飞行动力学

——稳定性与操纵性

航空学院 刘艳
lunarliuyan@nwpu.edu.cn

2. 飞机的运动方程

- 坐标轴系

  常用轴系、坐标变换

- 运动方程

  运动方程的推导、求解

- 运动方程的线化

  小扰动理论

2.1 坐标轴系

牛顿运动定律 → 运动方程

坐标轴系 → 运动方程

运动方程 → 动稳定性

用于表征飞机的位置、速度及作用在飞机上的力与力矩。

为什么需要这么多坐标轴系？

因为没有一个坐标轴系能独立表征所有的参数。

常用的坐标轴系

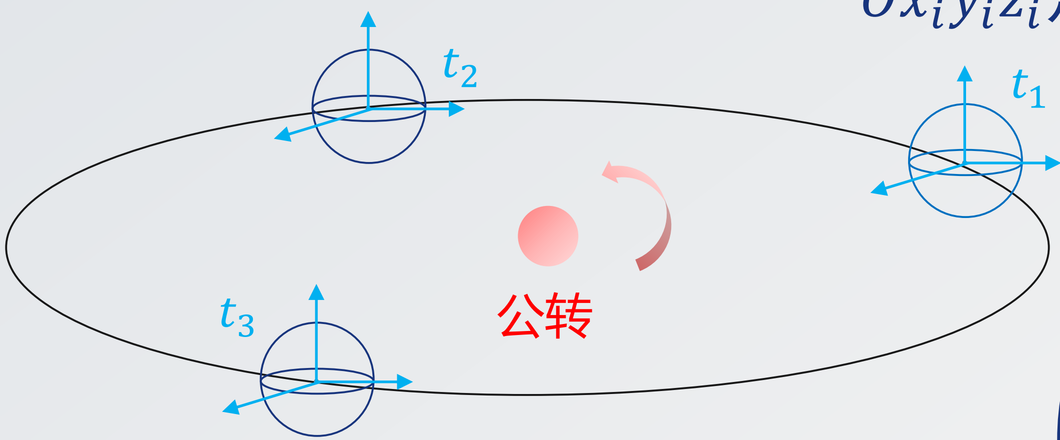
- 惯性轴系（$\boldsymbol{Ox_iy_iz_i}$）
- 地轴系（$\boldsymbol{Ox_Ey_Ez_E}$）
- 导航轴系（$\boldsymbol{Ox_ey_ez_e}$）
- 体轴系（$\boldsymbol{Ox_by_bz_b}$）
    - 稳定轴系（$\boldsymbol{Ox_sy_sz_s}$）
    - 风轴系（$\boldsymbol{Ox_wy_wz_w}$）

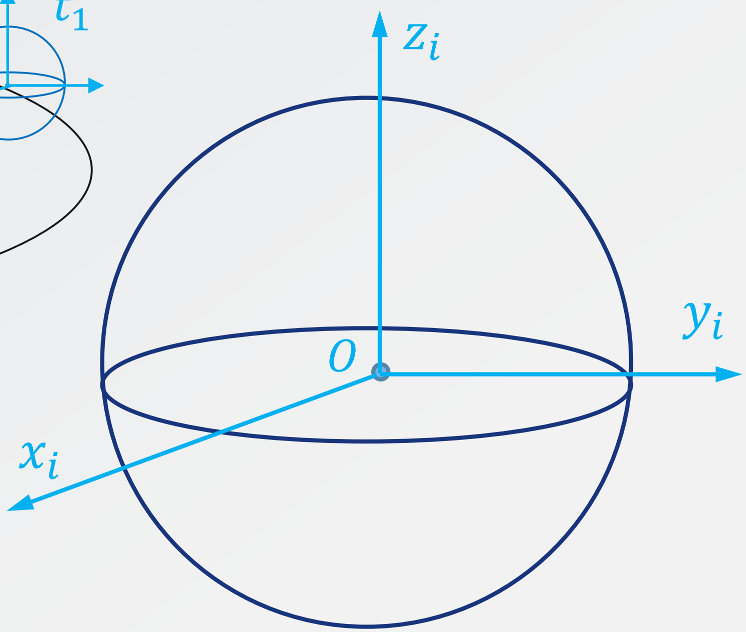
惯性轴系

任何飞行动力学问题都必须指定一个惯性参考系，因为$F = ma$的加速度项是相对于惯性参考系的。

找到一个绝对的惯性参考系具有一定难度。

对于大多数飞行动力学问题，原点位于地心的非旋转参考系$Ox_iy_iz_i$是个很好的近似。



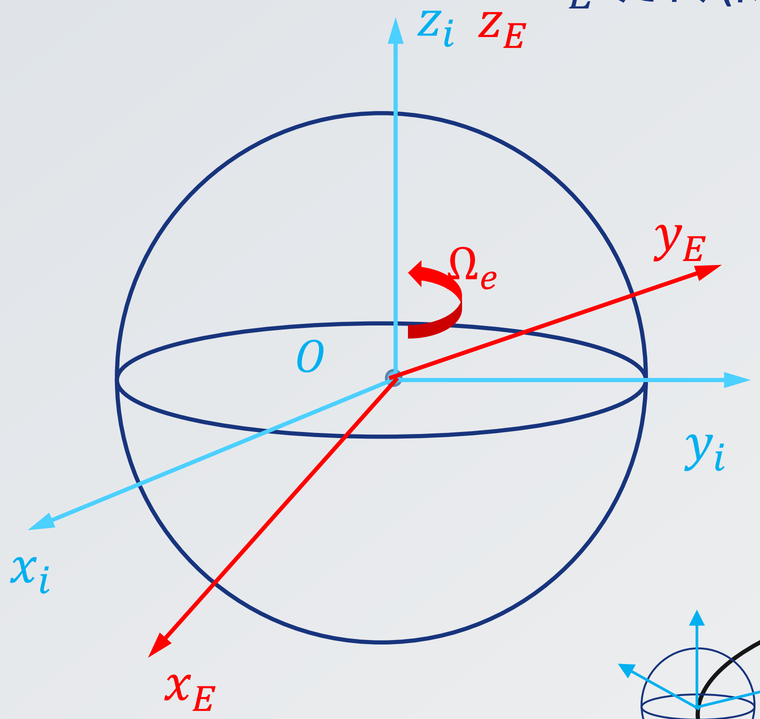


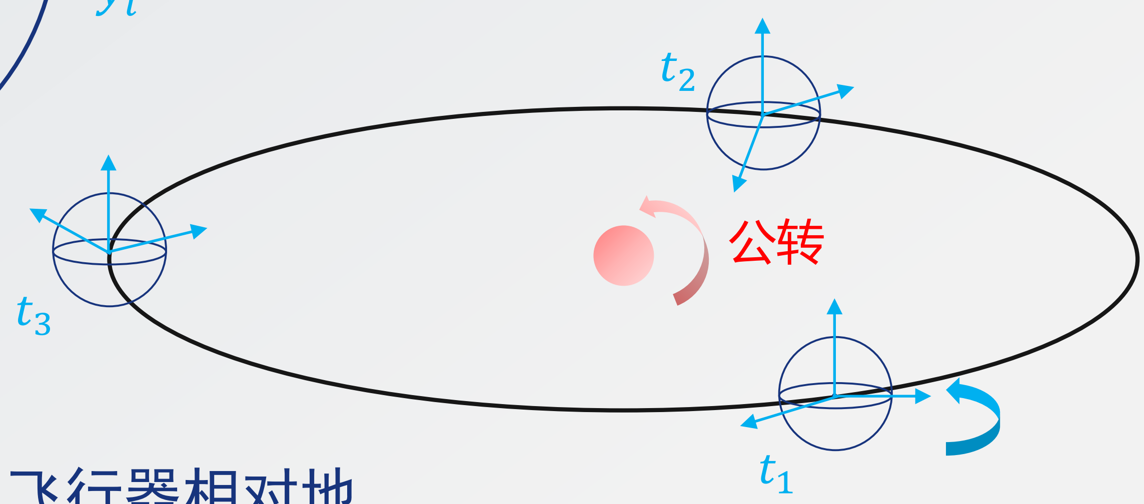
与绝对的惯性参考系相比：忽略了地球公转的影响。

地轴系

地轴系与惯性轴系的区别：地轴系绕$\boldsymbol{Oz_i}$或$\boldsymbol{Oz_E}$旋转(随地球自转)；惯性系不旋转。

Ω_e: 地轴系$Ox_Ey_Ez_E$相对于惯性轴系$Ox_iy_iz_i$的角速度



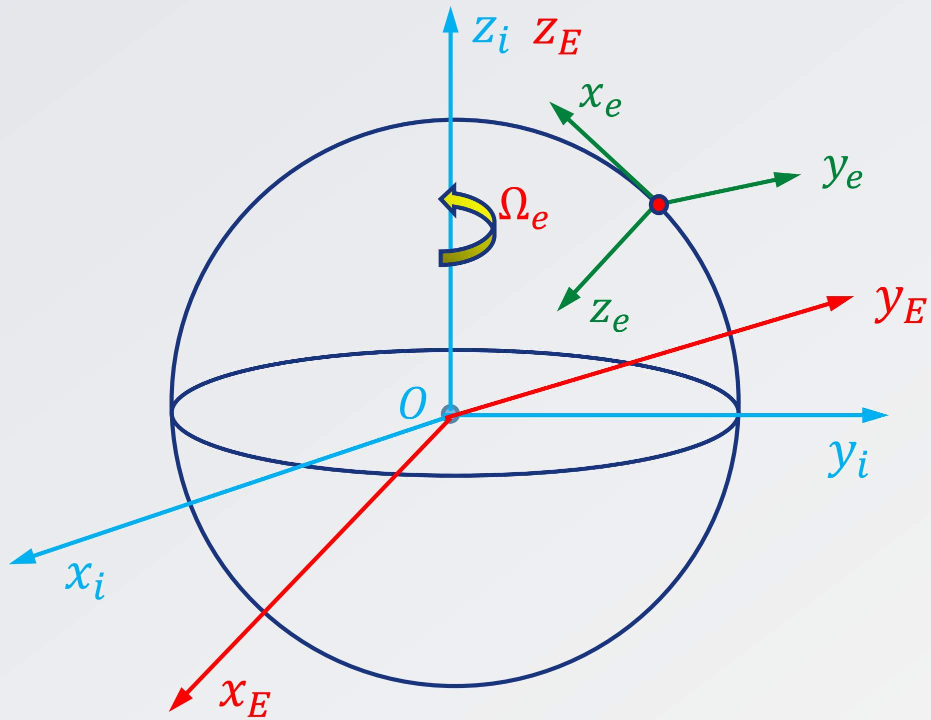


地轴系主要用于定义飞行器相对地球的位移与速度。

导航轴系

原点位于地球表面

- Ox_e轴指向正北
- Oy_e轴指向正东
- Oz_e轴指向地心

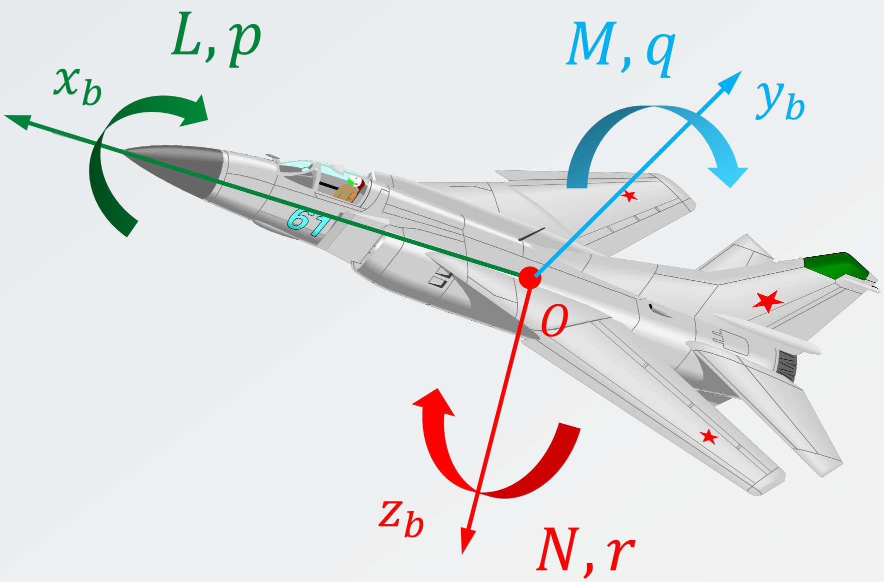


导航轴系主要用于确定飞机相对于发射点的位移与速度。

体轴系

任何固连在机体并随其运动的轴系均称为体轴系

- 原点通常为质心
- $\boldsymbol{Ox_b}$轴通常由重心沿纵向中心线或零升力线指向运动的方向
- $\boldsymbol{Oy_b}$轴垂直于$\boldsymbol{Ox_bz_b}$平面并指向右
- $\boldsymbol{Oz_b}$ 轴位于飞机的对称面并指向下，构成右手系统



