

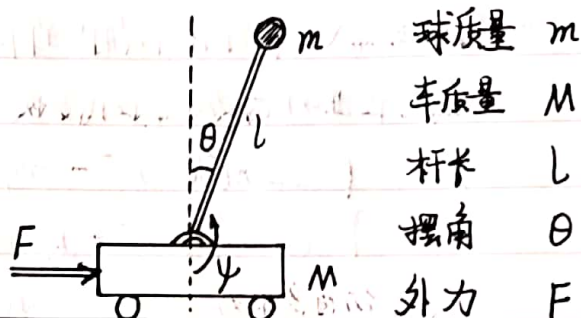
(设计)

2.6 B. 建立此倒立摆系统微分方程并线性化,

给出由输入力 F 到输出摆角 θ 的传递

(校正) 函数。

2.6 C. 分析系统稳定性, 设计反馈控制使系统稳定。



解 2.6 B: 利用牛顿-欧拉方法建立直线型一级倒立摆系统的数学模型。

几何与质量信息 (各元件) 已在图中标出。忽略摆杆质量。

分别对小车与摆杆球结构进行受力分析如图(a)与(b)所示。

① 建立此倒立摆系统微分方程并线性化。

A. 1) 分析小车在水平方向的受力, 有方程:

$$M\ddot{x} = F - f_x - N' \quad (1)$$

分析摆杆球系统在水平方向的受力, 有

$$N = m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \psi)$$

$$\text{即 } N = m\ddot{x} + ml \left(\frac{d^2 \sin \psi}{dt^2} \right)$$

$$= m\ddot{x} + ml\ddot{\psi} \cos \psi - ml\dot{\psi}^2 \sin \psi \quad (2)$$

又由牛顿第三定律: $N = N'$, 故由(1)(2)式可得:

$$(M+m)\ddot{x} + f_x + ml\ddot{\psi} \cos \psi - ml\dot{\psi}^2 \sin \psi = F \quad (3)$$

2) 对摆杆垂直方向上的合力进行分析, 可得:

$$P - mg = m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \psi)$$

$$\text{即有: } P - mg = -ml\ddot{\psi} \sin \psi - ml\dot{\psi}^2 \cos \psi \quad (4)$$

又列写力矩平衡方程, 有:

$$-Pl \sin \psi - Nl \cos \psi = ml^2 \ddot{\psi} \quad (5)$$

故由(4)-(5)式, 可得第二个运动微分方程:

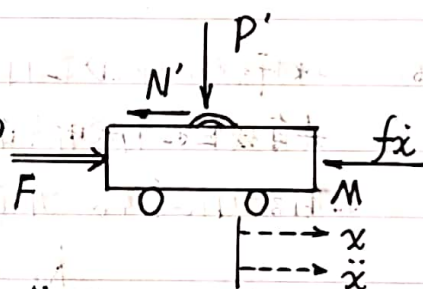
$$2ml^2 \ddot{\psi} + mgl \sin \psi = -ml\ddot{x} \cos \psi \quad (6)$$

B. 由 $\psi = \theta + \pi$, 若 θ 很小, 则有 $\cos \psi = -\cos \theta \approx -1$, $\sin \psi = -\sin \theta \approx -\theta$, $\dot{\psi}^2 = 0$

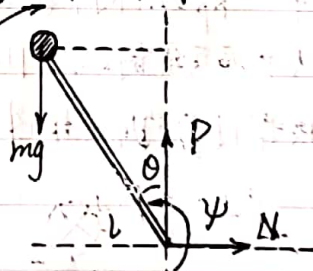
则线性化微分方程组为:

由 (3), (6),

$$\begin{cases} 2ml^2 \ddot{\theta} - mgl\theta = ml\ddot{x} \\ (M+m)\ddot{x} + f_x - ml\ddot{\theta} = F \end{cases} \quad (7)$$



图(a) 小车间离受力分析图



图(b) 摆杆(带球)隔离受力分析图

② 给出由输入力 F 到输出摆角 θ 的传递函数。

对方程组(4)两边进行拉氏变换, 可得:

$$\begin{cases} 2ml^2 \theta(s)s^2 - mgl\theta(s) = mlX(s)s^2 & (5) \\ (M+m)X(s)s^2 + fX(s)s - m\theta(s)s^2 = F(s) & (6) \end{cases}$$

