

平板湍流边界层中的速度分布 和 能 量 方 程

许 维 德

摘 要

本文先分析 Klebanoff & Diehl (1952年) [1] 大量的实验结果, 并参考 Coles (1956年) [2] 所引用的一些实验结果, 得到了平板湍流边界层中的速度分布表示式, 然后根据这些表示式对边界层能量方程积分求解, 在这过程中得到了如下的一些结论:

(A) 内层湍流的速度分布可表示为如下的对数定律

$$u^+ = A \log y^+ + B \quad (1)$$

其中 A 、 B 的数值由实验来决定。在本文中得 A 为常数; 而 B 为雷诺数的函数, 当雷诺数增大时, B 增大, 它们的数值分别为

$$\begin{cases} A = 5.75; \\ B = 2.086 \log R_\theta - 3.225. \end{cases} \quad (2)$$

(B) 外层湍流的速度分布表示式。本文认为仍可用如 (1) 式所示的对数定律来表示, 但各项系数有所不同, 即可表示为

$$u^+ = C \log y^+ - D \quad (3)$$

其中系数 C 、 D 分别为

$$\begin{cases} C = 10.4; \\ D = 1.973 \log R_\theta + 0.879 \end{cases} \quad (4)$$

(C) 根据各层速度分布表示式的两两交点决定了各层的厚度:

层流底层的厚度 y_l^+ 为:

$$y_l^+ = \frac{1}{40} (\sqrt{R_\theta} + 341) \quad (5)$$

内层湍流的厚度 y_i^+ 为

$$\log y_i^+ = 0.837 \log R_\theta - 0.372 \quad (6)$$

(D) 根据以上的结果, 对能量方程中的摩擦功项分三层进行了计算, 得到了 $R_x \sim R_\theta$ 的关系, 对于 $R_\theta \geq 3000$,

$$\begin{cases} R_x = \frac{63 R_\theta^{11/8}}{(\log R_\theta + 0.211)^{0.84}} \\ \text{或 } R_\theta = (84.5 \log R_x - 466)^2 \end{cases} \quad (7)$$

上式与 Klebanoff & Diehl 的实验比较, 得到较为满意的结果。

I. 平板湍流边界层的速度分布

§ 1—1. 引言——在应用动量方程或能量方程, 以及应用电子计算机解边界层微分方程时 {Cebeci & Mosinskis (1972年) [3]}, 都必须先设定边界层中的速度分布, 所以根据实验结果来正确地决定速度分布的表示式是解决湍流边界层问题的重要前提。由于速度分布的不同, 沿边界层厚度可以划分为层流底层、内层湍流和外层湍流三部分, 它们的速度表示式至今仍未能统一一致, 因此需要根据实验结果再次进行探讨。

本文选择了 Klebanoff & Diehl [1] 的实验结果作为讨论的基础, 因为不仅数据比较充分, 而且近年来被广泛地引用 [例如 Granville (1976) [4], Dean (1976) [5] 等等]。

湍流边界层中的速度分布可表示为

$$\frac{u}{u_*} = F\left(\frac{y u_*}{\nu}\right), \quad \text{或写成 } u^+ = F(y^+) \quad (1-1)$$

其中 u_* 为剪应力速度, $u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$ 。而 τ_0 为壁面剪应力, 它的计算公式为 [参看 Schlichting (1968) [6], pp. 600]

$$\tau_0 / \rho U^2 = 0.0128 R_0^{-1/4} \quad (1-2)$$

因此
$$u_* = 0.113137 U R_0^{-1/8} \quad (1-3)$$

同时有
$$U^+ = U / u_* = R_0^{1/8} / 0.113137 \quad (1-4)$$

在本文中将根据 (1-3) 式来计算 (1-1) 式。

§ 1—2. 内层湍流——这层的速度分布可用对数定律表示如下

$$\left\{ \begin{array}{l} u^+ = \frac{1}{K} \ln y^+ + B \\ \text{或 } u^+ = A \log y^+ + B \end{array} \right. \quad (1-5)$$

其中 A (或 K), B 等系数的数值由实验来决定, 对于它们的数值至今各文献都有不同的看法, 大致范围为

$$\left\{ \begin{array}{l} K = 0.39 \sim 0.41 \\ B = 4.2 \sim 6.5 \end{array} \right. \quad (1-6)$$

(具体数值可参看表 1—1)。大多数人认为 K 、 B 均为常数, 而 Cebeci & Mosinskis [3] 认为在低雷诺数时 ($R_0 \leq 6000$) K 为雷诺数的函数。

本文根据 Klebanoff & Diehl 所给出的对应于不同 R_0 的 21 条 $u \sim y$ 曲线, 应用 (1-3) 式换算为 $u^+ \sim \log y^+$ 的形式, 并绘在图 1 ~ 图 3 中。从图中可以看出: ① 这些曲线可用 (1-5) 式来表示; ② A 为常数, 而 B 却不是常数, 随 R_0 不同而有所变化。 B 的变化列在表 1—2(b), 并绘在图 4 中, 根据最小二乘法, 可以决定 $B \sim \log R_0$ 回归直线方程。这样本文所得到的 A 、 B 数值分别为

表 1—1

A (或K)、B 之值

提议人 (年份)	A (或K)	B
Ludwig & Tillman (1949)	5.75	5.5
Laufer (1950)	6.2	6.0
Klebanoff & Diehl (1952)[1]	5.75	4.2
Clauser (1956)	(0.41)	4.9
Coles (1956)[2]	(0.40)	5.1
Schlichting (1968)[6]	5.85	5.56
Huffman & Bradshaw (1972)[7]	(0.41)	5.0
Brederode & Bradshaw (1974)	—	5.2
Dean (1976)[5]	(0.40)	5.0

$$\begin{cases} A = 5.75 \text{ (或 } K = 0.40 \text{)} \\ B = 2.086 \log R_\theta - 3.225 \end{cases} \quad (1-7)$$

例如:
$$\begin{cases} R_\theta = 5000 & 10000 & 15000 \\ B \cong 4.49 & 5.12 & 5.49 \end{cases}$$