用于定义作用在飞机上的力与力矩，以及飞机的惯性矩、惯性积。

稳定轴系($Ox_sy_sz_s$)与风轴系($Ox_wy_wz_w$)是两个特殊的体轴系

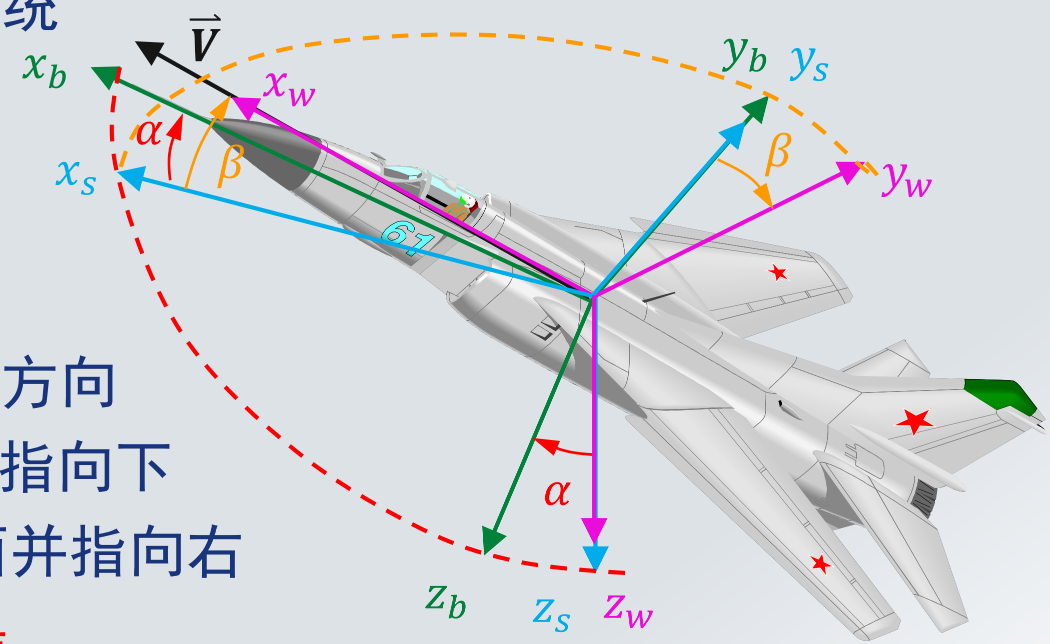
Ox_s轴位于飞机对称面

- 如果$\beta=0$, 指向与相对风相反的方向
- 如果 $\beta\neq 0$, 与相对速度在对称面内的投影重合

Oy_s轴垂直于飞机对称面并指向右

Oz_s轴指向下构成右手系统

与体轴系$Ox_by_bz_b$相差迎角α



Ox_w指向与相对风相反的方向

Oz_w轴位于飞机对称面并指向下

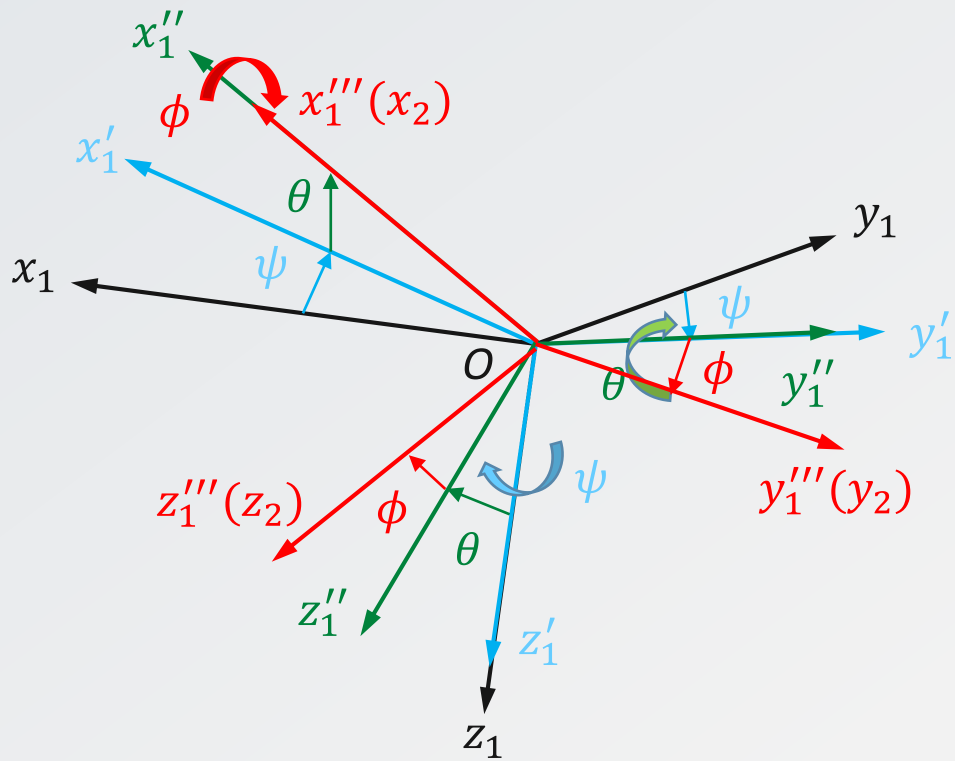
Oy_w轴垂直于Ox_wz_w平面并指向右

与体轴系$Ox_by_bz_b$相差侧滑角β和迎角α

坐标变换

没有任何一个坐标系能独立定义所有参数，如何将各坐标系的参数联系起来？

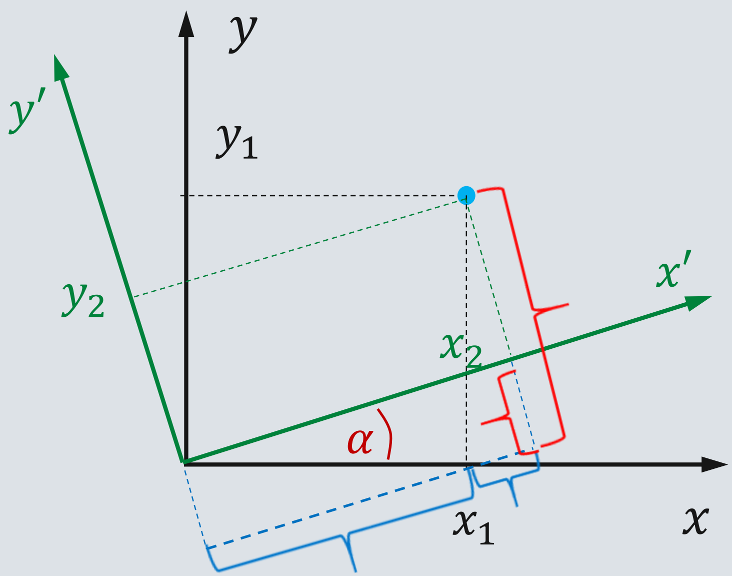
可通过坐标变换，将一个坐标系中的矢量投影到另一个坐标系。



一个坐标系相对于另一个坐标系的位置关系可以用三个角度ψ,θ,ϕ表示，这三个角即为欧拉角：偏航角ψ、俯仰角θ、滚转角ϕ。

一个坐标系经过连续3次旋转即可与另一个坐标系重合。

二维变换

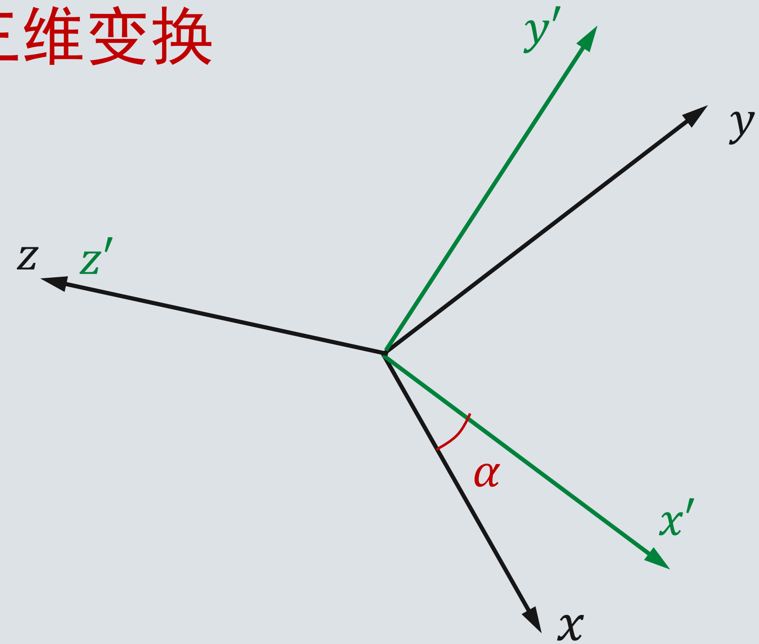


$$x_2 = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha$$

$$y_2 = y_1\cos\alpha - x_1\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

三维变换



$$x_2 = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha$$

$$y_2 = y_1\cos\alpha - x_1\sin\alpha$$

$$z_2 = z_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

绕 x 轴 $L_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$

绕 y 轴 $L_2=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & -\sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}$

绕 z 轴 $L_3=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

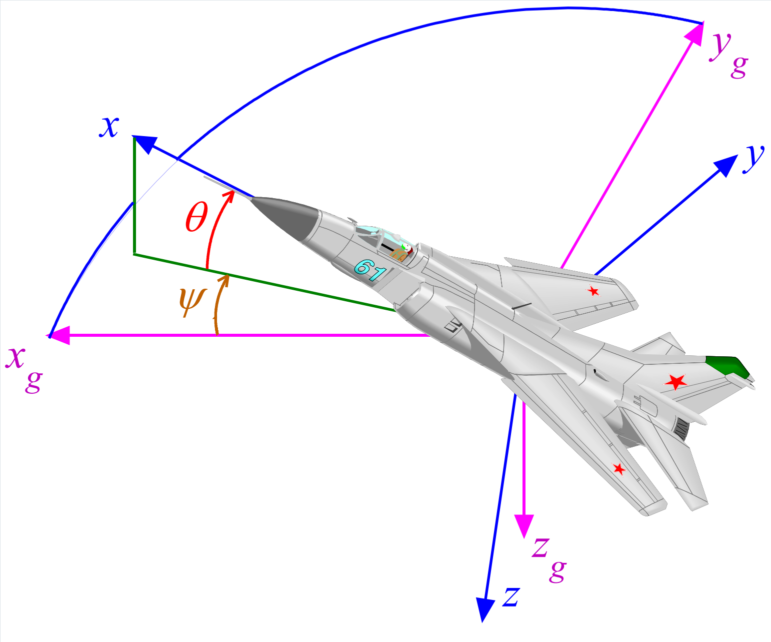
变换顺序:

$z \rightarrow y \rightarrow x$

即 $L_1L_2L_3$

旋转顺序很重要，不同的旋转顺序将得到不同的新坐标。

地轴系 惯性轴系 → 体轴系



包括全部3个欧拉角：

先ψ、再θ最后ϕ

$$T_E^b = L_1(\phi)L_2(\theta)L_3(\psi)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

风轴系→ 体轴系

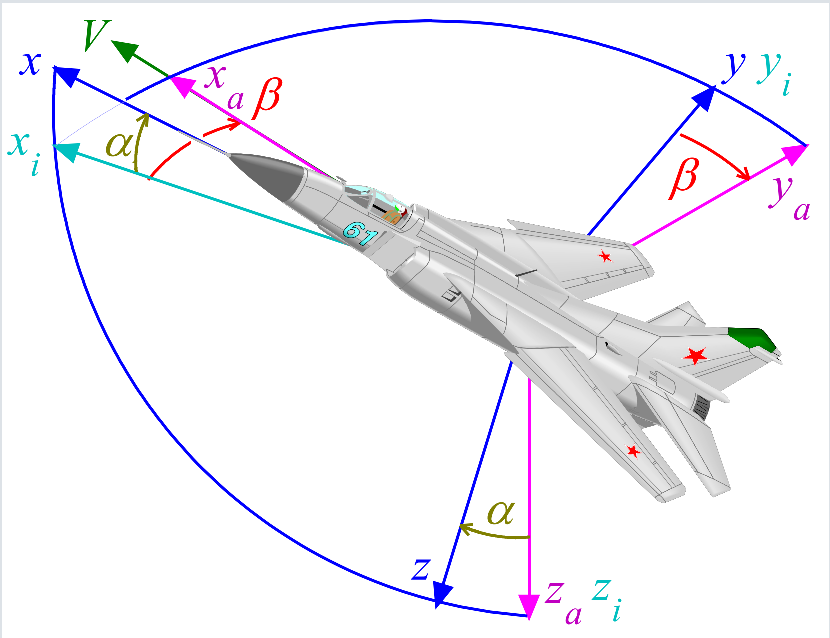
包括$\psi = -\beta, \theta = \alpha$,
及任意ϕ

$$T_w^b = L_1(\phi)L_2(\alpha)L_3(-\beta)$$

当$\phi = 0$时

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix}$$



例题

某飞机模型在低速风洞中进行试验，试验的迎角、侧滑角及滚转角分别为$\alpha = 20°, \beta = 10°, \phi = 30°$。采用内部应变天平测量到体轴系下的气动力分别为$F_x = 21\ lb, F_y = -33\ lb, F_z = -91\ lb$。

试确定：
1. 体轴系到风轴系的变换矩阵T_b^w；
2. 作用在模型上的升力、阻力及侧力。

提示:
风轴系到体轴系的转换包括：$\psi = -\beta, \theta = \alpha$及任意$\phi$

解

$$T_w^b = L_1(\phi)L_2(\alpha)L_3(-\beta)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ \sin\phi\sin\alpha & \cos\phi & \sin\phi\cos\alpha \\ \cos\phi\sin\alpha & -\sin\phi & \cos\phi\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\phi\sin\alpha\cos\beta + \cos\phi\sin\beta & -\sin\phi\sin\alpha\sin\beta + \cos\phi\cos\beta & \sin\phi\cos\alpha \\ \cos\phi\sin\alpha\cos\beta - \sin\phi\sin\beta & -\cos\phi\sin\alpha\sin\beta - \sin\phi\cos\beta & \cos\phi\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9254 & -0.1632 & -0.3420 \\ 0.3188 & 0.8232 & 0.4698 \\ 0.2049 & -0.5438 & 0.9138 \end{bmatrix}$$

$$T_b^w = \left(T_w^b\right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9254 & 0.3188 & 0.2049 \\ -0.1632 & 0.8232 & -0.5438 \\ -0.3420 & 0.4698 & 0.9138 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{xw} \\ F_{yw} \\ F_{zw} \end{bmatrix} = T_b^w \begin{bmatrix} F_{xb} \\ F_{yb} \\ F_{zb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.0851 \\ 18.7788 \\ -96.9806 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{指向后} \\ \text{指向右} \\ \text{指向上} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{Drag} \\ \text{Side} \\ \text{Lift} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.0851 \\ 18.7788 \\ 96.9806 \end{bmatrix}$$

2.2 运动方程

运动方程是飞行器运动分析、计算及仿真的基础。

飞行中的飞机是非常复杂的动态系统：

- 气动弹性
- 旋转部件的陀螺效应
- 外力

假设条件：

- 飞行器为6DOF的独立刚体
- 忽略地球的曲率和自转

牛顿运动方程

力方程 $$\boldsymbol{F} = m\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_i$$

惯性轴系

力矩方程 $$\boldsymbol{M} = \left(\frac{dH}{dt}\right)_i$$

$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I\omega}$

$$\boldsymbol{M} = \left(\frac{d\boldsymbol{I}}{dt}\right)_i \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{I}\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_i$$

- $\boldsymbol{H}$, 动量矩
- $\boldsymbol{I}$, 惯性矩阵
- $\boldsymbol{\omega}$, 惯性轴系下的角速度

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

主惯性矩

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)dm$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2)dm$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2)dm$$

惯性积

$$I_{xy} = I_{yx} = \int xydm$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \int yzdm$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \int xzdm$$

力方程

$$\boldsymbol{F} = m\left(\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\right)_i \xrightarrow{\text{忽略地球自转}} \boldsymbol{F} = m\left(\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\right)_e$$

根据移轴定理

$$\boldsymbol{V}_0 = \hat{i}_b u + \hat{j}_b v + \hat{k}_b w$$

$$\boldsymbol{\omega}_{e,b}^b = \boldsymbol{\omega}_{i,b}^b = \hat{i}_b p + \hat{j}_b q + \hat{k}_b r$$

$$\boldsymbol{F} = \hat{i}_b F_x + \hat{j}_b F_y + \hat{k}_b F_z$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{V}_0}{dt}\right)_e = \left(\frac{d\boldsymbol{V}_0}{dt}\right)_b + \boldsymbol{\omega}_{e,b}^b \times \boldsymbol{V}_0$$

$$= \hat{i}_b\dot{u} + \hat{j}_b\dot{v} + \hat{k}_b\dot{w} + \begin{vmatrix} \hat{i}_b & \hat{j}_b & \hat{k}_b \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}_b(\dot{u} + wq - vr)$$

$$+ \hat{j}_b(\dot{v} + ur - wp)$$

$$+ \hat{k}_b(\dot{w} + vp - uq)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} F_x &= m(\dot{u} + wq - vr) \\ F_y &= m(\dot{v} + ur - wp) \\ F_z &= m(\dot{w} + vp - uq) \end{aligned}$$

力矩方程

$$M=\left(\frac{dH}{dt}\right)_i$$

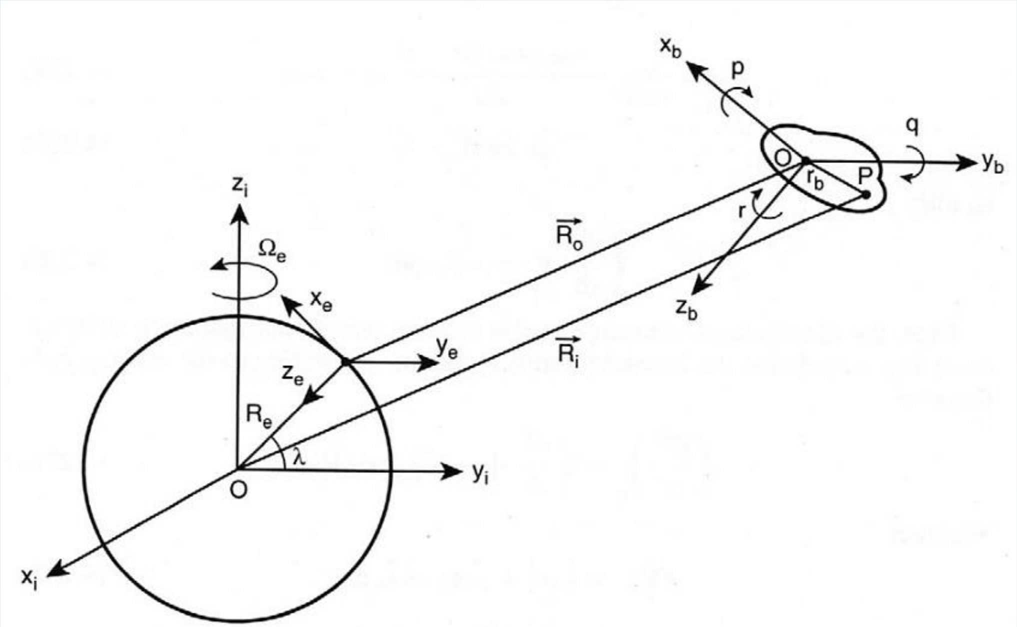
质量为δm的质点P关于惯性空间的动量矩

$$\delta \boldsymbol{h}_i=\boxed{\boldsymbol{R}_i\times\delta m\boldsymbol{V}_i}$$

$$\frac{d(\delta \boldsymbol{h}_i)}{dt}=\dot{\boldsymbol{R}}_i\times\delta m\boldsymbol{V}_i+\boldsymbol{R}_i\times\delta m\dot{\boldsymbol{V}}_i$$

$$=\boldsymbol{R}_i\times\delta m\dot{\boldsymbol{V}}_i=\boldsymbol{R}_i\times\delta\boldsymbol{F}_i$$

$$=\delta\boldsymbol{G}_i$$



则全机动量矩为

$$\boldsymbol{G}_i=\Sigma\delta\boldsymbol{G}_i=\boxed{\Sigma\boldsymbol{R}_i\times\delta\boldsymbol{F}_i}$$

$$=\Sigma\frac{d}{dt}(\delta\boldsymbol{h}_i)\boxed{=\frac{d}{dt}\Sigma\delta\boldsymbol{h}_i}$$

$$=\frac{d\boldsymbol{H}_i}{dt}$$

$$\Sigma \boldsymbol{R}_i \times \delta \boldsymbol{F}_i = \frac{d}{dt}\Sigma \delta \boldsymbol{h}_i = \frac{d}{dt}\sum \boldsymbol{R}_i \times \delta m \boldsymbol{V}_i$$

