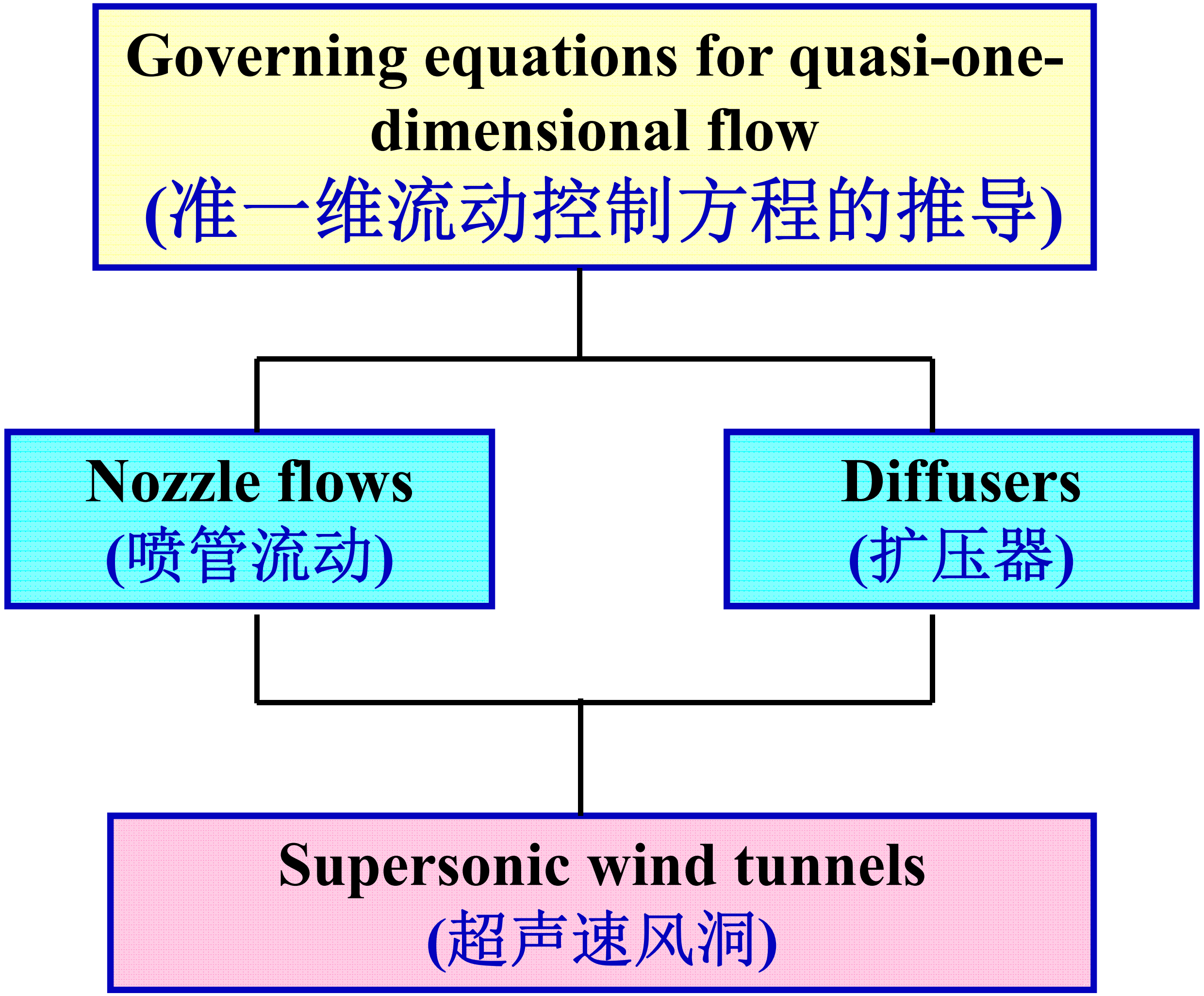


图10.3　第十章的路线图

10.3 Nozzle Flows (喷管流动)

这一节，我们将沿路线图（10.5）的左半支，对通过喷管的可压缩流动进行仔细研究。

我们将推导一个重要的方程，此方程将流动马赫数、喷管截面面积与声速喉道面积的比联系起来，我们称之为***面积-马赫数关系式（area-Mach number relation）***。

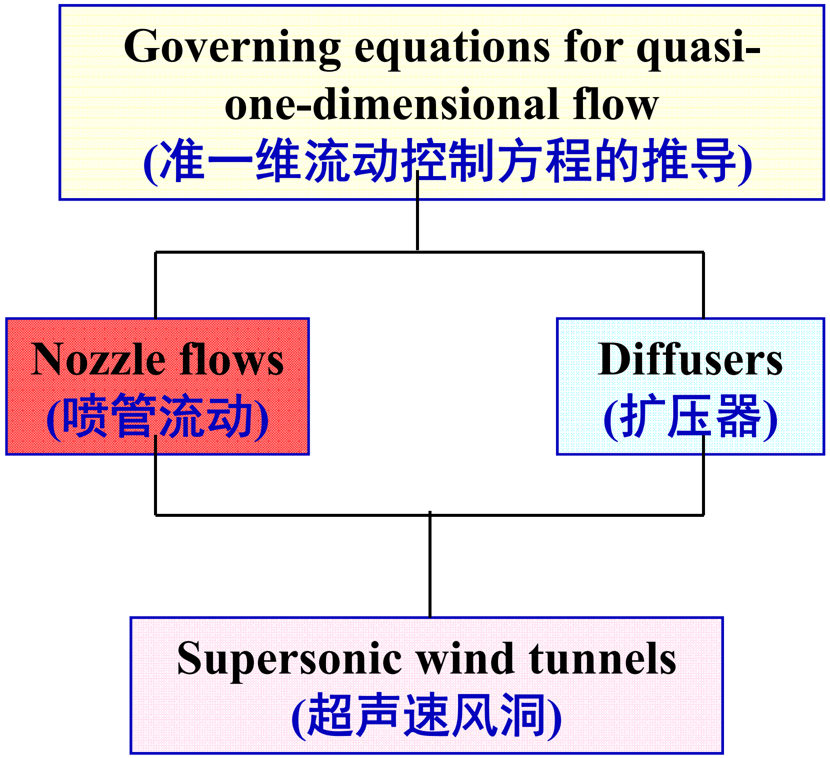


图10.5 第十章路线图

面积-马赫数关系式推导

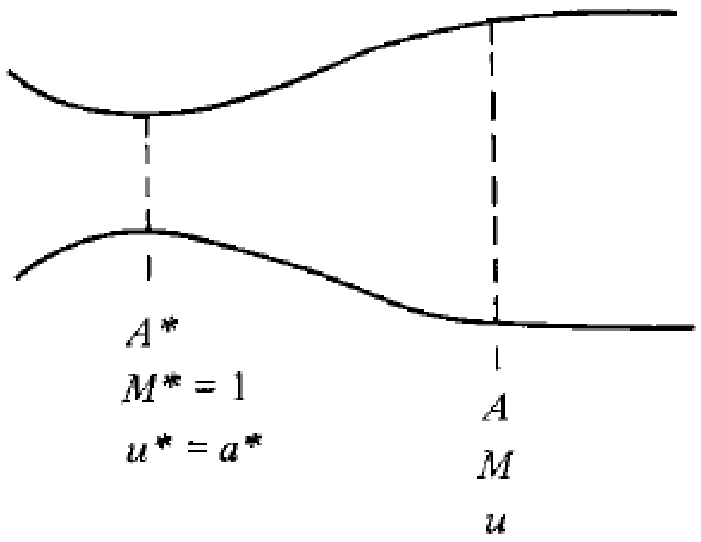


Figure 10.11 Geometry for the derivation of the area - Mach number relation.

考虑如图10.11所示的管道。假设气流在喉道处为声速，此时喉道面积为 A^*，那么此处的马赫数和速度分别由M^*、u^*表示，且 $M^* = 1$、$u^* = a^*$。在管道其他任意截面处，其面积、马赫数、速度如图10.11所示分别用A ，M、 u表示。在 A^* 和 A 之间应用连续方程（10.1），我们得到

面积–马赫数关系式推导（续）

$$\rho^* u^* A^* = \rho u A \qquad (10.26)$$

因为： $u^* = a^*$

所以： $$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho}\frac{a^*}{u} = \frac{\rho^*}{\rho_0}\frac{\rho_0}{\rho}\frac{a^*}{u} \qquad (10.27)$$

其中 ρ_0 是总密度，在等熵流动中保持为常数，***a****为临界声速，在绝热流动中为常数，因此在既绝热又可逆的等熵流动中亦保持常数。

将（10.27）式平方后，我们得到如下公式：

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2=\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2\left(\frac{a^*}{u}\right)^2=\left(\frac{\rho^*}{\rho_0}\right)^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\left(\frac{a^*}{u}\right)^2 \quad \text{（10.27a）}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)} \quad \text{（10.28）即(8.46)}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{1/(\gamma-1)} \quad \text{（10.29）即（8.43）}$$

$$M^*=\frac{u}{a^*} \qquad \boxed{M^{*2}=\frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}} \quad \text{（10.30）即（8.48）}$$

得：

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{2/(\gamma-1)}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{2/(\gamma-1)}\frac{2+(\gamma-1)M^2}{(\gamma+1)M^2}$$

（10.31）

$$\boxed{\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2}\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}} \qquad (10.32)$$

面积-马赫数关系式的另一种推导方法：

（ 不用公式： $\boxed{M^{*2}=\dfrac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}}$ ）

$$\rho^* u^* A^* = \rho u A \tag{10.26}$$

因为： $u^*=a^*$

所以： $$\frac{A}{A^*}=\frac{\rho^*}{\rho}\frac{a^*}{u}=\frac{\rho^*}{\rho_0}\frac{\rho_0}{\rho}\frac{a^*}{a_0}\frac{a_0}{a}\frac{a}{u}$$

其中 ρ_0 、a_0 分别是滞止密度和滞止声速，在任意等熵流动中二者均保持为常数。将上式平方后，我们得到如下公式：

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2=\left(\frac{\rho^*}{\rho_0}\right)^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\left(\frac{a^*}{a_0}\right)^2\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\left(\frac{a}{u}\right)^2$$

面积-马赫数关系式另一种推导方式（续）

由第八章的知识，我们有下列关系式：

$$\boxed{\frac{\rho^*}{\rho_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}} \qquad \boxed{\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{1/(\gamma-1)}}$$

$$\boxed{\left(\frac{a^*}{a_0}\right)^2=\frac{2}{\gamma+1}} \qquad \boxed{\left(\frac{a_0}{a}\right)^2=1+\frac{\gamma-1}{2}M^2} \qquad \boxed{\left(\frac{a}{u}\right)^2=\frac{1}{M^2}}$$

将上面公式代入 $\left(\frac{A}{A^*}\right)^2=\left(\frac{\rho^*}{\rho_0}\right)^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\left(\frac{a^*}{a_0}\right)^2\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\left(\frac{a}{u}\right)^2$

得：$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{2/(\gamma-1)}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{2/(\gamma-1)}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\frac{1}{M^2}$

整理上式，我们得到：

$$\boxed{\left(\frac{A}{A^*}\right)^2=\frac{1}{M^2}\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}} \qquad (10.32)$$

面积-马赫数关系式的意义

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2=\frac{1}{M^2}\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \qquad (10.32)$$

(10.32)式非常重要，被称为*面积-马赫数关系式*。这一关系式具有非常重要的意义。它指出，$M=f\left(\frac{A}{A^*}\right)$ ；

即：管道内任一截面处的马赫数是当地截面面积与声速喉道面积之比的函数（***The Mach number at any location in the duct is a function of the ratio of the local duct area to the sonic throat area***）

面积-马赫数关系式成立条件的讨论

$$\boxed{\left(\frac{A}{A^*}\right)^2=\frac{1}{M^2}\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}} \qquad (10.32)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)} \qquad (10.28)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{1/(\gamma-1)} \qquad (10.29)$$

面积-马赫数关系式适用于定常、等熵的准一维流动。

有关A^*的讨论

- 由（10.25）式（$\frac{dA}{A}=(M^2-1)\frac{du}{u}$）给出的面积-速度关系式我们知道，$A$必须大于或至少等于 A^*。

- $A<A^*$的情况对于等熵流动是不可能存在的。因此，(10.32)式（$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2=\frac{1}{M^2}\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}$）中，A≥A*。

- A^*是个定义的量，只有当实际流动在管内喉道处达到声速时，实际的喉道面积A_t才等于A^*。

- 对于非等熵流动，不同截面处的马赫数对应的 A^* 不同，因为对于等熵流动，ρ^* 是常数，同时a^* 也是常数，因而根据连续方程 $\rho^* a^* A^*=const.$，A^*也是确定的。

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2}\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \quad (10.32)$$

