

# 自动控制原理实验报告

时间：2020 年 6 月 22 日

地点：航空楼 A110

## 1 实验名称

二阶、三阶系统时域特性的研究。

## 2 实验目的

- 了解和掌握典型二阶系统模拟电路的构成方法及 I 型二阶闭环系统的传递函数标准形式。
- 研究 I 型二阶闭环系统的结构参数——无阻尼振荡频率  $\omega_n$ ，阻尼比  $\zeta$  对过渡过程的影响。
- 掌握欠阻尼 I 型二阶闭环系统在阶跃信号输入时的动态性能指标  $\sigma_p$ 、 $t_p$  以及  $t_s$  的计算。
- 观察和分析 I 型二阶闭环系统在欠阻尼，临界阻尼，过阻尼状态的瞬态响应曲线，以及其在阶跃信号输入时的动态性能指标  $\sigma_p$ 、 $t_p$  值，并与理论计算值作比对。
- 了解三阶系统响应特性，并用根轨迹法进行理论分析对比。

## 3 实验内容

### ● 二阶系统时域特性研究部分

- 了解和掌握典型 I 型二阶系统的建模过程，以及模拟电路的构成方法；
- 观察和分析不同阻尼比下典型 I 型二阶系统的阶跃输入信号响应曲线，并将实际测量时域特性参数与理论值进行比较与分析；

### ● 三阶系统时域特性研究部分

- 了解和掌握典型三阶系统模拟电路的构成方法；
- 观察和分析三阶系统在不同开环增益下的瞬态响应曲线，分析三阶系统开环增益对其稳定性的影响。

### 3.1 二阶系统建模与原理分析

首先对基本二阶系统进行建模说明与原理分析。

典型 I 型二阶单位反馈闭环系统如图 3.1 所示。

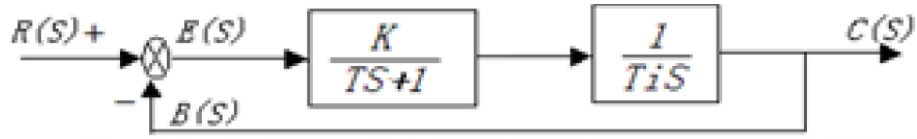


图 3.1 典型 I 型二阶单位反馈闭环系统示意图

则系统开环传递函数可表示为

$$G(s) = \frac{K}{T_i s(Ts + 1)}$$

其中， $K$  为惯性环节增益， $T_i$  为积分环节时间常数， $T$  为惯性环节时间常数。

由控制理论，单位负反馈二阶系统闭环传递函数的标准形式为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

其中，无阻尼振荡频率  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T_i T}}$ （注：PPT 此处有误），阻尼比  $\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_i}{KT}}$ 。

下面利用 LabACTn 自控 / 计控原理实验机电路箱对不同参数情况下的二阶系统实验电路进行设计、连接与测试。

典型 I 型二阶系统实验模拟电路如图 3.2 所示。实验电路由积分环节（对应 A2 单元）和惯性环节（对应 A3 单元）串联构成，其积分时间常数为  $T_i = R_1 \cdot C_1$ ，惯性时间常数为  $T = R_2 \cdot C_2$ 。

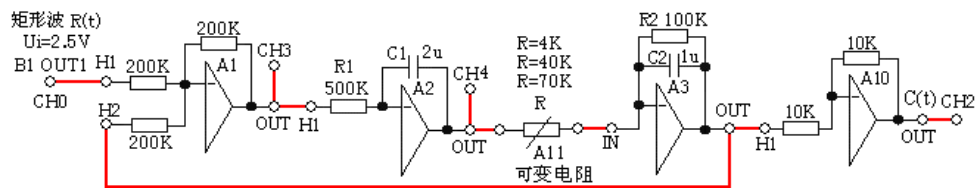


图 3.2 典型 I 型二阶系统实验模拟电路

分析上图所示二阶系统中的各元件以及输入输出信号。其中  $R_1, R_2$  为定值电阻， $C_1, C_2$  为定值电容， $R$  为可调电阻，实际在电路箱中为可变电阻箱的形式。 $R_1, C_1$  元件构成基本积分环节， $R, R_2, C_2$  元件构成基本惯性环节。电路中存在负反馈，输入信号为矩形阶跃信号波  $U_i$ ，闭环系统输出信号为  $U_o$ 。

