



西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

西北工业大学航空学院

《边界元素法》

课程大作业报告

课题名称:	二维圆柱声散射计算
学 院:	航空学院
专 业:	飞行器设计与工程
个人信息:	冯铮浩 2017300281 01011704 班
联系方式:	13815233646
指导老师:	刘秋洪老师

西安·西北工业大学

2020 年 1 月 1 日

摘 要

本文以实际声波传播现象为物理背景，以一种简化的二维圆柱声散射问题模型为研究对象，利用相关声学知识与叠加原理，对声散射解析解公式进行理论推导，同时对声散射边界积分方程进行推导与描述，并采用边界元素法编写程序对问题进行数值求解，且对结果进行图形可视化与分析。主要内容如下：

首先，对声波传播的物理背景与边界元素方法进行简要介绍，完整地描述二维圆柱声散射问题的声场与几何信息及相关计算要求，同时对物理声场平面中的单极子声源点结构特征和声学紧致与非紧致的概念进行分析与定义。

其次，引入可描述声波传播的亥姆赫兹方程与自由空间格林函数，利用声场线性可叠加原理，对二维圆柱声散射声场的解析表达式进行推导，并以三类贝塞尔函数的无穷级数表示最终解析解的形式。

接着，利用声波控制方程，引入一种改进的格林函数，结合格林公式与声场叠加原理，对声散射的边界积分方程进行推导。阐述应用边界元素法进行数值计算的过程，包括对平面圆柱表面进行点离散、转换观察点、处理奇点、求解线性代数方程组、线性叠加等步骤。

然后，使用 MATLAB R2017a 软件编写边界元数值求解方法程序，并将数据文件导入 Tecplot 软件，对二维圆柱声散射计算进行结果可视化。结论如下：1) 当一个波长内布置 20 个网格单元时，可近似认为网格已经收敛，此时数值计算得到的声场空间指向性分布曲线可认为与理论解曲线重合；2) 当波数 k 较小时，即 $k < 10$ 时，叠加声场解与自由入射声场解相差较小，可近似认为圆柱散射边界为声学紧致边界；3) 当波数 k 较大时，即 $k \geq 10$ 时，叠加声场解与自由入射声场解相差较大，可认为圆柱散射边界为声学非紧致边界。另外，对二维声场强度的分布云图进行了绘制与分析。

最后，提出了对未来程序改进的进一步思考与讨论，并对课程学习进行总结。

关键词：二维圆柱声散射计算；声波传播；叠加原理；边界元素法；数值计算；结果可视化；MATLAB

Abstract

In this paper, the actual sound wave propagation phenomenon is taken as the physical background, and a simplified two-dimensional cylindrical sound scattering problem model is taken as the research object. The related acoustic knowledge and the superposition principle are used to theoretically derive the analytical solution formula of sound scattering. Meanwhile, the boundary integral equation (BIE) is deduced and described and a program is written adopting the boundary element method (BEM) to realize the numerical solution, with results graphically visualized and analyzed. The main contents are as follows:

First, the physical background of sound wave propagation and BEM are briefly introduced, and the properties and the geometric information of the sound field as well as the related calculation requirements of the two-dimensional cylindrical sound scattering problem are fully described. Furthermore, the structure characteristics of the monopole sound source point in the plane and the concepts of acoustic compact and non-compact are described and defined.

Secondly, the *Helmholtz* equation and free-space Green function that can describe the propagation of sound waves are introduced, and the analytical expression of the two-dimensional cylindrical sound scattering sound field is derived by using the principle of linear superposition. The combination of three kinds of Bessel functions in form of infinite series are used to represent the final analytical solution.

Thirdly, by applying the acoustic wave control equation and an improved Green's function, and the BIE of sound scattering is derived by combining the Green's formula and the principle of superposition. The process of numerical calculation using BEM is expounded, including the steps of point discretization, transformation of observation points, processing of singular points, solving linear algebraic equations, linear superposition and so on.

Fourthly, MATLAB R2017a software is used to write the boundary element numerical solution method program, and the data files are imported into Tecplot software to visualize the results of the 2D cylindrical sound scattering calculation.

The conclusions are as follows: 1) when 20 grid cells are arranged in one wavelength, the grid can be considered to have already converged. It means that the spatial directivity distribution curve of the sound field obtained by numerical calculation can be considered to coincide with the theoretical solution curve; 2) when the wave number k is small, that is, when $k < 10$, the difference between the superimposed sound field solution and the free incident sound field solution is small, and the cylindrical scattering boundary can be approximated regraded as an acoustic compact boundary; 3) however, when k is large, that is, $k \geq 10$, the difference between the superimposed sound field solution and the free incident sound field solution is obvious, and the cylindrical scattering boundary can be considered as an acoustic non-compact boundary. In addition, the distribution contours of the two-dimensional sound field intensity was plotted and analyzed.

Finally, further consideration and discussions on the improvements of future programs are proposed, and the course learning is summarized.

Keywords: two-dimensional cylindrical acoustic scattering calculation; acoustic wave propagation; superposition principle; boundary element method; numerical calculation; result visualization; MATLAB

目 录

1 物理问题描述	6
1.1 物理背景.....	6
1.2 边界元素法简介.....	6
1.3 实际物理问题重述.....	7
1.4 物理问题分析.....	7
2 二维圆柱声散射解析解推导	9
3 声散射边界积分方程及其数值方法	12
3.1 声散射边界积分方程推导.....	12
3.2 边界积分方程数值求解方法.....	16
4 二维圆柱声散射计算结果及分析	21
4.1 程序实现框架描述.....	21
4.2 程序语言及运行环境说明.....	22
4.3 程序可视化图形结果分析.....	22
4.3.1 网格收敛性分析.....	22
4.3.2 不同波数 k 情况下的声场空间指向性分布曲线分析	23
4.3.3 二维声场强度传播分布云图计算.....	25
5 结论	27
6 对问题的进一步思考	28
7 课程学习感悟	28
8 参考文献	29
附录	30

1 物理问题描述

1.1 物理背景

声音传播是自然界中最常见的一种物理现象。从音乐到噪声，从次声波到超声波，从说话鼓掌到喷气式发动机轰鸣……声音传播与我们的生活息息相关。

声音在气体中的传播是基于分子的运动，是由分子碰撞引起的。振动发出的声波在空间内传播，距离声源较近的介质分子首先感受到声波产生的微小的压强与密度的变化，进而通过分子碰撞将这种影响传递给相邻的分子，如图 1 示意。通过这一种类似“多米诺骨牌”式的连锁反应，声波由近及远传播，并随着距离与时间的增大而不断衰减。声波传播实质上是对扰动的一种输运。

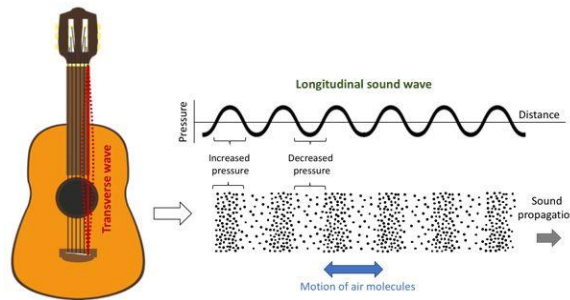


图 1 声波与声音传播示意图

当传播过程遇到障碍或受到干扰时，声波会产生多种基本波的特征，例如反射、折射、衍射、干涉、衍射、弥散、直线传播等现象。这些基本的波传播现象极大丰富了声波的形态及其应用方式。

1.2 边界元素法简介

边界元素法（Boundary Element Method），又称边界元法^[1]，是一种在经典积分方程和有限元法基础上发展起来的求解偏微分方程（Partial Differential Equation）的数值方法，广泛应用于计算流体力学和计算固体力学等工程领域。

近几十年来，由于数字计算机的出现与计算能力的大幅提升，边界元方法发展迅速。与其他常见的有限元素法或有限差分法不同，边界元法能将偏微分方程全解域的计算化为解域边界上的计算，实际上使求解问题的维数降低了一维，从而能够大幅减少划分网格数量与计算工作量，提升了数值计算效率。同时，边界元方法能够方便地处理无界区域问题，得到的精度也一般高于有限元方法。因此，

边界元方法能有效解决复杂外形绕流、应力集中、无限区域、声波传播等问题^{[2][3]}。

同时，边界元素方法亦存在不适应高度非线性情形、积分方程奇点处理困难、应用几何规模较小等问题需要未来进一步发展与解决。

本报告旨在根据基本波理论以及平面波传播方程，对一个二维圆柱声散射声传播问题进行理论解析表达式的推导，并进行声散射积分方程的推导与边界元素法的数值求解，从而对整个声场的传播机理以及声波特性加深理解。

1.3 实际物理问题重述

如图 2 所示，建立平面直角坐标系 Oxy ，将一半径为 a 的平面二维圆柱的中心放置在坐标系原点 O 处。现引入一单位强度单极子点声源 y ，其放置在相对圆柱中心 O 沿着 x 轴方向相距长度 d 位置处。试计算在以 O 为圆心， r_x 为半径的半圆周上一观察点 x 处所接收到的声场强度。其他相关几何参数已在图上表示。

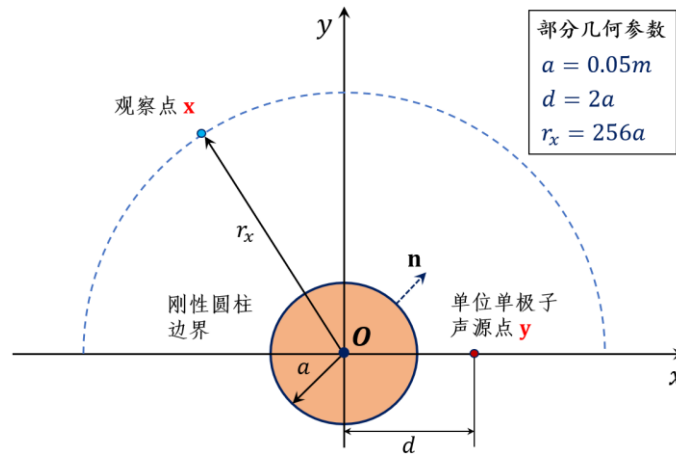


图 2 二维圆柱声散射物理问题描述示意图

1.4 物理问题分析

本物理问题要求计算一个存在二维硬边界圆柱边界干扰作用的传播声场中某些点的声强度信息。现对声场平面中的几个结构特征对声场产生的影响机理，以及声场的一些属性进行简要分析。

➤ 单极子声源与球面波

单极子声源（Monopole source）是空气动力源中最基本的声辐射体^[4]，由介质中流入的质量或热量不均匀而形成。单极子源和脉动球体一样，声源功率均匀地向各方向辐射，其指向性是一圆球。单极子声源传播示意云图如图 3 所示。单

极声源通过交替地向周围区域引入和排除流体来产生声波，例如产生低频率声波的扬声器即可视为一单极子声源。扬声器传播声波示意图如图 4 所示。

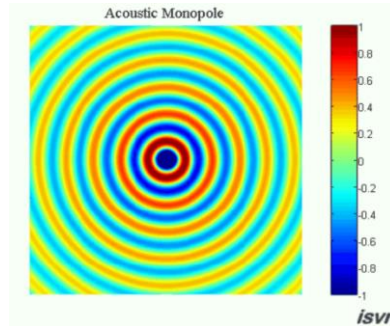


图 3 单极子声源传播示意图

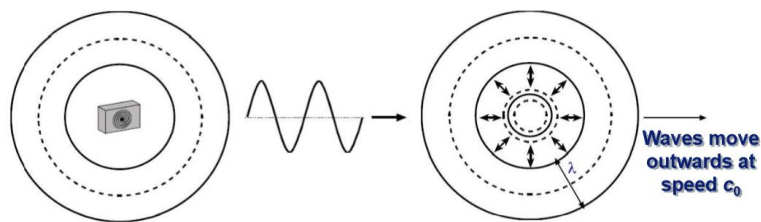


图 4 扬声器传播声波示意图

在气动噪声领域，非定常的质量源可认为是一个单极子声源。另外常见的声辐射体有偶极子源（Dipole source）、横向四极子源（Lateral quadrupole source）、线性四极子源（Linear quadrupole source）等^[5]。

➤ 声散射及声学紧致与非紧致概念

声散射（Sound scattering）是指声波在传播中遇到障碍物时，部分声波偏离原始传播路径，从障碍物四周散播开来的现象^[6]。当声波向障碍物入射时，障碍物受入射声源的激励而成为一个次级声源，并将部分入射声能转换为散射声能而向其四周辐射。从障碍物四周散布开来的那部分声波称为散射声波。