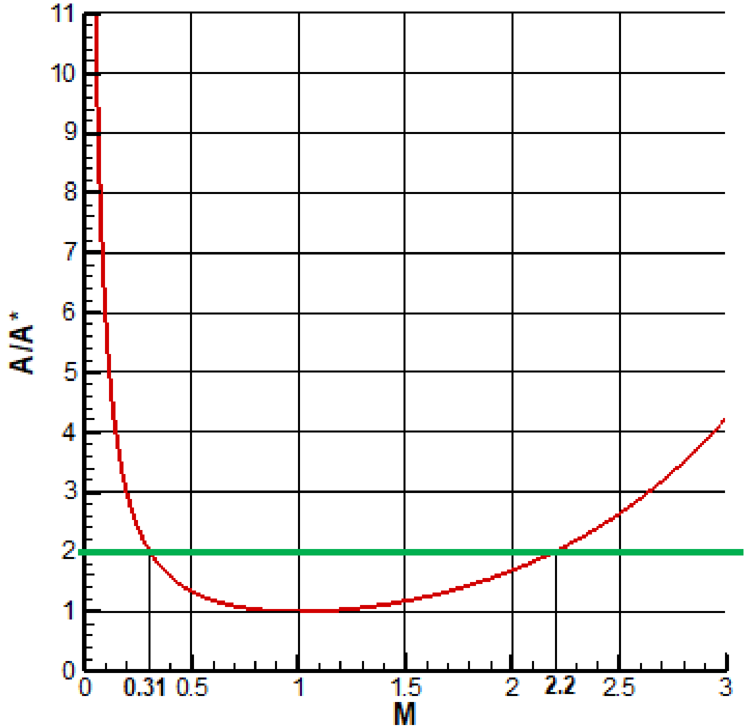
APPENDIX A Isentropic Flow Properties(Page1047)

M	$\frac{p_0}{p}$	$\frac{\rho_0}{\rho}$	$\frac{T_0}{T}$	$\frac{A}{A^*}$
0.2000 − 01	0.1000 + 01	0.1000 + 01	0.1000 + 01	0.2894 + 02
0.4000 − 01	0.1001 + 01	0.1001 + 01	0.1000 + 01	0.1448 + 02
0.6000 − 01	0.1003 + 01	0.1002 + 01	0.1001 + 01	0.9666 + 01
0.8000 − 01	0.1004 + 01	0.1003 + 01	0.1001 + 01	0.7262 + 01
0.1000 + 00	0.1007 + 01	0.1005 + 01	0.1002 + 01	0.5822 + 01
0.1200 + 00	0.1010 + 01	0.1007 + 01	0.1003 + 01	0.4864 + 01
0.1400 + 00	0.1014 + 01	0.1010 + 01	0.1004 + 01	0.4182 + 01
0.1600 + 00	0.1018 + 01	0.1013 + 01	0.1005 + 01	0.3673 + 01
0.1800 + 00	0.1023 + 01	0.1016 + 01	0.1006 + 01	0.3278 + 01
0.2000 + 00	0.1028 + 01	0.1020 + 01	0.1008 + 01	0.2964 + 01

有关面积-马赫数关系式的讨论

观察附录A：

- 当$M<1$时，随马赫数的增大A/A^*减小，即管道是收缩的；
- 当 $M=1$时，$A/A^*=1$；
- 当 $M>1$时，随马赫数的增大A/A^*增大，即管道是扩张的。
- M 是 A/A^*的双值函数，如 $A/A^*=2$，我们可以查出$M=0.31$或$M=2.2$。

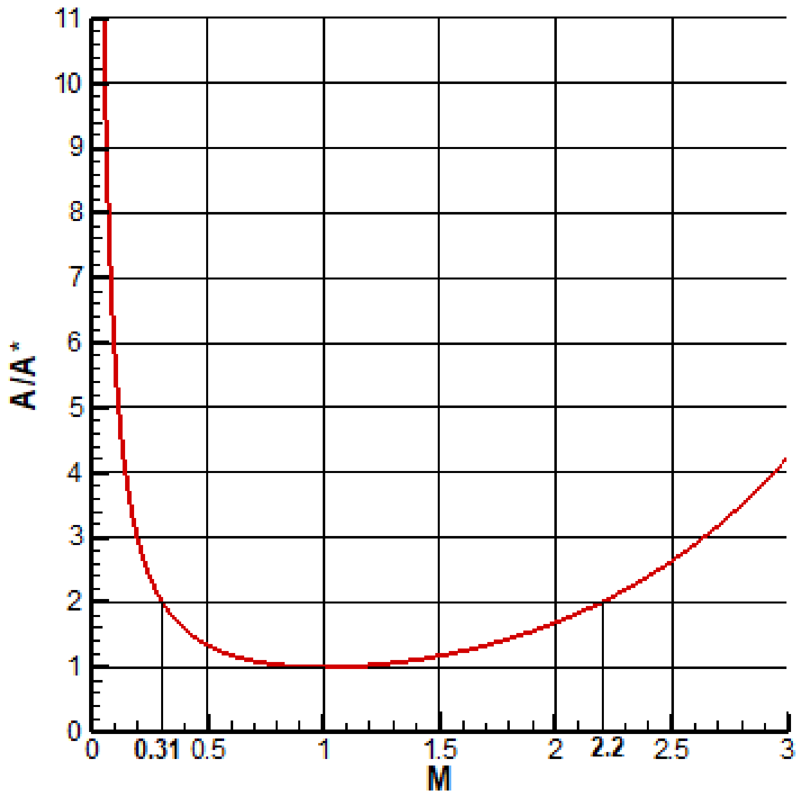


面积-马赫数关系图

问题：*M* 是 *A*/*A**的双值函数，实际问题取哪个解？

在后面我们将要解释，对于两个马赫数解，在实际问题中应取哪个解取决于：喷管入口和出口处的压力。

(Which value of *M* that actually holds in a given case depends on the pressures at the inlet and exit of the duct, as explained later.)



面积–马赫数关系曲线

其他流动变量的求解

一旦马赫数分布已知，其他流动参数就很容易由公式(8.40) (8.42) (8.43) 得到。

$$\boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \tag{8.40}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{8.42}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)} \tag{8.43}$$

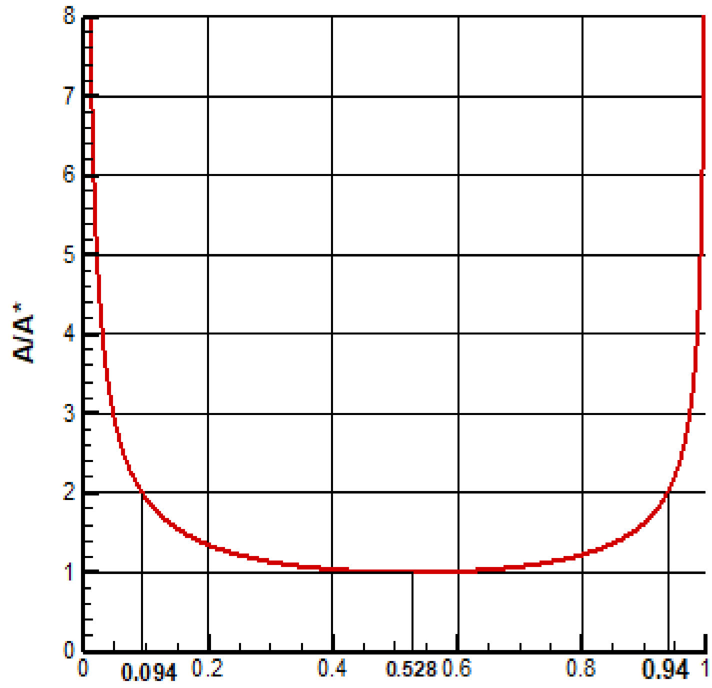
由温度T可以的到声速： $\boxed{a = \sqrt{\gamma RT}}$

进而得到速度： $\boxed{u = M\sqrt{\gamma RT}}$

A/A^* 和压强的关系：

我们还可以直接求出A/A^* 和压强的关系：

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2=\frac{\gamma-1}{2}\frac{\left(\dfrac{2}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}}{\left[1-\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{2/\gamma}}$$



p/p_0

静压与总压比是面积比A/A^*的双值函数。

问题：如何由面积-马赫数关系式求出马赫数？

Q：How to solve the equation for Mach number

$$\boxed{\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2}\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}} \qquad (10.32)$$

M **=** ***f*** **(** ***A/A**** **)的数值解法：**

- ***M*** **< 1, 可采用如下迭代公式：** $M = \left(\frac{A}{A^*}\right)^{-1}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}$

例如：对于$A/A^* = 2$， 设 $M^0 = 0.5$,则$M^1 = 0.3350$； $M^2=0.3093$；
$M^3=0.3063$； $M^4=0.3059$； $M^5=0.3059$。所以： $M \approx 0.31$

- ***M*** **> 1, 可采用如下迭代公式：** $M = \left\{\frac{\gamma+1}{2}\left[M^2\left(\frac{A}{A^*}\right)^2\right]^{(\gamma-1)/(\gamma+1)} - 1\right\}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

例如：对于 $A/A^* = 2$， 设 $M^0 = 1.5$,则 $M^1 = 1.9114$； $M^2 = 2.0932$；
$M^3 = 2.1610$； $M^4=2.1848$； $M^5=2.1929$； $M^6=2.1958$。所以： $M \approx 2.2$

单选题 1分

设置

请有附表A查出M=0.6 和M=1.52时对应的A/A^*值。

A 1.188/1.190

B 1.190/1.188

C 1.176/1.213

D 1.213/1.176

提交

拉瓦尔喷管内的等熵超声速流动

假设入口处的面积比 A_i/A^*是一个很大的值，且入口处气流来自一个储存静止高压气体的储气罐，储气罐的压强和温度分别为 p_0 和T_0 。因为管道的截面积分布$A = A(x)$是已知的，所以，在任意位置的A/A^*值均为已知。

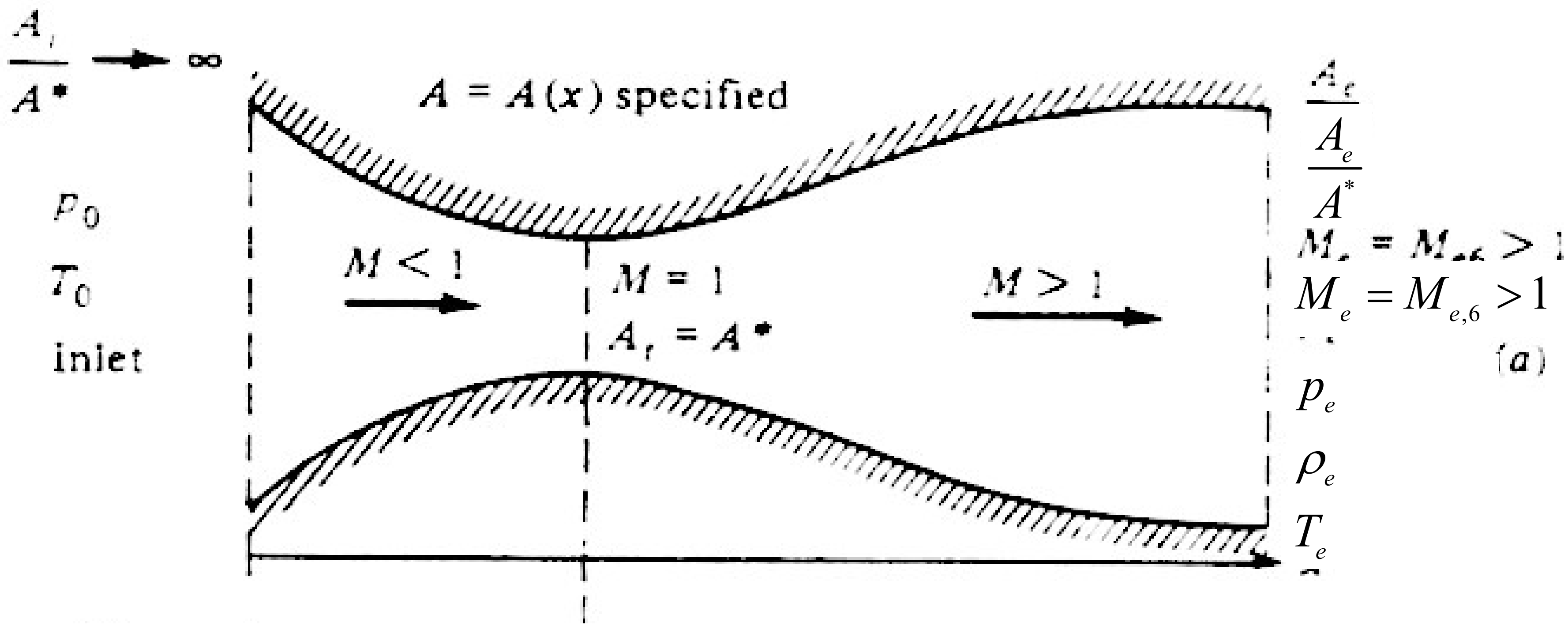


Figure 10.12（a） Isentropic supersonic nozzle flow

拉瓦尔管内的等熵超声速流动(续)