$\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{r}_b$

$$\Rightarrow \Sigma(\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{r}_b) \times \delta \boldsymbol{F}_i = \frac{d}{dt}\Sigma(\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{r}_b) \times \delta m \boldsymbol{V}_i$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{R}_0 \times \Sigma\delta \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{r}_b \times \Sigma\delta \boldsymbol{F}_i = \boxed{\frac{d}{dt}(\Sigma \boldsymbol{R}_0 \times \delta m \boldsymbol{V})_i} + \frac{d}{dt}\Sigma \boldsymbol{r}_b \times \delta m \boldsymbol{V}_i$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{R}_0 \times \Sigma\delta \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{r}_b \times \Sigma\delta \boldsymbol{F}_i = \boxed{\boxed{\dot{\boldsymbol{R}}_0 \times \Sigma\delta m \boldsymbol{V}_i} + \boldsymbol{R}_0 \times \Sigma\delta m \dot{\boldsymbol{V}}_i} + \frac{d}{dt}\Sigma \boldsymbol{r}_b \times \delta m \boldsymbol{V}_i$$

$\boldsymbol{V}_i = \dot{\boldsymbol{R}}_0 + \dot{\boldsymbol{r}}_b$

$\boldsymbol{G}_b$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{R}_0 \times \Sigma\delta \boldsymbol{F}_i} + \boxed{\boldsymbol{r}_b \times \Sigma\delta \boldsymbol{F}_i} = \boxed{\dot{\boldsymbol{R}}_0 \times \Sigma\delta m \dot{\boldsymbol{R}}_0 + \dot{\boldsymbol{R}}_0 \times \Sigma\delta m \dot{\boldsymbol{r}}_b} + \boxed{\boldsymbol{R}_0 \times \Sigma\delta m \dot{\boldsymbol{V}}_i} + \frac{d}{dt}\boxed{\Sigma \boldsymbol{r}_b \times \delta m \boldsymbol{V}_i}$$

$\dot{R}_0 \times \dot{R}_0 = 0$ 刚体, $\dot{r}_b = 0$ $\boldsymbol{F}_i = m\dot{\boldsymbol{V}}_i$ $\boldsymbol{H}_b$

$$\Rightarrow \boldsymbol{G}_b = \left(\frac{d\boldsymbol{H}_b}{dt}\right)_i$$

$$\boldsymbol{G}_b = \left(\frac{d\boldsymbol{H}_b}{dt}\right)_i \overset{\text{移轴定理}}{=} \left(\frac{d\boldsymbol{H}_b}{dt}\right)_b + \boldsymbol{\omega}_{i,b}^b \times \boldsymbol{H}_b$$

$$\boldsymbol{G}_b = \hat{i}_b(\dot{H}_{xb} + qH_{zb} - rH_{yb})$$
$$\Rightarrow \quad + \hat{j}_b(\dot{H}_{yb} + rH_{xb} - pH_{zb})$$
$$+ \hat{k}_b(\dot{H}_{zb} + pH_{yb} - qH_{xb})$$

$$\boldsymbol{H}_b = \Sigma \boldsymbol{r}_b \times \delta m \boldsymbol{V}_i = \Sigma \boldsymbol{r}_b \times \delta m(\dot{\boldsymbol{R}}_0 + \dot{\boldsymbol{r}}_b)$$

移轴定理

$$= \Sigma \boldsymbol{r}_b \times \delta m\left[\left(\dot{\boldsymbol{R}}_0 + \underbrace{\dot{\boldsymbol{r}}_b}_{\text{刚体}=0}\right)_b + \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times (\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{r}_b)\right]$$

$$= (\boxed{\Sigma \delta m \boldsymbol{r}_b}) \times \left(\dot{\boldsymbol{R}}_0\right)_b + (\boxed{\Sigma \delta m \boldsymbol{r}_b}) \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \boldsymbol{R}_0 + \Sigma\left(\delta m \boldsymbol{r}_b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \boldsymbol{r}_b\right)$$

原点为重心, =0

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_b = \Sigma(\delta m \boldsymbol{r}_b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \boldsymbol{r}_b)$$

$$\boldsymbol{H}_b = \Sigma(\delta m \boldsymbol{r}_b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \boldsymbol{r}_b)$$

$$= \Sigma[\boldsymbol{\omega}_{ib}^i(\boldsymbol{r}_b \cdot \boldsymbol{r}_b) - \boldsymbol{r}_b(\boldsymbol{\omega}_{ib}^i \cdot \boldsymbol{r}_b)]\delta m$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \hat{i}_b\left[\Sigma p\delta m(x_b^2 + y_b^2 + z_b^2) - \Sigma\delta m(px_b^2 + qx_b y_b + rx_b z_b)\right] \\
& + \hat{j}_b\left[\Sigma q\delta m(x_b^2 + y_b^2 + z_b^2) - \Sigma\delta m(px_b y_b + qy_b^2 + ry_b z_b)\right] \\
& + \hat{k}_b\left[\Sigma r\delta m(x_b^2 + y_b^2 + z_b^2) - \Sigma\delta m(px_b z_b + qy_b z_b + rz_b^2)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \hat{i}_b\left[pI_x - qI_{xy} - rI_{xz}\right] \\
& + \hat{j}_b\left[qI_y - rI_{yz} - pI_{yx}\right] \\
& + \hat{k}_b\left[rI_z - pI_{xz} - qI_{zy}\right]
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{G}_b = \hat{i}_b L + \hat{j}_b M + \hat{k}_b N$$

$$\boldsymbol{G}_b = \hat{i}_b(\dot{H}_{xb} + qH_{zb} - rH_{yb}) + \hat{j}_b(\dot{H}_{yb} + rH_{xb} - pH_{zb}) + \hat{k}_b(\dot{H}_{zb} + pH_{yb} - qH_{xb})$$

$$H_{xb} = pI_x - qI_{xy} - rI_{xz}$$
$$H_{yb} = qI_y - rI_{yz} - pI_{yx}$$
$$H_{zb} = rI_z - pI_{xz} - qI_{zy}$$

$$L = \dot{p}I_x - \dot{q}I_{yx} - \dot{r}I_{xz} + qr(I_z - I_y) - pqI_{zx} + (r^2 - q^2)I_{yz} + prI_{yx}$$
$$M = \dot{q}I_y - \dot{r}I_{yz} - \dot{p}I_{yx} + rp(I_x - I_z) - qrI_{xy} + (p^2 - r^2)I_{zx} + pqI_{zy}$$
$$N = \dot{r}I_z - \dot{p}I_{zx} - \dot{q}I_{zy} + pq(I_y - I_x) - rpI_{yz} + (q^2 - p^2)I_{xy} + qrI_{xz}$$

对于有对称面的飞机， $I_{xy} = I_{yx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$

$$L = \dot{p}I_x + qr(I_z - I_y) - I_{xz}(pq + \dot{r})$$
$$M = \dot{q}I_y + rp(I_x - I_z) + I_{zx}(p^2 - r^2)$$
$$N = \dot{r}I_z + pq(I_y - I_x) - I_{xz}(\dot{p} - qr)$$

角速度方程

欧拉角速率$\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi}$无法直接测量。

能够测量的角速率是体轴系下的速率p,q,r，通过角速度陀螺测量。

角速度方程就是给定p,q,r，确定$\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi}$.

$$r=\dot{\psi}_b=L_1(\phi)L_2(\theta)\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\psi}_i\end{bmatrix}\quad q=\dot{\theta}_b=L_1(\phi)\begin{bmatrix}0\\\dot{\theta}_i\\0\end{bmatrix}\quad p=\dot{\phi}_b=\begin{bmatrix}\dot{\phi}_i\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ \sin\phi\sin\theta & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta\\ \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\psi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\phi & \sin\phi\\0 & -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\dot{\theta}\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}}}_{L_\omega} \begin{bmatrix} \dot\phi \\ \dot\theta \\ \dot\psi \end{bmatrix}$$

只有在俯仰角及滚转角均接近0时$p = \dot\phi, q = \dot\theta$ and $r = \dot\psi$才成立。

$$\begin{bmatrix} \dot\phi \\ \dot\theta \\ \dot\psi \end{bmatrix} = L_\omega^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$L_\omega^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta\sin\phi & \cos\phi\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sec\theta\sin\phi & \mathrm{sec}\cos\phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot\phi \\ \dot\theta \\ \dot\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta\sin\phi & \cos\phi\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sec\theta\sin\phi & \sec\theta\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\dot\phi = p + \tan\theta(q\sin\phi + r\cos\phi)$$

$$\dot\theta = q\cos\phi - r\sin\phi$$

$$\dot\psi = \sec\theta(q\sin\phi + r\cos\phi)$$

速度方程　给定u, v, w，确定位移变化率

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_b\\ \dot{y}_b\\ \dot{z}_b\end{bmatrix} = T_e^b \begin{bmatrix}\dot{x}_E\\ \dot{y}_E\\ \dot{z}_E\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_E\\ \dot{y}_E\\ \dot{z}_E\end{bmatrix} = T_b^e \begin{bmatrix}\dot{x}_b\\ \dot{y}_b\\ \dot{z}_b\end{bmatrix} = T_b^e \begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}$$

$$T_e^b = \begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta\\ -\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\sin\theta\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\theta\sin\psi & \sin\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\sin\theta\cos\psi & -\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\theta\sin\psi & \cos\varphi\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}_E = u\cos\theta\cos\psi + v(\sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi) + w(\cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi)$$

$$\dot{y}_E = u\cos\theta\sin\psi + v(\sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi) + w(\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi)$$

$$\dot{z}_E = -u\sin\psi + v\sin\phi\cos\theta + w\cos\phi\cos\theta$$

全量运动方程

力方程

$$F_x = m(\dot{u} + qw - rv)$$
$$F_y = m(\dot{v} + ru - pw)$$
$$F_z = m(\dot{w} + pv - qu)$$

力矩方程

$$L = I_x\dot{p} - I_{zx}(\dot{r} + pq) - \left(I_y - I_z\right)qr$$
$$M = I_y\dot{q} - I_{zx}(r^2 - p^2) - (I_z - I_x)rp$$
$$N = I_z\dot{r} - I_{zx}(\dot{p} - qr) - \left(I_x - I_y\right)pq$$

角速度方程

$$\dot{\phi} = p + \tan\theta\left(q\sin\phi + r\cos\phi\right)$$
$$\dot{\theta} = q\cos\phi - r\sin\phi$$
$$\dot{\psi} = \sec\theta\left(q\sin\phi + r\cos\phi\right)$$

12个方程

18个未知数

速度方程

$$\dot{x}_E = u\cos\theta\cos\psi + v(\sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi) + w(\cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi)$$

$$\dot{y}_E = u\cos\theta\sin\psi + v(\sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi) + w(\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi)$$

$$\dot{z}_E = -u\sin\psi + v\sin\phi\cos\theta + w\cos\phi\cos\theta$$

无穷多解

x, y, ψ 不影响运动方程，可忽略相关的方程和变量

9 个方程，15个未知数　　仍有无穷多解

再加入与操纵面偏角和发动机油门相关的力/力矩

6个气动力/力矩方程

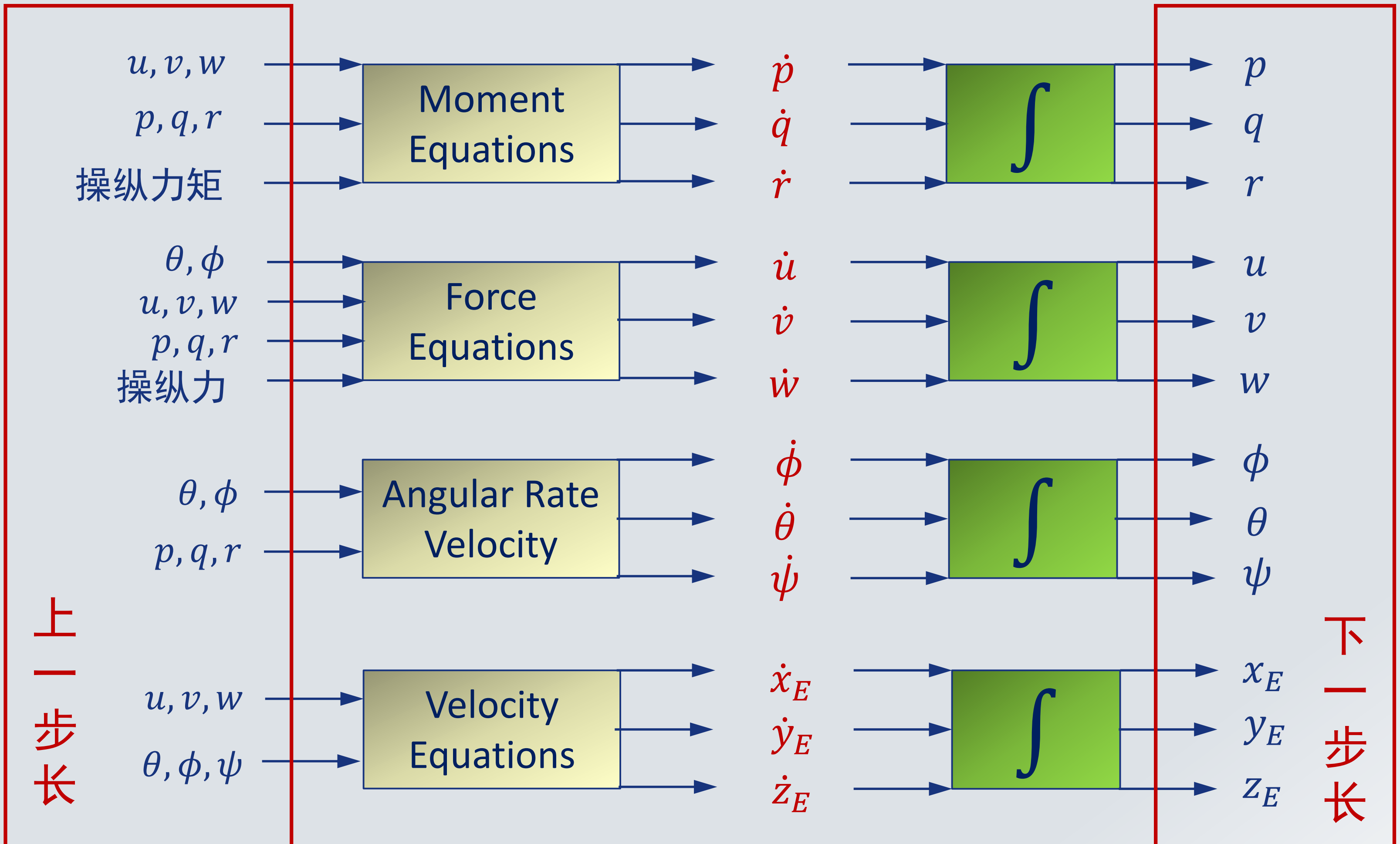
$$\begin{bmatrix} F_x, F_y, F_z \\ L, M, N \end{bmatrix} = f\begin{pmatrix} u, v, w, p, q, r, \theta, \phi, z_E, \\ \delta_a, \delta_e, \delta_r, \delta_p \end{pmatrix}$$

4个未知数

$$\begin{gathered} F_x, F_y, F_z, L, M, N \\ u, v, w, p, q, r \\ z_E, \theta, \phi, \delta_a, \delta_e, \delta_r, \delta_p \end{gathered}$$

15个方程，19个未知数　　仍有无穷多解

若操纵向量$u = [\delta_a \ \ \delta_e \ \ \delta_r \ \ \delta_p]^T$ 给定，则方程有唯一解:



数值解

运动方程的解有两种：

- 自由响应，$x_0 \neq 0, u = 0$时的响应(解)，反映的是系统瞬态特性和动稳定性。
- 强迫响应，$x_0 = 0, u \neq 0$时的响应(解)，反映的是飞机的稳态响应特性。

飞机的运动方程是耦合且非线性的，很难获得对于飞机设计和评估来说很必要的解析解。

需要对运动方程进行线化和解耦。

2.3 运动方程的线化

飞机的全量运动方程耦合且非线性，很难获得对于飞机设计和评估来说很必要的解析解。可基于小扰动理论对其进行线化和解耦。

小扰动假设

飞机受扰动后，所有参数=基准状态量+小扰动量。

- 小扰动理论已被证明能在实际使用中得到很好地结果，对于工程应用来说具有足够的精度。
- 不适合急剧机动等大扰动问题

小扰动符号

所有变量的基准量用下标0表示，小扰动量用前缀Δ表示。

$$u = u_0 + \Delta u,\quad v = v_0 + \Delta v,\quad w = w_0 + \Delta w$$
$$p = p_0 + \Delta p,\quad q = q_0 + \Delta q,\quad r = r_0 + \Delta r$$
$$\phi = \phi_0 + \Delta\phi,\quad \theta = \theta_0 + \Delta\theta,\quad \psi = \psi_0 + \Delta\psi$$
$$F_x = F_{x0} + \Delta F_x, F_y = F_{y0} + \Delta F_y,\ F_z = F_{z0} + \Delta F$$
$$L = L_0 + \Delta L,\ M = M_0 + \Delta M,\ N = N_0 + \Delta N$$

如果基准量为0，则前缀Δ可省略

$$\boxed{u = u_0 + \Delta u,}\quad v = \Delta v,\quad w = \Delta w$$
$$p = \Delta p,\quad q = \Delta q,\quad r = \Delta r$$
$$\phi = \Delta\phi,\ \boxed{\theta = \theta_0 + \Delta\theta,}\ \psi = \Delta\psi$$
$$F_x = \Delta F_x, F_y = \Delta F_y,\ F_z = \Delta F$$
$$L = \Delta L,\quad M = \Delta M,\quad N = \Delta N$$

将参数代入运动方程，并仅保留一阶小量，则可得到简化的运动方程

力方程

$$X_0+\Delta X-mg(\sin\theta_0+\Delta\theta\cos\theta_0)=m\Delta\dot{u}$$

$$Y_0+\Delta Y-mg\phi\cos\theta_0=m(\dot{v}+u_0r)$$

$$Z_0+\Delta Z-mg(\cos\theta_0-\Delta\theta\sin\theta_0)=m(\dot{w}-u_0q)$$

力矩方程

$$L_0+\Delta L=I_x\dot{p}-I_{zx}\dot{r}$$

$$M_0+\Delta M=I_y\dot{q}$$

$$N_0+\Delta N=-I_{zx}\dot{p}+I_z\dot{r}$$

角速度方程

$$\Delta\dot{\theta}=q$$

$$\dot{\phi}=p+r\tan\theta_0$$

$$\dot{\psi}=r\sec\theta_0$$

速度方程

$$\dot{x}_E=(u_0+\Delta u)\cos\theta_0-u_0\Delta\theta\sin\theta_0+w\sin\theta_0$$

$$\dot{y}_E=u_0\psi\cos\theta_0+v$$

$$\dot{z}_E=-(u_0+\Delta u)\sin\theta_0-u_0\Delta\theta\cos\theta_0+w\cos\theta_0$$

代入基准状态

$$X_0 - mg\sin\theta_0 = 0 \quad L_0 = 0 \quad \dot{x}_{E0} = u_0\cos\theta_0$$
$$Y_0 = 0 \quad M_0 = 0 \quad \dot{y}_{E0} = 0$$
$$Z_0 + mg\cos\theta_0 = 0 \quad N_0 = 0 \quad \dot{z}_{E0} = -u_0\sin\theta_0$$

力方程

$$\Delta\dot{u} = \Delta X/m - g\Delta\theta\cos\theta_0$$
$$\dot{v} = \Delta Y/m + g\phi\cos\theta_0 - u_0 r$$
$$\dot{w} = \Delta Z/m - g\Delta\theta\sin\theta_0 + u_0 q$$

力矩方程

$$\dot{p} = (I_x\Delta L + I_{zx}\Delta L)/(I_x I_z - I_{zx}^2)$$
$$\dot{q} = \Delta M/I_y$$
$$\dot{r} = (I_x\Delta N + I_{zx}\Delta N)/(I_x I_z - I_{zx}^2)$$

角速度方程

$$\Delta\dot{\theta} = q$$
$$\dot{\phi} = p + r\tan\theta_0$$
$$\dot{\psi} = r\sec\theta_0$$

速度方程

$$\Delta\dot{x}_E = \Delta u\cos\theta_0 - u_0\Delta\theta\sin\theta_0 + w\sin\theta_0$$
$$\Delta\dot{y}_E = u_0\psi\cos\theta_0 + v$$
$$\Delta\dot{z}_E = -\Delta u\sin\theta_0 - u_0\Delta\theta\cos\theta_0 + w\cos\theta_0$$

气动力/力矩的估算

假设条件:

- 作用在飞机上的瞬时气动力/力矩仅与当时瞬时的运动参数有关;
- 气动力/力矩随运动参数线性变化;
- 纵向气动力与力矩(F_x, F_z, M)仅与纵向变量(u, α, q)相关;
- 横航向气动力与力矩(F_y, L, N)仅与横航向变量(β, p, r)相关

这些假设仅适用于小α/β.

当 α/β较高时, 气动力/力矩随α/β 非线性变化.

可使用泰勒级数来表示扰动条件下的气动力与力矩系数

$$\Delta C_x = \frac{\partial C_x}{\partial u}u + \frac{\partial C_x}{\partial \alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial C_x}{\partial \theta}\Delta\theta + \frac{\partial C_x}{\partial \dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha} + \frac{\partial C_x}{\partial q}\Delta q + \frac{\partial C_x}{\partial \delta_e}\Delta\delta_e + \frac{\partial C_x}{\partial \delta_t}\Delta\delta_t + \cdots$$

$$\Delta C_z = \frac{\partial C_z}{\partial u}u + \frac{\partial C_z}{\partial \alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial C_z}{\partial \theta}\Delta\theta + \frac{\partial C_z}{\partial \dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha} + \frac{\partial C_z}{\partial q}\Delta q + \frac{\partial C_z}{\partial \delta_e}\Delta\delta_e + \frac{\partial C_z}{\partial \delta_t}\Delta\delta_t + \cdots$$

$$\Delta C_m = \frac{\partial C_m}{\partial u}u + \frac{\partial C_m}{\partial \alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial C_m}{\partial \theta}\Delta\theta + \frac{\partial C_m}{\partial \dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha} + \frac{\partial C_m}{\partial q}\Delta q + \frac{\partial C_m}{\partial \delta_e}\Delta\delta_e + \frac{\partial C_m}{\partial \delta_t}\Delta\delta_t + \cdots$$

$$\Delta C_l = \frac{\partial C_l}{\partial \beta}\Delta\beta + \frac{\partial C_l}{\partial \dot{\beta}}\Delta\dot{\beta} + \frac{\partial C_l}{\partial \phi}\Delta\phi + \frac{\partial C_l}{\partial p}\Delta p + \frac{\partial C_l}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial C_l}{\partial \delta_a}\Delta\delta_a + \frac{\partial C_l}{\partial \delta_r}\Delta\delta_r + \cdots$$

$$\Delta C_n = \frac{\partial C_n}{\partial \beta}\Delta\beta + \frac{\partial C_n}{\partial \dot{\beta}}\Delta\dot{\beta} + \frac{\partial C_n}{\partial \phi}\Delta\phi + \frac{\partial C_n}{\partial p}\Delta p + \frac{\partial C_n}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial C_n}{\partial \delta_a}\Delta\delta_a + \frac{\partial C_n}{\partial \delta_r}\Delta\delta_r + \cdots$$

$$\Delta C_y = \frac{\partial C_y}{\partial \beta}\Delta\beta + \frac{\partial C_y}{\partial \dot{\beta}}\Delta\dot{\beta} + \frac{\partial C_y}{\partial \phi}\Delta\phi + \frac{\partial C_y}{\partial p}\Delta p + \frac{\partial C_y}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial C_y}{\partial \delta_a}\Delta\delta_a + \frac{\partial C_y}{\partial \delta_r}\Delta\delta_r + \cdots$$

静导数

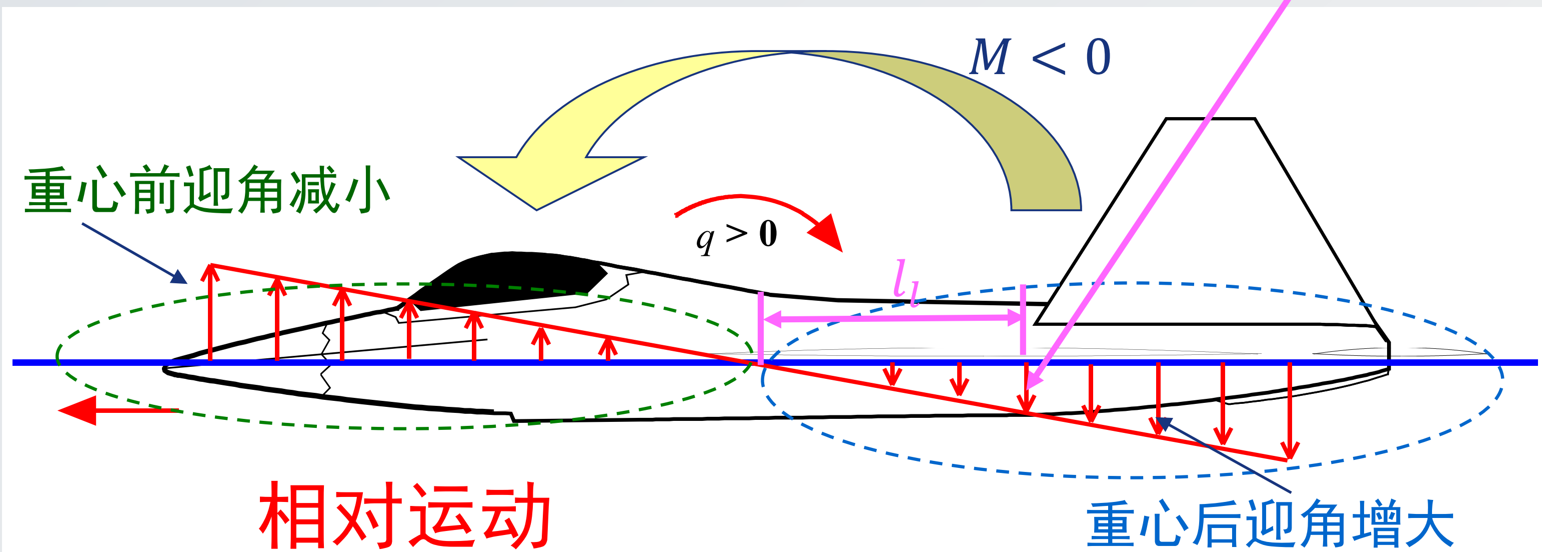
动导数

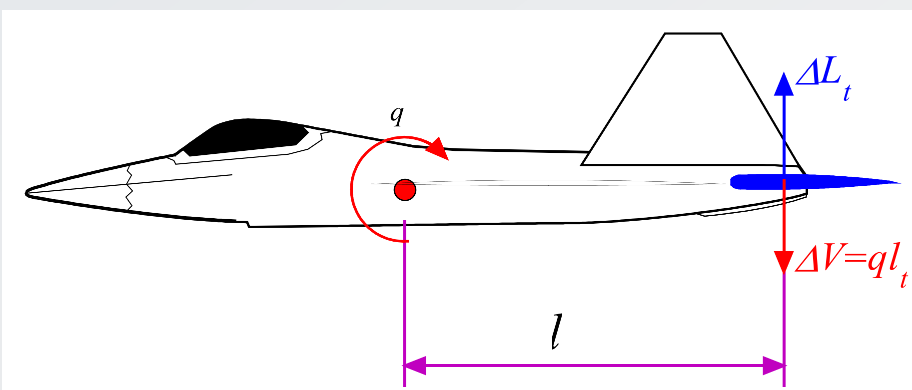
操纵导数

动导数机理--C_{mq}, C_{Lq}

q带来的局部迎角变化

$$\Delta\alpha_l \approx \frac{w_l}{V} = \frac{q \cdot l_l}{V}$$

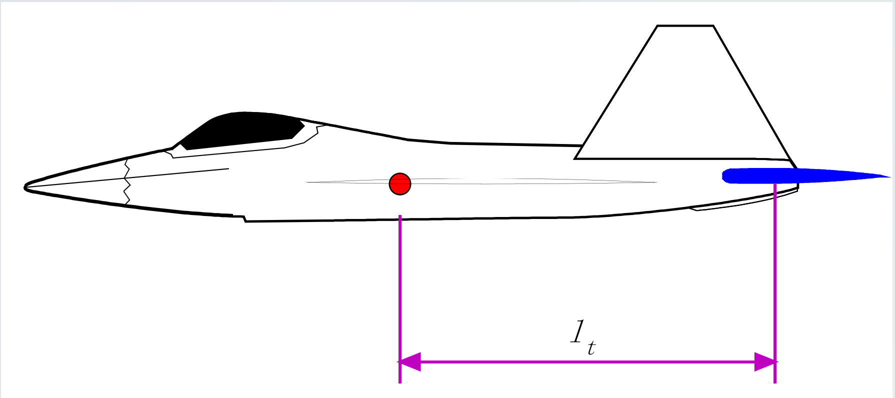




阻尼导数主要由机翼和平尾产生

- 机翼，力臂短，且前后部分抵消，贡献占约10%
- 尾翼，力臂长，贡献占约90%
- $C_{mq} < 0, C_{Lq} > 0$

动导数机理--$C_{m\dot{\alpha}}, C_{L\dot{\alpha}}$



机翼迎角变化带来的平尾下洗角变化需要一定的时间

$$\tau = l_t / V_t$$

忽略升降舵影响，飞机以$V, q = 0, \dot{\alpha}$飞行时，平尾瞬时迎角为

$$(\alpha_t)_{t_0} = (\alpha)_{t_0} + i_t - (\varepsilon)_{t_0 - \tau}$$

这段时间机翼的迎角变化了

$$\Delta\alpha = \dot{\alpha} \cdot \tau = \dot{\alpha} \cdot l_t / V_t$$

带来的平尾下洗角变化为

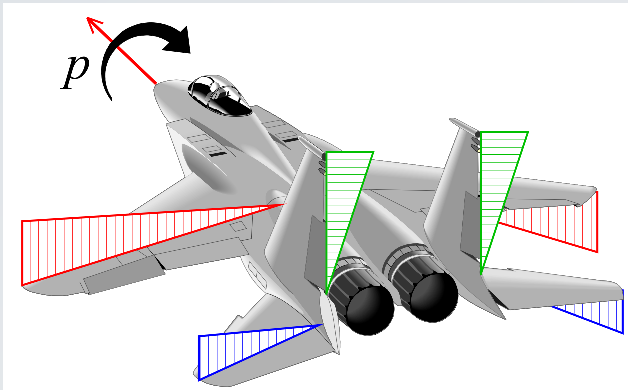
$$\Delta\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}(-\Delta\alpha) = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\dot{\alpha} \cdot \frac{l_t}{V_t}$$