通常地，与其他介质散射类似（如图 5 所示），声散射亦包含由反射定律描述的声反射部分。通过散射形式的反射称为漫反射，而未发生散射的部分称为镜面反射。

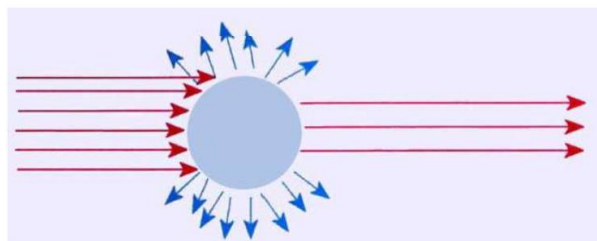


图 5 介质散射形式示意图

散射边界可由其特征几何参数与入射声波波长之间的大小关系，分为声学紧致边界与声学非紧致边界两种^[7]。

若考虑散射边界为一直径为 d 的圆柱面，则当满足 $\lambda \gg d$ 时，其为声学紧致几何体，此时声波的衍射现象尤为明显，即声波可近似认为绕过圆柱，而可忽略在圆柱表面产生的散射效应；反之，当满足 $\lambda \ll d$ 时，其为声学非紧致几何体，此时声波波长较圆柱直径很小，则此时在圆柱表面产生的声散射现象明显，而衍射现象可近似忽略。示意图如图 6 所示。

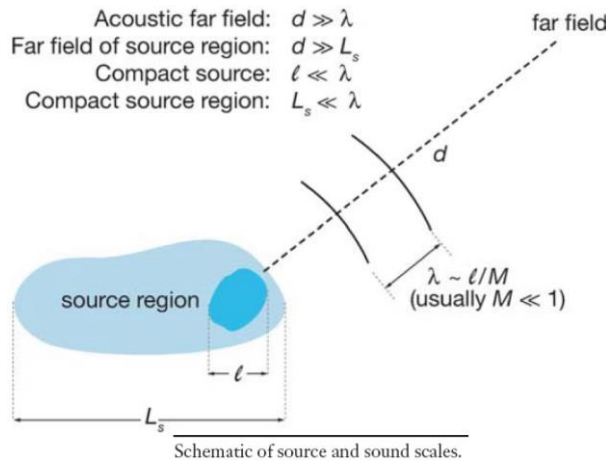


图 6 声学紧致与非紧致现象示意图

2 二维圆柱声散射解析解推导

本部分对二维圆柱声散射解析解进行详细推导。

假设在声场中给定一点观察点 \mathbf{x} ，分析观察点处声场强度的组成。不妨设 \mathbf{x} 处由单极子声源 \mathbf{y} 引起的声场强度为 $G_A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ，则由叠加原理，有

$$G_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + G_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (1)$$

其中， $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为从声源点 \mathbf{y} 向观察点 \mathbf{x} 直接产生的声辐射强度，是自由空间格林函数的一种形式，也是声波动方程的基本解。 $G_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为由声源点 \mathbf{y} 诱导出的从圆柱表面产生的声散射在观察点 \mathbf{x} 的强度。下面分别对观察点的声场强度产生贡献的两个部分进行理论解析表达式推导。

➤ $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 项的解析表达式推导（声波直接辐射项）

自由声场传播示意图如图 7 所示。 G_0 项是一类自由空间格林函数，也是平面

声波传播方程的基本解，其在声源点 \mathbf{y} 处为一个奇点。

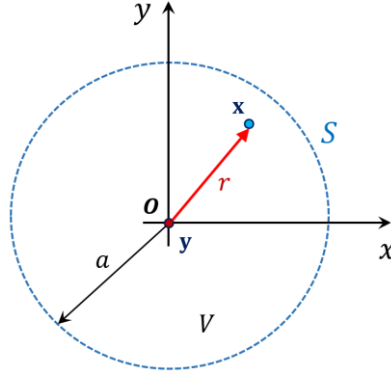


图 7 自由声场传播示意图

已知控制平面声波传播的二阶偏微分方程为亥姆赫兹方程（*Helmholtz equation*），其一般表达形式为

$$(\nabla^2 + k^2)u = 0 \quad (2)$$

其中， u 代表声波强度函数， k 为声波波数，代表一个周期内存在完整波形的个数，满足 $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c_0}$ ，其中 λ 为声波波长， ω 为声波频率， c_0 为声速。

由于题目要求计算一个稳定声场状态，则此处方程不考虑时域情形，仅考虑在频域内求解，则 *Helmholtz* 方程在平面自由声场的解满足

$$(\nabla^2 + k^2)G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3)$$

在二维平面内，基本解表达形式为

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(kr) \quad (4)$$

其中， j 为虚数单位， $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ ，表示连接声源点 \mathbf{y} 和观察点 \mathbf{x} 矢径 $|\mathbf{r}|$ 的模长。

H 表示汉克尔（*Hankel*）函数，其一般表达形式为 $H_\nu^{(t)}(x)$ ，表示阶数为 ν 的第 t 类汉克尔函数。*Hankel* 函数为第三类贝塞尔（*Bessel*）函数，为第一类与第二类 *Bessel* 函数的线性组合，其表达形式如下

阶数为 ν 的第一类 *Bessel* 函数：

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (5)$$

阶数为 ν 的第二类 *Bessel* 函数：

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (6)$$

阶数为 ν 的第一类和第二类 *Hankel* 函数：

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x) \quad (7)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x) \quad (8)$$

两类 *Hankel* 函数可分别用于表达向内场和向远场传播的圆柱声波方程的解。

有关三类 *Bessel* 函数的更多性质可参考文献^[8]。

由于本题求解区域为半圆，则对于二维平面问题，*Helmholtz* 方程基本解(3)可以拓展为极坐标表达形式，坐标定义如图 8 所示，其计算公式如下

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \begin{cases} \frac{j}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{jm(\theta_x - \theta_y)} H_m^{(1)}(kr_x) J_m(kr_y), & r_y \leq r_x \\ \frac{j}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{jm(\theta_x - \theta_y)} H_m^{(1)}(kr_y) J_m(kr_x), & r_y > r_x \end{cases} \quad (9)$$

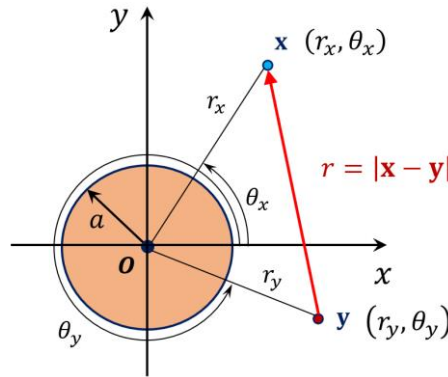


图 8 极坐标点形式示意图

➤ $G_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 项的解析表达式推导（圆柱散射声波项）

圆柱散射声波场的解 $G_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 项可用描述向远场传播声波的第一类 *Hankel* 函数的无穷级数形式表达，如下

$$G_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m e^{im\theta_x} H_m(kr_x) \quad (10)$$

其中，振幅项 A_m 可表达为

$$A_m = -\frac{J'_m(ka) + \beta J_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka) + \beta H_m^{(1)}(ka)} e^{-im\theta_y} H_m^{(1)}(kr_y) = \alpha_m e^{-im\theta_y} H_m^{(1)}(kr_y). \quad (11)$$

若以 Z 表示上式中出现的第一、三类 *Bessel* 函数通项，有下面性质成立

$$Z'_n(kr) = \frac{\partial}{\partial r} Z_n(kr) = k \frac{Z_{n-1}(kr) - Z_{n+1}(kr)}{2} \quad (12)$$

代入 A_m 表达式，整理可得

$$\alpha_m = -\frac{[J_{m-1}(ka) - J_{m+1}(ka)] + \frac{2\beta}{k} J_m(ka)}{[H_{m-1}^{(1)}(ka) - H_{m+1}^{(1)}(ka)] + \frac{2\beta}{k} H_m^{(1)}(ka)} \quad (13)$$

则圆柱声波散射场解的表达式为

$$G_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{j}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m e^{jm(\theta_x - \theta_y)} H_m(kr_y) H_m(kr_x). \quad (14)$$

➤ $G_A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 项的解析表达式（声场最终叠加结果）

声场在散射面的边界条件为

$$\frac{\partial G_A(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial r_x} + \beta G_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (15)$$

由叠加原理，实际的声场格林函数解的无穷级数解析表达式为

$$\begin{aligned} G_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + G_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \frac{j}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{jm(\theta_x - \theta_y)} H_m^{(1)}(kr_x) J_m(kr_y) \\ &\quad + \frac{j}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m e^{jm(\theta_x - \theta_y)} H_m(kr_y) H_m(kr_x). \end{aligned} \quad (16)$$

其中，若散射圆柱面为硬质边界，则 $\beta = 0$ ，代入 α_m 的表达式，故上式中有

$$\alpha_m = -\frac{J_{m-1}(ka) - J_{m+1}(ka)}{H_{m-1}^{(1)}(ka) - H_{m+1}^{(1)}(ka)} \quad (17)$$

3 声散射边界积分方程及其数值方法

3.1 声散射边界积分方程推导

如图 9 所示，一个面法线向量 \mathbf{n} 向外的封闭的控制面 S 将无限大平面分为两个部分，即有限空间的内场与无限区域的外场，分别代表声传播的内场问题与外

场问题。其中，内场的控制体积为 V ，外场的控制体积为 Ω 。

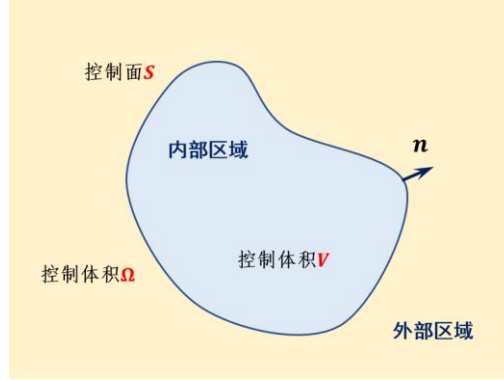


图 9 内场与外场问题划分示意图

描述声波传播的 *Helmholtz* 方程及其在平面自由场频域内的基本解形式为

$$\begin{cases} (\nabla_y^2 + k^2)p(\mathbf{y}) = 0 \\ (\nabla_y^2 + k^2)G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{cases} \quad (18)$$

将上述方程组中的第一式两边同乘 $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ，第二式两边同乘 $p(\mathbf{y})$ ，两式相减并在控制体 V 上积分，并结合 *Dirac* 函数性质，有

$$\int_V [p(\mathbf{y})\nabla_y^2 G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})\nabla_y^2 p(\mathbf{y})]dV = -p(\mathbf{x}) \quad (19)$$

由格林第二公式

$$\int_V (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)dV = \int_S (u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}})dS \quad (20)$$

故有

$$\int_V [p(\mathbf{y})\nabla_y^2 G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})\nabla_y^2 p(\mathbf{y})]dV = \int_S \left[p(\mathbf{y})\frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} - G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})\frac{\partial p(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \right]dS \quad (21)$$

则得

$$p(\mathbf{x}) = \int_S \left[G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})\frac{\partial p(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} - p(\mathbf{y})\frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \right]dS \quad (22)$$

考察声场边界条件，一般形式的声场边界条件可表示为

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} - \beta p = 0, \quad \beta = jk \frac{\rho_0 c_0}{Z} \quad (23)$$

对于硬质散射边界，有 $\beta = 0$ ，即

$$(24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0$$

则声散射边界积分可简化为

$$p(\mathbf{x}) = -\int_S p(\mathbf{y}) \frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} dS. \quad (25)$$

对于非齐次的 *Helmholtz* 方程，其一般形式为

$$(\nabla^2 + k^2)p(\mathbf{x}) = -\gamma(\mathbf{x}, \omega) \quad (26)$$

其对应被硬质边界散射情形的频域声场解形式为

$$C(\mathbf{x})p(\mathbf{x}, \omega) = \int_V G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})\gamma(\mathbf{y}, \omega)dV - \int_S p(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} dS \quad (27)$$

$$C(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \notin V \cup S \\ \frac{1}{2}, & \mathbf{x} \in S \\ 1, & \mathbf{x} \in V \end{cases} \quad (28)$$

