



## Review of 19<sup>th</sup> Course

# CHAPTER 12 LINERIZED SUPERSONIC FLOW 线化超声速流动

主讲人：宋科

E-mail: [wpsong@nwpu.edu.cn](mailto:wpsong@nwpu.edu.cn)

2019年12月11日

Department of Fluid Mechanics, School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, China



## 12.1 前言

### 线化小扰动速势方程

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow \begin{cases} 1 - M_\infty^2 > 0 & \text{椭圆型} \\ 1 - M_\infty^2 < 0 & \text{双曲型} \end{cases}$$



$$\lambda = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0 \quad \xrightarrow{\text{存在一般解}} \quad \hat{\phi} = f(x - \lambda y) + g(x + \lambda y)$$

## 12.2 线化压强系数计算公式的推导

### 超声速线化小扰动方程的特征线

$$\hat{\phi} = f(x - \lambda y) + g(x + \lambda y)$$

$f$  可以是  $x - \lambda y$  的任意函数,  $g$  可以是  $x + \lambda y$  的任意函数。

$$\text{沿 } x - \lambda y = \text{const.}, f = \text{const.}$$

$$\text{沿 } x + \lambda y = \text{const.}, g = \text{const.}$$

$$x - \lambda y = \text{const.} \quad \text{和} \quad x + \lambda y = \text{const.}$$

称为方程  $\lambda^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0$  的特征线。

该方程的特征线是由来流马赫数对应的马赫线。

**重要概念：双曲型偏微分方程的特征线！**

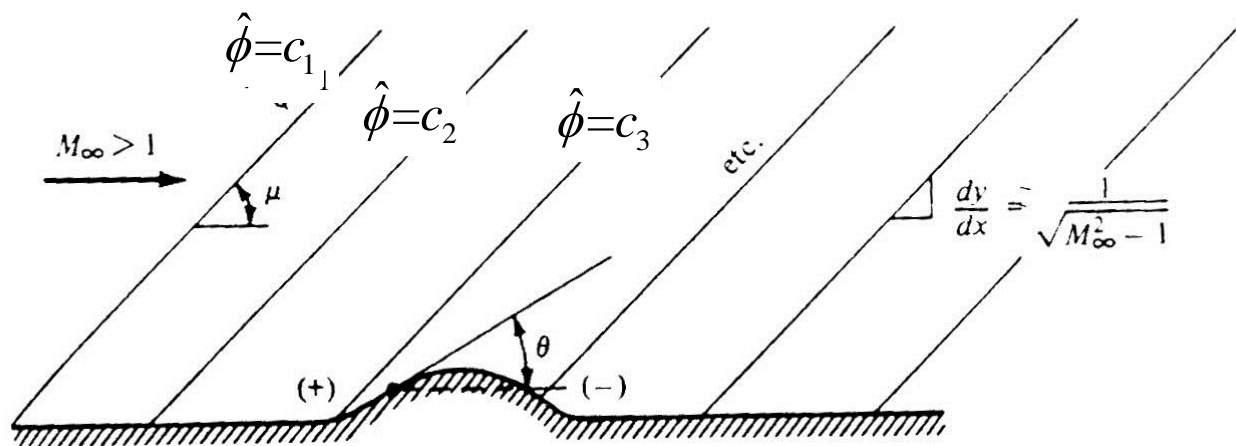


# 超声速线化小扰动解的特点

对于超声速流流过图12.1所示的物体:

$$g = 0$$

$$\hat{\phi} = f(x - \lambda y) \quad (12.2)$$



超声速线化理论，是将激波、膨胀波简化成了一系列由来流马赫数确定的马赫波。

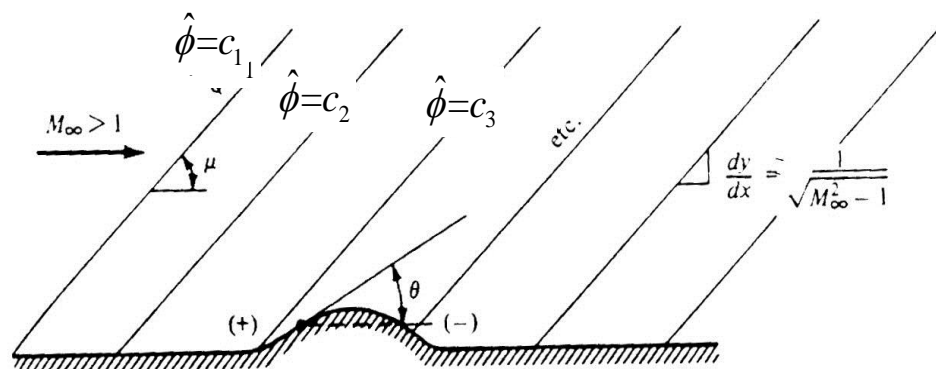
# 物面压强系数表达式

$$\hat{u} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = f' \quad (12.9)$$

$$\hat{v} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} = -\lambda f' \quad (12.10)$$

$$\hat{u} = -\frac{\hat{v}}{\lambda} \quad (12.11)$$

$$\hat{\phi} = f(x - \lambda y)$$



## 物面压强系数表达式

小扰动条件下的物面边界条件为 (12.12) 即 (11.34)

$$\hat{v} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} = V_{\infty} \tan \theta$$

当  $\theta$  为小量时,  $\tan \theta \approx \theta$

所以有  $\hat{v} = V_{\infty} \theta$  (12.13)

将 (12.13) 代入 (12.11), 得

$$\hat{u} = -\frac{V_{\infty} \theta}{\lambda} \quad (12.14)$$

## 补充：公式(12.14)与公式 (9.32)比较

$$\hat{u} = -\frac{V_{\infty}\theta}{\lambda} \quad (12.14) \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{u}}{V_{\infty}} = -\frac{\theta}{\lambda}$$

$$d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (9.32) \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{V} = \frac{d\theta}{\lambda}$$

**结论：**超声速线化理论是将超声速流场中的压缩波、膨胀波全部简化为对应来流马赫数的马赫波。

## 物面压强系数表达式

因为:

$$C_p = -\frac{2\hat{u}}{V_\infty} \quad (11.32)$$

所以有:

$$C_p = \frac{2\theta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (12.15)$$

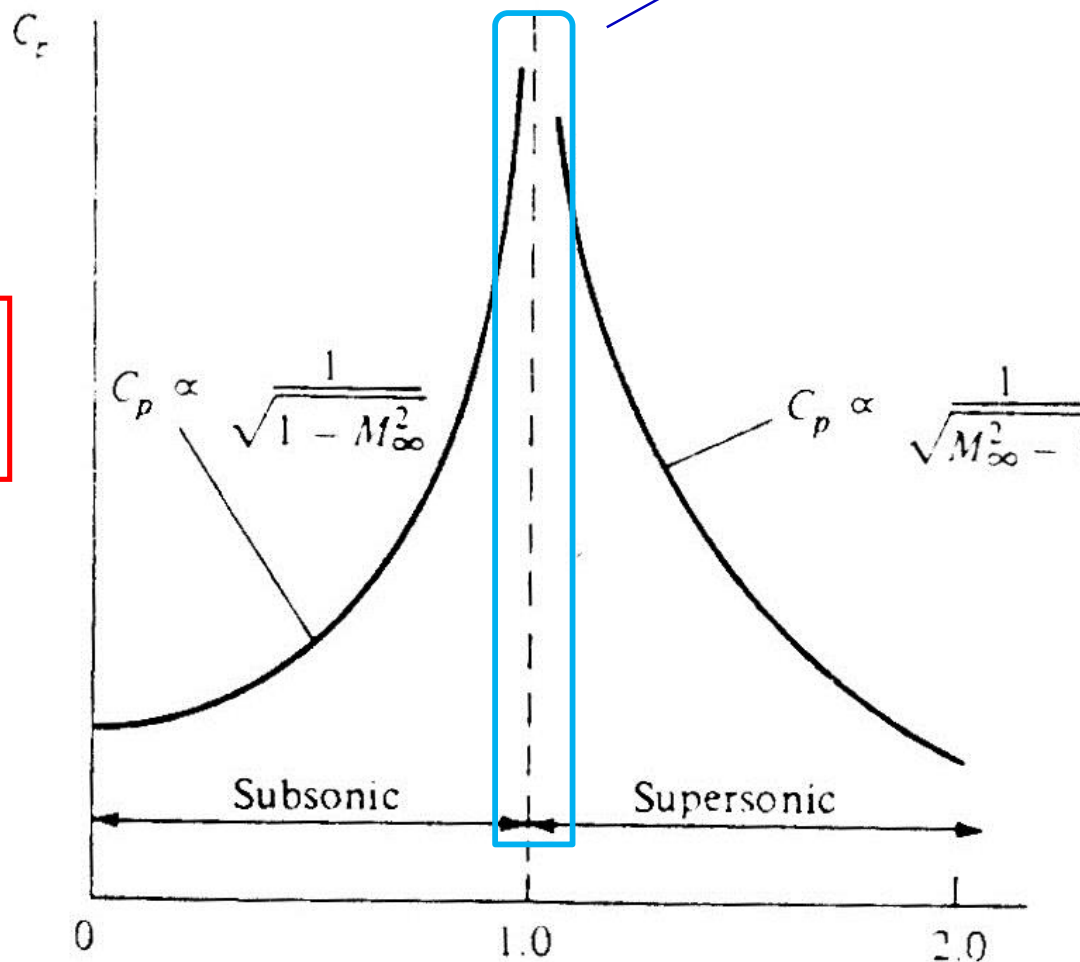
**结论：**线化超声速压强系数正比于当地物面切线方向与自由来流的夹角。



# 线化压强系数随马赫数变化

跨声速时线化理论不适用

$$C_p = \frac{C_{p,0}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$$

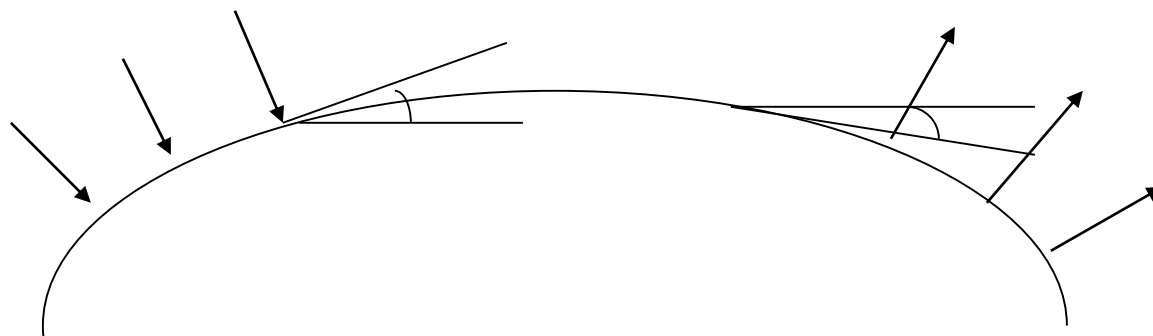


$$C_p = \frac{2\theta}{\sqrt{M_\infty^2-1}}$$

## 波阻产生的一种解释

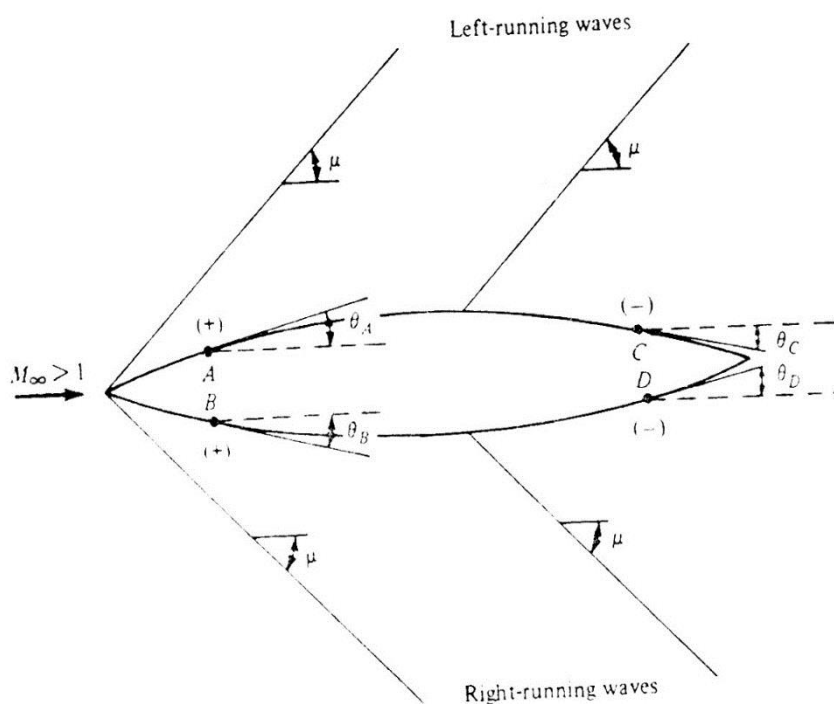
The pressure is higher on the front section of the hump, and lower on the rear section. So there is a drag force exerting on the hump. This drag is called *wave drag*.

前面的压强高，后面压强低，便产生了波阻



## 12.3 APPLICATION TO SUPERSONIC AIRFOILS

### 在超声速翼型上的应用



The definition of sign of  $\theta$  :  
 $\theta$  的正负号定义

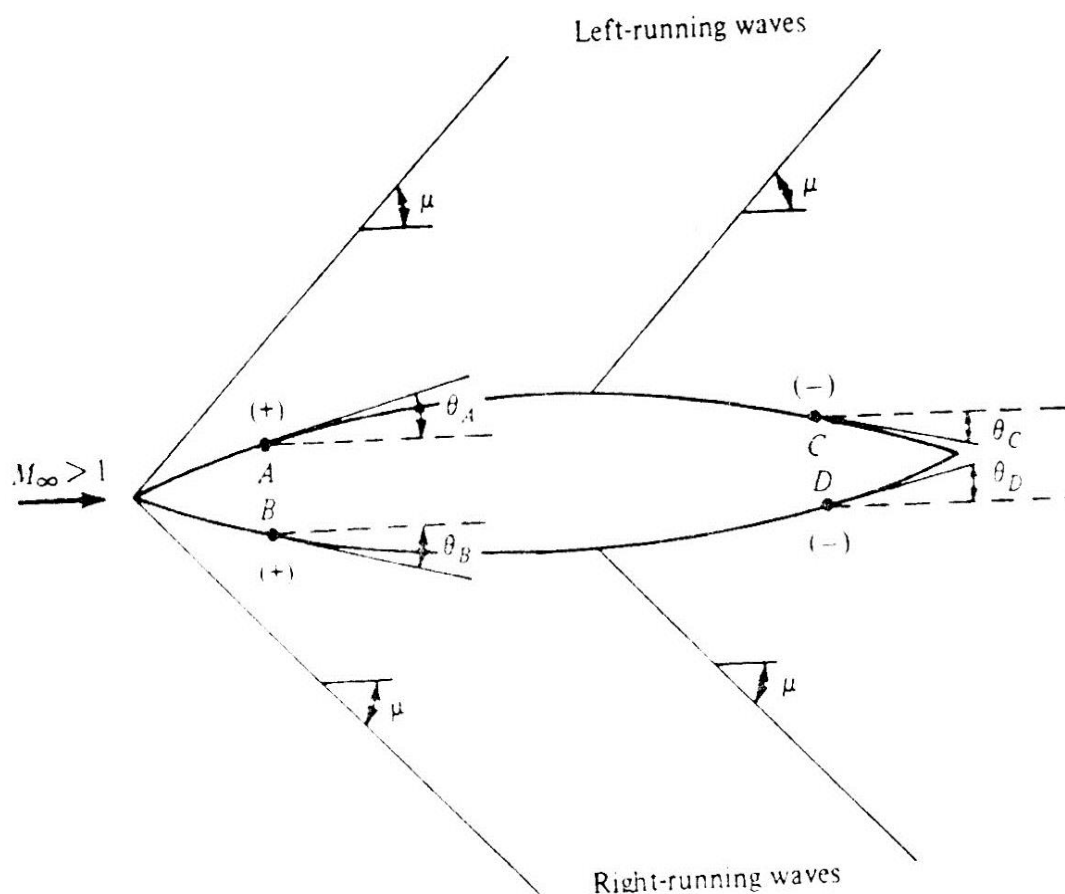
When the surface is inclined into the freestream direction,  $\theta$  is taken positive,

When the surface is inclined away from the freestream direction,  $\theta$  is taken negative.