即当 $R_\theta = 10000$ 时,
$$u^+ = 5.75 \log y^+ + 5.12 \quad (1-8)$$

表 1—2

B, D 及 y^+_i 的变化

Klebanoff & Diehl(1952)			(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$U(ft/s)$	$x(ft)$	R_θ	$\log R_\theta$	B	D	$\log y^+_i$	u^+_i
35	5.0	3530	3.5478	4.25	7.75	2.57	19.05
	5.5	3640	3.5611	4.10	7.95	2.61	19.15
	6.5	4090	3.6117	4.60	7.95	2.70	20.15
	7.5	4410	3.6444	4.45	7.95	2.66	19.75
	8.5	4660	3.6684	4.50	8.00	2.69	19.95
	9.5	4920	3.6920	4.60	8.25	2.76	20.45
	10.5	5200	3.7160	4.45	8.30	2.73	20.10

55	5.0	5520	3.7420	4.40	8.20	2.71	20.00
	5.5	5430	3.7348	4.35	8.30	2.72	20.00
	6.5	6190	3.7917	4.60	8.55	2.82	20.85
	7.5	6510	3.8136	4.80	8.40	2.84	21.15
	8.5	7060	3.8488	4.75	8.50	2.85	21.15
	9.5	7420	3.8704	4.85	8.65	2.90	21.50
	10.5	7820	3.8932	4.80	8.55	2.87	21.30
108	5.0	10590	4.0249	4.95	8.70	2.92	21.70
	5.5	10800	4.0334	5.15	8.90	3.00	22.35
	6.5	11840	4.0734	5.20	8.90	3.01	22.45
	7.5	12190	4.0860	5.40	8.95	3.08	23.10
	8.5	13060	4.1159	5.65	9.00	3.14	23.65
	9.5	14000	4.1461	5.35	9.15	3.09	23.10
	10.5	14850	4.1717	5.60	8.90	3.10	23.40

§ 1—3. 外层湍流——这一层的速度分布通常认为不能再用对数定律(1—5)式来表示。Coles[2]引入了Wake function $\Pi(\eta)$, $\eta = y/\delta$ 。后来 Granville[4]用 η 的幂级数修正为

$$u^+ = \frac{1}{K} \ln y^+ + B + \frac{1+6\Pi}{K} \eta^2 - \frac{1+4\Pi}{K} \eta^3 \quad (1-9)$$

这样除变数 y^+ 之外, 还增加了变数 η , Spalding (1961), Rasmussen (1975)和 Dean (1976)[5]等采用保持仅有一个变数 y^+ 的多项式来表示整个边界层的速度分布, 例如 Spalding 所提出的表示式为

$$y^+ = u^+ + e^{-\kappa u^+} \left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2} - \frac{(\kappa u^+)^3}{6} \right] \quad (1-10)$$

在仅有一个变数 y^+ 时, 将有利于解决问题 {考看 White(1974)[8], pp.496, §6—6.2}, 但上式过于复杂。所以本文希望能找到一个仅有一个变数 y^+ , 而形式上又较为简单的表示式。

本文根据对图 1 ~ 图 3 的分析, 认为(1—5)式的对数定律仍有效, 但各系数取不同的数值。即认为外层湍流的速度分布仍可用一个变数 y^+ 来表示如下:

$$\begin{cases} u^+ = C \log y^+ - D \\ \text{或 } u^+ = \frac{C}{\ln 10} \ln y^+ - D \end{cases} \quad (1-11)$$

在上式中 C 、 D 的数值不同于 A 、 B 的数值。 C 为常数, D 的数值随雷诺数的增大而增大。 D 的变化列在表 1-2(c), 并绘在图 5 中, 同样可用最小二乘法来决定 $D \sim \log R_0$ 回归直线方程。这样本文所得到的上式各系数的数值为

$$\begin{cases} C = 10.4 \\ D = 1.973 \log R_0 + 0.879 \end{cases} \quad (1-12)$$

例如:

$R_0 =$	5000	10000	15000
$D \cong$	8.18	8.78	9.12

即当 $R_0 = 10000$ 时:

$$u^+ = 10.4 \log y^+ - 8.78 \quad (1-13)$$

将以上所得到的结论与 Coles [2] 所引用的一些实验结果比较, 例如该文献中图 1 [Klebanoff (1954)], 图 4 [Wieghart (1943)], 图 5 [Wieghart (1944)] 和图 10 [Schulauer & Klebanoff (1950)] 等, 可以得到很好的验证, 但由于篇幅所限, 在这里就省略了。

§ 1-4. 各层的厚度——各有关文献很少讨论各层厚度的计算公式, 本文给出了层流底层及内层湍流厚度的新的计算公式。这样就可以从数值上将湍流边界层的这三层划分开来, 使得分层计算摩擦功有了可能,

在图 1 ~ 图 3 中, 找出由 (1-5) 和 (1-11) 两式所表示的两直线的交点, 这交点便代表内层湍流和外层湍流的分界线, 从而决定了内层湍流的厚度 y_1^+ , 其数值列在表 1-2(d), 并绘在图 6 中, $\log y_1^+ \sim \log R_0$ 的回归直线方程为

$$\log y_1^+ = 0.837 \log R_0 - 0.372 \quad (1-14)$$

根据上式和 (1-4) 式不难得到

$$\frac{y_i}{\theta} = \frac{3.75}{R_0^{0.038}} \quad (1-15)$$

如果采用速度分布的 1/7 定律, $\theta = \frac{7}{72} \delta$ 则

$$\frac{y_i}{\delta} = \frac{0.365}{R_0^{0.038}} \quad (1-16)$$

例如:

$R_0 =$	5000	10000	15000
$y_i/\theta =$	2.71	2.64	2.59
$y_i/\delta =$	0.264	0.257	0.253

(1-17)

现在来讨论层流底层的厚度。层流底层的速度分布为线性规律, 可表示为

$$u^+ = y^+ \quad (1-18)$$

这样根据上式和 (1-5) 式所示的两曲线的交点便可以决定层流底层的厚度 y_1^+ , 图 7 便是

决定这些交点的方法。由于 B 随 R_θ 而变化, 所以先设定一个 R_θ , 由 (1-6) 式计算对应的 B 值, 再在图 7 中绘出对应的 (1-5) 式, 然后决定与上式曲线的交点 y_1^+ 。即对应于不同的 R_θ , 有不同的 y_1^+ , 这些数值绘在图 8 中。 $y_1^+ \sim R_\theta$ 的回归直线方程为

$$\sqrt{R_\theta} = 40 y_1^+ - 341 \tag{1-19}$$

即
$$y_1^+ = \frac{1}{40} (\sqrt{R_\theta} + 341) \tag{1-20}$$

例如:
$$\begin{cases} R_\theta = 5000 & 10000 & 15000 \\ y_1^+ = 10.20 & 11.03 & 11.59 \end{cases} \tag{1-21}$$

