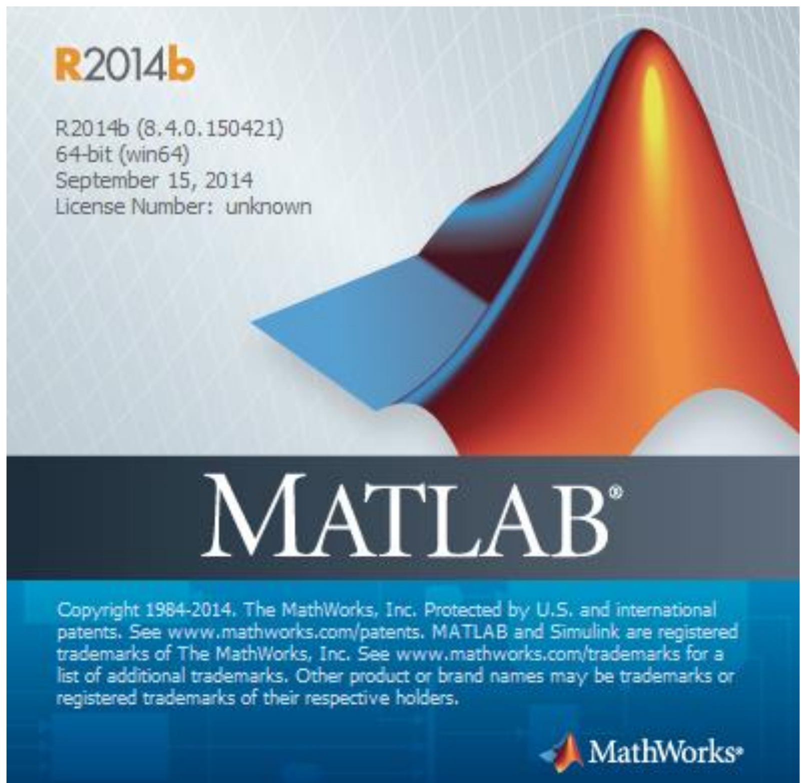
第6章

MATLAB软件与应用



第六章 符号运算

- 符号对象的创建
- 符号对象的基本运算
- 符号的微积分运算
- 符号方程求解
- 符号的其他运算

解线性方程组

符号运算

符号运算和数值运算的对比

- 符号运算的对象不是数值而是符号（常量/变量/表达式/函数/矩阵）
- 符号运算由符号数学工具箱支持
- 符号运算采用的内部函数和数值运算有相当大一部分同名(例如sin，既可以进行数值计算也可以进行符号运算)
- 获取帮助信息可使用“help sym/函数名”
- 数值运算须先对变量赋值再进行运算，而符号运算不需要
- 在一定条件下，符号与数值可以相互转换

符号运算

```
>> 4*x/y
??? Undefined function or variable 'x'.
```

这是数值运算，参与运算的变量可以不定义，

但需要提前赋值，否则将出错。

```
>> syms  x  y
>> 4*x/y
```

这是符号运算，不必预先赋值

符号变量

符号变量创建 syms sym

syms f

含义：直接定义符号变量f，f的值也就是f。

f=sym(‘符号字符串’)

含义：创建符号变量f，值为‘符号字符串’ ；

注意：a=sym(’ a’)和 a=sym(’ b’)，虽然都定义了符号变量a，但赋值不同。

注意syms 和 sym的区别

符号变量

符号变量的创建 sym syms

```
>> syms  a;          % a定义为符号变量
>> syms  b  c ;  % b c 定义为符号变量
>> f=sym('a*b+1.5*y^2');    % f定义为符号变量并赋值
```

几种典型错误命令

```
>> x=sym x;
>> x=sym 'x';
>> syms x,y,z;      %要用空格来分隔
>> sym a;   %这样也是错误的
```

符号常量

常量和符号常量的运算机制不同

```
>> a=sin(pi/4)        % sin(pi/4)为数值常量
>> b=sym('sin(pi/4)')   % 这里sin(pi/4)为符号常量
```