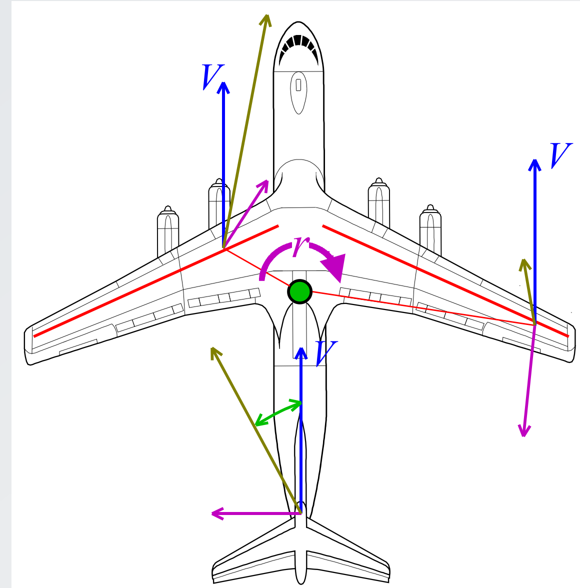
相同机翼迎角下，相比于静态：

- 正$\dot{\alpha}$相当于下洗角减小，平尾升力增加、有低头力矩增量；
- 负$\dot{\alpha}$相当于下洗角增加，平尾升力减小、有抬头力矩增量

$$C_{m\dot{\alpha}} < 0，\ C_{L\dot{\alpha}} > 0$$

横航向动导数





p改变左右机翼/平尾的局部迎角

升力不平衡 → 滚转力矩 → C_{lp}

滚转阻尼导数

阻力不平衡 → 偏航力矩 → C_{np}

交叉阻尼导数

r改变垂尾侧滑角 → 改变垂尾侧力

偏航力矩(x轴) → C_{nr}

偏航阻尼导数

滚转力矩(z轴) → C_{lr}

交叉阻尼导数

由此可得到气动力/力矩的线化表达式

$$\boxed{\Delta X = X_u \Delta u + X_w w + \Delta X_c}$$

$$\Delta Y = Y_v v + Y_p p + Y_r r + \Delta Y_c$$

$$\boxed{\Delta Z = Z_u \Delta u + Z_w w + Z_{\dot{w}} \dot{w} + Z_q q + \Delta Z_c}$$

纵向

$$\Delta L = L_v v + L_p p + L_r r + \Delta L_c$$

$$\boxed{\Delta M = M_u \Delta u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + \Delta M_c}$$

$$\Delta N = N_v v + N_p p + N_r r + \Delta N_c$$

方程可分为两组:

- 纵向
- 横航向，横向与航向永远耦合

纵向方程

$$\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{\alpha}\\ \dot{q}\\ \Delta\dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{C_{xu}+\xi_1 C_{zu}}{m_1} & \frac{C_{x\alpha}+\xi_1 C_{z\alpha}}{m_1} & \frac{C_{xq}+\xi_1(m_1+C_{zq}c_1)}{m_1} & \frac{C_{x\theta}+\xi_1 C_{z\theta}}{m_1}\\ \frac{C_{zu}}{m_1} & \frac{C_{z\alpha}}{m_1} & \frac{m_1+C_{zq}c_1}{m_1} & \frac{C_{z\theta}}{m_1}\\ \frac{C_{mu}+\xi_2 C_{zu}}{I_{y1}} & \frac{C_{m\alpha}+\xi_2 C_{z\alpha}}{I_{y1}} & \frac{C_{mq}c_1+\xi_2(m_1+C_{zq}c_1)}{I_{y1}} & \frac{\xi_2 C_{z\theta}}{I_{y1}}\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ \alpha\\ q\\ \Delta\theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{C_{x\delta_e}+\xi_1 C_{z\delta_e}}{m_1}\\ \frac{C_{z\delta_e}}{m_1}\\ \frac{C_{m\delta_e}+\xi_2 C_{z\delta_e}}{I_{y1}}\\ 0\end{bmatrix}\delta_e$$

$$m_1=\frac{2m}{\rho VS},\ c_1=\frac{\bar{c}}{2V},\ I_{y1}=\frac{I_y}{q_c S\bar{c}},\ \xi_1=\frac{C_{x\dot{\alpha}}c_1}{m_1},\ \xi_2=\frac{C_{m\dot{\alpha}}c_1}{m_1}$$

$$\begin{aligned}
&C_{xu}=-2C_D-C_{Du}, && C_{x\dot{\alpha}}=-C_{D\dot{\alpha}}, && C_{z\dot{\alpha}}=-C_{L\dot{\alpha}}\\
&C_{x\alpha}=C_L-C_{D\alpha}, && C_{xq}=-C_{Dq}=0, && C_{zq}=-C_{Lq}=0\\
&C_{x\theta}=-C_L\cos\theta, && C_{z\alpha}=-C_{L\alpha}-C_D, && C_{x\delta e}=-C_{D\delta e}\\
&C_{z\theta}=-C_L\sin\theta, && C_{zu}=-2C_L-C_{Lu}, && C_{z\delta e}=-C_{L\delta e}
\end{aligned}$$

横航向方程

$$
\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\dfrac{C_{y\beta}}{m_1} & \dfrac{C_{y\phi}}{m_1} & \dfrac{C_{yp}b_1}{m_1} & -\dfrac{m_1 - b_1 C_{yr}}{m_1} \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
C_{l\beta}I'_{z1} + C_{n\beta}I'_{xz1} + b_1\xi_3 a_{11} & \xi_3 b_1 a_{12} & b_1\left(C_{lp}I'_{z1} + C_{np}I'_{xz1} + \xi_3 a_{13}\right) & b_1\left(C_{lr}I'_{z1} + C_{nr}I'_{xz1} + \xi_3 a_{14}\right) \\
I'_{x1}C_{n\beta} + I'_{xz1}C_{l\beta} + b_1\xi_4 a_{11} & \xi_4 b_1 a_{12} & b_1\left(C_{np}I'_{x1} + C_{lp}I'_{xz1} + \xi_4 a_{13}\right) & b_1\left(I'_{x1}C_{nr} + I'_{xz1}C_{lr} + \xi_4 a_{14}\right)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \beta \\ \phi \\ p \\ r \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix}
\dfrac{C_{y\delta_a}}{m_1} & \dfrac{C_{y\delta_r}}{m_1} \\
0 & 0 \\
C_{l\delta_a}I'_{z1} + C_{n\delta_a}I'_{xz1} + \xi_3 b_1 b_{11} & C_{l\delta_a}I'_{z1} + C_{n\delta_r}I'_{xz1} + \xi_3 b_1 b_{12} \\
C_{n\delta_a}I'_{x1} + C_{l\delta_a}I'_{xz1} + \xi_4 b_1 b_{11} & C_{n\delta_r}I'_{x1} + C_{l\delta_r}I'_{xz1} + \xi_4 b_1 b_{12}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix}
$$

$$
C_{y\phi} = \frac{Y_\phi}{qS} = \frac{G\cos\phi}{qS},\ b_1 = \frac{b}{2U_0} \qquad I'_{x1} = \frac{I_{x1}}{I_{x1}I_{z1} - I_{xz1}^2},\ I'_{z1} = \frac{I_{z1}}{I_{x1}I_{z1} - I_{xz1}^2},\ I'_{xz1} = \frac{I_{xz1}}{I_{x1}I_{z1} - I_{xz1}^2}
$$

$$
I_{x1} = \frac{I_x}{q_c Sb},\ I_{z1} = \frac{I_z}{q_c Sb},\ I_{xz1} = \frac{I_{xz}}{q_c Sb} \qquad \xi_3 = I'_{z1}C_{l\beta},\ \xi_4 = I'_{x1}C_{n\beta}
$$

纵向与横航向方程均为一阶状态空间方程形式

系统矩阵

操纵效能矩阵

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boxed{\boldsymbol{A}}\boxed{\boldsymbol{x}} + \boxed{\boldsymbol{B}}\boxed{\boldsymbol{u}}$$

状态向量

控制向量

矩阵A与B取决于飞机的气动布局与飞行状态

$$\boldsymbol{x}_{long} = [\Delta u \quad w \quad q \quad \Delta\theta]^T \qquad \boldsymbol{u}_{long} = [\Delta\delta_e \quad \Delta\delta_p]^T$$

$$\boldsymbol{x}_{lat} = [v \quad p \quad r \quad \phi]^T \qquad \boldsymbol{u}_{lat} = [\Delta\delta_a \quad \Delta\delta_r]^T$$

3.动稳定性

- 动稳定性
  - 运动方程的解
  - 特征根与动稳定性
  - 稳定性判据
- 模态特性
  - 纵向与横航向典型模态
  - 模态机理
  - 飞行品质要求

运动方程的解—特征根

动稳定性考虑的是扰动后飞机的时间响应，即$x_0 \neq 0, u = 0$

对于一阶微分方程$\dot{x} = \boldsymbol{A}x$，有通解$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \dot{\boldsymbol{x}} = \lambda \boldsymbol{x}_0 e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda \boldsymbol{x}_0 e^{\lambda t} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_0 e^{\lambda t} \Rightarrow (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \boldsymbol{x}_0 e^{\lambda t} = 0$$

$\boldsymbol{I}$, 单位矩阵

对于非零解

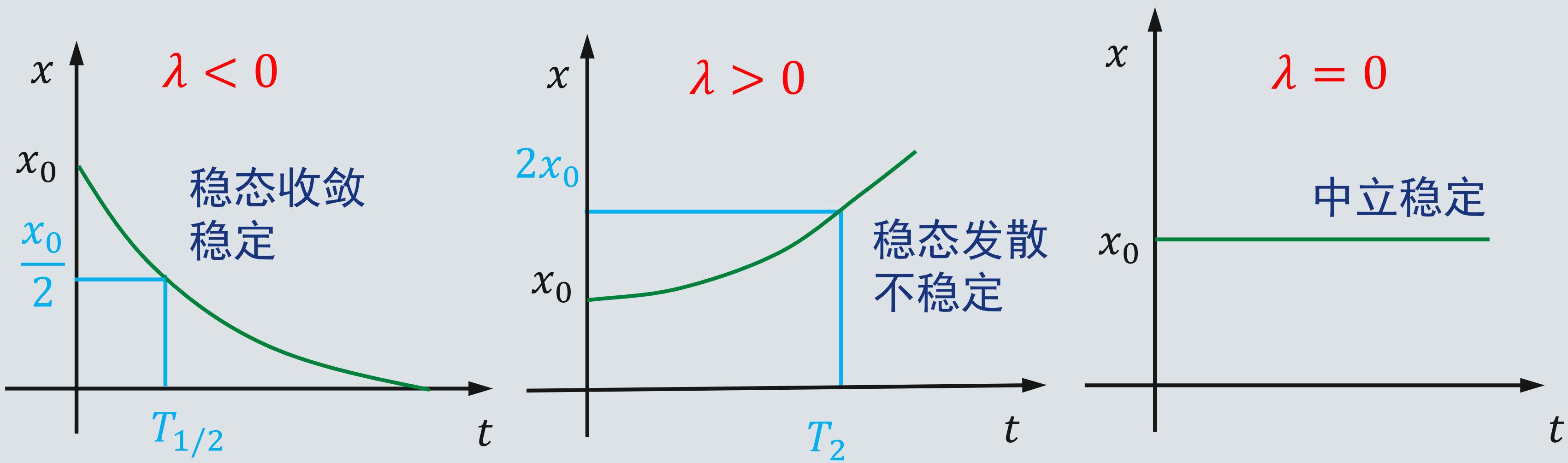
$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & \lambda - a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow A_\delta \lambda^4 + B_\delta \lambda^3 + C_\delta \lambda^2 + D_\delta \lambda + E_\delta = 0$$ 特征方程

特征方程的根被称为特征根（值），动稳定性取决于特征根。

实根

$$x = x_0 e^{\lambda t}$$



当特征根为实根，可用倍幅时T_2或半衰时$T_{1/2}$描述动稳定性。

$$x = x_0 e^{\lambda T_{1/2}} = \frac{x_0}{2} \Rightarrow T_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$x = x_0 e^{\lambda T_2} = 2x_0 \Rightarrow T_2 = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

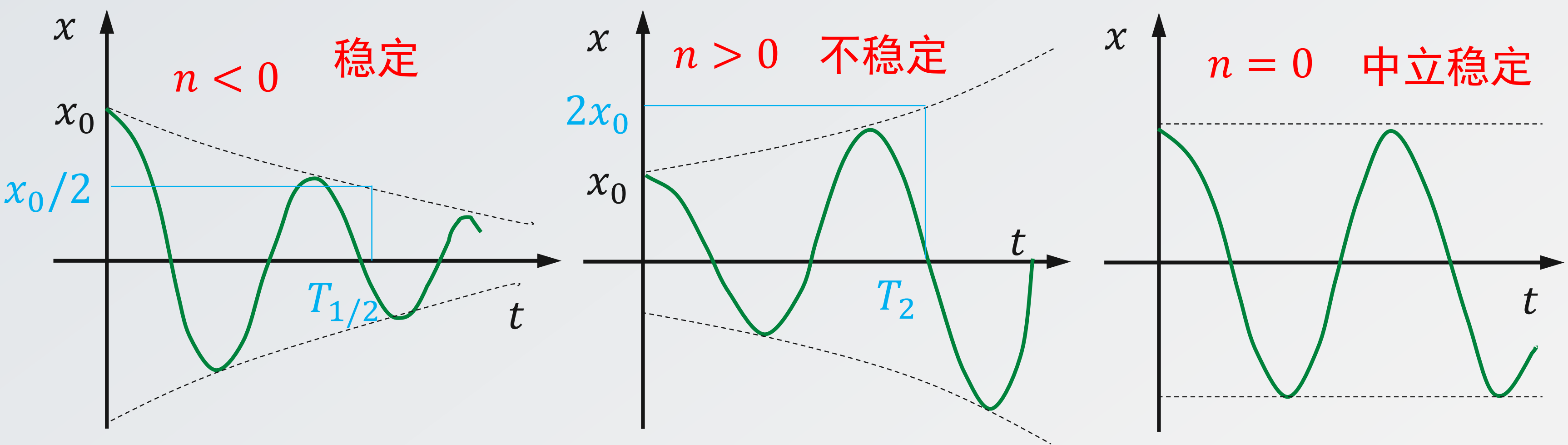
负实根动稳定

复根

$$\lambda_{1,2} = n \pm i\omega$$

$$x = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} = a_1 e^{(n+i\omega)t} + a_2 e^{(n-i\omega)t} = 2e^{nt}(a\cos\omega t - b\sin\omega t)$$

$$= \boxed{2\sqrt{a^2+b^2}\,e^{nt}}\boxed{\cos(\omega t + \phi)}$$



对于复根，可用包线的倍幅时或半衰时描述动稳定性

$$x = x_0 e^{nT_{1/2}} = \frac{1}{2}x_0 \Rightarrow T_{1/2} = -\frac{\ln 2}{n}$$

$$x = x_0 e^{nT_2} = 2x_0 \Rightarrow T_2 = \frac{\ln 2}{n}$$

复根实部为负动稳定

稳定性判据

在不求解特征根的情况下判断飞机动稳定性。

飞机的特征方程（四阶）

$$\Delta(\lambda) = a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

劳斯判据

必要条件

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$

充分条件：

劳斯数列的第一列所有元素为正

$$\begin{array}{llll}
\lambda^4: & a_0 & a_2 & a_4 \\
\lambda^3: & a_1 & a_3 & 0 \\
\lambda^2: & \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}\ b_1 & \dfrac{a_1 a_4 - a_0 \cdot 0}{a_1}\ b_2 = a_4 & \\
\lambda^1: & \dfrac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}\ c_1 & & \\
\lambda^0: & b_2\ d_1 & &
\end{array}$$

Hurwitz判据

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s^1 + a_n s^0 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccccccc|}
\Delta_1 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\Delta_2 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\Delta_3 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\
\Delta_4 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\
\Delta_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n
\end{array}$$

稳定的充要条件：$a_0, \Delta_1 \sim \Delta_n$全部为正

对于四阶的飞机特征方程

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$a_0 > 0 \qquad \Delta_1 = a_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0$$

$$\Delta_4 = \Delta_3 a_4 > 0$$

综合可得到Routh-Hurwitz判据

$$\begin{cases} a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 > 0 \\ R = \Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0 \end{cases}$$

状态空间方程的解

$$\boldsymbol{x}=\boxed{\boldsymbol{x}_0}e^{\lambda t}$$

特征向量

特征值

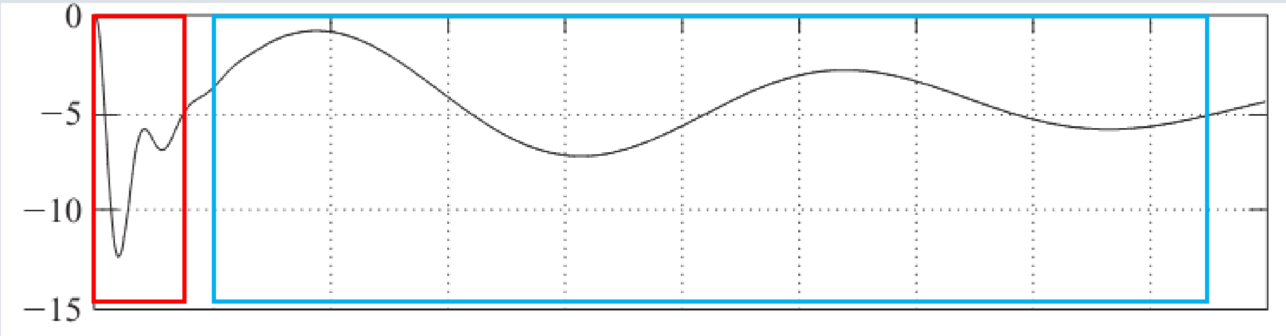
- 每一个实特征根λ对应一个实向量$\boldsymbol{x}_0$
- 每一对共轭复根λ_i与λ_i^*对应一对共轭特征向量$\boldsymbol{x}_0$与$\boldsymbol{x}_0^*$