可见在所讨论的 R_θ 范围内, 在湍流边界层中层流底层的厚度是变化的, 随雷诺数增大而增大。

II. 能量方程的积分

在解决边界层的问题时有两种方法: 一种称为精确方法, 是积分边界层基本微分方程; 另一种则称为近似方法, 是从动量方程或能量方程来求解。此外由于在解决曲面或回转体边界层时往往以平面边界层为基础, 所以本文只限于应用能量方程来解出平面湍流边界层的一些有关问题。

能量方程的形式为 (参看 Schlichting[6], pp.147)

$$\frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) = 2 \int_0^\infty \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} dy \tag{2-1}$$

Truckenbrodt (1952年)将上式右边的摩擦功项划分为两部份: 一部份 d_1 转变为热能而耗散, 另一部份 t_1 为湍流运动的能量。他根据 Rotta (1952年) 的研究结果导出

$$\int_0^\infty \frac{\tau}{\rho U^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{U} \right) dy \approx \frac{0.56 \times 10^{-2}}{(R_\theta)^{1/6}} \tag{2-2}$$

并根据 Wieghardt (1941年) 从速度分布的 $1/n$ 定律得到的 (对于平板)

$$\delta_3/\theta = H_{32} \cong 1.73 \tag{2-3}$$

从而得到 θ (或 R_θ) 与 $U(x)$ (或 R_x) 的关系 (参看 Schlichting[6], pp.634 及 pp.369)。

本文也利用 (2-3) 式的结论, 但从另外的途径来计算摩擦功项, 从而得到 $R_x \sim R_\theta$ 的关系。根据在 I 中所得到的表示速度分布的新的对数定律以及各层厚度的新的计算式, 在这里将边界层沿厚度划分为三层, 直接计算 (2-1) 式右边的摩擦功项。

我们现在来将 (2-1) 式改变为无因次的形式, 目的是为了与速度分布的表示式相一致,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_\tau^2}{\nu} \cdot \frac{\partial u^+}{\partial y^+}, \quad dy = \frac{\nu}{u_\tau} dy^+ \tag{2-4}$$

将上式代入 (2-1) 式, 并加以整理后可得

$$\frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) = \frac{2u_\tau}{\rho} \int_0^{y^+} \tau \frac{\partial u^+}{\partial y^+} dy^+ \tag{2-5}$$

各层湍流的混合长度为 (参看 White[8], pp.469)

(a) 内层湍流 ($y^+ \sim y_i^+$)

$$l = Ky, K = 0.4 \quad (2-6)$$

(b) 外层湍流 ($y^+ \sim \delta^+$)

$$l \cong \text{const.} \quad (2-7)$$

为了使得从内层转到外层时, 混合长度是连续变化的, 因此取

$$l = Ky_i, K = 0.4 \quad (2-8)$$

Cebeci, Smith & Mosinskis (1970) [9]所提出的混合长度 l 之值如图9(a)所示, 这是用间隙因子 γ 修正后的结果, 但在[9]的讨论中又说 γ 之值对计算没有什么影响。图9(b)则为本文所提出的混合长度 l 之值[见(2-6)及(2-8)两式]。

现在来分别计算各层的摩擦功,

(A) 层流底层 ($0 \sim y_i^+$),

在这层中可根据牛顿定律来计算, 并用(1-18)式代入可得

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \rho u_i^2 \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \rho u_i^2 \quad (2-9)$$

因此
$$W_1 = \int_0^{y_i^+} \tau \frac{\partial u^+}{\partial y^+} dy^+ = \rho u_i^2 y_i^+ \quad (2-10)$$

或
$$W_1 = \rho u_i^2 u_i^+ \quad (2-11)$$

(B) 内层湍流 ($y_i^+ \sim y^+$),

在这层中可根据混合长度的概念来计算, 并用(1-5)式第一式代入。由(2-6)式

$$l = \frac{\nu}{u_i^+} \cdot Ky^+ \quad (2-12)$$

同时有
$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{1}{Ky^+} \quad (2-13)$$

因此
$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \rho u_i^2, \quad (2-14)$$

$$W_2 = \int_{y_i^+}^{y^+} \tau \frac{\partial u^+}{\partial y^+} dy^+ = \rho u_i^2 \left(\frac{1}{K} \ln y_i^+ - \frac{1}{K} \ln y^+ \right) \quad (2-15)$$

或
$$= \rho u_i^2 (u_i^+ - u^+) \quad (2-16)$$

(C) 外层湍流 ($y^+ \sim \delta^+$),

根据(1-11)和(2-8)两式来计算

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{10.4}{2.3} \frac{1}{y^+} = \frac{4.52}{y^+} \quad (2-17)$$

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \rho u_i^2 K^2 y_i^2 \left(\frac{4.52}{y^+} \right)^2 \quad (2-18)$$

$$W_3 = \int_{y_i^+}^{\delta^+} \tau \frac{\partial u^+}{\partial y^+} dy^+ = \frac{(4.52)^3}{2} \rho u_i^+ K^2 \left[1 - \left(\frac{y_i^+}{\delta^+} \right)^2 \right] \quad (2-19)$$

综合以上(A)、(B)和(C)的结果, 就可以计算出(2-5)式的摩擦功项, 即该式的右边第于

$$\text{右边} = \frac{2u_i^+}{\rho} (W_1 + W_2 + W_3) = 2u_i^+ \left\{ u_i^+ + \frac{(4.52)^3}{2} K^2 \left[1 - \left(\frac{y_i^+}{\delta^+} \right)^2 \right] \right\} \quad (2-20)$$

或写式

$$2 \int_0^{\delta^+} \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} dy = 2u_i^+ \left\{ \frac{1}{K} \ln y_i^+ + B + \frac{(4.52)^3}{2} K^2 \left[1 - \left(\frac{y_i^+}{\delta^+} \right)^2 \right] \right\} \quad (2-21)$$

上式就是本文所得到的结果, 它代替了 Truckenbrodt 的(2-2)式。

对于平板

$$U = \text{常数} \quad (2-22)$$

根据上式及(2-3)式, (2-5)式的左边可以改写为

$$\text{左边} = U^3 H_{32} \frac{d\theta}{dx} = u_i^+ H_{32} U^{+3} \frac{dR_\theta}{dR_x} \quad (2-23)$$