结果为

```
a=
      0.7071
b=
      2^(1/2)/2
```

符号表达式

符号表达式：不要求字符串中的符号有预先确定的值。

建立符号表达式的方法：

(1) 用sym函数建立符号表达式。

```
>> f=sym('a*x^2+b*x+c');
```

(2) 使用已经定义的符号变量组成符号表达式。

```
>> syms  x  y  a  b  c
>> f=a*x^2+b*x+c  %不加单引号
```

%？ ？ ？ ？

```
>> f='a*x^2+b*x+c'    %f是字符串变量
```

```
ans =
  -(b + (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
 -(b - (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
```

用solve(f)分别试验上面不同方法建立的f

进行了符号（解析）求解。

sym命令详解

功能：定义符号表达式;

或将输入参数转换为对应的符号表示，

或设定符号变量类型。

格式：

x=sym(‘a’) ;

x=sym(A); %A是已有值的字符串或数值类变量

x=sym(A, 'real'), sym(A, 'unreal'),

x=sym(A，flag) %flag为f，r，e，d

sym命令详解

【例】

```
f= sym('sin(x)^2+ cos(x)^2')
A=0.25
sym(A)   %结果是1/4
sym('A')  %结果是A，同之前的0.25没联系
```

自行尝试运行以下代码，观察结果。

```
A= '1/5'
A=sym('1/8')
sym('sqrt(3)')
sym(sqrt(3))
```

符号表达式

符号表达式f=sym('a*x^2+b*x+c')中谁是自变量?

solve(f)解出来谁?

- 小写x被视为默认自变量；
- 位置最接近x的小写字母视为自变量；
- solve(f,'c')可指定c为之变量。

```
solve(f,'c')

ans =
  - a*x^2 - b*x
```

```
>>solve(f)

ans =
  -(b + (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
 -(b - (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
```

符号表达式

默认自变量实例

（1） sin(a*x+b*y)

（2）a*x^2+b*x+c

（3）1/(4+cos(t))

（4）4*x/y

（5）2*a+b

（6）2*i+4*j

符号表达式

findsym(f) 和 findsym(f,n)

可获取系统定义的自变量

```
>>f=sym('sin(a*x+b*y)'); findsym(f)
>>f=sym('sin(a*x+b*y)'); findsym(f,1)
>>f=sym('sin(a*x+b*y)'); findsym(f,2)
```

结果是

```
a, b, x, y
x
x, y
```

符号矩阵

符号矩阵是元素中含有符号对象的矩阵，创建方式同一般符号变量相似。

```
syms a b c d
m=[a,b,sin(c),d^2+a] % syms方式

f1=sym('[x,sin(y)]') % sym方式

f2='[u,v]'  %这是字符串
```

基本的符号运算

所有数值运算符（包括矩阵运算）和 大部分数值运算函数也可用于符号运算。

```
syms a b c d
m1=[a,b]; m2=[c,d]
x=m1+m2
y=[m1;m2]
z1=y.^2
z2=y^2
inv(z1)
det(z2)
```

结果是

```
x =
     [ a + c, b + d]
y =
     [ a, b]
     [ c, d]
z1 =
     [ a^2, b^2]
     [ c^2, d^2]
z2 =
     [ a^2 + b*c, a*b + b*d]
     [ a*c + c*d, d^2 + b*c]
ans =
[  d^2/(a^2*d^2 - b^2*c^2), -b^2/(a^2*d^2 - b^2*c^2)]
[ -c^2/(a^2*d^2 - b^2*c^2),  a^2/(a^2*d^2 - b^2*c^2)]
ans =
     a^2*d^2 - 2*a*b*c*d + b^2*c^2
```

其他常用的符号运算

subs	符号表达式的替换
collect	合并同类项
expand	展开多项式
horner	分解成嵌套形式
factor	因式分解
simplify	对表达式化简
simple	化简为最简形式，最少字符
finverse	符号表达式/函数求反函数
numden	转换为分子分母形式（通分）

sym2poly, poly2sym 多项式和符号表达式相互转换

其他常用的符号运算

表达式替换 subs

- subs（f）用给定值替换符号表达式中的所有系统指定的变量；
- subs（f，new）用new替换符号表达式f中所有系统指定的变量；
- subs（f，old，new）将符号表达式中所有old出现的地方用new值替换。