右边第一项对应直接声辐射项，第二项对应声散射边界项。

下面引入一种改进的格林函数形式，其满足所有的声场边界条件，可用以计算整个声场信息。

首先考虑边界条件，分为远场边界及散射边界两部分。对于远场边界，声传播须满足索末菲（*Sommerfeld*）辐射条件；对于散射边界，若以 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 表示声场解，则须满足下面的关系式

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} - \beta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (29)$$

其中 β 的取值由边界性质决定，对于声学硬质边界，须满足壁面无穿透的第二类

Neumann 条件，即 $\beta = 0$ ；对于一般的具有声阻抗 Z 的壁面，有 $\beta = jk \frac{\rho_0 c_0}{Z}$ 。

对于静止的刚性硬质边界，改进的格林公式满足

$$p(\mathbf{x}, \omega) = \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\gamma(\mathbf{y}, \omega)dV \quad (30)$$

现考虑由声源点 \mathbf{y} 发出的声波对观察点 \mathbf{x} 产生的影响。如图 10 所示，设 \mathbf{z} 为圆柱边界上任一点，则由叠加原理，观察点 \mathbf{x} 接受到的声波强度等于由 \mathbf{y} 传播

的声直接辐射项 $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 与由圆柱表面产生的声散射总和两部分之和。

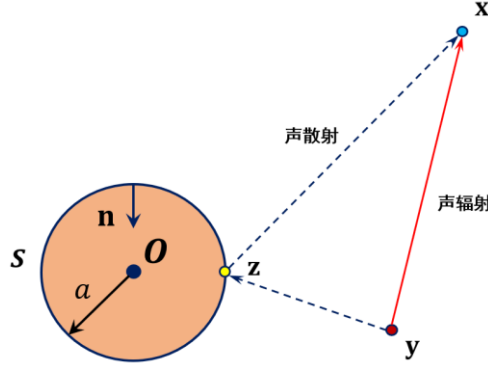


图 10 声叠加效果示意图

设由 \mathbf{z} 点接受到来自声源点 \mathbf{y} 的声辐射解为 $G_0(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ ，且向观察点 \mathbf{x} 产生的声散射解为 $G(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ ，则对于图示声传播路径，满足下列方程组

$$\begin{cases} (\nabla_z^2 + k^2)G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \\ (\nabla_z^2 + k^2)G_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \end{cases} \quad (31)$$

联立上述两式，有

$$\begin{aligned} \int_V [G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \nabla_z^2 G_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - G_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \nabla_z^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{z})] dV \\ = \int_S [G_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \delta(\mathbf{z} - \mathbf{y})] dS(\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (32)$$

对上式左边运用格林第二公式，有

$$\begin{aligned} \int_V [G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \nabla_z^2 G_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - G_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \nabla_z^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{z})] dV \\ = \int_S \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \frac{\partial G_0(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} - G_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} \right] dS(\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (33)$$

对右边积分式，由 *Dirac* 函数性质，可得

$$\int_S [G_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \delta(\mathbf{z} - \mathbf{y})] dS(\mathbf{z}) = G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (34)$$

联立上面两变换式，即有

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \int_S \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \frac{\partial G_0(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} - G_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} \right] dS(\mathbf{z}) \quad (35)$$

又考虑散射边界条件

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} - \beta G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0 \quad (36)$$

代入 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的表达式，整理可得表达式

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \left[\frac{\partial G_0(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} - \beta G_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \right] dS(\mathbf{z}) \quad (37)$$

考虑声波传播的另一组 *Helmholtz* 控制方程为

$$\begin{cases} (\nabla_z^2 + k^2)G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \\ (\nabla_z^2 + k^2)G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \end{cases} \quad (38)$$

类似上述推导过程，直接给出最终叠加声场解

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \int_S G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \left[\frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} - \beta G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \right] dS(\mathbf{z}) \quad (39)$$

声场解的物理意义如下。上式右端，第一项 $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为声直接辐射项，第二项为从控制面 S 边界产生的声散射积分项。

由此可知，对于平面上给定的一声源点 \mathbf{y} ，其对观察点 \mathbf{x} 产生的声波强度 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 可由辐射与散射两部分叠加得到。

3.2 边界积分方程数值求解方法

针对实际物理问题背景，对于声直接辐射项 $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ，由于其为自由平面声场格林函数的基本解形式，则可由第一类 *Hankel* 函数的解析表达式直接求解。而对于声散射积分项，则需要通过数值方法求解。

给定单位声源点 \mathbf{y} 与观察点 \mathbf{x} 的坐标，已推导边界元积分表达式如下

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \int_S G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \left[\frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} - \beta G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \right] dS(\mathbf{z}) \quad (40)$$

➤ 步骤一：计算声直接辐射项 $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

在题设要求的观察半圆上均匀布置一系列待求声场强度的观察点 \mathbf{x} ，取从 \mathbf{y} 指向 \mathbf{x} 的矢径 \mathbf{r} ，利用基本解形式直接求出 \mathbf{x} 接受到来自声源点 \mathbf{y} 的直接辐射项的值，即有

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(kr) \quad (41)$$

进一步，自由平面格林函数 $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 对表面法向量的一阶偏导数可表示为

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{jk}{4} H_1^{(1)}(kr) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{r}. \quad (42)$$

➤ 步骤二：划分圆柱周线网格，构造边界积分离散点集 $\{z_m\}$

在圆柱边界周线上布置 $M+1$ 个连续等距的点，将整个圆周划分为 M 段微小网格区间，取每个微小区间的单元中心点为控制点，依次编号为 $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \dots, \mathbf{z}_M$ 。

当布置点足够密时，可以将连续的边界积分近似为离散控制点值的累加，即有

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{n=1}^M G(\mathbf{z}_n, \mathbf{y}) \left[\frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}_n)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_n)} - \beta G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}_n) \right] dS(\mathbf{z}_n) \quad (43)$$

观察半圆与圆柱周线上离散点布置示意图如图 11 所示。

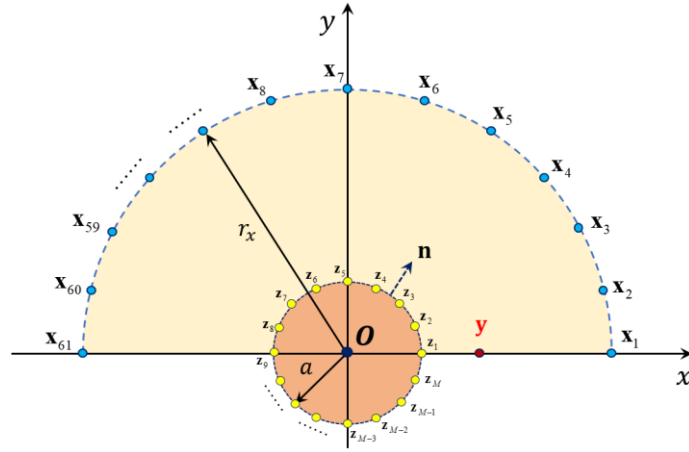


图 11 观察半圆与圆柱周线上离散点布置示意图

➤ 步骤三：将观察点 \mathbf{x} 移动到圆柱散射边界上的 \mathbf{z}_m 处，计算 $G(\mathbf{z}_m, \mathbf{y})$

为了计算 $G(\mathbf{z}_m, \mathbf{y})$ 的值，可用 \mathbf{z}_m 点替换边界元积分中的原始观察点 \mathbf{x} ，相当于计算在 \mathbf{z}_m 点感受到的来自声源点 \mathbf{y} 的声场强度，其边界积分方程为

$$G(\mathbf{z}_m, \mathbf{y}) = G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{y}) - \sum_{n=1}^M G(\mathbf{z}_n, \mathbf{y}) \left[\frac{\partial G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_n)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_n)} - \beta G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_n) \right] dS(\mathbf{z}_n) \quad (44)$$

移项可得

$$G(\mathbf{z}_m, \mathbf{y}) + \sum_{n=1}^M G(\mathbf{z}_n, \mathbf{y}) \left[\frac{\partial G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_n)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_n)} - \beta G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_n) \right] dS(\mathbf{z}_n) = G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{y}) \quad (45)$$

其中 $m = 1, 2, 3, \dots, M$ 。

将关于圆柱表面 M 个控制点的积分方程表示为线性方程组形式，则有

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1M} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \cdots & A_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(\mathbf{z}_1, \mathbf{y}) \\ G(\mathbf{z}_2, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ G(\mathbf{z}_M, \mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0(\mathbf{z}_1, \mathbf{y}) \\ G_0(\mathbf{z}_2, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ G_0(\mathbf{z}_M, \mathbf{y}) \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{A}\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 \quad (46)$$

其中, A_{mn} 构成系数矩阵 \mathbf{A} , 其物理含义为控制点 \mathbf{z}_n 对计算点 \mathbf{z}_m 产生的影响系数。

同时定义

$$I_1 = \int_{S_n} \beta G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_n) dS(\mathbf{z}_n) \quad (47)$$

$$I_2 = \int_{S_n} \frac{\partial G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_n)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_n)} dS(\mathbf{z}_n) \quad (48)$$

根据系数矩阵中 m 与 n 的大小关系, A_{mn} 与 I_1 及 I_2 的关系可分为两种情况考虑, 具体如下

1) 情形一: 当 $m=n$ 时

此时控制点 \mathbf{z}_n 与计算点 \mathbf{z}_m 两点重合。考虑三维问题中自由平面声场格林函数及其对单位法向量的一阶偏导项, 有

$$G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_n) = \frac{e^{jkr}}{4\pi r} \quad (49)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_n)} G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_n) = -\frac{e^{jkr}(jkr-1)}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}_n)}{r}. \quad (50)$$

考虑 \mathbf{z}_n 无限逼近 \mathbf{z}_m 的过程, 则有 $r \rightarrow 0$, 故 $G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_n)$ 奇异。根据函数表达式中 r 的次数, 可定义奇异性强弱性如下

a) 弱奇异: $f(r) \rightarrow O(\ln r)$

b) 奇异: $f(r) \rightarrow O(r^{-1})$

c) 强奇异: $f(r) \rightarrow O(r^{-2})$

d) 超强奇异: $f(r) \rightarrow O(r^{-n}), n \geq 3$

故当 $n \rightarrow m$ 时, 有

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_n)} G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_n) \rightarrow O(r^{-2}), r \rightarrow 0 \text{ 表现为强奇异}$$

考虑在控制区域挖去一个以控制点 \mathbf{z}_m 为中心，半径为 ε 的半球体（二维问题内即为一个半圆形），考虑 \mathbf{z}_n 落在半球体表面 s （或二维情形中的半圆形表面 s ）上，当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，满足 \mathbf{z}_n 无限逼近 \mathbf{z}_m 条件，如图 12 所示。

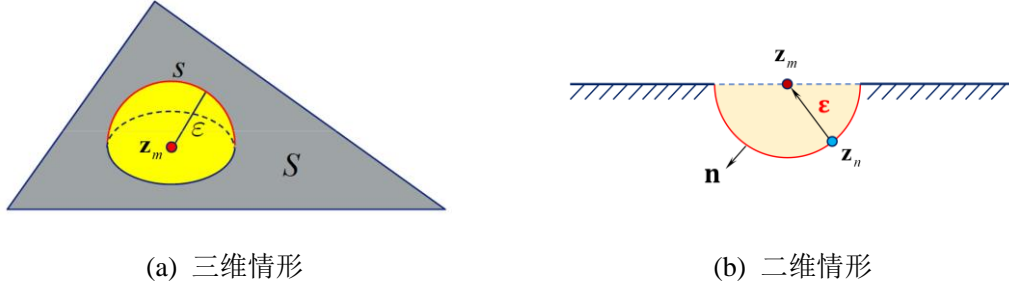


图 12 三维与二维奇点处理示意图

对于三维情形，有

$$\begin{aligned}
 \int_s \frac{\partial G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_n)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_n)} dS &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{e^{jk\varepsilon}(jk\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon^2} \frac{\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}_n)}{\varepsilon} s \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{jk\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon^2} 2\pi\varepsilon^2 \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{jk\varepsilon - 1}{2} \right] = -\frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{51}$$

则此时满足

$$I_2 = \int_{s_n} \frac{\partial G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_n)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_n)} dS(\mathbf{z}_n) = -\frac{1}{2}. \tag{52}$$

2) 情形二：当 $m \neq n$ 时

$$\text{此时满足 } A_{mm} = I_2 - I_1 = \int_{s_n} \frac{\partial G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_n)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_n)} dS(\mathbf{z}_n) - \int_{s_n} \beta G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_n) dS(\mathbf{z}_n) \tag{53}$$

