

最小二乘混合配点法解简支矩形薄板的弯曲

王嘉新 罗雄辉

(中南工业大学资源环境与建筑工程学院, 长沙, 410083)

摘 要 采用最小二乘混合配点法解算了承受均布荷载作用的四边简支矩形薄板的弯曲问题. 该法在选取挠度试函数时, 既不要求预先满足微分方程, 也不要求必须满足边界条件. 研究结果表明, 通过全域内及边界面上的配点, 可获得令人满意的解答, 并且通过增加配点的数目, 能够提高待解问题的精度.

关键词 最小二乘法; 薄板; 弯曲

中图法分类号 O343.8

在求解板的弯曲问题时, 往往很难获得解析解. 近年来, 由于电子计算机的发展, 数值计算(如最小二乘法、配点法等)广为采用^[1~3]. 但在计算中常被选取合适的试函数所困扰. 为此, 本文提出最小二乘混合配点法, 该法在选择板挠度的试函数时, 既不要求试函数完全满足板挠曲面的控制微分方程, 也不要求满足全部边界条件, 而是通过在域内及边界面上的配点的残值方程组, 按照最小二乘法的极值原理得出确定待定参数的方程组, 求解这些方程组, 从而得出既满足域内基本方程又满足边界条件的解答.

文中以承受均布载荷的四边简支矩形薄板的弯曲为例, 说明了这种方法的求解过程. 结果表明, 所提出的这种混合式配点方法具有简便有效、精度足够的特点.

1 基本方程

薄板弯曲的挠曲面控制微分方程及边界条件分别为

$$Fu - f = 0 \quad (\text{区域 } V \text{ 内}) \quad (1)$$

$$Gu - g_t = 0 \quad (\text{边界面 } S \text{ 上}) \quad (2)$$

式中, u 是待求函数, F 及 G_t 为微分算子, t 是边界条件的个数($t = 1, 2, \dots, n$), f 及 g_t 是某个已知函数.

将配点坐标代入区域 V 及边界面 S 上, 所形成的残值平方之和式为

$$I_d(c, x, y) = \sum_{i=1}^k R_{li}^2(c, x, y) + \sum_{i=k+1}^m W_i^2 R_{Bi}^2(c, x, y) \quad (3)$$

式中, $R_{li}(c, x, y)$ 为内部区域 V 中的残值, $R_{Bi}(c, x, y)$ 为边界面 S 上的残值, W_i 为权函数, 一般取为 1. 为使残值平方之和 I_d 为最小, 先列出经配点法后得出的残值方程组:

$$\begin{pmatrix} R_{l1}(c, x_1, y_1) \\ \vdots \\ R_{l1}(c, x_k, y_k) \\ \vdots \\ W R_{B1}(c, x_{k+1}, y_{k+1}) \\ \vdots \\ W R_{B1}(c, x_m, y_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F\tilde{u}(c, x_1, y_1) - f(x_1, y_1) \\ \vdots \\ F\tilde{u}(c, x_k, y_k) - f(x_k, y_k) \\ \vdots \\ W[G\tilde{u}(c, x_{k+1}, y_{k+1}) - g(x_{k+1}, y_{k+1})] \\ \vdots \\ W[G\tilde{u}(c, x_m, y_m) - g(x_m, y_m)] \end{pmatrix} \quad (4)$$

如用矩阵表示(4)式, 则可写为

$$R = AC - B \quad (5)$$

这里, 矩阵 A 是待定参数 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}^T$ 的系数矩阵 $A_{m \times n}$, 且 $m \geq n$, $B = \{f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \dots, W g(x_m, y_m)\}^T$ 为不含 \tilde{u} 的函数值列阵. 组成残值平方之和式应为

$$I_d = R^T \cdot R \quad (6)$$

对式(6)求最小值, 即

$$\frac{\partial I_d}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

将式(6)代入式(7), 化简后得

$$\frac{\partial I_d}{\partial C_i} = 2A^T AC - 2A^T B = 0 \quad (8)$$

故

$$A^T AC = A^T B \quad (9)$$

这样, 只须求解式(9)就可得出待定系数 C_i , 从而得到 u 的近似解, 而不必进行积分运算. 至于最小二乘法的精度则可由总残值 I_d 以及个别点残值 R_i 或 R_B 估算出来.

2 算 例

为方便计, 兹以求解简支矩形薄板的弯曲问题为例. 板挠曲面的控制微分方程为^[4]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) / D \tag{10}$$

式中, w 为板的挠度, $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ 为板的抗弯刚度, μ 为泊松比, t 为板的厚度, $q(x, y)$ 为分布外荷载.

