

第四章 根轨迹法

主要内容

1. 根轨迹的基本概念和根轨迹方程
2. 绘制常规根轨迹的法则
3. 广义根轨迹
4. 控制系统的根轨迹分析法

闭环系统的动态性能与闭环极点在 s 平面上的位置密切相关。所以在分析系统的性能时，往往要求确定系统的闭环极点的位置。另外，在分析或设计系统时，经常要研究一个或几个参量在一定范围内变化时，对闭环极点的位置以及系统性能的影响。对高阶系统，求极点存在困难，特别当系统某一参数变化时，需要反复求解高次方程，非常不便。

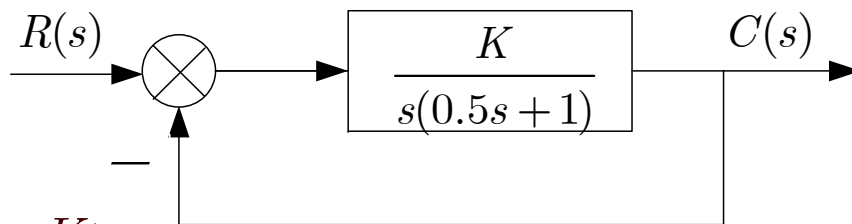
伊凡恩 (W.R.Evans) 提出了求解特征根的图解方法——根轨迹法。根轨迹法是在已知系统的开环零、极点条件下，绘制出系统闭环特征根在 s 平面上随参数变化的运动轨迹。利用根轨迹可以分析系统的性能，了解参数变化对性能的影响，具有直观简便的特点。

4 - 1 根轨迹的基本概念

一、定义

根轨迹——当系统某个参数从零变化到无穷大时，闭环特征根在 s 平面上移动的轨迹。

例: 已知如图系统



$$G(s) = \frac{K}{s(0.5s + 1)} = \frac{2K}{s(s + 2)} \stackrel{\text{令}}{=} \frac{K^*}{s(s + 2)}$$

开环极点: $p_1 = 0, p_2 = -2$

$$\therefore \Phi(s) = \frac{K^*}{s^2 + 2s + K^*} \quad \therefore D(s) = s^2 + 2s + K^* = 0$$

闭环极点

$$\therefore s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - K^*} = -1 \pm \sqrt{1 - 2K}$$

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - K^*}$$

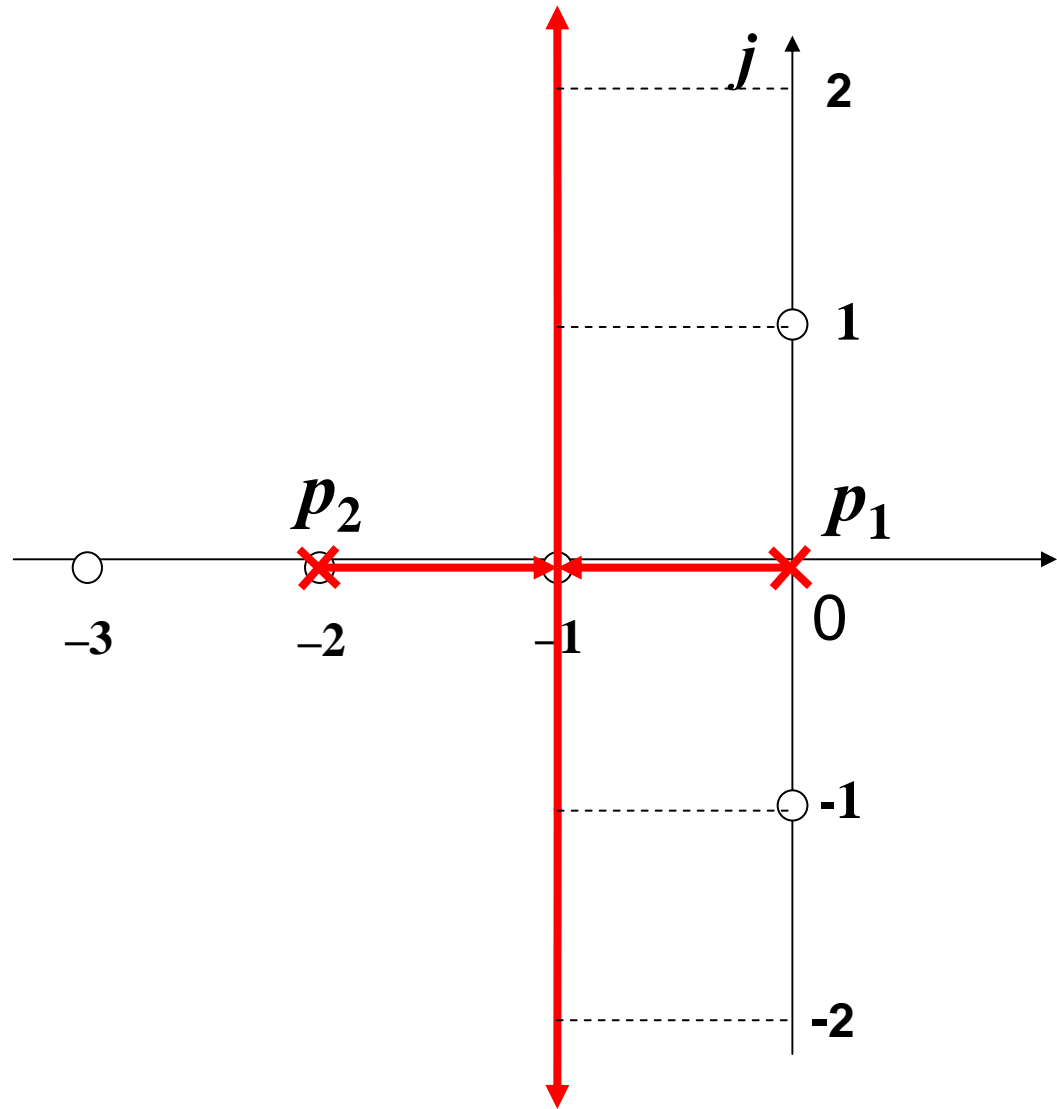
$$\textcircled{1} \quad K^* = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -2 \end{cases}$$

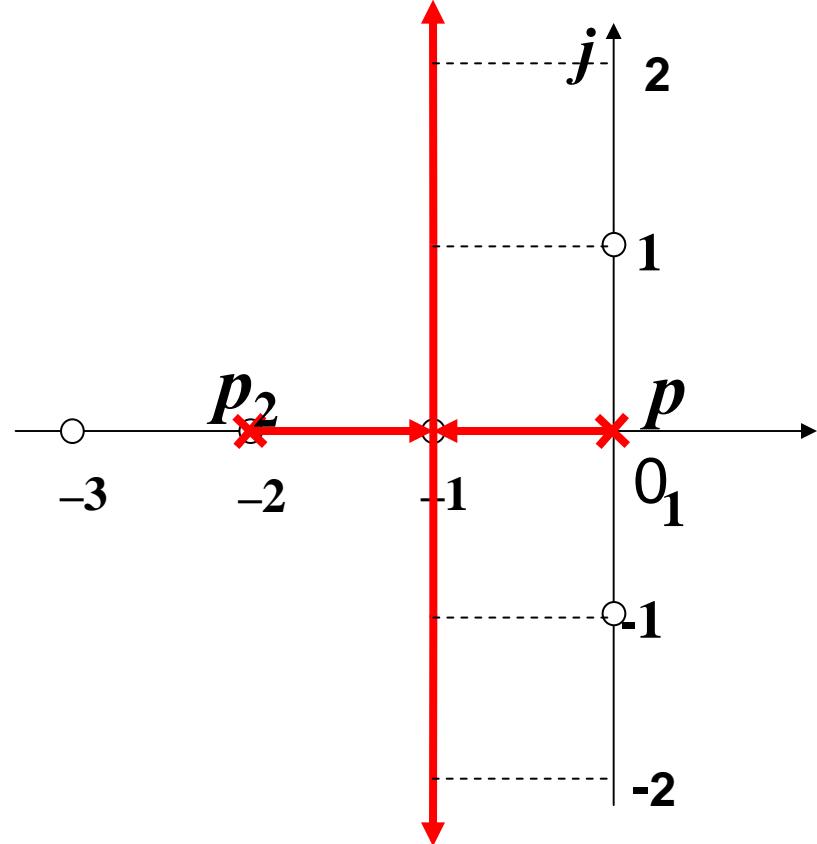
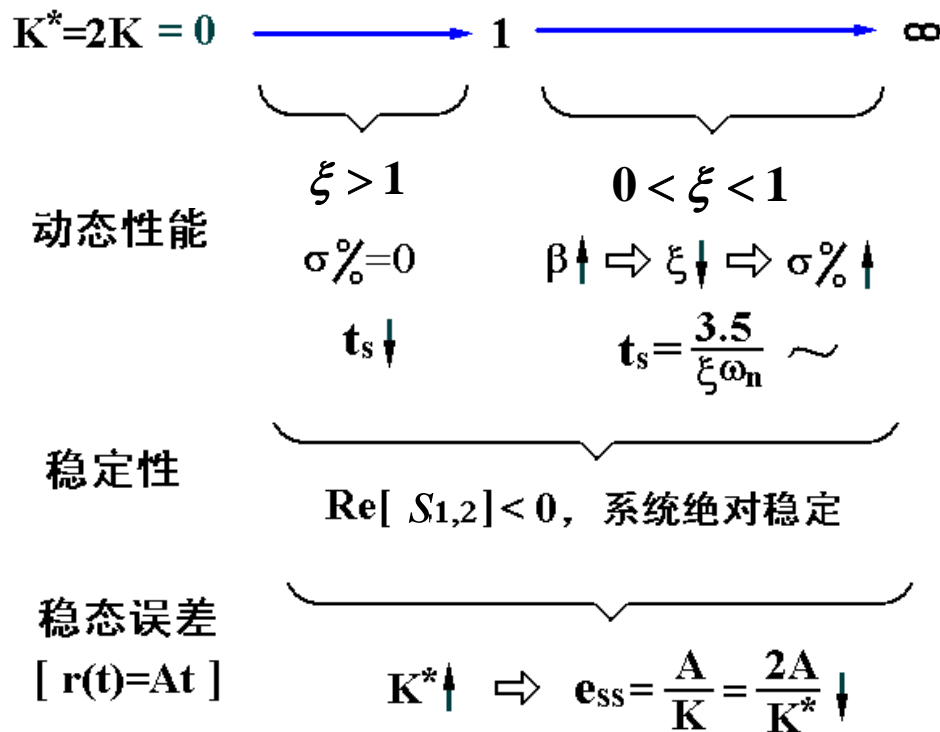
$$\textcircled{2} \quad K^* = 1 \Rightarrow s_1 = s_2 = -1$$

$$\textcircled{3} \quad K^* = 2 \Rightarrow s_{1,2} = -1 \pm j$$

$$\textcircled{4} \quad K^* = 5 \Rightarrow s_{1,2} = -1 \pm j2$$

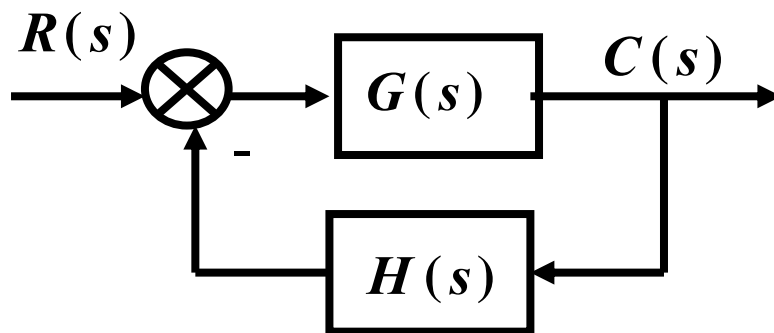
$$\textcircled{5} \quad K^* = \infty \Rightarrow s_{1,2} = -1 \pm j\infty$$