在平面二维情形中，格林公式将控制面积分转化为边界线积分。由于此时 \mathbf{z}_n 与 \mathbf{z}_m 相距不远，若以 \mathbf{z}_n 所在的微段长度 $|ds|$ 替代 $dS(\mathbf{z}_n)$ 项，则误差较大。考虑采用多点高斯-勒让德 (Gauss-Legendre) 积分公式进行线积分数值计算。

控制节点为 n 的 Gauss-Legendre 积分公式可表示如下

$$y = \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \tag{54}$$

如采用四点 Gauss-Legendre 积分公式 ($n = 4$)，即有

$$y = \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^4 w_i f(x_i) \quad (55)$$

其中，控制节点 x_i 以及对应的节点权值 w_i 为

$$\begin{cases} x_1, x_4 = \pm \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}} \approx \pm 0.861136 \\ x_2, x_3 = \pm \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}} \approx \pm 0.339981 \end{cases} \quad (56)$$

$$\begin{cases} w_1, w_4 = \frac{18 + \sqrt{30}}{36} \approx 0.652145 \\ w_2, w_3 = \frac{18 - \sqrt{30}}{36} \approx 0.347855 \end{cases} \quad (57)$$

若以 \mathbf{z}_a 与 \mathbf{z}_b 表示 \mathbf{z}_n 微段区间的两端点，有 $\mathbf{z}_a = (x_a, y_a)$ 及 $\mathbf{z}_b = (x_b, y_b)$ ，

且令

$$f(r) = \left[\frac{\partial G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_n)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_n)} - \beta G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_n) \right] = \frac{jk}{4} H_1^{(1)}(kr) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}_n)}{r} - \frac{j\beta}{4} H_0^{(1)}(kr) \quad (58)$$

则有积分公式

$$\begin{aligned} A_{mm} &= \int_{S_n} f(r) dS(\mathbf{z}_n) = \int_{z_a}^{z_b} f(r) dS(\mathbf{z}_n) \\ &\approx \frac{x_b - x_a}{2} \sum_{i=1}^4 w_i f\left(\frac{x_b - x_a}{2} x_i + \frac{x_b + x_a}{2}\right) \end{aligned} \quad (59)$$

综上，由两种 m 与 n 的大小关系情形分析，有以下表达式成立

$$A_{mm} = \begin{cases} -\frac{1}{2} - I_1, & m = n \\ I_2 - I_1, & m \neq n \end{cases} \quad (60)$$

若考虑散射圆柱表面为刚体硬质边界，则有 $\beta = 0$ ，即上式中 $I_1 = 0$ ，由此可

计算出系数矩阵中每一项的 A_{mn} 以及方程组右端的各项 $G_0(\mathbf{z}_m, \mathbf{y})$ 。

➤ 步骤四：利用迭代法求解线性代数方程组 $\mathbf{AG} = \mathbf{G}_0$

如前所述，已知线性代数方程组 $\mathbf{AG} = \mathbf{G}_0$ ，且已得到系数矩阵 \mathbf{A} 以及右端矩

阵 \mathbf{G}_0 。求解方程组矩阵 \mathbf{G} 的方式多样，主要有简单迭代法（*Jacobi* 迭代法）、

Seidel 迭代法、逐次超松弛迭代法（SOR 方法）等。简单迭代法求解步骤如下：

- 1) 令 $\mathbf{G}^{(0)}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \mathbf{G}_0(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ ；
- 2) 利用 $\mathbf{G}^{(i-1)}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ 的结果计算新的 $\mathbf{G}^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ ，更新 $\mathbf{G}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ 的当前状态；
- 3) 定义退出迭代精度误差 η ，即有

$$\eta = \max \left\{ \frac{|\mathbf{G}^{(i)}(\mathbf{z}_m, \mathbf{y}) - \mathbf{G}^{(i-1)}(\mathbf{z}_m, \mathbf{y})|}{|\mathbf{G}^{(i)}(\mathbf{z}_m, \mathbf{y})|} \right\} \quad (61)$$

若 η 已经小于一给定小量 ε ，例如 $\varepsilon = 0.001$ ，则可判断迭代已经收敛，

得到的 $\mathbf{G}^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ 即为所求的 $\mathbf{G}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ 。

➤ 步骤五：积分求解得到最终叠加声场结果 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

由步骤一可得声直接辐射项 $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ，步骤四可得各项 $G(\mathbf{z}_m, \mathbf{y})$ 值，也即对应各项 $G(\mathbf{z}_n, \mathbf{y})$ 值，由

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{n=1}^M G(\mathbf{z}_n, \mathbf{y}) \left[\frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}_n)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_n)} - \beta G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}_n) \right] dS(\mathbf{z}_n) \quad (62)$$

则可积分可得到 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的最终结果。

注意到题设观察点 \mathbf{x} 与圆柱表面各点 \mathbf{z}_n 相距很远，有 $r_x \gg a$ ，则可近似认为 $dS(\mathbf{z}_n)$ 项为控制点 \mathbf{z}_n 所在微段区间的长度 $|ds|$ ，无需使用高阶的 Gauss-Legendre 积分公式。

4 二维圆柱声散射计算结果及分析

4.1 程序实现框架描述

二维圆柱声散射的解析解以及边界元素法数值积分方法均可通过编写程序实现。对于解析表达式的公式计算不再赘述，边界元的数值程序求解过程可由流程图图 13 表示。

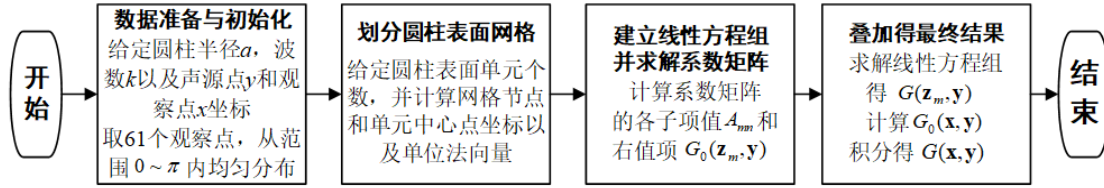


图 13 边界元素法数值计算方法实现流程图

同时，自主编写程序结果文件输出模块，将程序计算结果导入 Tecplot 360 EX 2017 软件中进行图形可视化，可显示声场空间指向性分布曲线、二维声场强度分布以及数值结果与理论解析解的对比等信息，便于进行数据定性、定量分析。

4.2 程序语言及运行环境说明

运行环境：Windows 10 64 位操作系统；程序语言：MATLAB

本二维圆柱声散射计算程序采用 MATLAB R2017a 进行调试编写。共包含三个.m 文件主程序，具体命名为：

1) Program_Convergence_Analysis.m

保存圆柱周线布置网格收敛性分析程序源代码，运行后生成数据文件。

2) Program_Acoustic_Directivity_Distribution_Calculation.m

保存不同波数 k 情形的声场空间指向性分布曲线绘制对比程序源代码，实现解析解、边界元数值解以及自由入射声场解，运行后生成数据文件。

3) Program_Acoustic_Field_Calculation.m

保存二维声场强度分布云图计算程序源代码，运行后生成数据文件。

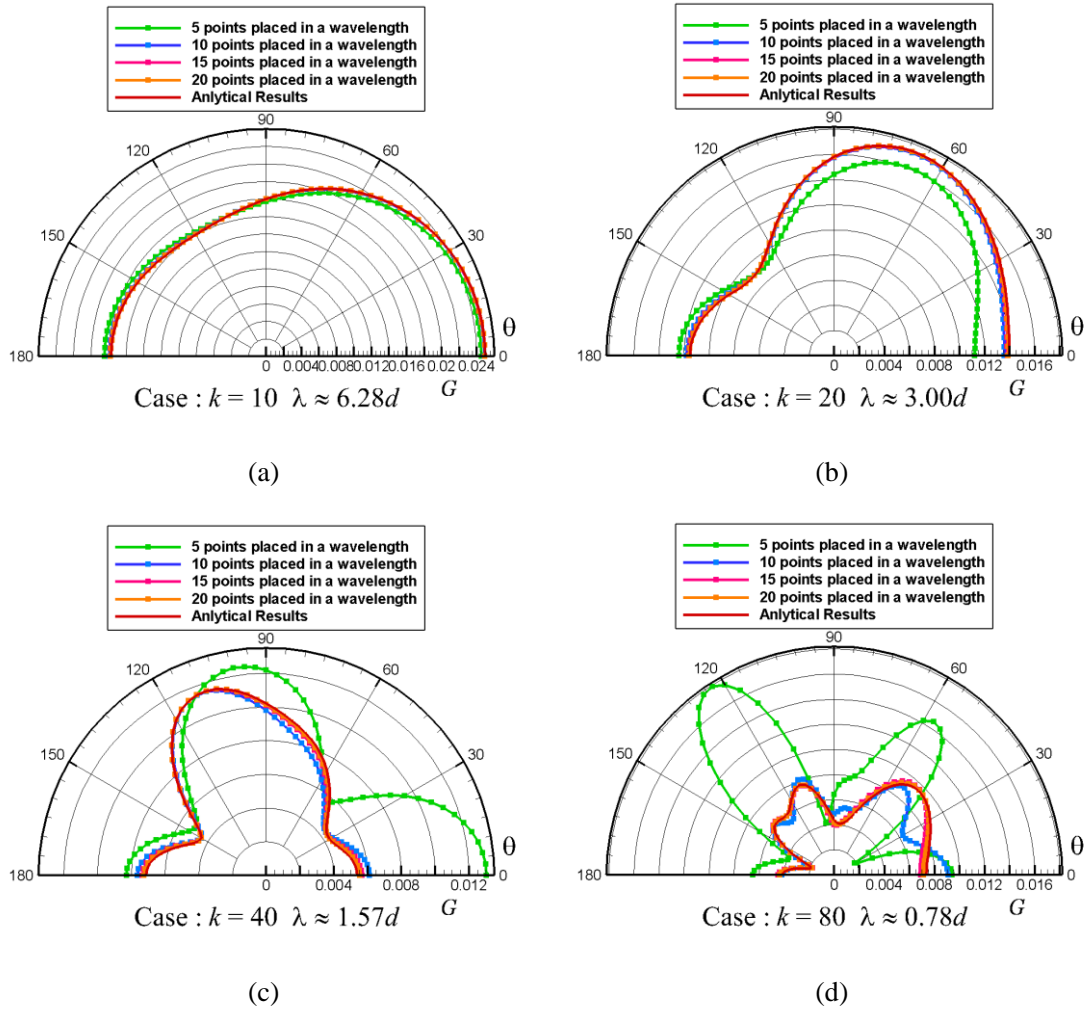
以上源程序已保存在原始文件夹下，可配置在较高版本的 MATLAB 的工作目录下直接运行，查看输出结果。每一个源程序均有结果输出模块，直接写入.dat 文件，可直接打开 Tecplot 模板进行数据导入与图形可视化。源程序见附录。

4.3 程序可视化图形结果分析

4.3.1 网格收敛性分析

当 $k = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda} = 10, 20, 40, 80$ 时，分别计算当一个波长内分别布置 5, 10, 15, 20

个网格单元时，利用边界元方法计算的声场空间指向性分布曲线，如图 14 所示。


 图 14 不同波数 k 情形下网格收敛性分析图

图中，深红色实线代表声场空间指向性解析曲线，其他颜色带点直线代表利用边界元数值方法计算的不同单元网格数量情形下的声场空间指向性曲线。可观察到，在不同波数 k 情形下，随着在一个波长内的圆柱表面上布置网格点数的增加，利用边界元数值方法计算得到的声场空间指向性曲线从形态上逐步逼近解析表示曲线。当一个波长内的网格单元数达到 20 时，四幅图均可近似认为数值计算曲线与解析表达曲线重合，即网格已经收敛。如继续增加一个波长内的网格单元数，则数值计算的精度将不断提高，但消耗的内存与计算资源也会随之增加。

4.3.2 不同波数 k 情况下的声场空间指向性分布曲线分析

依次取声波波数 $k=1,10,20,40,80$ ，设定圆柱表面单元数为 201，观察点数为 61，采用四点 *Gauss-Legendre* 积分公式，并调用 MATLAB 自带的三类 *Bessel* 函数模块以及线性方程组求解模块，计算声场信息，导出数据并利用 Tecplot 软件