对于受均布荷载 q 作用的四边简支矩形薄板, 计算时, 只取 1/4 板面进行分析, 如图 1 所示. 其边界条件为

$$\text{在 } x = 0 \text{ 及 } x = \pm a/2 \text{ 处, } w = 0, M_x = 0 \tag{11a}$$

$$\text{在 } y = 0 \text{ 及 } y = \pm a/2 \text{ 处, } w = 0, M_y = 0 \tag{11b}$$

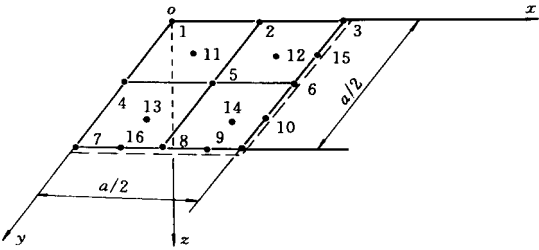


图 1 1/4 简支矩形薄板及配点图

选取如下形式的试函数作为板挠度的近似解:

$$\tilde{w} = \sum_{m=0}^r A_m x^m + \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s C_{mn} x^m y^n + \sum_{n=0}^s B_n y^n \tag{12}$$

在板的内部配 4 个点, 即 1, 2, 4, 5, 在板的边界面上配 6 个点, 即 3, 6, 7, 8, 9, 10, 如图 1 所示.

由边界上的 6 个配点及边界面上的边界条件可得 12 个边界残值方程, 由区域内部的 4 个配点可得 4 个内部残值方程, 总方程数目为 16 个, 故取试函数为 16 项, 即

$$\begin{aligned} \tilde{w} = & C_0 + C_{1x} + C_{2x^2} + C_{3x^3} + C_{4xy} + C_{5xy^2} + C_{6xy^3} + \\ & C_{7x^2y} + C_{8x^2y^2} + C_{9x^2y^3} + C_{10xy^3} + C_{11x^3y^2} + \\ & C_{12x^3y^3} + C_{13y} + C_{14y^2} + C_{15y^3} \end{aligned} \tag{13}$$

由式(10), (11a), (11b) 及(13) 可得板内部区域及边界面上的无量纲化残值方程分别为

$$R_1 = 8C_0 + 24C_1 + 24C_2 + 72C_3 + 72C_4 + 72C_5 + 72C_6 + 72C_7 + 72C_8 + 72C_9 + 72C_{10} + 72C_{11} + 72C_{12} + 72C_{13} + 72C_{14} + 72C_{15} \tag{14}$$

$$R_{B1} = \bar{w} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} R_{B2} = & 2C_2 + 6\bar{x}C_3 + 2\bar{y}C_7 + 2C_8\bar{y}^2 + 2C_9\bar{y}^3 + \\ & 6C_{10}\bar{x}\bar{y} + 6C_{11}\bar{x}\bar{y}^2 + 6C_{12}\bar{x}\bar{y}^3 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} R_{B3} = & 2C_5\bar{x} + 6C_6\bar{x}\bar{y} + 2C_8\bar{x}^2 + 6C_9\bar{x}^2\bar{y} + \\ & 2C_{11}\bar{x}^3 + 6C_{12}\bar{x}^3\bar{y} + 2C_{14} + 6C_{15}\bar{y} \end{aligned} \tag{17}$$

在式(14) ~ (17) 中, $\bar{x} = x/a$, $\bar{y} = y/a$, $\bar{w} = w/a$, a 为矩形薄板边长.

再将各配点坐标代入相应的残值方程, 便得如下残值方程组:

$$\bar{w}_3 = C_0 + C_1 + C_2 + C_3$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_6 = & C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + 0.5C_4 + 0.25C_5 + 0.125C_6 + \\ & 0.5C_7 + 0.25C_8 + 0.125C_9 + 0.5C_{10} + 0.25C_{11} + \\ & 0.125C_{12} + 0.5C_{13} + 0.25C_{14} + 0.125C_{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_{10} = & C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + 0.75C_4 + 0.5625C_5 + \\ & 0.4219C_6 + 0.75C_7 + 0.5625C_8 + \\ & 0.4219C_9 + 0.75C_{10} + 0.5625C_{11} + \\ & 0.4219C_{12} + 0.75C_{13} + \\ & 0.5625C_{14} + 0.4219C_{15} \end{aligned}$$