- 由面积-马赫数关系式得到整个喷管的马赫数分布

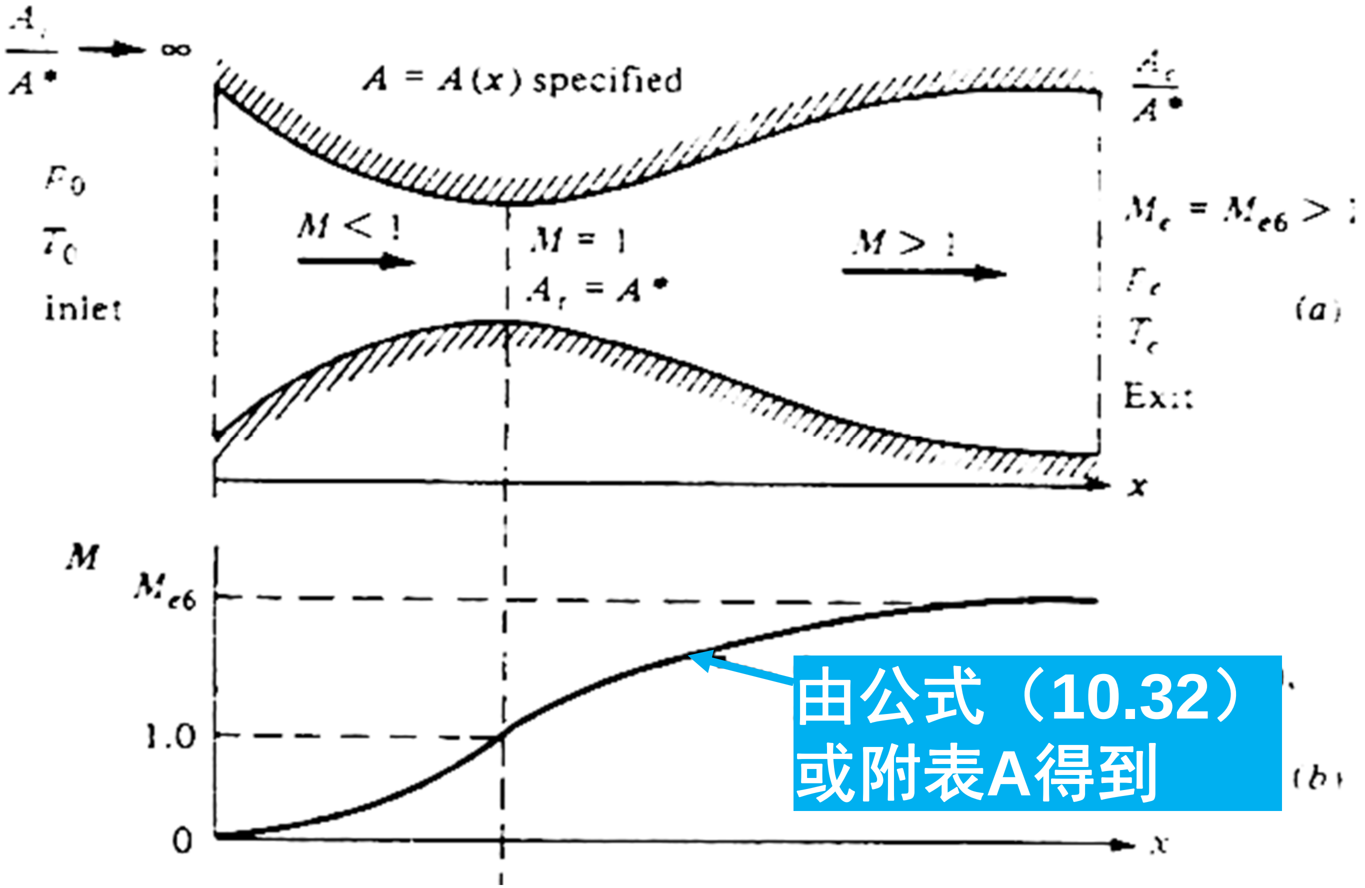


Figure 10.12 Isentropic supersonic nozzle flow

拉瓦尔管内的等熵超声速流动(续)

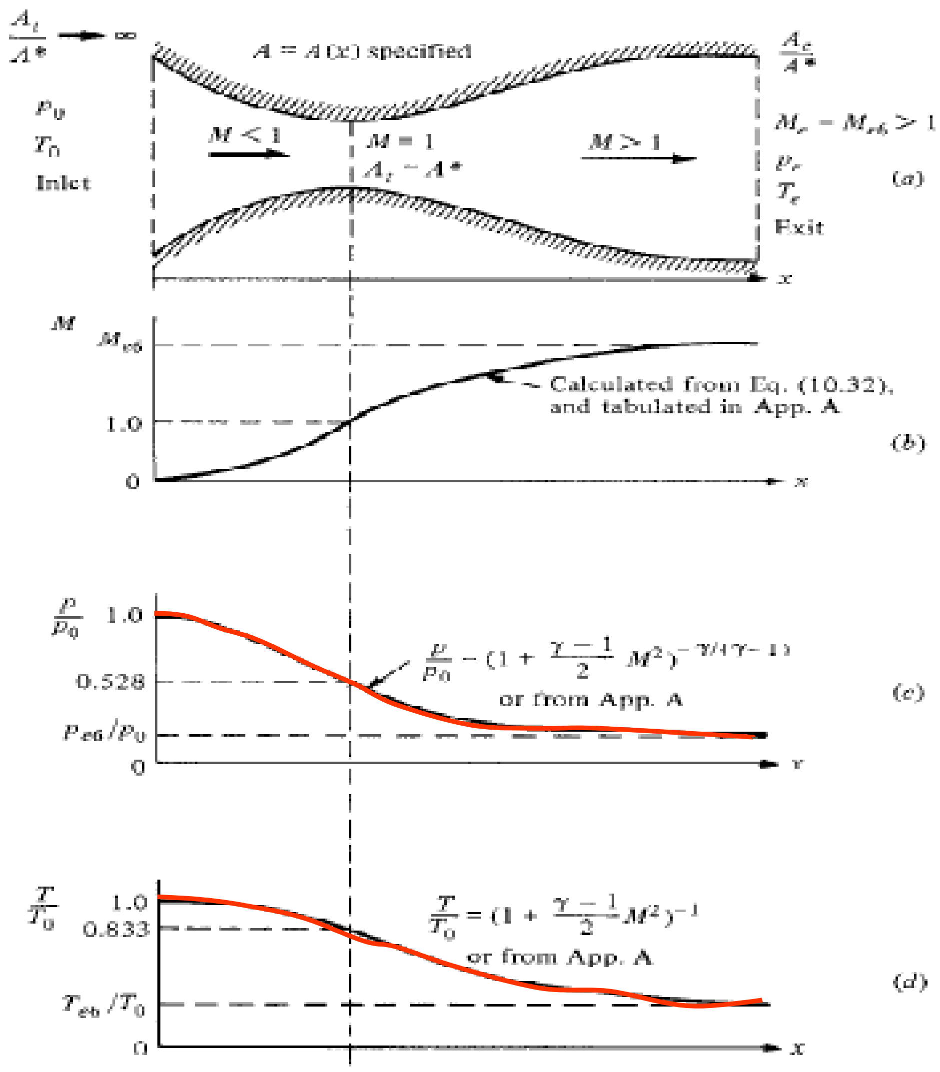


Figure 10.12 Isentropic supersonic nozzle flow.

图 10.12 等熵超声速喷管流动

一旦知道了马赫数分布,与其相对应的温度、压力等的变化即可由下面公式或附录A得出。

$$\frac{p}{p_0}=(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)^{-\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\frac{T}{T_0}=(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)^{-1}$$

拉瓦尔管内的等熵超声速流动(续)

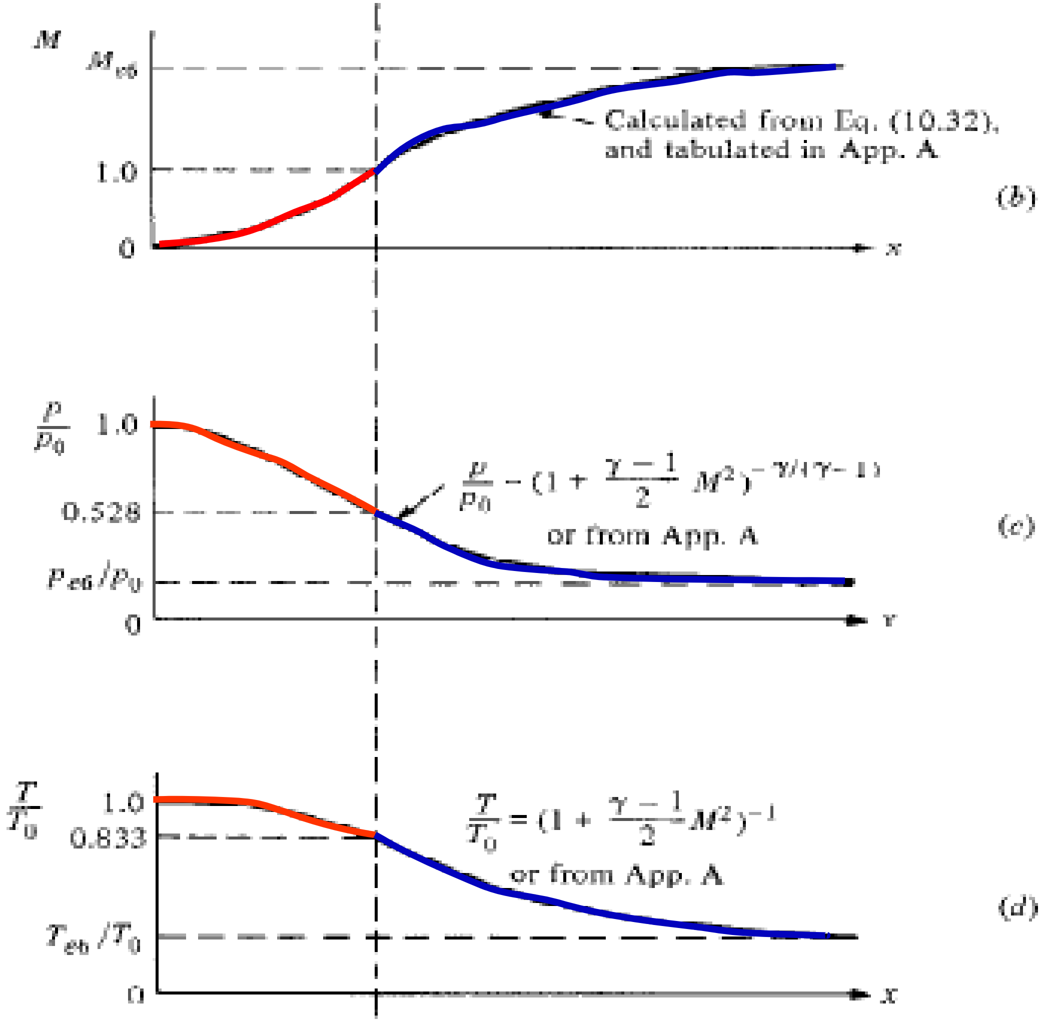
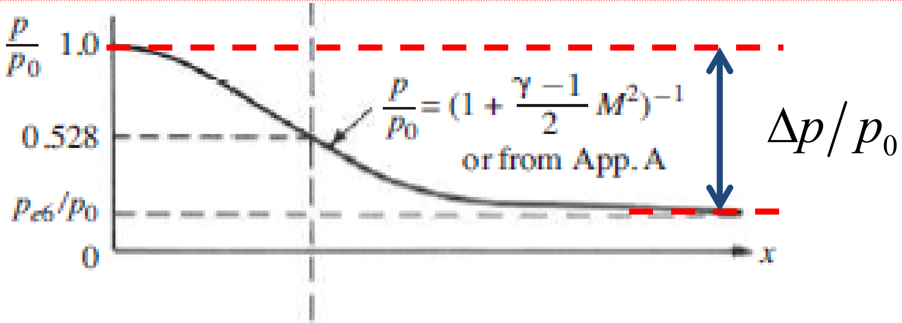


Figure 10.12 Isentropic supersonic nozzle flow.

图 10.12 等熵超声速喷管流动

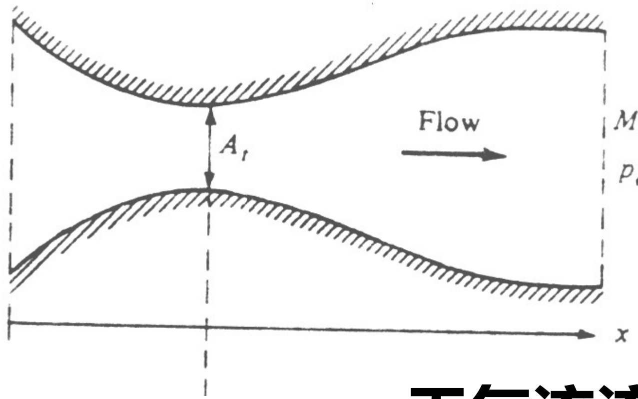
讨论：

- 沿喷管的马赫数的分布、进而由马赫数决定的压强、温度、密度等的分布只依赖于当地的面积比A/A^*。这是分析喷管内准一维超声速等熵流动的关键。
- 通过喷管的流动是不可能自动发生的，只有入口与出口存在压力差，才会存在通过喷管的流动。即出口压力必须小于入口压力，也就是 $p_e < p_0$。
- 如果我们希望得到图10.12给出的超声速流动，出口处的压强 p_e 必须精确地等于$p_{e,6}$。如果出口处的压力 p_e 不等于 $p_{e,6}$，那么通过喷管的流动要么在喷管内、要么在喷管外将不同于图10.12。



$$\Delta p = p_0 - p_{e,6}$$

问题：What will happen if the $p_e \neq p_{e,6}$?



$p_e = p_0$?

无气流流过喷管

$p_e = p_{e,1} = 0.999 p_0$?