物面向来流方向倾斜， $\theta$  取正号，向远离来流方向倾斜， $\theta$  取负号。

另一种区分正负号的方式：

角度规定为正，由物面倾斜方向直接确定 $C_p$ 的正负号。



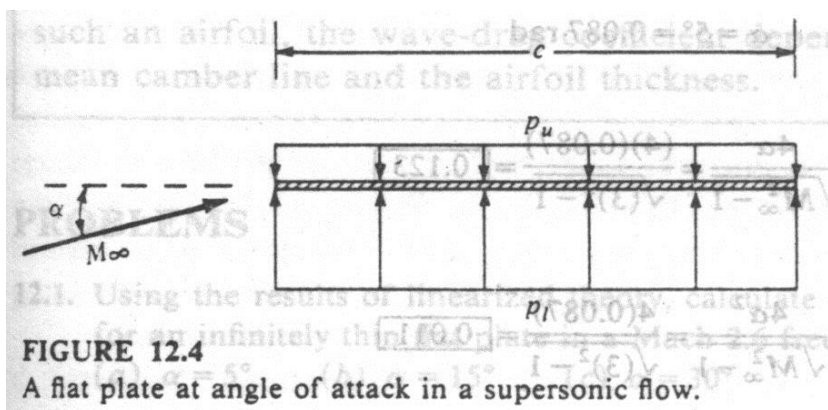
$$C_{p,A} = \frac{2\theta_A}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$C_{p,B} = \frac{2\theta_B}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$C_{p,C} = -\frac{2\theta_C}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$C_{p,D} = -\frac{2\theta_D}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

# 超声速平板流动



$$c_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$c_d = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$C_{m,LE} = -\frac{2\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = -\frac{c_l}{2}$$

**结论：绕前缘力矩系数公式说明超声速时翼型压力中心后移, 焦点后移（位于50%弦长）。**

# 任意外形的薄翼型超声速小攻角流动

$$c_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$c_d = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{1}{c} \int_0^c \left[ \left( \frac{dy_u}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dy_l}{dx} \right)^2 \right] dx$$

攻角/厚度/弯度都可  
表现为外形的影响

$$c_{mLE} = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{1}{c^2} \int_0^c \left[ \left( \frac{dy_u}{dx} \right) + \left( \frac{dy_l}{dx} \right) \right] x dx$$



# 任意外形的薄翼型超声速小攻角流动

$$c_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$c_d = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} (\alpha^2 + g_c^2 + g_t^2)$$

$$c_{m,LE} = -\frac{2\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + \frac{4K_1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

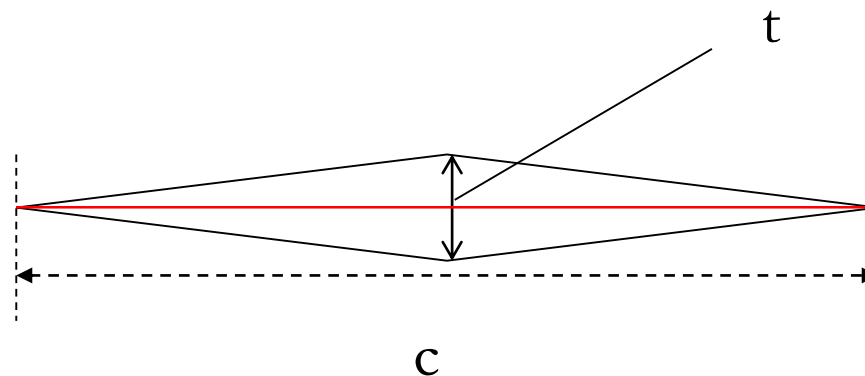
$$c_{mac} = \frac{4K_1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$g_c$  和  $g_t$  分别是翼型弯度和厚度的函数。

**结论：** 根据超声速小扰动线化理论，翼型升力系数只与攻角有关，与厚度和弯度无关；这与低速或亚声速翼型不同



# 最小零升波阻翼型：对称菱形翼型



$$c_d = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\frac{t}{c}\right)^2$$

$t$ 为翼型最大厚度,  $c$ 为翼型弦长.



# 补充：线性化小扰动速度势方程的进一步讨论

可叠加性：方程可叠加、边界条件可叠加（适用条件？）

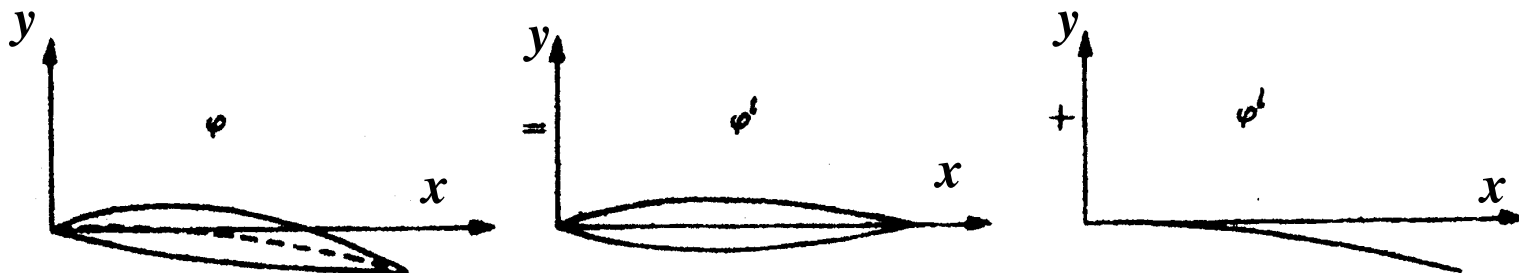
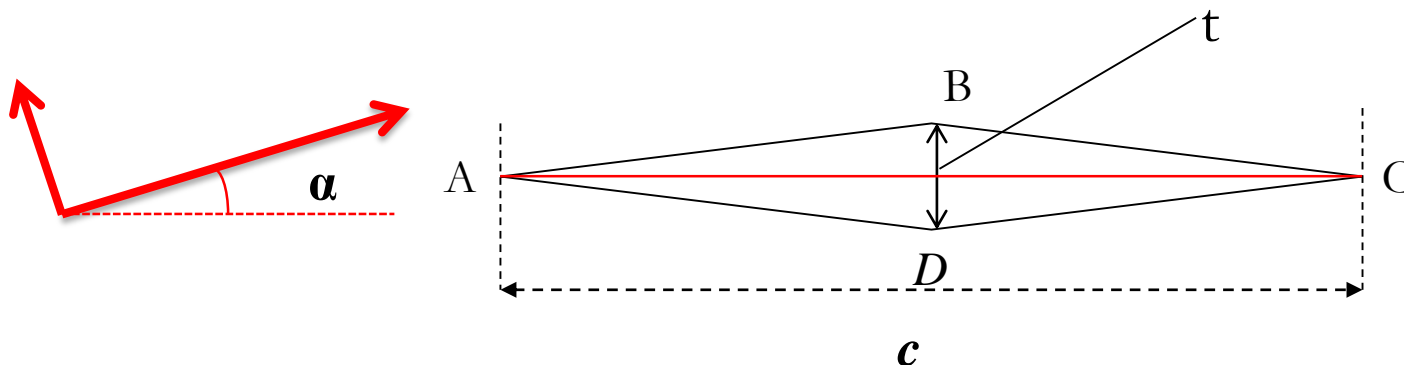


FIG. 5-3. Separation of thickness and lift problems.

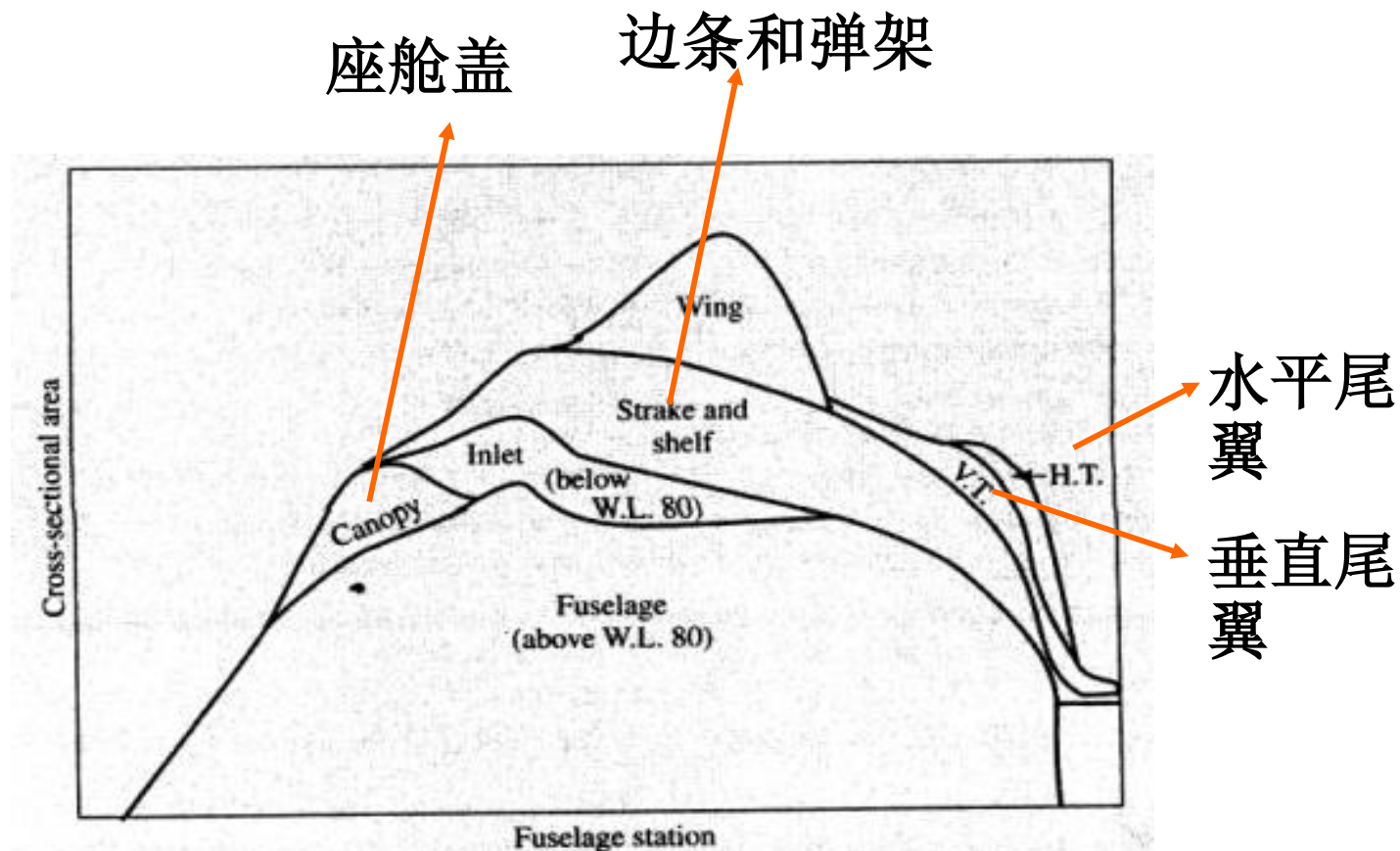


$$c_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

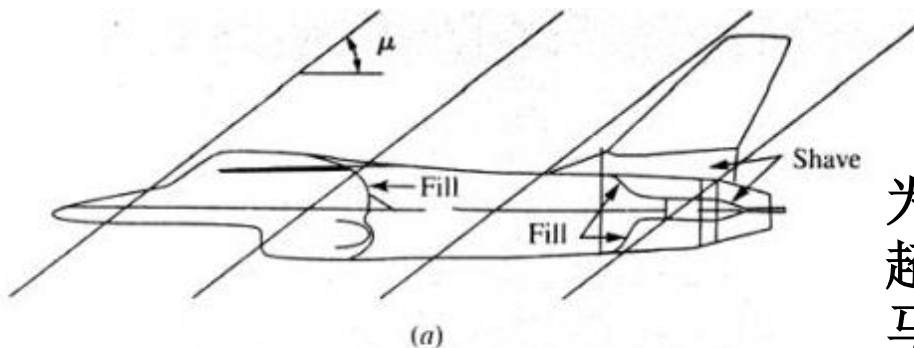
$$c_d = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\frac{t}{c}\right)^2$$

# DESIGN BOX

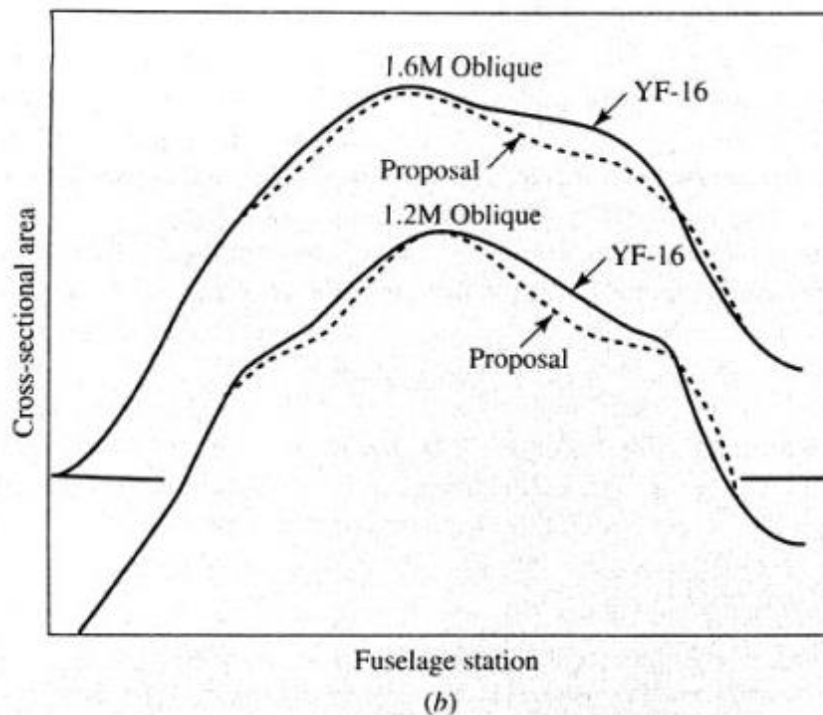
举例：F16 - 遵循跨声速面积律和超声速面积律



**Figure 12.6** Transonic area ruling for the F-16. Variation of normal cross-sectional area as a function of location along the fuselage axis.



为减小飞机的超声速波阻力，超声速面积律要求沿自由来流马赫数线方向斜切的截面积分布光滑连续。



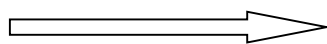
**Figure 12.7** Supersonic area ruling for the F-16. Variation for *oblique* cross-sectional area as a function of location along the fuselage axis. Comparison between the actual area distribution and that proposed in an early design study.