该实验电路二阶系统的开环传递函数可表示为

$$G(s) = \frac{K}{T_i s(Ts + 1)}$$

其中，惯性环节增益系数  $K = \frac{R_2}{R}$ ， $R$  为可调电阻。

通过调整可变电阻  $R$  的阻值，可以方便实现对二阶系统开环增益  $K$ 、系统阻尼比  $\zeta$  的调节，使二阶系统形成过阻尼、临界阻尼、欠阻尼三种状态。具体实现调节参数设定与组合在实验内容部分说明。

由二阶系统时域分析理论，可得标准形式欠阻尼二阶闭环系统（ $0 < \zeta < 1$ ）在阶跃信号作用下的动态指标计算如下

$$\sigma_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

其中， $\sigma_p$  为超调量， $t_p$  为峰值时间， $t_s$  为稳态时间。

标准形式过阻尼二阶系统（ $\zeta > 1$ ）的两个特征根为

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

满足

$$\lambda_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{T_2}$$

当  $T_1/T_2$ （或  $\zeta$ ）很大时，特征根  $\lambda_2$  比  $\lambda_1$  远离虚轴，模态  $e^{-t/T_2}$  很快衰减为零，此时系统调节时间主要由  $\lambda_1 = -1/T_1$  对应的模态  $e^{-t/T_1}$  确定，此时可将过阻尼系统二阶系统近似看作由  $\lambda_1$  确定的一阶系统，并估算其动态性能指标。

在较大  $\zeta$  区间内，过阻尼二阶系统的延迟时间  $t_d$ （即响应曲线从零上升至稳

态值 50 %所需的时间) 可近似计算如下

$$t_d = \frac{1 + 0.6\zeta + 0.2\zeta^2}{\omega_n}.$$

### 3.2 三阶系统建模与原理分析

首先对基本三阶系统进行建模说明与原理分析。

利用 LabACTn 自控 / 计控原理实验机电路箱对不同参数情况下的三阶系统实验电路进行设计、连接与测试。

典型 I 型三阶系统实验模拟电路如图 3.3 所示。实验电路由积分环节（对应 A2 单元）、惯性环节（对应 A3 单元和 A6 单元）串联构成。其积分时间常数为  $T_i = R_1 \cdot C_1$ ；（A3 单元）惯性时间常数为  $T_1 = R_3 \cdot C_2$ ，惯性增益系数  $K_1 = R_3 / R_2$ ；（A6 单元）惯性时间常数为  $T_2 = R_4 \cdot C_3$ ，惯性增益系数  $K = R_4 / R$ 。

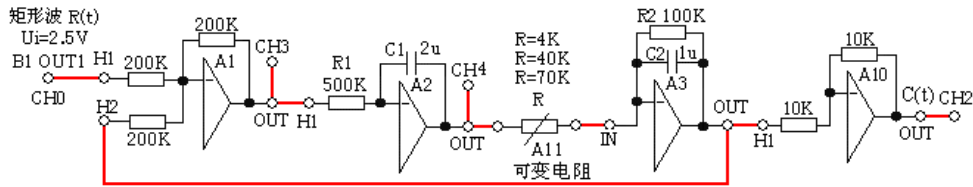


图 3.3 典型 I 型三阶系统实验模拟电路

分析上图所示三阶系统中的各元件以及输入输出信号。其中  $R_1, R_2, R_3, R_4$  为定值电阻， $C_1, C_2, C_3$  为定值电容， $R$  为可调电阻，实际在电路箱中为可变电阻箱的形式。 $R_1, C_1$  元件构成基本积分环节， $R_2, R_3, C_2$  元件构成第一个基本惯性环节（A3 单元）， $R, R_4, C_3$  构成第二个基本惯性环节（A6 单元）。电路中存在负反馈，输入信号为矩形阶跃信号波  $U_i$ ，闭环系统输出信号为  $U_o$ 。

该实验电路三阶系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{T_i s (T_1 s + 1) (T_2 s + 1)}$$

闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K}{T_i s (T_1 s + 1) (T_2 s + 1) + K}$$

对实验电路中的可调电阻  $R$  进行设定并进行参数组合，便可对（A6 单元）

惯性环节的增益系数进行调整，进而对系统动态响应的形式和稳定性进行分析。

4 实验步骤

4.1 实验操作

4.1.1 二阶系统实验步骤

(1) 构造 I 型二阶系统模拟电路

按图 3.2 安置短路套及插孔连线，列写如表 4.1 所示。

表 4.1 二阶系统模拟电路安置短路套及插孔连线情况

编号	模块号	跨接座号	1	信号输入 ( $U_i$ )	B1 (OUT1) → A5 (H1)
1	A1	S4, S8	2	运放级联	A5 (OUT) → A9 (H1)
2	A2	S5, S11, S12	3	负反馈	A3 (OUT) → A1 (H2)
3	A3	S8, S11	4	运放级联	A3 (OUT) → A10 (H1)
			5	跨接 $4K\Omega$ 、 $40K\Omega$ 、 $70K\Omega$	元件库 A11 中直读式可变电阻跨接到 A2 (OUT) 和 A3 (IN) 之间
			6	示波器联接	A10 (OUT) → B2 (CH2)