假设初始条件为0, 联立(5)(6)两式消去 $X(s)$, 则可得到

∴ 由输入力 $F(s)$ 到输出摆角 $\theta(s)$ 的传递函数 $G_1(s)$ 为

$$G_1(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{s}{(2M+m)ls^2 + 2fls^2 - (M+m)gs - gf}$$

解2.6C 球杆系统的PID控制器设计如下。

具有线性控制器特点的PID控制器由偏差的比例、积分与微分环节组成, PID控制器的传递函数一般形式为:

$$K_D(s) = T_D s + K_P + \frac{T_I}{s} = \frac{T_D s^2 + K_P s + T_I}{s}$$

其中: K_P 为比例系数; T_I 为积分时间常数; T_D 为微分时间常数, 参数可调整控制。

以一级直线倒立摆的摆杆角度(平衡位置为垂直向上, $\theta=0^\circ$)为输入量 $C(s)$, 得到该控制器的原理框图如图3所示。

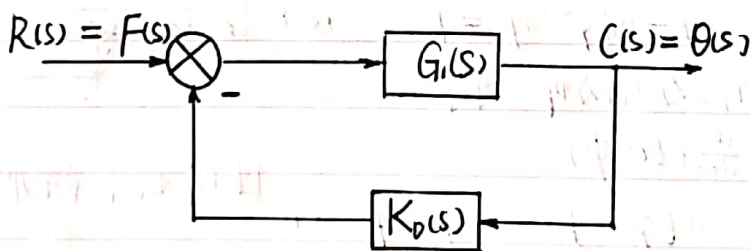


图3 以摆杆角度为输出的系统PID控制原理图

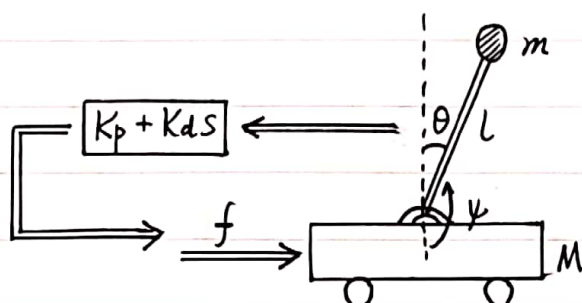
则该控制系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + K_D(s)G_1(s)} = \frac{\frac{num_1}{den_1}}{1 + \frac{(num_{PID})(num_1)}{(den_{PID})(den_1)}}$$

其中: num_1, den_1 分别代表传递函数 $G_1(s)$ 的分子、分母;

num_{PID}, den_{PID} 分别代表PID传递函数 $K_D(s)$ 的分子、分母。

2.6D 倒立摆控制系统根轨迹 (自设参数)



建议参数设置:

M 可取 10kg ;
 m 取个人体重 $\approx 60\text{kg}$;
 l 取个人身高的 60% $\approx 1.02\text{m}$.

在 2.6C 闭环倒立摆系统基础上, 绘制该系统根轨迹。 $f = 0.1$

2.6E 绘制 2.6D 闭环倒立摆系统频率特性。

2.6F 根据 2.6D 闭环系统倒立摆频率特性分析其稳定性, 并估算保持稳定需用的最小电机功率。

由 2.6C 建模可知
解:

输入力 $F(s)$ 到输出摆角 $\theta(s)$ 的传递函数为:

$$G_1(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{\frac{ml}{q} s^2}{s^4 + \frac{f(I+ml^2)}{q} s^3 - \frac{(m+M)mgL}{q} s^2 - \frac{fmqL}{q} s}$$

输入力 $F(s)$ 到输出位移 $X(s)$ 的传递函数为:

$$G_2(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\left(\frac{I+ml^2}{q}\right)s^2 - \frac{mgL}{q}}{s^4 + \frac{f(I+ml^2)}{q} s^3 - \frac{(m+M)mgL}{q} s^2 - \frac{fmqL}{q} s}$$

其中, $q = [(M+m)(I+ml^2) - (ml)^2]$

实际情况, 可取 $I = ml^2$, 即有 $M = 10\text{kg}$, $m = 60\text{kg}$, $l = 1.02\text{m}$, $I = 62.424$,
 设阻力系数 $f = 0.1$;

下面利用 MATLAB 对 PD 控制器建模并测试。取 PI 控制器参数 $K_p = 5000$;
 $K_d = 1000$.