$p_e = p_{e,2} = 0.995 p_0$?

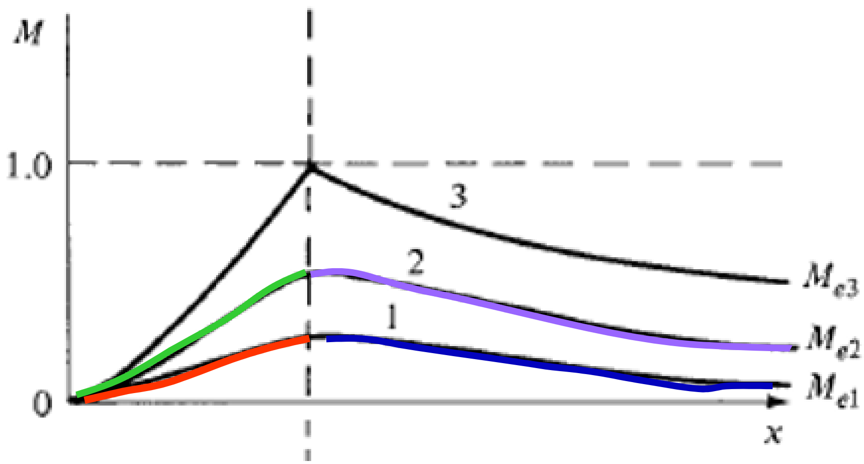


图10. 13（b）

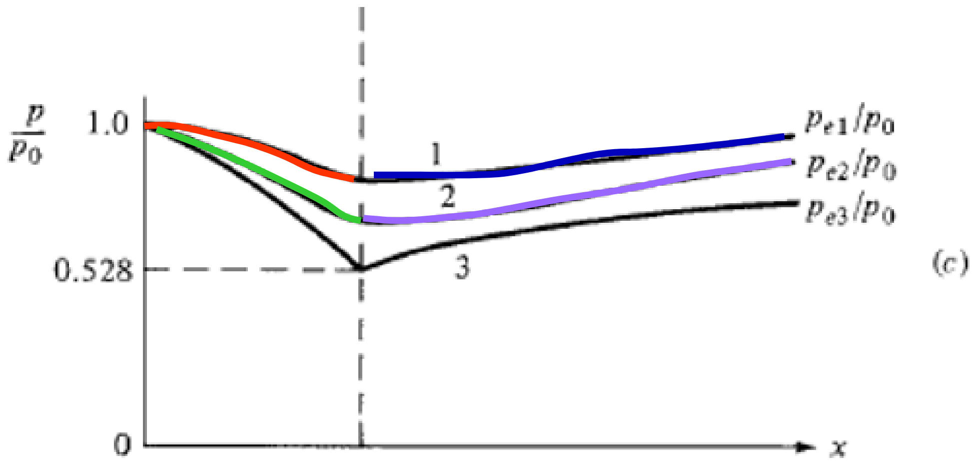
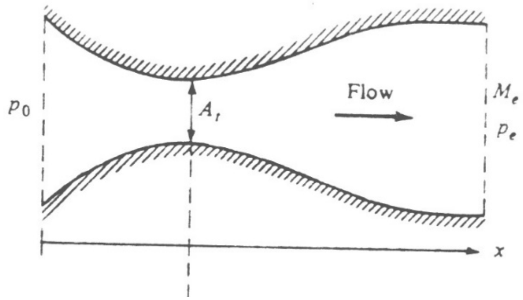


图10. 13（c）

问题: p_e=？时，喉道处M_t第一次达到声速，且管道内其他截面仍为亚声速？



$$p_e = p_{e,3}$$

$p_{e,3}$为只有喉道处达到声速，管内其他截面流动仍为亚声速流时对应的出口压力。

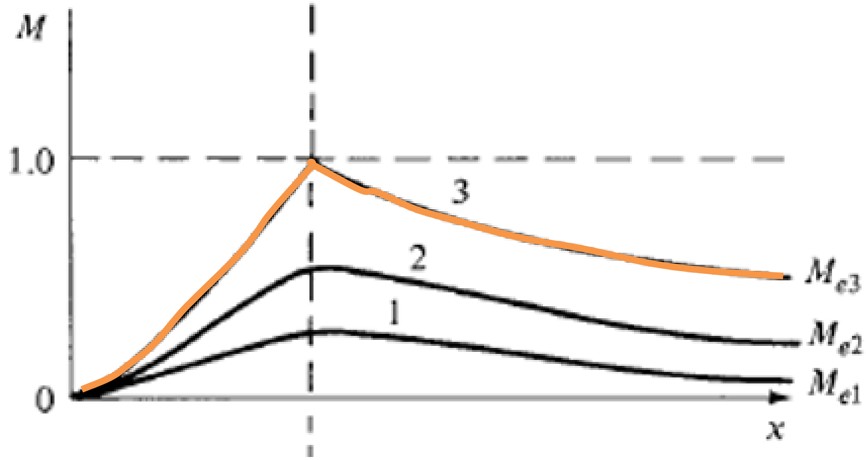


图10.13（b）

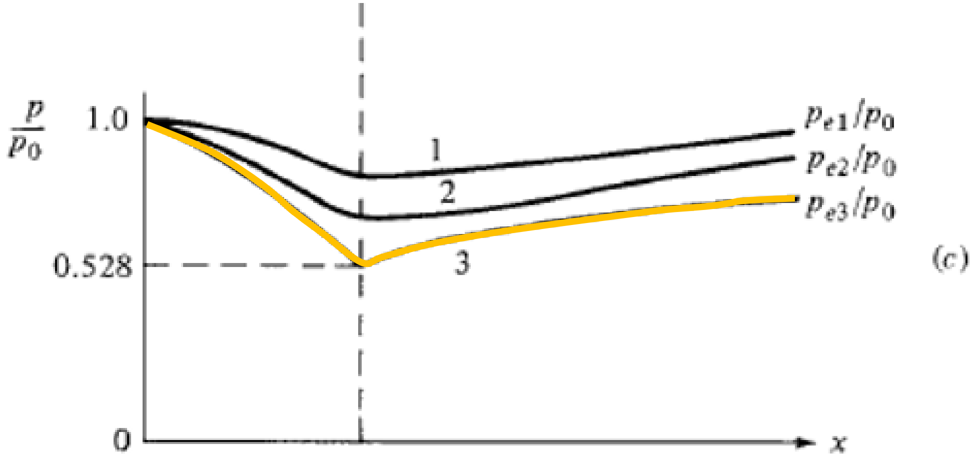


图10.13（c）

比较图10.12和图10.13:

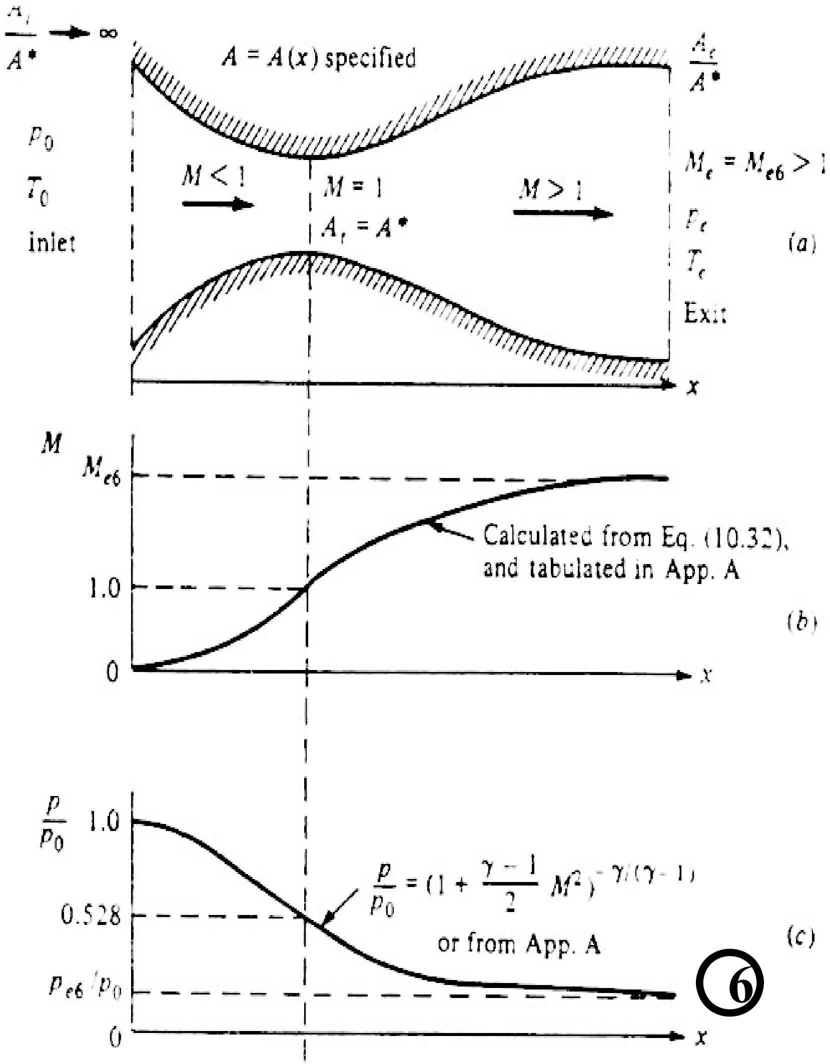


图10.12

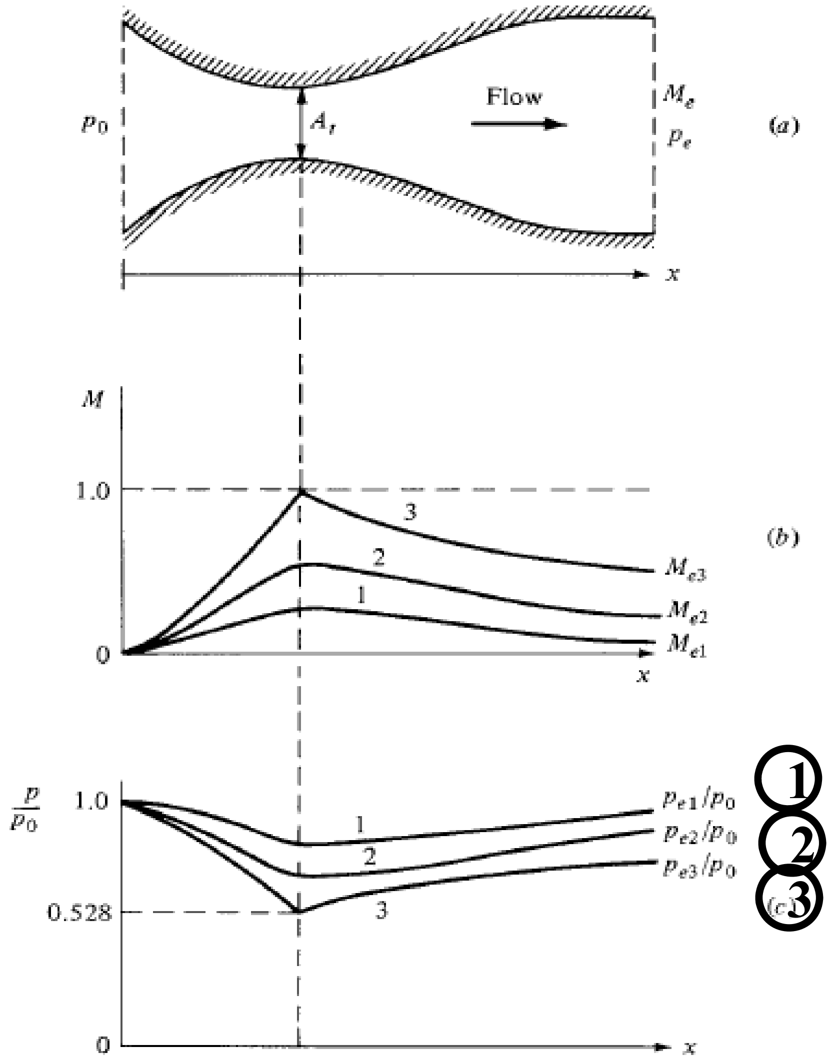


图10.13

$$p_e = p_{e,6}$$ **唯一一个**

$$p_{e,3} \le p_e \le p_0$$ **无数多个**

问题：随着出口压力的降低质量流量如何变化?

