第八章　空间问题的解答

要点：（1）按位移求解空间问题的基本方程

（2）按位移求解空间问题的方法

（3）按应力求解空间问题的基本方程及其应用

（4）等截面直杆的扭转

主 要 内 容

§8-1 按位移求解空间问题（3坐标系）

§8-2 半空间体受重力及均布压力

§ 空心圆球受均布压力

§8-3 半空间体在边界上受法向集中力

§ 半空间体在边界上受法向分布力

§8-4 按应力求解空间问题

半空间受法向集中力/
等截面直杆的纯弯曲（位移的确定）

§8-1　按位移求解空间问题

——　基本方程

1. 按位移求解空间问题的基本思路

（1）取位移分量为基本未知量：

$$u = u(x,y,z),\quad v = v(x,y,z),\quad w = w(x,y,z)$$

（2）将基本方程（15个），都用位移分量 u、v、w 表示；

（3）引入一些位移函数，如：位移势函数 ψ

$$u = \frac{1}{2G}\frac{\partial \psi}{\partial x},\quad v = \frac{1}{2G}\frac{\partial \psi}{\partial y},\quad w = \frac{1}{2G}\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

代入位移表示的平衡微分方程，求出 ψ，再求其余各量。

变求解 u、v、w 三个一般函数，为求 ψ 等特殊函数，如调和函数。

2. 按位移求解空间问题的基本方程

平衡微分方程的位移表示：

将几何方程代入物理方程，有：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1+\mu}\left(\dfrac{\mu}{1-2\mu}e + \varepsilon_x\right) & \tau_{yz} = \dfrac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{yz} \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1+\mu}\left(\dfrac{\mu}{1-2\mu}e + \varepsilon_y\right) & \tau_{zx} = \dfrac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{zx} \\ \sigma_z = \dfrac{E}{1+\mu}\left(\dfrac{\mu}{1-2\mu}e + \varepsilon_z\right) & \tau_{xy} = \dfrac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \end{cases}$$

2. 按位移求解空间问题的基本方程

平衡微分方程的位移表示：

$$
\begin{cases}
\sigma_x = \dfrac{E}{1+\mu}\left(\dfrac{\mu}{1-2\mu}e + \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) \\
\sigma_y = \dfrac{E}{1+\mu}\left(\dfrac{\mu}{1-2\mu}e + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \\
\sigma_z = \dfrac{E}{1+\mu}\left(\dfrac{\mu}{1-2\mu}e + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{cases}
\qquad
\begin{aligned}
\tau_{yz} &= \dfrac{E}{2(1+\mu)}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\
\tau_{zx} &= \dfrac{E}{2(1+\mu)}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\
\tau_{xy} &= \dfrac{E}{2(1+\mu)}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

其中： $e = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$

将方程代入平衡微分方程（7-1），并整理可得：

$$
\begin{cases}
\dfrac{E}{2(1+\mu)}\left(\dfrac{1}{1-2\mu}\dfrac{\partial e}{\partial x}+\nabla^2 u\right)+X=0 \\
\dfrac{E}{2(1+\mu)}\left(\dfrac{1}{1-2\mu}\dfrac{\partial e}{\partial y}+\nabla^2 v\right)+Y=0 \\
\dfrac{E}{2(1+\mu)}\left(\dfrac{1}{1-2\mu}\dfrac{\partial e}{\partial z}+\nabla^2 w\right)+Z=0
\end{cases}
$$

式中：

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

—— 空间问题的 **Laplace** 算子

用位移表示的平衡微分方程

边界条件的位移表示：

位移边界条件：

$$
\begin{aligned}
u_s &= \bar{u} \\
v_s &= \bar{v} \\
w_s &= \bar{w}
\end{aligned}
$$

应力边界条件：

$$
\begin{cases}
l(\sigma_x)_s+m(\tau_{yx})_s+n(\tau_{zx})_s=\bar{X} \\
l(\tau_{xy})_s+m(\sigma_y)_s+n(\tau_{zy})_s=\bar{Y} \\
l(\tau_{xz})_s+m(\tau_{yz})_s+n(\sigma_z)_s=\bar{Z}
\end{cases}
$$

总结：位移表示的平衡方程，与位移表示的边界条件，构成按位移求解空间问题的基本方程。

3. 按位移求解轴对称问题的基本方程（自习部分）

物理方程的位移表示：

轴对称问题的几何方程：

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}$$

将其代入轴对称问题的物理方程，有

$$\boxed{\left\{\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\mu}{1-2\mu}e + \frac{\partial u_r}{\partial r}\right) \\
\sigma_\theta &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\mu}{1-2\mu}e + \frac{u_r}{r}\right) \\
\sigma_z &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\mu}{1-2\mu}e + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
\tau_{zr} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right)
\end{aligned}\right.}$$

其中： $$e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

（轴对称问题的体积应变）

将上式代入轴对称问题的平衡微分方程，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + K_r = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \dfrac{\tau_{rz}}{r} + Z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{E}{2(1+\mu)}\left(\dfrac{1}{1-2\mu}\dfrac{\partial e}{\partial r} + \nabla^2 u_r - \dfrac{u_r}{r^2}\right) + K_r = 0 \\ \dfrac{E}{2(1+\mu)}\left(\dfrac{1}{1-2\mu}\dfrac{\partial e}{\partial z} + \nabla^2 w\right) + Z = 0 \end{cases}}$$

—— 用位移表示的轴对称问题的平衡微分方程

方程与边界条件，构成按位移求解轴对称问题的定解方程。

4. 按位移求解球对称问题的基本方程

球对称问题的几何方程：

$$\varepsilon_R = \frac{du_R}{dR},\quad \varepsilon_T = \frac{u_R}{R}$$

将其代入物理方程（8-32），

$$\begin{cases} \sigma_R = \dfrac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_R + 2\mu\varepsilon_T\right] \\ \sigma_T = \dfrac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[\varepsilon_T + \mu\varepsilon_R\right] \end{cases}$$

得到：

$$\boxed{\begin{cases} \sigma_R = \dfrac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\dfrac{du_R}{dR} + 2\mu\dfrac{u_R}{R}\right] \\ \sigma_T = \dfrac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[\dfrac{u_R}{R} + \mu\dfrac{du_R}{dR}\right] \end{cases}}$$

将上式代入球对称问题的平衡方程（8-32），

$$\boxed{\frac{d\sigma_R}{dR}+\frac{2}{R}(\sigma_R-\sigma_T)+K_R=0}$$

得到：

$$\boxed{\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\frac{d^2u_R}{dR^2}+\frac{2}{R}\frac{du_R}{dR}-\frac{2}{R}u_R\right)+K_R=0}$$

—— 按位移求解球对称问题的基本方程

§8-2 半空间体受重力及均布压力

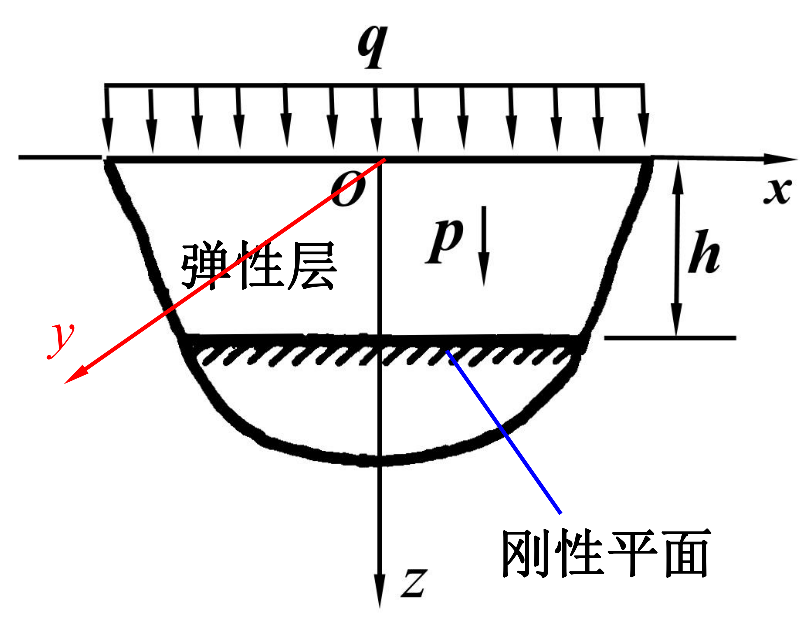
问题的描述：

半无限体 $\begin{cases} \text{上表面自由；} \\ \text{下表面固定。} \end{cases}$ x、y方向无限扩展。

载荷 $\begin{cases} \text{（1）上表面：均布压力 } q \text{ ；} \\ \text{（2）自重（体力）：} Z = p \end{cases}$

$$X = 0, Y = 0$$

求：应力分量、位移分量。



问题的求解：

分析（1） 几何对称，载荷对称， 对称轴为 z 轴。 —— 轴对称问题

即：沿 z 轴所切的平面，其受力情况相同，均为对称平面 。

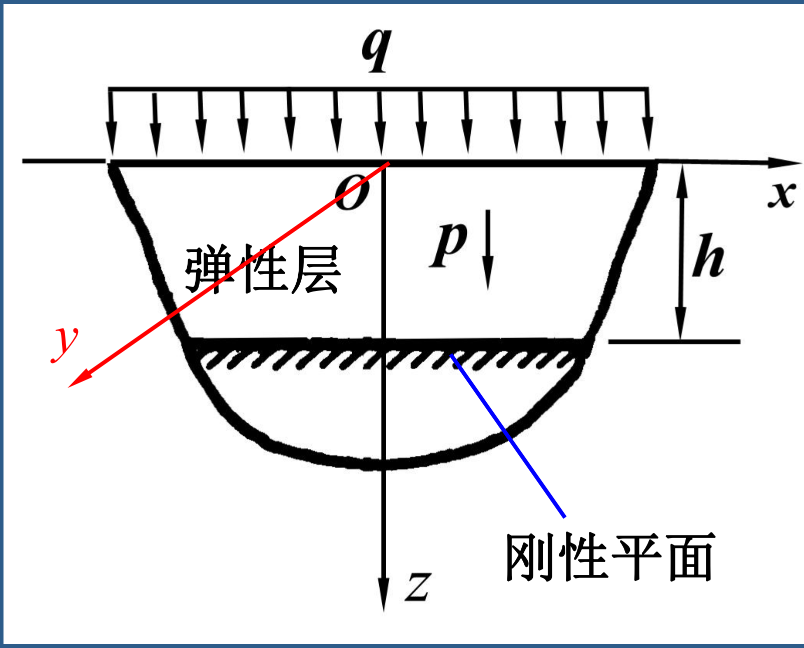
（2） 整个自由面上载荷均匀分布， 可推断：水平方向的各点位移相同。

∵无穷远处水平方向位移为零， ∴可假设：

$$\boxed{u = v \equiv 0, \quad w = w(z)} \qquad \text{(a)}$$

考察位移形式的平衡方程，求 $w(z)$

$$\begin{cases}\dfrac{E}{2(1+\mu)}\left(\dfrac{1}{1-2\mu}\dfrac{\partial e}{\partial x}+\nabla^2 u\right)+X=0\\[2ex]\dfrac{E}{2(1+\mu)}\left(\dfrac{1}{1-2\mu}\dfrac{\partial e}{\partial y}+\nabla^2 v\right)+Y=0\\[2ex]\dfrac{E}{2(1+\mu)}\left(\dfrac{1}{1-2\mu}\dfrac{\partial e}{\partial z}+\nabla^2 w\right)+Z=0\end{cases}$$