飞行力学中将特征值及相应的响应特性称为**模态**。

飞机的响应是每个模态之和

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_i \boldsymbol{x}_{0i}e^{\lambda_i t}=\boldsymbol{x}_{01}e^{\lambda_1 t}+\boldsymbol{x}_{02}e^{\lambda_2 t}+\boldsymbol{x}_{03}e^{\lambda_3 t}+\boldsymbol{x}_{04}e^{\lambda_4 t}$$

典型纵向响应



典型纵向特征根、模态

某通用飞机

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -0.0453 & 0.0363 & 0 & -0.1859 \\ -0.3717 & -2.0354 & 0.9723 & 0 \\ 0.3398 & -7.0301 & -2.9767 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \boxed{-2.5118} \pm j2.5706 \\ \lambda_{3,4} &= \boxed{-0.0169} \pm j0.2174 \end{aligned}$$

纵向特征方程有两对共轭复根，每一对描述一个纵向稳定性模态。

对于该通用飞机，两对共轭复根均具有负实部，表明飞机的自由响应由两个收敛振荡运动相互叠加而成。

$$\Rightarrow \begin{aligned} \zeta_{1,2} &= 0.6989,\ \omega_{1,2} = 3.5941 \quad \text{重阻尼、高频} \\ \zeta_{3,4} &= 0.0775,\ \omega_{3,4} = 0.2181 \quad \text{轻阻尼、低频} \end{aligned}$$

对应$\lambda_{1,2}$的模态具有重阻尼及较高频率(即较短周期)

– 短周期模态

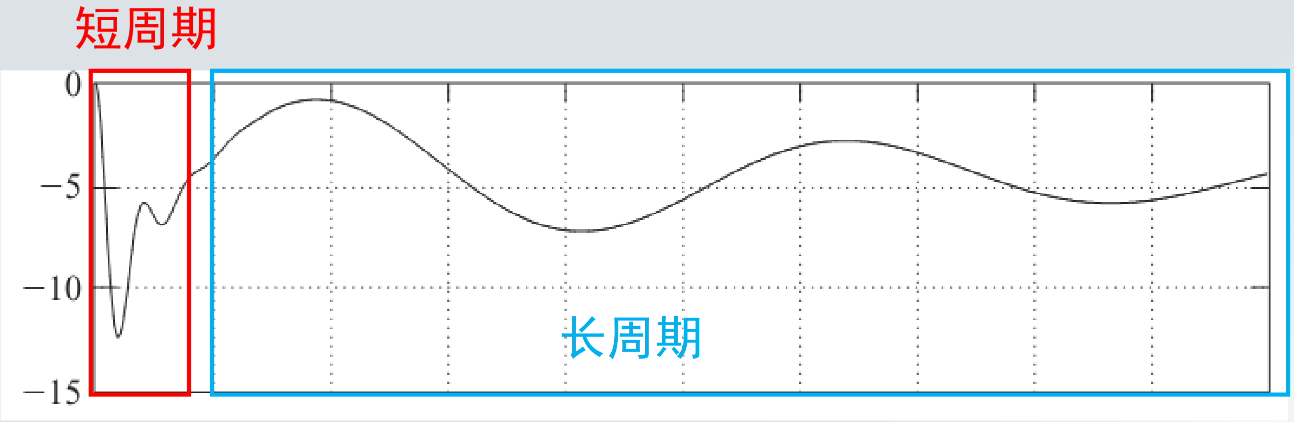
驾驶员无需对该模态采取任何措施，主要运动参数包括迎角、俯仰角及俯仰角速度。

对应$\lambda_{3,4}$ 的模态具有轻阻尼及较低频率(即较长周期)

– 长周期模态(沉浮模态)

驾驶员可轻易通过纵向操纵消除此模态，主要运动参数包括俯仰角及速度。

静稳定飞机的纵向响应由两个不同的振荡模态组成。



典型横航向特征根、模态

某通用飞机

$$
\begin{bmatrix} \Delta\dot{\beta} \\ \Delta\dot{\phi} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2557 & 0.1820 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.2557 & 0 & -8.4481 & 2.2048 \\ 4.5440 & 0 & -0.3517 & -0.7647 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta\phi \\ p \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.0712 \\ 0 & 0 \\ 29.3013 & 2.5764 \\ -0.2243 & -4.6477 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_a \\ \Delta\delta_r \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -0.0087 \\
\lambda_2 &= -8.4804 \\
\lambda_{3,4} &= -0.4897 \pm i2.3468
\end{aligned}
$$

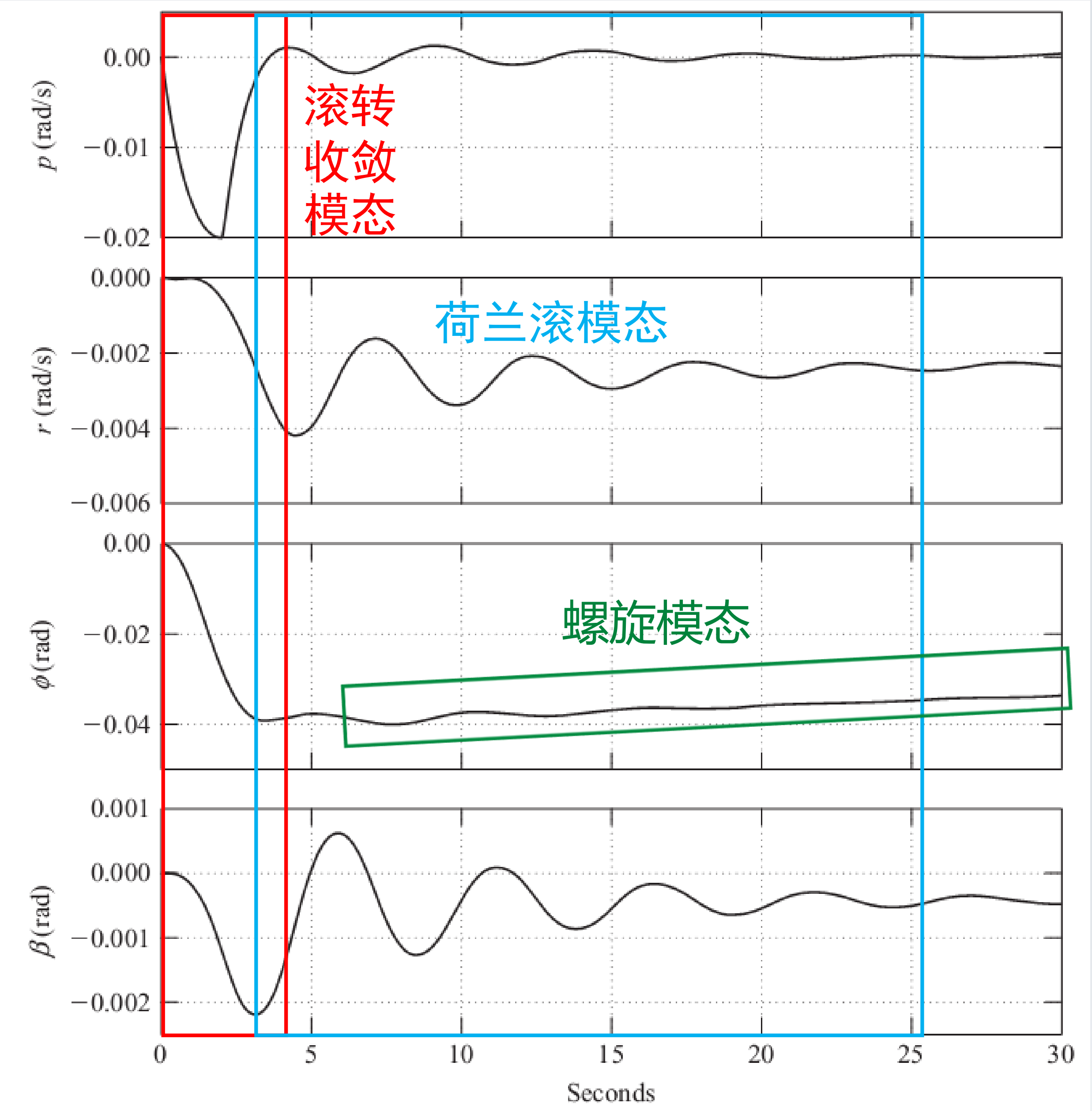
特征根	响应速度	主要参数
小实根	缓慢	ϕ, r
大负实根	快速	ϕ, p
中等共轭复根	中等	β, ϕ, r

螺旋模态

滚转收敛模态

荷兰滚模态

典型横航向响应



滚转收敛模态
荷兰滚模态
螺旋模态
p (rad/s)
r (rad/s)
φ (rad)
β (rad)
0.00
−0.01
−0.02
0.000
−0.002
−0.004
−0.006
0.00
−0.02
−0.04
0.001
0.000
−0.001
−0.002
0
5
10
15
20
25
30
Seconds

短周期的近似

短周期模态仅持续数秒，u几乎不变，故可设$\Delta u=\Delta\dot{u}=0$

则四阶状态方程中与速度相关的项可消去：

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{\alpha}\\ \Delta\dot{q}\\ \Delta\dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{C_{z\alpha}}{m_1-C_{z\dot{\alpha}}c_1} & \dfrac{m_1+C_{zq}c_1}{m_1-C_{z\dot{\alpha}}c_1} & \dfrac{C_{z\theta}}{m_1-C_{z\dot{\alpha}}c_1}\\ \dfrac{C_{m\alpha}+\xi_2C_{z\alpha}}{I_{y1}} & \dfrac{C_{mq}c_1+\xi_2(m_1+C_{zq}c_1)}{I_{y1}} & \dfrac{\xi_2C_{z\theta}}{I_{y1}}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta q\\ \Delta\theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{C_{z\delta_e}}{m_1-C_{z\dot{\alpha}}c_1}\\ \dfrac{C_{m\delta_e}+\xi_2C_{z\delta_e}}{I_{y1}}\\ 0\end{bmatrix}\Delta\delta_e$$

假设$\theta_0\approx0$，则$C_{z\theta}=-C_L\sin\theta_0\approx0$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta\dot{\alpha}\\ \Delta\dot{q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{C_{z\alpha}}{m_1-C_{z\dot{\alpha}}c_1} & \dfrac{m_1+C_{zq}c_1}{m_1-C_{z\dot{\alpha}}c_1}\\ \dfrac{C_{m\alpha}+\xi_2C_{z\alpha}}{I_{y1}} & \dfrac{C_{mq}c_1+\xi_2(m_1+C_{zq}c_1)}{I_{y1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{C_{z\delta_e}}{m_1-C_{z\dot{\alpha}}c_1}\\ \dfrac{C_{m\delta_e}+\xi_2C_{z\delta_e}}{I_{y1}}\end{bmatrix}\Delta\delta_e$$

$C_{zq} = C_{z\dot{\alpha}} \approx 0$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\alpha} \\ \Delta\dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{C_{z\alpha}}{m_1} & 1 \\ \dfrac{C_{m\alpha} + \xi_2 C_{z\alpha}}{I_{y1}} & \dfrac{C_{mq}c_1 + \xi_2 m_1}{I_{y1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{C_{z\delta_e}}{m_1} \\ \dfrac{C_{m\delta_e} + \xi_2 C_{z\delta_e}}{I_{y1}} \end{bmatrix} \Delta\delta_e$$

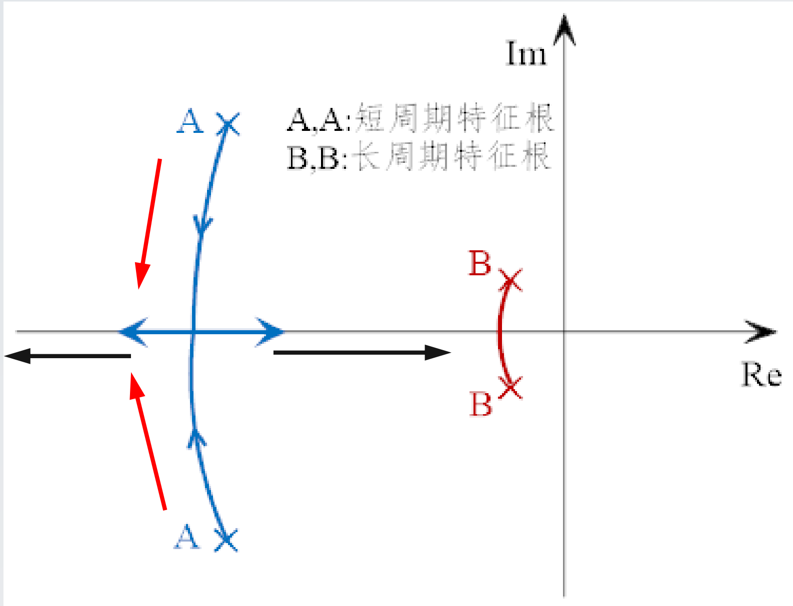
$$\omega_n = \sqrt{\frac{C_{z\alpha}c_1 C_{mq}}{m_1 I_{y1}} - \frac{C_{m\alpha}}{I_{y1}}} \qquad \zeta = \frac{-\left(\dfrac{C_{z\alpha}}{m_1} + \dfrac{c_1}{I_{y1}}(C_{mq} + C_{m\dot{\alpha}})\right)}{2\sqrt{\dfrac{C_{z\alpha}c_1 C_{mq}}{m_1 I_{y1}} - \dfrac{C_{m\alpha}}{I_{y1}}}}$$

$$m_1 = \frac{2m}{\rho V S}, \quad c_1 = \frac{\bar{c}}{2V}, \quad I_{y1} = \frac{I_y}{q_c S\bar{c}}, \quad \xi_1 = \frac{C_{x\dot{\alpha}}c_1}{m_1}, \quad \xi_2 = \frac{C_{m\dot{\alpha}}c_1}{m_1}$$

ω_{nsp}直接取决于$C_{m\alpha}$, 静稳定度提高，$C_{m\alpha}$下降, ω_{nsp}增加。

ζ_{sp} 直接取决于 C_{mq} 与 $C_{m\dot{\alpha}}$， 尾容比越高，ζ_{sp} 阻尼越高。

短周期特性随重心变化趋势



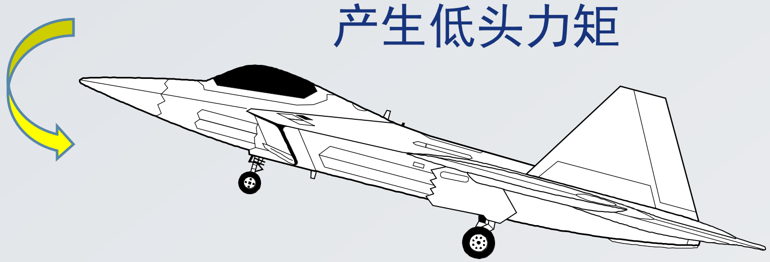
$x_{cg}\uparrow$， $H_n\downarrow$， λ_{sp}向实轴移动