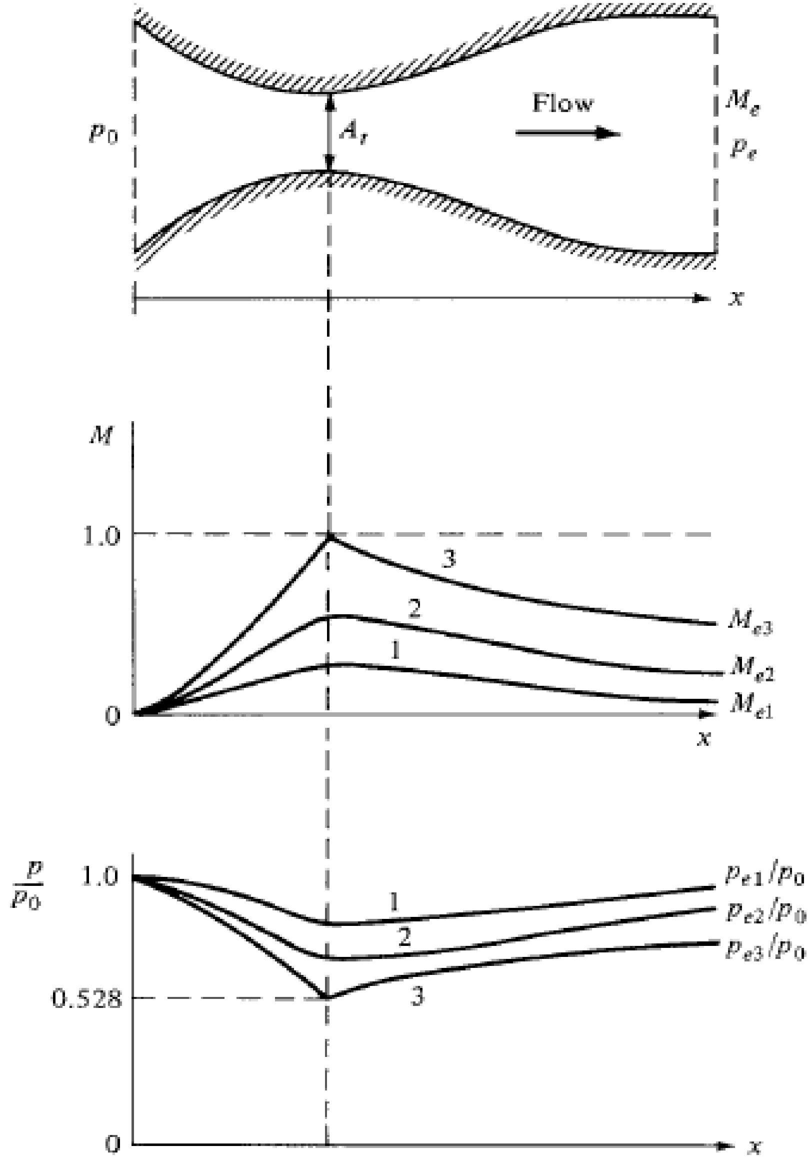


图10.13

$$\dot{m} = \rho_t u_t A_t$$

当 p_e 降低时，u_t 增加，ρ_t 降低，因为亚声速时 u_t 增加幅度比 ρ_t 降低的幅度大得多，因此随着出口压力降低，质量流量增加。

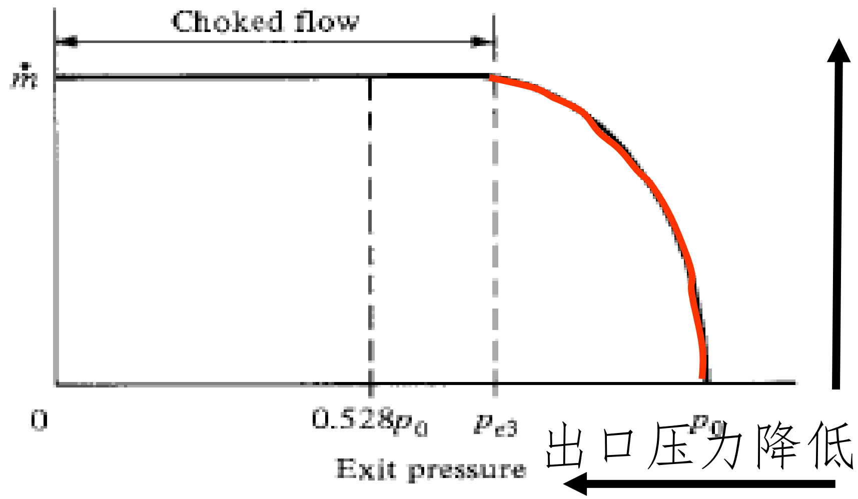


Figure 10.14 Variation of mass flow with exit pressure; illustration of choked flow.

问题：随着出口压力的降低质量流量如何变化？（续）

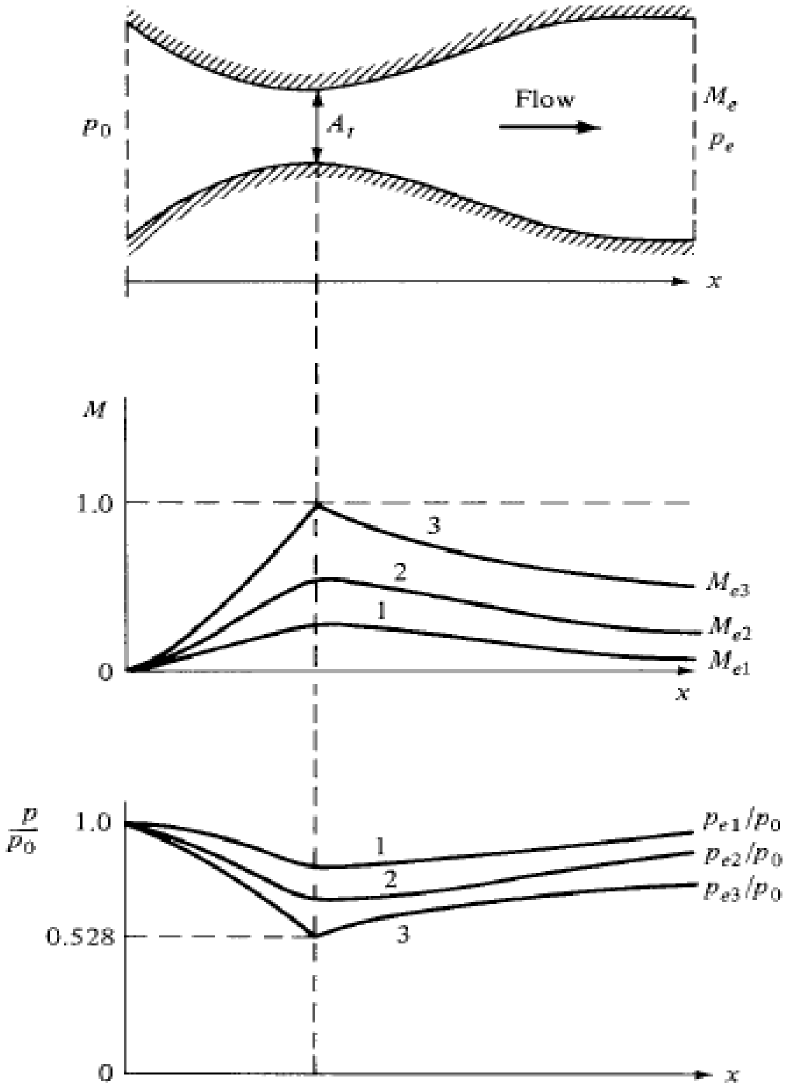


图10.13

当$p_e = p_{e,3}$时，气流在喉道处达到了声速，此时，质量流量为：

$$\dot{m} = \rho^* u^* A^* = \rho^* a^* A_t$$

继续降低出口压力，使$p_e < p_{e,3}$，喉道处的条件具有一个新的特性，即在喉道处的流动参数保持不变。

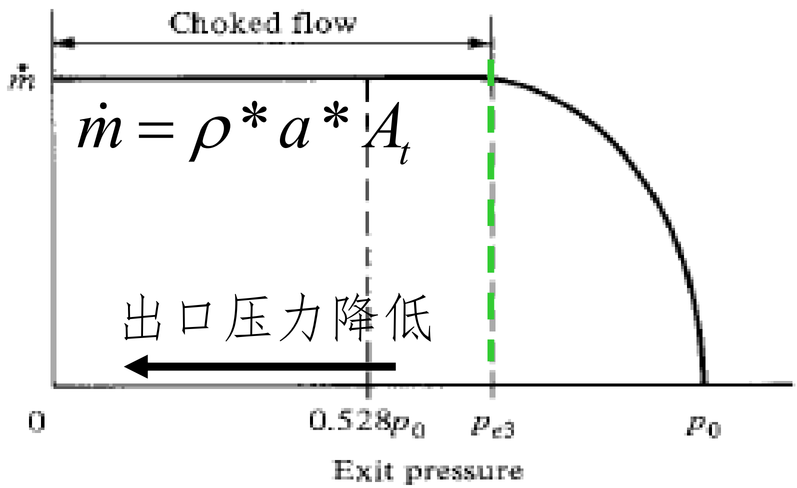


Figure 10.14 Variation of mass flow with exit pressure; illustration of choked flow.

问题：随着出口压力的降低质量流量如何变化？（续）

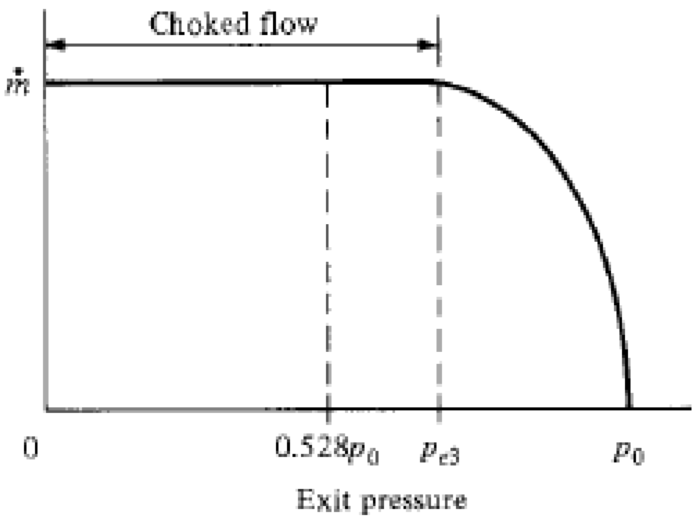


FIGURE 10.14
Variation of mass flow with exit pressure; illustration of choked flow

质量流量随出口压力的变化；壅塞流的说明

1. 收缩段流动“冻结”(“frozen”)

一旦流动在喉道处达到声速，扰动就不能向喉道之前的收缩段逆向传播。因此，在喷管收缩段的流动不再与出口压力相联系，并且此段流动没有办法感受到出口压力还在继续降低。

2. 质量流量保持不变

一旦流动在喉道达到声速，不管p_e降低到多少，质量流量仍然保持不变，我们称这种流动为“壅塞”流（choked flow)。这是可压缩流流过管道的一个重要特征

用喉道处参数表示喷管流量的计算公式推导：

$$\dot{m}=\rho_t u_t A_t=\rho_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_t^{\,2}\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}M_t a_t A_t$$

$$=\frac{p_0}{RT_0}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_t^{\,2}\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}M_t a_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_t^{\,2}\right)^{-\frac{1}{2}}A_t$$

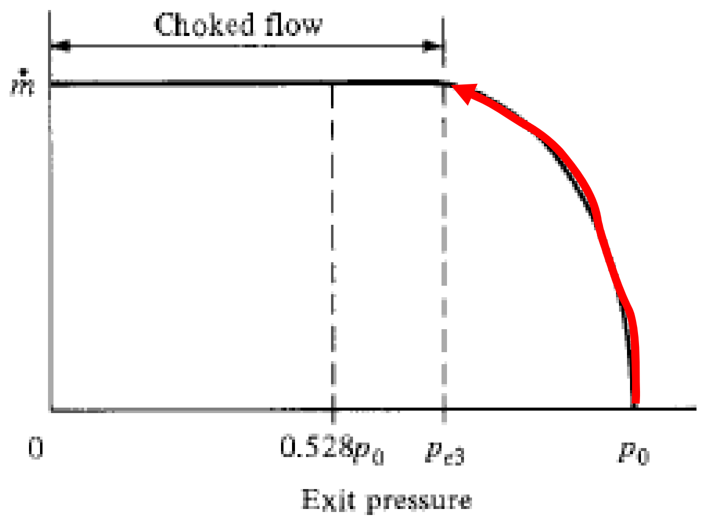
$$=\frac{p_0}{RT_0}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_t^{\,2}\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}-\frac{1}{2}}M_t\sqrt{\gamma RT_0}\,A_t$$

$$=\frac{p_0 A_t}{\sqrt{T_0}}M_t\sqrt{\frac{\gamma}{R}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_t^{\,2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}$$

$$M_t=0 \Longrightarrow M_t=1$$

$$\dot{m}=0 \Longrightarrow \dot{m}=\dot{m}_{max}$$

$$p_e=p_0 \Longrightarrow p_e=p_{e3}$$



喷管最大流量的计算公式

作业(10.5)