# 12.4 Viscous Flow: Supersonic Airfoil Drag

## 超声速翼型粘性阻力

不可压层流平板摩阻

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re_c}}$$

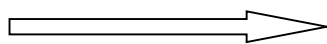


可压缩层流平板摩阻

$$C_f = \frac{F(M_e, Pr, T_w / T_e)}{\sqrt{Re_c}}$$

不可压湍流平板摩阻

$$C_f = \frac{0.074}{Re_c^{1/5}}$$



可压缩湍流平板摩阻

$$C_f = \frac{G(M_e, Pr, T_w / T_e)}{Re_c^{1/5}}$$

$Pr$ 为反映粘性耗散能量和热传导能量比值的相似参数，被称为普朗特数

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k}$$



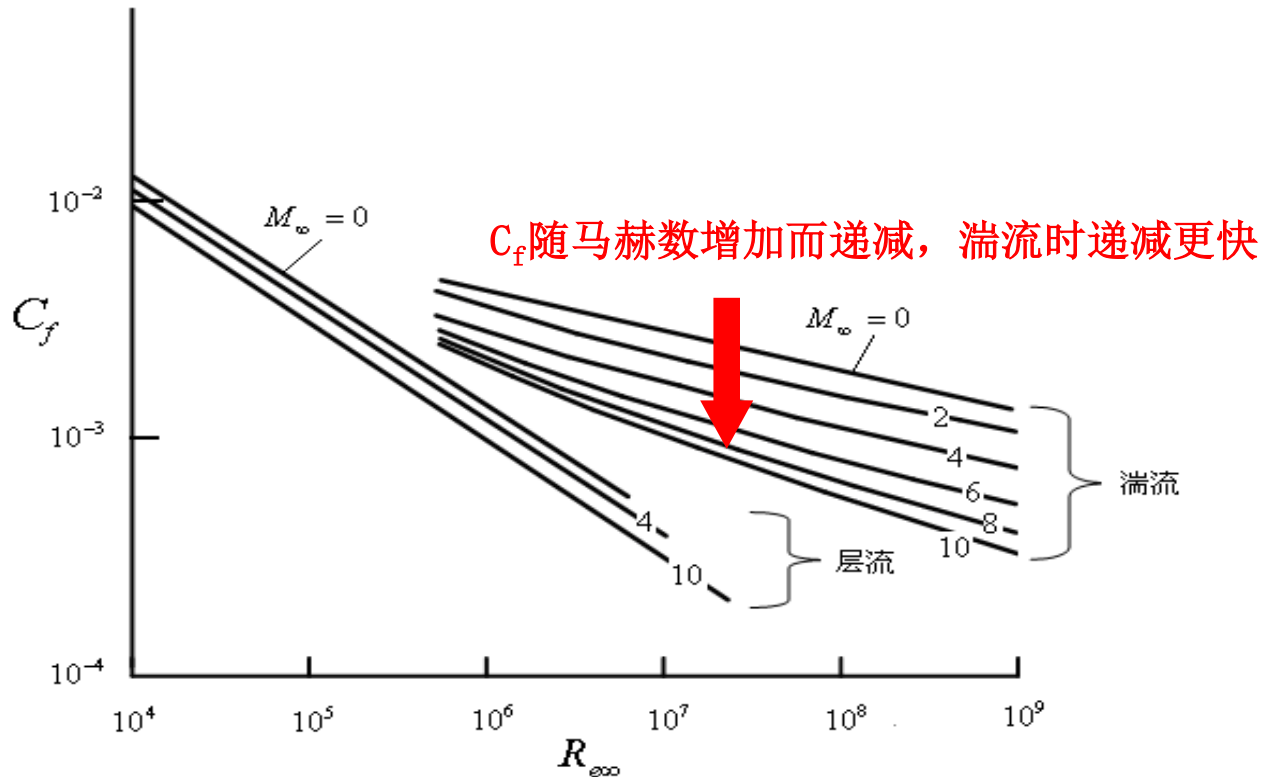


图19.1 平板摩擦阻力系数随雷诺数、马赫数的变化曲线  
(绝热壁,  $Pr=0.75$ )

*The most important phenomena to observe in this figure is that  $C_f$  decreases as  $M_\infty$  increases.*

下列说法正确的是：

- ☒ A 超声速线化小扰动假设下，平板翼型的压力中心在 $1/2$ 弦长处,焦点也在 $1/2$ 弦长处
- ☒ B 超声速线化小扰动假设下，翼型的升力系数只和翼型的迎角有关，和厚度弯度无关
- ☒ C 在小扰动线化假设下，对称菱形翼型是最小零升波阻翼型
- ☐ D 超声速线化小扰动假设下，翼型的阻力系数和力矩系数只和翼型的迎角有关，和厚度弯度无关

提交

请对上一次课内容的掌握情况进行投票

- ☐ **A 完全掌握了这部分知识内容**
- ☐ **B 掌握了大部分**
- ☐ **C 掌握了一小部分**
- ☐ **D 完全不懂**

提交

**Review Lecture #19 ended !**







Lecture #20/第20次课

**Review Chapter 7-12**  
**7-12章复习**

主讲人：宋科

**E-mail: [wpsong@nwpu.edu.cn](mailto:wpsong@nwpu.edu.cn)**

**2019年12月11日**

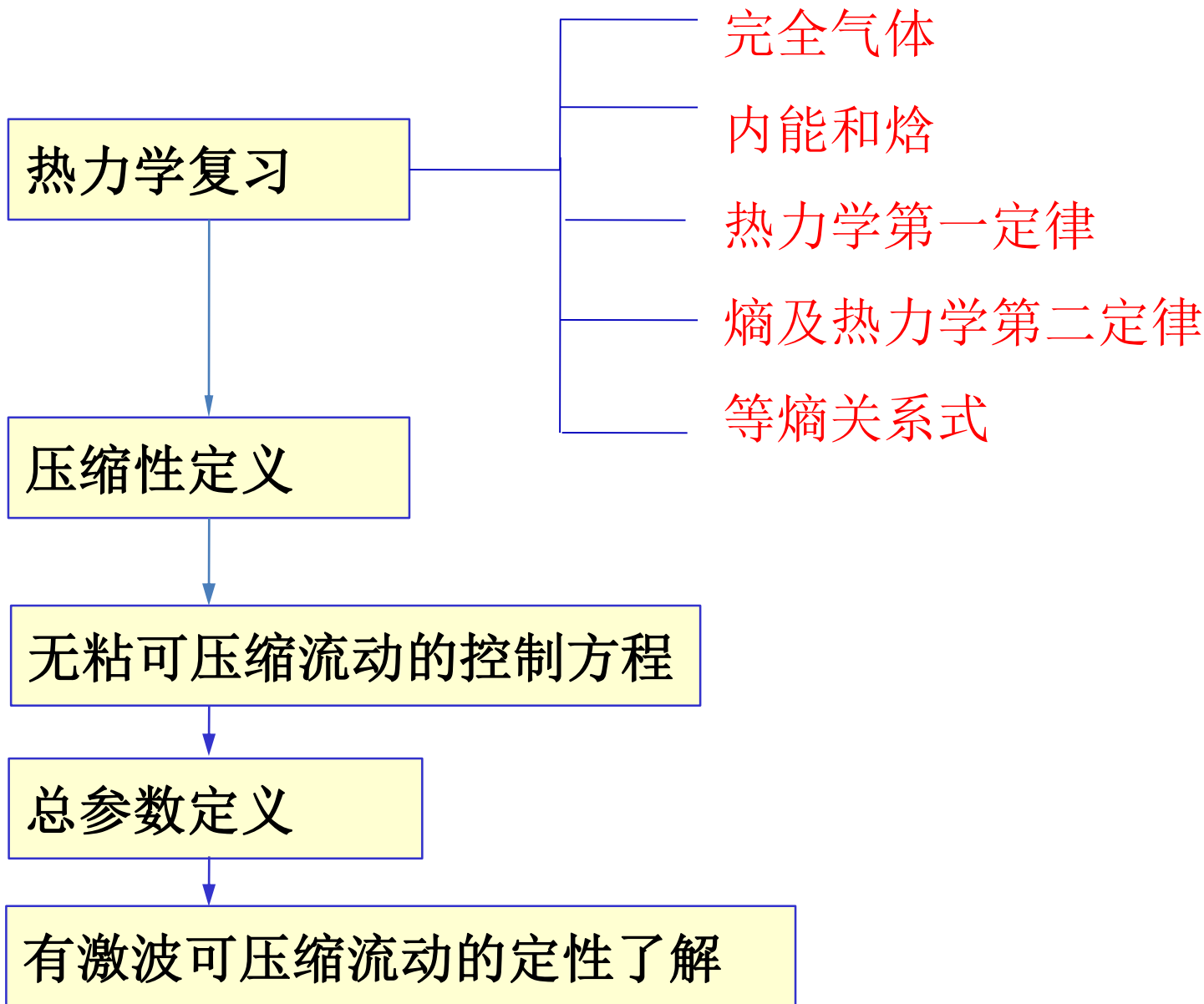
Department of Fluid Mechanics, School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, China



# **Chapter 7 Compressible Flow: Some Preliminary Aspects**

## **可压缩流动基础**



第七章  
路线  
图

## 7.7 Summary (小结)

### 1、热力学关系式：（注意各公式的适用条件）

状态方程：  $p = \rho RT$  (7.1)

完全气体空气  $R = 287 J / (kg \cdot K)$

对于量热完全气体：  $e = c_v T$  (7.6a)

$$h = c_p T \quad (7.6b)$$

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (9.9)$$

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \quad (7.10)$$

$$\gamma = 1.4$$

热力学第一定律  
的各种表达形式:

$$\delta q + \delta w = de \quad (7.11)$$

可逆过程:

$$\begin{cases} Tds = de + pdv & (7.18) \\ Tds = dh - vdp & (7.20) \end{cases}$$

熵的定义:

$$ds = \frac{\delta q_{rev}}{T} \quad (7.13)$$

$$\text{及 } ds = \frac{\delta q}{T} + ds_{irrev} \quad (7.14)$$

热力学第二定律:

$$ds \geq \frac{\delta q}{T} \quad (7.16)$$

或对于绝热过程:

$$ds \geq 0 \quad (7.17)$$



量热完全气体的熵增计算公式：

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (7.25)$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1} \quad (7.26)$$

等熵流动的等熵关系式(等熵过程的能量关系式)：

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (7.32)$$

## 2、压缩性

压缩性的一般定义：

$$\tau = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dp} \quad (7.33)$$

等温压缩性定义：

$$\tau_T = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \quad (7.34)$$

等熵压缩性定义：

$$\tau_s = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_s \quad (7.35)$$



### 3、无粘、可压缩流的控制方程：

连续方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_v \rho \, dv + \iint_s \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (7.39)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (7.40)$$

动量方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_v \rho \vec{V} \, dv + \iint_s (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}) \vec{V} = - \iint_s p \, d\vec{S} + \iiint_v \rho \vec{f} \, dv \quad (7.41)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x \quad (7.41a)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y \quad (7.41b)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z \quad (7.41c)$$





能量方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_v \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) dv + \iint_s \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \cdot d\vec{s} = \iiint_v \dot{q} \rho dv - \iint_s p \vec{V} \cdot d\vec{s} + \iiint_v \rho (\vec{f} \cdot \vec{V}) dv \quad (7.43)$$

$$\rho \frac{D(e + V^2/2)}{Dt} = \rho \dot{q} - \nabla \cdot p \vec{V} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{V}) \quad (7.44)$$

对于定常、绝热、无粘流, (7.44)和(7.43)可以写成:

$$h + \frac{V^2}{2} = \text{const} \quad \text{或} \quad h_0 = \text{const} \quad \xrightarrow[\text{ppt39}]{\text{链接}} (7.53), (7.55)$$

完全气体状态方程:

$$p = \rho R T \quad (7.1)$$

量热完全气体内能:

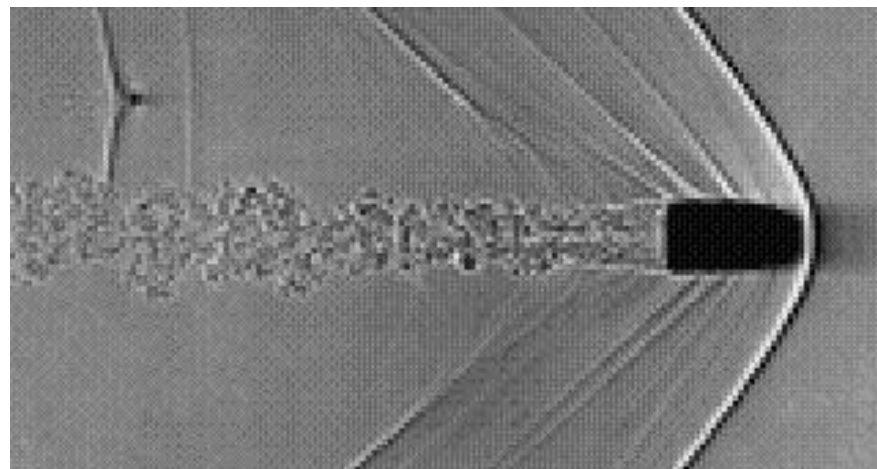
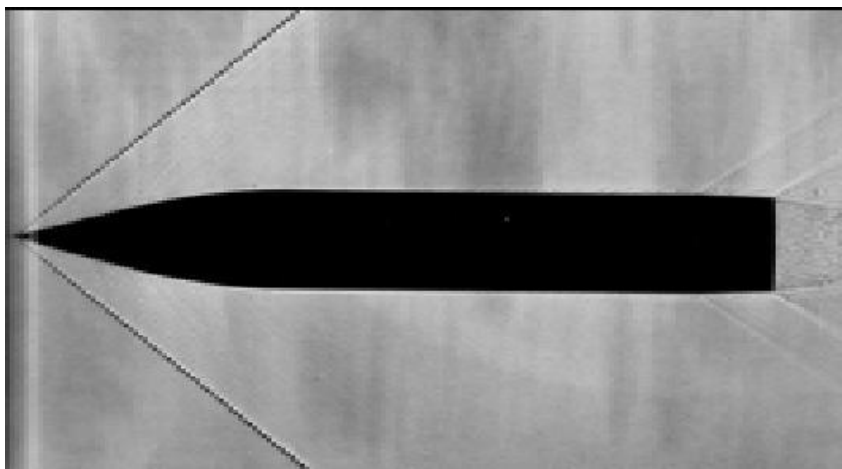
$$e = c_v T \quad (7.6a)$$

## 4、总温、总焓、总压、总密度的定义及概念：

- “总温”  $T_0$  和 “总焓”  $h_0$  定义为把流体微元（在我们的想象中）**绝热地** 减速为静止时流体微元所对应的温度和焓值。
- 类似地，“总压”  $p_0$  和 “总密度”  $\rho_0$  定义为把流体微元（在我们的想象中）**等熵地** 减速为静止时流体微元所对应的压强和密度。 ➡ 链接ppt40 (8.40)、(8.42)、(8.43)
- 在均匀自由来流的绝热流场中，总焓  $h_0$  在全流场中为常数，相反，在非绝热流场中， $h_0$  随流场点的不同而不同。
- 类似地，在等熵流场中，总压和总密度在整个流场中为常数，相反，在非等熵流场中，总压和总密度随流场点的不同而不同。

## 5、激波

- 激波为超声速流中很薄的一层
- 通过激波
  - 压强、密度、温度和熵增加；
  - 马赫数、流动速度、总压降低；
  - 总焓、总温不变。



# CHAPTER 8 NORMAL SHOCK WAVES AND RELATED TOPICS

## 第八章 正激波及有关问题



# 第八章路线图

8.2 正激波基本控制方程推导

8.3 声速

8.4 能量方程特殊形式

8.5 什么情况下流动可压？

8.6 通过正激波气体特性变化的方程的详细推导；物理特性变化趋势讨论

8.7 用皮托管测量可压缩流的流动速度



## 8.8 Summary

气体的声速由下式给出:

$$a = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} \quad 8.18$$

对于量热完全气体

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad 8.23$$

或

$$a = \sqrt{\gamma R T} \quad 8.25$$

声速只依赖于气体的温度。

注：以上公式由 (8.17) 式即  $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$  推导出。




对于定常、绝热、无粘流动，能量方程可以表示为：

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (8.29)$$

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (8.30)$$

$$\frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2} \quad (8.32)$$

$$\frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1} \quad (8.34)$$

$$\frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2} = \frac{(\gamma + 1)a^{*2}}{2(\gamma - 1)} = \text{const.} \quad (8.36)$$


总参数与静参数通过以下关系式联系起来:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (8.40)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (8.42)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)} \quad (8.43)$$

注意总参数与静参数的比只是当地马赫数的函数。由附录A以列表形式提供。

特征马赫数 ( $M^* = V/a^*$ ) 与当地马赫数的关系

$$M^{*2} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2} \quad (8.48)$$



## 正激波基本方程:

连续方程:  $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (8.2)$

动量方程:  $p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (8.6)$

能量方程:  $h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (8.10)$

由这些方程可导出，通过正激波的气体特性变化由波前马赫数唯一确定。

$$M_2^2 = \frac{1 + [(\gamma - 1) / 2] M_1^2}{\gamma M_1^2 - (\gamma - 1) / 2} \quad (8.59)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \quad (8.61)$$



接前框：

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \quad (8.65)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{h_2}{h_1} = \left[ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \quad (8.67)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left\{ \left[ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \right\} - R \ln \left[ 1 + \frac{2\gamma}{(\gamma+1)} (M_1^2 - 1) \right] \quad (8.68)$$

$$\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = e^{-(s_2 - s_1)/R} \quad (8.73)$$

附录B给出了随 $M_1$ 变化的正激波性质。

要求掌握查表或计算方法求解通过正、斜激波流动



对于量热完全气体，通过正激波总温不变：

$$T_{0,2} = T_{0,1}$$

然而，通过正激波总压有损失：

$$p_{0,2} < p_{0,1}$$

对于亚声速与超声速可压缩流动，自由来流马赫数由皮托管的总压与自流来流静压比确定。但是亚声速与超声速情况对应的方程不同：

亚声速流：

$$M_1^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p_{0,1}}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right] \quad (8.74)$$