- (1) K^* 从 $0 \rightarrow \infty$ 根轨迹均在 s 左半平面, 所以系统对所有的 K 值都稳定。
- (2) $0 < K^* < 1$, 特征根为实数, 过阻尼, 无超调。
- (3) $K^* = 1$, 临界阻尼, 也无超调。
- (4) $K^* > 1$, 共轭复数根, 欠阻尼, 衰减振荡。
- (5) 在 $G(s)$ 中, 有一个零值极点, 系统为 1 型(从原点出发的根轨迹条数), 阶跃输入时的稳态误差为零。

二、闭环零极点和开环零极点之间的关系



$$G(s) = K_G^* \frac{\prod_{i=1}^f (s - z_i)}{\prod_{i=1}^g (s - p_i)}$$

z_i 前向通路零点
 p_i 前向通路极点

$$H(s) = K_H^* \frac{\prod_{j=1}^l (s - z_j)}{\prod_{j=1}^h (s - p_j)}$$

z_j 反馈通路零点
 p_j 反馈通路极点

$$G(s)H(s) = \frac{K_G^* K_H^* \prod_{i=1}^f (s - z_i) \prod_{j=1}^l (s - z_j)}{\prod_{i=1}^g (s - p_i) \prod_{j=1}^h (s - p_j)}$$

p_j 反馈通路极点

$$G(s)H(s) = \frac{K^* \prod_{i=1}^f (s - z_i) \prod_{j=1}^l (s - z_j)}{\prod_{i=1}^g (s - p_i) \prod_{j=1}^h (s - p_j)}$$

设 $g + h = n$ $f + l = m$ 一般有 $n \geq m$

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{K_G^* \prod_{i=1}^f (s - z_i) \prod_{j=1}^h (s - p_j)}{\prod_{i=1}^g (s - p_i) \prod_{j=1}^h (s - p_j) + K^* \prod_{i=1}^f (s - z_i) \prod_{j=1}^l (s - z_j)}$$

前向通路零点

反馈通路极点

前向通路极点

反馈通路零点

- 1) 闭环零点=前向通路零点 \cup 反馈通路极点，不随开环根轨迹增益变化。对单位反馈系统，闭环零点=开环零点=前向通路零点
- 2) 闭环系统的极点与开环系统的极、零点以及根轨迹增益均有关
- 3) 当 $n > m$ 时，闭环系统根轨迹增益=开环系统前向通路的根轨迹增益

三、根轨迹方程

绘制根轨迹的实质就是寻找特征方程 $1+G(s)H(s)=0$ 的根的轨迹，所以满足 $G(s)H(s)=-1$ 的 s ，都必定在根轨迹上，所以根轨迹方程为： $G(s)H(s)=-1$.

$$\therefore G(s)H(s) = \frac{K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1 \quad \text{矢量方程}$$

$$\therefore \frac{K^* \prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = 1 \quad \text{——幅值条件(幅值方程)}$$

$$\text{或 } K^* = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}$$

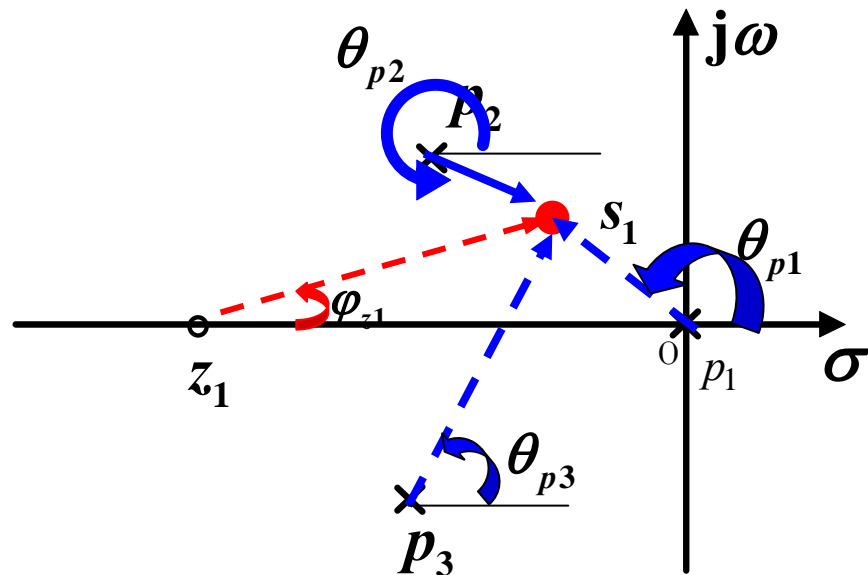
$$\text{而 } \sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi \quad \text{——相角条件 (相角方程)}$$

$$\sum_{j=1}^m \angle \varphi_j - \sum_{i=1}^n \angle \theta_i = (2k + 1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

系统开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s - z_1)}{s(s - p_2)(s - p_3)}$$

其开环零、极点如图所示，



$$\angle(s_1 - z_1) - (\angle s_1 + \angle(s_1 - p_2) + \angle(s_1 - p_3)) = (2k + 1)\pi$$

$$K^* = \frac{|s_1| |s_1 - p_2| |s_1 - p_3|}{|s_1 - z_1|}$$

- 若 s 平面上某点是闭环极点，则它与 z_j 、 p_i 所组成的相量必定满足幅值条件和相角条件，而且幅值条件与 K^* 有关，相角条件与 K^* 无关。
- 对 s 平面上任意一点，总存在一个 K^* ，使其满足幅值条件，但该点不一定在根轨迹上。
- s 平面上满足相角条件的点（必定满足幅值条件）一定在根轨迹上。满足相角条件是 s 点位于根轨迹上的充分必要条件。绘制根轨迹就是要依据相角条件找出复平面上满足该条件的所有点。
- 根轨迹上某点对应的 K^* 值，应由幅值条件来确定。

绘制根轨迹——依据的是开环零极点分布，遵循的是相角条件，画出的是闭环极点的运动轨迹。

上述方法属于试探法，虽能找到闭环极点，但需取遍复平面上所有点。实际上，绘制根轨迹常依据以根轨迹方程建立起来的根轨迹法则。

根轨迹法则只能直接绘制常规根轨迹。常规根轨迹是指当开环增益变化时的根轨迹。其它参数变化时的根轨迹称为参数根轨迹，参数根轨迹绘制问题可以转化为常规根轨迹绘制问题来解决。

常规根轨迹遵循 $180^\circ + (2K \cdot 180^\circ)$ 的相角条件，对应的绘制法则称作 180° 根轨迹绘制法则。

4-2 绘制根轨迹的基本法则

一、根轨迹的连续性、分支数与对称性：

连续性 由于实际控制系统闭环特征方程的系数或为已知实数，或为根轨迹增益 K^* 的函数，所以当 K^* 由 $0 \rightarrow \infty$ 连续变化时，闭环特征根的变化必然也是连续的，根轨迹具有连续性。

对称性 系统闭环特征方程的系数仅与系统的参数有关。对于实际控制系统而言，这些参数都是实数。具有实系数的闭环特征方程的根或为实数，或为共轭复数。因而，根轨迹关于实轴对称。

根轨迹的条数 根轨迹在 s 平面上的分支数=闭环特征方程的次数。即:分支数=闭环极点数=开环极点数 n ($n \geq m$ 时成立)

二、根轨迹的起点和终点:

根轨迹起始于开环极点, 终止于开环零点。

若 $n > m$, 则有 $(n-m)$ 条终止于无穷远处。

证明：根轨迹的起点是指 **$K^*=0$** 的根轨迹点，而终点是指 **$K^*\rightarrow\infty$** 的根轨迹点。

$$\therefore G(s)H(s) = \frac{K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$$\therefore D(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) + K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0$$

1) 当 **$K^*=0$** 时，有 **$s=p_i$** ， **$\therefore K^*=0$** 时的闭环极点就是开环极点，即则根轨迹起始于开环极点。

2) 方程形式变换为:

$$\frac{1}{K^*} \prod_{i=1}^n (s - p_i) + \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0$$

当 $K^* \rightarrow \infty$ 时, $s = z_j$, 即终止于开环零点。

3) 当 $n > m$ 时,

$$\frac{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = \frac{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^m |s - p_i|} \times \frac{1}{\prod_{i=m+1}^n |s - p_i|} = \frac{1}{K^*}$$

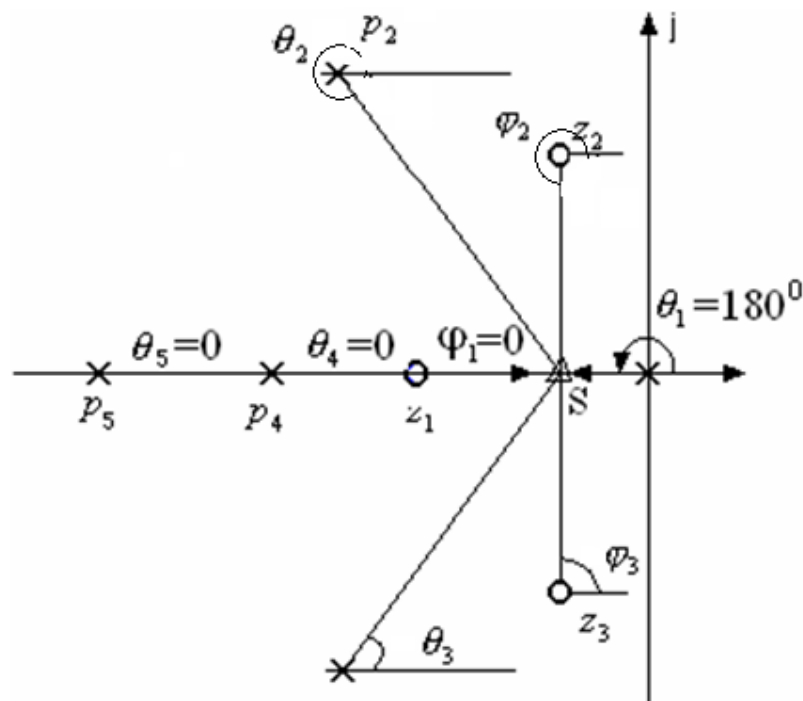
当 $K \rightarrow \infty$ 时, 要使上式相等, s 要么趋于某个零点, 要么模值趋于无穷大, 故有 $(n-m)$ 条终止于无穷远处。

三、实轴上的根轨迹：

若实轴上某区段右侧的开环零、极点数目之和为奇数，则该段一定在根轨迹上。

共轭复数零、极点向根轨迹上的 s 点所引的相角相互抵消，而 s 左边的实数开环零、极点向 s 所引向量的相角为 0° ，只有 s 右边的实数开环零、极点向 s 引的相角为 180° ，当个数为奇数时才能为 $(2k+1)\pi$ 。

$$\begin{aligned} & \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - [\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5] \\ &= 0 + 360^\circ - [180^\circ + 360^\circ + 0 + 0] \\ &= -180^\circ \end{aligned}$$



四、根轨迹的渐近线：

若 $n > m$ ，当 $K^* \rightarrow \infty$ 时，有 $(n-m)$ 条趋于无穷远处，它们趋向的方位由渐近线决定：

① 渐近线与实轴正方向的夹角：
$$\phi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

② 渐近线与实轴交点的坐标：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$$

证明:

若测试点 s 是位于无限远处根轨迹上的一点, 则有

$$\begin{aligned} s - z_1 &= s - z_2 = \cdots = s - z_m \\ &= s - p_1 = s - p_2 = \cdots = s - p_n \\ &= s - \sigma_a \end{aligned}$$

$$G(s)H(s) = \frac{K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1$$

σ_a 是渐近线与实轴的交点。此时根轨迹方程为 $\frac{K^*}{(s - \sigma_a)^{n-m}} = -1$ 。

这也意味着从所有开环零、极点指向 s 点的向量和实轴正方向的夹角都相等, 该夹角就是渐进线和实轴正方向的夹角 φ_a

$$m\varphi_a - n\varphi_a = (2k + 1)\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\Rightarrow n\varphi_a - m\varphi_a = (2k + 1)\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$\varphi_a = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