（9-2）

式中：

$$e=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{dw}{dz},\quad \frac{\partial e}{\partial x}=\frac{\partial e}{\partial y}=0,\ \frac{\partial e}{\partial z}=\frac{d^2 w}{dz^2},$$

$$\nabla^2 u=\nabla^2 v=0,\ \nabla^2 w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{d^2 w}{dz^2},\quad X=Y=0,$$

显然，方程的前两式自然满足，而第三式变为：

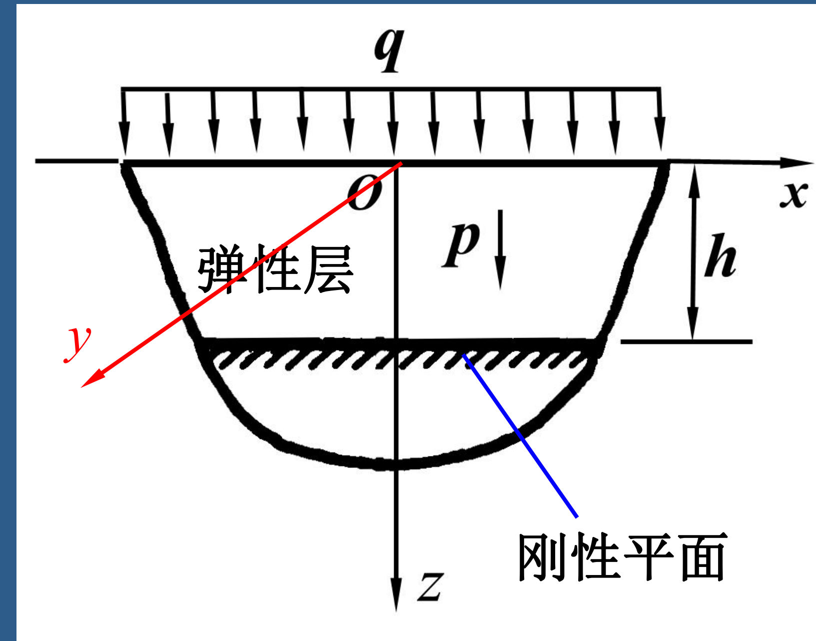
$$\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{1}{1-2\mu}\frac{d^2 w}{dz^2}+\frac{d^2 w}{dz^2}\right)+p=0$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} p \qquad \text{(b)}$$

积分得：

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} p(z+A) \qquad \text{(c)}$$

$$\boxed{w = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2E(1-\mu)} p(z+A)^2 + B} \qquad \text{(d)}$$



式中： A、B 为积分常数，由边界条件确定。

由边界条件确定常数 A、B

应力边界条件：

$$\underbrace{(1)\ \sigma_z\big|_{z=0} = -q,\quad (2)\ w\big|_{z=h} = 0}$$

将其代入应力分量表达式：

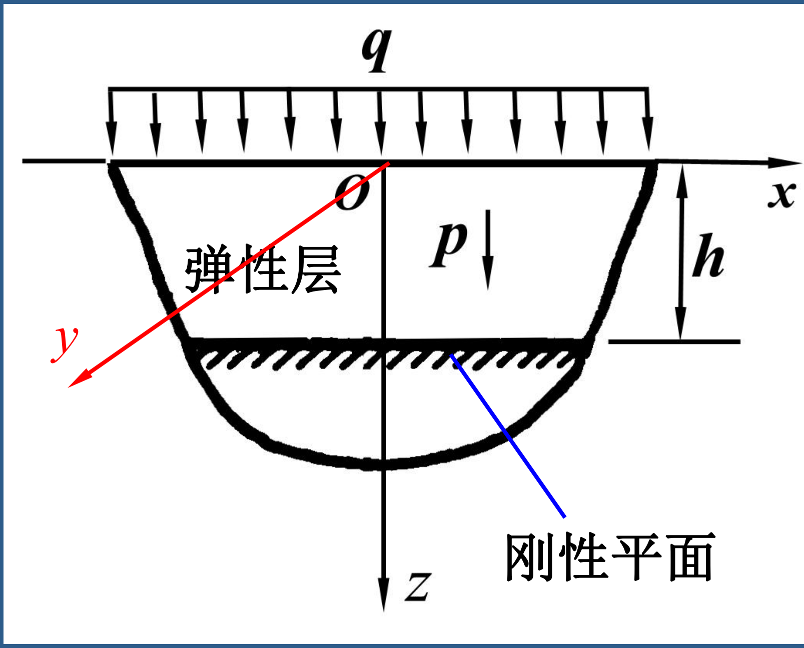
$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\mu}{1-2\mu} e + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\mu}{1-2\mu} e + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\mu}{1-2\mu} e + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E}{1+\mu}\frac{\mu}{1-2\mu} e = \frac{E}{1+\mu}\frac{\mu}{1-2\mu}\frac{dw}{dz} = -\frac{\mu}{1-\mu} p(z+A)$$

$$
\begin{cases}
\sigma_x = \sigma_y = -\dfrac{\mu}{1-\mu} p(z+A) \\
\sigma_z = -p(z+A) \\
\tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0
\end{cases}
\qquad \text{(e)}
$$



由：$\sigma_z\big|_{z=0} = -q$， 得

$$
\sigma_z\big|_{z=0} = -p(0+A) = -q \quad \Rightarrow \quad A = \frac{q}{p}
$$

代回式（e）,有

$$
\boxed{
\begin{cases}
\sigma_x = \sigma_y = -\dfrac{\mu}{1-\mu}(q+pz) \\
\sigma_z = -(q+pz) \\
\tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0
\end{cases}
}
\qquad \text{(f)}
$$

代回式（d）,有

$$
w = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2E(1-\mu)} p\left(z+\frac{q}{p}\right)^2 + B \qquad \text{(g)}
$$

再利用位移边界条件:

$$
w\big|_{z=h} = 0
$$

即:

$$
-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2E(1-\mu)} p\left(h+\frac{q}{p}\right)^2 + B = 0
$$

$$
\Rightarrow \quad B = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2E(1-\mu)} p\left(h+\frac{q}{p}\right)^2
$$

$$\boxed{w=-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}\left[q(h-z)+\frac{p}{2}(h^2-z^2)\right]} \qquad \text{（h）}$$

式（f）和式（h）满足问题的所有定解条件，即该问题的正确解

讨论：

（1） $w_{\max}=w\big|_{z=0}=-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}\left[qh+\frac{p}{2}h^2\right]$ —— 地表沉陷

（2） $\frac{\sigma_x}{\sigma_z}=\frac{\sigma_y}{\sigma_z}=\frac{u}{1-\mu}$ —— 常数（土力学中，称为侧压系数）。

反应水平应力与垂直应力的比。

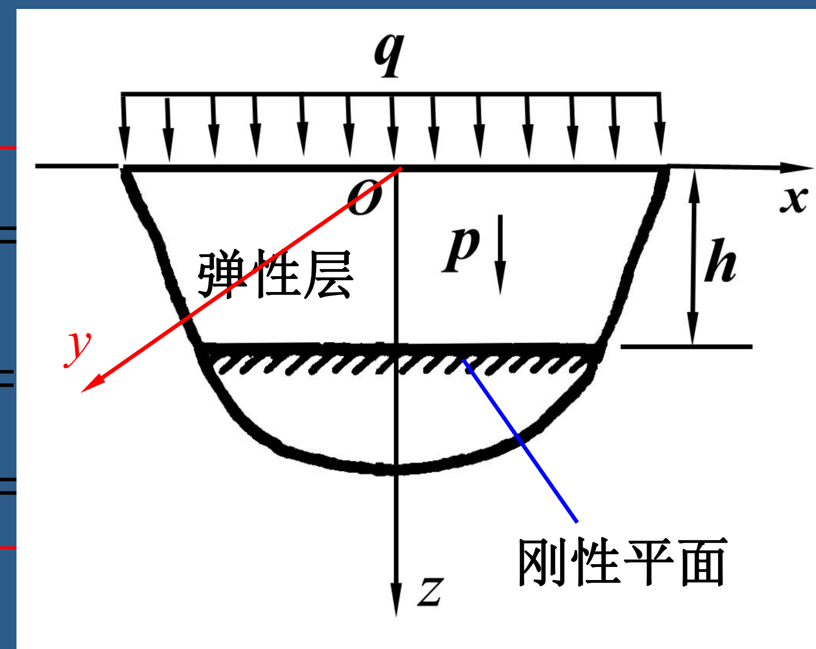
（3） 问题的适用性

$\sigma_x =$

h 与物体的结构、材质有关。

$\sigma_z =$

$\tau_{yz} =$



（4） 若 $p=0$， 有

$$\frac{d^2w}{dz^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} w=Az+B \\ e=\dfrac{dw}{dz}=A \end{cases}$$

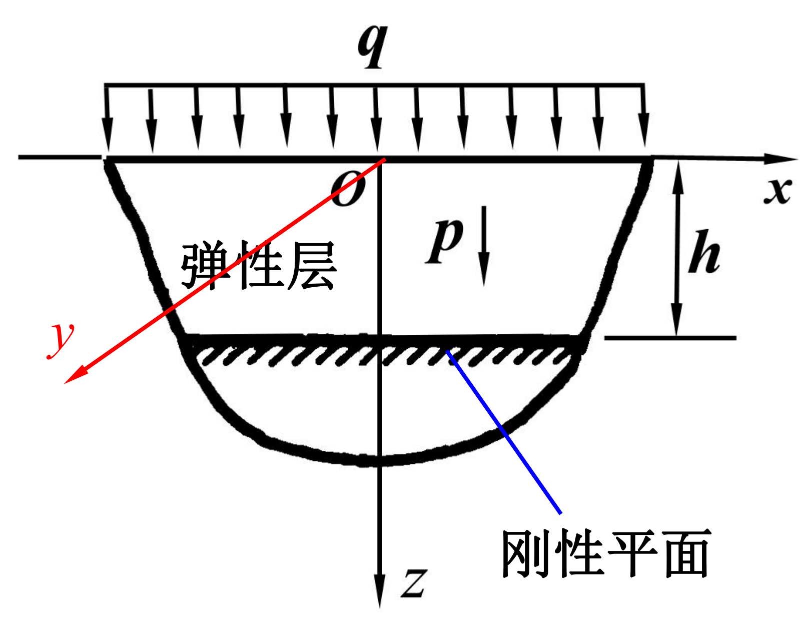
此时，应力分量：

$$\begin{cases} \sigma_x=\sigma_y=\dfrac{E}{1+\mu}\left(\dfrac{\mu}{1-2\mu}A\right) \\ \sigma_z=\dfrac{E}{1+\mu}\left(\dfrac{\mu}{1-2\mu}A+A\right) \\ \tau_{yz}=\tau_{zx}=\tau_{xy}=0 \end{cases}$$

利用边界条件：$\sigma_z\big|_{z=0}=-q$，可得

$$A=-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}q$$

代入前式，得



$$\begin{cases} \sigma_x=\sigma_y=-\dfrac{\mu}{1-\mu}q \\ \sigma_z=-q \\ \tau_{yz}=\tau_{zx}=\tau_{xy}=0 \end{cases}$$