将(1-4)式代入上式, 再将上式及(2-21)式代回(2-1)式, 可以得到

$$R_\theta^{3/3} \frac{dR_\theta}{dR_x} = \frac{2 \times (0.113137)^3}{H_{32}} \left\{ \frac{1}{K} \ln y_i^+ + B + \frac{(4.52)^3}{2} K \left[1 - \left(\frac{y_i^+}{\delta^+} \right)^2 \right] \right\} \quad (2-24)$$

现在先来讨论 $\left[1 - \left(\frac{y_i^+}{\delta^+} \right)^2 \right]$ 项, 从(1-11)式

$$\begin{cases} u_i^+ = 10.4 \log y_i^+ - D \\ U^+ = 10.4 \log \delta^+ - D \end{cases}$$

上两式相减, 再将上两式中第一式代入可得

$$\log \frac{\delta^+}{y_i^+} = \frac{D + U^+}{10.4} - \log y_i^+ \quad (2-25)$$

根据(1-12)式计算 D , 根据(1-4)式计算 U^+ , 并根据(1-14)式计算 $\log y_i^+$, 就可以由给定的 R_θ 计算出 $\frac{\delta^+}{y_i^+}$, 即得到 $\left[1 - \left(\frac{y_i^+}{\delta^+} \right)^2 \right]$ 的数值。从计算的结果来看, 这一项相对于其他项变化不大, 在积分(2-24)式时可以作为常数。根据 Klebanoff & Diehl[1] 的实验范围, 我们取 $R_\theta = 10^4$, 这样

$$U^+ = 27.95, D = 8.77, \log y_i^+ = 2.97$$

$$\therefore \left[1 - \left(\frac{y_i^+}{\delta^+} \right)^2 \right] = 0.9229 \quad (2-26)$$

将(1-14)式, (1-7)式及上式代入(2-24)式, 整理, 合并和化简, 最后得到

$$R_\theta^{3/3} \frac{dR_\theta}{dR_x} = 0.011546 (\log R_\theta + 0.211) \quad (2-27)$$

即

$$R_z = \int_0^{R_g} \frac{1}{0.011546} \cdot \frac{R_g^{3/8} dR_g}{(\log R_g + 0.211)} \quad (2-28)$$

现在来讨论上式的积分。为了得到上式的近似积分式，可以先假设分母为常数，进行积分，然后加以修正。这是因为当 R_g 变化时，分母较之分子变化较小。即近似地将上式写成

$$R_z \cong \frac{1}{0.011546} \cdot \frac{1}{(\log R_g + 0.211)} \int_0^{R_g} R_g^{3/8} dR_g$$

$$R_z = \frac{63R_g^{11/8}}{\log R_g + 0.211} \quad (2-29)$$

对上式加以修正，使之与(2-28)式的结果一致。可以修正常数系数，分子的指数或分母的指数。修正常数系数的方法得不到满意的结果，所以我们采用修正分母指数的方法，即将上式改写为如下形式，用指数 n 来修正

$$R_z = \frac{63R_g^{11/8}}{(\log R_g + 0.211)^n} \quad (2-30)$$

可以根据(2-28)式的数值积分结果来决定上式中的指数 n ，从积分的梯形法则

$$y = f(x), \int_0^h f(x) dx = h \left(\sum_{i=0}^m y_i - \frac{y_0 + y_m}{2} \right) \quad (2-31)$$

因此(2-28)式可表示为

$$R_z = \frac{\Delta R_g}{0.011546} \left\{ \sum_{j=0}^m \frac{(j \cdot \Delta R_g)^{3/8}}{\log(j \cdot \Delta R_g) + 0.211} - \frac{1}{2} \frac{(m \cdot \Delta R_g)^{3/8}}{\log(m \cdot \Delta R_g) + 0.211} \right\} \quad (2-32)$$

在(2-28)式中， $0 < R_g < 1$ 时有奇异点，因此积分从 $R_g = 1$ 开始，并假设 $R_g = 1$ 时， $R_z = 0$ 。用电子计算机很容易将(2-32)式计算出来，其计算结果列在表2—1中。根据这些结果不难从(2-30)式将 n 之值计算出来。这时

$$n = \frac{\log \left(\frac{63R_g^{11/8}}{R_z} \right)}{\log(\log R_g + 0.211)} \quad (2-33)$$

这些计算也都列在表 2—1 中， n 的平均值为 $n \approx 0.9388$ ，我们选取

$$n = 0.94$$

即(2-30)式的最后形式为

$$R_z = \frac{63R_g^{11/8}}{(\log R_g + 0.211)^{0.94}} \quad (2-34)$$

这就是本文所得到的能量方程的积分结果。为了与(2-32)式进行比较，上式的计算值也列在表2—1中。

R_g	$R_x \times 10^{-6}$ [(2-32)式]	n [(2-33)式]	$R_x \times 10^{-6}$ [(2-34)式]	误 差 $\varepsilon(\%)$
5000	2.1563	0.9315	2.1320	—
7500	3.5873	0.9369	3.5721	—
10000	5.1544	0.9403	5.1573	—
12500	6.8307	0.9429	6.8609	—
15000	8.6042	0.9447	8.6660	—
17500	10.4616	0.9462	10.5606	—
20000	12.3942	0.9474	12.5357	1.14%

现在来讨论一下 $R_x = f(R_g)$ 的反函数,即决定 $R_g = F(R_x)$ 。要从(2-34)式来解出反函数是困难的,我们可以从层流底层厚度的计算公式近似地换算出来。从(1-19)式

$$\sqrt{R_g} = 40 y_1^+ - 341 \quad (2-35)$$

通过(2-34)式将上式中的对应 R_g 换算为 R_x ,即将 $R_g \sim y_1^+$ 关系可以换算为 $R_x \sim y_1^+$ 关系,并绘在图10中。可用最小二乘法来决定 $y_1^+ \sim \log R_x$ 的回归直线方程为

$$y_1^+ = 2.1087 \log R_x - 3.1089 \quad (2-36)$$

将上式代入(2-35)式,并加以整理

$$\sqrt{R_g} \cong 84.5 \log R_x - 466$$

即

$$R_g = (84.5 \log R_x - 466)^2 \quad (2-37)$$

上式为(2-34)式的反函数。

最后讨论本文所得到的(2-34)或和其他公式的比较,以及这些公式和Klebanoff & Diehl[1]实验结果的比较。其他的计算 $R_x \sim R_g$ 的公式为:

(a) Schlichting[6], pp.599, (21.9)式:

$$R_g = 0.036 R_x^{4/5} \quad (2-38)$$

或写成

$$R_x = 66.056 R_g^{5/4} \quad (2-39)$$

(b) White[8], pp.495, (6-117)式:

$$R_g = 0.0142 R_x^{6/7} \quad (2-40)$$

或写成

$$R_x = 143.11 R_g^{7/6} \quad (2-41)$$

(2-34)式, (2-39)式及(2-41)式的计算结果及Klebanoff & Diehl的实验结果均列在表2-2中,并绘在图11中。从这些结果的比较来看,可见(2-34)式较之其余两式更接近实验结果。

各公式和实验结果的比较

表 2—2

Klebanoff & Diehl 实 验 结 果				$R_x \times 10^{-6}$	$R_x \times 10^{-6}$	$R_x \times 10^{-6}$	$R_x \times 10^{-6}$
U (ft/s)	x (ft)	θ (in)	R_x	(实验)	[(2-34)式]	[(2-39)式]	[(2-41)式]
35	5.0	0.195	3530	1.3585	1.3708	1.7974	1.9712
	5.5	0.206	3640	1.1662	1.4252	1.8676	2.0431
	6.5	0.222	4090	1.4370	1.6521	2.1606	2.3407
	7.5	0.242	4410	1.6401	1.8178	2.3739	2.5557
	8.5	0.258	4660	1.8423	1.9496	2.5433	2.7256
	9.5	0.277	4920	2.0248	2.0887	2.7219	2.9038
	10.5	0.298	5200	2.1987	2.2409	2.9169	3.0975
55	5.0	0.196	5520	1.6898	2.4177	3.1430	3.3210
	5.5	0.199	5430	1.8009	2.3677	3.0790	3.2579
	6.5	0.216	6190	2.2353	2.7971	3.6268	3.7959
	7.5	0.233	6510	2.5146	2.9825	3.8627	4.0258
	8.5	0.255	7060	2.8240	3.3071	4.2749	4.4253
	9.5	0.273	7420	3.0985	3.5236	4.5490	4.6897
	10.0	0.282	7820	3.4940	3.7676	4.8576	4.9859
108	5.0	0.188	10590	3.3798	5.5494	7.0964	7.1020
	5.5	0.192	10800	3.7125	5.7580	7.2727	7.2666
	6.5	0.208	11840	4.4400	6.4007	8.1584	8.0894
	7.5	0.222	12190	4.9419	6.6439	8.4610	8.3690
	8.5	0.238	13060	5.5971	7.2214	9.1783	9.0294
	9.5	0.257	14000	6.2101	7.9327	10.0595	9.8360
	10.5	0.272	14850	6.8790	8.5551	10.8286	10.5362

III 结 论

(A) 在整个平板湍流边界层的各层中可以用仅有一个变数 y^+ 来表示的速度分布规律

$$\begin{cases}
 \text{层流底层 } (0 \sim y_1^+) \\
 \quad u^+ = f_1(y^+) = y^+ \\
 \text{内层湍流 } (y_1^+ \sim y_2^+) \\
 \quad u^+ = f_2(y^+) = 5.75 \log y^+ + B \\
 \text{外层湍流 } (y_2^+ \sim \delta^+) \\
 \quad u^+ = f_3(y^+) = 10.4 \log y^+ - D
 \end{cases}$$

其中 B 、 D 随雷诺数的增大而增大。

(B) 各层厚度均可分别由下列各式所决定

$$\begin{cases} y_i^+ = \frac{1}{40} (\sqrt{R_i} + 341) \\ \log y_i^+ = 0.837 \log R_i - 0.372 \end{cases}$$

(C) 根据以上结果, 可以对能量方程积分求解, 即分层计算摩擦功, 从而得到 $R_x \sim R_i$ 的关系为

$$R_x = \frac{63 R_i^{11/8}}{(\log R_i + 0.211)^{0.94}}$$

从层流底层厚度的计算式还可以决定上式的反函数为

$$R_i = (84.5 \log R_x - 466)^2$$

与 Klebanoff & Diehl [1] 的实验结果比较, 本文所得到的(2-34)式较之现有的公式 [(2-39)和(2-41)两式] 给出较为满意的结果。

参 考 文 献

- [1] Klebanoff and Diehl, «Artificially Thickened Fully Developed Turbulent Boundary Layers With Zero Pressure Gradient». NACA TR1110, (1952).
- [2] Coles, «The Law of the Wake in the Turbulent Boundary Layer». J. of Fluid Mech., vol.7, (1956).
- [3] Cebeci and Mosinskis, «Computation of Incompressible Turbulent Boundary Layers at Low Reynolds Numbers». AIAA Journal, vol.9, (1971).
- [4] Granville, «A Modified Law of the Wake for Turbulent Shear Layer». J. of Fluid Engineering, vol.98, (1976).
- [5] Dean, «A Single Formula for the Complete Velocity Profile in a Turbulent Boundary Layer». J. of Fluid Engineering, vol. 98, (1976).
- [6] Schlichting, «Boundary Layer Theory». (1968).
- [7] Huffman and Bradshaw, «A Note on von Karman's Constant in Low Reynolds number Turbulent Flows». J. of Fluid Mech., vol. 53, (1972).
- [8] White, «Viscous Fluid Flow». (1974).
- [9] Cebeci, Smith and Mosinskis, «Solution of the Incompressible Turbulent Boundary-Layer Equations with Heat Transfer». J. of Heat Transfer, vol.92, (1970).