渐进线和实轴交点坐标：利用多项式乘、除法，根轨迹方程可写为

$$-K^* = \frac{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}{\prod_{j=1}^m (s - z_j)} = \frac{s^n - \left(\sum_{i=1}^n p_i\right) s^{n-1} + \dots}{s^m - \left(\sum_{j=1}^m z_j\right) s^{m-1} + \dots} = s^{n-m} + \left(\sum_{j=1}^m z_j - \sum_{i=1}^n p_i\right) s^{n-m-1} + \dots$$

将 $\frac{K^*}{(s - \sigma_a)^{n-m}} = -1$ 代入得 $(s - \sigma_a)^{n-m} = s^{n-m} + \left(\sum_{j=1}^m z_j - \sum_{i=1}^n p_i\right) s^{n-m-1} + \dots$

将上式左边展开

$$s^{n-m} - (n-m)\sigma_a s^{n-m-1} + \dots = s^{n-m} + \left(\sum_{j=1}^m z_j - \sum_{i=1}^n p_i\right) s^{n-m-1} + \dots$$

比较系数得 $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$

五、根轨迹的分离点

分离点——几条根轨迹在复平面上相遇后又分开的点。

分离点 s_d 的计算公式：
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s_d - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{s_d - z_j}$$

其中 z_j 和 p_i 分别为开环的零、极点。无开环零点时 s_d 的计算：
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s_d - p_i} = 0$$

证明： 设开环传递函数为：
$$G(s)H(s) = \frac{K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)},$$

闭环特征方程为：
$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0$$

分离点必然是重根出现的位置，根据重根出现的条件有：

$$\begin{cases} D(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) + K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0 \\ D'(s) = \frac{d}{ds} \left[\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) \right] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^n (s - p_i) = -K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) \\ \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^n (s - p_i) = -K^* \frac{d}{ds} \prod_{j=1}^m (s - z_j) \end{cases}$$

相除

$$\frac{\frac{d}{ds} \prod_{i=1}^n (s - p_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{\frac{d}{ds} \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{j=1}^m (s - z_j)} \Rightarrow \frac{d \ln \prod_{i=1}^n (s - p_i)}{ds} = \frac{d \ln \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{ds}$$

$$\therefore \begin{cases} \ln \prod_{i=1}^n (s - p_i) = \sum_{i=1}^n \ln(s - p_i) \\ \ln \prod_{j=1}^m (s - z_j) = \sum_{j=1}^m \ln(s - z_j) \end{cases} \therefore \sum_{i=1}^n \frac{d \ln(s - p_i)}{ds} = \sum_{j=1}^m \frac{d \ln(s - z_j)}{ds} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{s - z_j}$$

说明:

1、 用以上公式求得的 s_d 可能有多多个，要舍去不在根轨迹上的点；

2、 分离角的计算： $\theta_d = \frac{180^\circ}{k}$ (k 为相分离的根轨迹数目)；

3、 若根轨迹位于实轴上两相邻开环极点间或位于实轴上两相邻开环零点之间则该区段至少有一个分离点（包括无穷远的零点）；

4、 由于根轨迹的对称性，分离点大多位于实轴上。

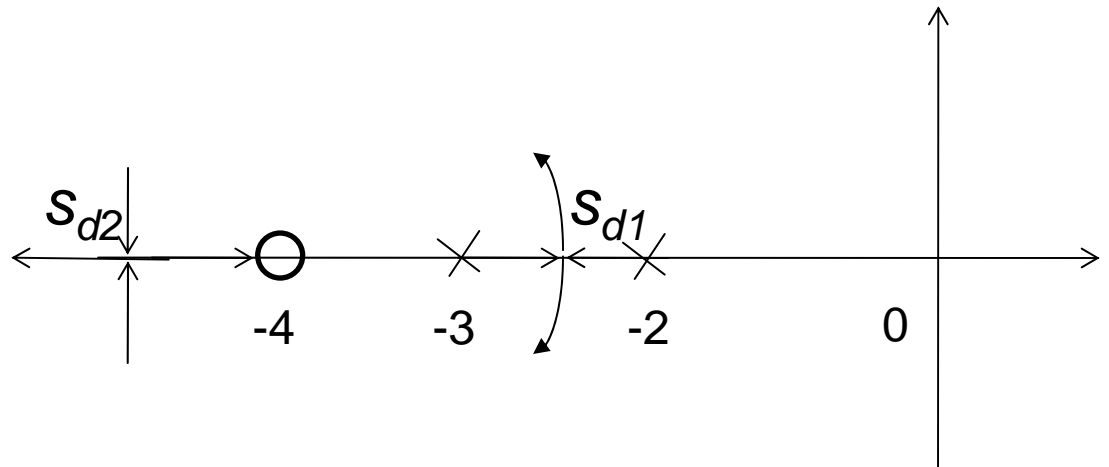
例：已知 $GH = \frac{K^*(s+4)}{s^2+5s+6} = \frac{K^*(s+4)}{(s+2)(s+3)}$,

求其分离点。

解：
$$\frac{1}{s_d+2} + \frac{1}{s_d+3} = \frac{1}{s_d+4} \rightarrow s_d^2 + 8s_d + 14 = 0$$

解得 $\begin{cases} s_{d1} = -2.586 \\ s_{d2} = -5.414 \end{cases}$

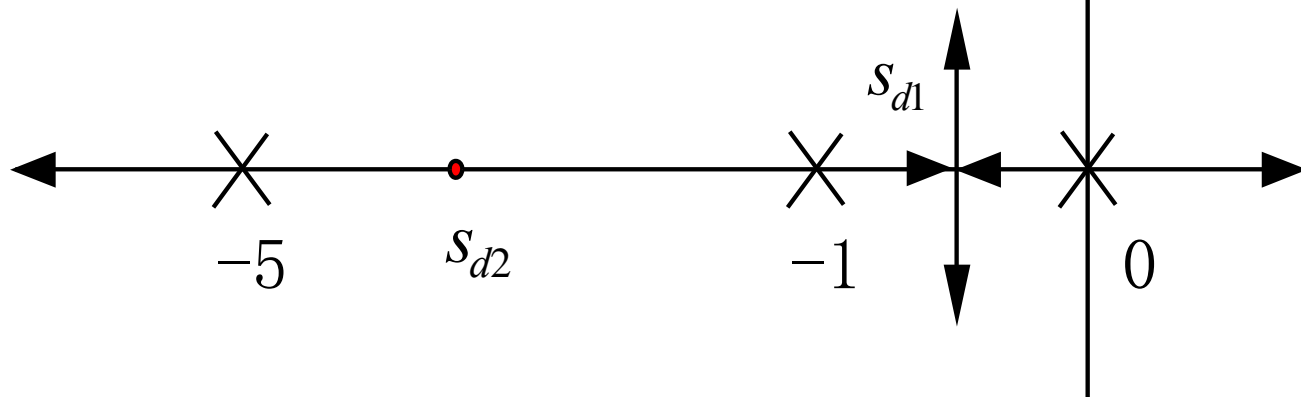
两个解都在根轨迹上



例： $G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+5)}$, 求分离点

$$\text{则 } \frac{1}{s_d} + \frac{1}{s_d + 1} + \frac{1}{s_d + 5} = 0 \quad \rightarrow \quad 3s_d^2 + 12s_d + 5 = 0$$

$$\text{解得 } \begin{cases} s_{d1} = -0.473 \\ s_{d2} = -3.527 (\text{舍}) \end{cases}$$



六、根轨迹与虚轴的交点：

若轨迹与虚轴相交，表示闭环极点中有一部分位于虚轴上，即闭环特征方程有纯虚根 $\pm j\omega$ ，系统某些模态是临界稳定的。
1、将 $s = j\omega$ ，代入 $1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$

$$\text{则有 } R_e[1 + G(j\omega)H(j\omega)] + I_m[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

$$\text{令 } R_e[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

$$I_m[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

解出 ω 及对应的开环增益 K 。

2、也可以列劳斯表计算。

例 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$ ，绘制根轨迹。

解. $G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$ $\begin{cases} K = K^*/2 \\ \nu = 1 \end{cases}$ 做开环零极点分布图,
 $p_1=0, p_2=-1, p_3=-2$

① $n=3, m=0, \therefore$ 有三条根轨迹分别起始于 $(0, 0)$ 、 $(-1, 0)$ 、 $(-2, 0)$ ，
 全部终止于无穷远，有三条渐近线

② 实轴上的根轨迹: $[-\infty, -2], [-1, 0]$

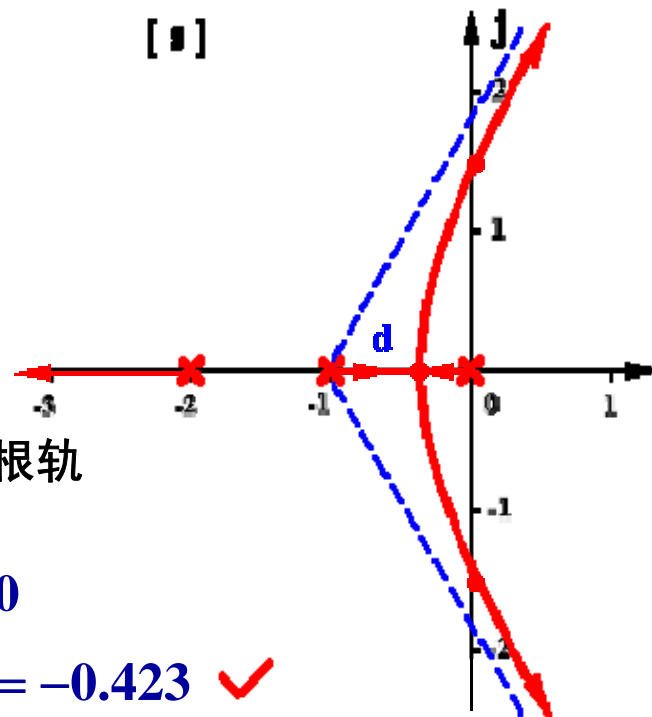
③ 渐近线: $\begin{cases} \sigma_a = \frac{0-1-2}{3} = -1 \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, 180^\circ \end{cases}$

④ 分离点: $[-1, 0]$ 是位于实轴上两个极点之间的根轨迹区段，期间必有分离点

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} = 0$$

整理得: $3d^2 + 6d + 2 = 0$ 解根: $\begin{cases} d_1 = -0.423 \checkmark \\ d_2 = -1.577 \times \end{cases}$

$$K_d^* = |d||d+1||d+2|^{d=-0.423} = 0.385$$



⑤与虚轴交点:

$$G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

$$D(s) = s(s+1)(s+2) + K^* = s^3 + 3s^2 + 2s + K^* = 0$$

解法I：劳斯表法：

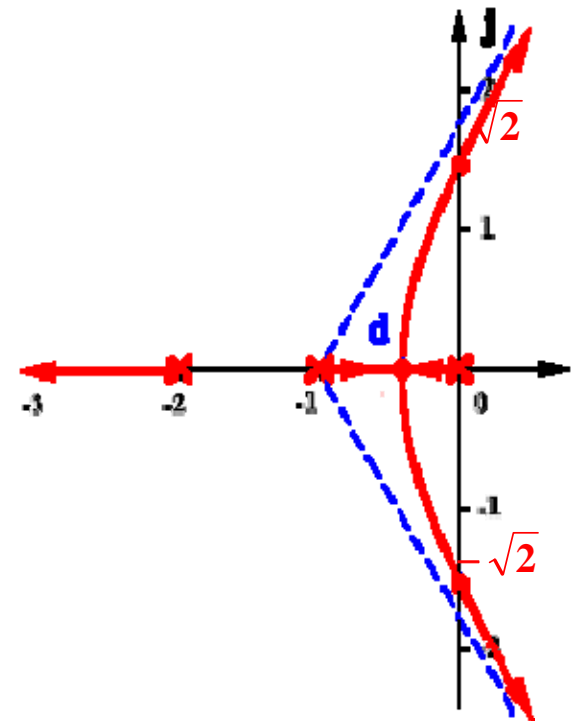
$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K^* \\ s^1 & \frac{6-K^*}{3} & \\ s^0 & K^* & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} K^* = 6 \\ K^* < 6 \\ K^* > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3s^2 + 6 = 0 \\ s = \pm j\sqrt{2} \end{cases}$$