(a) 安装短路套情况

(b) 插孔连线情况

(2) 运行、观察、记录

分别将 A11 单元中的直读式可变电阻调整为  $4K\Omega$ 、 $40K\Omega$ 、 $70K\Omega$ ，选择线性系统时域分析 / 二阶系统瞬态响应和稳定性实验，确认信号参数默认值后，点击《下载》、《开始》键后，实验运行。用计算机上的虚拟示波器观察在三种不同增益  $K$  情况下，A10 输出端  $C(t)$  的系统阶跃响应曲线。不同类型的二阶系统可能出现的阶跃响应曲线示意图如图 4.1 所示。

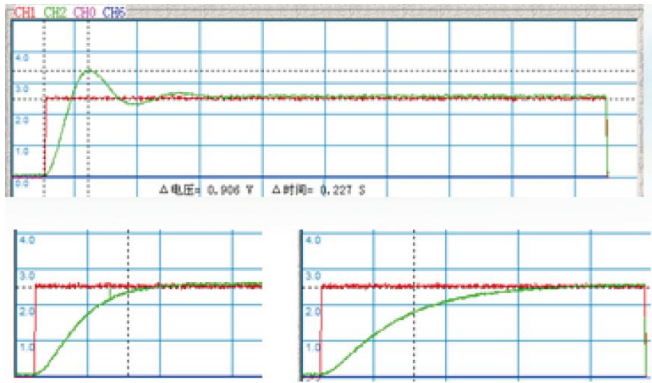


图 4.1 不同类型二阶系统阶跃响应曲线示意图

各系统主要特性参数的测量步骤如下：① 首先测量输入阶跃电压值  $U_i$ ；② 测量输出稳态电压值  $U_{os}$ ；③ 测量峰值时间  $t_p$  与峰值电压  $U_{o\max}$ （可通过将一组横纵游标交汇到阶跃信号开始位置，另一组交汇到峰值电压产生位置来实现测量）；④ 测量超调电压，进而计算出超调量  $\sigma_p\%$ ；⑤ 测量输出电压进入稳态输出电压的 5 % 误差带时的时间，即为调节时间  $t_s$ 。

按表格要求改变电路图 3.2 所示的实验环节参数，并逐一运行观测结果。以屏幕截图的方式，将示波器显示曲线保存在自备 U 盘内，将数据填写完整。

本实验环节结束后，断电，移除短路套与短接线，进入下一实验环节连线。

### 4.1.1 三阶阶系统实验步骤

#### (1) 构造 I 型三阶系统模拟电路

将图 3.3 中的 A11 单元直读式可调电阻分别调整到  $30K\Omega$  ( $K=16.7$ )、 $41.7K\Omega$  ( $K=12$ )、 $225.2K\Omega$  ( $K=2.22$ ) 三种参数位置，并按图 3.3 连接电路安置短路套及插孔连线，列写如表 4.2 所示。

表 4.2 三阶系统模拟电路安置短路套及插孔连线情况

编号	模块号	跨接座号	1	信号输入 ( $U_i$ )	B1 (OUT1) → A1 (H1)
1	A1	S4, S8	2	运放级联	A1 (OUT) → A2 (H1)
2	A2	S5, S11, S12	3	运放级联	A2 (OUT) → A3 (H1)
3	A3	S3, S8, S11	4	运放级联	A6 (OUT) → A8 (H1)
4	A6	S9, S10	5	负反馈	A8 (OUT) → A1 (H2)
			6、7	跨接 $225K\Omega$ , $41.7K\Omega$ , $30K\Omega$	元件库 A11 中直读式可变电阻跨接到 A3 (OUT) 和 A6 (IN) 之间
			8	示波器联接	A6 (OUT) → B2 (CH2)

(a) 安装短路套情况

(b) 插孔连线情况

#### (2) 运行、观察、记录

选择线性系统时域分析 / 三阶系统瞬态响应和稳定性实验，确认信号参数默认值后，点击《下载》、《开始》键后，实验运行。按表格要求改变电路图 3.2 所示的实验环节参数，并逐一运行观测结果。用计算机上的虚拟示波器观察在三种不同增益  $K$  情况下，A6 输出端  $C(t)$  的系统阶跃响应曲线，并分析三阶系统的动