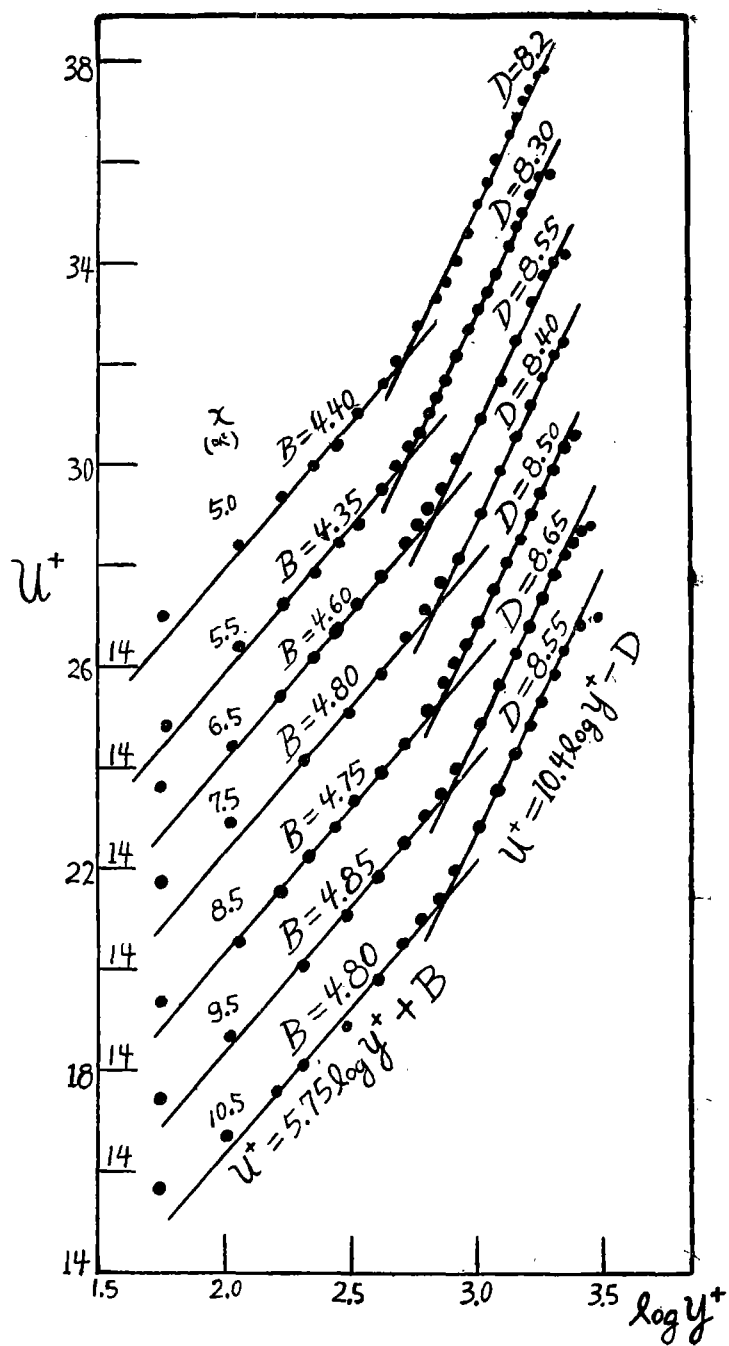


图 2

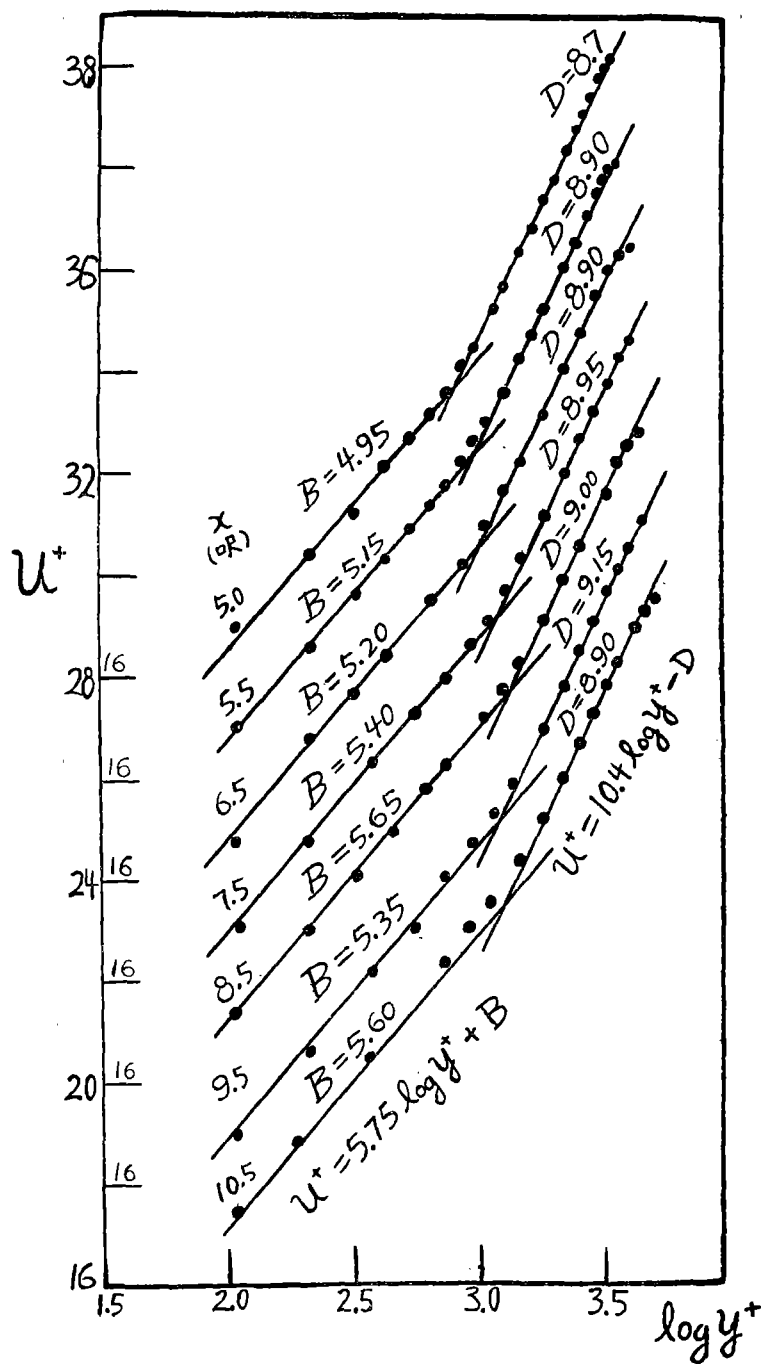


图 3

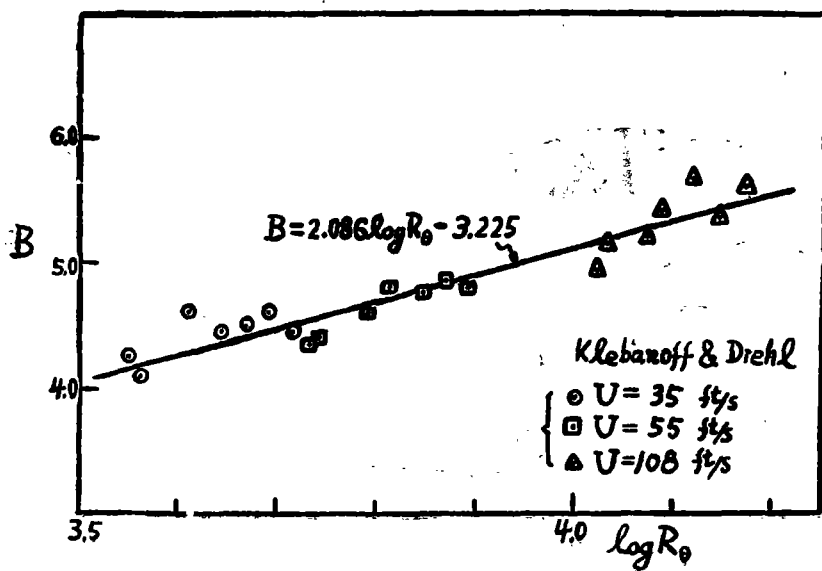


图 4

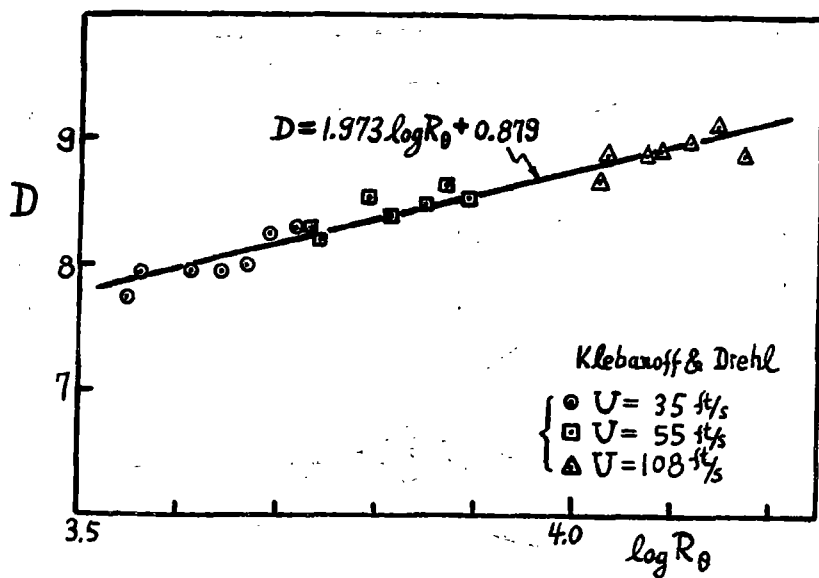