超声速流：

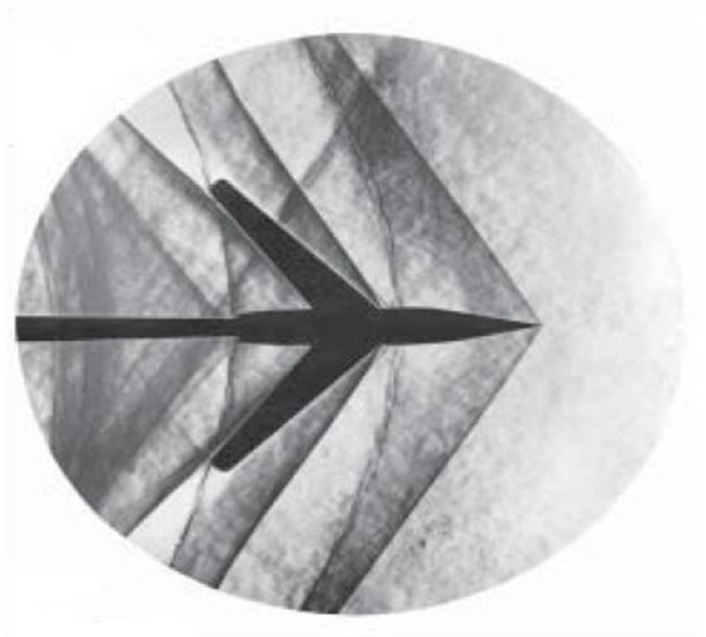
$$\frac{p_{0,2}}{p_1} = \left( \frac{(\gamma + 1)^2 M_1^2}{4\gamma M_1^2 - 2(\gamma - 1)} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \frac{1 - \gamma + 2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} \quad (8.80)$$

可压缩流中速度测量（除了知道总压静压比以得到来流马赫数，还须知道来流的声速），因为：

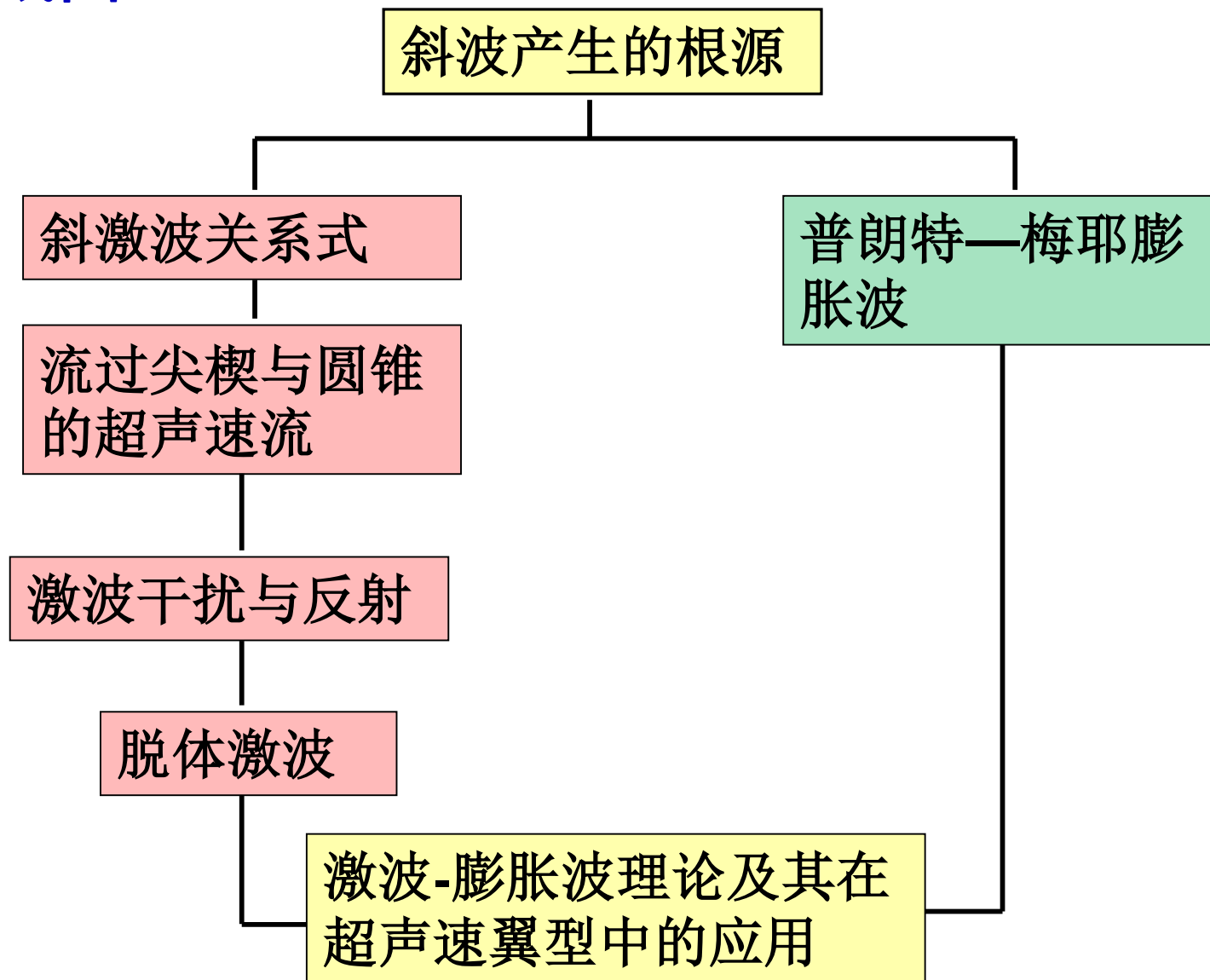
$$u_1 = M_1 a_1$$

# CHAPTER 9 Oblique Shock and Expansion Waves

## 第九章 斜激波和膨胀波



## 第九章路线图



# 激波与膨胀波

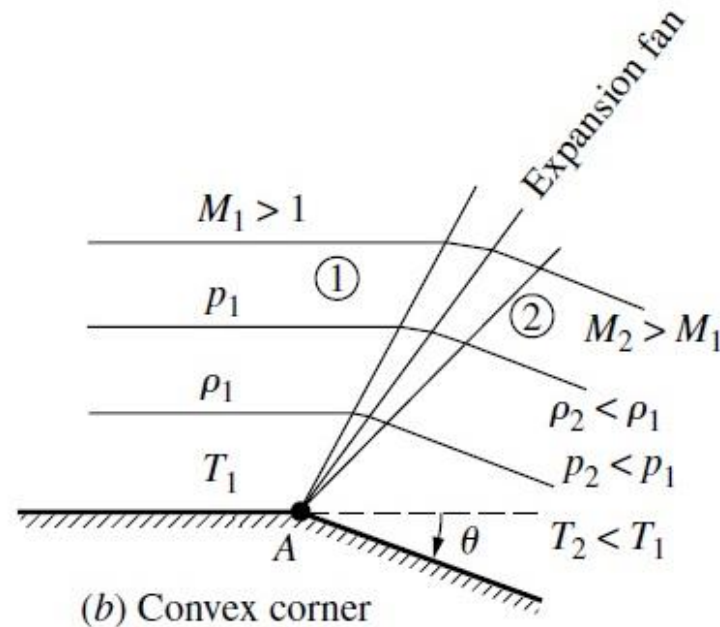
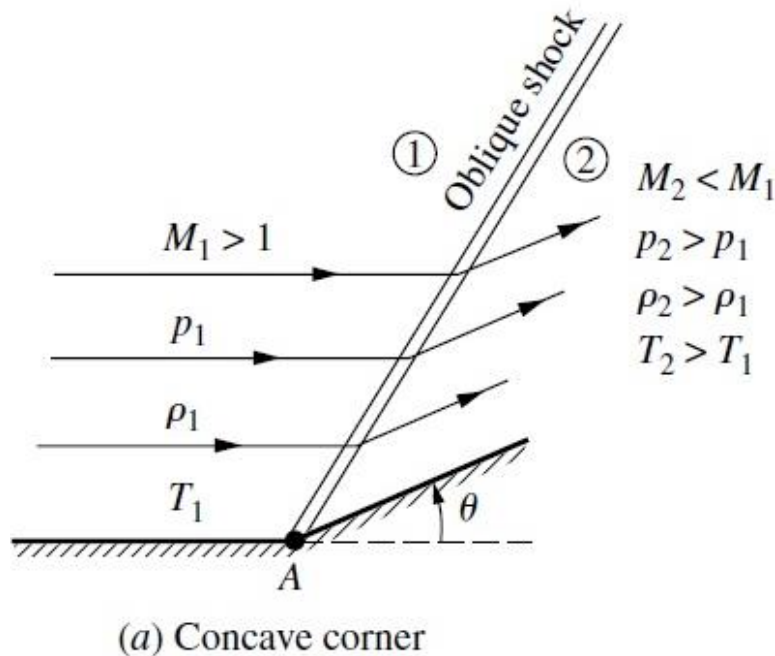


Figure 9.2 Supersonic flow over a corner.

$\theta$ : Deflection angle  
(偏转角)

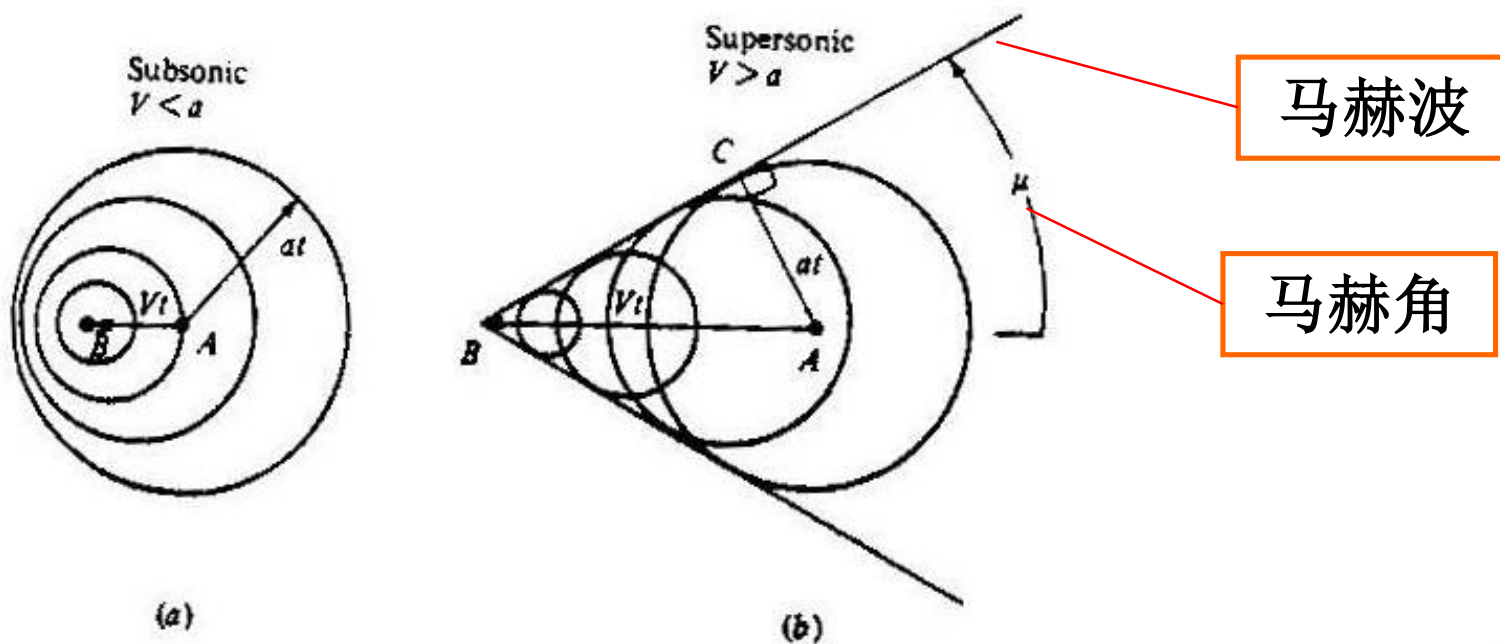
图9.2

➤ 通过斜激波, 马赫数**间断地**减少, 密度、压强和温度**间断地**增加

➤ 通过膨胀波, 马赫数**连续地**增加, 密度、压强和温度**连续地**减小

# 超声速流中产生波的物理机理

超声速流中激波和膨胀波产生的物理原因是：通过分子碰撞引起的信息传播和这种传播不能到达超声速流中某些区域。



**FIGURE 9.3**

Another way of visualizing the propagation of disturbances in (a) subsonic and (b) supersonic flow.



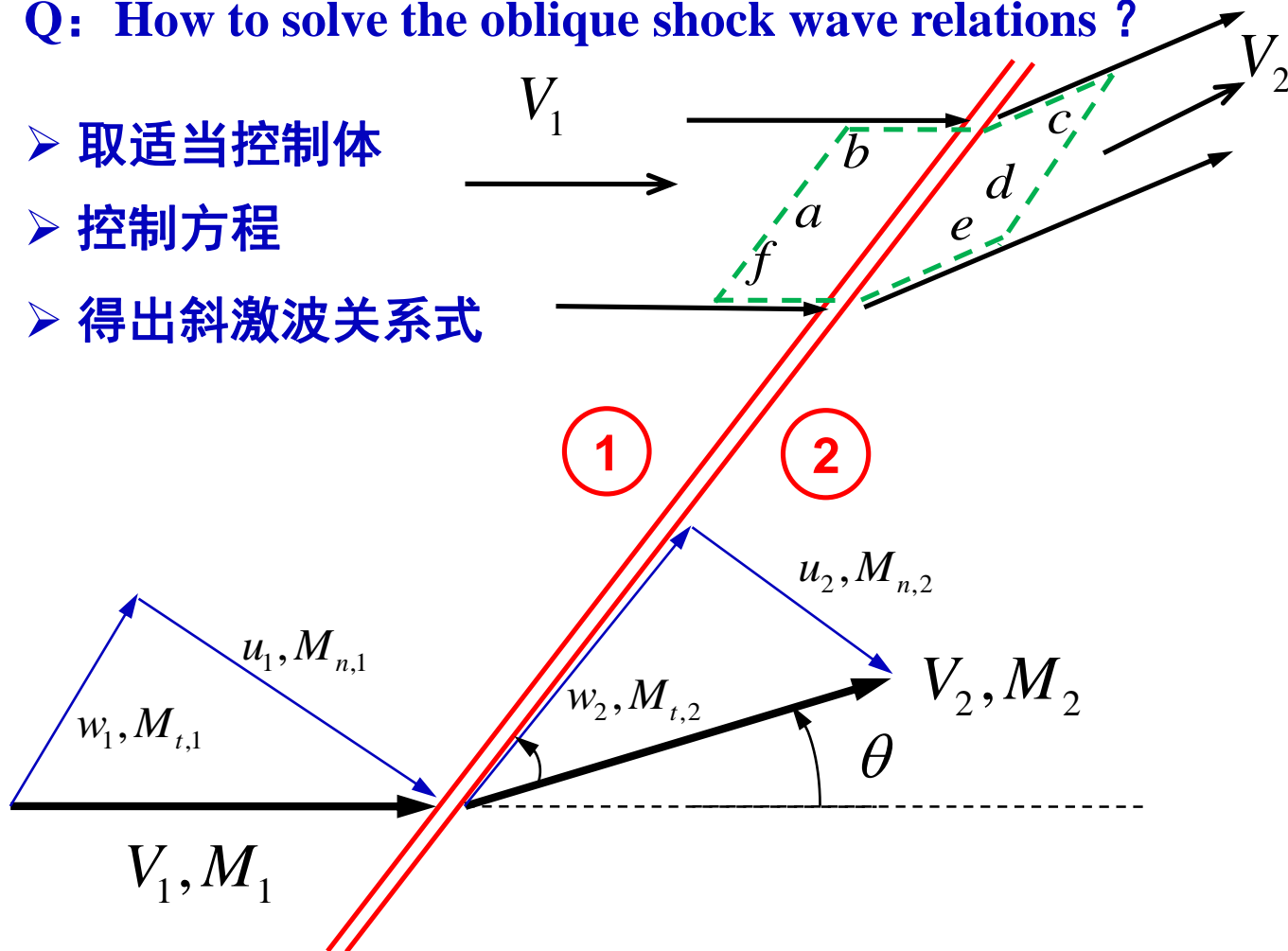
已知

$p_1$   
 $\rho_1$   
 $T_1$   
 $M_1$   
 $u_1$   
 $p_{0,1}$   
 $h_{0,1}$   
 $T_{0,1}$   
 $s_1$

问题：如何由波前参数得到波后参数？

Q: How to solve the oblique shock wave relations ?

- 取适当控制体
- 控制方程
- 得出斜激波关系式



?