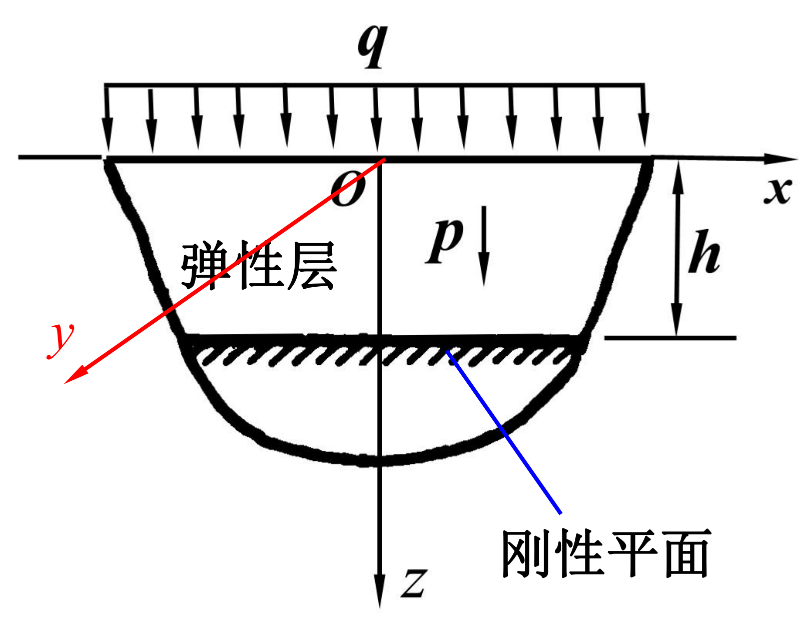
利用边界条件：$w\big|_{z=h}=0$，可得

$$w\big|_{z=h}=Az\big|_{z=h}+B=0$$

$$B=\frac{q(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}h$$

$$w = \frac{q(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}(h-z)$$

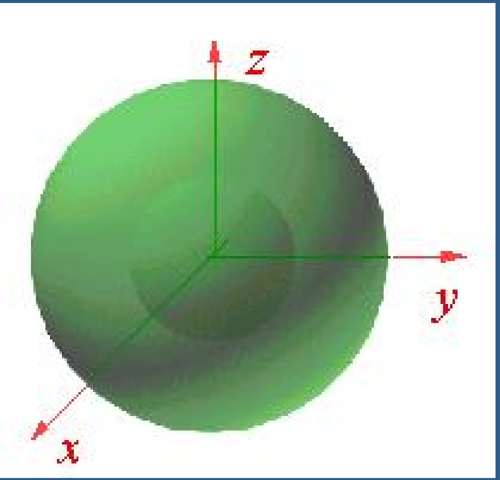
$$w_{\max} = w\big|_{z=0} = \frac{q(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}h$$



§ 空心圆球受均布压力

问题的描述：

$$\boxed{\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\frac{d^2u_R}{dR^2}+\frac{2}{R}\frac{du_R}{dR}-\frac{2}{R}u_R\right)+K_R=0}$$



空心圆球：内径为 a，外径为 b；

载荷：$\begin{cases}\text{内表面受均布压力 } q_a \text{ 作用；}\\ \text{内表面受均布压力 } q_b \text{ 作用；}\\ \text{体力不计。}\end{cases}$ —— 球对称问题

求：应力分量和位移分量。

问题的求解：

当体力不计，$K_R=0$ 时，球对称问题位移形式的平衡方程为

$$\frac{d^2u_R}{dR^2}+\frac{2}{R}\frac{du_R}{dR}-\frac{2}{R}u_R=0$$

——Euler齐次变系数常微分方程

其解为：

$$u_R=AR+\frac{B}{R^2} \qquad \text{（a）}$$

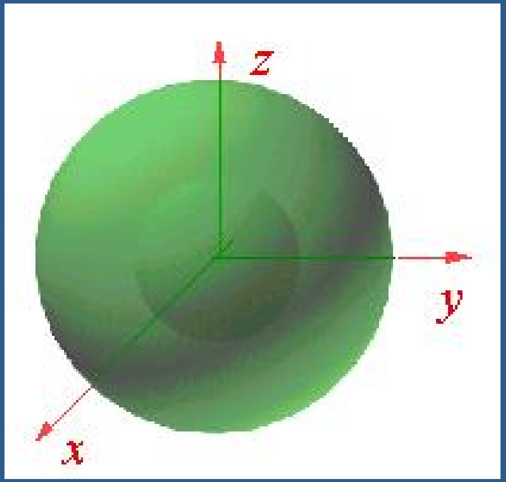
应力分量：

$$\begin{cases}\sigma_R=\dfrac{E}{(1-2\mu)}A-\dfrac{2E}{1+\mu}\dfrac{B}{R^3} & \text{（b）}\\[2ex] \sigma_T=\dfrac{E}{(1-2\mu)}A+\dfrac{2E}{1+\mu}\dfrac{B}{R^3} & \text{（c）}\end{cases}$$

式中：常数A、B由边界条件确定。

应力分量：

$$\left\{\begin{aligned}\sigma_R &= \frac{E}{(1-2\mu)}A - \frac{2E}{1+\mu}\frac{B}{R^3} \qquad \text{(b)}\\ \sigma_T &= \frac{E}{(1-2\mu)}A + \frac{2E}{1+\mu}\frac{B}{R^3} \qquad \text{(c)}\end{aligned}\right.$$



边界条件为：

$$\sigma_R\big|_{R=a} = -q_a, \qquad \sigma_R\big|_{R=b} = -q_b$$

将式（b）代入，得：

$$\frac{E}{(1-2\mu)}A - \underbrace{\frac{2E}{1+\mu}\frac{B}{a^3} = -q_a \qquad \frac{E}{(1-2\mu)}A - \frac{2E}{1+\mu}}\frac{B}{b^3} = -q_b$$

求解得：

$$\left\{\begin{aligned}A &= \frac{a^3q_a - b^3q_b}{E(b^3-a^3)}(1-2\mu),\\ B &= \frac{a^3b^3(q_a-q_b)}{2E(b^3-a^3)}(1+\mu)\end{aligned}\right. \qquad \text{(d)}$$

将其代入位移分量表达式，有

径向位移：

$$u_R=\frac{(1+\mu)R}{E}\left[\frac{\frac{b^3}{2R^3}+\frac{1-2\mu}{1+\mu}}{\frac{b^3}{a^3}-1}q_a-\frac{\frac{a^3}{2R^3}+\frac{1-2\mu}{1+\mu}}{1-\frac{b^3}{a^3}}q_b\right] \qquad \text{(e)}$$

将其代入应力分量表达式（b）（c），有：

$$\left\{\begin{aligned}\sigma_R&=-\frac{\frac{b^3}{R^3}-1}{\frac{b^3}{a^3}-1}q_a-\frac{1-\frac{a^3}{R^3}}{1-\frac{b^3}{a^3}}q_b,\\ \sigma_T&=\frac{\frac{b^3}{2R^3}+1}{\frac{b^3}{a^3}-1}q_a-\frac{1+\frac{a^3}{2R^3}}{1-\frac{b^3}{a^3}}q_b\end{aligned}\right. \qquad \text{(f)}$$

∵不存在各坐标方向的剪应力，∴上述径向应力与切向应力即为主应力。

讨论： （1）若只有内压 q，则

$$u_R=\frac{(1+\mu)R}{E}\frac{\frac{b^3}{2R^3}+\frac{1-2\mu}{1+\mu}}{\frac{b^3}{a^3}-1}q_a=\frac{(1+\mu)qR}{E}\frac{\frac{1}{2R^3}+\frac{1-2\mu}{1+\mu}\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}}$$

$$\sigma_R=-\frac{\frac{b^3}{R^3}-1}{\frac{b^3}{a^3}-1}q=-\frac{\frac{1}{R^3}-\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}}q,\quad \sigma_T=\frac{\frac{b^3}{2R^3}+1}{\frac{b^3}{a^3}-1}q=\frac{\frac{1}{2R^3}+\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}}q$$

（2） 若为无限大弹性体中有小孔，在孔内壁受有内压 q 作用，此时，只需将式中 $b\to\infty$，即可结果：

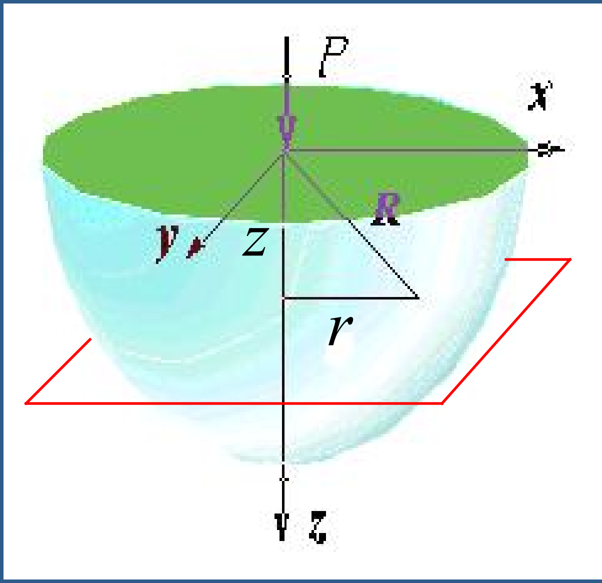
$$u_R=\frac{(1+\mu)qa^3}{2ER^2}\qquad \sigma_R=-\frac{a^3}{R^3}q,\qquad \sigma_T=\frac{a^3}{2R^3}q$$

（a）孔边发生 $q/2$ 切向拉应力， 是引起脆性材料开裂破坏的原因。

（b）实际问题中，b 不一定要求无穷大，∵ u_R、σ_R、σ_T随 R 衰减很快。

§8-3 半空间体在边界上受法向集中力

1. 问题的描述：



(1) 几何形状： 半无限体； 如图建立坐标系。

(2) 载荷：自由面上某一点作用一法向集中力P

—— 空间轴对称问题

(3) 边界条件：

(a) $$\begin{cases} (\sigma_z)_{z=0,r\neq 0} = 0, \\ (\tau_{zr})_{z=0,r\neq 0} = 0, \end{cases}$$

(b) 任意水平面上，z 方向上应力的合力与力 P 平衡：

$$\int_0^\infty (2\pi r dr)\sigma_z + P = 0,$$

—— 由应力边界条件转换来的 平衡条件。

(c) 无穷远处：

$$(\sigma_r)_{R\to\infty} = 0, \quad (\sigma_\theta)_{R\to\infty} = 0, \quad (\sigma_z)_{R\to\infty} = 0, \quad (\tau_{zr})_{R\to\infty} = 0,$$

—— 应力有限条件

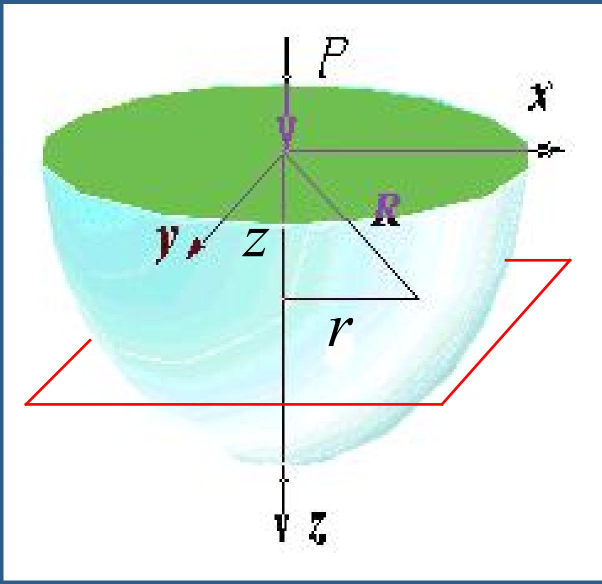
式中： $R = \sqrt{r^2 + z^2}$

2. 问题的求解：

（1）拉甫（Love）位移函数 ζ 的引入：

$$\zeta = \zeta(r, z)$$

方法：因次（量纲）分析法



由应力分量式（9-14）：

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2 - \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\zeta \\ \sigma_\theta = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2 - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\right)\zeta \\ \sigma_z = \dfrac{\partial}{\partial z}\left((2-\mu)\nabla^2 - \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\zeta \\ \tau_{zr} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left((1-\mu)\nabla^2 - \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\zeta \end{cases}$$