态响应形式与稳定性。同时绘制当增益  $K$  变化时的三阶系统根轨迹，并结合根轨迹图形对实验结果进行解释与说明。

以屏幕截图的方式，将示波器显示曲线保存在自备 U 盘内，将数据填写完整。

本实验环节结束后，断电，移除短路套与短接线，进入下一实验连线。

## 4.2 实验现象

下面对各二阶、三阶系统的阶跃响应时域特性曲线趋势进行实验现象描述。

当输入阶跃电压信号时，二阶系统的阶跃响应时域特性可分为三类。

- 当可调电阻  $R$  设为较小时，即系统开环增益  $K$  较大时，则形成**欠阻尼二阶系统**。其特点为：输出响应曲线首先迅速上升达到峰值电压，然后经过数次振荡后逐渐趋于稳态输出值，存在超调量，且若阻尼比较小时，峰值电压较高。
- 当可调电阻  $R$  设为一合适值，即系统开环增益  $K$  为一适当值时，可形成**临界阻尼二阶系统**。其特点为：输出响应曲线较快上升并直接逐渐趋于稳态输出值，超调量刚好没有或很小（由于系统元件误差），峰值电压刚好没有或很小，此状态为一种临界状态。
- 当可调电阻  $R$  设为较大时，即系统开环增益  $K$  较小时，则形成**过阻尼二阶系统**。其特点为：输出响应曲线较慢上升并直接逐渐趋于稳态输出值，超调量和峰值电压均没有出现，进入要求误差带的调节时间较长。

当输入阶跃电压信号时，三阶系统的阶跃响应时域特性可分为三类。

- 当可调电阻  $R$  设为较小时，即系统开环增益  $K$  较大时，三阶系统响应曲线出现**较为剧烈的振荡发散现象**。
- 当可调电阻  $R$  设为一合适值，即系统开环增益  $K$  为一适当值时，三阶系统响应刚好出现**等幅振荡现象**，即既不收敛也不发散，形成一种临界状态。
- 当可调电阻  $R$  设为较大时，即系统开环增益  $K$  较小时，三阶系统响应曲线**振荡收敛**，并较快收敛至一稳定输出值。

下面对典型 I 型二阶系统（四组参数组合）以及典型 I 型三阶系统（三组参数组合）的阶跃信号响应特性进行分析，并将参数测量值与理论值进行比较说明。

## 4.3 实验结果及其分析

下面对实验二“二阶、三阶系统时域特性的研究”中的不同系统的阶跃输入

响应图线与计算结果进行说明。

4.3.1 典型 I 型二阶系统的输出结果（共四组）

典型 I 型二阶系统的四组参数设定与相关参数计算如表 4.3 所示。

表 4.3 典型 I 型二阶系统的四组参数设定与相关参数计算表

情况 编号	$U_i$	A1 增益	积分环节			惯性环节					开环增益 $K$
			$R_1$	$C_1$	$T_i$	$R$	$R_2$	$C_2$	$T$	$K_1$	
1	2.5 V	1.0	500 K	$2\mu$	1.0	4 K	100 K	$1\mu$	0.1	25.0	25.0
2	2.5 V	1.0	500 K	$2\mu$	1.0	40 K	100 K	$1\mu$	0.1	2.5	2.5
3	2.5 V	1.0	500 K	$2\mu$	1.0	70 K	100 K	$1\mu$	0.1	1.43	1.43
4	3.0 V	0.4	500 K	$2\mu$	1.0	4 K	100 K	$1\mu$	0.1	25.0	10.0

注：表中电阻单位均为  $\Omega$ 。

下面对典型二阶系统的特性参数依次进行理论分析与实验对比。

（1）四组参数下的二阶系统传递函数计算

由典型 I 型二阶系统的四组参数设定与相关参数计算，可得到四组参数下二阶系统的开环传递函数  $G(s)$  与闭环传递函数  $\Phi(s)$  如表 4.4 所示。