$p_2$   
 $\rho_2$   
 $T_2$   
 $M_2$   
 $u_2$   
 $p_{0,2}$   
 $h_{0,2}$   
 $T_{0,2}$   
 $s_2$

## Chapter 9.11 Summary/小结

超声速多维流动中的无限微弱扰动产生与来流夹角为马赫角  $\mu$  的马赫波。马赫角的定义如下：

$$\mu = \sin^{-1} \frac{1}{M} \quad (9.1)$$

通过斜激波流动特性的变化由斜激波前的法向速度分量决定。对于量热完全气体，上游法向马赫数是决定性参数。通过斜激波的流动参数变化可利用第8章中的正激波关系式对应波前法向马赫数  $M_{n,1}$  求得。

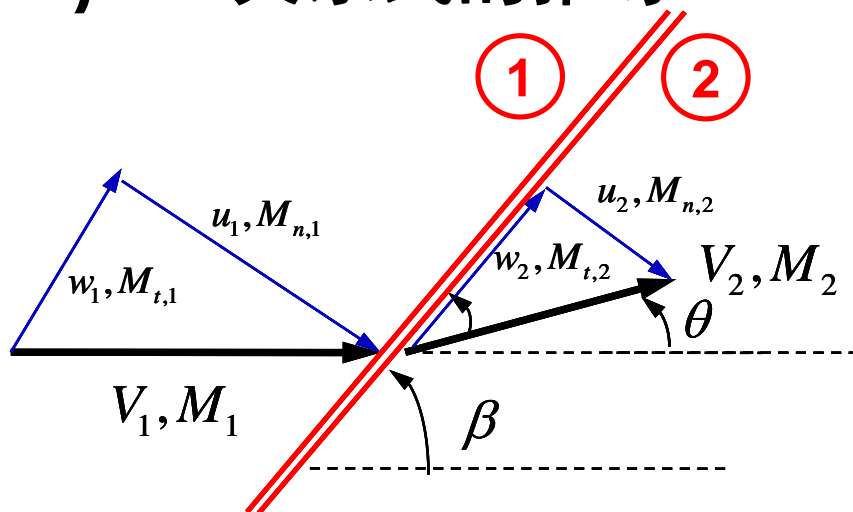
$$M_{n,1} = M_1 \sin \beta \quad (9.13)$$

通过斜激波的气体特性变化取决于两个参数， $M_1, \beta$  或  $M_1, \theta$ 。图9.9给出了  $M_1, \beta, \theta$  曲线，必须仔细地研究它。

**掌握查表查图或用公式来计算通过斜激波流动特性的方法**



# $\theta - \beta - M$ 关系式的推导



$$\tan \beta = \frac{u_1}{w_1} \quad (9.19)$$

$$\tan(\beta - \theta) = \frac{u_2}{w_2} \quad (9.20)$$

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (9.21)$$

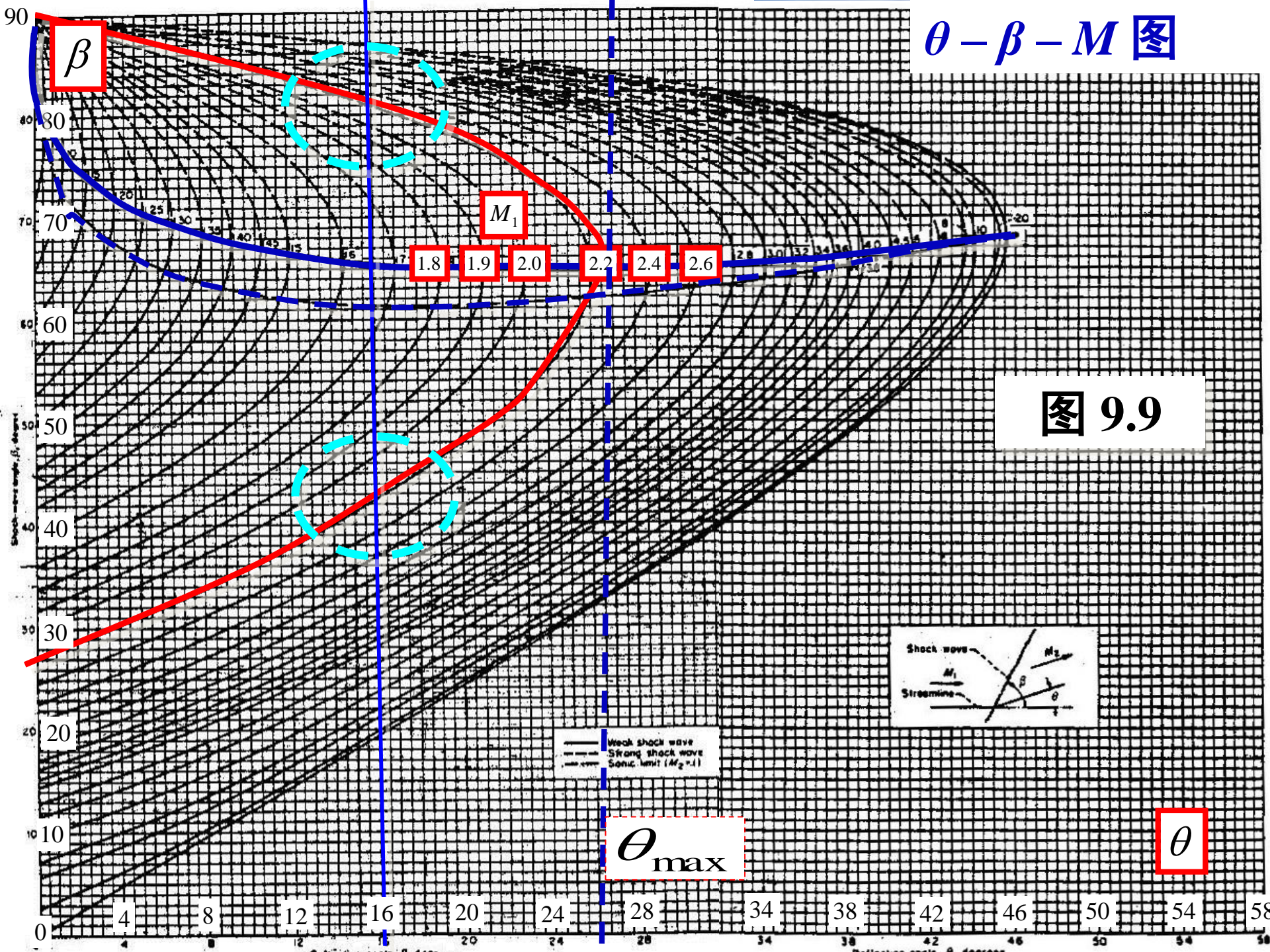
$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta} \quad (9.22)$$



$$\tan \theta = 2 \cot \beta \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \quad (9.23)$$

方程(9.23) 被称为 $\theta - \beta - M$ 关系式, 它限定了 $\theta$ 为 $M_1$ 和 $\beta$ 的唯一函数。这是分析斜激波特性的最重要的关系式(图9.9)。







# Explore $\theta - \beta - M$ relations

□ 图9.9给出的是以波前马赫数为参数，激波角  $\beta$  随偏转角  $\theta$  的变化曲线。

1. 给定上游马赫数  $M_1$ , 存在一个最大偏转角  $\theta_{max}$ :

➤ 物体几何形状的  $\theta > \theta_{max}$ , 不存在直的斜激波; 相反, 形成脱体弓形激波

➤  $\theta_{max}$  随  $M_1$  增大而增大

➤ 当  $M_1$  趋于无穷大时,  $\theta_{max}$  存在一极限值, 对于  $\gamma = 1.4$  的量热完全气体,  $\theta_{max} = 45.5^\circ$

读612-618页

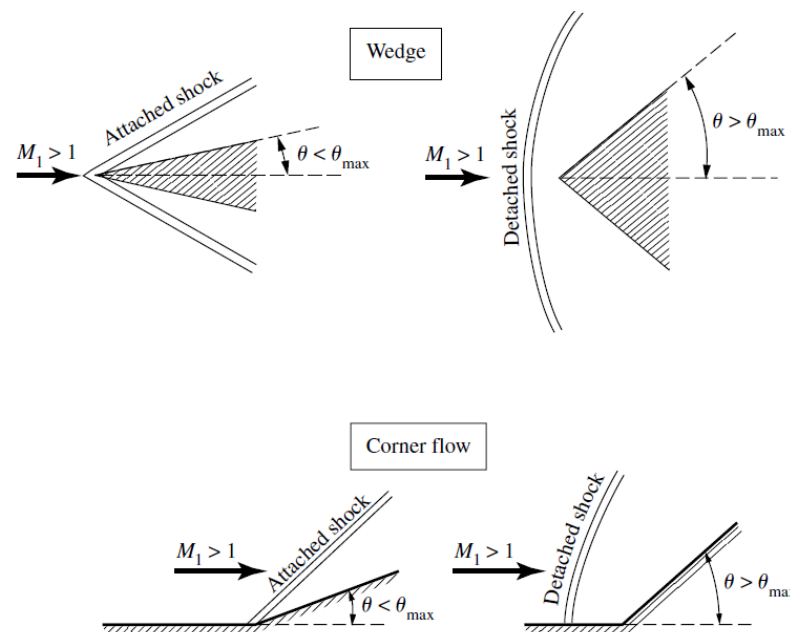


Figure 9.10 Attached and detached shocks.

2. 给定任意一个小于  $\theta_{max}$  的  $\theta$  值，对应每一个给定的波前马赫数  $M_1$ ，存在两个直线斜激波解。
- 弱解与强解：较小的  $\beta$ ，弱激波解，较大的  $\beta$ ，强激波解。
  - “弱”与“强”的分类是根据以下事实确定的：当给定  $M_1$ ， $\beta$  越大则  $M_{n,1}$  越大，因此压强比  $p_2/p_1$  越大。
  - 在实际情况中，通常出现的是弱解情况。

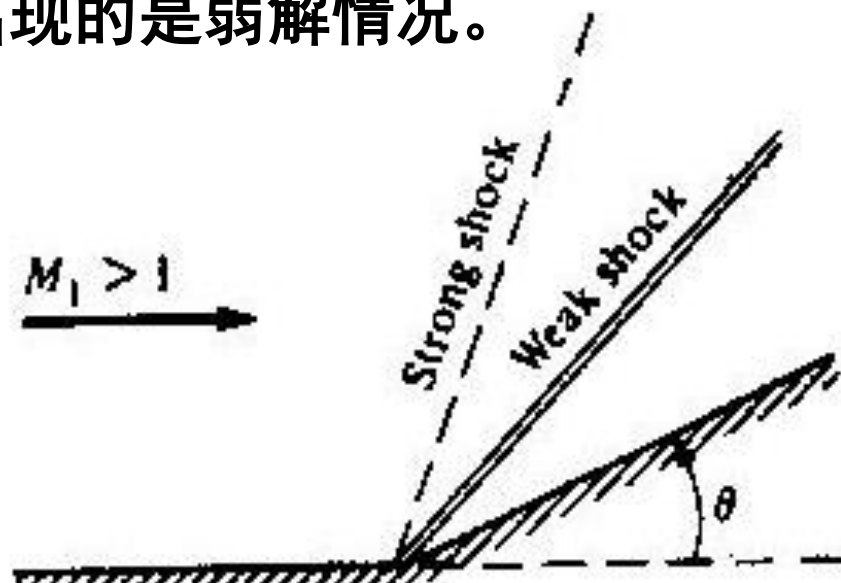


图9.11 弱激波  
和强激波

## 4. 增大上游马赫数的影响

超声速流流过半顶角为  $\theta$  的尖楔

- 增加来流马赫数  $M_1$ , 激波角  $\beta$  角减少, 但激波是增强的, 这是因为随着  $M_1$  的增加,  $M_{n,1}$  是增大的
- 降低来流马赫数  $M_1$ , 激波角  $\beta$  增大, 激波变弱。如果  $M_1$  降低到一定程度, 激波将会脱体。对于  $\theta = 20^\circ$ ,  $M_1 < 1.8$  激波将会脱体。

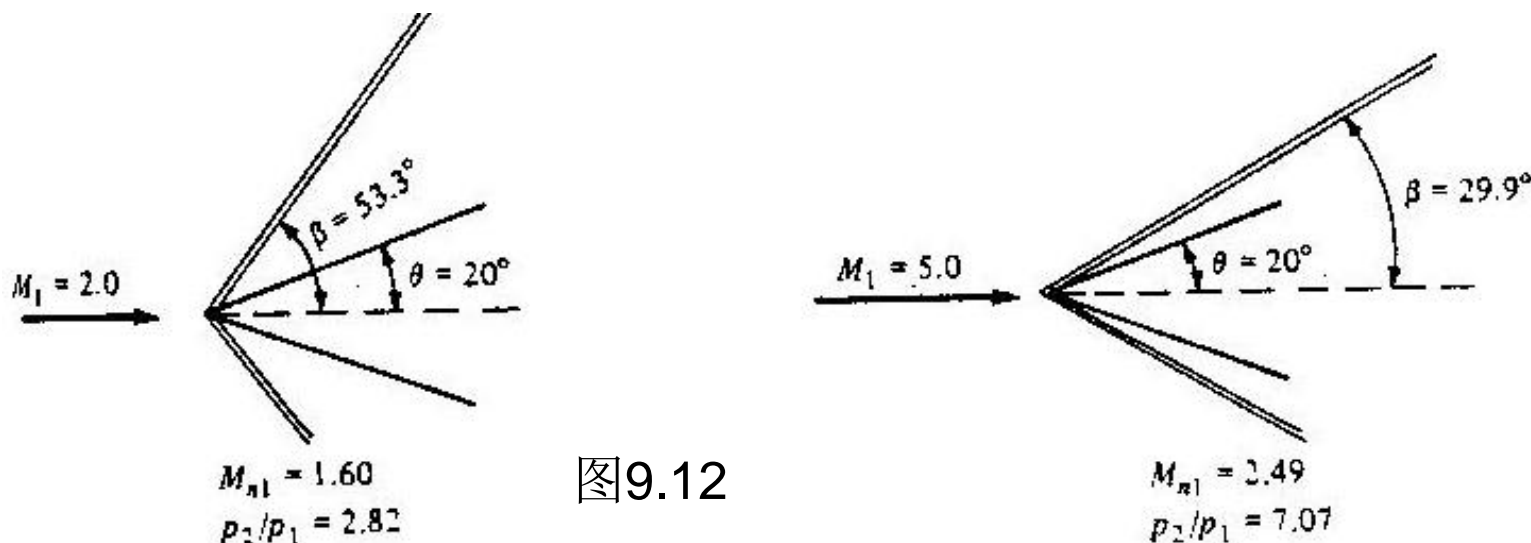


图9.12

## 5. 增大偏转角的影响

考虑另外一个实验。让我们保持  $M_1$  不变而增大偏转角  $\theta$ 。

- 随着  $\theta$  增大，激波角  $\beta$  增大， $M_{n,1}$  是增大，激波将会变强。
- 但是，一旦  $\theta$  角超过  $\theta_{max}$ ，激波会变成脱体激波。对于图 9.11 中  $M_1 = 2.0$  的情况， $\theta > 23^\circ$  时就会出现脱体激波。