其他常用的符号运算

例：表达式代换

```
>> a=5; c=10;
>> y=sym('a*x^2+b*x+c')
>> subs(y)

>> syms a b
>> subs(a+b,a,4)
>> subs(a+b,4)   ( b是默认自变量，b被替换成4 )

>> subs(cos(a)+sin(b),{a,b},{sym('alpha'),2})
                            %结果是sin(2) + cos(alpha)
```

其他常用的符号运算

例: collect 合并同类项

```
>> f=sym('x^2*y+y*x-x^2-2*x');
>> collect(f)
```

结果是(y - 1)*x^2 + (y - 2)*x

```
>> syms x y;
>> collect(x^2*y+y*x-x^2-2*x)
```

结果也是(y - 1)*x^2 + (y - 2)*x

其他常用的符号运算

例: expand展开多项式

```
>> f=sym('(x-2)*(x-4)');
>> expand(f)   %结果是x^2 - 6*x + 8

>> expand( (x-2)*(x-4) ) %x默认是数值
                         %这样是不行的

??? Undefined function or variable 'x'.
```

需要事先定义syms x

其他常用的符号运算

例：horner分解成嵌套形式

```
>>syms x;
>>horner(x^3-6*x^2+11*x-6)
```

结果是

```
x*(x*(x - 6) + 11) - 6
```

例：factor因式分解

```
>>factor(x^3-6*x^2+11*x-6)
```

结果是

```
(x - 3)*(x - 1)*(x - 2)
```

其他常用的符号运算

例: simplify: 对表达式化简

```
>>simplify(sym('sin(y)^2 + cos(y)^2'))   %结果为1
>>syms x
>>simplify((x^2+5*x+6)/(x+2))  %结果x+3
>>f=sym('16')
>>simplify(sqrt(f))  %结果4
```

例: simple自动探测多种化简方,给出最简形式

```
>>syms x
>>f=2*cos(x)^2-sin(x)^2;
>>simple(f)
>>[r,how]=simple(f)
```

尝试对比simple，simplify的异同。

simple返回how = []说明什么？

其他常用的符号运算

例：通分， 符号表达式/多项式互转

```
>> f1=sym('1/(a-b)');
>> f2=sym('2*a/(a+b)');
>> f3=sym('(a+1)*(b-1)*(a-b)');
```

```
n=
a + b - 2*a*b + 2*a^2

d =
(a + b)*(a - b)
```

```
>> [n,d]=numden(f1+f2)    %n为分子，d为分母
>> p=sym('2*x^3+3*x^2+4');
>> sym2poly(p)  %结果为2  3  0  4
>> x=[2,3,0,4];
>> poly2sym(x) %结果为2*x^3 + 3*x^2 + 4
```

其他常用的符号运算

符号表达式求反函数 finverse

格式：finverse(f)

finverse(f,v)

f: 符号表达式

v: 自变量。

finverse(f)　　系统默认自变量；

finverse(f,v)，v是指定的自变量。

其他常用的符号运算

compose 求符号函数的复合函数

- compose(f,g) 返回f，g的复合函数f(g(y)),其中f，g中的自变量为系统默认的；
- compose(f,g,z)返回f，g的复合函数f(g(z))，其中z为g中自变量；
- compose(f,g,x,z)返回f，g的复合函数f(g(z)),其中x和z分别是f和g中的自变量；
- compose(f,g,x,y,z) 返回f，g的复合函数f(g(z)),其中x和y分别是f和g中的自变量，z为复合函数中的自变量。

其他常用的符号运算

例：求复合函数 compose

```
>>syms x y z t u;
>>f = 1/(1 + x^2); g = sin(y); h = x^t; p = exp(-y/u);
>>compose(f,g)
>>compose(f,g,t)
>>compose(h,g,x,z)
>>compose(h,g,t,z)
>>compose(h,p,x,y,z)
>>compose(h,p,t,u,z)
```