（9-14）

$$\underset{(\mathrm{N/m^2})}{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{zr}} \propto \underset{(\mathrm{N})}{P}, \underset{(\mathrm{m})}{r, z(R)}$$

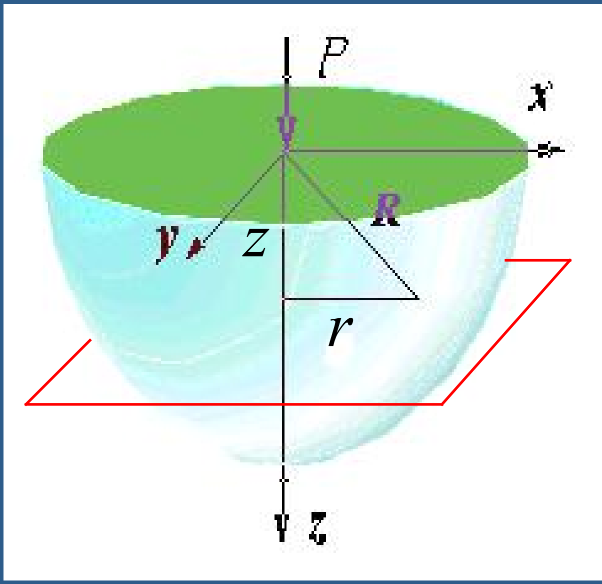
而 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{zr}$ 与位移函数 ζ 为 3 阶偏导数关系，∴位移函数 ζ 应为变量 r、z 或 R 的正一次幂的重调和函数。

初设位移函数 ζ 为：

$$\zeta = A_1 R = A_1\sqrt{r^2 + z^2}$$

（2）计算位移分量和应力分量：

将：$\zeta = A_1 R = A_1\sqrt{r^2+z^2}$ 代入位移分量式（9-13）和应力分量式（9-14），有



$$u_r = -\frac{1}{2G}\frac{\partial^2\zeta}{\partial r\partial z} = \frac{A_1}{2G}\frac{rz}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{A_1}{2G}\frac{rz}{R^3}$$

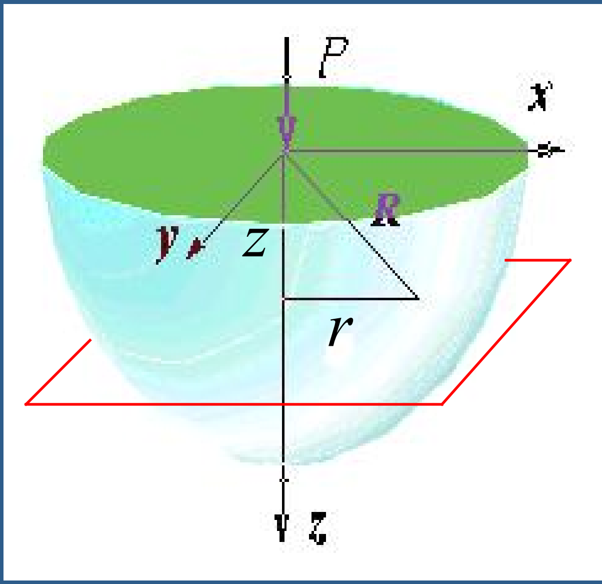
$$w = \frac{1}{2G}\left(2(1-\mu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\zeta = \frac{A_1}{2G}\left(\frac{3-4\mu}{R} + \frac{z^2}{R^3}\right)$$

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\zeta = A_1\left(\frac{(1-2\mu)z}{R^3} - \frac{3r^2 z}{R^5}\right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2 - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\zeta = A_1\frac{(1-2\mu)z}{R^3},$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left((2-\mu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\zeta = -A_1\left(\frac{(1-2\mu)z}{R^3} + \frac{3z^3}{R^5}\right)$$

（2）计算位移分量和应力分量：



将：$\zeta = A_1 R = A_1\sqrt{r^2+z^2}$ 代入位移分量式（9-13）和应力分量式（9-14），有

$$\left\{\begin{aligned}
&u_r = \frac{A_1}{2G}\frac{rz}{R^3}, \qquad w = \frac{A_1}{2G}\left(\frac{3-4\mu}{R} + \frac{z^2}{R^3}\right),\\
&\sigma_r = A_1\left(\frac{(1-2\mu)z}{R^3} - \frac{3r^2 z}{R^5}\right)\\
&\sigma_\theta = A_1\frac{(1-2\mu)z}{R^3},\\
&\sigma_z = -A_1\left(\frac{(1-2\mu)z}{R^3} + \frac{3z^3}{R^5}\right)\\
&\tau_{zr} = -A_1\left(\frac{(1-2\mu)r}{R^3} + \frac{3rz^2}{R^5}\right)
\end{aligned}\right. \qquad \text{(e)}$$

（3）边界条件讨论：

（1）$\left\{\begin{aligned}&(\sigma_r)_{R\to\infty} = 0, (\sigma_\theta)_{R\to\infty} = 0,\\ &(\sigma_z)_{R\to\infty} = 0, \ (\tau_{zr})_{R\to\infty} = 0,\end{aligned}\right.$

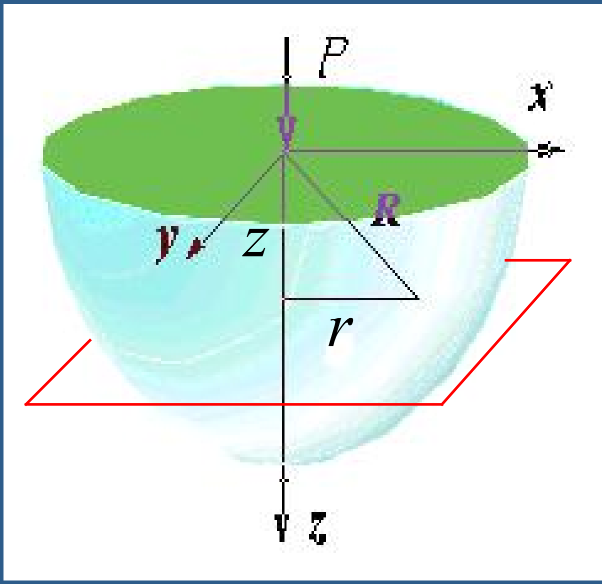
—— 满足

（2） $(\sigma_z)_{z=0,r\neq 0} = 0,$ —— 满足

$$\boxed{(\tau_{zr})_{z=0,r\neq 0} = -\frac{A_1(1-\mu)}{r^2} \neq 0}$$

—— 不满足 （f）

（3）选取轴对称问题的位移势函数 ψ（r,z）



位移势函数 ψ（r,z）选取原则：

使得：$(\sigma_z)_{z=0,r\neq 0}=0,$

使得：$(\tau_{zr})_{z=0,r\neq 0}$ 与 $\boxed{(\tau_{zr})_{z=0,r\neq 0}=-\dfrac{A_1(1-\mu)}{r^2}}$ 抵消

ψ（r,z）选取方法： —— 因次分析法。

位移势函数 ψ（r,z）给出的应力分量：

$$\boxed{\sigma_r=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2},\quad \sigma_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},\quad \sigma_z=\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},\quad \tau_{zr}=\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial r}} \tag{9-12}$$

ψ（r,z）应为r、z 或 R 的零次幂的调和函数， 可取

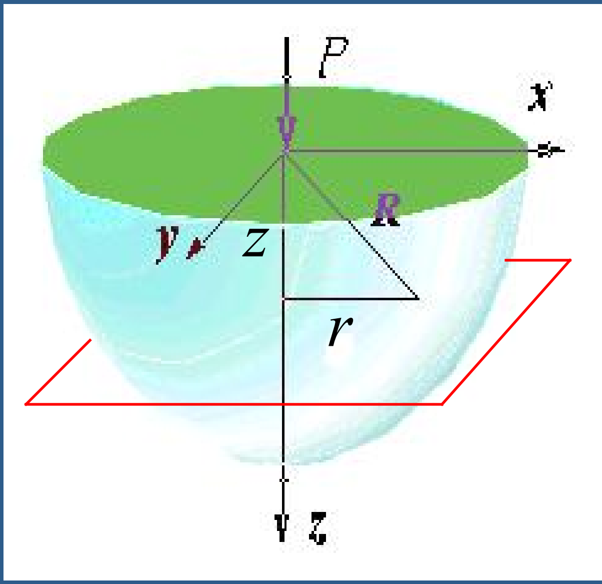
$$\psi=A_2\ln(R+z) \qquad \text{（g）}$$

由式（9-11）得位移分量：

$$u_r=\frac{1}{2G}\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{A_2 r}{2GR(R+z)},\qquad w=\frac{1}{2G}\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{A_2}{2GR}$$

由式（9-12）得应力分量：

$$\boxed{\begin{aligned}&\sigma_r = A_2\left[\frac{z}{R^3}-\frac{1}{R(R+z)}\right],\quad \sigma_\theta=\frac{A_2}{R(R+z)},\\ &\sigma_z=-\frac{A_2 z}{R^3},\qquad \tau_{zr}=-\frac{A_2 r}{R^3}\qquad\qquad \text{（h）}\end{aligned}}$$



就结果（h），对边界条件考察，显然有

（1）$(\sigma_r)_{R\to\infty}=0,\ (\sigma_\theta)_{R\to\infty}=0,\ (\sigma_z)_{R\to\infty}=0,\ (\tau_{zr})_{R\to\infty}=0,$ —— 满足

（2）$(\sigma_z)_{z=0,r\neq 0}=0,$ —— 满足 $(\tau_{zr})_{z=0,r\neq 0}=-\dfrac{A_2}{r^2}\neq 0$ —— 不满足

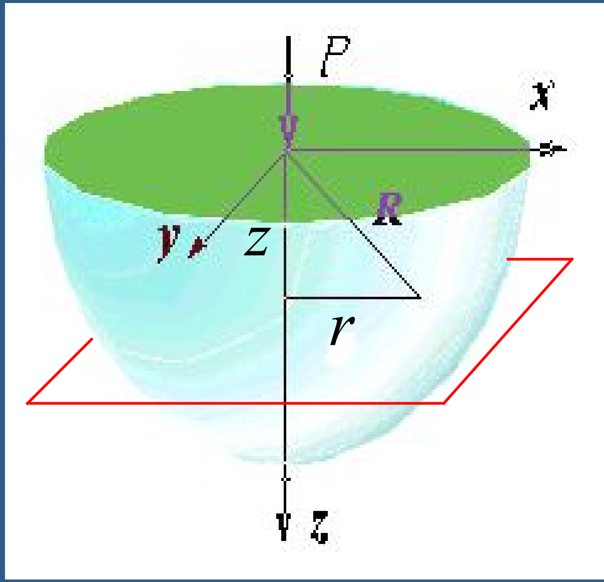
（4）将两者结果叠加，使其满足边界条件求出待定常数。

总位移：

$$u_r=\underbrace{\frac{A_1}{2G}\frac{rz}{R^3}+\frac{A_2 r}{2GR(R+z)},\quad w=\frac{A_1}{2G}\left(\frac{3-4\mu}{R}+\frac{z^2}{R^3}\right)}+\frac{A_2}{2GR}$$