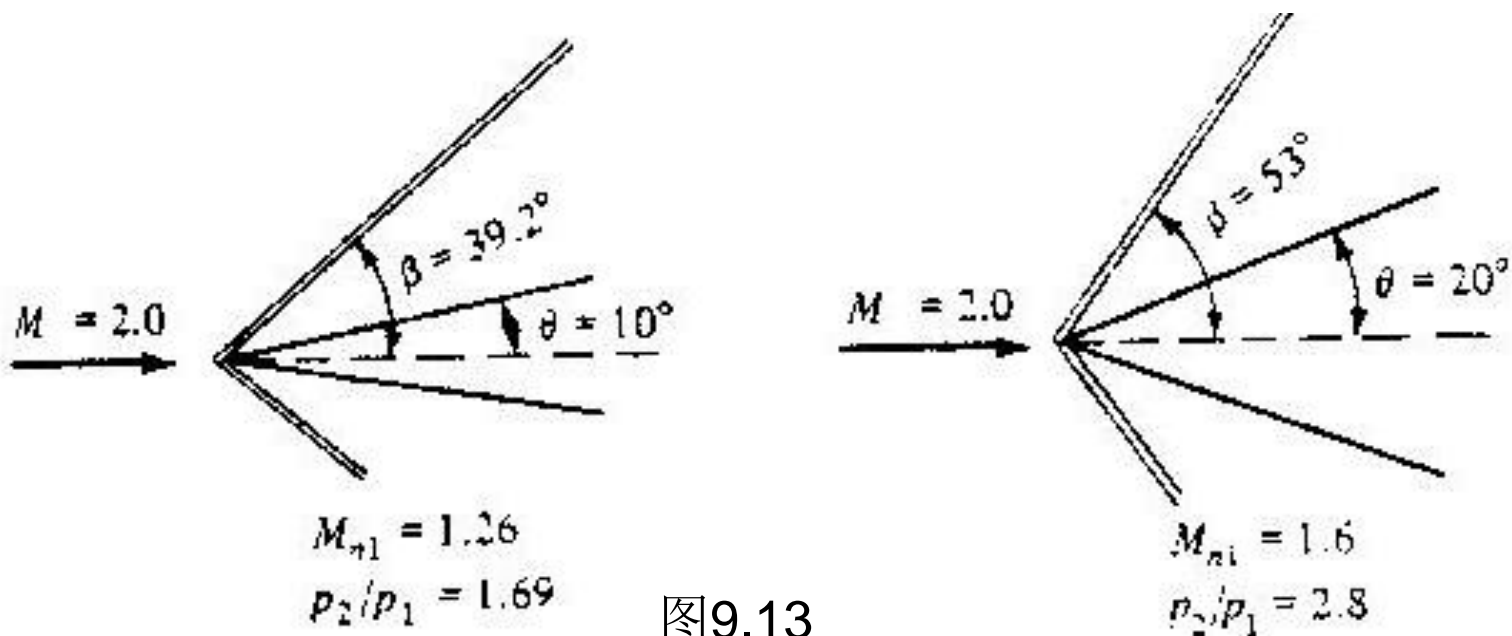


图9.13



# $\theta - \beta - M$ 图小结 / Summary

- 1、最大偏转角  $\theta_{max}$ ：** 对于给定的波前马赫数，存在一个  $\theta_{max}$ 。  $\theta < \theta_{max}$  存在贴体直线斜激波；  $\theta > \theta_{max}$  出现弯的脱体激波。

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \theta_{max} \approx 45.5^\circ$$

- 2、强弱解：** 对应一个  $\theta$  值 ( $< \theta_{max}$ )，存在两个  $\beta$  值。不同  $M_1$  对应  $\theta_{max}$  组成的连线上部分对应“强解”，下部分对应“弱解”。另外一条稍低于  $\theta_{max}$  曲线为  $M_2 = 1$  的连线，上部分和下部分分别对应波后为“亚声速流”和“超声速流”情况”。

- 3、特殊情况：**  $\theta = 0^\circ$ ，对应  $\beta = 90^\circ$  和  $\beta = \mu$ 。

- 4、增大  $M_1$  的影响：** 对于相同的  $\theta$ ，波前马赫数  $M_1$  越大，激波角  $\beta$  越小， $M_{n,1}$  越大，所以激波越强。

- 5、增大  $\theta$  的影响：** 对于相同的波前马赫数  $M_1$ ， $\theta$  越大，激波角  $\beta$  越大， $M_{n,1}$  越大，所以激波越强。



斜激波入射到固壁表面上将会从表面反射,反射波以保证物面处流动相切条件的形式出现.不同斜激波会相互干扰,起干扰结果取决于激波的具体形式.

**要求掌握激波反射流动计算方法**

决定中心膨胀波的参数是普朗特 - 梅耶函数  $v(M)$ 。联系下、上游马赫数  $M_1$ 、 $M_2$  及偏转角  $\theta$  的重要方程是:

$$\theta = v(M_2) - v(M_1) \quad (9.43)$$

**要求掌握膨胀波流动的计算方法**

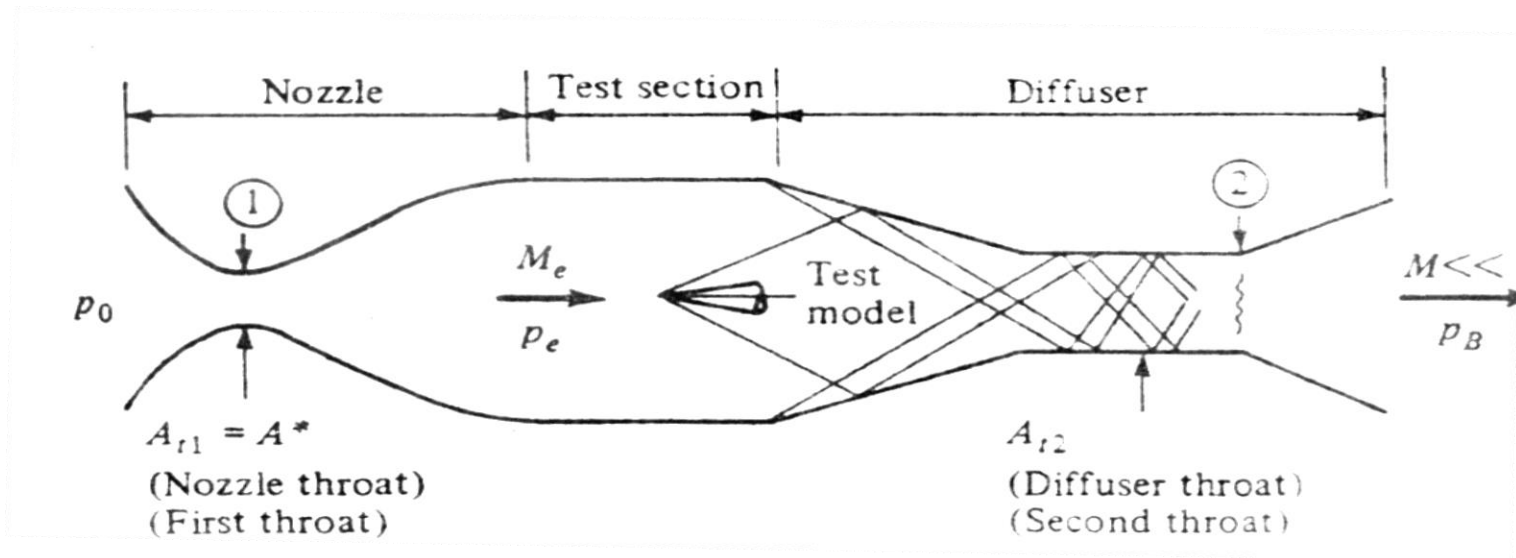
由直线段组成的超声速翼型的压强分布可以用斜激波、膨胀波理论精确地计算出来。

**要求掌握运用激波-膨胀波理论计算直线段翼型气动特性**

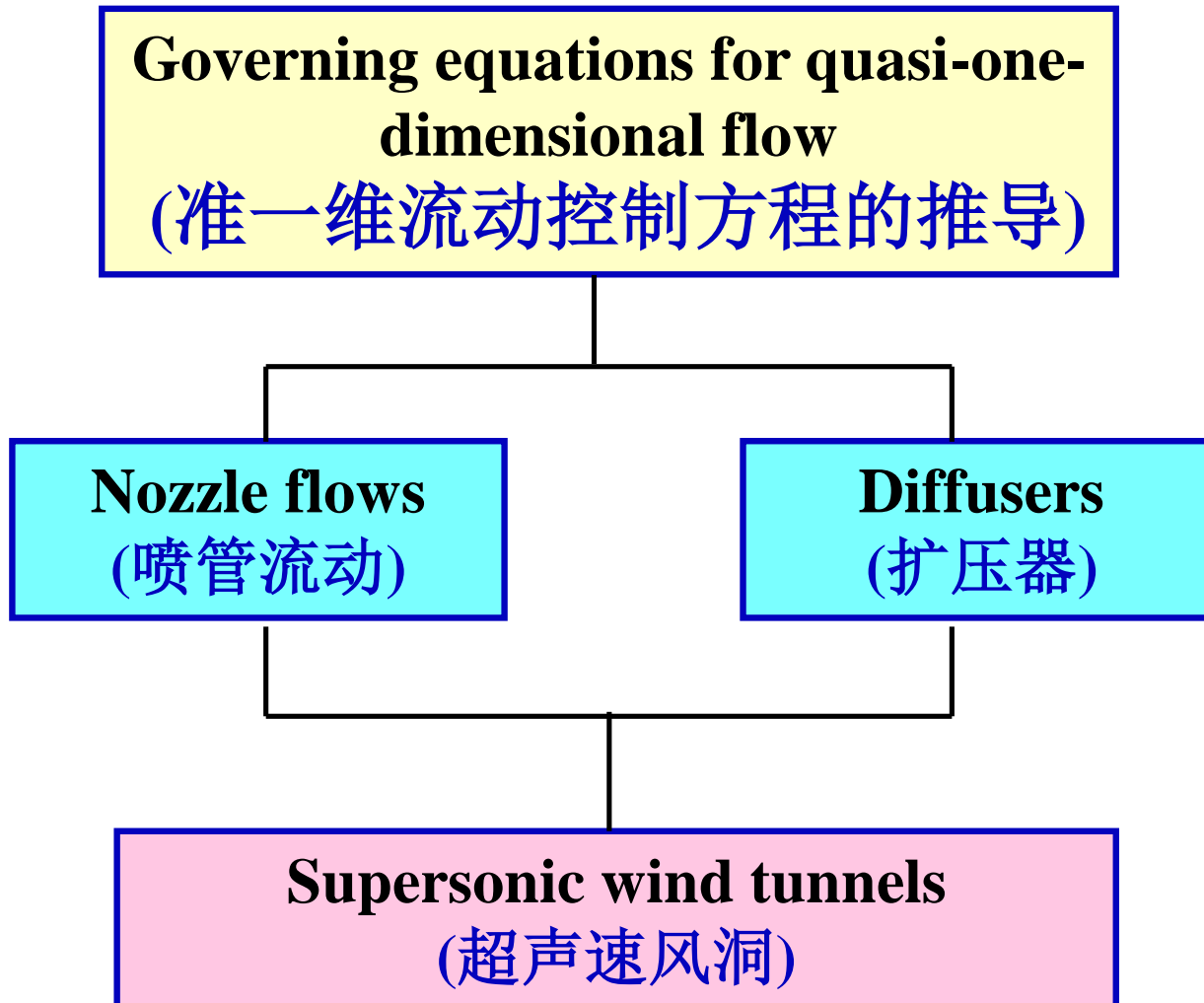


# Chapter 10 Compressible Flow through Nozzles, Diffusers, and Wind Tunnels

## 第十章 通过喷管、扩压器和风洞的可压缩流



# 第十章的路线图



## 10.7 Summary/小结

准一维流动是变截面管道内三维真实流动的近似；在这一近似假设下，尽管面积分布 $A=A(x)$ 是变化的，但流动参数只是 $x$ 的函数，即 $p=p(x), u=u(x), T=T(x)$ 等。因此，我们可以将准一维流动的结果看作是三维真实管内流动在给定站位截面的平均值。准一维流动的假设给出了许多与真实内流相符合的合理结果，是分析可压缩流动内流的重要手段。准一维流动的控制方程为：

连续方程：
$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \quad (10.1)$$

动量方程：
$$p_1 A_1 + \rho_1 u_1^2 A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p dA = p_2 A_2 + \rho_2 u_2^2 A_2 \quad (10.5)$$

能量方程：
$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (10.9)$$



补充:

准一维流的微分形式控制方程为:

连续方程:  $d(\rho u A) = 0$  (10.1)

动量方程:  $dp = -\rho u du$  (10.5)

能量方程:  $dh + u du = 0$  (10.9)

面积速度关系式为

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u} \quad (10.25)$$

此公式说明：

- 1、要使亚声速流加速（减速），必须使流管面积减小（增加）。
- 2、要使超声速流加速（减速），必须使流管面积增加（减小）。
- 3、声速流动只能出现在喉道或最小流管面积处。



通过管道的完全气体等熵流动由下式决定：

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[ \left(\frac{2}{\gamma+1}\right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (10.32)$$

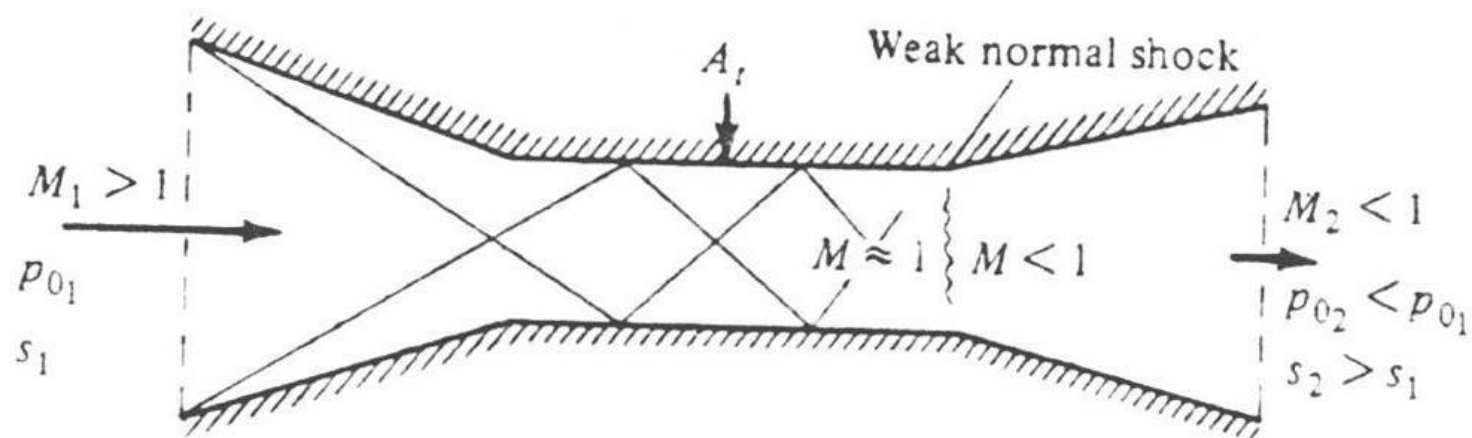
该式为管道内流动的等熵关系式,要求掌握查表并结合激波理论计算管道内各种流动情况的方法（10.9题具有指导意义）

这一关系式告诉我们：管道内流动的马赫数是由当地面积与声速喉道面积的比值决定；而且，对于给定的面积比，对应两个满足（10.32）式的值：一个亚声速值，一个超声速值。



## 扩压器的定义:

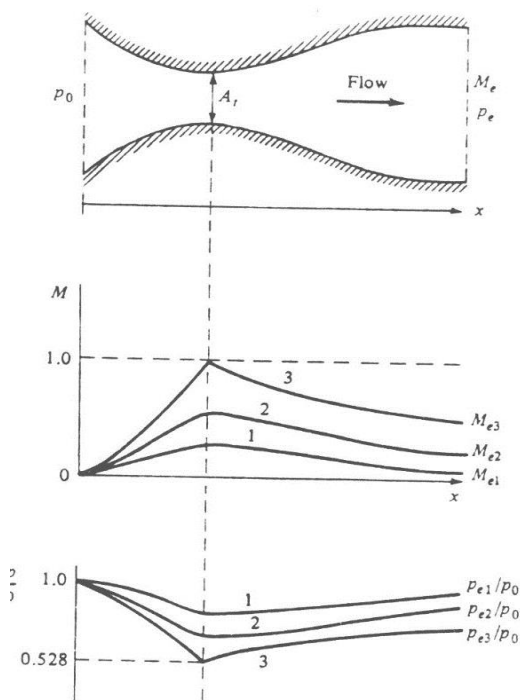
扩压器是这样的一段管道，它的作用是使气流以尽可能小的总压损失通过管道并在其出口降低速度。