微积分中的符号运算

符号极限limit

- g=limit (f)　　函数f在系统默认的自变量为默认值时的极限值；
- g=limit (f, a)　　函数f在系统默认的自变量为a时的极限值；
- g=limit (f,x,a)　　函数f在自变量x为a时的极限值；
- g=limit (f,x,a,’left’) 函数f在自变量x为a时的左极限值；
- g=limit (f,x,a,’right’) 函数f在自变量x为a时的右极限值；

微积分中的符号运算

例：符号极限limit

```
syms x h
limit(1/x)
limit(1/x,0)
limit(1/x,x,0)
limit(1/x,x,0,'left')
limit(1/x,x,0,'right')
limit(sin(x)/x)
limit((x-2)/(x^2-4),2)    %结果为1/4
limit((1+2*h/x)^(3*x),x,inf)
limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)
```

微积分中的符号运算

符号微分diff

diff(f) 返回函数f对系统默认自变量的一阶微分；

diff(f, t) 返回函数f对自变量t的一阶微分；

diff(f,n)返回f对系统默认自变量的n阶微分；

diff(f,t,n)返回f对自变量t的n阶微分。

f,t 需要定义为符号型

微积分中的符号运算

符号积分int

int(f) 返回f对系统默认自变量的不定积分；

int(f, t) 返回f对自变量t的不定积分；

int(f,t,a,b) 返回f对自变量t的定积分；　，

int(f,a,b) (a,b 为数值式) 返回f对系统默认自变量

的定积分，上下限分别为数值a和b；

int(f,m,n) (m,n为符号式) 返回f对系统默认自变量

的定积分，上下限分别为符号m和n；

f,t 需要定义为符号型

微积分中的符号运算

特殊的例子：符号运算双重积分

$$\int_{1}^{2}\int_{\sin(x)}^{\cos(x)} xydydx$$

```
syms x y;
int(int(x*y,y,sin(x),cos(x)),1,2)
```

符号级数和变换

symsum(f) 符号表达式的默认变量从0到k-1项求和；

symsum(f,b)符号表达式的默认变量从0到b求和；

symsum(f,a,b) 符号表达式的默认变量从a到b求和。

symsum(f,v,a,b) 符号表达式指定的变量v从a到b求和。

taylor(f,v,n) f对指定的自变量v泰勒展开到第n-1项。

fourier, ifourier   傅里叶变换和逆变换

laplace, ilaplace   拉普拉斯变换和逆变换

ztrans, iztrans   Z变换和逆变换

解符号方程组

符号方程(组)求解solve

sovle(f1,f2,…,fn) 解方程或者方程组，f1=0,f2=0,…fn=0构成了方程或方程组，自变量为系统默认；

sovle(f1,f2,…,fn, v1,v2,v3,…,vn) 解方程或者方程组，f1=0,f2=0,…fn=0构成了方程或方程组，v1，v2，…,vn为指定的自变量。

解符号方程组

例：解线性方程组 $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x-y+z=0 \\ 2x-y-z=-4 \end{cases}$

```
f1=sym('x+y+z-10*a');
f2=sym('x-y+z');
f3=sym('2*x-y-z+4*a');
solve(f1,f2,f3);
[x,y,z]=solve(f1,f2,f3)   %建议不要省略输出列表
```

结果为 x=2*a   y=5*a   z=3*a

```
subs([x,y,z],'a',1) %通过符号代入可得到解2,5,3
```

这是符号求解，对简单问题有可能求出精确解，
但复杂问题需要数值求解

解符号方程

例：解方程（a,b为系数） $\begin{cases} x+y=b \\ 2x=b \end{cases}$

```
>> syms x y a b;
>> [x,y]=solve('x+y=a','2*x=b',x,y)
```