当喉道处 $M_t = 1$, 则 $A_t = A^*$, 流量达到最大值。

$$\dot{m}_{max} = \frac{p_0 A_t}{\sqrt{T_0}} M_t \sqrt{\frac{\gamma}{R}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_t^{\,2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}$$

$$= \frac{p_0 A^*}{\sqrt{T_0}} \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{R}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\cdot 1\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}$$

$$= \frac{p_0 A^*}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}$$

$$\dot{m} \propto \frac{p_0 A_t}{\sqrt{T_0}}$$

多选题 1分

设置

下列说法正确的是：

A 量热完全气体通过喷管的最大流量正比于的喷管入口前的贮室（reservoir）总压

B 量热完全气体通过喷管的最大流量正比于的喷管的喉道面积

C 量热完全气体通过喷管的最大流量反比于的喷管入口前贮室(reservoir)总温的平方根

D 在喷管入口贮室总压、总温不变的条件下，若想增大通过喷管的最大流量，可增大喉道面积

提交

问题：当出口压力$p_e<p_{e,3}$又远大于 $p_{e,6}$时，管内流动？

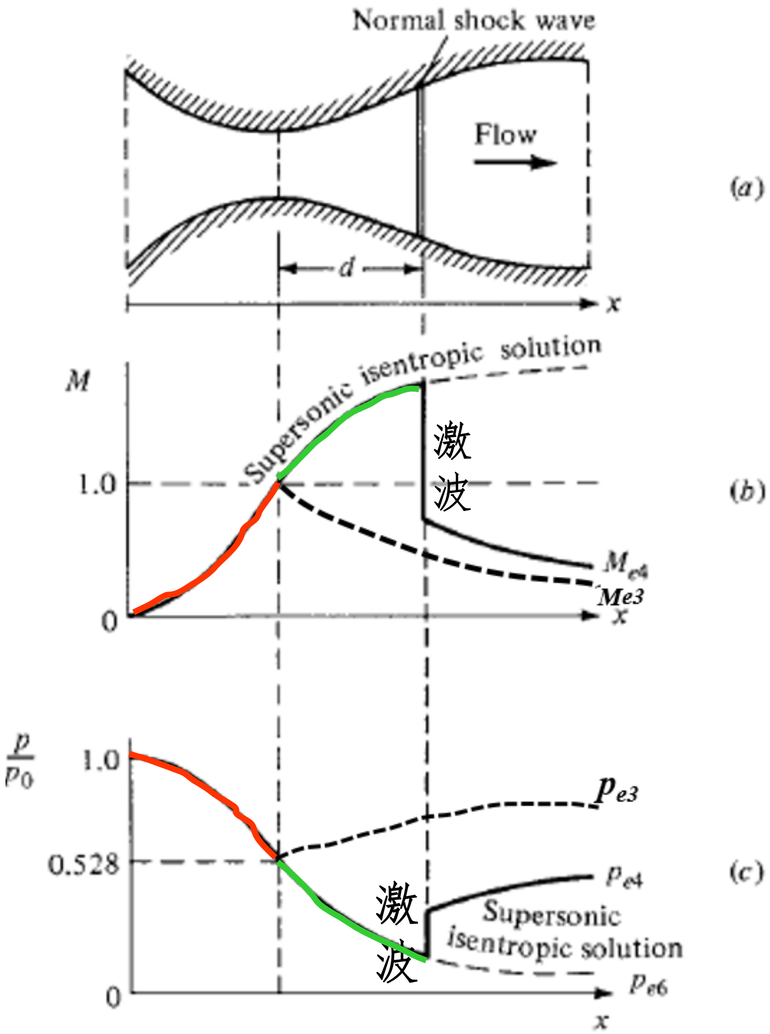


FIGURE 10.15 Supersonic nozzle flow with a normal shock inside the nozzle

喉道下游会出现一段超声速流动，但出口压力$p_{e,4}$远大于保证整个扩张段为等熵超声速流需要的出口压力$p_{e,6}$。这时，在喉道下游会形成一道正激波。

(A region of supersonic flow appears downstreame of the throat. However, the exit pressure is too high to allow an isentropic supersonic flow throughout the entire divergent section. A normal shock wave is formed downstream of the throat.)

管内正激波的位置与出口压强p_e的关系

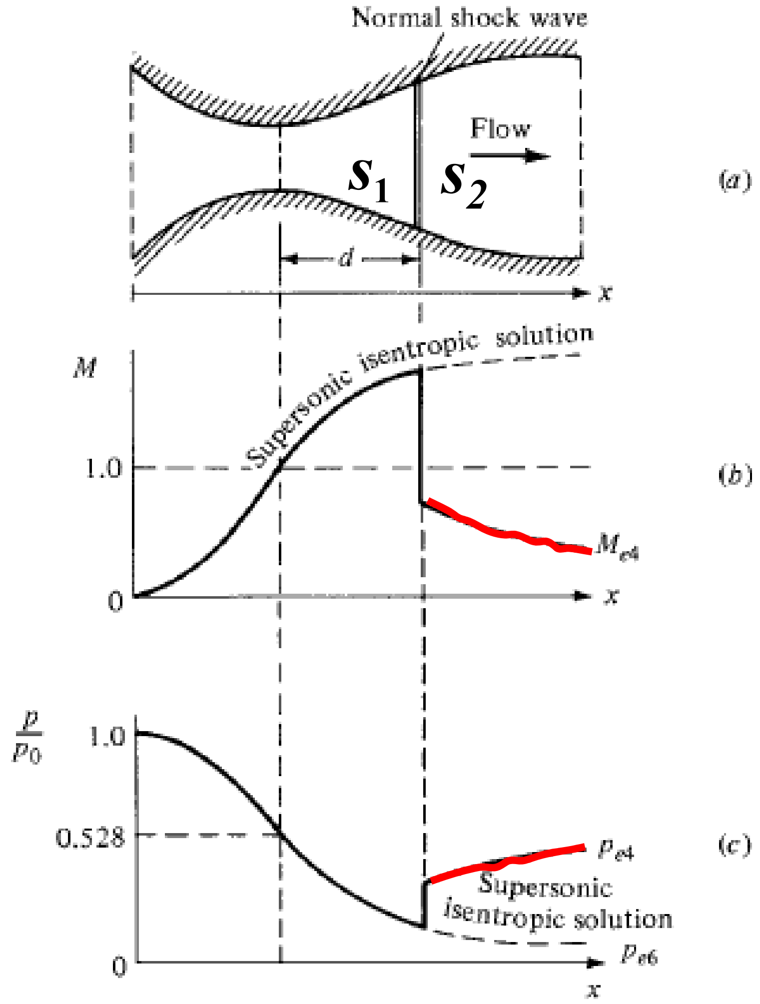


图 10.15

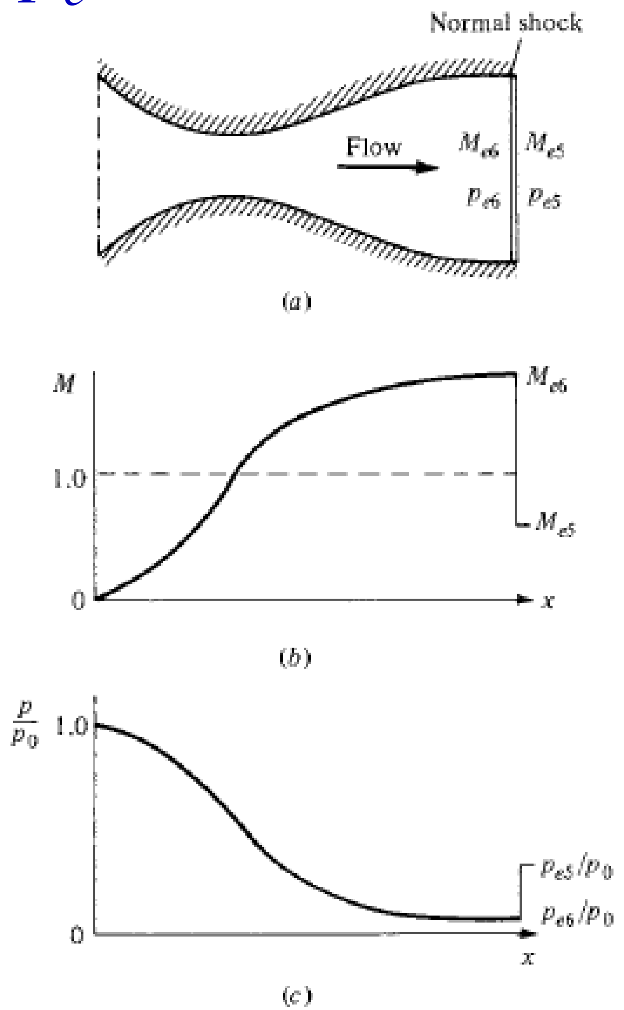


图 10.16(a)(b)(c)

结论：随着出口压力降低，正激波激波位置后移（$p_{e5}<p_e<p_{e,3}$）

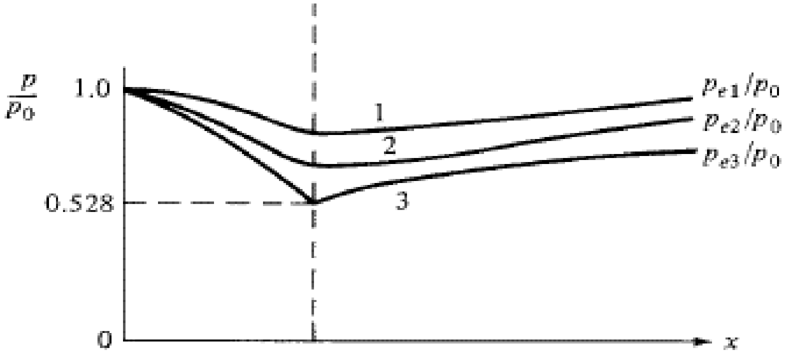
反压（Back Pressure）的概念

什么是反压？

出口下游的环境压力被定义为反压，用 p_B 表示。

当出口流动是亚声速时，必须有 $p_e = p_B$ ，因为定常亚声速流中压强是连续的。

因此，当我们说降低出口压力 p_e 时，我们也可以说我们降低了反压 p_B 。



$p_B=p_{e1}$

$p_B=p_{e2}$

$p_B=p_{e3}$

图10.13（c）

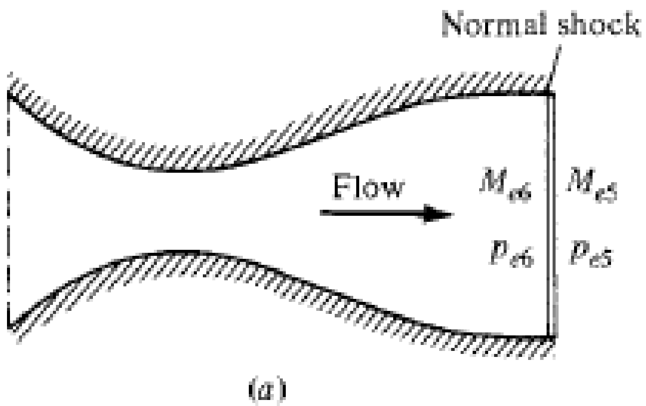
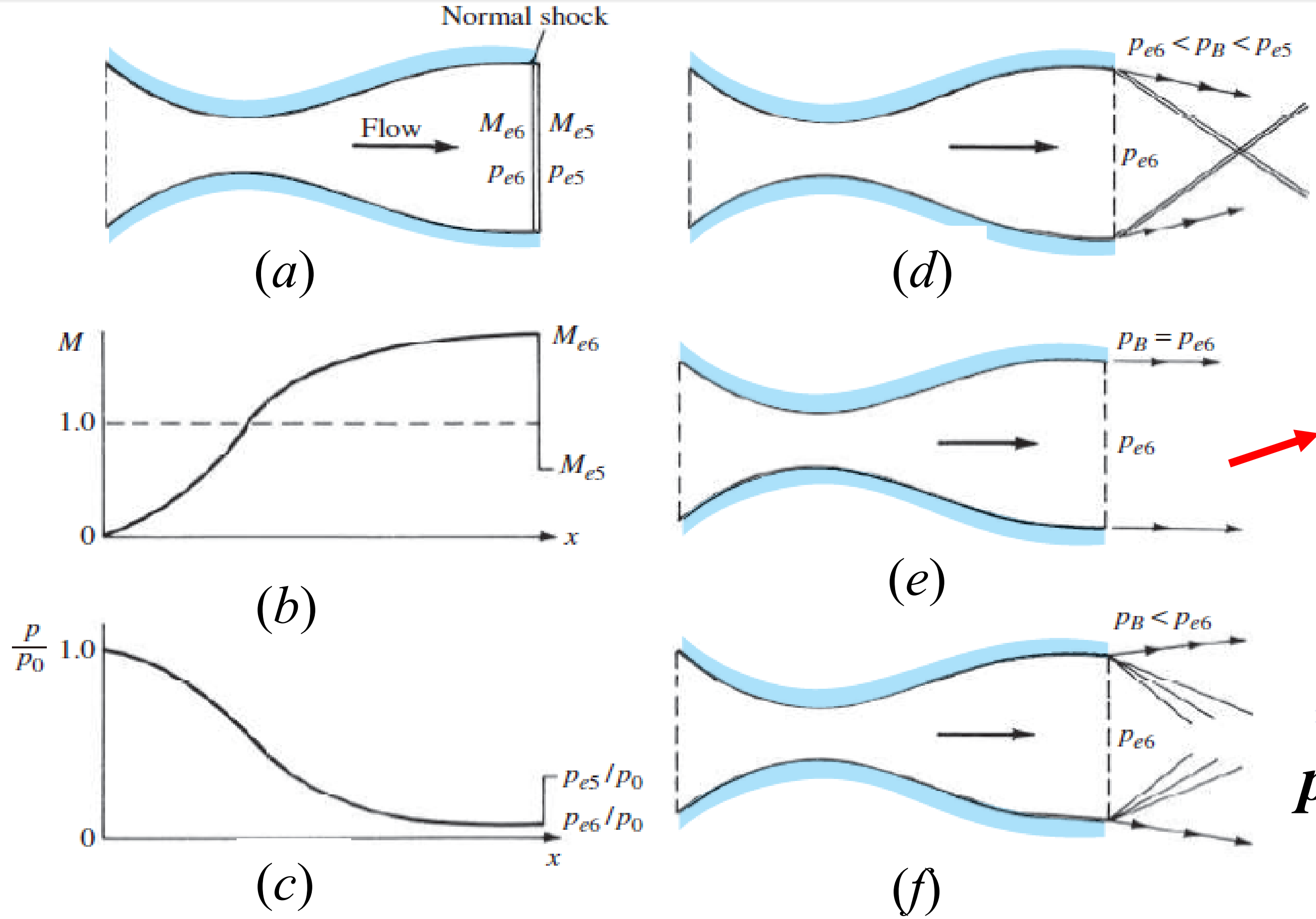


图10.16（*a*）

环境压力对管内流动的影响



$p_{e6} < p_B < p_{e5}$

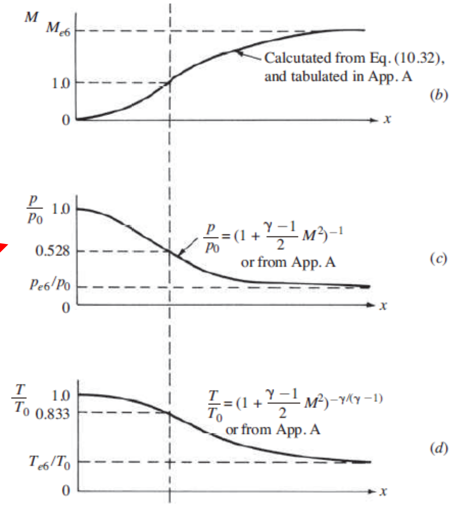


Figure 10.12 Isentropic supersonic nozzle flow.