自动控制原理作业——倒立摆系统建模分析结果说明

学院：航空学院 学号：2017300281 姓名：冯铮浩

1. 一级直线倒立摆控制系统建模与分析

由 2.6B 倒立摆系统微分方程线性化流程可得，输入力 $F(s)$ 到输出摆角 $\theta(s)$ 的传递函数为

$$G_1(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s^2}{s^4 + \frac{f(I+ml^2)}{q}s^3 - \frac{(m+M)mgl}{q}s^2 - \frac{fmgl}{q}s}$$

其中， $q = [(M+m)(I+ml^2) - (ml)^2]$ ， m 代表小球质量， M 代表小车质量， l 代表杆长， I 代表杆与球相对于转轴的惯性矩， $\theta(s)$ 代表经拉式变换后的摆角（与竖直方向夹角）， $F(s)$ 代表经拉式变换后的外力。

由 2.6C 反馈控制系统设计可得，此处宜采用比例-微分（PD）控制或者比例-积分-微分（PID）控制，下面对 PD 控制器进行建模说明。具有线性控制器特点的 PD 控制器由偏差的比例、微分环节组成，其传递函数一般为

$$K_{PD}(s) = K_D s + K_P = K_P (1 + T_D s)$$

其中， K_P 为比例环节常数， K_D 为微分环节常数， $T_D = K_D / K_P$ 为微分时间常数。

$K_{PD}(s)$ 的开环对数频率特性曲线（Bode 图）如图 6.1 所示，可知 PD 校正为相角超前校正。由于微分控制反映误差信号的变化趋势，具有“预测”能力，因此，PD 控制器能在误差信号变化之前给出校正信号，防止系统出现过大的偏离和振荡，可以有效地改善系统的动态性能。另外，PD 控制器抬高了高频段，使得系统抗高频干扰能力下降。

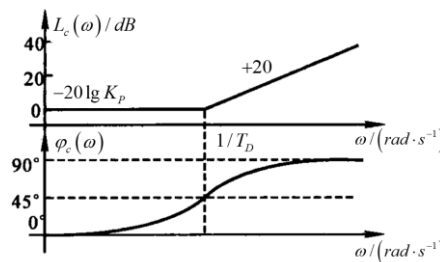


图 6.1 PD 控制器开环对数频率特性曲线（Bode 图）

在已经建模的一级直线倒立摆中，以外力 $F(s)$ 为输入量 $R(s)$ ，摆杆角度（平衡位置为竖直向上） $\theta(s)$ 为输出量 $C(s)$ ，将 PD 控制器串联形成负反馈控制回路，如图 6.2 所示。

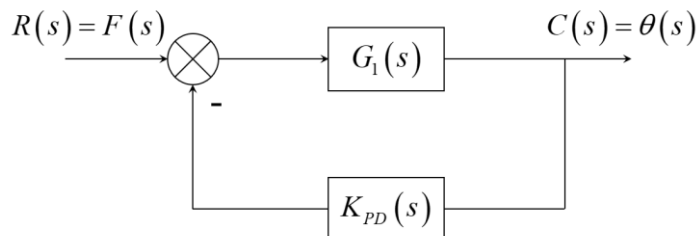


图 6.2 以摆杆角度为输出的系统 PD 闭环控制原理图

则该控制系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + K_{PD}(s)G_1(s)} = \frac{\frac{num_1}{den_1}}{1 + \frac{(numPD)(num_1)}{(denPD)(den_1)}}$$

其中， num_1, den_1 分别代表原传递函数 $G_1(s)$ 的分子和分母； $numPD, denPD$ 分别代表 PD 控制器串联反馈传递函数的分子和分母。通过对 PD 控制器参数合理的调节，可对倒立摆系统起到良好的控制效果。

下面进行参数设置。对于一种成年人站立在该倒立摆上保持稳定的实际情况，可取 $M = 10 \text{ kg}$ ， m 为正常成年人质量 $m = 60 \text{ kg}$ ， l 取个人身高（170cm）的 60%，即为 $l = 0.6 \times 1.7 = 1.02 \text{ m}$ ，小车与地面之间的摩擦阻力系数为 $f = 0.1$ ，假设杆无质量，故有杆球相对于转轴的惯性矩为 $I = ml^2 = 62.424 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