图 5

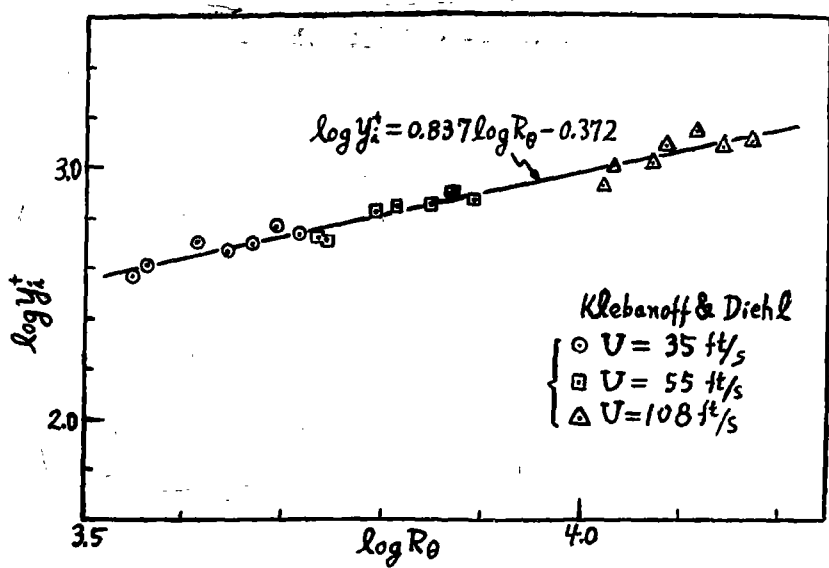


图 6

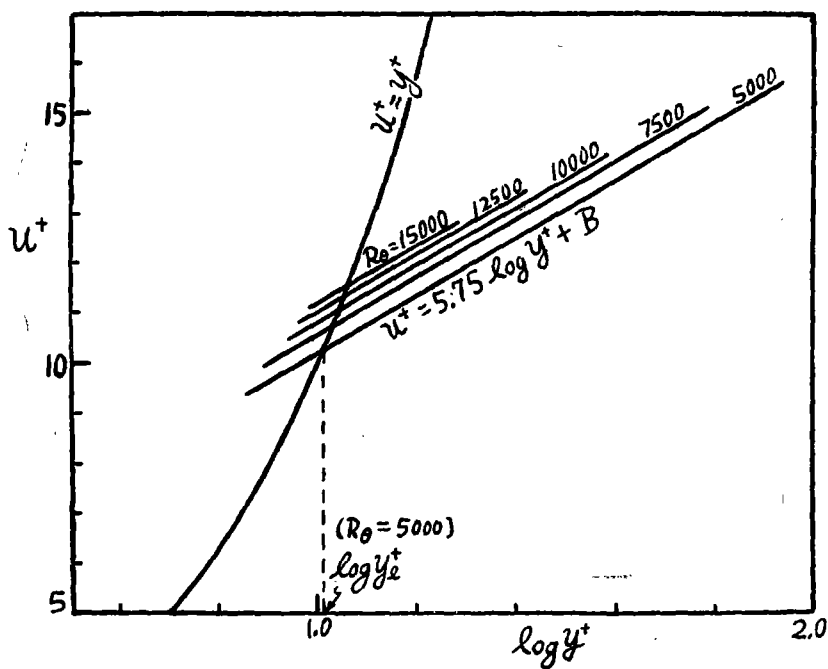


图 7

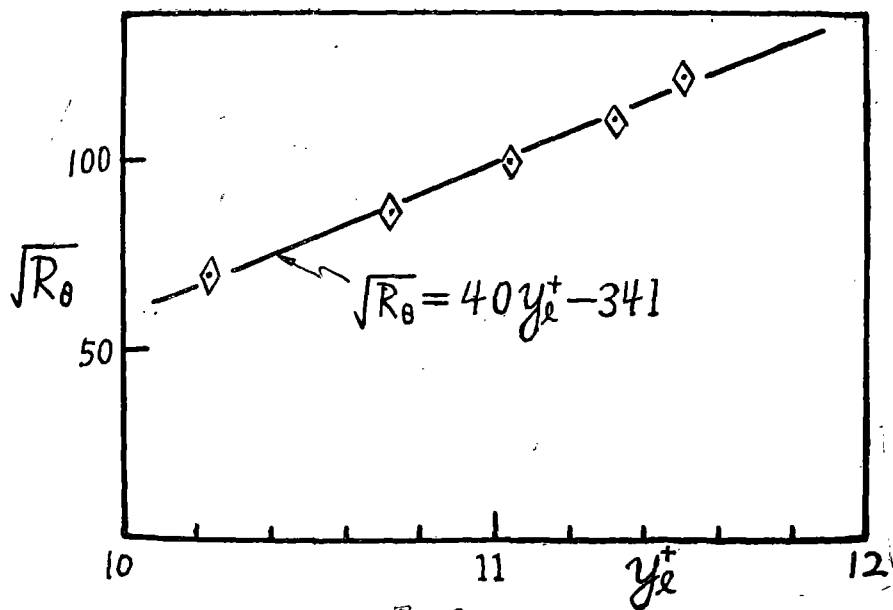


图 8