$p_B < p_{e6}$

图10.16 (*a*), (*b*), and (*c*) pertain to a normal shock at the exit

(*d*) overexpanded nozzle（过膨胀）

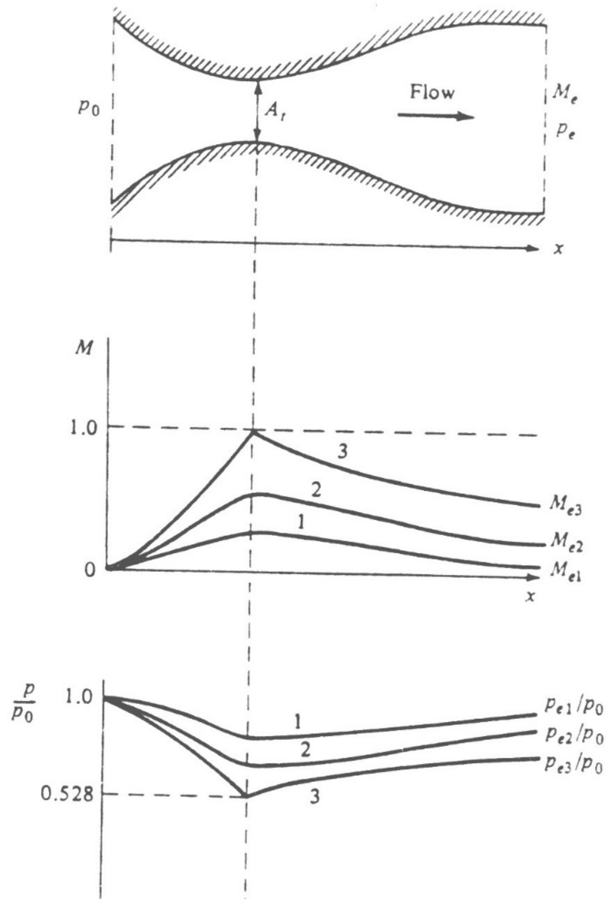
(*e*) isentropic expansion to the back pressure equal to the exit pressure

(*f*) underexpanded nozzle （欠膨胀）

管内流动随着出口环境压力的变化的总结（1）

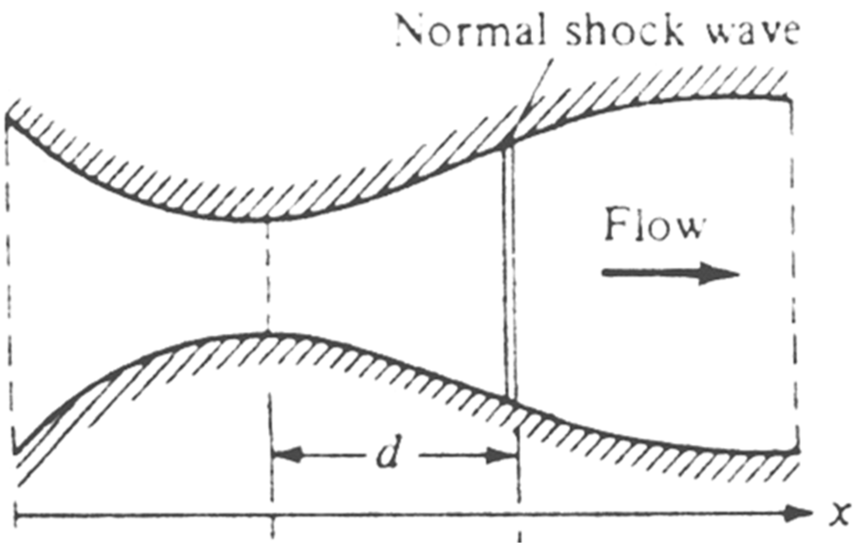
当驻室压强 p_0 和驻室温度 T_0 给定时，对于给定面积分布的收缩-扩张管道，其管内流动由出口反压 p_B 决定。

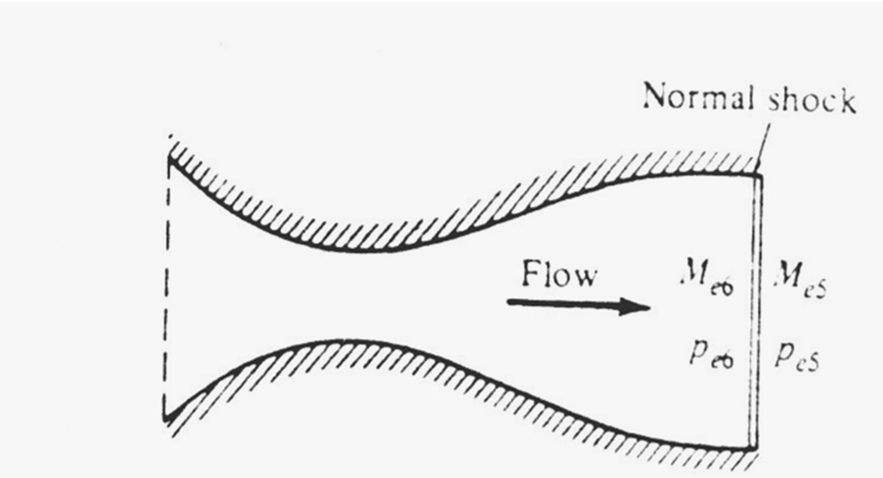
（1）当 $p_{e,3} \le p_B < p_0$ 时，管内流动对应无数多个亚声速等熵解，每个不同的解与一个不同的反压 p_B 相联系。



管内流动随着出口环境压力的变化的总结（2）

（2）当 $p_{e,5} \le p_B < p_{e,3}$ 时，管内流动对应无数多个非等熵解，喉道下游存在一道位置（强度）由出口反压 p_B 决定的正激波。



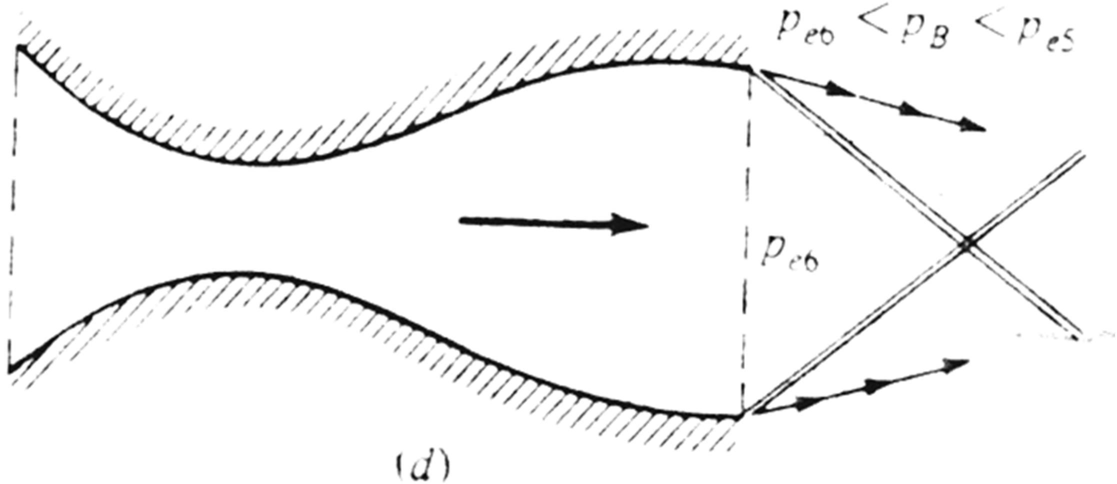


(a)

激波的强度随其位置如何变化？ **越往下游越强**

管内流动随着出口环境压力的变化的总结（3）

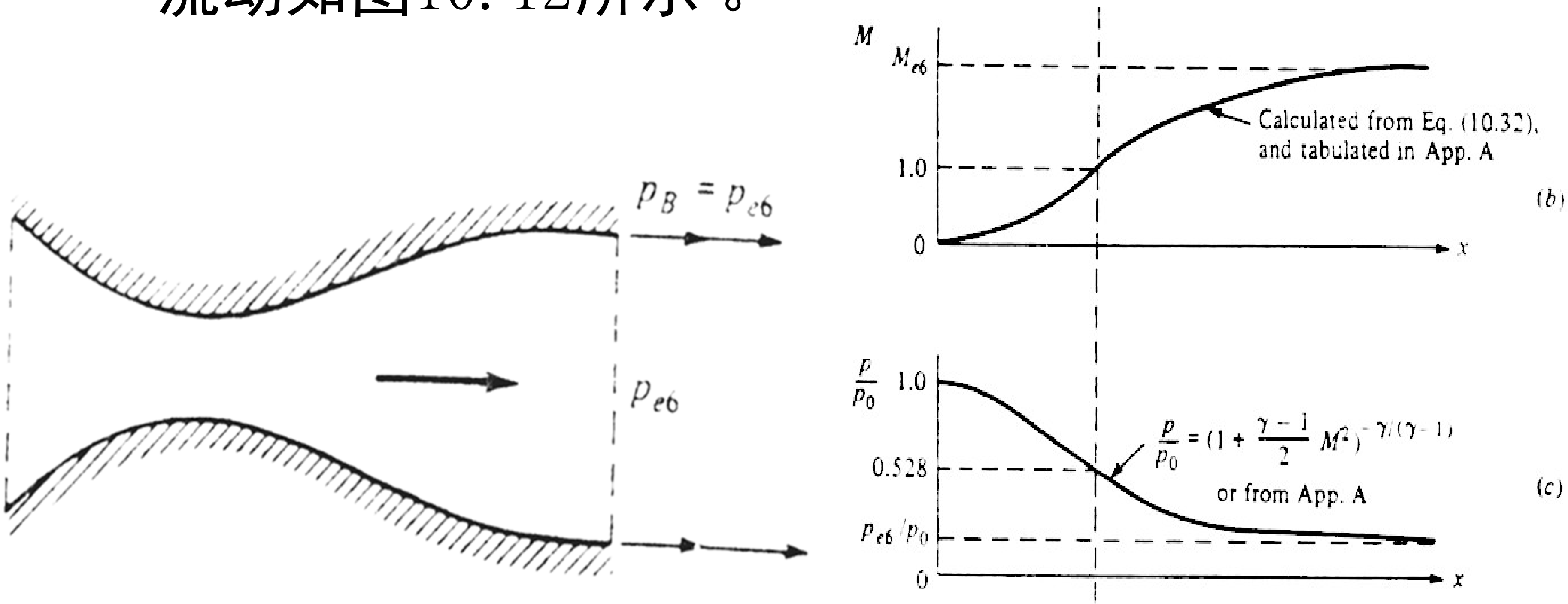
（3）当 $p_{e,6} < p_B < p_{e,5}$ 时，管内流动处处对应超声速等熵解，喷管出口处存在强度由出口反压 p_B 决定的斜激波。