代入各参数，可得到原始未加控制器的倒立摆系统传递函数 $G_1(s)$ 为

$$G_1(s) = \frac{0.012255s}{s^3 + 0.0025s^2 - 8.4069s - 0.01201}$$

其特征方程的特征根为 $\lambda_1 = -2.8979$ ， $\lambda_2 = +2.8968$ ， $\lambda_3 = -0.0014$ ，存在一个较大的正根，故原始的倒立摆系统不稳定。

选取 PD 控制器参数为 $K_p = 5000$ ， $K_d = 1000$ ，即 $T_D = K_p / K_d = 0.2$ 。则添加 PD 控制器后的倒立摆系统开环系统为

$$G(s) = G_1(s)K_{PD}(s) = \frac{12.2549s^2 + 61.2745s}{s^3 + 0.0025s^2 - 8.4069s - 0.01201}$$

其特征方程的特征根有一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = -6.1288 \pm 3.9126i$ ，另有一个很接近零的正根， $\lambda_3 = 0.000227$ ，故添加 PD 控制器后的倒立摆系统能够保持稳定。

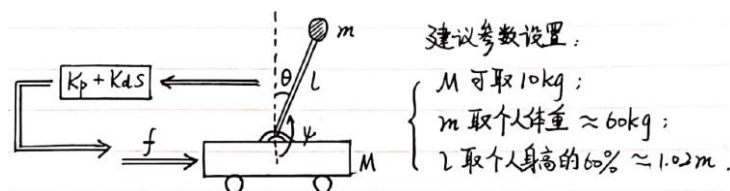
添加 PD 控制后的倒立摆系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{0.012255s}{s^3 + 12.2574s^2 + 52.8676s - 0.01201}$$

下面结合作业题目要求，利用根轨迹法、频率分析法对原始倒立摆系统与加 PD 控制器的系统进行比较，并说明控制系统的特性。

2. 作业解答

题 2.6D 倒立摆控制系统根轨迹（自设参数）



问：在 2.6C 闭环倒立摆系统的基础上，绘制该系统根轨迹。

解 2.6D：

根据已经建立的倒立摆控制系统，利用 MATLAB 软件绘制添加 PD 控制器的倒立摆系统根轨迹，如图 6.3 所示。

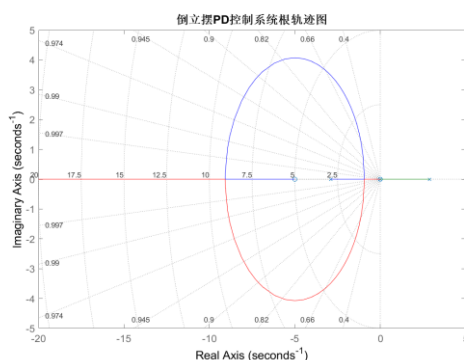


图 6.3 倒立摆 PD 控制系统根轨迹图

观察上图可知，倒立摆 PD 控制系统有两条根轨迹，且变化区域均在虚轴的左半平面，可知系统随着增益的增大，能够保持较好的稳定性；且在根轨迹的类半圆曲线上，系统处于振荡收敛状态，有一定超调量。