结果是

```
x =b/2
y =a - b/2
```

解符号微分方程

符号微分方程求解dsolve

dsolve(f,cond,v) 求微分方程的解，f为微分表达式，cond为初始条件；

dsolve(f1,f2,…,fn) 求微分方程或微分方程组的通解，f为微分表达式，自变量为系统默认；

dsolve(f1,f2,…,fn,cond1,cond2…,condn,v1,v2…,vn) 求微分方程或微分方程组的解，f为微分表达式，v为指定的自变量。

解符号微分方程

注意

- Dy代表dy/dt，D2y代表d^2y/dt^2
- 如果没有初始条件，则求微分方程的通解
- 系统默认变量t

解符号微分方程

例：

求微分方程dy/dt=ay的通解。

并求初始条件$y|_{t=0}=1$时的特解，a为系数。

```
>> dsolve('Dy=a*y')
>> dsolve('Dy=a*y','y(0)=1')
```

结果是

```
ans =C8*exp(a*t)
ans =exp(a*t)
```

解符号微分方程

例:求微分方程组的通解 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$

```
[x,y]=dsolve('Dx=y, Dy=-x')
```

结果是

x =(C6*i)/exp(i*t) - C5*i*exp(i*t)

y =C5*exp(i*t) + C6/exp(i*t)

符号、数值的转换

- digits(D) 返回有效数字个数为D的近似解精度。
- r=vpa(s) 返回digit函数设置精度的数值解。
- vpa(s,D) 相当于前两个的组合
- subs(s,o,n) 符号表达式中用o变量来替换n变量。
- numeric(s) 将不含自由变量的符号表达式转换为数值型。

符号、数值的转换

例：

```
s=solve('3*x^2+2*x-6=0')
vpa(s)
vpa(s,6)

syms x;
f=x-cos(x);
f1=subs(f,x,'pi')
digits(15)
vpa(f1)
```

```
19^(1/2)/3 - 1/3
- 19^(1/2)/3 - 1/3
```

```
1.11963298118022
-1.78629964784689
```

```
1.11963
-1.7863
```

```
pi + 1
```

```
4.14159265358979
```

MATLAB符号运算　符号微积分

- symsum符号合计函数

➢ symsum(s) %计算s对findsym函数返回的符号变量的不定和。

➢ symsum(s,v) %计算s对变量v的不定和。

➢ symsum(s,a,b) %计算s从a到b的有限和。

例：

```
syms k n;
f1=symsum(k)
f2=symsum(k^2,0,n)
f3=subs(f2,n,10)
f4=symsum(k^2,0,10)  %f3 f4应该相等
```

MATLAB符号运算　符号微积分

- 梯度函数—— **gradient**

➢ [Fx,Fy]=gradient(F)%返回矩阵F的数值梯度，Fx相当于dF/dx，为x方向的差分值。Fy相当于dF/dy，为y方向的差分值。

➢ [Fx,Fy]=gradient(F,H)%当H为数量时，使用H为各方向的点间隔。

➢ [Fx,Fy]=gradient(F,Hx,Hy)%当F为二维时，使用Hx和Hy指定点间距。Hx和Hy可以为数量和向量，如果Hx和Hy为向量，则它们的长度必须和F的长度匹配。

➢ [Fx,Fy,Fz]=gradient(F)%返回三维的梯度。

➢ ……

MATLAB符号运算　符号微积分

- 多元函数求导—— **jacobian**

jacobian(f,v)

计算数量或向量f对向量v的jacobi矩阵，注意当f为数量时，函数返回f的梯度。

例：

求下列函数的jacobi矩阵

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x1 - \cos(x1x2) - 0.5 = 0 \\ x1^2 - 81(x2 + 0.1)^2 + \sin x3 + 1.6 = 0 \\ e^{-x1x2} + 20x3 + (10\pi/3 + 1) = 0 \end{cases}$$

MATLAB符号运算　总结

定义： sym syms

运算： + - * / ^

化简： collect,expand,horner,factor,

simplify,simple ....

其他：finverse,compose,subs

微积分：limit，diff，int，

symsum，taylor ....

方程(组): solve, dsolve

第6章，符号运算

1. 掌握符号变量、符号表达式的定义，熟练运用sym syms

2. 掌握基本符号运算 (a*x+b*y-c*z)/2*v*w^2

3. 符号方程(组)及其求解 solve

   subs、double、eval、vpa

符号表达式化简、符号微积分等了解基本用法