稳定范围： $0 < K < 3$

解法II： $D(j\omega) = -j\omega^3 - 3\omega^2 + j2\omega + K^* = 0$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega)] = -3\omega^2 + K^* = 0 \\ \operatorname{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 2\omega = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ K^* = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K^* = 6, K = K^* / 2 = 3 \end{cases}$$



七、根轨迹的出射角与入射角

根轨迹离开开环极点处的切线与实轴正方向的夹角, $[s]$
称为根轨迹的**出射角(起始角)**。

计算开环单重极点 p_4 对应的出射角 θ_{p4} 。先在根轨迹上靠近 p_4 的地方取一试验点 s_1

$$\sum_{j=1}^1 \angle(s_1 - z_j) - \sum_{i=1}^5 \angle(s_1 - p_i) = \pi$$

当 s_1 无限地靠近 p_4 点时, 则 $\angle(s_1 - p_4)$ 成为从点 p_4 出发的

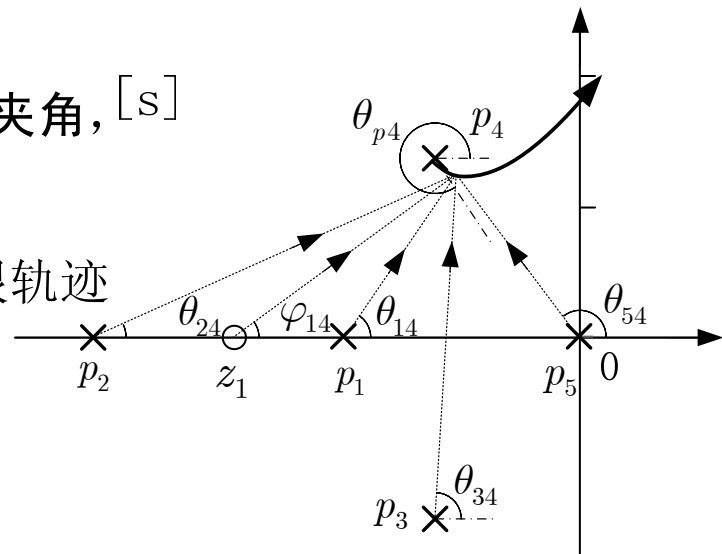
根轨迹的出射角 θ_{p4} , 其余各开环零极点指向 s_1 的向量就成为指向点 p_4 的向量, 故:

$$\theta_{p4} = \pi + \varphi_{14} - (\theta_{14} + \theta_{24} + \theta_{34} + \theta_{54})$$

一般表达式: $\theta_{pi} = \pi + \sum_{j=1}^m \varphi_{ji} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \theta_{ji}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ “加零去余极”

如果 p_i 是 l 重极点, 则出射角有 l 个:

$$\theta_{pi} = \frac{1}{l} \left[(2k+1)\pi + \sum_{j=1}^m \varphi_{ji} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \theta_{ji} \right], \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$



根轨迹进入开环零点处的切线与实轴正方向的夹角称为**入射角(终止角)**。

计算开环单重零点 z_1 对应的入射角 φ_{z1} 。先在根轨迹

上靠近 z_1 的地方取一试验点 s_1 ，则

$$\sum_{j=1}^2 \angle(s_1 - z_j) - \sum_{i=1}^3 \angle(s_1 - p_i) = \pi$$

当 s_1 无限靠近 z_1 点时，则 $\angle(s_1 - z_1)$ 成为终止于 z_1 的根轨

迹的入射角 φ_{z1} ，其余各开环零极点指向 s_1 的向量就成为指向 z_1 点的向量，故

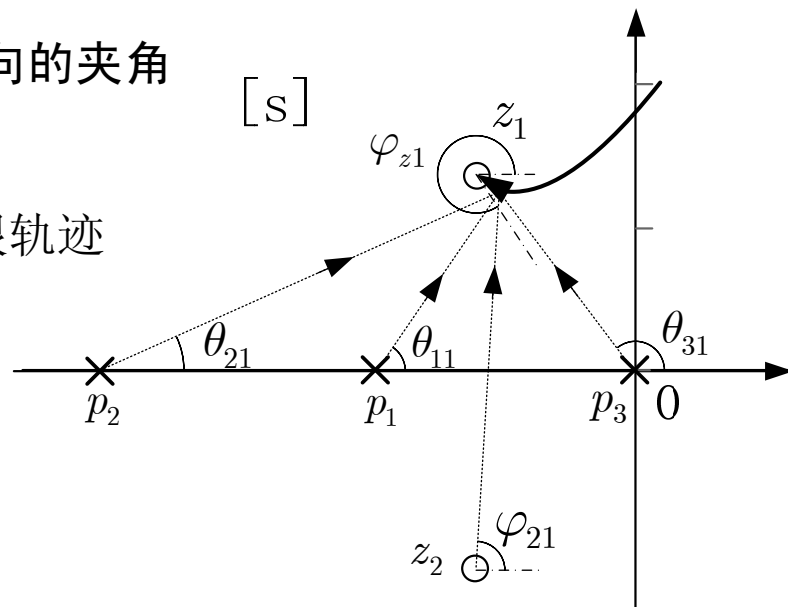
$$\varphi_{z1} = \pi + \theta_{11} + \theta_{21} + \theta_{31} - \varphi_{21}$$

一般表达式： $\varphi_{zi} = \pi + \sum_{j=1}^n \theta_{ji} - \sum_{j=1, j \neq i}^m \varphi_{ji}$

加极去余零

如果 z_i 是 l 重零点，则出射角有 l 个：

$$\varphi_{zi} = \frac{1}{l} \left[(2k+1)\pi + \sum_{j=1}^n \theta_{ji} - \sum_{j=1, j \neq i}^m \varphi_{ji} \right], \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$



例 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*(s+1.5)(s+2+j)(s+2-j)}{s(s+2.5)(s+0.5+j1.5)(s+0.5-j1.5)}$

绘制根轨迹。

解：1) 绘制系统开环零极点分布图

2) $n=4, m=3$. 有4条根轨迹分支，其中3条终止于三个开环零点
1条终止于无限零点。

3) 实轴上的根轨迹： $[-1.5, 0]; [-\infty, -2.5]$

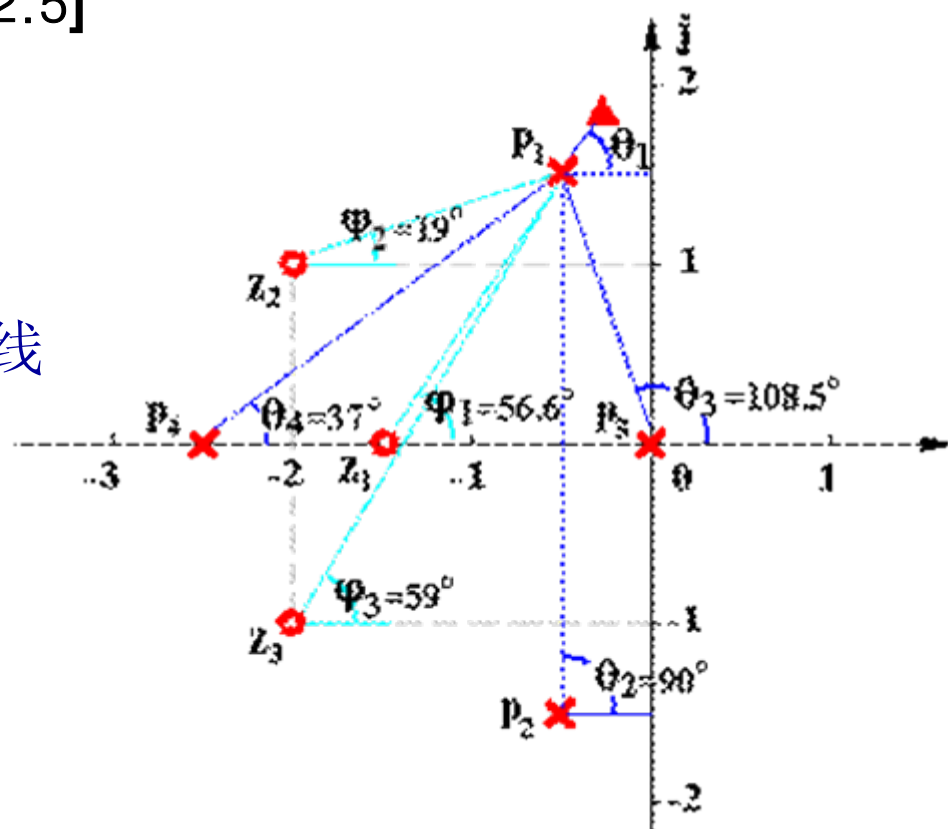
4) 有一条渐近线：

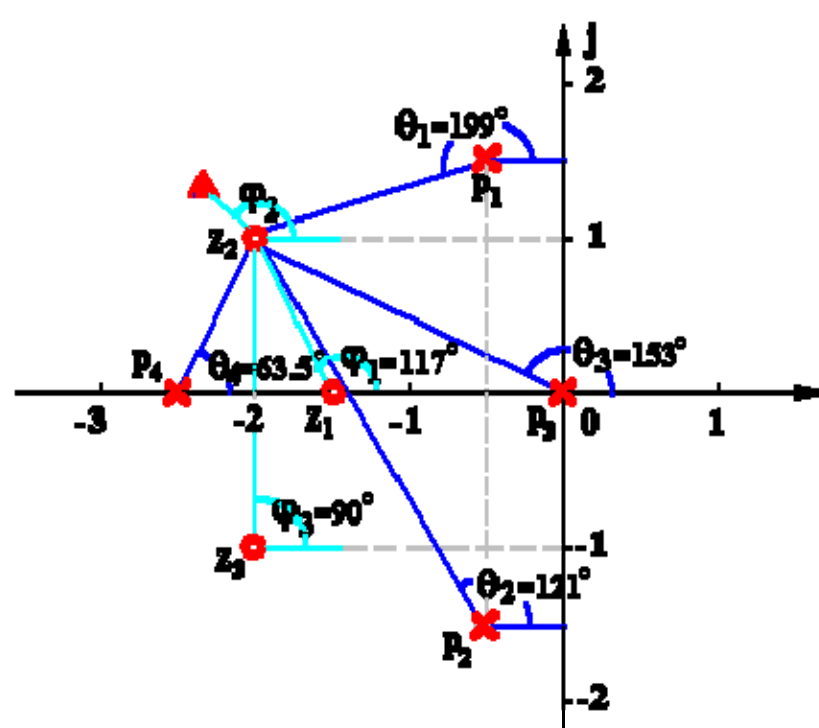
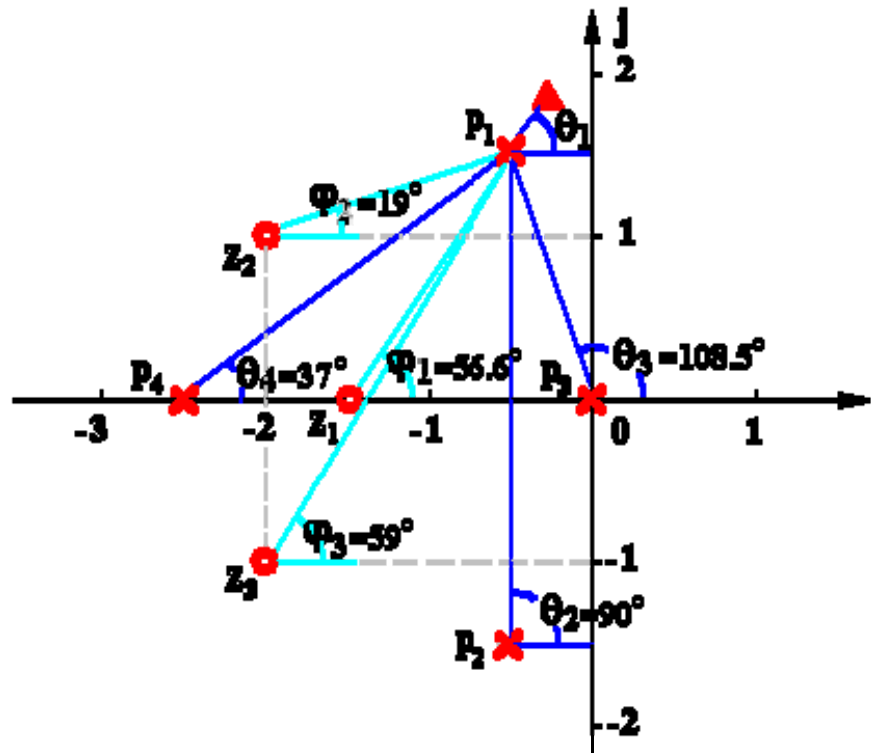
$$\phi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = 180^\circ$$