题 2.6E 绘制 2.6D 闭环倒立摆系统的频率特性。

题 2.6F 根据 2.6D 闭环控制系统倒立摆特性分析其稳定性，并估算保持稳定需用的最小电机功率。

解 2.6E、F：

利用 MATLAB 软件绘制添加 PD 控制器的倒立摆系统的幅相特性曲线（Nyquist 图）与对数频率特性曲线（Bode 图），如图 6.4 所示。

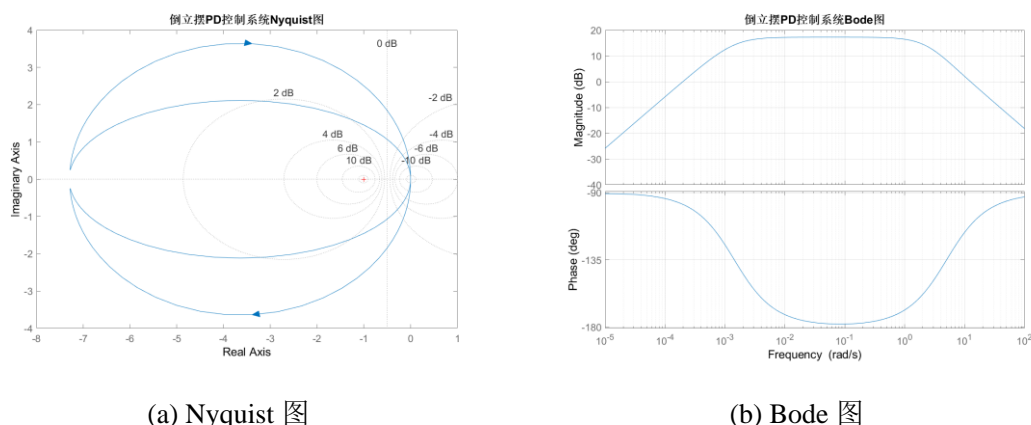


图 6.4 闭环倒立摆 PD 控制系统的频率特性图线（Nyquist 图、Bode 图）

观察上图中的对数频率特性曲线，利用三段论分析，可知在低频段，闭环倒立摆系统稳定性很好，相角裕度较大；在中频段，闭环系统能够保持稳定，但相角裕度较小，在 $[10^{-2}, 10^0]$ 频率区间内接近于零；在高频段，闭环系统与低频段类似，稳定性较好，但抗高频干扰能力较差。

由以上倒立摆系统控制理论，现将单位阶跃输入情况下的倒立摆原始系统和添加 PD 控制器后的系统时域响应进行绘图对比，如图 6.5 所示。

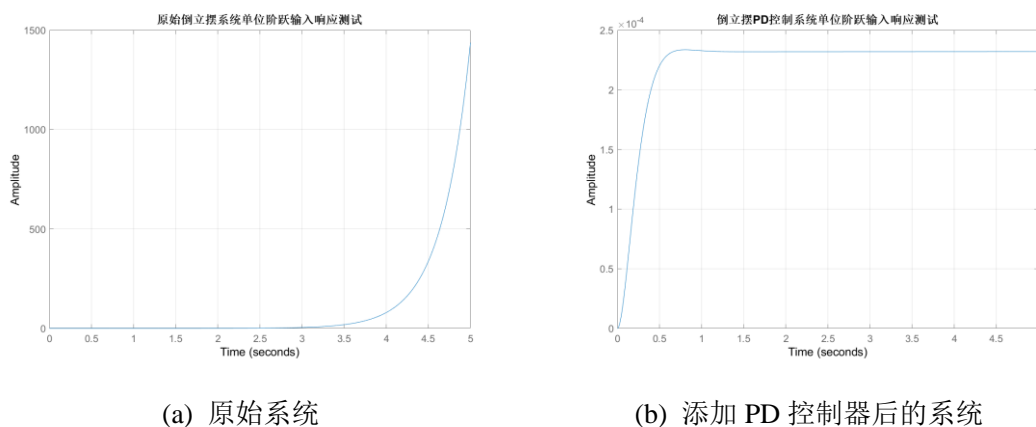


图 6.5 倒立摆原始系统与 PD 控制系统的单位阶跃输入响应曲线

由上图可见，原始倒立摆系统单位阶跃输入下的时域响应趋势发散，对应于实际倒立摆失稳倒地的状态；添加 PD 控制器后的倒立摆系统时域响应曲线在较短时间内上升，并较快趋于稳定值，超调量较小，对应于实际倒立摆在向前行进的同时保持一稳定的摆角值，控制效果较好。

估算保持稳定需用的最小电机功率方法如下。系统输入外力为 F ，可假设电机功率即为外力功率，即有

$$P_{\text{电机}} = P_F$$

又由外力功率满足

$$P_F = F \cdot V$$

其中， V 为小车前进速度。

考虑 $F(s)$ 为单位阶跃输入下，实际倒立摆小车系统不会运动，其原因为外力太小而无法使得系统克服摩擦阻力前进，而倒立摆的角度响应没有实际价值。所需最小外力 F 需要满足

$$F = f \cdot (M + m)g = 68.6 \text{ N}$$

在此外力作用下，输出角度响应 $\theta = 0.0159 \text{ rad} = 0.9110 \text{ deg}$ ，此时倒立摆上部摆杆保持该角度不变，故有 $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ 。