表 4.4 四组参数下二阶系统的开环传递函数  $G(s)$  与闭环传递函数  $\Phi(s)$

参数编号	开环传递函数 $G(s)$	闭环传递函数 $\Phi(s)$
1	$G(s) = \frac{25}{s(0.1s+1)}$	$\Phi(s) = \frac{25}{s(0.1s+1)+25} = \frac{250}{s^2+10s+250}$
2	$G(s) = \frac{2.5}{s(0.1s+1)}$	$\Phi(s) = \frac{2.5}{s(0.1s+1)+2.5} = \frac{25}{s^2+10s+25}$
3	$G(s) = \frac{1.4286}{s(0.1s+1)}$	$\Phi(s) = \frac{1.4286}{s(0.1s+1)+1.4286} = \frac{14.286}{s^2+10s+14.286}$
4	$G(s) = \frac{0.4 \times 25}{s(0.1s+1)}$	$\Phi(s) = \frac{10}{s(0.1s+1)+10} = \frac{100}{s^2+10s+100}$

由上表各组参数对应的传递函数可计算出无阻尼自然频率  $\omega_n$  以及阻尼比  $\zeta$  的理论值，便于后续分析与计算。

（2）计算和观察被测系统的临界阻尼对应的增益  $K$

四种情况积分时间常数均为  $T_i = R_1 \cdot C_1 = 1.0$ ，惯性时间常数  $T = R_2 \cdot C_2 = 0.1$ ，

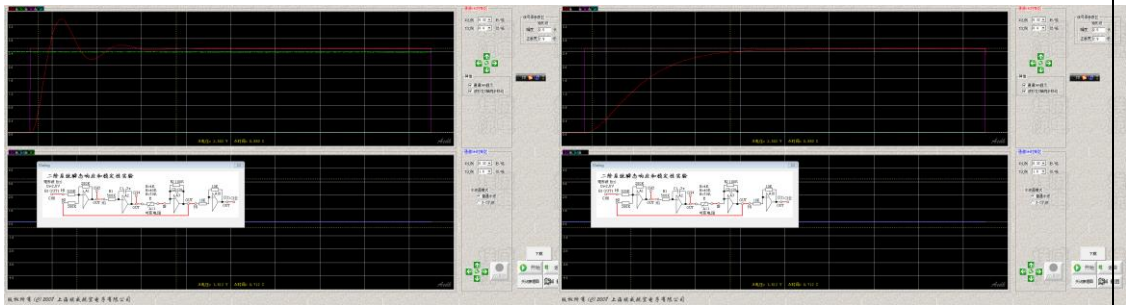
由理论分析可得阻尼比  $\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_i}{KT}}$ ，令阻尼比  $\zeta = 1.0$ ，则可解得本实验中二阶



系统临界阻尼（ $\zeta = 1.0$ ）对应的系统开环增益为  $K = 2.5$ 。

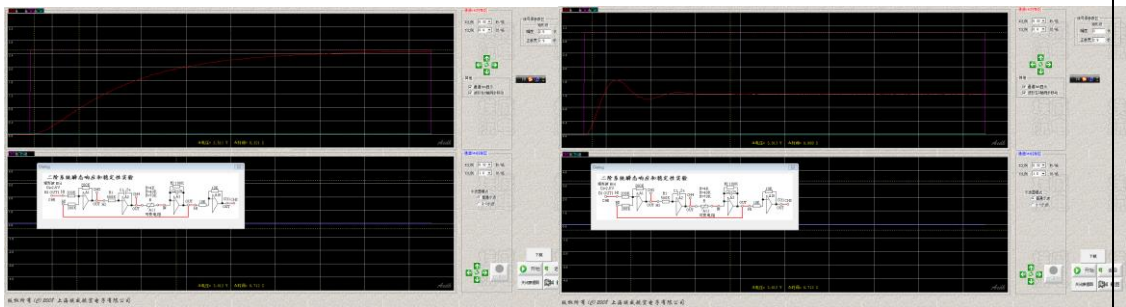
(3) 分析四种情况下二阶系统的阶跃输入响应

按照表 4.3 改变电路参数，运行试验装置，绘制二阶系统的阶跃输入响应图线如图 4.2 所示。



(a) 情况一：  $\begin{cases} \text{可调电阻 } R = 4K\Omega \\ \text{开环增益 } K = 25.0 \end{cases}$

(b) 情况二：  $\begin{cases} \text{可调电阻 } R = 40K\Omega \\ \text{开环增益 } K = 2.5 \end{cases}$



(c) 情况三：  $\begin{cases} \text{可调电阻 } R = 70K\Omega \\ \text{开环增益 } K = 1.43 \end{cases}$

(d) 情况四：  $\begin{cases} \text{可调电阻 } R = 4K\Omega \\ \text{开环增益 } K = 10.0 \end{cases}$