$n-m=1$ 时一般无需计算渐近线

5) 本例无分离点。

6) 确定入射角和出射角





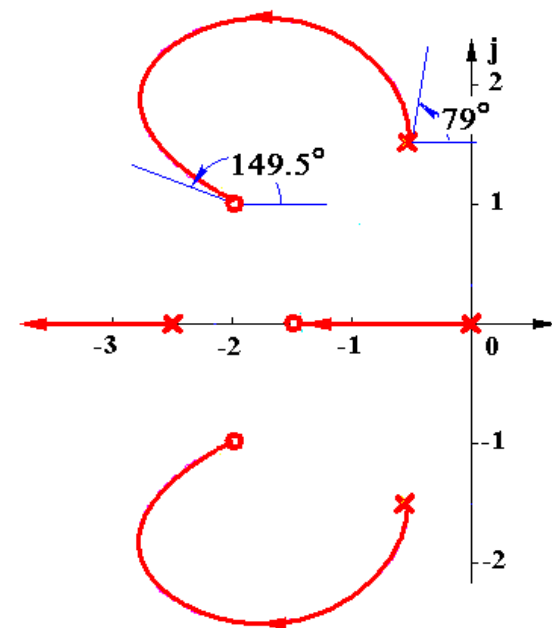
$$56.5^\circ + 19^\circ + 59^\circ - [\theta_1 + 90^\circ + 108.5^\circ + 37^\circ] = -180^\circ$$

$$\theta_1 = 79^\circ$$

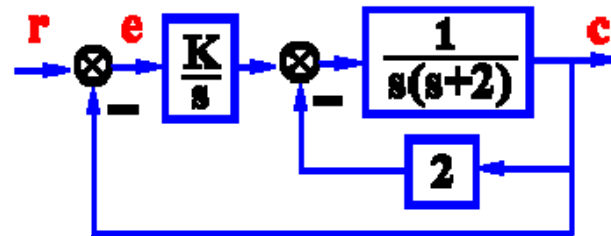
$$[117^\circ + \varphi_2 + 90^\circ] - [199^\circ + 121^\circ + 153^\circ + 63.5] = -180^\circ$$

$$\varphi_2 = 149.5^\circ$$

7) 绘制根轨迹。



例 已知系统结构图，绘制根轨迹。



解.
$$G(s) = \frac{K}{s} \frac{\frac{1}{s(s+2)}}{1 + \frac{2}{s(s+2)}} = \frac{K}{s[s^2 + 2s + 2]} \quad \begin{cases} K_k = K/2 \\ \nu = 1 \end{cases}$$

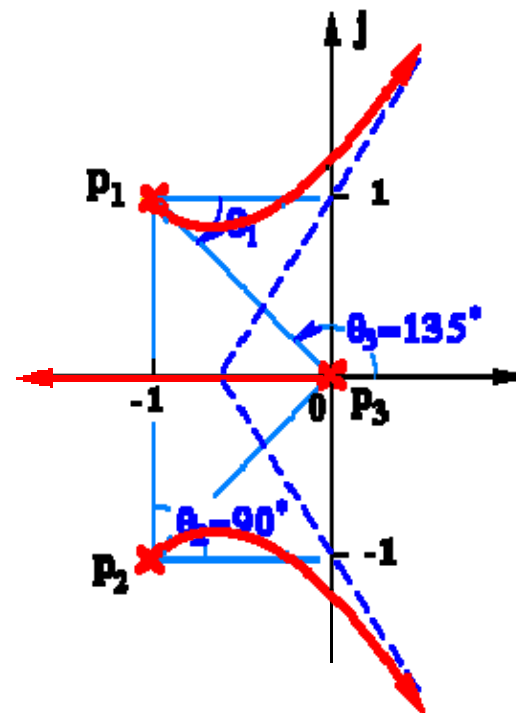
① 实轴上的根轨迹: $[-\infty, 0]$

② 渐近线:
$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-1-1}{3} = -\frac{2}{3} \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, 180^\circ \end{cases}$$

③ 出射角: $0 - [\theta_1 + 90^\circ + 135^\circ] = -180^\circ \Rightarrow \theta_1 = -45^\circ$

④ 与虚轴交点: $D(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + K = 0$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega)] = -2\omega^2 + K = 0 \\ \operatorname{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 2\omega = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega = 0 \\ K = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K = 4 \end{cases}$$



八、根轨迹走向：根之和

$$\text{设 } G(s)H(s) = \frac{K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{K^* (s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$\text{其中 } b_1 = (-z_1) + (-z_2) + \cdots + (-z_m) = \sum_{j=1}^m (-z_j)$$

$$a_1 = (-p_1) + (-p_2) + \cdots + (-p_m) = \sum_{i=1}^n (-p_i)$$

$$G(s)H(s) = -1$$

则闭环系统的特征方程

$$\begin{aligned} D(s) &= s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n + K^* (s^m + b_1 s^{m-1} + b_{m-1} s + b_m) \\ &= s^n + A_1 s^{n-1} + \cdots + A_{n-1} s + A_n = (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) \\ &= s^n + (-s_1 - s_2 - \cdots - s_n) s^{n-1} + \cdots + (-s_1)(-s_2) \cdots (-s_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D(s) &= s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n + K^* (s^m + b_1 s^{m-1} + b_{m-1} s + b_m) \\
 &= s^n + A_1 s^{n-1} + \cdots + A_{n-1} s + A_n = (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) \\
 &= s^n + (-s_1 - s_2 - \cdots - s_n) s^{n-1} + \cdots + (-s_1)(-s_2) \cdots (-s_n)
 \end{aligned}$$

$$\text{即 } A_1 = (-s_1) + (-s_2) + \cdots + (-s_n) = \sum_{i=1}^n (-s_i)$$

当 $n - m \geq 2$ 时, $A_1 = a_1$, 与 K^* 无关, 则开环极点之和等于闭环极点之和, 且为常数:

$$\sum_{i=1}^n (-s_i) = \sum_{i=1}^n (-p_i) = a_1$$

★ $n-m \geq 2$ 时, 若 K^* 发生变化造成一部分闭环极点在 s 平面上向右移, 则另一部分闭环极点必向左移, 闭环极点之和保持不变。

例： $G(s)H(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)}$ ，绘制根轨迹，

并求使系统处于临界阻尼状态时的 K^* 值。

解： $n = 3$ ， $m = 1$ ， $n - m = 2$ ，满足根之和条件

$$p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -4, z_1 = -2$$

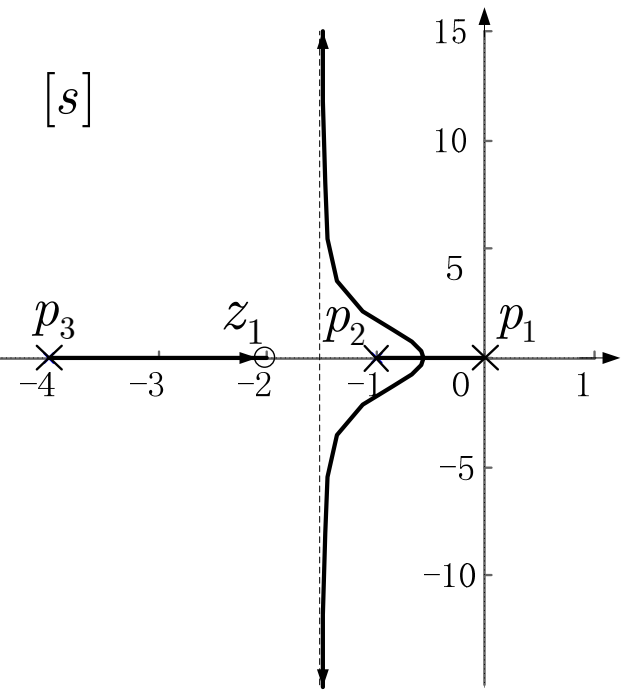
$$\text{渐近线： } \varphi_a = \frac{(2k+1)180^\circ}{2} = \pm 90^\circ$$

$$\sigma_a = \frac{-1-4+2}{2} = -\frac{3}{2}$$

实轴上根轨迹区段 $[-1, 0]$ ， $[-4, -2]$

分离点： $[-1, 0]$ 是根轨迹区段，且位于两个极点之间，存在分离点

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+4} = \frac{1}{d+2}$$



$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)}$$

即： $2d^3 + 11d^2 + 20d + 8 = 0$

解方程得， $d = -0.55$

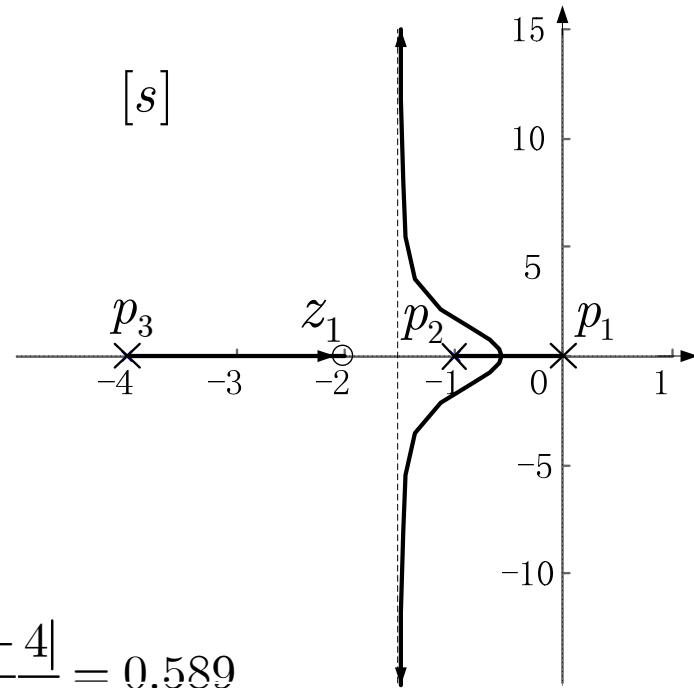
根轨迹会不会越过渐近线，到达其左侧？

闭环极点中的两个位于分离点处时，系统处于振荡

和不振荡的分界点(临界阻尼状态)，该点对应的 K^*

值为

$$K^* = \frac{\prod_{i=1}^n |(s - p_i)|}{\prod_{j=1}^m |(s - z_j)|} = \frac{|-0.55 - 0| \times |-0.55 + 1| \times |-0.55 + 4|}{|-0.55 + 2|} = 0.589$$



九、计算根轨迹增益

由幅值条件来确定根轨迹增益

$$\text{由 } G(s)H(s) = \frac{K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1 \text{ 知}$$

$$K_l^* = \frac{|s_l - p_1| |s_l - p_2| \cdots |s_l - p_n|}{|s_l - z_1| |s_l - z_2| \cdots |s_l - z_m|} \xrightarrow[\text{的零极点}]{\text{忽略原点处}} K_l = \frac{K_l^* \prod_{j=1}^m (-z_j)}{\prod_{i=1}^n (-p_i)}$$

结论：根轨迹上某点对应的根轨迹增益等于该点到所有极点的距离的乘积除以该点到所有零点距离的乘积所得之商。特殊地，极点处的增益为零，零点处的增益为无穷大。

例 某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$, 当 $K^* : 0 \rightarrow \infty$ 时, 证明复平面实轴以外的根轨迹为圆弧。

$$G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)} \quad \begin{cases} K = 2K^* \\ v = 1 \end{cases}$$

$$D(s) = s(s+1) + K^*(s+2) = s^2 + (1+K^*)s + 2K^*$$

$$s_{1,2} = \frac{-(1+K^*) \pm j\sqrt{8K^* - (1+K^*)^2}}{2}$$

$$= \frac{-(1+K^*)}{2} \pm j \frac{\sqrt{8K^* - (1+K^*)^2}}{2} = \sigma \pm j\omega$$