绘制空间指向性极坐标分布曲线。分别绘制解析求解、数值求解、以及自由入射声场的声场指向性分布曲线，如图 15 所示。

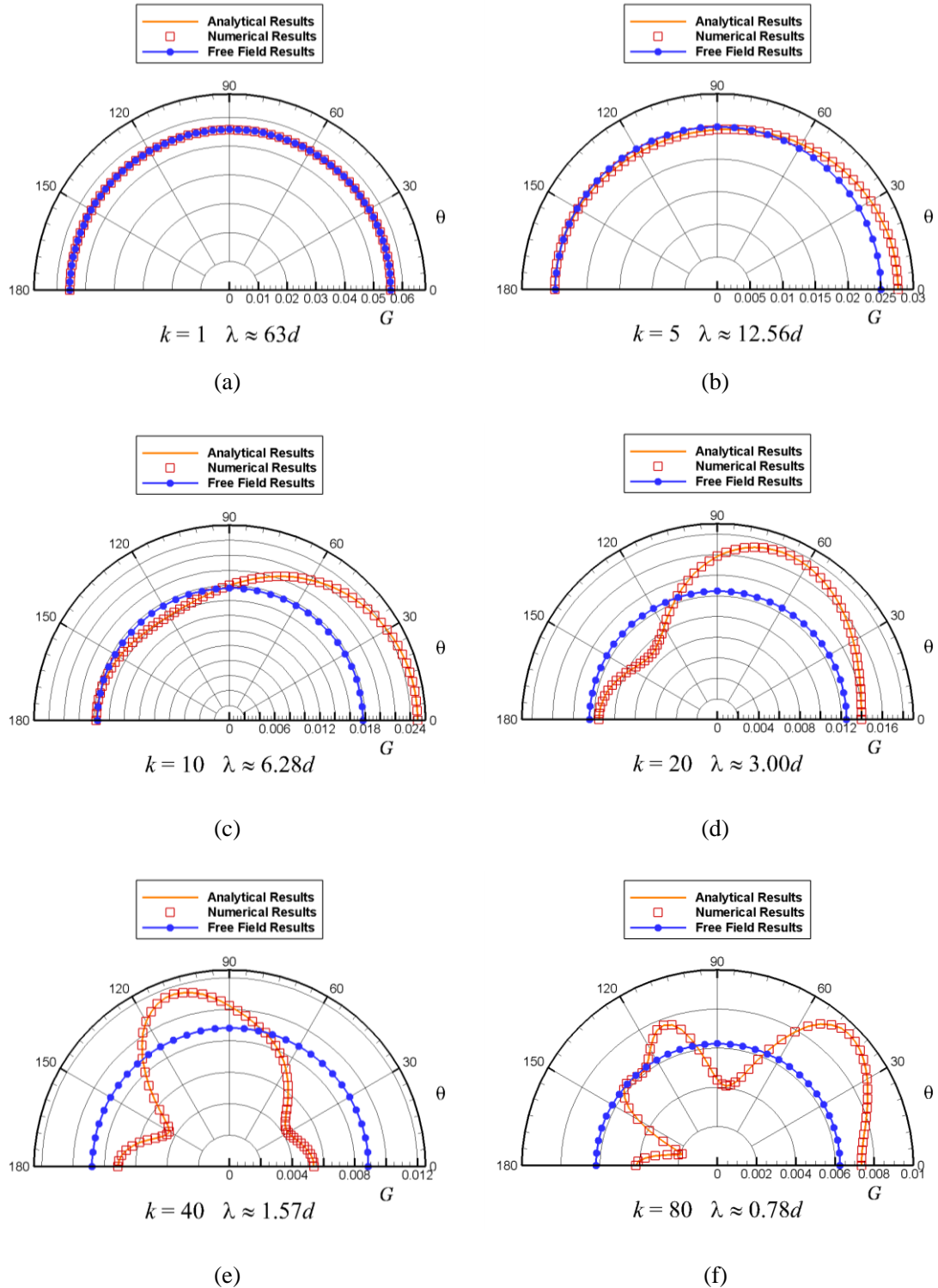


图 15 不同波数情况下的声场指向性分布曲线对比图

观察并分析上图，首先，当波数 k 较小时，即 $k < 10$ 时，叠加声场解与自由入射声场解相差较小，这是由于当此时的声波波长 λ 较圆柱直径 d 大很多，可近

似认为圆柱散射边界为声学紧致边界，声衍射现象明显而声散射现象较弱，声散射的边界积分项也较小，故实际声场与自由入射声场的空间指向性分布曲线接近重合。而当波数 k 较大时，即 $k \geq 10$ 时，叠加声场解与自由入射声场解相差较大，这是由于此时的声波波长 λ 量级与 d 近似或小很多，可认为圆柱散射边界为声学非紧致边界，声衍射现象较弱而声散射现象明显，声散射的边界积分项较大，故声场的空间指向性分布曲线呈现较大的偏差，实际声场解曲线出现较大的扭曲。

其次，从图中可清晰地观察到，边界元数值方法计算得到的声场空间指向性分布离散点与理论解析解表示的声场空间指向性分布曲线偏差很小，两者吻合度很高，说明此时圆柱表面网格数量达到收敛性分析要求，且运用的数值方法能够达到较高的结果精度，可近似为理论解答。

最后，观察图示声场强度数值，随着波数 k 的增大，即声波波长 λ 的减小，声场空间分布性曲线上代表的声场强度数值有明显减小的趋势。这是由于点声源强度保持为单位强度，即振幅不变，又频率为 ω 不变，则当 k 增大时，波速 c_0 减小，故声波在传播相同距离的过程中强度衰减更大，则声场强度数值将会减小。

4.3.3 二维声场强度传播分布云图计算

为更加清晰地表现单极子声源点发出声波的辐射与圆柱表面散射情况，现绘制不同波数 k 情形下的二维声场强度传播分布云图。

首先，将平面二维区域进行结构网格划分，从以圆柱中心为圆心，距离圆柱表面 $0.02a$ 的圆周开始，向外以 1.03 的半径的增长比率布置圆周网格节点，每一个同心圆周上观察点个数均为 201 。采用 Tecplot 自带的 2D Triangular 方式，生成平面三角形网格单元，网格布置示意如图 16 所示。圆柱表面划分单元数为 201 。

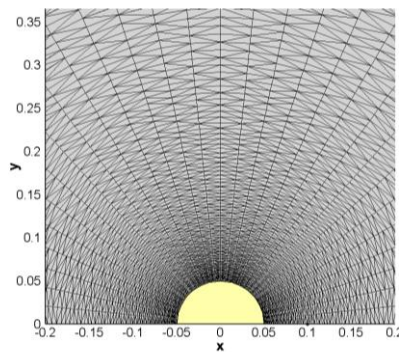


图 16 二维平面声场网格示意图

采用边界元方法进行网格节点声场强度计算，并绘制声场云图如图 17 所示。

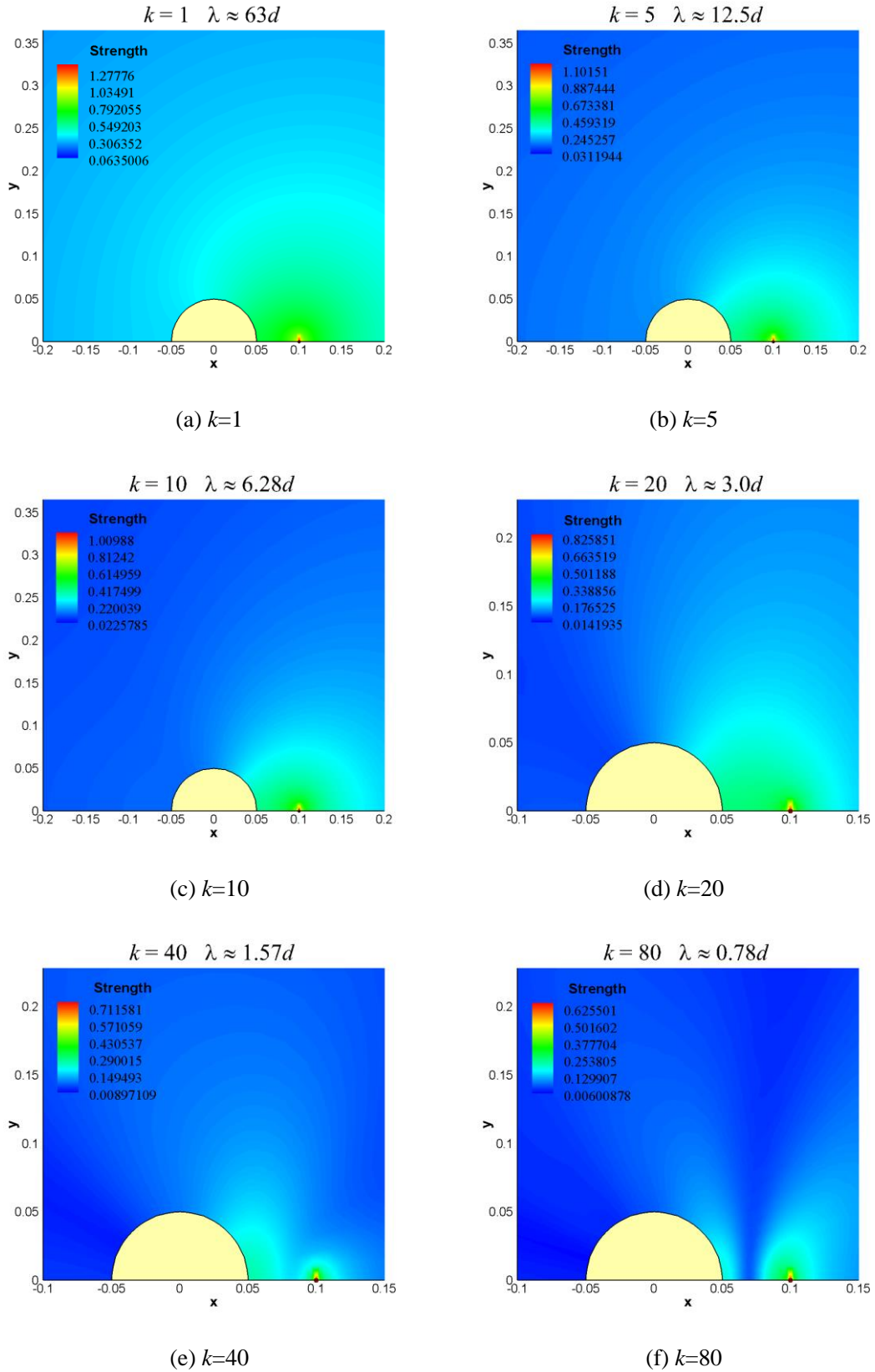


图 17 不同波数情况下的二维声场强度分布云图

观察并分析二维声场的强度分布云图。视角尺寸集中在圆柱表面附近区域，且由于对称性，仅绘制上半平面的声场信息。

首先，可以清晰观察到声场分布强度自声源点 y 向外逐渐减小，且降低梯度较大，这反映出声波近似以平面圆形波向远场传播，并迅速衰减的特征。

其次，观察到当波数 k 较小时，例如当 $k=1$ 时，圆柱左侧区域的声场强度仍较强，表明此时声波波长远大于圆柱直径，衍射现象明显，圆柱边界对声波的阻碍作用较小，可近似认为是声学紧致边界；而当波数 k 较大时，在圆柱右侧靠近声源的区域声场强度明显大于圆柱左侧区域，充分反映出硬质圆柱边界对声波具有较大阻碍作用，圆柱边界可认为是声学非紧致边界，散射现象较为明显。

进一步，观察 $k=40,80$ 两种情形，可观察到声源点与圆柱边界之间出现了一段强度明显小于两端的间隔区间，分析这是由于单极子声源点产生的声直接辐射波与圆柱表面产生的声散射波发生干涉而使得总叠加强度降低，说明当波数较大的情况下，圆柱表面的声散射强度较强，对声场产生的影响也较大。

5 结论

1. 网格收敛性分析

由不同波数 k 情形下网格收敛性分析图可观察到，当一个波长内布置 20 个网格单元时，可近似认为网格已经收敛，此时数值计算得到的声场空间指向性分布曲线可认为与理论解曲线重合。

2. 声学紧致圆柱结果分析

观察并分析不同波数情况下的声场指向性分布曲线对比图，当波数 k 较小时，即 $k < 10$ 时，叠加声场解与自由入射声场解相差较小，这是由于当此时的声波波长 λ 较圆柱直径 d 大很多，可近似认为圆柱散射边界为声学紧致边界，声衍射现象明显而声散射现象较弱，实际声场的空间指向性分布曲线与自由入射声场的空间指向性分布曲线接近重合。