题 2.6B 中已建立倒立摆系统线化后的微分方程组为

$$\begin{cases} 2ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = ml\ddot{x} \\ (M + m)\ddot{x} + f\ddot{x} - ml\ddot{\theta} = F \end{cases}$$

考虑到 $\dot{x} = V, \ddot{x} = a$ ，并略去两式中 θ 的高阶项，即可得到

$$\begin{cases} -mgl\theta = mla \\ (M + m)a + fV = F \end{cases}$$

进一步化简，并代入 θ 和 F 的值，可解得此时倒立摆系统的运动特性为

$$\begin{cases} a = -0.15582 \text{ m/s}^2 \\ V = 1.13582 \text{ m/s} \end{cases}$$

故此时外力 F 功率（即为最小电机功率）为

$$P_F = F \cdot V = 68.6 \times 1.13582 = 77.7173 \text{ W}.$$

3. MATLAB 源程序代码

本部分有关倒立摆系统的特性分析部分代码均采用 MATLAB 软件编写，合并为一个.m 文件如下表，源代码文件已同时保存至提交作业压缩包下，烦请张老师查看与指正。

程序编号	P1	实现功能	倒立摆控制系统建模与特性分析
程序名称	Program_inverted_pendulum_system_design.m		
<pre>%% 自动控制原理——倒立摆系统建模与控制系统设计 %% 程序初始化 clear all clf clc %% 参数设定（均为国际标准单位） M=10;% 倒立摆小车质量 m=60;% 摆球质量，取为个人体重 l=1.02;% 杆长，取为个人身高的60% I=m*l*l;% 摆球转动惯量（相对于圆心） f=0.1;% 水平地面摩擦系数 g=9.8;% 重力加速度 %% 系统建模 q=(M+m)*(I+(m*l*l))-((m*l)^2); num=[m*l/q 0 0]; den=[1 (f*(I+m*l*l))/q ((-1)*(m+M)*m*g*l)/q (-1)*f*m*g*l/q 0]; fprintf('【原始倒立摆系统建模】\n'); fprintf('\n'); fprintf('原始倒立摆系统 输入力F—摆角theta 传递函数G(s): \n'); printsys(num,den); fprintf('\n'); r_ori=roots(polyadd2(num,den)) fprintf('\n'); %% PD控制系统建模 fprintf('【倒立摆PD控制系统建模】\n'); fprintf('\n'); Kp=5000; % Ki=800; Kd=1000; numPID=[Kd Kp 0]; denPID=[1 0];</pre>			

```
% PD控制系统开环传递函数建模
num_open=conv(num,numPID);
den_open=conv(den,denPID);
fprintf('倒立摆PD控制系统开环传递函数Gc(s): \n');
printsys(num_open,den_open);
fprintf('\n');
r_con_open=roots(polyadd2(num_open,den_open))
fprintf('\n');

% PD控制系统闭环传递函数建模
num_con=conv(num,denPID);
den_con=polyadd2(conv(denPID,den),conv(numPID,num));
fprintf('倒立摆PD控制系统闭环传递函数Phi(s): \n');
printsys(num_con,den_con);
fprintf('\n');

%% 绘制控制系统根轨迹（开环传递函数特性）
sys_open=tf(num_open,den_open);
rlocus(sys_open);
title('倒立摆PD控制系统根轨迹图');
grid on;
box on;

%% 绘制控制系统根频率特性曲线（Nyquist图、Bode图）
figure;
nyquist(sys_open); % 绘制Nyquist图
title('倒立摆PD控制系统Nyquist图');
grid on;
box on;

figure;
bode(sys_open); % 绘制Nyquist图
title('倒立摆PD控制系统Bode图');
grid on;
box on;

%% 系统测试（时域分析）
% 原始倒立摆系统单位阶跃输入响应测试
figure;
t=0:0.0005:5;
step(num,den,t);
title('原始倒立摆系统单位阶跃输入响应测试');
grid on;
box on;
```

```
% 倒立摆控制系统单位阶跃输入响应测试  
figure;  
t=0:0.0005:5;  
step(num_con,den_con,t);  
title('倒立摆PD控制系统单位阶跃输入响应测试');  
grid on;  
box on;
```