图 4.2 典型 I 型二阶系统的阶跃输入响应图线（共四组参数组合）

四种情况下两组欠阻尼（ $0 < \zeta < 1$ ）系统的特性参数测量结果与理论结果对比如表 4.5 所示。

表 4.5 典型 I 型欠阻尼二阶系统特性测量结果与理论结果对比表

编号	$\omega_n$ 理论值	$\zeta$ 理论值	总增益 $K$		峰值时间 $t_p$		超调量 $\sigma_p \%$		调节时间 $t_s$	
			理论	实测	理论	实测	理论	实测	理论	实测
1	15.8114	0.3162	1.0	1.000	0.209	0.215	35.10 %	35.57 %	0.6	0.651
4	10.0	0.5	0.4	0.398	0.363	0.215	16.30 %	34.56 %	0.6	0.672

由上表数据，可观察到编号 1 的欠阻尼二阶系统的特性实测值与理论值吻合较好，证明了经典二阶系统分析理论的可靠性；而编号 4 的欠阻尼系统中峰值时

间  $t_p$  与超调量  $\sigma_p\%$  吻合度较差，分析原因可能是输入信号幅值较大，又结合电路元件老化，导致系统的惯性环节出现较大偏差，峰值电压较高；屏幕分辨率较低亦是问题来源之一。

另外需要注意的是，调节时间  $t_s$  的实测值可能与理论值有所差异，主要原因有以下两点：① 首先因为理论分析中，为简便起见，通常按阶跃响应的包络线进入 5% 误差带的时间计算，而实际测量时是按照实际输出电压趋势进行范围框定；② 由于屏幕分辨率与系统元件老化原因，也有可能导致较大差异。

四种情况下两组临界阻尼（编号 2）和过阻尼（编号 3）系统的特性参数中，调节时间的计算过程如下。

① 编号 2 系统为临界阻尼二阶系统，故特征根为重根  $\lambda_{1,2} = -5$ ，则时间常数满足  $T_1 = T_2 = -\frac{1}{\lambda_{1,2}} = 0.2$ 。过阻尼系统的调节时间特性图线如图 4.3 所示。

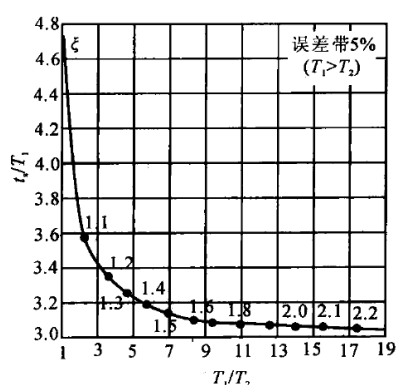


图 4.3 过阻尼系统的调节时间特性图线

故对应  $T_1/T_2 = 1.0$ ，对应  $t_s/T_1 \approx 4.75$ ，故可计算得到  $t_s = 4.75 \times 0.2 = 0.95 \text{ s}$ 。

② 编号 3 系统为过阻尼二阶系统，特征根为  $\lambda_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -1.7267$ ，对应时间常数为  $T_1 = -1/\lambda_1 = 0.5791$ ； $\lambda_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -8.2734$ ，对应时间常数为  $T_2 = -1/\lambda_2 = 0.1208$ ，故可得  $T_1/T_2 = 4.79$  为一个较大值，特征根  $\lambda_2$  比特征根  $\lambda_1$  更远离虚轴，故可将该系统近似看作由  $\lambda_1$  确定的一阶系统，故调节时间为

$$t_s = 3T_1 = 1.7373 \text{ s}.$$

两组临界阻尼（编号 2）和过阻尼（编号 3）系统的特性参数测量结果与理

论结果对比如表 4.6 所示。

表 4.6 典型 I 型临界阻尼与过阻尼二阶系统特性测量结果与理论结果对比表

编号	$\omega_n$ 理论值	$\zeta$ 理论值	总增益 $K$		调节时间 $t_s$		延迟时间	
			理论	实测	理论	实测	理论	实测
2	5.0	1.0	1.0	1.000	0.95	0.953	0.360	0.321
3	3.7796	1.3229	1.0	0.986	1.7373	1.805	0.567	0.512

由上表数据，可观察到临界阻尼和过阻尼二阶系统的特性实测值与理论值吻合较好，证明了经典二阶系统分析理论的可靠性，同时也证明了过阻尼二阶系统近似为由主导极点确定的一阶系统的理论的合理性。