3. 声学非紧致圆柱结果分析

观察并分析不同波数情况下的声场指向性分布曲线对比图，当波数 k 较大时，即 $k \geq 10$ 时，叠加声场解与自由入射声场解相差较大，这是由于此时的声波波长 λ 量级与 d 近似或小很多，可认为圆柱散射边界为声学非紧致边界，声衍射现象较弱而声散射现象明显，实际声场解曲线出现较大的扭曲。

6 对问题的进一步思考

本题的题设条件对实际声场的许多特征进行了简化，比如在数值求解方法中暂忽略边界散射条件 β 项，即假设散射边界为刚性硬质边界，这与实际声场问题中散射边界应还有一定吸收声波的能力不完全相符；另外，声源点假设为单位单极子声源，也是对实际问题中复杂的声源结构的简化。这些简化在进一步的讨论与程序求解中应得到关注或改进。同时，本题中仅考虑一个圆柱散射面，未来可考虑有多个散射面相互干扰的情形，更加趋向于实际情况。

7 课程学习感悟

在本学期《边界元素法》的课程学习中，通过刘老师系统的课堂理论讲授与自主实习环节，特别是在利用边界元法数值计算方法进行自主编程，思考并完成二维圆柱声散射计算时，我充分感受到理论与实践相结合迸发出的强大力量。

在学习课程的声学部分知识时，我体会到数学与物理两个学科之间密不可分的联系。不管是可用来描述电磁波或声波传播的 *Helmholtz* 方程，还是声散射积分方程推导所反复运用的格林公式，每一个物理现象的背后都蕴含着数学的关系，每一个数学公式里也都包含着深刻的物理意义。同时，作为求解实际声场的关键，叠加原理的运用更让我感受到数理结合迸发的强大力量。在自己推导方程时，关于正负符号的问题层出不穷，也提醒我要理解每一个符号表示的物理含义，认真严谨地完成每一步变形与整理步骤。

边界元素法与有限差分法、有限元素法一样，都是建立在迅速发展的现代高速计算机的基础上，而发展起来的一种数值计算方法，其既有坚实的以格林公式为核心的理论基础，也有广泛而高效的工程应用，是凝结了无数工程师与科学家们的智慧结晶。通过用自己比较擅长的 *MATLAB* 语言编写边界元程序进行反复调试与问题求解，我认识问题，理性分析问题以及自主解决问题的综合能力都得到了显著的提升，也对实际的声波传播现象有了更加深刻的理解。程序永远不是一蹴而就的，在代码的不断调试、修饰与补充过程中，不仅能够让我收获到用数值方法印证理论公式正确后的兴奋，更是对我理论知识不断深刻、思考内容不断深入的锻炼。另外，通过与向刘老师的询问与交流，我自主拓展程序，完成了通用结果输出模块的编写，以及二维声场强度分布云图网格的划分与绘制。在此过

程中，我自主查阅资料、积极思考并解决问题的能力得到了大幅的提升。同时，严谨的报告要求形式也让我心中一份踏实、负责、精益求精的科研态度油然而生。

但是，报告中的内容细节还有部分不够充分，方法还不够多元。在今后的学习生活中，我也会更加注重将课堂学习与亲身实验相结合，培养能力与兴趣，为未来的科研之路打下更加坚实的基础！非常感谢刘老师对我的鼓励与辛勤指导！

8 参考文献

- [1] Kirkup, Stephen. (2019). The Boundary Element Method in Acoustics: A Survey. Applied Sciences. 9. 1642. 10.3390/app9081642.
- [2] <http://www.boundary-element-method.com/intro.htm>
- [3] <https://baike.baidu.com/item/%E8%BE%B9%E7%95%8C%E5%85%83%E7%B4%A0%E6%B3%95/21503461?fr=aladdin>
- [4] <https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/rad2/mdq.html>
- [5] <https://aerodynamics.ruag.com/en/aerodynamics/acoustics>
- [6] <http://wiki.cnki.com.cn/HotWord/14827.htm>
- [7] S.E. Wright, D.J. Lee, Sources and observers in motion, III: Acoustic radiation from non-compact rigid bodies moving at high speed, Journal of Sound and Vibration, Volume 108, Issue 3, 1986, Pages 389-403.
- [8] https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function

附录

论文中全部源程序代码、实现功能及输出文件说明如下：

程序编号	P1	实现功能	圆柱边界布置网格收敛性分析
程序名称	Program_Convergence_Analysis.m		
输出文件	Acoustic_Field_Data_Convergence_Analysis.dat		
<pre>%% 二维圆柱声散计算程序收敛性分析（解析方法+边界元方法）20191213修改 %% 基本算法实现 %% 程序初始化与公用数据导入模块 clear all clf clc % 主要参数定义 % 几何信息 % 定义全局变量 a=0.05; % 硬边界圆柱的半径 d=2*a; % 单极点声源与硬边界圆柱的中心距离 rx=256*a; % 观察点所在圆周的半径 % 声源信息 k=40; % 定义波数 y0_x=d; % 声源的x坐标 y0_y=0; % 声源的y坐标 % 计算远场观察点坐标信息 n_ob=61; % 所需计算观察点的个数 fi_x=linspace(0,pi,n_ob); % 各个观察点对应极角 ob_x=rx*cos(fi_x); % 各个观察点的x坐标 ob_y=rx*sin(fi_x); % 各个观察点的y坐标 %% 程序模块一：计算声场解析解 % 定义单极子声源对应极角 fi_y=0; % 定义循环始末状态 m_max=50; % 级数结束下标 m_min=(-1)*m_max; % 级数起始下标</pre>			

```

% 计算G0_xy以及Gs_xy项
G0_xy_alt=zeros(1,n_ob);
Gs_xy_alt=zeros(1,n_ob);
GA_xy_alt=zeros(1,n_ob);
for i=1:n_ob
    sum_G0=0;
    sum_Gs=0;
    for m=m_min:m_max
        if (m>0)

alpha=(-1)*((besselj(m-1,k*a)-(besselj(m+1,k*a)))/(besselh(m-1,k*a)-(besselh(m+1,k*a))));
            sum_G0=sum_G0+((exp(1i*m*(fi_x(i)-fi_y)))*besselh(m,k*rx)*besselj(m,k*d));

sum_Gs=sum_Gs+(alpha*(exp(1i*m*(fi_x(i)-fi_y)))*besselh(m,k*rx)*besselh(m,k*d));
            elseif (m==0)
                alpha=(-1)*(besselj(1,k*a)/besselh(1,k*a));
                sum_G0=sum_G0+(exp(1i*m*(fi_x(i)-fi_y)))*besselh(m,k*rx)*besselj(m,k*d);

sum_Gs=sum_Gs+(alpha*(exp(1i*m*(fi_x(i)-fi_y)))*besselh(m,k*rx)*besselh(m,k*d));
            else
                m1=(-1)*m;

alpha=(-1)*((besselj(m1+1,k*a)-(besselj(m1-1,k*a)))/(besselh(m1+1,k*a)-(besselh(m1-1,k*a))));
                sum_G0=sum_G0+(exp(1i*m*(fi_x(i)-fi_y)))*besselh(m1,k*rx)*besselj(m1,k*d);

sum_Gs=sum_Gs+(alpha*(exp(1i*m*(fi_x(i)-fi_y)))*besselh(m1,k*rx)*besselh(m1,k*d));
            end
        end
        G0_xy_alt(i)=sum_G0*(1i/4);
        Gs_xy_alt(i)=sum_Gs*(1i/4);
        GA_xy_alt(i)=G0_xy_alt(i)+Gs_xy_alt(i);
    end
end

% 计算最终叠加声场解析解
GA_xy_r=abs(GA_xy_alt)';

%% 导出数据，以导入Tecplot中显示
str='Acoustic_Field_Data_Convergence_Analysis.dat'; % 创建Acoustic_Field_Data.dat写入声场
计算结果
fid=fopen(str,'w+'); % 以"w+"读写方式打开文件。先读后写。该文件已存在则更新；不存在
则创建。
% 创建可导入Tecplot的数据云.dat文件
fprintf(fid,'VARIABLES = "Theta","GN"\n');

```

```

% 程序模块：网格单元收敛性分析
NN=[5,10,15,20];
for pi=1:length(NN)

    % 程序模块二：边界元方法计算声场数值解
    % 定义一个波长中布置的单元个数，进行收敛性分析
    % 计算圆柱面上各散射观察点坐标信息
    N=NN(pi);
    n_cy=N; % 圆柱表面所取控制点个数
    nd=n_cy-1; % 圆柱表面控制点所分微段总数
    cy_fi=linspace(0,6.283185307,n_cy); % 圆柱表面上观察点所对应的极角

    % 计算圆柱面上网格节点以及单元中心点坐标
    sur_x=a*cos(cy_fi); % 圆柱表面上各个点x坐标
    sur_y=a*sin(cy_fi); % 圆柱表面上各个点y坐标

    ds=sqrt((sur_x(2)-sur_x(1))^2+(sur_y(2)-sur_y(1))^2); % 计算微元段长度

    % 提供四点高斯积分相关节点控制信息
    % 定义节点定位值
    xi=zeros(1,4);
    xi(1)=sqrt((3/7)-(2/7)*sqrt(6/5));
    xi(2)=(-1)*sqrt((3/7)-(2/7)*sqrt(6/5));
    xi(3)=sqrt((3/7)+(2/7)*sqrt(6/5));
    xi(4)=(-1)*sqrt((3/7)+(2/7)*sqrt(6/5));

    % 定义高斯积分节点wi权重值
    w=zeros(1,4);
    w(1)=(18+sqrt(30))/36;
    w(2)=(18+sqrt(30))/36;
    w(3)=(18-sqrt(30))/36;
    w(4)=(18-sqrt(30))/36;

    sur_center_x=zeros(1,nd);
    sur_center_y=zeros(1,nd);
    for i=1:nd
        sur_center_x(i)=(sur_x(i)+sur_x(i+1))/2; % 计算各网格微段的中心坐标点x坐标
        sur_center_y(i)=(sur_y(i)+sur_y(i+1))/2; % 计算各网格微段的中心坐标点y坐标
    end

    % 计算圆柱面表面一点的单位法向量（微段中心点处）
    nn_cy=zeros(2,nd); % 圆柱面表面一点的单位法向量
    for i=1:nd
        rm=sqrt((sur_center_x(i)^2)+(sur_center_y(i)^2)); % 计算模长
    end
end

```



```

nn_cy(1,i)=sur_center_x(i)/rm; % 求解单位法向量的x坐标
nn_cy(2,i)=sur_center_y(i)/rm; % 求解单位法向量的y坐标
end

% 计算方程组中Aij矩阵各项值
A=zeros(nd,nd);
for i=1:nd
    % 取zm点坐标, 此时计算矩阵第i行的值
    zm_x=sur_center_x(i);
    zm_y=sur_center_y(i);
    for j=1:nd
        if (i==j)
            A(i,j)=0.5;
        else
            a1=sur_x(j); % 取第一个控制点,xt=-1
            a2=sur_y(j);
            b1=sur_x(j+1); % 取第二个控制点,xt=1
            b2=sur_y(j+1);
            sum_temp=0;
            for t=1:4
                % 取zn点坐标
                zn_x_t=((b1-a1)/2)*xi(t)+((b1+a1)/2);
                zn_y_t=((b2-a2)/2)*xi(t)+((b2+a2)/2);
                % 计算r向量及其模
                r_zmn_x=zm_x-zn_x_t;
                r_zmn_y=zm_y-zn_y_t;
                r_zmn_q=sqrt(r_zmn_x^2+r_zmn_y^2);
                % 取zn处的单位法向量n(zn)
                nn_zn_x=nn_cy(1,j);
                nn_zn_y=nn_cy(2,j);
                % 计算一项偏微分的值

sum_temp=sum_temp+(((1*k)/4)*besselh(1,k*r_zmn_q))*((r_zmn_x*nn_zn_x+r_zmn_y*nn_zn_y)/r_zmn_q)*w(t);
                % 累加计算Aij各项值 (i~j)
            end
            A(i,j)=(-1)*sum_temp*(ds/2);
        end
    end
end

% 计算方程组中G0_zy矩阵各项值
G0_zy=zeros(1,nd);
for i=1:nd