总应力：

$$\begin{cases}\sigma_r = A_1\left(\dfrac{(1-2\mu)z}{R^3}-\dfrac{3r^2z}{R^5}\right)+A_2\left[\dfrac{z}{R^3}-\dfrac{1}{R(R+z)}\right],\\ \sigma_\theta = A_1\dfrac{(1-2\mu)z}{R^3}+\dfrac{A_2}{R(R+z)},\\ \sigma_z = -A_1\left(\dfrac{(1-2\mu)z}{R^3}+\dfrac{3z^3}{R^5}\right)-\dfrac{A_2z}{R^3},\\ \tau_{zr} = -A_1\left(\dfrac{(1-2\mu)r}{R^3}+\dfrac{3rz^2}{R^5}\right)-\dfrac{A_2r}{R^3}\end{cases}$$



由边界条件： $(\tau_{zr})_{z=0,r\neq 0}=0,$

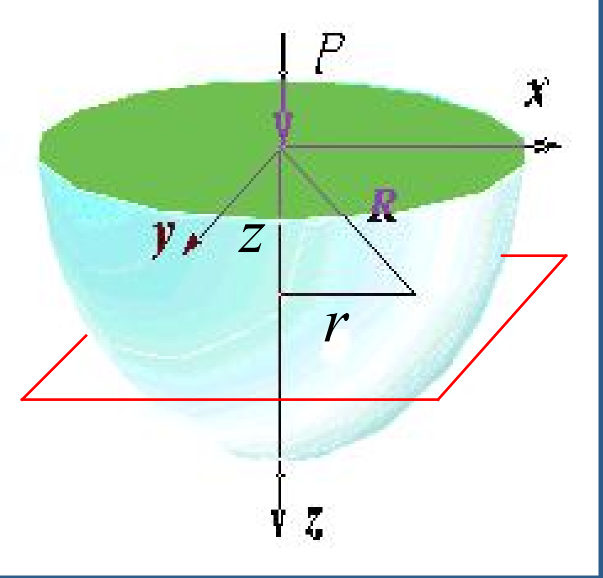
$$-A_1\frac{(1-2\mu)r}{R^3}-\frac{A_2r}{R^3}=0$$

$$\Rightarrow \quad -A_1(1-2\mu)-A_2=0$$

$$\Rightarrow \quad A_1=-\frac{A_2}{(1-2\mu)}$$

$$\sigma_z=-A_2\frac{3z^3}{(1-2\mu)R^5}$$

$$\sigma_z = -A_2 \frac{3z^3}{(1-2\mu)R^5}$$



由平衡条件： $\int_0^{\infty}(2\pi r dr)\sigma_z + P = 0,$

$$-2\pi A_2 \int_0^{\infty}\left[\frac{3z^3}{(1-2\mu)(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right] r dr + P = 0,$$

求得： $A_2 = -\frac{(1-2\mu)}{2\pi}P, \quad A_1 = \frac{P}{2\pi}$

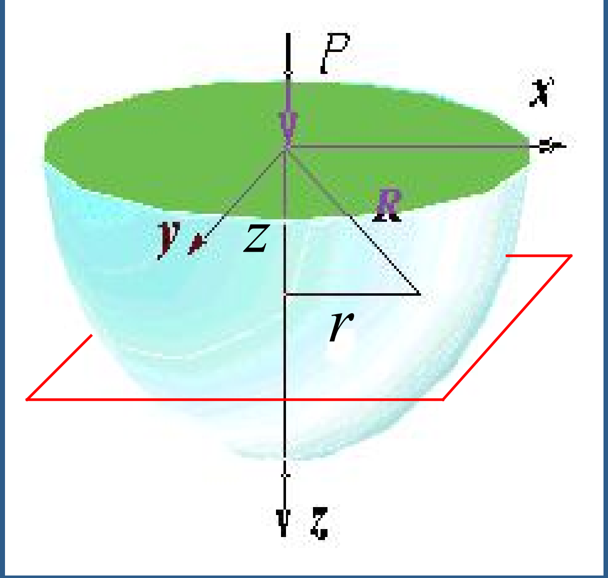
5. 结果：

位移分量：

$$\boxed{\begin{cases} u_r = \dfrac{(1+\mu)P}{2\pi E R}\left[\dfrac{rz}{R^2} - \dfrac{(1-2\mu)r}{(R+z)}\right], \\ w = \dfrac{(1+\mu)P}{2\pi E R}\left[2(1-\mu) + \dfrac{z^2}{R^2}\right] \end{cases}} \quad \text{（8-6）}$$

应力分量：

$$
\begin{cases}
\sigma_r = \dfrac{P}{2\pi R^2}\left(\dfrac{(1-2\mu)R}{R+z} - \dfrac{3r^2 z}{R^3}\right), \\[2ex]
\sigma_\theta = \dfrac{(1-2\mu)P}{2\pi R^2}\left(\dfrac{z}{R} - \dfrac{R}{R+z}\right), \\[2ex]
\sigma_z = -\dfrac{3Pz^3}{2\pi R^5}, \quad \tau_{zr} = \tau_{rz} = -\dfrac{3Prz^2}{2\pi R^5}
\end{cases}
\qquad \text{（8-7）}
$$



讨论：（1） R $\to \infty$，各应力分量趋于零； R $\to 0$ 各应力分量无限大

（2） 水平截面应力与弹性常数无关，其它应力随波松比变化

（3） 水平截面全应力，都指向集中力作用点

小结：

（1）求解的方法步骤：

（a）由因次分析法引入拉甫（Love）位移函数 ζ ；

（b）计算位移分量和应力分量，并考察边界条件的满足情况，确定是否需要增设位移势函数 ψ（r,z）。

（c）由因次分析法引入位移势函数 ψ（r,z），并计算相应的应力与位移分量；

（d）将两者的应力与位移分量叠加，由边界条件确定待定常数，最后得解答；

（2） Love位移函数 ζ 和位移势函数 ψ（r,z）的选取不是唯一的；

如可选取： $\zeta = A\left[R - z\ln(z+R)\right]$

（3） 水平边界上任一点的垂直位移：

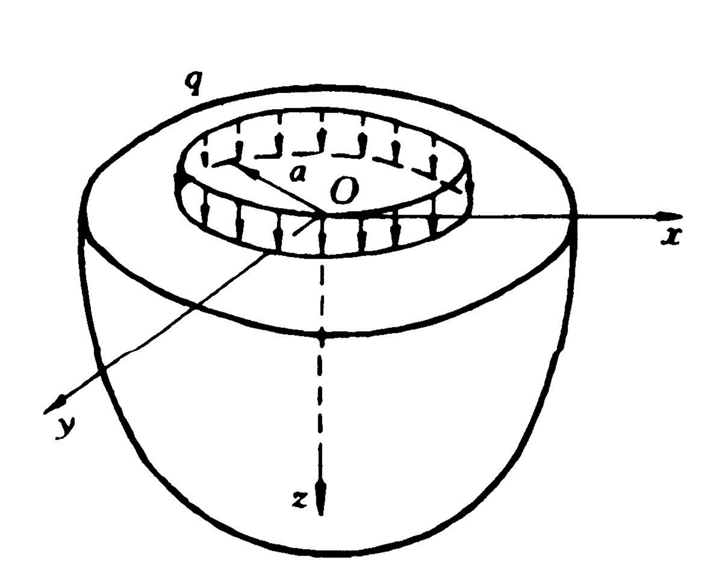
$$\boxed{w\big|_{z=0} = \frac{(1-\mu^2)P}{\pi E r}} \qquad w = \frac{(1+\mu)P}{2\pi E R}\left[2(1-\mu) + \frac{z^2}{R^2}\right]$$

—— 所谓地表沉陷计算公式。

§ 半空间体在边界上受法向分布力

1. 问题

在自由表面某区域内（半径为 a 的圆域）作用有均布压力 q，求：表面某点的垂直位移和体内的应力分布。



2. 求解

方法：利用法向集中力作用的结果叠加求解。

（1）力作用域外一点 M 的垂直位移

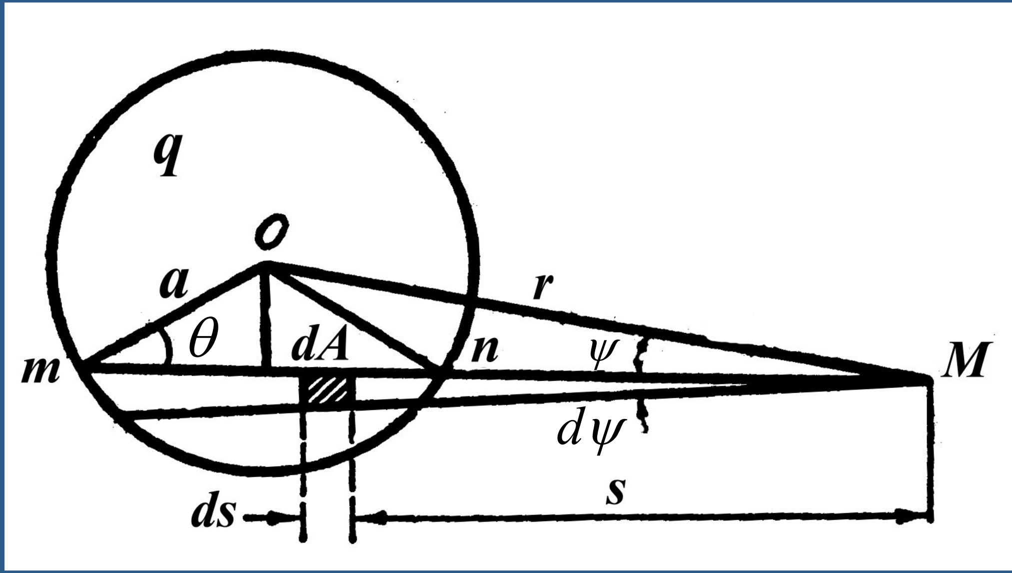
在圆内取一微小面积 dA

$$dA = s\,d\psi\,ds$$

微面积 dA上的力引起M点的垂直位移为：

$$dw = \frac{(1-\mu^2)q\,dA}{\pi E s}$$

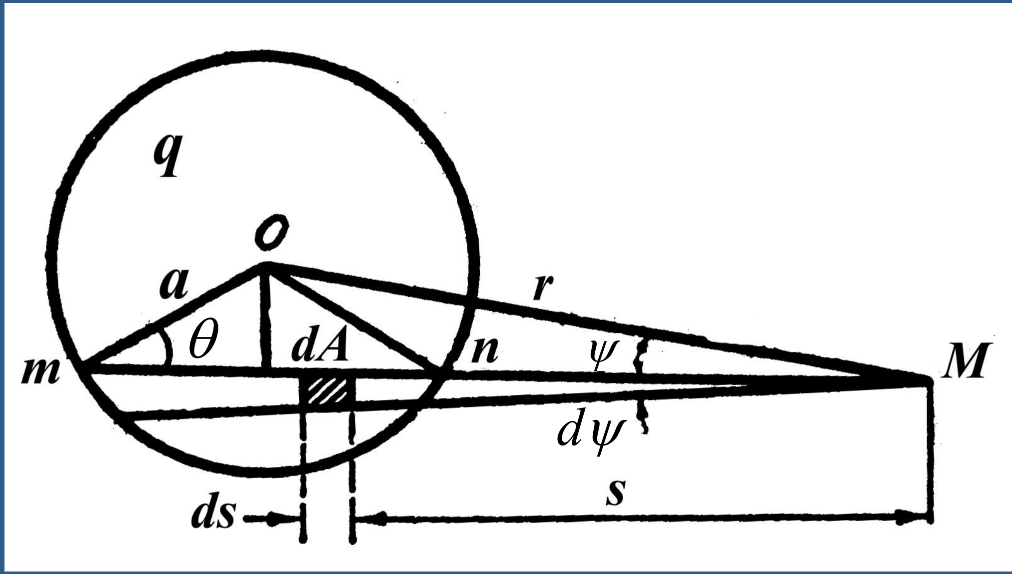
$$\boxed{w\big|_{z=0} = \frac{(1-\mu^2)P}{\pi E r}}$$



$$dw=\frac{(1-\mu^2)qdA}{\pi Es}$$

$$=\frac{(1-\mu^2)qsd\psi ds}{\pi Es}$$

$$=\frac{(1-\mu^2)qd\psi ds}{\pi E}$$



M点的垂直位移可表示为：

$$w=\iint\frac{(1-\mu^2)qd\psi ds}{\pi E}=\frac{(1-\mu^2)q}{\pi E}\iint d\psi ds$$

$$\Rightarrow\quad w=\frac{(1-\mu^2)q}{\pi E}\int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}}\left(\int_{s_n(\psi)}^{s_m(\psi)}ds\right)d\psi$$