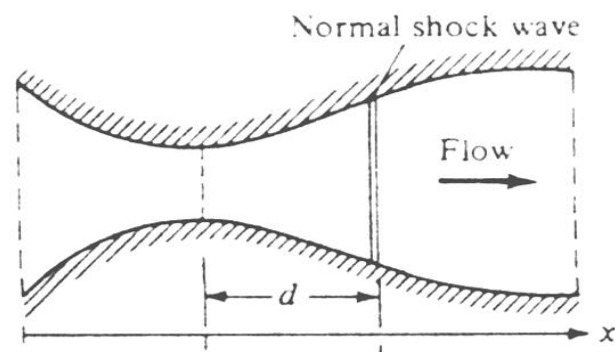
(b) Actual supersonic diffuser

对于给定的收缩-扩张管道，只存在一种可能的等熵超声速流动；相反，存在无数多种亚声速等熵解，每一种解对应不同的入口出口压力比，

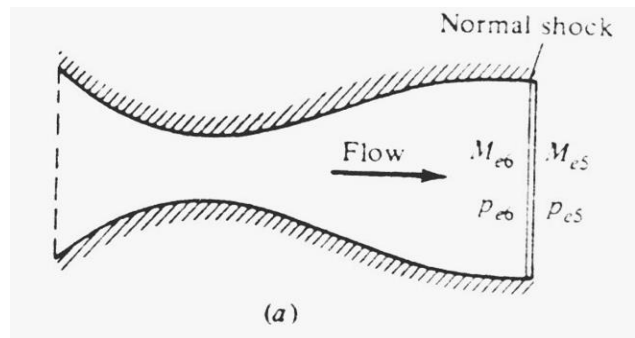
$$p_0/p_e = p_0/p_B。$$



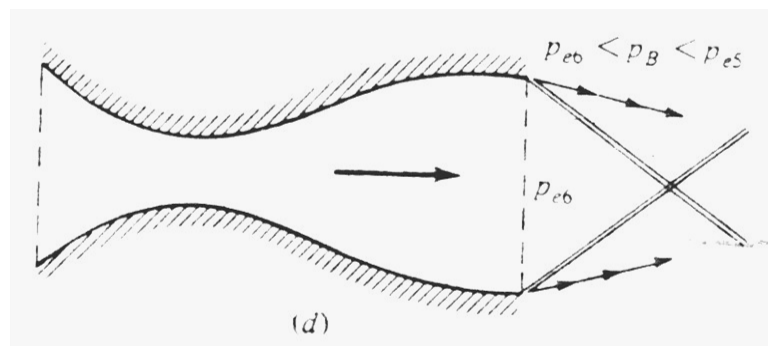
(1)



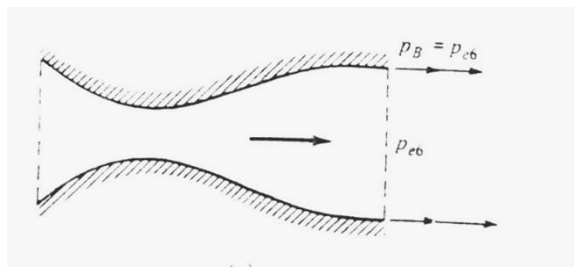
(2A)



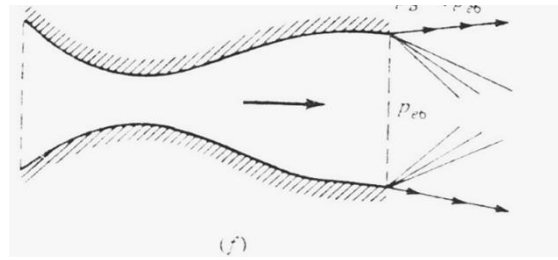
(2B)



(3)



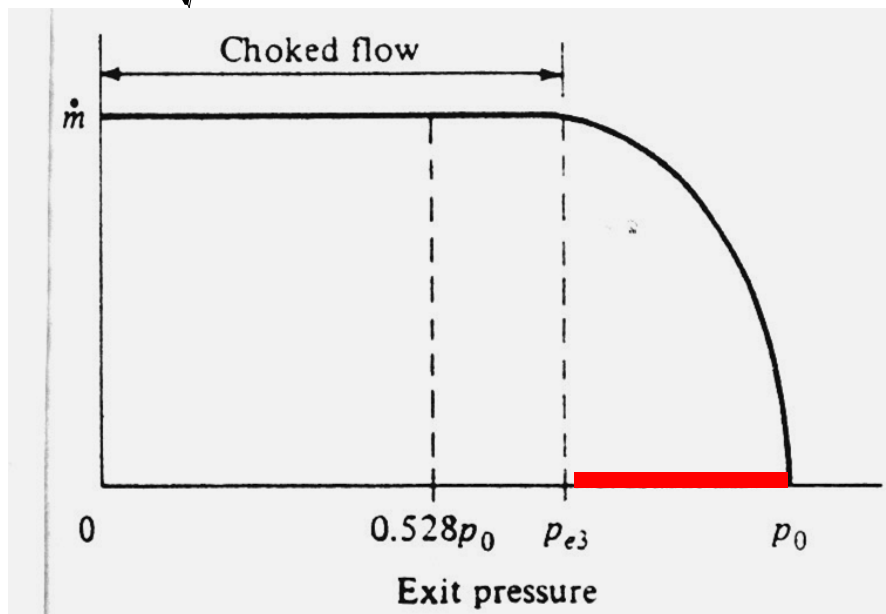
(4)



(5)

# 用喉道处参数表示喷管流量的计算公式：

$$\dot{m} = \frac{p_0 A_t}{\sqrt{T_0}} M_t \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_t^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}$$

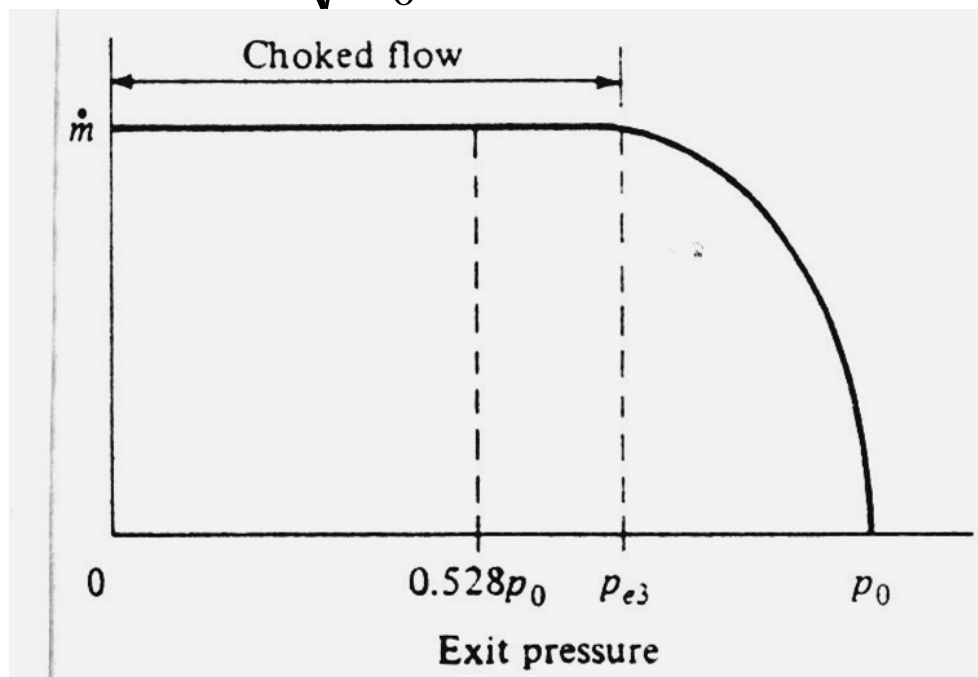


$p_0 \leq p_B < p_{e3}$ , 用喉道处的实际马赫数  $M_t$  和实际喉道面积  $A_t$  计算（标红部分）；

$p_B \leq p_{e3}$ ，用  $M_t = 1$ ，计算（此时  $A^* = A_t$ ）。

通过喷管的最大质量流量 ( $p_B \leq p_{e3}$ ):

$$\dot{m}_{\max} = \frac{p_0 A^*}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}}$$



如果不存在实际的声速喉道（如只给出一段超声速扩张管道或等熵亚声速流动）,该式仍然可用,只不过 $A^*$ 采用虚拟声速喉道面积。

在超声速风洞中，第二喉道与第一喉道的比可由下式近似：

$$\frac{A_{t,2}}{A_{t,1}} = \frac{p_{0,1}}{p_{0,2}} \quad (10.39) \quad (\text{旧}10.39)$$

如果  $A_{t,2}$  低于此值，扩压段将发生壅塞，风洞不能起动。

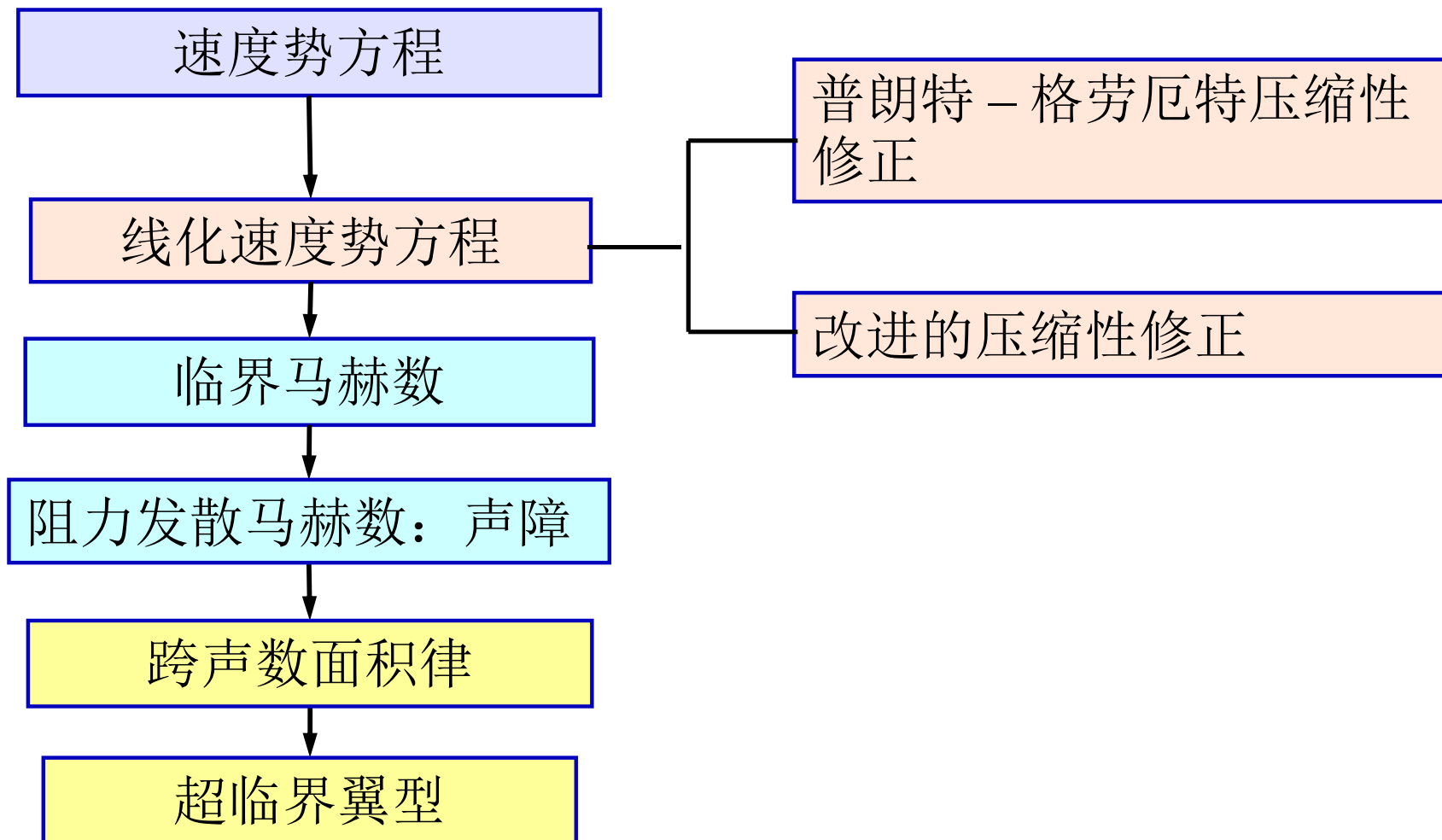
# **Chapter 11 Subsonic Compressible Flow**

## **Over Airfoils: Linear Theory**

### **(绕翼型的可压缩亚声速流: 线化理论)**



# 十一章路线图





## 11.12 小结

对于二维、无旋、等熵、定常的可压缩流，精确的速度势方程为：

$$\left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{2}{a^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0$$

(11.12)

其中

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \left[ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \right]$$

(11.13)

这一方程是精确的，但它是非线性的，因此很难求解。在目前，还找不到该方程的解析解。



对于小扰动情况（细长体、小迎角），精确速度势方程可以近似为：

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0 \quad (11.18)$$

以上小扰动速度势方程是近似的，但它是线性的，因此求解容易得多。这一方程在亚声速下（ $0 \leq M_\infty \leq 0.8$ ）和超声速下（ $M_\infty \geq 1.2$ ）成立。在跨声速（ $0.8 \leq M_\infty \leq 1.2$ ）和高超声速（ $M_\infty > 5$ ）不成立。

线性化压强系数表示为：

$$C_p = -\frac{2\hat{u}}{V_\infty} \quad (11.32)$$

近似物面边界条件为：

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} = V_\infty \tan \theta \quad (11.34)$$

Prandtl-Glauert 相似律是一个压缩性修正公式，可将不可压流动的结果经过修改来考虑压缩性的影响。

$$C_p = \frac{C_{p,0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \quad (11.51)$$

$$C_l = \frac{C_{l,0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \quad (11.52)$$

$$C_m = \frac{C_{m,0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \quad (11.53)$$

Prandtl-Glauert rule 基于线性理论，因此只适用于薄物体、小迎角、亚声速、不适合非线性特征明显的高亚声速。

## 改进的压缩性修正

卡门-钱公式：

$$C_p = \frac{C_{p,0}}{\sqrt{1-M_\infty^2} + [M_\infty^2 / (1 + \sqrt{1-M_\infty^2})] C_{p,0} / 2} \quad (11.54)$$

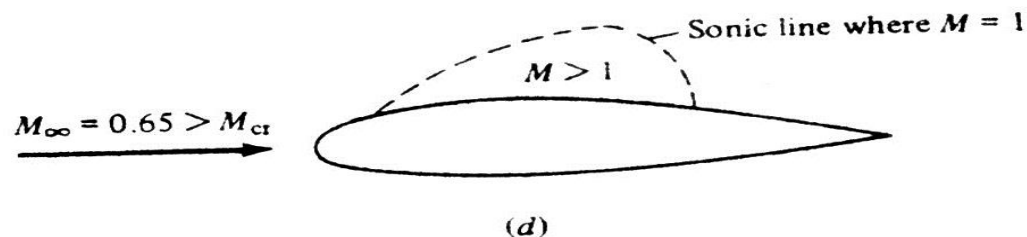
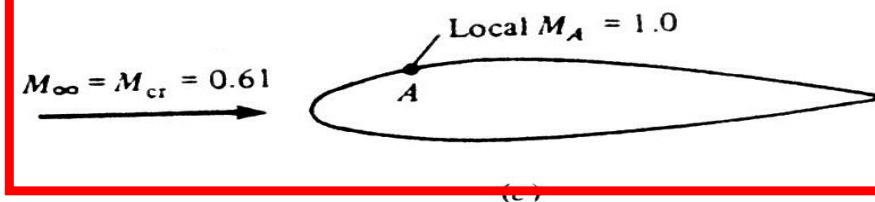
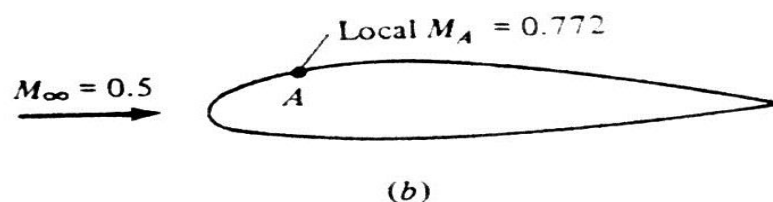
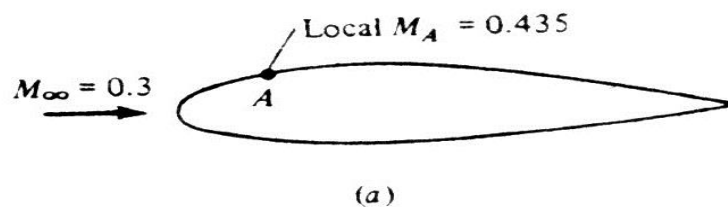
Laitone 公式：

$$C_p = \frac{C_{p,0}}{\sqrt{1-M_\infty^2} + [M_\infty^2 / (1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 / 2\sqrt{1-M_\infty^2})] C_{p,0}} \quad (11.55)$$

Karmen-Tisen和Laitone公式都试图反映高亚声速时流动的非线性特征。

# 临界马赫数的定义

物体表面速度最快点首次达到声速时所对应的自由来流马赫数。



# 临界压强系数的定义与计算

当地马赫数为1时对应的压强系数。

流场中任意一点A的压强系数：

$$C_{p,A} = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \left[ \left( \frac{1 + [(\gamma - 1) / 2] M_{\infty}^2}{1 + [(\gamma - 1) / 2] M_A^2} \right)^{\gamma / (\gamma - 1)} - 1 \right] \quad (11.58)$$