```

```

% 取zm点坐标
zm_x=sur_center_x(i);
zm_y=sur_center_y(i);
% 计算r向量及其模
r_zmy_x=zm_x-y0_x;
r_zmy_y=zm_y-y0_y;
r_zmy_q=sqrt(r_zmy_x^2+r_zmy_y^2);
% 计算G0_zy各项值
G0_zy(i)=(1i/4)*(besselh(0,k*r_zmy_q));
end
G0_zy=G0_zy'; % 进行矩阵倒置,注意此时为共轭转置
G0_zy=conj(G0_zy); % 进行共轭矩阵操作,恢复原始矩阵,保证进行纯转置

% 求解线性方程组
G_zny=A\G0_zy; % 调用内置求解线性方程组函数命令

% 计算方程组中G0_xy矩阵各项值
G0_xy=zeros(1,n_ob);
for i=1:n_ob
    % 计算r向量及其模
    r_xy_x=ob_x(i)-y0_x;
    r_xy_y=ob_y(i)-y0_y;
    r_xy_q=sqrt((r_xy_x^2)+(r_xy_y^2));
    % 计算G0_xy各项值
    G0_xy(i)=(1i/4)*(besselh(0,k*r_xy_q));
end

% 计算结果表达式总积分项
G_xy=zeros(1,n_ob);
Gs_xy=zeros(1,n_ob);
for i=1:n_ob
    sum_tot=0;
    for j=1:nd
        % 取zn点坐标
        % 计算r_xzn向量及其模
        zn_x=sur_center_x(j);
        zn_y=sur_center_y(j);
        r_xzn_x=ob_x(i)-zn_x;
        r_xzn_y=ob_y(i)-zn_y;
        r_xzn_q=sqrt(r_xzn_x^2+r_xzn_y^2);
        % 取zn处的单位法向量n(zn)
        nn_zn_x=nn_cy(1,j);
        nn_zn_y=nn_cy(2,j);
        % 计算一项偏微分的值

```

```

sum_tot=sum_tot+(G_zny(j)*(((1i*k)/4)*besselh(1,k*r_xzn_q))*((r_xzn_x*nn_zn_x+r_xzn_y*nn
_zn_y)/r_xzn_q)*ds);
    end
    Gs_xy(i)=sum_tot;
    G_xy(i)=G0_xy(i)+Gs_xy(i);
end
% 计算最终叠加声场数值结果（边界元方法）
G_xy_r=abs(G_xy)';

fprintf(fid,'\n');
fprintf(fid,'ZONE T = "%d points placed in a wavelength"\n',N);
fprintf(fid,'STRANDID = 0, SOLUTIONTIME = 0\n');
fprintf(fid,'I = %d, J = 1, K = 1, ZONETYPE = Ordered\n',n_ob);
fprintf(fid,'DATAPACKING = BLOCK\n');
fprintf(fid,'DT=(SINGLE SINGLE SINGLE SINGLE)\n');
fi_x=linspace(0,pi,n_ob); % 各个观察点对应极角
for tt=1:n_ob
    fprintf(fid,'% -12.4g\n',(fi_x(tt)*(180/pi)));
end
for tt=1:n_ob
    fprintf(fid,'% -16g\n',G_xy_r(tt));
end

end

fprintf(fid,'\n');
fprintf(fid,'ZONE T = "Analytical Results"\n');
fprintf(fid,'STRANDID = 0, SOLUTIONTIME = 0\n');
fprintf(fid,'I = %d, J = 1, K = 1, ZONETYPE = Ordered\n',n_ob);
fprintf(fid,'DATAPACKING = BLOCK\n');
fprintf(fid,'DT=(SINGLE SINGLE SINGLE SINGLE)\n');
fi_x=linspace(0,pi,n_ob); % 各个观察点对应极角
for tt=1:n_ob
    fprintf(fid,'% -12.4g\n',(fi_x(tt)*(180/pi)));
end
for tt=1:n_ob
    fprintf(fid,'% -16g\n',GA_xy_r(tt));
end

fclose(fid); % 关闭文件

```

程序编号	P2	实现功能	声场空间指向性分布曲线绘制与对比
程序名称	Program_Acoustic_Directivity_Distribution_Calculation.m		
输出文件	Acoustic_Directivity_Distribution.dat		
<pre>%% 二维圆柱声散计算程序空间指向性分布曲线（数值结果与自由入射声场和理论解析解 对比分析）20191228修改 %% 基本算法实现 %% 程序初始化与公用数据导入模块 clear all clf clc % 主要参数定义 % 几何信息 % 定义全局变量 global a d rx k a=0.05; % 硬边界圆柱的半径 d=2*a; % 单极点声源与硬边界圆柱的中心距离 rx=256*a; % 观察点所在圆周的半径 % 声源信息 k=5; % 定义波数 y0_x=d; % 声源的x坐标 y0_y=0; % 声源的y坐标 % 计算远场观察点坐标信息 n_ob=61; % 所需计算观察点的个数 fi_x=linspace(0,pi,n_ob); % 各个观察点对应极角 ob_x=rx*cos(fi_x); % 各个观察点的x坐标 ob_y=rx*sin(fi_x); % 各个观察点的y坐标 %% 程序模块一：计算声场解析解 % 定义单极子声源对应极角 fi_y=0; % 定义循环始末状态 m_max=50; % 级数结束下标 m_min=(-1)*m_max; % 级数起始下标 % 计算G0_xy以及Gs_xy项 G0_xy_alt=zeros(1,n_ob);</pre>			

```

Gs_xy_alt=zeros(1,n_ob);
GA_xy_alt=zeros(1,n_ob);
for i=1:n_ob
    sum_G0=0;
    sum_Gs=0;
    for m=m_min:m_max
        if (m>0)

alpha=(-1)*((besselj(m-1,k*a)-(besselj(m+1,k*a)))/(besselh(m-1,k*a)-(besselh(m+1,k*a))));
            sum_G0=sum_G0+((exp(1i*m*(fi_x(i)-fi_y))) *besselh(m,k*rx)*besselj(m,k*d));

sum_Gs=sum_Gs+(alpha*(exp(1i*m*(fi_x(i)-fi_y))) *besselh(m,k*rx)*besselh(m,k*d));
            elseif (m==0)
                alpha=(-1)*(besselj(1,k*a)/besselh(1,k*a));
                sum_G0=sum_G0+(exp(1i*m*(fi_x(i)-fi_y))) *besselh(m,k*rx)*besselj(m,k*d);

sum_Gs=sum_Gs+(alpha*(exp(1i*m*(fi_x(i)-fi_y))) *besselh(m,k*rx)*besselh(m,k*d));
            else
                m1=(-1)*m;

alpha=(-1)*((besselj(m1+1,k*a)-(besselj(m1-1,k*a)))/(besselh(m1+1,k*a)-(besselh(m1-1,k*a))));
                sum_G0=sum_G0+(exp(1i*m*(fi_x(i)-fi_y))) *besselh(m1,k*rx)*besselj(m1,k*d);

sum_Gs=sum_Gs+(alpha*(exp(1i*m*(fi_x(i)-fi_y))) *besselh(m1,k*rx)*besselh(m1,k*d));
            end
        end
        G0_xy_alt(i)=sum_G0*(1i/4);
        Gs_xy_alt(i)=sum_Gs*(1i/4);
        GA_xy_alt(i)=G0_xy_alt(i)+Gs_xy_alt(i);
    end

% 计算最终叠加声场解析解
GA_xy_r=abs(GA_xy_alt)';

%% 程序模块二：边界元方法计算声场数值解
% 计算圆柱面上各散射观察点坐标信息
n_cy=201; % 圆柱表面所取控制点个数
nd=n_cy-1; % 圆柱表面控制点所分微段总数
cy_fi=linspace(0,2*pi,n_cy); % 圆柱表面上观察点所对应的极角

% 计算圆柱面上网格节点以及单元中心点坐标
sur_x=a*cos(cy_fi); % 圆柱表面上各个点x坐标
sur_y=a*sin(cy_fi); % 圆柱表面上各个点y坐标

```

```

% ds=(2*pi*a)/nd;
ds=sqrt((sur_x(2)-sur_x(1))^2+(sur_y(2)-sur_y(1))^2); % 计算微元段长度

% 提供四点高斯积分相关节点控制信息
% 定义节点定位值
xi=zeros(1,4);
xi(1)=sqrt((3/7)-(2/7)*sqrt(6/5));
xi(2)=(-1)*sqrt((3/7)-(2/7)*sqrt(6/5));
xi(3)=sqrt((3/7)+(2/7)*sqrt(6/5));
xi(4)=(-1)*sqrt((3/7)+(2/7)*sqrt(6/5));

% 定义高斯积分节点wi权重值
w=zeros(1,4);
w(1)=(18+sqrt(30))/36;
w(2)=(18+sqrt(30))/36;
w(3)=(18-sqrt(30))/36;
w(4)=(18-sqrt(30))/36;

sur_center_x=zeros(1,nd);
sur_center_y=zeros(1,nd);
for i=1:nd
    sur_center_x(i)=(sur_x(i)+sur_x(i+1))/2; % 计算各网格微段的中心坐标点x坐标
    sur_center_y(i)=(sur_y(i)+sur_y(i+1))/2; % 计算各网格微段的中心坐标点y坐标
end

% 计算圆柱面表面一点的单位法向量（微段中心点处）
nn_cy=zeros(2,nd); % 圆柱面表面一点的单位法向量
for i=1:nd
    rm=sqrt((sur_center_x(i)^2)+(sur_center_y(i)^2)); % 计算模长
    nn_cy(1,i)=sur_center_x(i)/rm; % 求解单位法向量的x坐标
    nn_cy(2,i)=sur_center_y(i)/rm; % 求解单位法向量的y坐标
end

% 计算方程组中Aij矩阵各项值
A=zeros(nd,nd);
for i=1:nd
    % 取zm点坐标，此时计算矩阵第i行的值
    zm_x=sur_center_x(i);
    zm_y=sur_center_y(i);
    for j=1:nd
        if (i==j)
            A(i,j)=0.5;
        else
            a1=sur_x(j); % 取第一个控制点,xt=-1

```

```

a2=sur_y(j);
b1=sur_x(j+1); % 取第二个控制点,xt=1
b2=sur_y(j+1);
sum_temp=0;
for t=1:4
    % 取zn点坐标
    zn_x_t=((b1-a1)/2)*xi(t)+((b1+a1)/2);
    zn_y_t=((b2-a2)/2)*xi(t)+((b2+a2)/2);
    % 计算r向量及其模
    r_zmn_x=zm_x-zn_x_t;
    r_zmn_y=zm_y-zn_y_t;
    r_zmn_q=sqrt(r_zmn_x^2+r_zmn_y^2);
    % 取zn处的单位法向量n(zn)
    nn_zn_x=nn_cy(1,j);
    nn_zn_y=nn_cy(2,j);
    % 计算一项偏微分的值

sum_temp=sum_temp+(((1*k)/4)*besselh(1,k*r_zmn_q))*((r_zmn_x*nn_zn_x+r_zmn_y*nn_zn_y)/r_zmn_q)*w(t);
    % 累加计算Aij各项值 (i~j)
end
A(i,j)=(-1)*sum_temp*(ds/2);
end
end
end

% 计算方程组中G0_zy矩阵各项值
G0_zy=zeros(1,nd);
for i=1:nd
    % 取zm点坐标
    zm_x=sur_center_x(i);
    zm_y=sur_center_y(i);
    % 计算r向量及其模
    r_zmy_x=zm_x-y0_x;
    r_zmy_y=zm_y-y0_y;
    r_zmy_q=sqrt(r_zmy_x^2+r_zmy_y^2);
    % 计算G0_zy各项值
    G0_zy(i)=(1i/4)*(besselh(0,k*r_zmy_q));
end
G0_zy=G0_zy'; % 进行矩阵倒置,注意此时为共轭转置
G0_zy=conj(G0_zy); % 进行共轭矩阵操作,恢复原始矩阵,保证进行纯转置

% 求解线性方程组
G_zny=A\G0_zy; % 调用内置求解线性方程组函数命令