（d）overexpanded nozzle （过膨胀喷管）

管内流动随着出口环境压力的变化的总结（4）

（4）当 $p_B = p_{e,6}$ 时，只有一种可能的超声速等熵流动如图10.12所示 。

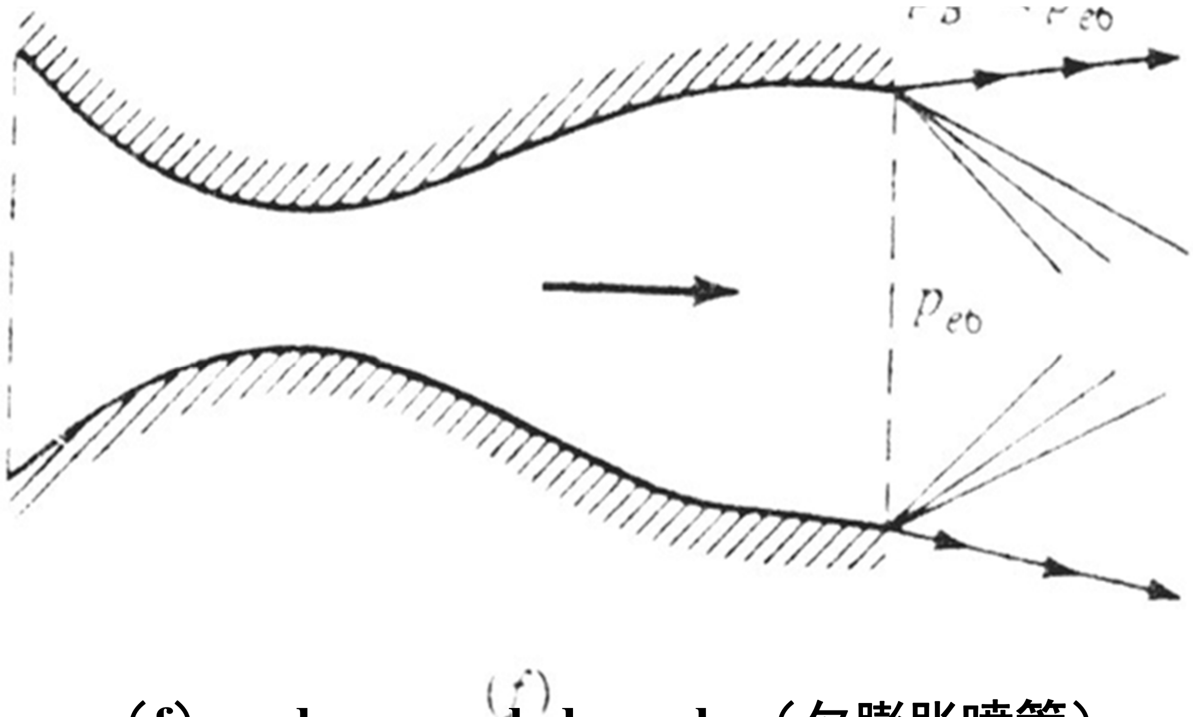


（e）isentropic expansion to the back pressure equal to the exit pressure

图10.12

管内流动随着出口环境压力的变化的总结（5）

（5）当 $p_B < p_{e,6}$ 时，管内流动和 $p_B = p_{e,6}$ 时完全相同，但出口处存在膨胀波。



（f）underexpanded nozzle （欠膨胀喷管）

准一维喷管理论的局限

- 本节中所有关于喷管流动的讨论基于给定了管道形状的假设，即我们假定已经事先给定了喷管面积分布 。当我们把所得结果看作是每一个喷管截面的平均值时，本章给出的准一维流动理论能够很好地估算管内流动。
- 准一维流动理论不能用来设计喷管的形状，在实际情况中，如果喷管管壁曲线设计不当，在喷管内会出现斜激波。
- 在超声速喷管设计中，如果要得到没有激波的等熵管内流动，必须考虑三维真实流动情况。

Example 10.1 Consider the isentropic supersonic flow through a convergent-divergent nozzle with an exit-to-throat area ratio of 10.25. The reservoir pressure and temperature are 5 atm and 600°R, respectively. Calculate *M*, *p*, and *T* at the nozzle exit.

解：根据题意已知：$\dfrac{A_e}{A_t} = 10.25$

$$A^* = A_t, \quad 所以\frac{A_e}{A^*} = 10.25$$

查附表A，$\dfrac{A_e}{A^*} = 10.25$ 对应的超声速值：（教材1050页，表内第9行）

$$M_e = 3.95, \quad \frac{p_0}{p_e} = 142, \quad \frac{T_0}{T_e} = 4.12$$

所以：$$p_e = \frac{1}{142}(5) = 0.035(\text{atm})$$

$$T_e = \frac{1}{4.12}(600) = 145.6(^0R) = 80.9(K)$$

产生等熵超声速流动的压力差：$\Delta p = p_0 - p_e = 5\text{atm} - 0.035\text{atm} = 4.965\text{atm}$

EXAMPLE 10.2 Consider the isentropic flow through a convergent-divergent nozzle with an exit-to-throat area ratio of 2. The reservoir pressure and temperature are 1 atm and 288 K, respectively. Calculate the Mach number, pressure, and temperature at both the throat and the exit for the cases where *(a)* the flow is supersonic at the exit and *(b)* the flow is subsonic throughout the entire nozzle except at the throat, where $M = 1$.

例10.2考虑流过收缩-扩张管道的等熵流，出口面积与喉道面积比为2。管道入口处贮气室压强和温度分别为1atm和288K。计算在下列情况下喉道和喷管出口处的马赫数，压强和温度。

(a)流动在出口处为超声速；(b)除了在喉道处流动马赫数*M*=1，流动在整个喷管内为亚声速。

已知：等熵流， $A_e / A_t = 2 \quad p_0 = 1atm, \quad T_0 = 288K$

求：两种情况下的喷管喉道和出口处的马赫数、压强和温度。

解：(a) 在出口处气流为超声速

喉道处： $A_t = A^*$

$$M_t = 1$$

$$p_t = p^* = 0.528 p_0 = 0.528 atm$$

$$T_t = T^* = 0.833 T_0 = 0.833(288K) = 240K$$

出口处：根据 $\dfrac{A_e}{A^*} = 2$，查附表A（超声速）：

$$M_e = 2.2 \quad \frac{p_0}{p_e} = 10.69 \quad \frac{T_0}{T_e} = 1.968$$

$$p_e = \frac{p_e}{p_0} p_0 = \frac{1}{10.69}(1atm) = 0.0935atm$$

$$T_e = \frac{T_e}{T_0} T_0 = \frac{1}{1.968}(288K) = 146K$$

(b) 除了在喉道处流动马赫数M=1，流动在整个喷管内为亚声速。

喉道处

$$A^* = A_t,\quad M_t = 1.0$$

$$p_t = p^* = \frac{p^*}{p_0} p_0 = 0.528(\mathrm{atm})$$

$$T_t = T^* = \frac{T^*}{T_0} T_0 = 0.833(288) = 240(K)$$

出口处：

根据 $\frac{A_e}{A^*} = 2$，查附表 A（亚声速）：

$$M_e = 0.3,\quad \frac{p_0}{p_e} = 1.064 \quad \frac{T_0}{T_e} = 1.018$$

$$p_e = \frac{p_e}{p_0} p_0 = \frac{1}{1.064}(1) = 0.94 a\mathrm{atm})$$

$$T_e = \frac{T_e}{T_0} T_0 = \frac{1}{1.018}(288) = 282.9(K)$$

EXAMPLE 10.3 For the nozzle in Example 10.2, assume the exit pressure is 0.973 atm. Calculate the Mach numbers at the throat and the exit.

例10.3 对于例10.2的喷管，假设出口压强为0.973atm，计算喉道和出口处的马赫数。

提示：已知 $A_e / A_t = 2$ **，但此题的关键在于：**$A_t \neq A^*$

解：在例10.2中，我们看到，流动在喉道达到声速，但喷管内其它处流动均为亚声速时，$p_e = 0.94atm$。这说明，出口压强 $p_e > 0.94atm$ 时，整个喷管内包括喉道处的流动都是亚声速的。因此，对应本例题，$p_e = 0.973atm$，此时喉道面积A_t并不是等熵流动解的面积-马赫数关系式中的A^*， A^*在本题中只是一个定义的量。

$$\frac{p_0}{p_e} = \frac{1}{0.973} = 1.028$$

查附表**A**，可得：

$$M_e = 0.2 \qquad\qquad A_e / A^* = 2.964$$

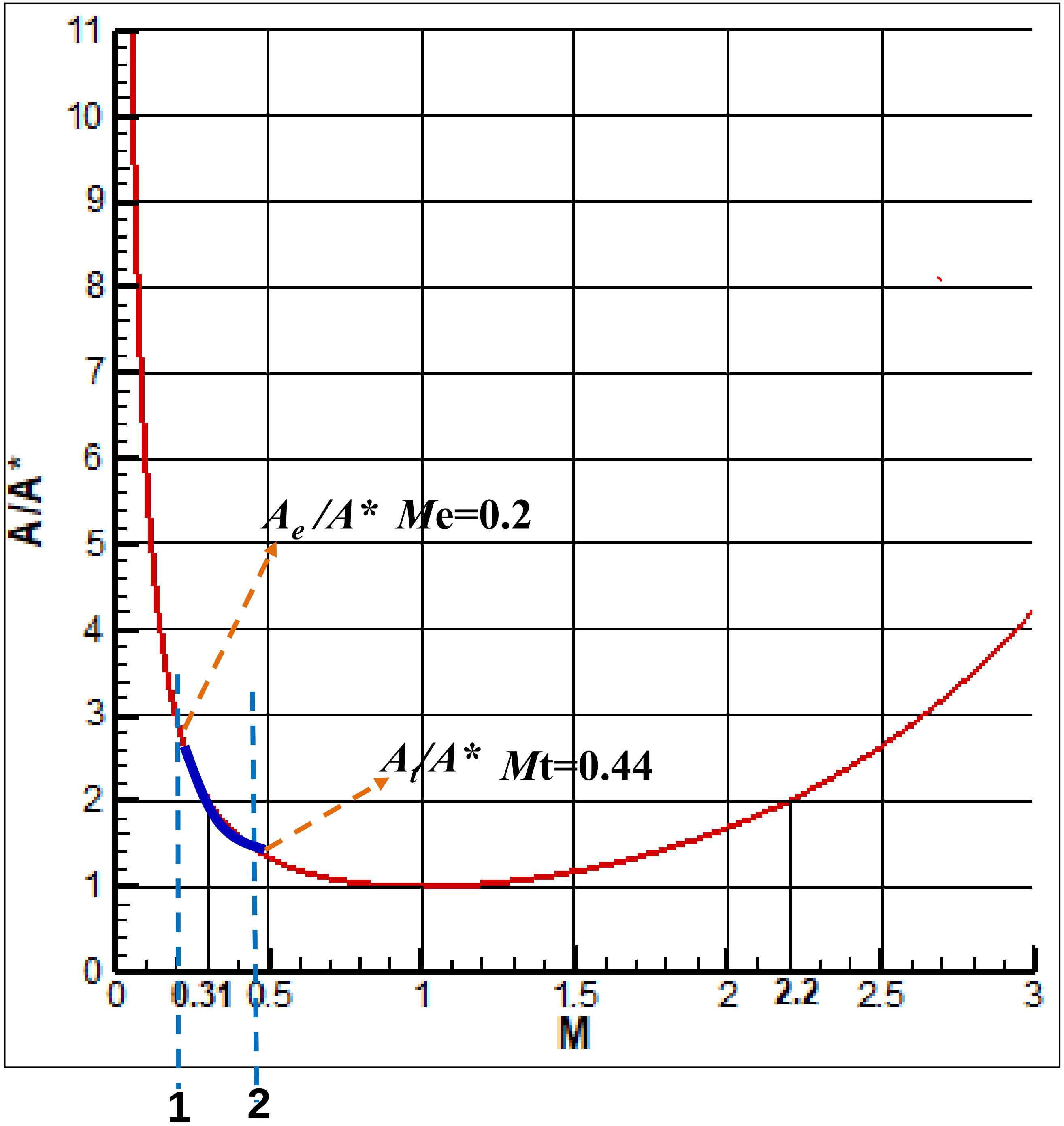
$$\frac{A_t}{A^*} = \frac{A_t}{A_e}\frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{2}(2.964) = 1.482$$

由 $\dfrac{A_t}{A^*} = 1.482$ 查附表**A**亚声速部分解，得：

$$M_t = 0.44$$

例10.3（续）

喉道至出口处解在面积-马赫数关系曲线上的示意图



作业：10.1- 10.9

10.1 The reservoir pressure and temperature for a convergent-divergent nozzle are 3 atm and 300K, respectively. The flow is expanded isentropically to supersonic speed at the nozzle exit. If the exit-to-throat area ratio is 2.005, calculate the following properties at the exit: Me, p_e, T_e, ρ_e, u_e, $p_{0,e}$, $T_{0,e}$.

10.2 A flow is isentropically expanded to supersonic speeds in a convergent-divergent nozzle. The reservoir and exit pressures are 1 and 0.2353 atm, respectively. What is the value of A_e/A^*?

10.3 A Pitot tube inserted at the exit of a supersonic nozzle reads 1.284×10^5 N/m^2. If the reservoir pressure is 2.1205×10^5 N/m^2, calculate the area ratio A_e/A^* of the nozzle.

10.4 For the nozzle flow given in Problem 10.1, the throat area is 0.4m^2. Calculate the mass flow through the nozzle.

10.5 与书上相同。

10.6 与书上相同。

10.7 A convergent-divergent nozzle with an exit-to-throat area ratio of 1.435 has exit and reservoir pressures equal to 0.931 and 1.0 atm, respectively. Assuming isentropic flow through the nozzle, calculate the Mach number and pressure at the throat.

10.8 For the flow in Problem 10.7, calculate the mass flow through the nozzle, assuming that the reservoir temperature is 288 K and the throat area is 0.2 m^2.
10.9 与书上相同

Lecture #14 ended！

欢迎关注"气动与多学科优化"课题组微信公众号