4.3.2 典型 I 型三阶系统的输出结果（共三组）

典型 I 型三阶系统的三组参数设定与相关参数计算如表 4.7 所示。

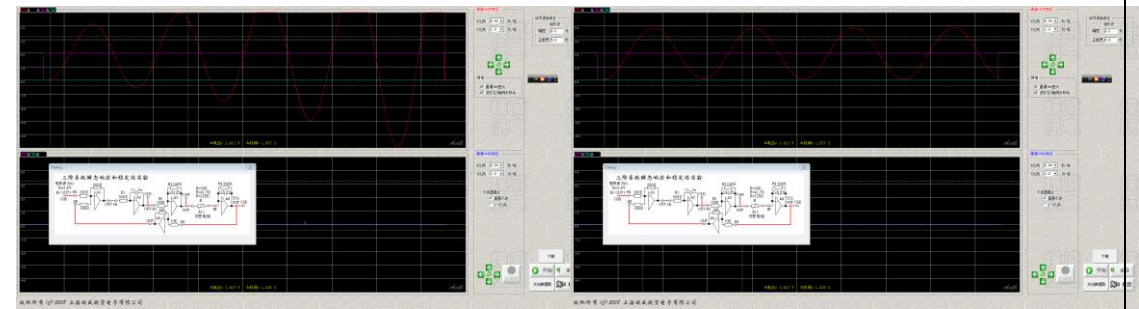
表 4.7 典型 I 型三阶系统的三组参数设定与相关参数计算表

情况 编号	$U_i$	积分环节		惯性环节 1			惯性环节 2			开环增益 $K$
		$R_1$	$C_1$	$R_2$	$R_3$	$C_2$	$R$	$R_4$	$C_3$	
1	2.0 V	500 K	$2\mu$	100 K	100 K	$1\mu$	30 K	500 K	$1\mu$	16.7
2	2.5 V	500 K	$2\mu$	100 K	100 K	$1\mu$	41.7 K	500 K	$1\mu$	12
3	2.5 V	500 K	$2\mu$	100 K	100 K	$1\mu$	225 K	500 K	$1\mu$	2.22

注：表中电阻单位均为  $\Omega$ 。

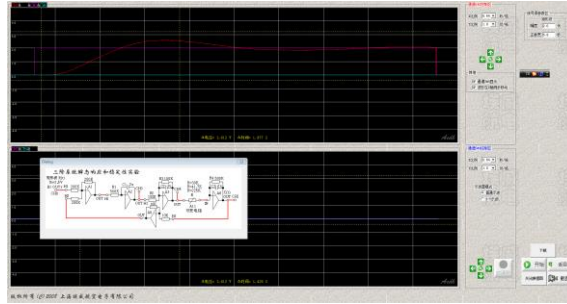
（1）分析三种情况下三阶系统的阶跃输入响应

按照表 4.6 改变电路参数，运行试验装置，绘制三阶系统的阶跃输入响应图线如图 4.4 所示。



(a) 情况一：  $\begin{cases} \text{可调电阻 } R = 30K\Omega \\ \text{开环增益 } K = 16.7 \end{cases}$

(b) 情况二：  $\begin{cases} \text{可调电阻 } R = 41.7K\Omega \\ \text{开环增益 } K = 12 \end{cases}$



(c) 情况三:  $\begin{cases} \text{可调电阻 } R = 225K\Omega \\ \text{开环增益 } K = 2.22 \end{cases}$

图 4.4 典型 I 型三阶系统的阶跃输入响应图线（共三组参数组合）

观察上图，可得到情况一中系统阶跃响应曲线振荡发散；情况二中系统阶跃响应曲线振荡既不发散也不收敛，呈现出中立临界稳定特性；情况三中系统阶跃响应曲线振荡收敛，趋向于一个稳定输出值。

### （3）绘制并分析该三阶系统当开环增益 $K$ 变化时的根轨迹

根轨迹是当开环系统某一参数（如本实验中的增益  $K = K^*$ ）从零变化到无穷大的过程中，闭环特征方程的根在  $s$  平面上移动的轨迹，能够清晰直观地表现该参数对系统特征根及稳定性的影响。根轨迹增益  $K^*$  是首 1 形式开环传递函数对应的系数。对于本实验典型 I 阶三阶系统，自主编写 MATLAB 程序绘制可调电阻  $R$ （或开环增益  $K$ ）从较小值增大时的根轨迹，分析各系统参数对三阶系统稳定性的影响。

本实验中的三阶系统的开环传递函数可表示为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.5s+1)} = \frac{K}{0.05s^3 + 0.6s^2 + s}$$