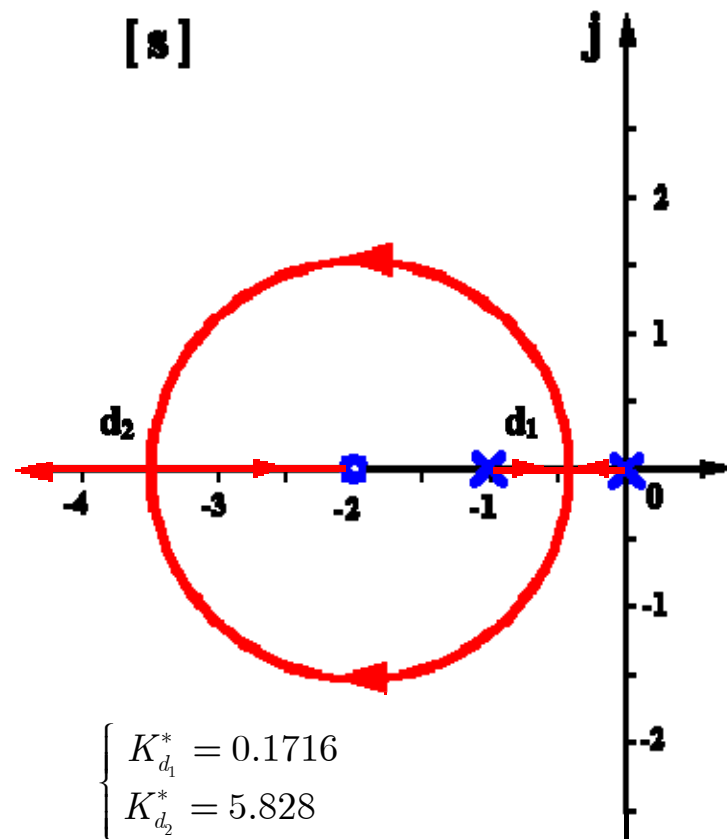
$$\sigma = \frac{-(1+K^*)}{2} \Rightarrow K^* = -2\sigma - 1$$

$$\omega^2 = \frac{8K^* - (1+K^*)^2}{4} = \frac{-8(2\sigma+1) - 4\sigma^2}{4} = -\sigma^2 - 4\sigma - 2$$

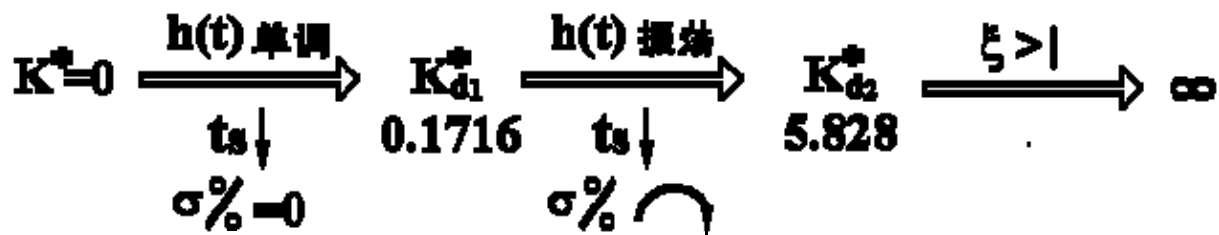
$$\sigma^2 + 4\sigma + 4 + \omega^2 = 2 \quad (\sigma+2)^2 + \omega^2 = \sqrt{2}^2$$

令虚部=0

$$\Delta = (1+K^*)^2 - 8K^* = K^{*2} - 6K^* + 1 = 0$$



$$\begin{cases} K_{d_1}^* = 0.1716 \\ K_{d_2}^* = 5.828 \end{cases}$$

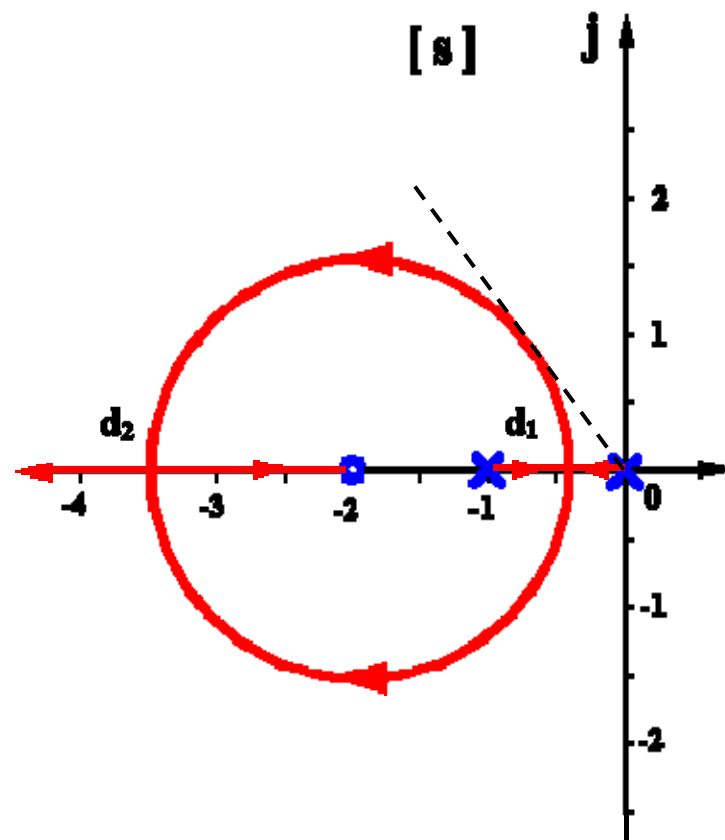


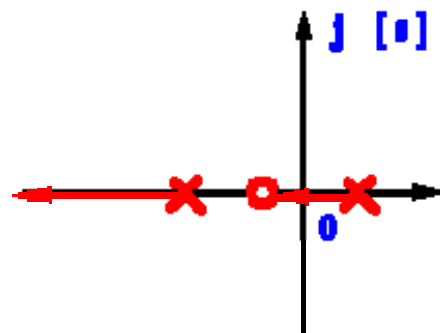
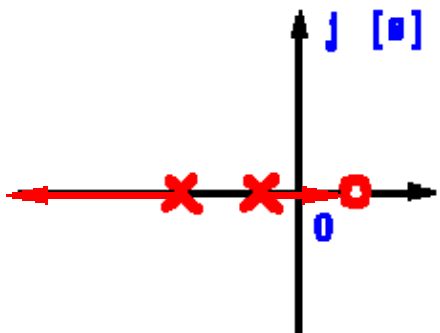
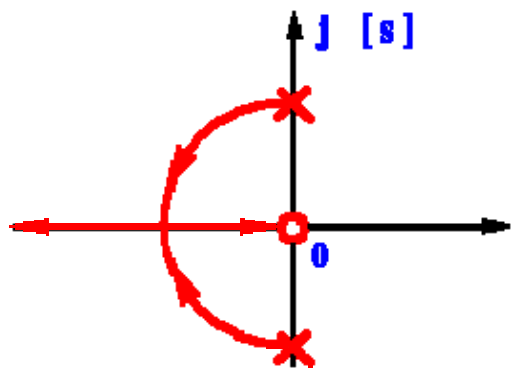
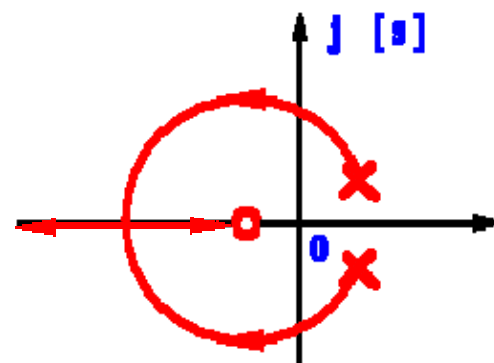
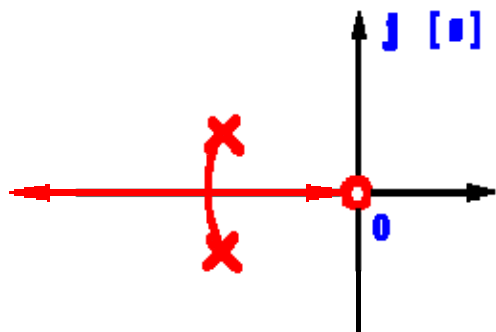
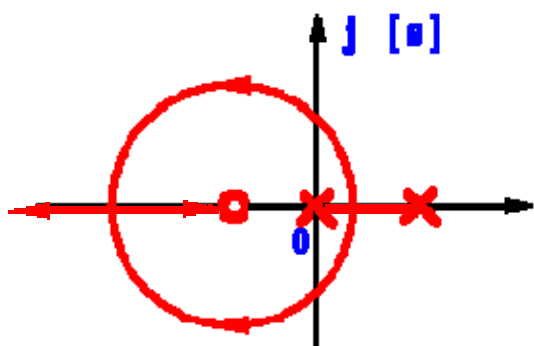
系统绝对稳定

$$K^* \uparrow \Rightarrow e_{ss} \xrightarrow{r(t)=t} \frac{A}{K} = \frac{1}{2K^*} \downarrow$$

思考：系统的最小阻尼比以及最小阻尼比对应的 K^* 值是多少？

若系统有2个开环极点，1个开环零点，且在复平面实轴以外的区域存在根轨迹，则实轴以外区域的根轨迹一定是以零点为圆心以零点到分离点之间的距离为半径的圆弧。





例 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*}{s(s+20)(s^2+4s+20)}$ ，绘制根轨迹。

解. $G(s) = \frac{K^*}{s(s+20)(s+2+j4)(s+2-j4)} \quad \begin{cases} K = K^*/400 \\ \nu = 1 \end{cases}$

① 实轴上的根轨迹: $[-20, 0]$

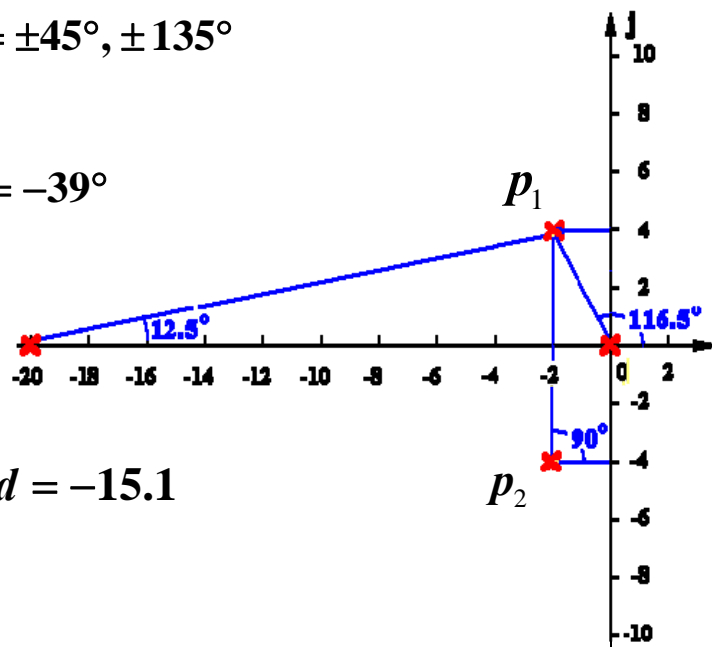
② 渐近线: $\sigma_a = \frac{0-20-2-2}{4} = -6 \quad \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{4} = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$

③ 出射角: $-\left[\theta_1 + 90^\circ + 116.5^\circ + 12.5^\circ\right] = -180^\circ \Rightarrow \theta_1 = -39^\circ$

③ 分离点: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+20} + \frac{1}{d+2+j4} + \frac{1}{d+2-j4} = 0$