注意到：弦 mn 长度为 $2\sqrt{a^2-r^2\sin^2\psi}$；对变量 ψ 具有对称性；有

$$w=2\frac{(1-\mu^2)q}{\pi E}2\int_0^{\psi_1}2\sqrt{a^2-r^2\sin^2\psi}\,d\psi \qquad \text{（a）}$$

式中：ψ_1 为 ψ 的最大值，即圆的切线与 OM 间的夹角。

$$w=2\frac{(1-\mu^2)q}{\pi E}2\int_0^{\psi_1}\sqrt{a^2-r^2\sin^2\psi}\,d\psi \qquad \text{(a)}$$

由于 $a\sin\theta=r\sin\psi$ 所以有

$$d\psi=\frac{a\cos\theta d\theta}{r\cos\psi}=\frac{a\cos\theta d\theta}{r\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}\sin^2\theta}}$$

将其代入式（a）,有

$$w=\frac{4(1-\mu^2)q}{\pi E}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\cos^2\theta}{\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}\sin^2\theta}}d\theta$$

课本P178-179

$$\boxed{w=\frac{4(1-\mu^2)qr}{\pi E}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}\sin^2\theta}\,d\theta-\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}\sin^2\theta}}\right]}$$

等式右侧为椭圆积分，它的积分数值可查手册得到。 （9-20）

§8-4 按应力求解空间问题

1. 概述

基本未知量： $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ —— 6个未知量；

基本方程：

（1）平衡方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \qquad (7\text{-}1)$$

（2）几何方程：

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \qquad (7\text{-}8)$$

（3）物理方程：

$$
\left\{
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \qquad & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz} \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right] \qquad & \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{zx} \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \qquad & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned}
\right.
\tag{7-12}
$$

按应力求解空间问题的思路：

在15个方程中，消去位移未知量： u、v、w，形变未知量：ε_x ε_y ε_z γ_{yz} γ_{zx} γ_{xy}，得只含有应力未知量： σ_x σ_y σ_z τ_{yz} τ_{zx} τ_{xy} 的方程，求解其方程得应力解，然后再求出其余未知量。

2. 按应力求解空间问题的基本方程

（1）空间的变形协调方程

$$\begin{cases}\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases} \quad \text{7-8）}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial z^2},$$

显然有：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\end{cases} \quad \text{（8-10）}$$

—— 同平面内的变形协调方程

（用应变表示的相容方程）

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z},\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

将上述3个剪应变方程分别对 x、y、z **求导：**

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}=\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x},\quad \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right]=-\cancel{\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}}-\cancel{\frac{\partial^3 v}{\partial z\partial x^2}}+\frac{\partial^3 u}{\partial z\partial y\partial x}+\cancel{\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}}$$

$$+\cancel{\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial z}}+\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial z\partial x}=2\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial z\partial x}=2\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right]=2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\partial z}$$

同理，可得另外两个协调方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x}\left[-\dfrac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right]=2\dfrac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z} \\
\dfrac{\partial}{\partial y}\left[-\dfrac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\dfrac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right]=2\dfrac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x} \\
\dfrac{\partial}{\partial z}\left[-\dfrac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\dfrac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right]=2\dfrac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}
\end{cases}
\qquad (8\text{-}11)
$$

—— 不同平面内的变形协调方程（相容方程）

通过以上类似的微分运算，还可导出无数个变形协调方程，它们都是形变分需满足的方程。但是，可以证明，如果6个应变分量满足了式（9-29）式（9-30）就可以保证位移分量的存在，即可用几何方程完全确定所有的位移分量。（注：对多连体问题，还需满足位移单值条件。）

（2）空间的应力相容方程

将物理方程（7-12）代入应变协调方程（8-10）、（8-11），并整理可以得到：

对式（），有

$$\begin{cases} (1+\mu)\left(\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y^2}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\right)=2(1+\mu)\frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial y\partial z} \\ (1+\mu)\left(\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial z^2}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\right)=2(1+\mu)\frac{\partial^2\tau_{zx}}{\partial z\partial x} \\ (1+\mu)\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\right)=2(1+\mu)\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} \end{cases} \qquad \text{(c)}$$

对式（），有

$$\begin{cases} (1+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left[(1+\mu)\sigma_x-\mu\Theta\right] \\ (1+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\left[(1+\mu)\sigma_y-\mu\Theta\right] \\ (1+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[(1+\mu)\sigma_z-\mu\Theta\right] \end{cases} \qquad \text{(d)}$$

利用平衡方程（7-1），进一步将式（c）、式（d）化简得

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(1+\mu)\nabla^2\sigma_x+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=-\frac{1+\mu}{1-\mu}\left[(2-\mu)\frac{\partial X}{\partial x}+\mu\frac{\partial Y}{\partial y}+\mu\frac{\partial Z}{\partial z}\right]\\
&(1+\mu)\nabla^2\sigma_y+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}=-\frac{1+\mu}{1-\mu}\left[(2-\mu)\frac{\partial Y}{\partial y}+\mu\frac{\partial Z}{\partial z}+\mu\frac{\partial X}{\partial x}\right]\\
&(1+\mu)\nabla^2\sigma_z+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=-\frac{1+\mu}{1-\mu}\left[(2-\mu)\frac{\partial Z}{\partial z}+\mu\frac{\partial X}{\partial x}+\mu\frac{\partial Y}{\partial y}\right]\\
&(1+\mu)\nabla^2\tau_{yz}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z}=-(1+\mu)\left(\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\\
&(1+\mu)\nabla^2\tau_{zx}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z\partial x}=-(1+\mu)\left(\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\\
&(1+\mu)\nabla^2\tau_{xy}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y}=-(1+\mu)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}\right)
\end{aligned}
\right.
\qquad (8\text{-}12)
$$

——空间应力相容方程

——密切尔（J. H. Michell）方程

在常体力情况下，相容方程变为：

$$
\left\{\begin{aligned}
&(1+\mu)\nabla^2\sigma_x+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=0\\
&(1+\mu)\nabla^2\sigma_y+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}=0\\
&(1+\mu)\nabla^2\sigma_z+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=0\\
&(1+\mu)\nabla^2\tau_{yz}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z}=0\\
&(1+\mu)\nabla^2\tau_{zx}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z\partial x}=0\\
&(1+\mu)\nabla^2\tau_{xy}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y}=0
\end{aligned}\right. \qquad (8\text{-}13)
$$

—— 贝尔特拉密（E. Beltrami）方程

讨论：

（1）对空间问题，6个应力分量若满足平衡方程（7-1）、相容方程（8-12）或（8-13）和边界条件，即为正确解。

（对多连体问题还需满足位移单值条件）

（2）平衡方程（7-1）、相容方程（8-12）或（8-13）和边界条件(7-5)构成按应力求解空间问题的基本方程。

（3）一般只适用于求解应力边界条件问题。对位移边界条件和混合边界条件问题不太适用。

3. 按应力求解空间轴对称问题

（1）按应力求解空间轴对称问题的基本方程

未知量：$\sigma_r = \sigma_r(r,z),\ \sigma_\theta = \sigma_\theta(r,z),\ \sigma_z = \sigma_z(r,z),\ \tau_{zr} = \tau_{zr}(r,z)$

平衡方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + K_r = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \dfrac{\tau_{rz}}{r} + Z = 0 \end{cases} \qquad (8\text{-}22)$$

当无体力时，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \dfrac{\tau_{rz}}{r} = 0 \end{cases} \qquad (\text{a})$$

应力相容方程（无体力情形）：

利用轴对称问题的几何方程得变形协调方程，再将物理方程代入整理有

应力相容方程（无体力情形）：

$$\left\{\begin{aligned}&\nabla^2\sigma_r+\frac{1}{r^2}(\sigma_\theta-\sigma_r)+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2}=0\\&\nabla^2\sigma_\theta+\frac{1}{r^2}(\sigma_r-\sigma_\theta)+\frac{1}{1+\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r}=0\\&\nabla^2\sigma_z+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=0\\&\nabla^2\tau_{zr}-\frac{\tau_{zr}}{r^2}+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z\partial r}=0\end{aligned}\right.\qquad\text{（b）}$$

其中： $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ $\qquad\Theta=\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z$

结论：轴对称问题的平衡方程（a）、应力相容方程（b）和边界条件构成了按应力求解轴对称问题的基本方程。

（2）按应力求解空间轴对称问题的方法 —— 应力函数法

引入一个 应力函数法： $\varphi = \varphi(r, z)$

使应力函数 φ 与应力分量：$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{zr}$ 间存在某种微分关系，同时满足平衡方程， 再由相容方程等确定 φ 的具体形式。

令：

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right) \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left((2-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) \\ \tau_{zr} &= \frac{\partial}{\partial r}\left((1-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) \end{aligned}\right.} \quad \text{(c)}$$

将其代入平衡方程（a）：

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \end{aligned}\right. \quad \text{(a)}$$

得到： 第一式恒满足；

第二式简化为：

$$\boxed{\nabla^2\nabla^2\varphi = \nabla^4\varphi = 0} \quad \text{(d)}$$

将其代入相容方程（b），也都满足。

于是得到结论：

空间轴对称问题按应力求解，可转化为寻求一重调和函数φ，即

$$\nabla^4\varphi = 0 \qquad \text{（d）}$$

使应力分量式（c）给出应力分量满足问题的边界条件（多连体问题还需满足位移单值条件）。

（3）常用重调和函数：

$$\varphi = C_1\ln r + C_2 z\ln r + C_3 z^2\ln r + C_4 z^3\ln r$$
$$= \left(C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + C_4 z^3\right)\ln r$$

$$\varphi = C_1 z + C_2 r^2 + C_3 z^2 + C_4 r^2 z + C_4 z^3$$

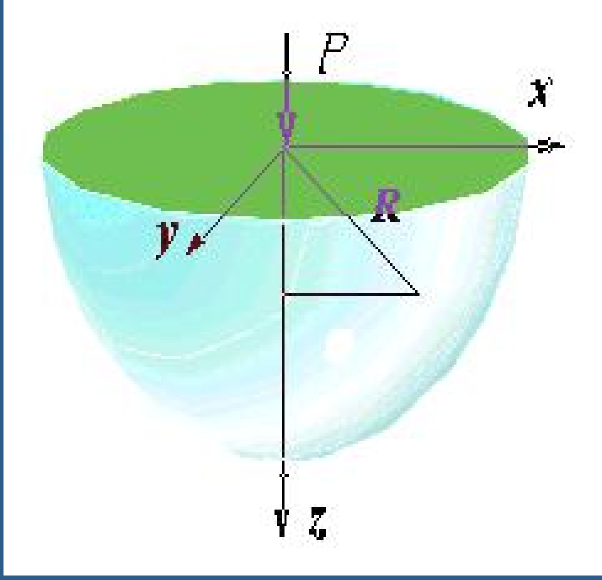
$$\varphi = C(r^2+z^2)^n \qquad (n = -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$$

$$\varphi = C(r^2+z^2)^n z \qquad (n = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$$

$$\varphi = C\left[(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}z^2 - \frac{1}{3}(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$\varphi = Cz\ln\frac{\sqrt{r^2+z^2}-z}{\sqrt{r^2+z^2}+z}$$