临界压强系数与临界马赫数的关系：

$$C_{p,cr} = \frac{2}{\gamma M_{cr}^2} \left[ \left( \frac{1 + [(\gamma - 1) / 2] M_{cr}^2}{1 + (\gamma - 1) / 2} \right)^{\gamma / (\gamma - 1)} - 1 \right] \quad (11.60)$$

方程(11.60)表明：临界压强系数是临界马赫数的唯一函数

# 临界马赫数的估算

对于薄翼型，可由图11.6估算出其临界马赫数：

1. 翼型在低速不可压绕流下的表面最小压力点的压强系数  $C_{p0}$ 。
2. 用压缩性修正公式得到最小压强系数  $C_p$  随自由来流马赫数  $M_\infty$  的变化曲线B。
3. 求出曲线B与曲线C的交点，对应的横坐标位置就是  $M_{cr}$  的估算值。

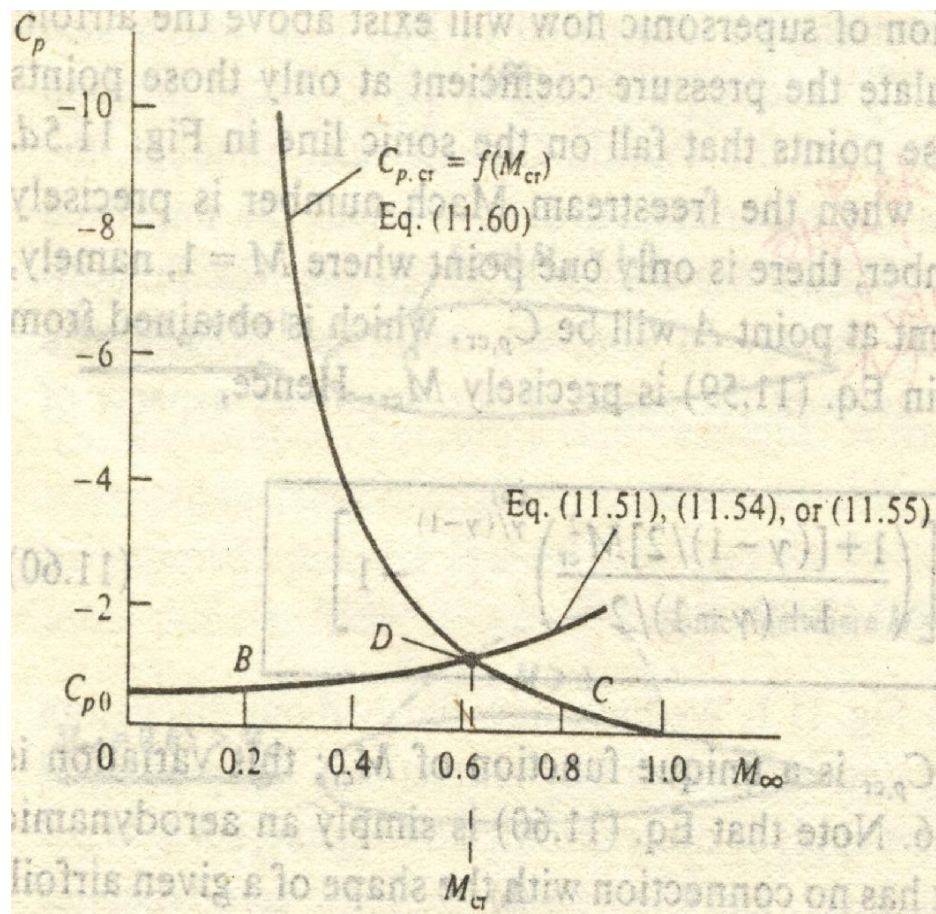


图11.6 临界马赫数的估算

# 翼型厚度对临界马赫数的影响

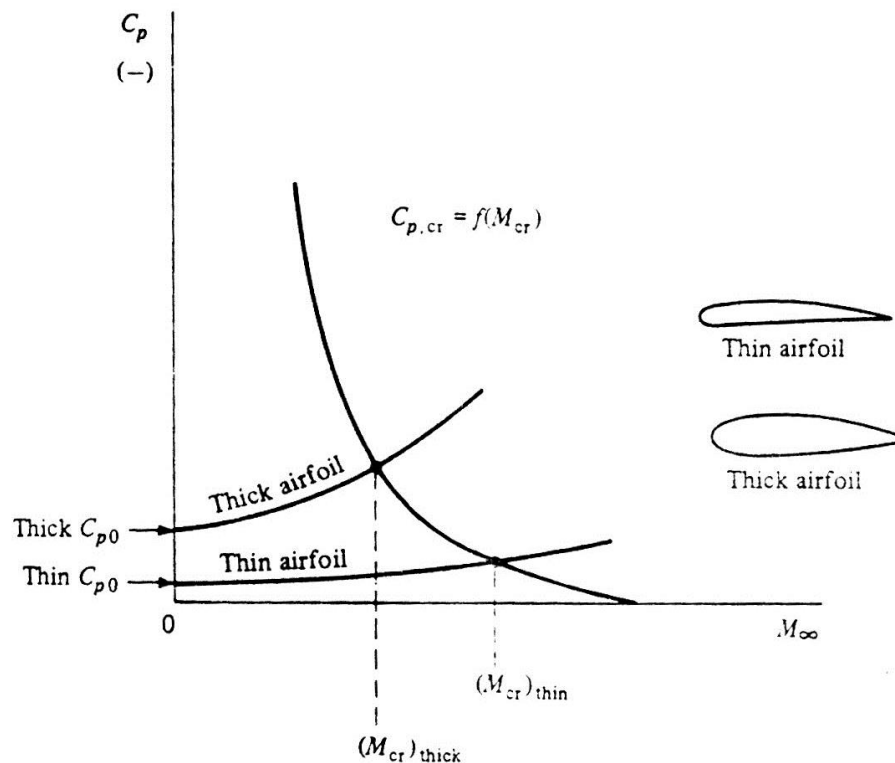


FIGURE 11.7

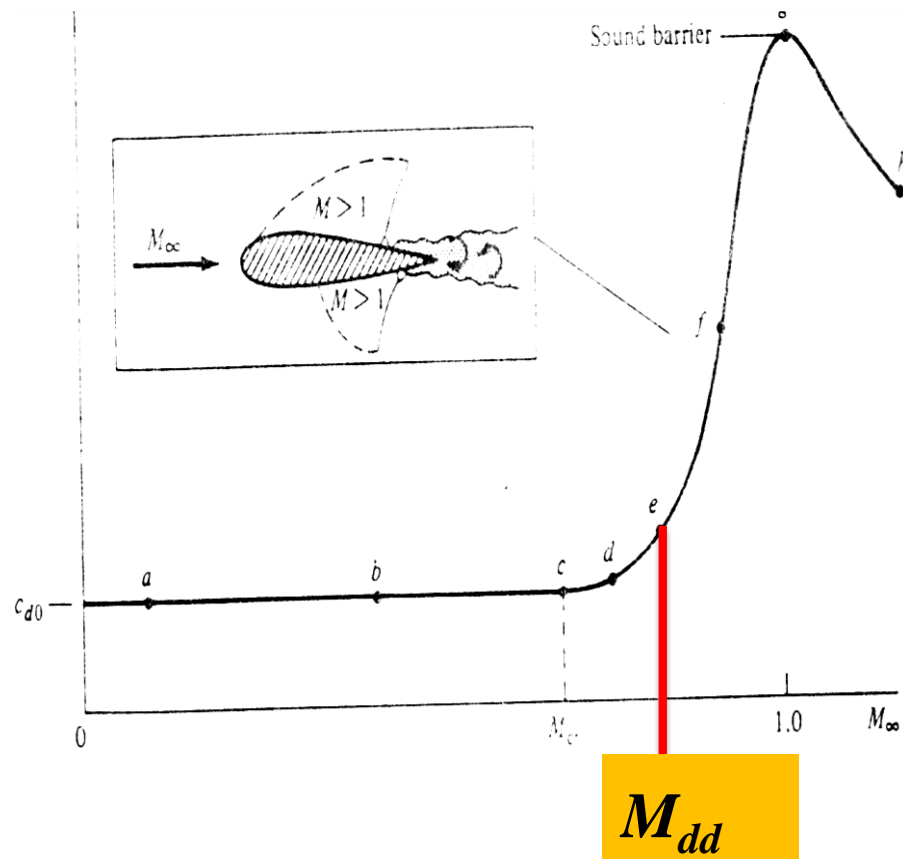
Effect of airfoil thickness on critical Mach number.

**结论：翼型越厚，临界马赫数越小。**



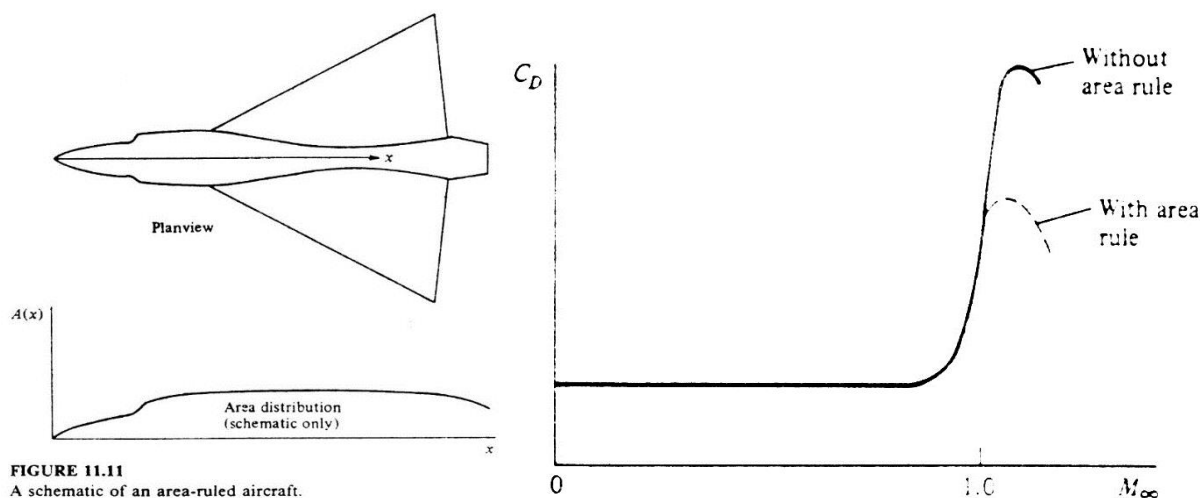
# 阻力发散马赫数的定义

物体受到阻力开始急剧增大时所对应的自由来流马赫数，称为阻力发散马赫数。

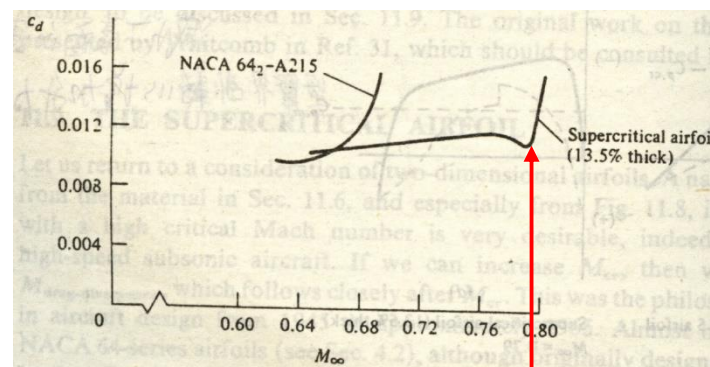
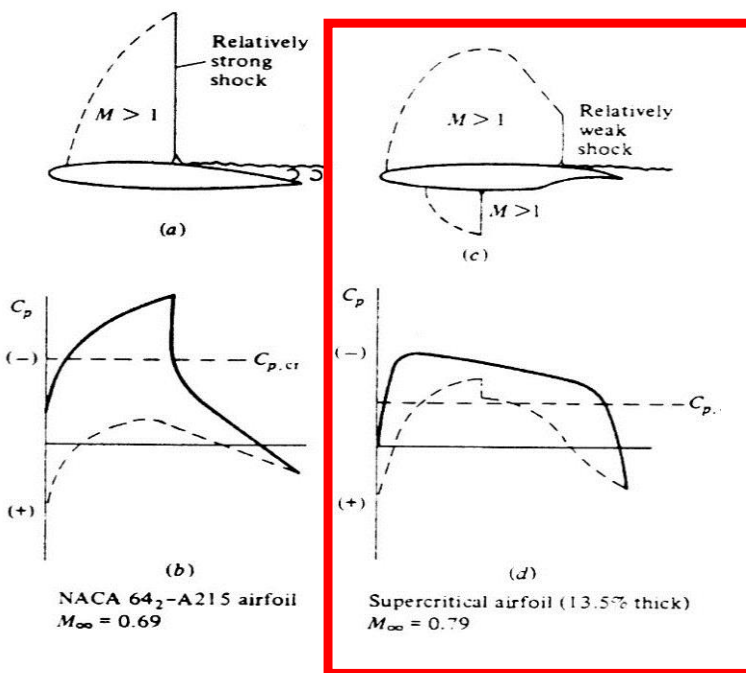


定量确定判据：
$$\left. \frac{\partial c_d}{\partial M_\infty} \right|_{M_{dd}} = 0.1$$

跨声速面积律指出，沿飞机轴线其包括机身，机翼，尾翼的横截面积分布应该是光滑连续的，这样其跨声速阻力可以得到有效减小。



**超临界翼型**是经过特殊设计的翼型,其目的是增大翼型的阻力发散马赫数。

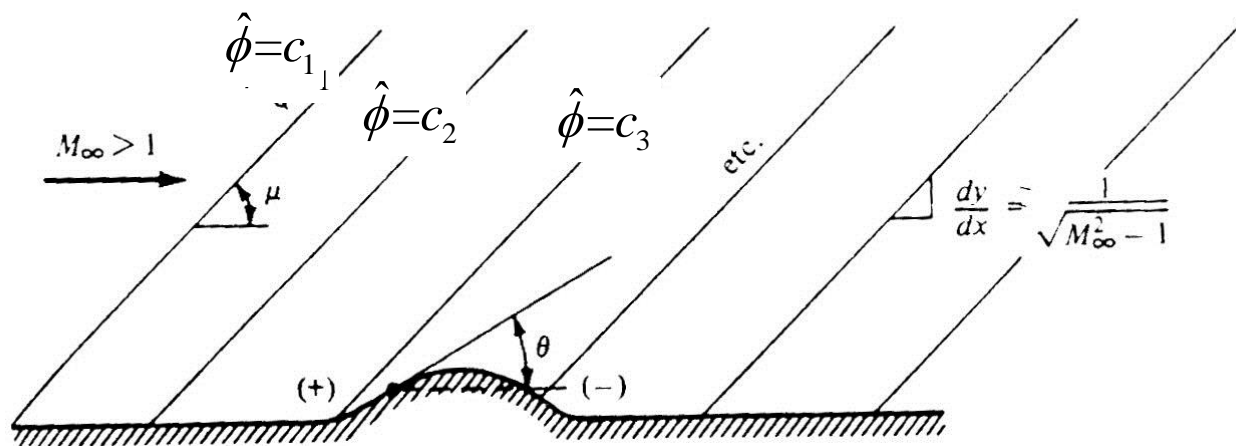


超临界翼型的  $M_{dd}$

# CHAPTER 12 LINERIZED SUPERSONIC FLOW

## 线化超声速流动

$$\hat{\phi} = f(x - \lambda y)$$



## 12.5 SUMMARY

在线化超声速流中，信息沿马赫线传播。这些马赫线的来流夹角为基于 $M_\infty$ 的马赫角， $\mu = \sin^{-1}(1/M_\infty)$ 。物面引起的扰动信息沿这些直的、平行的马赫线向下游传播。因此，在定常超声速流中，扰动不能向上游传播。

基于线化理论，当物面切线方向与来流成一小角 $\theta$ 时，物面的压强系数表达式为：

$$C_p = \frac{2\theta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (12.15)$$

如果物面向来流倾斜， $C_p$  为正；物面向远离来流倾斜， $C_p$  为负。



基于线化超声速理论，小迎角下平板翼型的升力系数和波阻系数分别是时：

$$c_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (12.23)$$

$$c_d = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (12.24)$$

升力系数计算公式(12.23)适用于任意形状薄翼型。而波阻系数还依赖于翼型的中弧线形状和厚度。

Problem 12.5-12.8

**Lecture #20 ended !**  
**Thank you all for your attention!**