```

```

% 计算方程组中G0_xy矩阵各项值
G0_xy=zeros(1,n_ob);
for i=1:n_ob
    % 计算r向量及其模
    r_xy_x=ob_x(i)-y0_x;
    r_xy_y=ob_y(i)-y0_y;
    r_xy_q=sqrt((r_xy_x^2)+(r_xy_y^2));
    % 计算G0_xy各项值
    G0_xy(i)=(1i/4)*(besselh(0,k*r_xy_q));
end

% 计算结果表达式总积分项
G_xy=zeros(1,n_ob);
Gs_xy=zeros(1,n_ob);
for i=1:n_ob
    sum_tot=0;
    for j=1:nd
        % 取zn点坐标
        % 计算r_xzn向量及其模
        zn_x=sur_center_x(j);
        zn_y=sur_center_y(j);
        r_xzn_x=ob_x(i)-zn_x;
        r_xzn_y=ob_y(i)-zn_y;
        r_xzn_q=sqrt(r_xzn_x^2+r_xzn_y^2);
        % 取zn处的单位法向量n(zn)
        nn_zn_x=nn_cy(1,j);
        nn_zn_y=nn_cy(2,j);
        % 计算一项偏微分的值

sum_tot=sum_tot+(G_zny(j)*(((1i*k)/4)*besselh(1,k*r_xzn_q))*((r_xzn_x*nn_zn_x+r_xzn_y*nn_zn_y)/r_xzn_q)*ds);
    end
    Gs_xy(i)=sum_tot;
    G_xy(i)=G0_xy(i)+Gs_xy(i);
end

% 计算最终叠加声场数值结果（边界元方法）
G_xy_r=abs(G_xy)';
G0_xy_alt_r=abs(G0_xy_alt)';

%% 绘制图像结果
xx_alt=zeros(1,n_ob);
yy_alt=zeros(1,n_ob);

```



```

xx_num=zeros(1,n_ob);
yy_num=zeros(1,n_ob);
xx_free=zeros(1,n_ob);
yy_free=zeros(1,n_ob);
for i=1:n_ob
    % 解析解坐标（为方便显示，将极坐标转为直角坐标）
    xx_alt(i)=GA_xy_r(i)*cos(fi_x(i));
    yy_alt(i)=GA_xy_r(i)*sin(fi_x(i));
    % 边界元数值解坐标（为方便显示，将极坐标转为直角坐标）
    xx_num(i)=G_xy_r(i)*cos(fi_x(i));
    yy_num(i)=G_xy_r(i)*sin(fi_x(i));
    % 自由入射声场解析解坐标（为方便显示，将极坐标转为直角坐标）
    xx_free(i)=G0_xy_alt_r(i)*cos(fi_x(i));
    yy_free(i)=G0_xy_alt_r(i)*sin(fi_x(i));
end
hold on
% plot(xx_alt,yy_alt,'r-','LineWidth',1.5);
% plot(xx_num,yy_num,'ms','MarkerSize',8);
% plot(xx_free,yy_free,'r.','MarkerSize',16);

% 创建 plot
plot(xx_alt,yy_alt,'LineWidth',1.5,...
     'Color',[1 0 0]);

% 创建 plot
plot(xx_num,yy_num,'MarkerFaceColor',[1 0 0],...
     'MarkerSize',6,...
     'Marker','square',...
     'LineStyle','none',...
     'Color',[1 0 0]);

% 创建 plot
plot(xx_free,yy_free,'MarkerFaceColor',[0 0 1],...
     'MarkerSize',6,...
     'Marker','square',...
     'LineStyle','none',...
     'Color',[0 0 1]);

legend('Analytical Results','Numerical Results','Free Field Results');
title('Comparison of Analytical and Numerical Solutions of the Acoustic Field and Free Field');
grid on
box on
hold off

```

```

%% 导出数据，以导入Tecplot中显示
str='Acoustic_Field_Data_Double.dat'; % 创建Acoustic_Field_Data.dat写入声场计算结果
fid1=fopen(str,'w+'); % 以"w+"读写方式打开文件。先读后写。该文件已存在则更新；不存在
    则创建。
% 创建可导入Tecplot的数据云.dat文件
fprintf(fid1,'VARIABLES = "Theta","GA","GN","GF"\n');
fprintf(fid1,'ZONE I = %d, F = POINT\n',n_ob);

for i=1:n_ob

fprintf(fid1,'% -12.4g % -16g % -16g % -16g\n',fi_x(i)*(180/pi),GA_xy_r(i),G_xy_r(i),G0_xy_alt_r(
i));
end
fclose(fid1);
    
```

程序编号	P3	实现功能	二维声场强度分布云图计算
程序名称	Program_Acoustic_Field_Calculation.m		
输出文件	Acoustic_Field_Distribution.dat		
<pre>%% 二维圆柱声散计算程序流场信息分析+Tecplot2D云图显示（边界元方法）20191229 %% 基本算法实现 %% 程序初始化与公用数据导入模块 clear all clf clc % 主要参数定义 % 几何信息 % 定义全局变量 global a d rx k a=0.05; % 硬边界圆柱的半径 d=2*a; % 单极点声源与硬边界圆柱的中心距离 rx=256*a; % 观察点所在圆周的半径 % 声源信息 k=5; % 定义波数 y0_x=d; % 声源的x坐标 y0_y=0; % 声源的y坐标</pre>			

```

%% 程序模块一：划分平面二维网格
% 计算远场观察点坐标信息
n_ob=61; % 所需计算观察点的个数
fi_x=linspace(0,2*pi,n_ob); % 各个观察点对应极角

% 设定网格层数
gn=200;
g_step=1.0303; % 定义网格间隔增长速率
rg=zeros(1,gn);
% 第一层圆周网格半径
rg(1)=a*1.02;

% 第一层网格间隔
drg=rg(1)-a;
for i=2:gn
    drg=drg*g_step;
    rg(i)=rg(i-1)+drg;
end

% 网格最大半径（设置位置约为256a处）
r_max=rg(gn);

% 计算总网格点数
ng_tot=gn*n_ob;
ob_x=zeros(1,ng_tot);
ob_y=zeros(1,ng_tot);

% 计算各个网格点（观察点）的x,y坐标
for i=1:gn % 外层：层数循环
    for j=1:n_ob
        dij=j+((i-1)*n_ob);
        ob_x(dij)=rg(i)*cos(fi_x(j));
        ob_y(dij)=rg(i)*sin(fi_x(j));
    end
end

%% 程序模块二：边界元方法计算声场数值解
% 计算圆柱面上各散射观察点坐标信息
n_cy=201; % 圆柱表面所取控制点个数
nd=n_cy-1; % 圆柱表面控制点所分微段总数
cy_fi=linspace(0,2*pi,n_cy); % 圆柱表面上观察点所对应的极角

% 计算圆柱面上网格节点以及单元中心点坐标
sur_x=a*cos(cy_fi); % 圆柱表面上各个点x坐标

```

```

sur_y=a*sin(cy_fi); % 圆柱表面上各个点y坐标

% ds=(2*pi*a)/nd;
ds=sqrt((sur_x(2)-sur_x(1))^2+(sur_y(2)-sur_y(1))^2); % 计算微元段长度

% 提供四点高斯积分相关节点控制信息
% 定义节点定位值
xi=zeros(1,4);
xi(1)=sqrt((3/7)-(2/7)*sqrt(6/5));
xi(2)=(-1)*sqrt((3/7)-(2/7)*sqrt(6/5));
xi(3)=sqrt((3/7)+(2/7)*sqrt(6/5));
xi(4)=(-1)*sqrt((3/7)+(2/7)*sqrt(6/5));

% 定义高斯积分节点wi权重值
w=zeros(1,4);
w(1)=(18+sqrt(30))/36;
w(2)=(18+sqrt(30))/36;
w(3)=(18-sqrt(30))/36;
w(4)=(18-sqrt(30))/36;

sur_center_x=zeros(1,nd);
sur_center_y=zeros(1,nd);
for i=1:nd
    sur_center_x(i)=(sur_x(i)+sur_x(i+1))/2; % 计算各网格微段的中心坐标点x坐标
    sur_center_y(i)=(sur_y(i)+sur_y(i+1))/2; % 计算各网格微段的中心坐标点y坐标
end

% 计算圆柱面表面一点的单位法向量（微段中心点处）
nn_cy=zeros(2,nd); % 圆柱面表面一点的单位法向量
for i=1:nd
    rm=sqrt((sur_center_x(i)^2)+(sur_center_y(i)^2)); % 计算模长
    nn_cy(1,i)=sur_center_x(i)/rm; % 求解单位法向量的x坐标
    nn_cy(2,i)=sur_center_y(i)/rm; % 求解单位法向量的y坐标
end

% 计算方程组中Aij矩阵各项值
A=zeros(nd,nd);
for i=1:nd
    % 取zm点坐标，此时计算矩阵第i行的值
    zm_x=sur_center_x(i);
    zm_y=sur_center_y(i);
    for j=1:nd
        if (i==j)
            A(i,j)=0.5;

```

```

else
    a1=sur_x(j); % 取第一个控制点,xt=-1
    a2=sur_y(j);
    b1=sur_x(j+1); % 取第二个控制点,xt=1
    b2=sur_y(j+1);
    sum_temp=0;
    for t=1:4
        % 取zn点坐标
        zn_x_t=((b1-a1)/2)*xi(t)+((b1+a1)/2);
        zn_y_t=((b2-a2)/2)*xi(t)+((b2+a2)/2);
        % 计算r向量及其模
        r_zmn_x=zm_x-zn_x_t;
        r_zmn_y=zm_y-zn_y_t;
        r_zmn_q=sqrt(r_zmn_x^2+r_zmn_y^2);
        % 取zn处的单位法向量n(zn)
        nn_zn_x=nn_cy(1,j);
        nn_zn_y=nn_cy(2,j);
        % 计算一项偏微分的值

sum_temp=sum_temp+(((1i*k)/4)*besselh(1,k*r_zmn_q))*((r_zmn_x*nn_zn_x+r_zmn_y*nn_zn_y)/r_zmn_q)*w(t);
        % 累加计算Aij各项值 (i~j)
    end
    A(i,j)=(-1)*sum_temp*(ds/2);
end
end
end

% 计算方程组中G0_zy矩阵各项值
G0_zy=zeros(1,nd);
for i=1:nd
    % 取zm点坐标
    zm_x=sur_center_x(i);
    zm_y=sur_center_y(i);
    % 计算r向量及其模
    r_zmy_x=zm_x-y0_x;
    r_zmy_y=zm_y-y0_y;
    r_zmy_q=sqrt(r_zmy_x^2+r_zmy_y^2);
    % 计算G0_zy各项值
    G0_zy(i)=(1i/4)*(besselh(0,k*r_zmy_q));
end

G0_zy=G0_zy'; % 进行矩阵倒置,注意此时为共轭转置
G0_zy=conj(G0_zy); % 进行共轭矩阵操作,恢复原始矩阵,保证进行纯转置

```

```

% 求解线性方程组
G_zny=A\G0_zy; % 调用内置求解线性方程组函数命令

% 计算方程组中G0_xy矩阵各项值
G0_xy=zeros(1,ng_tot);
for i=1:ng_tot
    % 计算r向量及其模
    r_xy_x=ob_x(i)-y0_x;
    r_xy_y=ob_y(i)-y0_y;
    r_xy_q=sqrt((r_xy_x^2)+(r_xy_y^2));
    % 计算G0_xy各项值
    G0_xy(i)=(1i/4)*(besselh(0,k*r_xy_q));
end

% 计算结果表达式总积分项
G_xy=zeros(1,ng_tot);
Gs_xy=zeros(1,ng_tot);
for i=1:ng_tot
    sum_tot=0;
    for j=1:nd
        % 取zn点坐标
        % 计算r_xzn向量及其模
        zn_x=sur_center_x(j);
        zn_y=sur_center_y(j);
        r_xzn_x=ob_x(i)-zn_x;
        r_xzn_y=ob_y(i)-zn_y;
        r_xzn_q=sqrt(r_xzn_x^2+r_xzn_y^2);
        % 取zn处的单位法向量n(zn)
        nn_zn_x=nn_cy(1,j);
        nn_zn_y=nn_cy(2,j);
        % 计算一项偏微分的值

sum_tot=sum_tot+(G_zny(j)*(((1i*k)/4)*besselh(1,k*r_xzn_q))*((r_xzn_x*nn_zn_x+r_xzn_y*nn_zn_y)/r_xzn_q)*ds);
    end
    Gs_xy(i)=sum_tot;
    G_xy(i)=G0_xy(i)+Gs_xy(i);
end

% 计算最终叠加声场数值结果（边界元方法）
G_xy_r=abs(G_xy)';

%% 导出数据，以导入Tecplot中显示
str='Acoustic_Field_Distribution.dat'; % 创建Acoustic_Field_Data.dat写入声场计算结果

```

```
fid1=fopen(str,'w+'); % 以"w+"读写方式打开文件。先读后写。该文件已存在则更新；不存在则创建。
% 创建可导入Tecplot的数据云.dat文件
fprintf(fid1,'VARIABLES = "x","y","Strength"\n');

% 写入声场数据点信息（直角坐标）
for i=1:ng_tot
    fprintf(fid1,'% -16g % -16g % -16g\n',ob_x(i),ob_y(i),G_xy_r(i));
end

fclose(fid1);
```