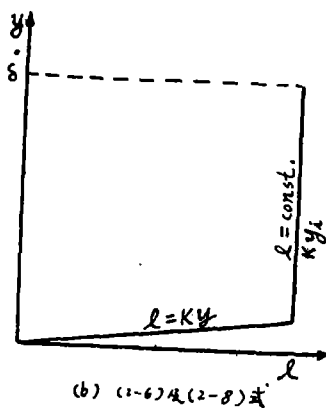
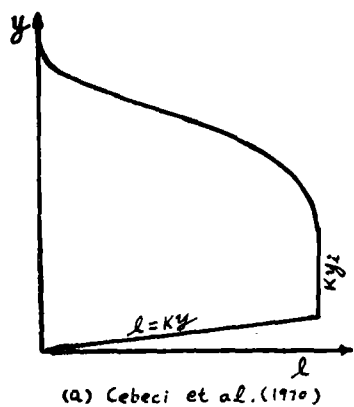


图 9

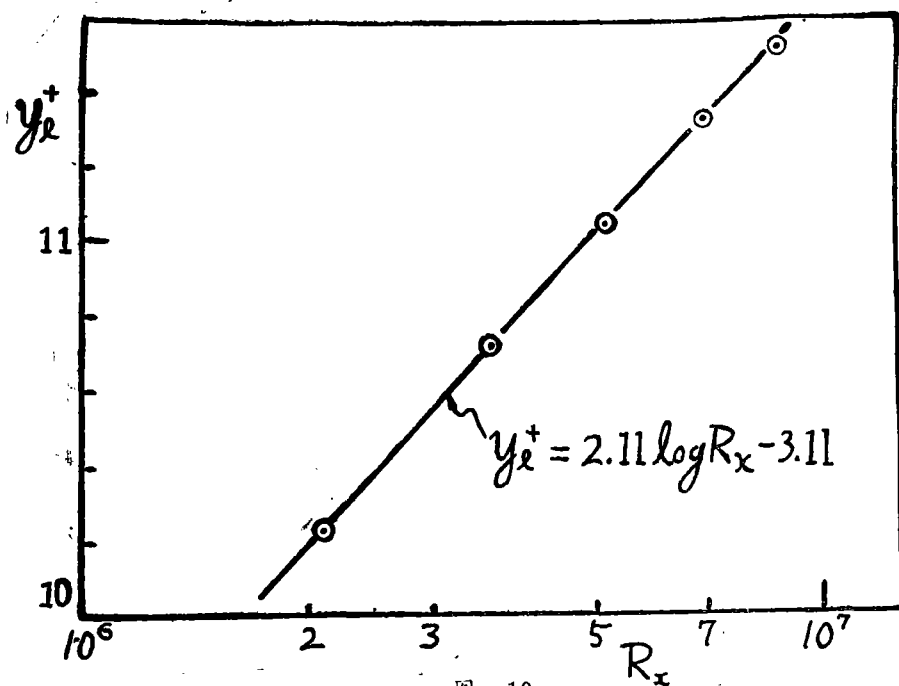


图 10

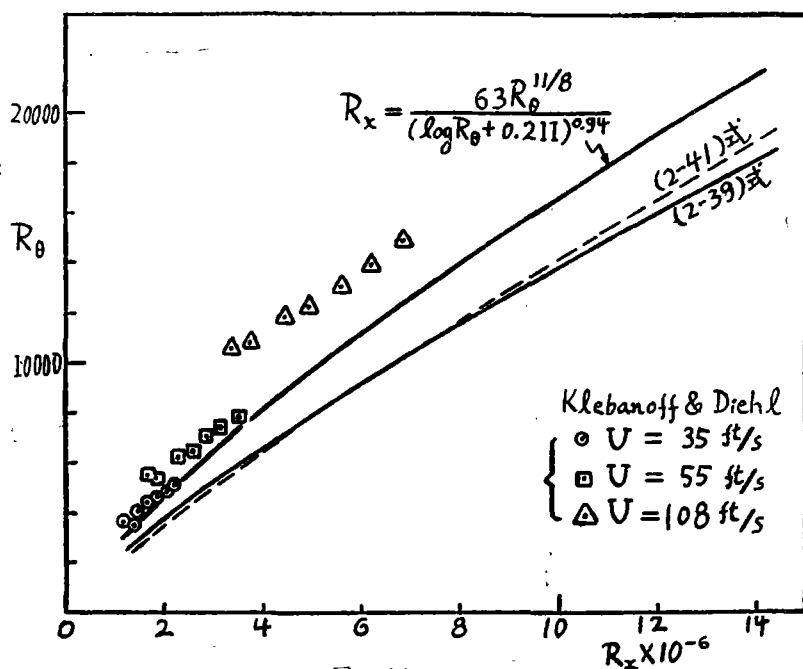


图 11