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+20} + \frac{2(d+2)}{(d+2)^2 + 4^2} = 0 \quad \text{解根得: } d = -15.1$$

$$K_d^* = \left| d \| d+20 \| (d+2)^2 + 4^2 \right|^{d=-15.1} = 13881$$



④ 虚轴交点: $D(s) = s^4 + 24s^3 + 100s^2 + 400s + K^* = 0$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega)] = \omega^4 - 100\omega^2 + K^* = 0 \\ \operatorname{Im}[D(j\omega)] = -24\omega^3 + 400\omega = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega = 0 \\ K^* = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega = \pm \sqrt{400/24} = \pm 4.1 \\ K^* = 1389 \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{K^*}{s(s+20)(s+2 \pm j4)}$$

$$\begin{cases} K = K^*/400 \\ \nu = 1 \end{cases}$$

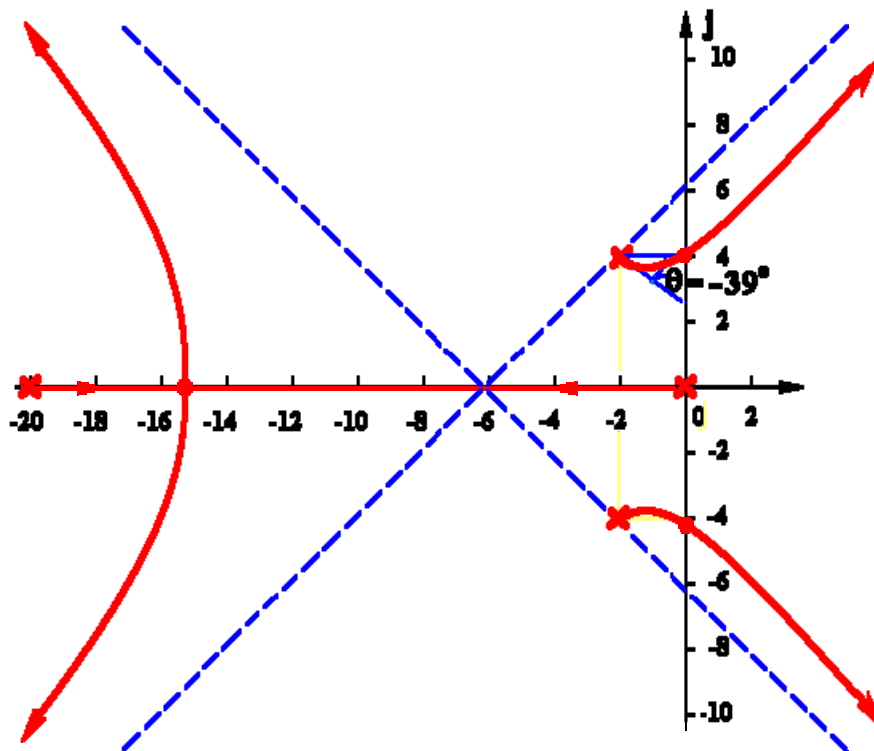
① 实轴上的根轨迹: $[-20, 0]$

② 渐近线: $\begin{cases} \sigma_a = -6 \\ \varphi_a = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ \end{cases}$

③ 出射角: $\theta = -39^\circ$

③ 分离点: $d = -15.1$
 $K_d^* = 13881$

④ 虚轴交点: $\begin{cases} \omega = 4.1 \\ K^* = 1389 \end{cases}$



稳定的开环增益范围: $0 < K < 3.4725$

根轨迹绘制步骤、方法

- 1 开环零极点 （分支数、对称性）
- 2 起点、终点
- 3 实轴上
- 4 渐近线
- 5 分离点
- 6 虚轴交点（增益）
- 7 出射角、入射角
- 8 根之和
- 9 增益

4-3 广义根轨迹

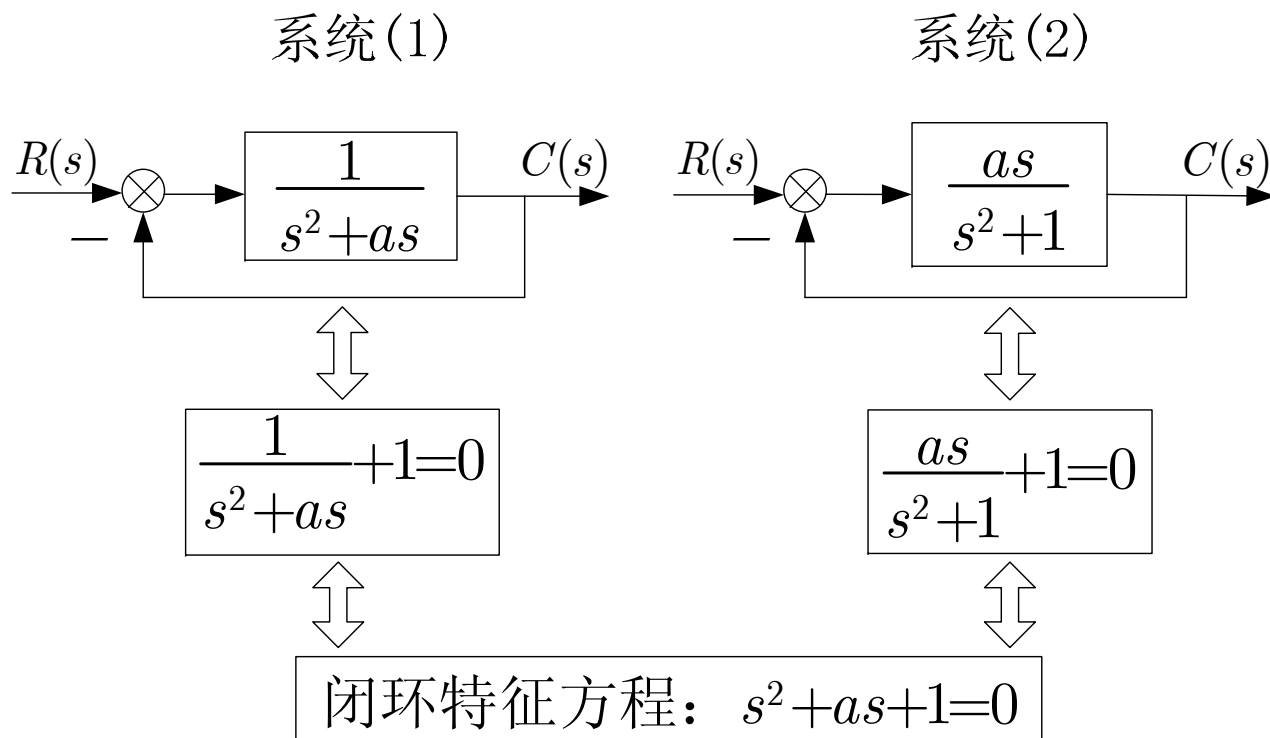
常规根轨迹的概念及其绘制法则是在负反馈条件下，当系统中的可变参数是开环增益时建立起来的。研究系统时，有时要求绘制除开环增益以外的其它参数发生变化时的根轨迹(参数根轨迹)，或者正反馈条件下的根轨迹(零度根轨迹)，这就是广义根轨迹问题。

一、参数根轨迹

绘制参数根轨迹的思路是想办法将其转换为常规根轨迹。

根轨迹的本质是系统闭环特征方程中某个参数变化时，方程的根在复平面上形成的轨迹。同一个特征方程可以对应多种形式的开环传递函数，也就是说，不同结构的系统，可能具有相同的闭环特征方程，因而具有相同的根轨迹，据此可以将参数根轨迹转化为常规根轨迹。

“等效”系统的构造



所谓“等效”仅仅是指两个系统的闭环特征方程相同。

绘制系统(1)当 a 变化时的根轨迹和绘制系统(2)当 a 变化时的根轨迹的数学本质是相同的, 即: 绘制当 a 变化时方程 $s^2 + as + 1 = 0$ 根的变化曲线

例：如右图所示的测速反馈系统，作出测速反馈系数 T_a 由 $0 \rightarrow \infty$ 时系统的根轨迹。

原系统开环传函

$$G(s) = \frac{5}{5s^2 + (5T_a + 1)s}$$

解：属于广义根轨迹

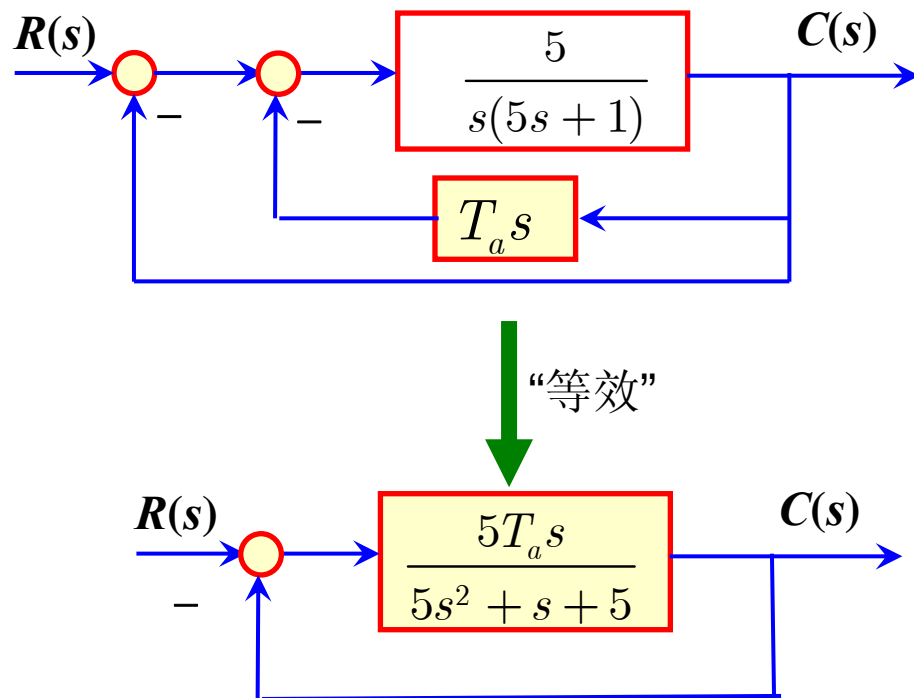
系统特征方程为：

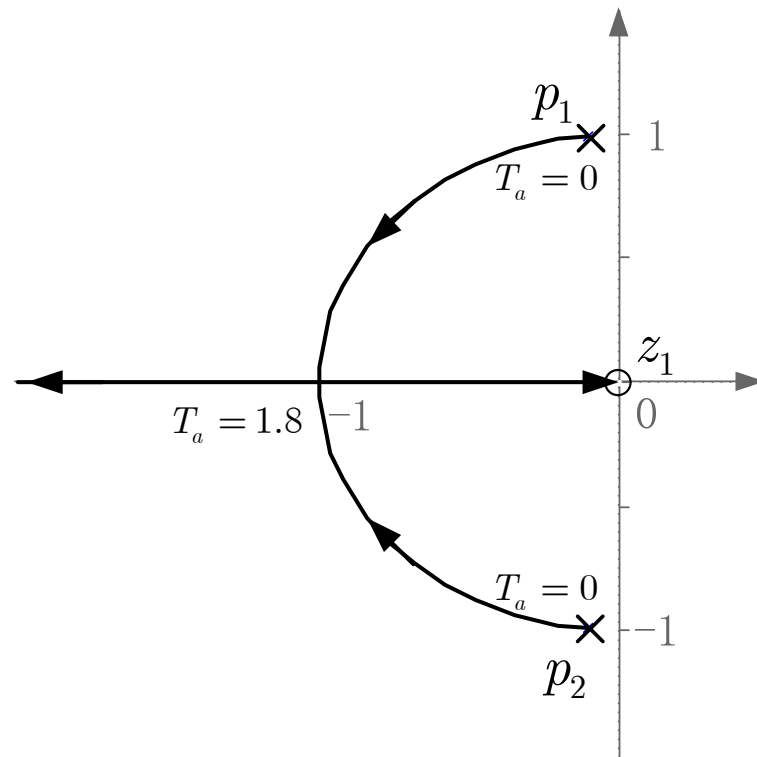
$$D(s) = s(5s + 1) + 5(T_a s + 1) = 0 \Rightarrow [5s^2 + s + 5] + 5T_a s = 0$$

$$G_{\text{等效}}(s) = \frac{5T_a s}{5s^2 + s + 5} = \frac{T_a s}{s^2 + 0.2s + 1}$$

$$p_{1,2} = -0.1 \pm j0.995, \quad z_1 = 0$$

根轨迹是一个圆弧，圆心在原点上，半径 $R = \sqrt{0.1^2 + 0.995^2} = 1$





- (1)、当 T_a 很小时，阻尼比很小，超调量很大，系统振荡强烈。这是因为测速反馈作用不明显（系数太小）；
- (2)、当 Ta 增大时，两个共轭闭环极点开始沿圆弧移动，阻尼角变小，阻尼增大，振荡减弱，平稳性变好。同时由于极点远离虚轴，系统调节时间减小。
- (3)、当 $Ta > 1.8$ 时，闭环极点成为负实数，系统呈过阻尼，单位阶跃响应单调增大。这一阶段，随着 Ta 增大，系统响应速度下降，调节时间加长。