（4）按应力求解半空间体边界上受法向集中力P



边界条件：

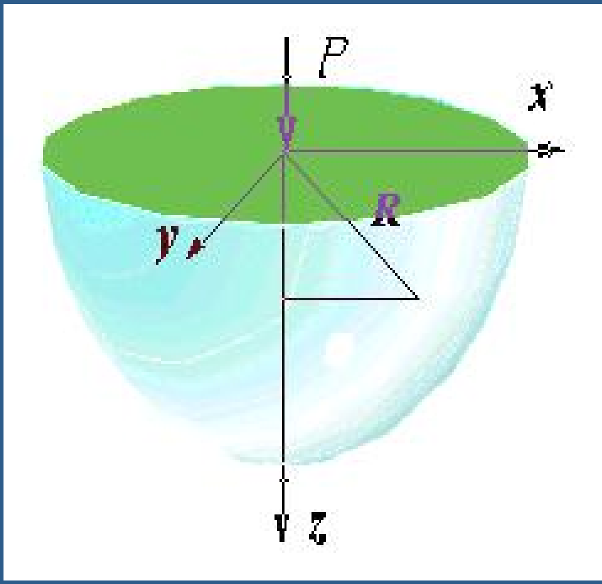
（1） $\left(\sigma_r,\sigma_\theta,\sigma_z,\tau_{zr}\right)_{R\to\infty}=0$

（2） $\begin{cases} \sigma_z\Big|_{\substack{z=0\\r\neq 0}}=0 \\ \tau_{zr}\Big|_{\substack{z=0\\r\neq 0}}=0 \end{cases}$

（3） $\int_0^\infty\left(2\pi r\sigma_z\right)dr+P=0$

确定应力函数：　　（方法：分析法）

由应力分量与应力函数 φ 的关系为三阶导数，同时，考虑到应力分量量纲与载荷 P 的量纲关系，应力函数 φ 应为 r、z、R 的一次幂关系。



可设：

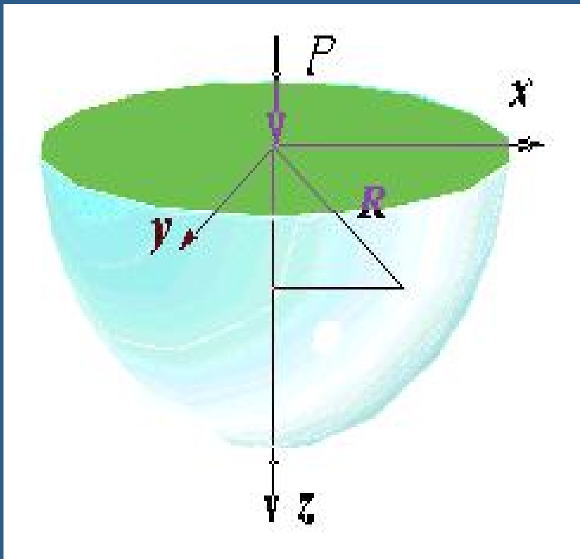
$$\boxed{\varphi = C_1 z \ln r + C_2 \left(r^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}} + C_3 z \ln \frac{\sqrt{r^2+z^2} - z}{\sqrt{r^2+z^2} + z}}$$

其中：C_1、C_2、C_3 为待定常数。

将其代入应力分量式（c）有：

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mu \nabla^2 \varphi - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right) \\ \sigma_\theta = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mu \nabla^2 \varphi - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \\ \sigma_z = \dfrac{\partial}{\partial z}\left((2-\mu)\nabla^2 \varphi - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) \\ \tau_{zr} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left((1-\mu)\nabla^2 \varphi - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) \end{cases}$$

将其代入应力分量式（c）有：



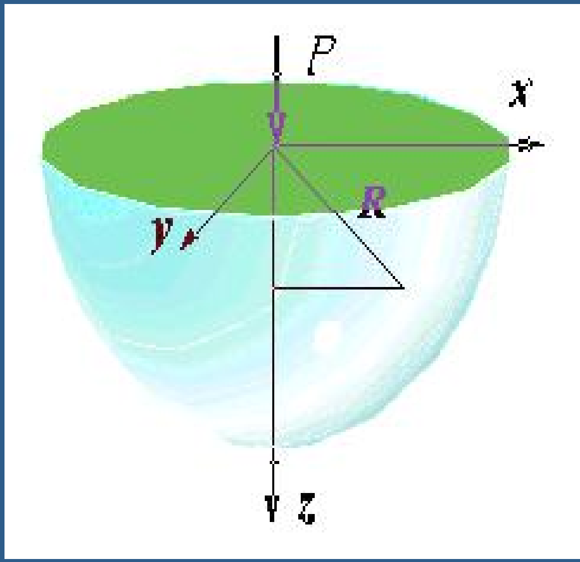
$$
\left\{
\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{C_1}{r^2} + C_2\left[\frac{(1-2\mu)z}{R^3} - \frac{3r^2 z}{R^5}\right] \\
&\quad + C_3\left[\frac{4\mu z}{R^3} + \frac{2z}{r^2 R} + \frac{6r^2 z}{R^5}\right] \\
\sigma_\theta &= -\frac{C_1}{r^2} + C_2\frac{(1-2\mu)z}{R^3} + C_3\left[\frac{4\mu z}{R^3} - \frac{2z}{r^2 R} - \frac{2z}{R^5}\right] \\
\sigma_z &= C_2\left[-\frac{(1-2\mu)z}{R^3} - \frac{3z^3}{R^5}\right] + C_3\left[-\frac{4\mu z}{R^3} + \frac{6z^3}{R^5}\right] \\
\tau_{zr} &= C_2\left[-\frac{(1-2\mu)r}{R^3} - \frac{3rz^2}{R^5}\right] + C_3\left[-\frac{4\mu r}{R^3} + \frac{6rz^2}{R^5}\right]
\end{aligned}
\right.
$$

显然，当$R\to\infty$时，各应力分量都趋于零，满足无穷远处应力有限的条件。

由边界条件（2）、（3）：

（2） $\begin{cases} \sigma_z\big|_{\substack{z=0\\ r\neq 0}} = 0 \\ \tau_{zr}\big|_{\substack{z=0\\ r\neq 0}} = 0 \end{cases}$

（3） $$\int_0^{\infty}(2\pi r\sigma_z)dr + P = 0$$



可确定常数得：

$$C_1 = \frac{(1-2\mu)}{2\pi}P,\ C_2 = \frac{\mu}{\pi}P,\ C_3 = -\frac{(1-2\mu)}{4\pi}P$$

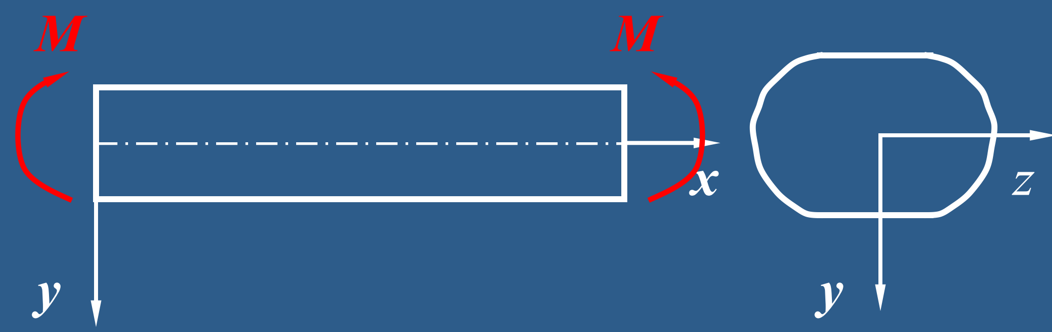
代回应力分量式，得最后结果：

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{2\pi R^2}\left(\frac{(1-2\mu)R}{R+z} - \frac{3r^2 z}{R^3}\right), \\ \sigma_\theta &= \frac{(1-2\mu)P}{2\pi R^2}\left(\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z}\right), \\ \sigma_z &= \frac{3Pz^3}{2\pi R^5},\quad \tau_{zr} = -\frac{3Prz^2}{2\pi R^5} \end{aligned}}$$

—— 同位移解法结果

§ 等截面直杆的纯弯曲

1. 问题的描述



图示等截面直杆，y、z 分别为截面的两对称轴；两端受有相等相反的弯矩 M 作用，并作用在纵向对称平面内；

不计体力，即 $X = Y = Z = 0$；

材料力学解答：

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0,$$
$$\tau_{yz} = 0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \tag{9-33}$$

其中：I 为横截面关于 z 轴的惯矩。

求：（1）考察该解的正确性；

（2）求位移分量；

2. 问题的求解

应力分量：

（1）考察该解是否满足平衡方程、相容方程

将式（9-33）代入平衡方程（8-1）、应力相容方程（9-32），可知是满足的。

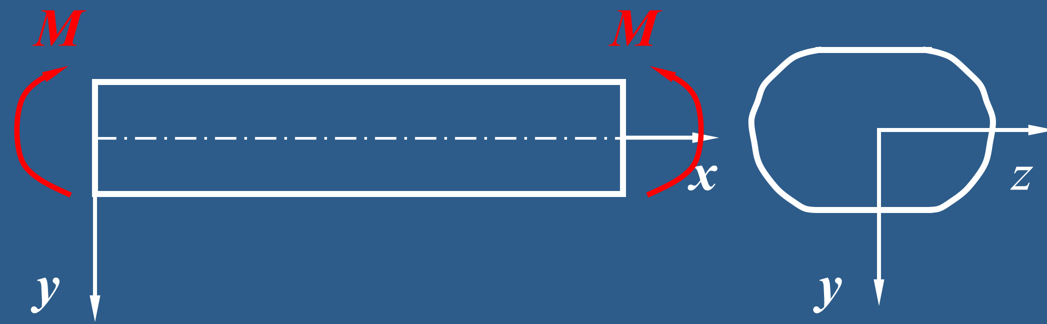
（2）考察该解是否满足边界条件

侧面：（$l = 0$）

$$\overline{X} = \overline{Y} = \overline{Z} = 0$$

—— 显然满足

杆的右端：（$l=1$，$m=n=0$）



$$\sigma_x = \overline{X}, \quad \overline{Y} = \overline{Z} = 0$$

因为面力 $\overline{X}$ 必须合成为弯矩，所以，应有

$$\begin{cases} \int \overline{X} dA = \int \sigma_x dA = 0, & \text{(a)} \\ \int \overline{X} z dA = \int \sigma_x z dA = 0, & \text{(b)} \\ \int \overline{X} y dA = \int \sigma_x y dA = M, & \text{(c)} \end{cases}$$