其中， $K$  为增益系数，满足  $K = R_4 / R$ ，可通过调节可调电阻电阻值（ $R = \infty \rightarrow 0$ ）以使得  $K = 0 \rightarrow \infty$  变化，从而观察系统特性与稳定性。

利用 MATLAB 绘制该三阶系统开环传递函数的根轨迹如图 4.5 所示。其中临界稳定对应的特征根位置以及其参数特性以右侧图例形式标出。

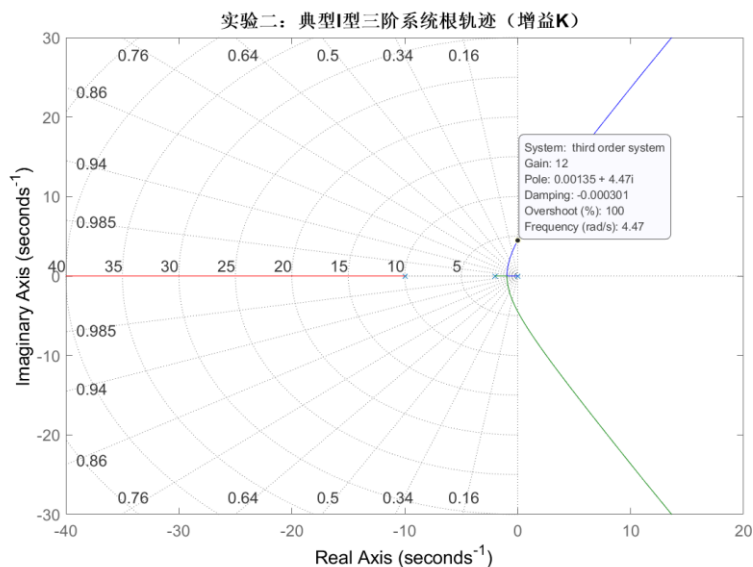


图 4.5 典型 I 型三阶系统根轨迹（关于增益  $K$ ）

观察本实验三阶系统关于增益  $K$  的根轨迹，可以得到该典型三阶系统无零点，有三个极点，分别为  $p_1 = -10$ ， $p_2 = -2$  以及  $p_3 = 0$ 。图中共有三条根轨迹，随着增益  $K$  从零开始逐渐趋向于无穷大，其中一条根轨迹（红线）从  $p_1 = -10$  极点位置水平向左出射，并趋向于无穷远处；另外两条根轨迹分别从  $p_2 = -2$ ， $p_3 = 0$  两个极点出射，从  $p_2$  出发的根轨迹（绿线）首先沿实轴正方向前进，从  $p_3$  出发的根轨迹（蓝线）首先沿实轴负方向前进，两条根轨迹在  $(-0.945, 0)$  点处相遇后分开，绿线斜向第四象限趋向于无穷大，其渐近线为经过  $(-4, 0)$  点斜率为  $-\sqrt{3}$ ，即从实轴正向逆时针绕  $300^\circ$  的一条直线，蓝线对应根轨迹与绿线根轨迹恰好关于实轴对称。绿线、蓝线与虚轴的交点可计算如下。

由三阶系统闭环特征方程为

$$D(s) = 1 + G(s) = 0.05s^3 + 0.6s^2 + s + K = 0$$

$$\text{令} \begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega)] = -0.6\omega^2 + K = 0 \\ \operatorname{Im}[D(j\omega)] = -0.05\omega^3 + \omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ K = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{20} \approx \pm 4.47 \\ K = 12 \end{cases}$$

故交点为  $(0, -4.47)$  与  $(0, 4.47)$ ，对应增益  $K = 12$ 。这也说明，当增益  $K < 12$ ，即  $R > 41.7K\Omega$  时，系统稳定；当增益  $K = 12$ ，即  $R = 41.7K\Omega$  时，系统临界稳定；当  $K > 12$ ，即  $R < 41.7K\Omega$  时，系统不稳定。这与实验结果一致。

<p><b>实验二总结：</b> 本部分对典型 I 型的二阶与三阶系统在不同电路参数组合下的阶跃响应曲线进行了理论建模与实验分析，并利用根轨迹等分析工具进行理论与实践的互相印证分析，加深了对各项电路参数及其对典型二阶和更高阶系统的动态特性影响的定性、定量认识。</p>			
实验设备名称	LabACTn 自控 / 计控原理实验机	实验设备编号	
同组实验人（签名）	冯铮浩	实验报告人(签名)	冯铮浩
实验结果确认及设备验收（签名）			
实验报告完成时间		2020 年 6 月 22 日	