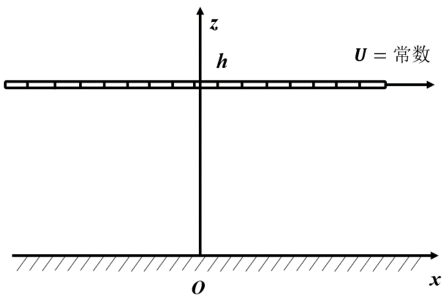
1 引言

2 定常的平行剪切流动

2.1 平板Couette流动

考虑两块处于相对静止的无限大平行板，其间充满了流体。 若其中一块平板相对于另一块平板以不变的速度在其自身平面内运动， 使得流体在摩擦力作用下发生运动。 当时间充分长后，流体运动达到定常状态，称为平板Couette流动。



取正交笛卡尔坐标系， 使平板所在平面为$x-y$平面，平板运动方向为x轴方向。 由于没有压强梯度推动或阻滞流体运动，则$\partial p/\partial x=0$。 考虑到平板在x和y方向无界，则$u=u(z)$, $v=w=0$。 根据定常平行剪切流动控制方程

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0 \tag{1}$$

得到

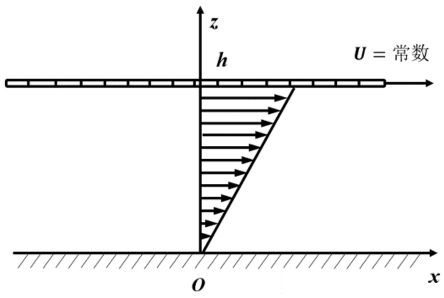
$$\frac{d^2u}{dz^2}=0, \quad u(z)=Az+B \tag{2}$$

其中A和B为待定系数。结合在两块平板面上流体速度无滑移边界条件，即

$$z=0,\ u=0; \qquad z=h,\ u=U \tag{3}$$

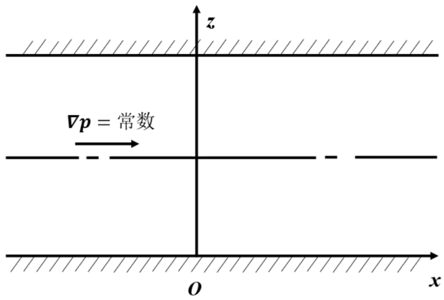
最终得到平板Couette流动中速度分布为

$$u(z)=\frac{U}{H}z,\ \ 0\leq z\leq H \tag{4}$$



2.2 平面Poiseuille流动

考虑两块处于相对静止的无限大平行板，其间充满了流体。 若沿着和平板平行的某一方向在流体内作用一个不变的压强梯度，使得流体在此压力场作用下运动， 则当时间充分长以后，作用在流体上的压力和黏性力达到平衡，流体到达定常流动状态，称为Poiseuille流动。



取正交笛卡尔坐标系， 使平板所在平面为xy平面，压力梯度方向为x轴反方向，即

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -G, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

其中G为常数。 由于流动在x和y方向无界，则$u = u(z),\ v = w = 0$。 根据定常平行剪切流动控制方程

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{6}$$

得到

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{G}{\mu}, \quad u(z) = Az^2 + Bz + C \tag{7}$$

其中A和B为待定系数。结合在两块平板面上流体速度无滑移边界条件，即

$$z = 0,\ u = 0; \qquad z = H,\ u = 0 \tag{8}$$

最终得到平面Poiseuille流动中速度分布为

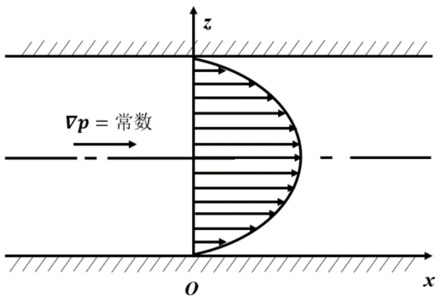
$$u(z)=\frac{G}{2\mu}z(H-z),\ \ 0\le z\le H \tag{9}$$

上式表明，平面Poiseuille流动中速度是沿着平板面垂直方向成抛物线分布，最大速度出现在两板之间的中心位置。 最大速度值为

$$u_{\max}=u(H/2)=\frac{GH^2}{8\mu} \tag{10}$$

最大展长的流量

$$Q=\int_0^H u(z)dz=\frac{GH^3}{12\mu}=\frac{2}{3}Hu_{\max} \tag{11}$$



References