$$\bar{w}_7 = C_0 + C_{13} + C_{14} + C_{15}$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_8 = & C_0 + 0.5C_1 + 0.25C_2 + 0.125C_3 + 0.5C_4 + 0.5C_5 + \\ & 0.5C_6 + 0.25C_7 + 0.25C_8 + 0.25C_9 + 0.125C_{10} + \\ & 0.125C_{11} + 0.125C_{12} + C_{13} + C_{14} + C_{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_9 = & C_0 + 0.75C_1 + 0.5625C_2 + 0.4219C_3 + 0.75C_4 + \\ & 0.75C_5 + 0.75C_6 + 0.5625C_7 + 0.5625C_8 + \\ & 0.5625C_9 + 0.4219C_{10} + 0.4219C_{11} + \\ & 0.4219C_{12} + C_{13} + C_{14} + C_{15} \end{aligned}$$

$$R_{11} = 8C_8 - \frac{qa^3}{D}$$

$$R_{12} = 8C_8 + 12C_{11} - \frac{qa^3}{D}$$

$$R_{14} = 8C_8 + 12C_9 - \frac{qa^3}{D}$$

$$R_{15} = 8C_8 + 12C_9 + 12C_{11} + 18C_{12} - \frac{qa^3}{D}$$

利用式(9), 经编程微机计算得出板的挠度与弯矩值, 如表 1 所示.

由表 1 可见, 板中最大弯矩值与经典解的误差为 3.26%, 最大挠度值与经典解的误差为 0.52%. 在不变试函数而配点数增加一倍, 即域内增加 4 个配点(11, 12, 13, 14), 边界面上增加两个配点(15, 16), 则增加 8 个残值方程, 经上机计算得出表 2 所列结果.

由表 2 可见, 板中最大弯矩值与经典解的误差为 0.15%, 最大挠度值与经典解的误差为 0.07%.

表 1 经典解与本文解的挠度值和弯矩值(配点数未增加前)

点号	$w/(qa^4/D)$		M_x/qa^2		M_y/qa^2	
	本文解	经典解	本文解	经典解	本文解	经典解
1	0.004939	0.00406	0.04634	0.0479	0.04634	0.0479
2	0.002843	0.00287	0.03329	0.0338	0.03527	0.0369
4	0.002843	0.00287	0.03327	0.0338	0.03229	0.0338
5	0.002027	0.00204	0.02593	0.0261	0.02593	0.0321

表 2 经典解与本文解的挠度值和弯矩值(配点数增加一倍)

点号	$w/(qa^4/D)$		M_x/qa^2		M_y/qa^2	
	本文解	经典解	本文解	经典解	本文解	经典解
1	0.004057	0.00406	0.04783	0.0479	0.04783	0.0479
2	0.002871	0.00287	0.03383	0.0338	0.03681	0.0369
4	0.002871	0.00287	0.03679	0.0369	0.03387	0.0338
5	0.002031	0.00204	0.03193	0.0321	0.03193	0.0321
11	0.003465	0.00347	0.04082	0.0416	0.04038	0.0416
12	0.001436	0.00146	0.01691	0.0171	0.01235	0.0124
13	0.001435	0.00146	0.02089	0.0209	0.02745	0.0275
14	0.000594	0.00060	0.00694	0.0071	0.00694	0.0071

这样的结果是相当满意的.

3 结 论

- (1) 最小二乘混合配点法, 在选取试函数方面十分简便, 利用多项式作为试函数具有较好的收敛性.
- (2) 由于用的是域内及边界面上配点的最小二乘法, 在保持试函数项数不变时, 只要增加配点个数就能提高解的精度.

参 考 文 献

1 徐次达, 施德芬. 离散型最小二乘法分析薄板强度. 力学学报, 1981(4): 399 ~ 406

2 王嘉新, 刘 杰. 弹性地基上正交各向异性变厚度圆薄板的大挠度问题. 应用数学和力学, 1996, 17(5): 455 ~ 463

3 王嘉新, 罗雄辉. 三参数地基上四边简支矩形薄板的弯曲问题. 中南工业大学学报, 1996, 27(3): 363 ~ 366

4 王嘉新主编. 弹性理论. 长沙: 中南工业大学出版社, 1993. 164 ~ 168

SOLUTION TO THE BENDING OF THE RECTANGULAR THIN PLATE SIMPLY SUPPORTED BY MIXED LEAST SQUARES AND COLLOCATION METHODS

Wan Jiaxin Luo Xionghui

(College of Resources, Environment and Civil Engineering,
Central South University of Technology, Changsha, 410083, China)

ABSTRACT

In this paper, solution to the bending of the rectangular thin plate simply supported is invertigated by mixed least squares and collocation methods. Increasing the number of points of the collocation can improve the solving accuracy.

Key words least squares method; thin plate; bending

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net