在实轴相遇后，随着重心继续后移，λ_{sp}会分别沿实轴向左、右移动

产生一个较大负实根和一个较小正实根　动不稳定

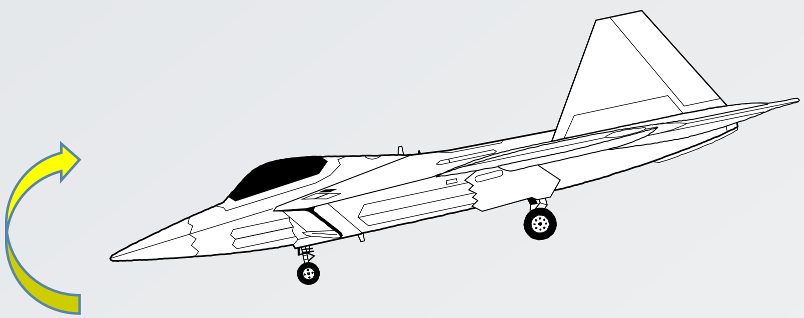
机理

$C_{m\alpha} < 0$，$C_{m\alpha}\alpha < 0$
产生低头力矩



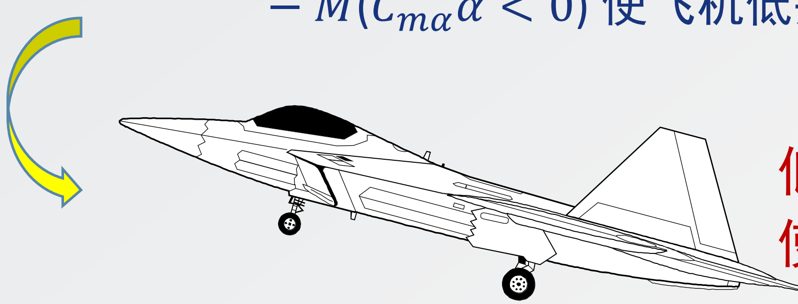
低头过程中$q < 0, C_{mq}q > 0$,
使得飞机低头幅度减小

惯性使飞机持续低头直到
$+M(C_{m\alpha}\alpha > 0)$ 使飞机抬头$(q > 0)$



抬头过程中$q > 0, C_{mq}q < 0$,
使得飞机的抬头幅度减小

惯性使飞机持续抬头直到
$-M(C_{m\alpha}\alpha < 0)$ 使飞机低头$(q < 0)$



低头过程中$q < 0, C_{mq}q > 0$,
使得飞机低头幅度减小

短周期品质要求

对于短周期模态

- O_s（精度）取决于ζ_{sp}
  $\zeta_{sp}\uparrow$, $O_s\downarrow$, 精度↑
- T_p（速度）取决于
  $\omega_{n,sp}$和ζ_{sp}, $\omega_{n,sp}\downarrow$,
  $\zeta_{sp}\uparrow$, $T_p\uparrow$, 速度↓

阻尼比ζ_{sp}要求

	Cat A & C $\zeta_{sp,min}$	Cat A & C $\zeta_{sp,max}$	Cat B $\zeta_{sp,min}$	Cat B $\zeta_{sp,max}$
I	0.35	1.3	0.3	2.0
II	0.25	2.0	0.2	2.0
III	0.15	----	0.15	----

- CAT A
  快速且精确
- CAT B
  和缓，不需精确
- CAT C
  和缓且精确

操纵期望参数(CAP)$\omega_{n,sp}^2/(n/\alpha)$ 要求

	Cat A, min	Cat A, max	Cat B, min	Cat B, max	Cat C, min	Cat C, max
I	0.28	3.6	0.085	3.6	0.16	3.6
II	0.16	10.0	0.038	10.0	0.096	10.0
III	0.16	----	0.038	----	0.096	----

Control Anticipated Parameter

例题

Boeing747巡航状态下的特征方程为：

$$\lambda^4 + 0.75\lambda^3 + 0.935\lambda^2 + 0.0095\lambda + 0.0042 = 0$$

气动、几何及飞行状态参数如下：

$$C_{L\alpha} = 4.92, \qquad S = 511m^2, \qquad W = 2.83 \times 10^6 N$$

$$V = 236\, m/s, \quad \rho = 0.3045\, kg/m^3$$

1. 确定飞机的短周期阻尼比和频率
2. 评估短周期飞行品质

解

$$\boxed{\lambda^4 + 0.75\lambda^3 + 0.935\lambda^2} + 0.0095\lambda + 0.0042 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^4 + 0.75\lambda^3 + 0.935\lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 0.75\lambda + 0.935 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \omega_{sp} = \sqrt{0.935} = 0.97 \\ \zeta_{sp} = \dfrac{0.75}{2 \cdot 0.97} = 0.39 \end{cases}$$

$$n/\alpha = \frac{L}{W \cdot \alpha} = \frac{C_{L\alpha} qS}{W}$$

$$= \frac{4.92 \cdot 0.5 \cdot 0.3045 \cdot 236^2 \cdot 511}{2.83 \times 10^6} = 7.53$$

$$CAP = \frac{\omega_{sp}^2}{n/\alpha} = 0.128$$

巡航属于B种飞行阶段　　一级飞行品质

长周期近似

α扰动在短周期振荡中会迅速衰减，并保持为0，则可假设长周期过程中$\Delta\alpha = \Delta\dot{\alpha} = 0$。

由于长周期运动缓慢，可假设 $\dot{q} = \ddot{\theta} = 0$，则四阶方程中与$\alpha, q$相关项可消去：

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \Delta\dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{C_{xu} - \xi_3 C_{zu}}{m_1} & \dfrac{C_{x\theta} - \xi_3 C_{z\theta}}{m_1} \\ \dfrac{-C_{zu}}{m_1 + C_{zq} c_1} & \dfrac{C_{z\theta}}{m_1 + C_{zq} c_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \Delta\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{C_{x\delta_e} - \xi_3 C_{z\delta_e}}{m_1} \\ \dfrac{-C_{z\delta_e}}{m_1 + C_{zq} c_1} \end{bmatrix} \Delta\delta_e$$

$$\xrightarrow{C_{z\theta} \approx 0} \quad s^2 - \frac{C_{xu}}{m_1} s + \frac{C_{x\theta} C_{zu}}{m_1^2} = 0 \qquad \xi_3 = \frac{C_{xq} c_1}{m_1 + C_{zq} c_1}$$

$$\omega_n = \frac{1}{m_1}\sqrt{C_{x\theta}C_{zu}},\quad \zeta = -\frac{C_{xu}}{2m_1\omega_n}$$

$$C_{xu} = -2C_D - C_{Du}$$
$$C_{x\theta} = -C_L\cos\theta_0$$
$$C_{zu} = -2C_L - C_{Lu}$$

低速条件下，$C_{Du} \approx C_{Lu} \approx 0$

平飞时可假设$\theta_0 \approx 0$

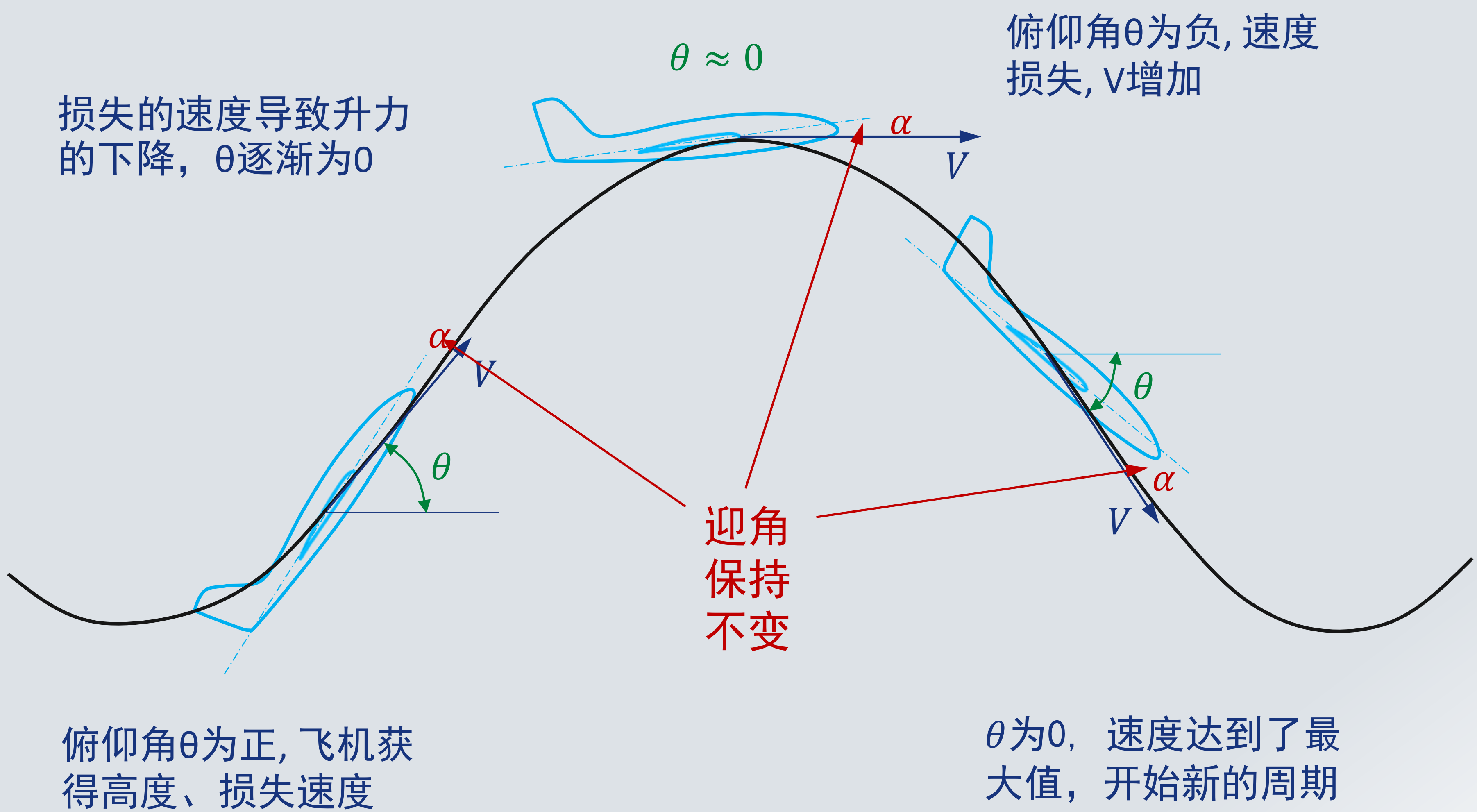
$$C_{xu} = -2C_D$$
$$C_{x\theta} = -C_L$$
$$C_{zu} = -2C_L$$

$$C_L = \frac{2W/S}{\rho U_0^2}$$

$$\omega_n = \frac{\sqrt{2}g}{U_0}$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{C_D}{C_L}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}E}$$

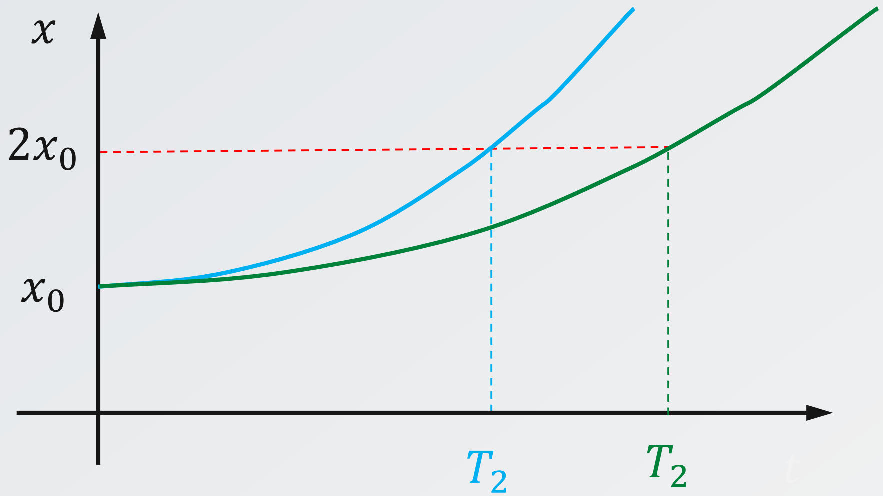
- ζ_p与飞机的气动效率因子(升阻比)E成反比
- ω_p随前向速度增加而降低，即T_p随速度增加而增加


损失的速度导致升力
的下降，θ逐渐为0
$\theta \approx 0$
俯仰角θ为负, 速度
损失, V增加
α
V
α
V
θ
θ
α
V
迎角
保持
不变
俯仰角θ为正, 飞机获
得高度、损失速度
θ为0， 速度达到了最
大值，开始新的周期

长周期品质要求

长周期的阻尼轻，周期很长，飞行员可轻易通过纵向操纵消除长周期模态

不稳定是可接受的



一级： $\zeta > 0.04$

二级：$\zeta > 0$

三级： $T_2 > 55s$

T_2越大， 发散越慢，飞行品质越好

纵向特征方程的近似解法

$$\Delta(s) = 5.64s^4 + 13.14s^3 + 20.65s^2 + 0.163s + 0.061 = 0$$

短周期模态特征根较大，高阶项≫低阶项，最高阶的三项近似对应短周期模态

$$\Delta(s) = 5.64s^4 + 13.14s^3 + 20.65s^2 = 0$$

标准二阶特征方程

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta_{sp}\omega_{sp}s + \omega_{sp}^2 = 0$$

$$\lambda_{sp} = -1.165 \pm 1.518i$$

精确解

$$\lambda_{sp} = -1.162 \pm 1.515i$$

长周期模态特征根很小，高阶项≪低阶项，最低阶的三项近似对应短周期模态

$$\Delta(s) = 20.65s^2 + 0.163s + 0.061 = 0$$

精确解

$$\lambda_p = -0.0039 \pm 0.0542i$$

$$\lambda_p = -0.00302 \pm 0.0544i$$

滚转收敛模态机理

飞机滚转
- 向下一侧机翼α增加
- 向上一侧机翼α减小

↓

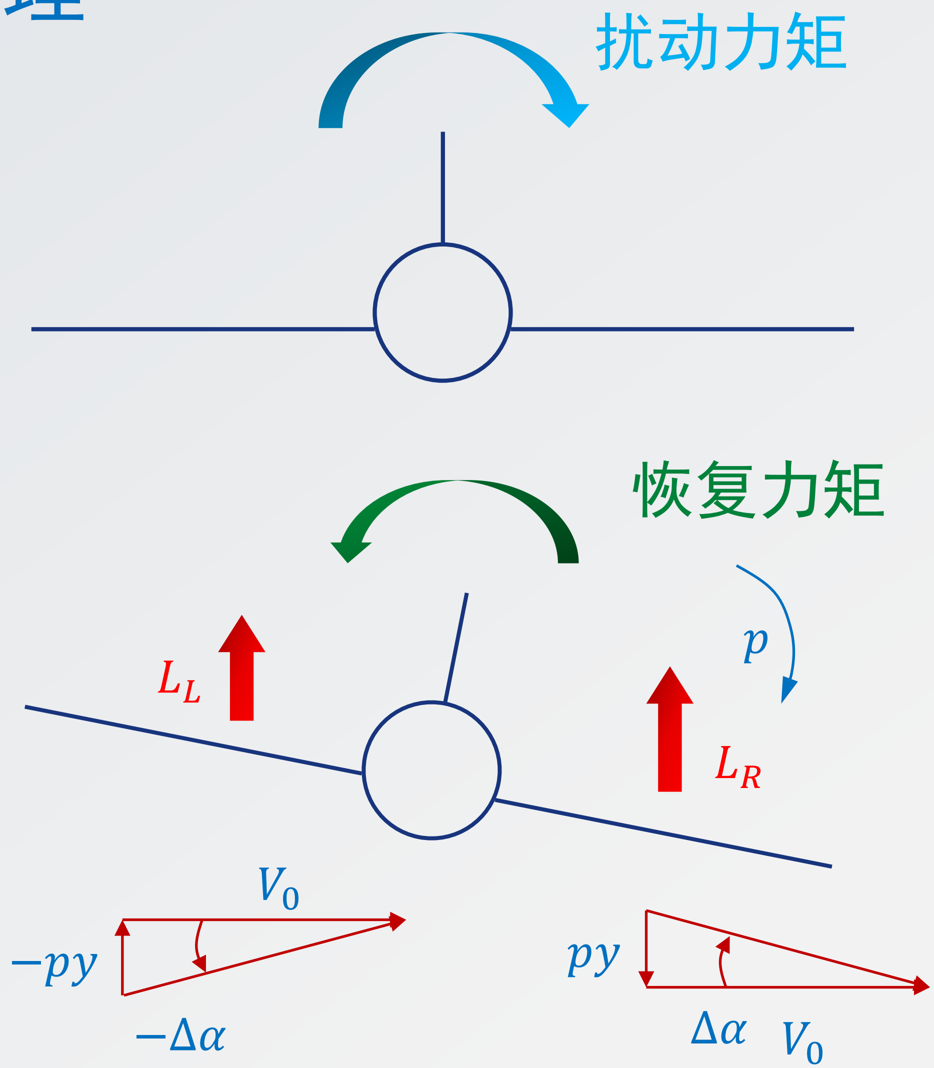
下沉侧机翼升力提高
另一侧减小

↓

产生恢复到初始平
衡状态的滚转力矩

↓

p呈指数收敛
建立稳定的滚转



滚转收敛模态近似

横航向扰动之后首先体现的是重阻尼的滚转收敛模态，期间飞机主要关于x轴滚转，其他参数变化缓慢

因此可假设$\Delta\dot{\beta} = r = \dot{r} = 0$

并忽略侧力与偏航力矩

$$I_{x1}\dot{p} - C_{lp}b_1 p = C_{l\delta a}\Delta\delta_a + C_{l\delta r}\Delta\delta_r$$