将式（9-33）代入式（a）得

$$\int \frac{M}{I} y dA = 0,$$

∵z 轴过截面形心，所以有

$$\int y dA = 0$$

—— 式（a）满足。

将式（9-33）代入式（b）,有

$$\int \sigma_x z dA = \int \frac{M}{I} yz dA = 0$$

∵xz 为主惯性平面，所以有

$$\int yz dA = 0$$

—— 式（b）满足。

将式（9-33）代入式（c）,有

$$\int \sigma_x y dA = \int \frac{M}{I} y^2 dA = M,$$

因为：$\int y^2 dA = I,$

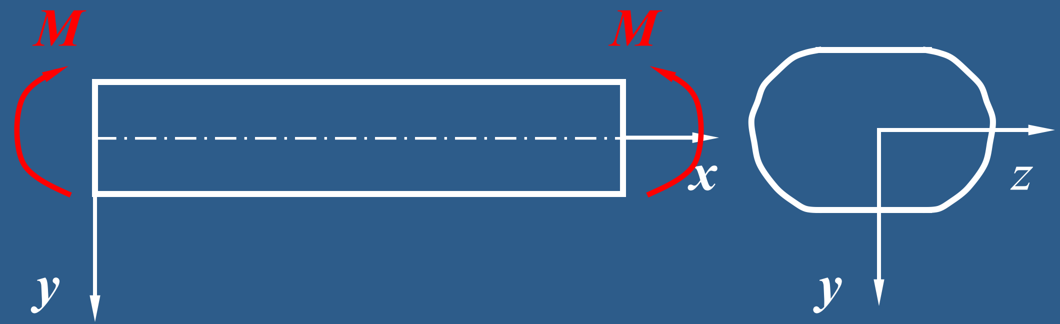
—— 式（c）满足。

结论：

$$\boxed{\begin{aligned}&\sigma_x=\frac{M}{I}y,\quad \sigma_y=0,\quad \sigma_z=0,\\ &\tau_{yz}=0,\quad \tau_{zx}=0,\quad \tau_{xy}=0\end{aligned}}$$

（9-33）

—— 为正确解答。



位移分量：

将式（9-33）代入物理方程（8-17），有

$$\varepsilon_x=\frac{M}{EI}y,\qquad \gamma_{yz}=0,$$

$$\varepsilon_y=-\frac{\mu M}{EI}y,\qquad \gamma_{zx}=0,$$

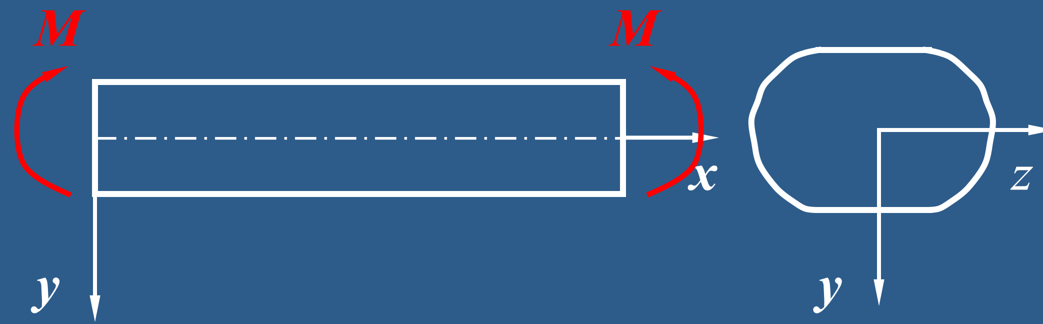
$$\varepsilon_z=-\frac{\mu M}{EI}y,\qquad \gamma_{xy}=0,$$

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{M}{EI}y,\\ &\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\mu M}{EI}y\\ &\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\mu M}{EI}y,\\ &\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0,\\ &\gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0,\\ &\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0,\end{aligned}\right.\qquad \text{(d)}$$

对左侧3式积分，有：

$$\begin{cases} u=\dfrac{M}{EI}xy+f_1(y,z), \\ v=-\dfrac{\mu M}{EI}y^2+f_2(z,x), \\ w=-\dfrac{\mu M}{EI}yz+f_3(x,y), \end{cases}$$

式中：f_1、f_2、f_3为待定函数。



将上式的第二式对 z 求导，第三式对 y 求导，有

$$\frac{\partial^2 f_1(y,z)}{\partial z^2}=0,\quad \frac{\partial^2 f_1(y,z)}{\partial y^2}=0$$

将上式代入式（d）的后三式，有

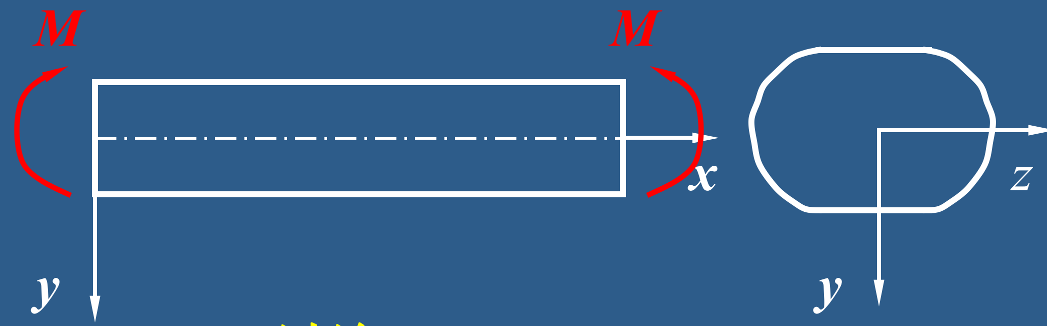
$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}=-\dfrac{\mu M}{EI}z+\dfrac{\partial f_3(x,y)}{\partial y}+\dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial f_1(y,z)}{\partial z}+\dfrac{\partial f_3(x,y)}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{M}{EI}x+\dfrac{\partial f_2(z,x)}{\partial x}+\dfrac{\partial f_1(y,z)}{\partial y}=0 \end{cases}$$

由此得：

$$f_1(y,z)=a+by+cz+dyz$$

类似于§8-5的推导，可得：

$$
\begin{cases}
f_1(y,z)=\omega_y z-\omega_z y+u_0 \\
f_2(z,x)=-\dfrac{M}{EI}(x^2-\mu z^2) \\
\qquad\qquad +\omega_z x-\omega_x z+v_0 \\
f_3(y,z)=\omega_x y-\omega_y x+w_0
\end{cases}
$$



将其代入位移分量表达式，有：

$$
\begin{cases}
u=\dfrac{M}{EI}xy+\omega_y z-\omega_z y+u_0 \\
v=-\dfrac{M}{EI}(x^2+\mu y^2-\mu z^2) \\
\qquad\qquad +\omega_z x-\omega_x z+v_0 \\
w=-\dfrac{\mu M}{EI}yz+\omega_x y-\omega_y x+w_0
\end{cases}
\qquad \text{（e）}
$$

讨论：

（1）由式（e）的第一式可见：

不论约束如何，变形后指定截面（$x=a$）x方向的位移为：

$$u=\frac{Ma}{EI}y+\omega_y z-\omega_z y+u_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{Ma}{EI}-\omega_z,\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=\omega_y$$

表明：截面内y、z方向的均有相同的曲率，即截面保持平面。

式中：$\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 为绕三个坐标轴的刚性转动角；

u_0,v_0,w_0 为沿三个坐标轴的刚性移动；

由初始条件确定。

讨论：

（1）由式（e）的第一式可见：

不论约束如何，变形后指定截面（$x=a$）x方向的位移为：

$$u=\frac{Ma}{EI}y+\omega_y z-\omega_z y+u_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{Ma}{EI}-\omega_z,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\omega_y$$

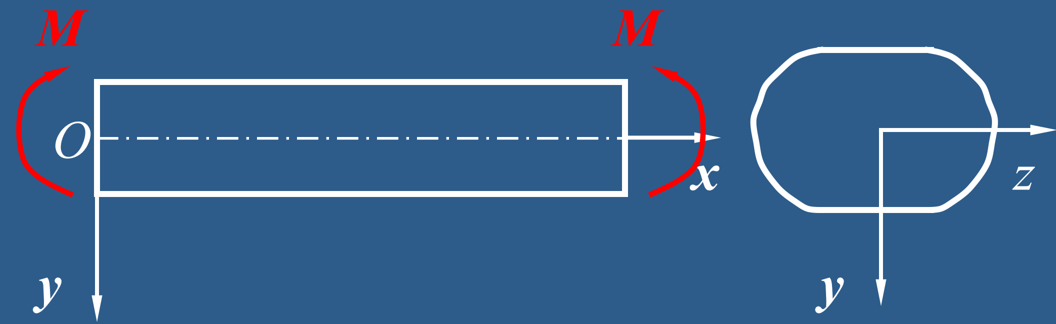
表明：截面内y、z方向的均有相同的斜率，即截面保持平面。

（2）由式（e）的第二式可见：

不论约束如何，变形后杆的纵向纤维将具有曲率：

$$\frac{1}{\rho_x}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{M}{EI} \qquad \text{(f)}$$

与材料力学中挠曲线微分方程相同。



（3）假定左端截面的形心O固定；经过O点的x方向线段不转动；经过O点的y方向线段在yz平面内不转动；

于是有约束条件：

$$(u)_{x=y=z=0}=0,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=y=z=0}=0,$$

$$(v)_{x=y=z=0}=0,\quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=y=z=0}=0,$$

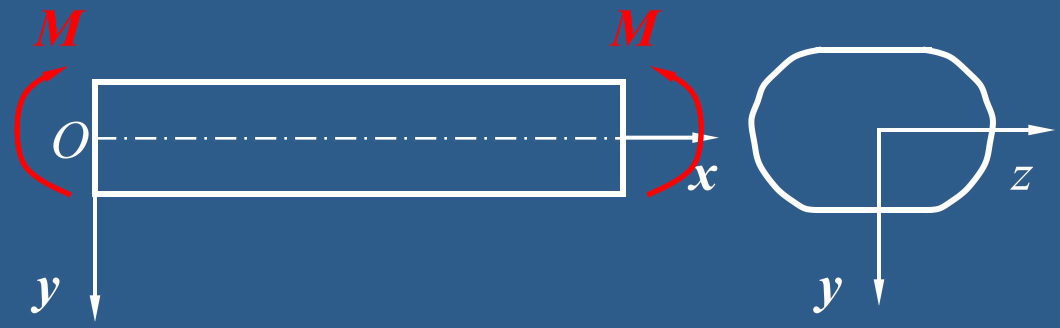
$$(w)_{x=y=z=0}=0,\quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x=y=z=0}=0,$$

由此可确定式6个常数为：

由此可确定式6个常数为：

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0,$$

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0,$$



得一端自由，一端固定梁的的位移分量为：

$$\begin{cases} u = \dfrac{M}{EI} xy, \\ v = -\dfrac{M}{EI}(x^2 + \mu y^2 - \mu z^2), \\ w = -\dfrac{\mu M}{EI} yz \end{cases}$$

在上式中，取 $y = z =0$, 得杆轴的挠曲线方程：

$$v\Big|_{\substack{y=0 \\ z=0}} = -\frac{M}{EI} x^2 \qquad \text{（h）}$$

与材料力学中的结果相同。

（4）给定应力分量为可能的条件：

满足：$\begin{cases} \text{（1）平衡方程；} \\ \text{（2）应力相容方程。} \end{cases}$

（5）给定应变分量为可能的条件：

满足：应变相容方程。

作业：　　8—2、3、5、6

补充题：

若应变分量为：

$$\varepsilon_x = axy^2, \quad \gamma_{xy} = 0,$$
$$\varepsilon_y = ax^2 y, \quad \gamma_{yz} = az^2 + by,$$
$$\varepsilon_z = axy, \quad \gamma_{zx} = ax^2 + by^2,$$

式中：a、b为不等于零的常数。试校核能否成为可能的应变状态。