

## 拉氏变换及反变换公式

### 1. 拉氏变换的基本性质

1	线性定理	齐次性	$L[af(t)] = aF(s)$
		叠加性	$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
2	微分定理	一般形式	$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$ $L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$ $\vdots$ $L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$ $f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1} f(t)}{dt^{k-1}}$
		初始条件为 0 时	$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s)$
3	积分定理	一般形式	$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[\int f(t)dt\right]_{t=0}}{s}$ $L\left[\int \int f(t)(dt)^2\right] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{\left[\int f(t)dt\right]_{t=0}}{s^2} + \frac{\left[\int \int f(t)(dt)^2\right]_{t=0}}{s}$ $\vdots$ $L\left[\overbrace{\int \cdots \int}^{\text{共 } n \text{ 个}} f(t)(dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} \left[\overbrace{\int \cdots \int}^{\text{共 } n \text{ 个}} f(t)(dt)^n\right]_{t=0}$
		初始条件为 0 时	$L\left[\overbrace{\int \cdots \int}^{\text{共 } n \text{ 个}} f(t)(dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n}$
4	延迟定理（或称 $t$ 域平移定理）		$L[f(t-T)l(t-T)] = e^{-Ts} F(s)$
5	衰减定理（或称 $s$ 域平移定理）		$L[f(t)e^{-at}] = F(s+a)$
6	终值定理		$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
7	初值定理		$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
8	卷积定理		$L\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right] = L\left[\int_0^t f_1(t)f_2(t-\tau)d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$

## 2. 常用函数的拉氏变换和 z 变换表

序号	拉氏变换 E(s)	时间函数 e(t)	Z 变换 E(z)
1	1	$\delta(t)$	1
2	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$	$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$	$\frac{z}{z-1}$
3	$\frac{1}{s}$	1(t)	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} \left( \frac{z}{z-e^{-aT}} \right)$
7	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
9	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
10	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{z}{z-e^{-bT}}$
11	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
12	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
13	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
14	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
15	$\frac{1}{s - (1/T) \ln a}$	$a^{t/T}$	$\frac{z}{z-a}$

### 3. 用查表法进行拉氏反变换

用查表法进行拉氏反变换的关键在于将变换式进行部分分式展开，然后逐项查表进行反变换。

设  $F(s)$  是  $s$  的有理真分式

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (n > m)$$

式中系数  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, b_m$  都是实常数； $m, n$  是正整数。按代数定理可将  $F(s)$  展开为部分分式。分以下两种情况讨论。

#### ① $A(s) = 0$ 无重根

这时， $F(s)$  可展开为  $n$  个简单的部分分式之和的形式。

$$F(s) = \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{c_i}{s-s_i} + \cdots + \frac{c_n}{s-s_n} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s-s_i}$$

式中， $s_1, s_2, \dots, s_n$  是特征方程  $A(s)=0$  的根。 $c_i$  为待定常数，称为  $F(s)$  在  $s_i$  处的留数，可按下式计算：

$$c_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s-s_i) F(s)$$

或

$$c_i = \left. \frac{B(s)}{A'(s)} \right|_{s=s_i}$$

式中， $A'(s)$  为  $A(s)$  对  $s$  的一阶导数。根据拉氏变换的性质，从式 (F-1) 可求得原函数

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s-s_i} \right] = \sum_{i=1}^n c_i e^{-s_i t}$$

#### ② $A(s) = 0$ 有重根

设  $A(s) = 0$  有  $r$  重根  $s_1$ ， $F(s)$  可写为

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{B(s)}{(s-s_1)^r (s-s_{r+1}) \cdots (s-s_n)} \\ &= \frac{c_r}{(s-s_1)^r} + \frac{c_{r-1}}{(s-s_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{c_1}{(s-s_1)} + \frac{c_{r+1}}{s-s_{r+1}} + \cdots + \frac{c_i}{s-s_i} + \cdots + \frac{c_n}{s-s_n} \end{aligned}$$

式中， $s_1$  为  $F(s)$  的  $r$  重根， $s_{r+1}, \dots, s_n$  为  $F(s)$  的  $n-r$  个单根；

其中,  $c_{r+1}, \dots, c_n$  仍按式(F-2)或(F-3)计算,  $c_r, c_{r-1}, \dots, c_1$  则按下式计算:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_r = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1)^r F(s) \\ c_{r-1} = \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d}{ds} [(s - s_1)^r F(s)] \\ \vdots \\ c_{r-j} = \frac{1}{j!} \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d^{(j)}}{ds^{(j)}} (s - s_1)^r F(s) \\ \vdots \\ c_1 = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d^{(r-1)}}{ds^{(r-1)}} (s - s_1)^r F(s) \end{array} \right. \quad (\text{F-5})$$

原函数  $f(t)$  为

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}[F(s)] \\ &= L^{-1} \left[ \frac{c_r}{(s - s_1)^r} + \frac{c_{r-1}}{(s - s_1)^{r-1}} + \dots + \frac{c_1}{(s - s_1)} + \frac{c_{r+1}}{s - s_{r+1}} + \dots + \frac{c_i}{s - s_i} + \dots + \frac{c_n}{s - s_n} \right] \\ &= \left[ \frac{c_r}{(r-1)!} t^{r-1} + \frac{c_{r-1}}{(r-2)!} t^{r-2} + \dots + c_2 t + c_1 \right] e^{s_1 t} + \sum_{i=r+1}^n c_i e^{s_i t} \end{aligned} \quad (\text{F-6})$$