对于自由响应，$\Delta\delta_a = \Delta\delta_r = 0$

$$I_{x1}\dot{p} - C_{lp}b_1 p = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_r = \frac{C_{lp}b_1}{I_{x1}}$$

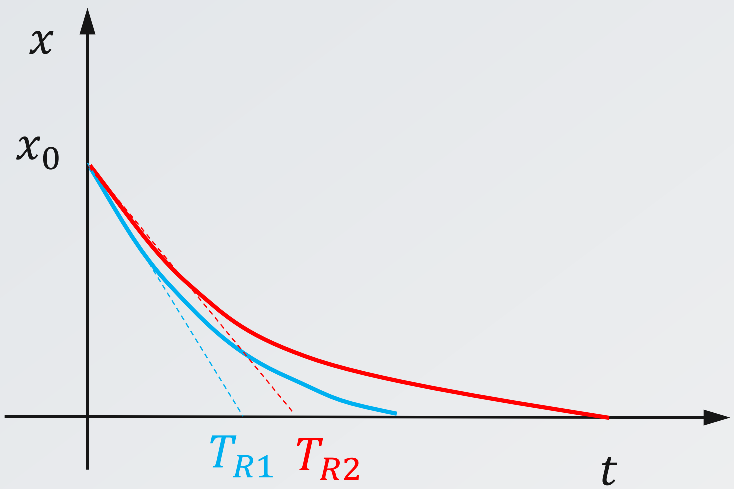
对于失速前迎角$C_{lp} < 0$, λ_r为大负实根

失速迎角附近的滚转会怎样？

滚转收敛品质要求

$$\lambda_r = \frac{C_{lp} b_1}{I_{x1}} \Rightarrow T_R = -\frac{1}{\lambda_R}$$

大负实根　　　小正值



T_R越小，收敛越快
飞行品质越好

CAT A: 快速且精确
CAT B: 和缓, 不需精确
CAT C: 和缓且精确

Class I, IV: 轻，快
Class II, III: 重，慢

滚转收敛时间常数T_R

飞机类型	飞行阶段	一级	二级	三级
I, IV	A & C	1.0	1.4	10.0
II, III	A & C	1.4	3.0	10.0
ALL	B	1.4	3.0	10.0

荷兰滚模态近似

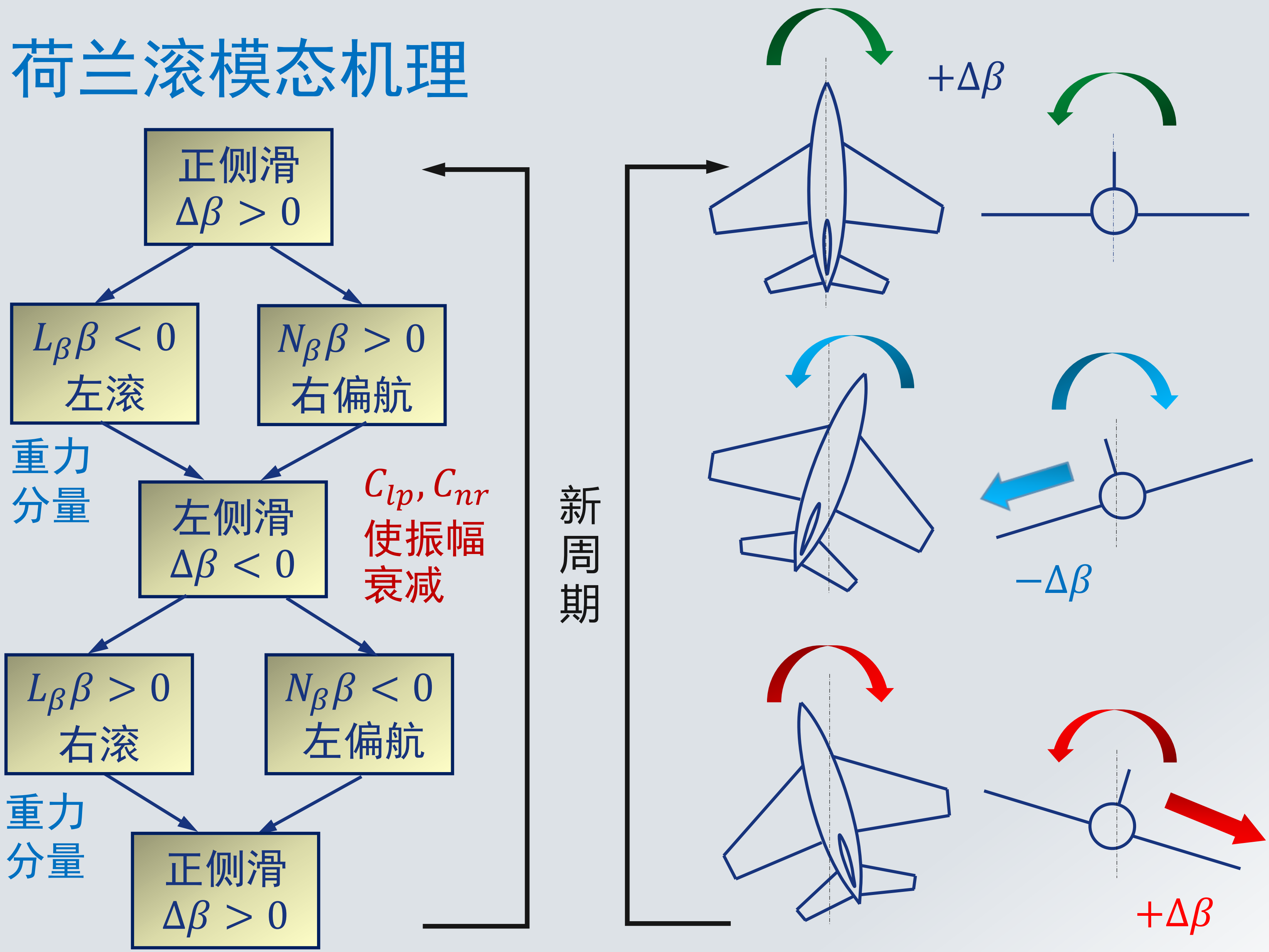
紧随滚转收敛模态的振荡运动被称为荷兰滚模态。主要包括侧滑与航向运动。

如果滚转运动足够小，则可认为$\Delta\phi = p = 0$，并忽略滚转力矩方程，则有：

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{\beta}\\ \dot{r}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\beta\\ r\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\omega_n = \sqrt{\dfrac{1}{m_1 I_{z1}}\left[C_{y\beta}C_{nr}b_1 + C_{n\beta}(m_1 - b_1 C_{yr})\right]}\\ \zeta = -\left(\dfrac{1}{2\omega_n}\right)\left(\dfrac{C_{y\beta}}{m_1} + \dfrac{b_1 C_{nr}}{I_{z1}}\right)\end{cases}$$

荷兰滚模态机理


正侧滑
$\Delta\beta > 0$
$L_\beta\beta < 0$
左滚
$N_\beta\beta > 0$
右偏航
重力
分量
左侧滑
$\Delta\beta < 0$
C_{lp}, C_{nr}
使振幅
衰减
$L_\beta\beta > 0$
右滚
$N_\beta\beta < 0$
左偏航
重力
分量
正侧滑
$\Delta\beta > 0$
新
周
期
$+\Delta\beta$
$-\Delta\beta$
$+\Delta\beta$

荷兰滚品质要求

CAT A: 快速且精确

CAT B: 和缓, 不需精确

CAT C: 和缓且精确

对于荷兰滚模态

- 精度取决于ζ_d：$\zeta_d\uparrow, O_s\downarrow$, 精度↑
- 速度主要取决于ω_n：$\omega_n\downarrow, T_p\uparrow$, 速度↓

Class I, IV: 轻，快

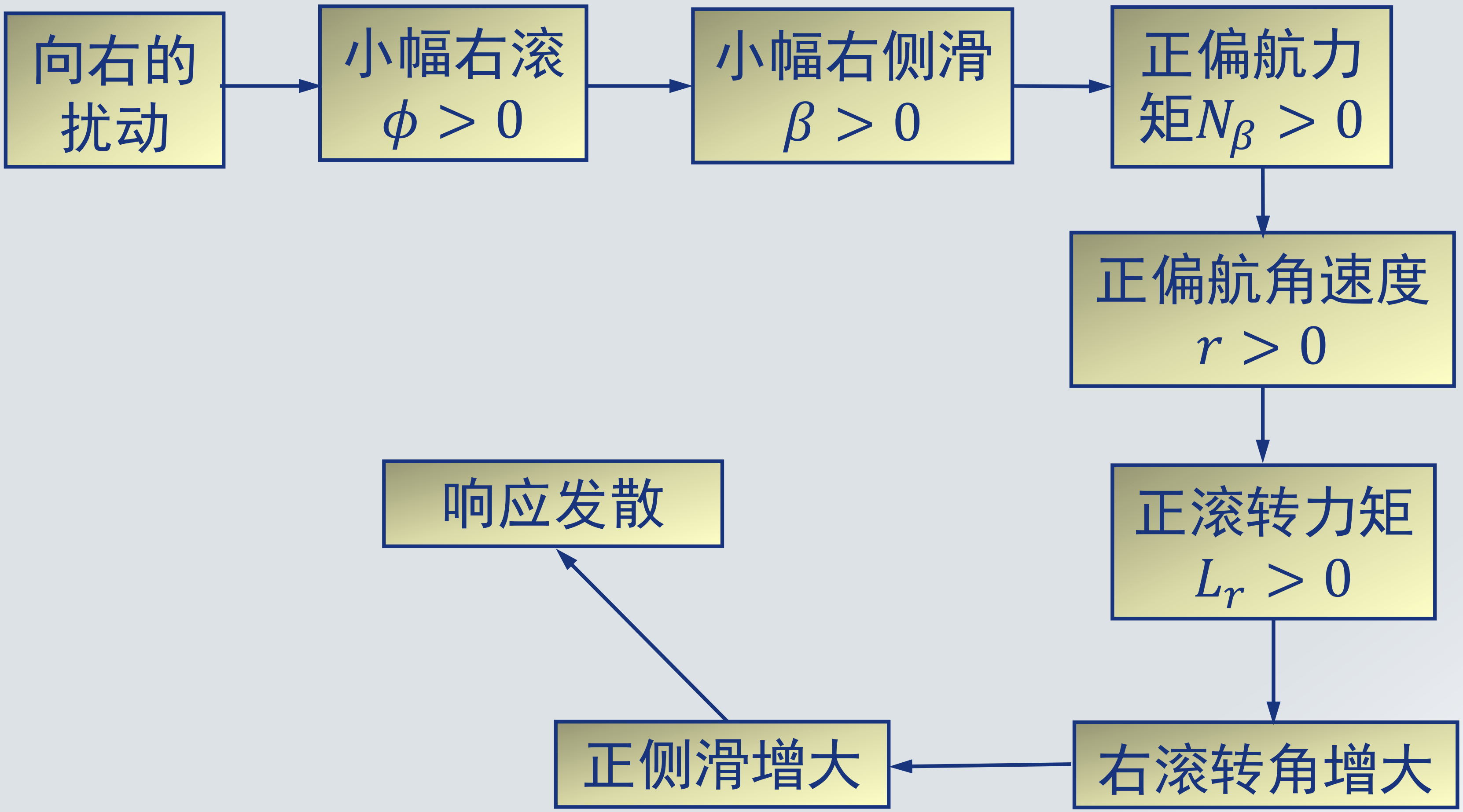
Class II, III: 重，慢

荷兰滚模态参数$\zeta_d, \zeta_d\omega_n$及ω_n的要求

等级	飞行阶段	飞机类型	$\zeta_{d,min}$	$(\zeta_d\omega_{nd})_{min}$	$\omega_{nd,min}$
I	A	I, IV	0.19	0.35	1.0
I	A	II, III	0.19	0.35	0.4
I	B	All	0.08	0.15	0.4
I	C	I,II-C[b], IV	0.08	0.15	1.0,
I	C	II-L[b], III	0.08	0.15	0.4
II	All	All	0.02	0.05	0.4
III	All	All	0.02	----	0.4

C: 舰载机, L: 陆基飞机

螺旋模态机理


向右的扰动
小幅右滚 $\phi > 0$
小幅右侧滑 $\beta > 0$
正偏航力矩 $N_\beta > 0$
正偏航角速度 $r > 0$
正滚转力矩 $L_r > 0$
右滚转角增大
正侧滑增大
响应发散

螺旋模态近似

在缓慢的螺旋运动中：

- 侧滑变化缓慢，故可假设$\Delta\dot{\beta} \approx 0$．并忽略侧力方程
- 滚转角速度几乎为0，故可假设滚转力矩为0

滚转与偏航力矩可简写成

$$C_{l\beta}\Delta\beta + C_{lr}b_1 r + C_{l\delta a}\Delta\delta_a + C_{l\delta r}\Delta\delta_r = 0$$

$$I_{z1}\dot{r} = C_{n\beta}\Delta\beta + C_{nr}b_1 r + C_{n\delta a}\Delta\delta_a + C_{n\delta r}\Delta\delta_r$$

对于自由响应$\Delta\delta_a = \Delta\delta_r = 0$

$$\Rightarrow \dot{r} = \frac{(-C_{n\beta}C_{lr} + C_{nr}C_{l\beta})b_1}{I_{z1}C_{l\beta}} r \quad \Rightarrow \lambda_s = \frac{b_1(C_{nr}C_{l\beta} - C_{n\beta}C_{lr})}{I_{z1}C_{l\beta}}$$

$$\lambda_s = \frac{b_1(C_{nr}C_{l\beta} - C_{n\beta}C_{lr})}{I_{z1}C_{l\beta}}$$

通常

横向静稳定，$C_{l\beta} < 0$

偏航阻尼，$C_{nr} < 0$

$\Rightarrow$ $C_{l\beta}C_{nr} > 0$

航向静稳定，$C_{n\beta} > 0$

交叉阻尼，$C_{lr} > 0$

$\Rightarrow$ $C_{n\beta}C_{lr} > 0$

当$|C_{l\beta}C_{nr}| > |C_{lr}C_{n\beta}|$ 时，螺旋模态稳定

螺旋模态发展缓慢，即使不稳定，飞行员也能轻易干预，允许不稳定，只要发散不太快。

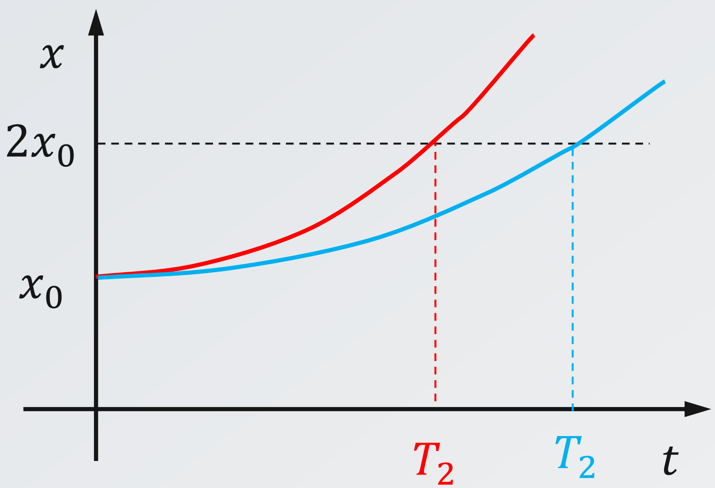
螺旋品质要求

螺旋模态很慢，驾驶员可轻易通过操纵消除此模态

不稳定是可接受的

CAT A: 快速

CAT B & C: 和缓



螺旋模态倍幅时T_2 要求

飞机类型	飞行阶段	一级	二级	三级
I, IV	A	12s	8s	4s
I, IV	B, C	20s	12s	4s
II, III	All	20s	12s	4s

T_2 越大，发散越慢

飞行品质越好

若$\lambda_s < 0$，螺旋模态稳定，一级品质