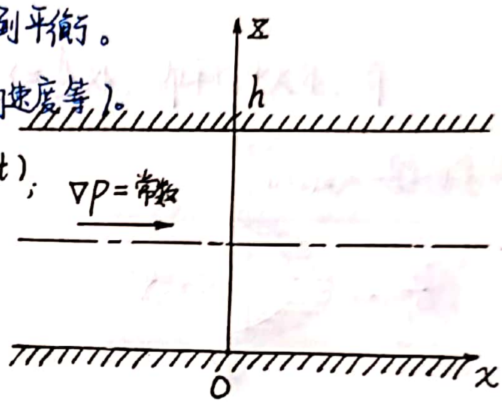
《粘性流体力学》 第三次作业 2020年5月12日

西北工业大学 航空学院2017级本科生 冯铮浩 学号：2017300281

问题描述（平面泊肃叶流动）

- 两块处于相对静止的无限大平行板之间充满流体；
- 沿着和平板平行的某一方向在流体内作用一个不变的压强梯度 $\nabla p = Const$；
- 流体在此压力场作用下运动；
- 当时间充分长以后，作用在流体上的压力和粘性力达到平衡。

求解流动主要变量（速度型、剪切应力分布、流量、平均速度等）。



解：由流动由x方向恒定压力驱动，则有 $\frac{\partial p}{\partial x} = -G\,(Const)$；

写出平面不可压缩牛顿流动的基本方程，有

连续性方程： $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

动量方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

由时间充分长达到系统平衡状态， $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$

流动控制方程边界条件为： $u|_{z=0} = w|_{z=0} = 0$； $u|_{z=h} = w|_{z=h} = 0$；

根据定常条件与边界条件，该流场可简化为：

$u = u(z)$， $w = 0$． 流动为定常不可压平面平行流动；

易知：连续性方程显然满足；

动量方程可简化为：

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{G}{\rho} = const$$

（μ 为流体粘性系数，ν 为运动粘性系数，满足 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$．）

即有：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{G}{\mu} & (※_1) \\ u|_{z=0} = u|_{z=h} = 0 \ \text{（边界条件）} & (※_2) \end{cases}$$

将(※1)左右两边积分两次，可得：

$$u = -\frac{G}{2\mu}z^2 + C_1 z + C_2$$

代入边界条件(*2)，可解得，

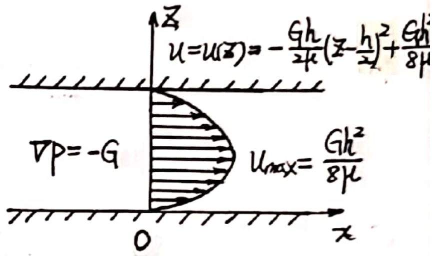
$$C_1=\frac{Gh}{2\mu}\ ,\ C_2=0$$

①故流动的速度型解为

$$u=\frac{Gz}{2\mu}(h-z)$$
$$=-\frac{Gz}{2\mu}\left(z-\frac{h}{2}\right)^2+\frac{Gh^2}{8\mu}$$

即平面泊肃叶流动的速度剖面是抛物线，最大速度在 $z=\frac{h}{2}$ 处，即平板中央处，有

$$u_{max}=u(z)\Big|_{z=\frac{h}{2}}=\frac{Gh^2}{8\mu}$$



平面泊肃叶流动速度剖面图

② 剪切应力分布：

应用牛顿剪切应力公式可得，

$$\tau_{xz}=\mu\frac{du}{dz}=\frac{G}{2\mu}(h-2z)$$

最大剪切应力在上下壁板上($z=0$或 $z=h$)，有

$$|\tau_{max}|=\frac{Gh}{2\mu}$$

③ 流量公式：

两壁板间单位宽度的体积流量为，

$$Q=\int_0^h u\,dz=\frac{Gz^2(3h-2z)}{12\mu}\Bigg|_{z=h}=\frac{Gh^3}{12\mu}$$

④ 剖面平均流速：

$$U_m=\frac{Q}{h}=\frac{Gh^2}{12\mu}=\frac{2}{3}u_{max}$$