例 单位负反馈系统开环传递函数 $G(s) = \frac{(s+a)/4}{s^2(s+1)}$, $a=0 \rightarrow \infty$ 变化, 绘制根轨迹; $\xi=1$ 时, $\Phi(s)=?$

解. (1) $D(s) = s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}a = 0$

构造“等效开环传递函数” $G^*(s) = \frac{a/4}{s^3 + s^2 + s/4} = \frac{a/4}{s(s+0.5)^2}$

① 实轴根轨迹: $[-\infty, 0]$

② 渐近线: $\sigma_a = -1/3$ $\varphi_a = \pm 60^\circ, 180^\circ$

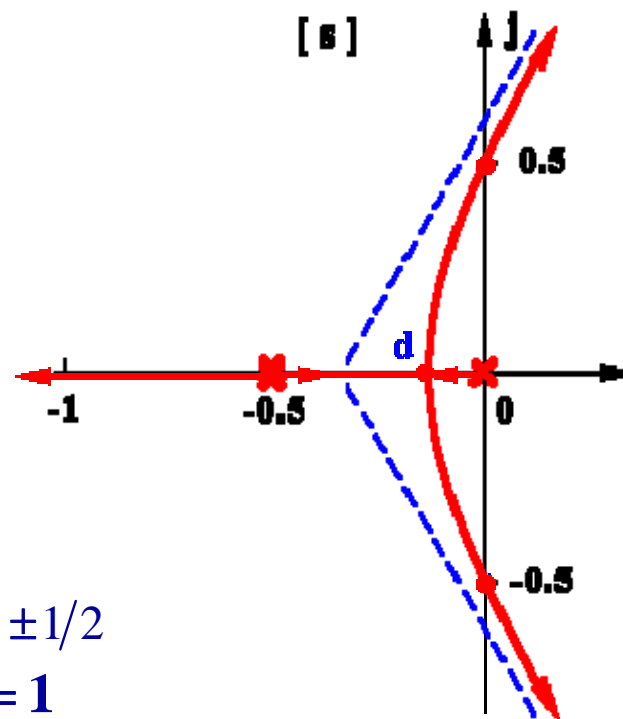
③ 分离点: $\frac{1}{d} + \frac{2}{d+0.5} = 0$

整理得: $3d + 0.5 = 0 \Rightarrow d = -1/6$

$$a_d = 4|d||d+0.5|^2 = 2/27$$

④ 与虚轴交点: $D(s) = s^3 + s^2 + s/4 + a/4 = 0$

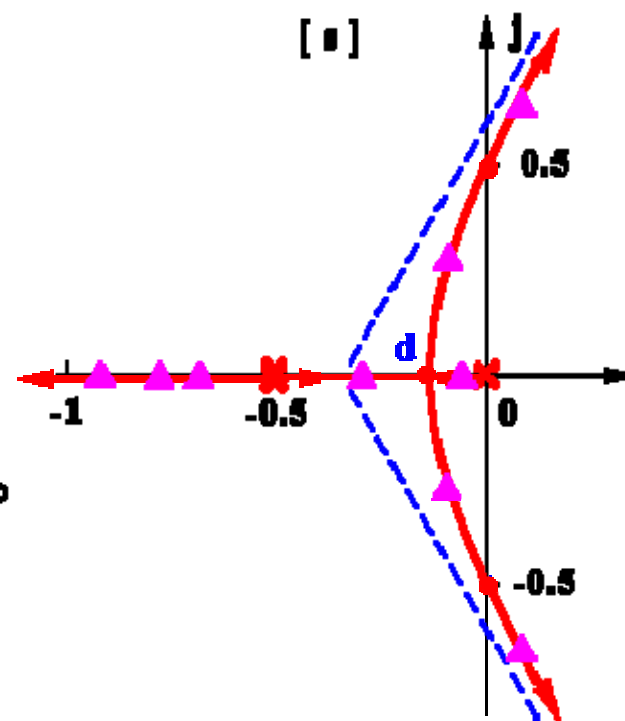
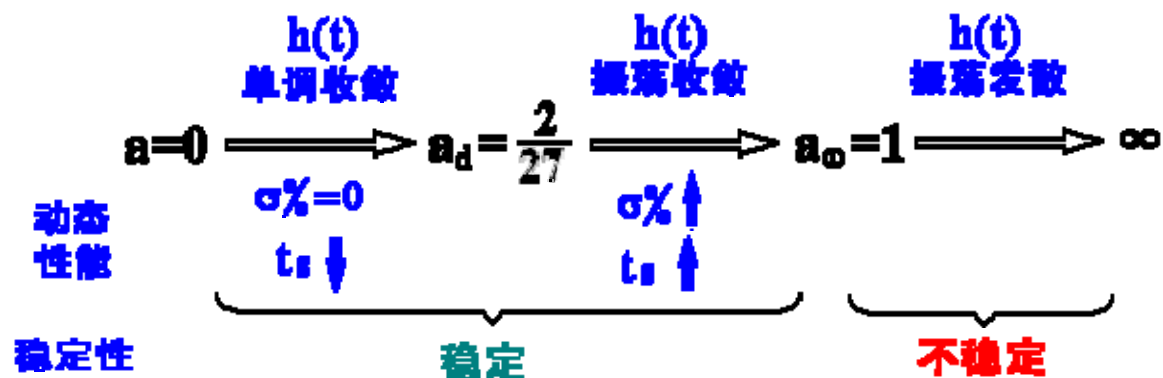
$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega)] = -\omega^2 + a/4 = 0 \\ \operatorname{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + \omega/4 = 0 \end{cases} \begin{cases} \omega = \pm 1/2 \\ a = 1 \end{cases}$$



(2) $\xi=1$ 时，对应于分离点 d ， $a_d=2/27$

$$G(s) = \frac{\frac{1}{4}(s+a)}{s^2(s+1)} \quad a=2/27 \quad \frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})$$

$$\Phi(s) = \frac{\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}{s^2(s+1) + \frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})} = \frac{\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}{(s+\frac{1}{6})^2(s+\frac{2}{3})}$$



例 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{615(s+26)}{s^2(Ts+1)}$, $T=0 \rightarrow \infty$, 绘制根轨迹。

解 I. $D(s) = Ts^3 + s^2 + 615s + 15990 = 0$

$$G^*(s) = \frac{\frac{1}{T}(s^2 + 615s + 15990)}{s^3} = \frac{\frac{1}{T}(s + 27.7)(s + 587.7)}{s^3}$$

① 实轴上的根轨迹: $[-\infty, -587.7]$, $[-27.7, 0]$

② 出射角: $[2 \times 0] - [3\theta] = (2k+1)\pi$
 $\theta = \pm 60^\circ, 180^\circ$

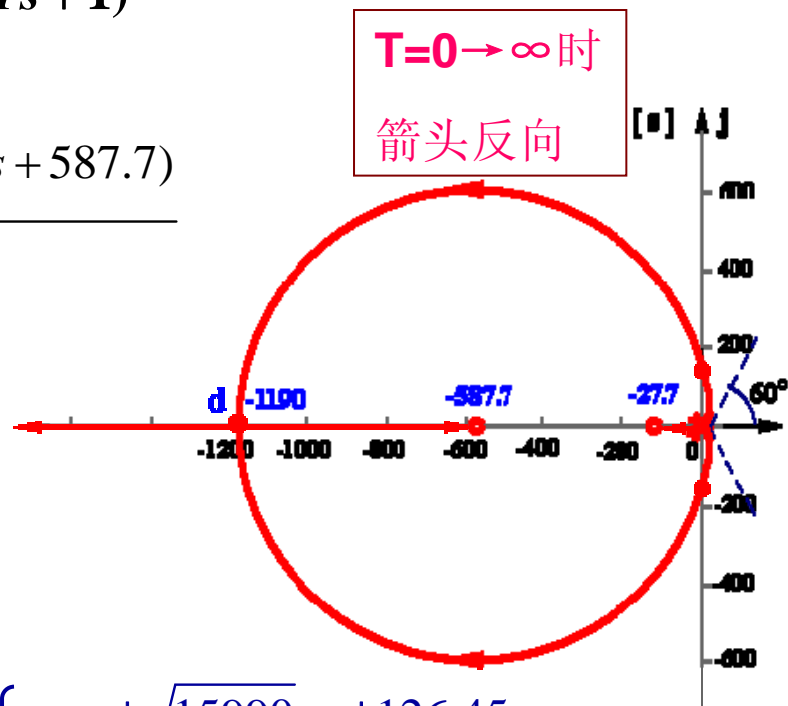
③ 虚轴交点: $\begin{cases} \text{Re}[D(j\omega)] = -\omega^2 + 15990 = 0 \\ \text{Im}[D(j\omega)] = -T\omega^3 + 615\omega = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \omega = \pm\sqrt{15990} = \pm 126.45 \\ T = 615/15990 = 0.0385 \end{cases}$$

④ 分离点: $\frac{3}{d} = \frac{1}{d+27.7} + \frac{1}{d+587.7}$

整理得: $d^2 + 1231d + 47970 = 0$

解根: $\begin{cases} d_1 = -40.5, & d_2 = -1190 \quad \checkmark \\ T_d = \frac{|d+27.7||d+587.7|}{|d|^3} = 0.00055 \end{cases}$



二、零度根轨迹

负反馈时：根轨迹方程： $G(s)H(s) = -1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{幅值条件: } |G(s)H(s)|=1 \\ \text{相角条件: } \angle G(s)H(s)=2k\pi+180^\circ \end{array} \right\}$ 180度根轨迹

正反馈时：根轨迹方程： $G(s)H(s) = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{幅值条件: } |G(s)H(s)|=1 \\ \text{相角条件: } \angle G(s)H(s)=2k\pi+0^\circ \end{array} \right\}$ 零度根轨迹

零度根轨迹的绘制法则

法则一：根轨迹的分支数，对称性和连续性(同180度根轨迹)；

法则二：根轨迹的起点和终点(同180度根轨迹)；

法则三：实轴上的根轨迹区段右侧开环零极点之和应为偶数；

法则四：渐近线 $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$, $\varphi_a = \frac{2k\pi}{n-m}$

法则五：分离点 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j}$ (同180度根轨迹)；

法则六：与虚轴交点 $\text{Re}[D(j\omega)] = \text{Im}[D(j\omega)] = 0$ (同180度根轨迹)；

法则七：出射角 $\theta_{p_i} = \sum_{j=1}^m \varphi_{ji} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \theta_{ji}$ ；入射角 $\varphi_{z_i} = \sum_{j=1}^n \theta_{ji} - \sum_{j=1, j \neq i}^m \varphi_{ji}$

法则八：根之和 (同180度根轨迹)；

法则九：增益计算 (同180度根轨迹)；

例：单位正反馈系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$ ，试绘制当 $K^* : 0 \rightarrow \infty$ 时的根轨迹。

解：(1) 实轴上的根轨迹： $(-\infty, -3], [-2, \infty)$

$$(2) \text{ 渐近线: } \varphi_a = \frac{2k\pi}{3-1} = 0^\circ, 180^\circ \quad \sigma_a = \frac{-3-1+j-1-j+2}{3-1} = -\frac{3}{2}$$

$$(3) \text{ 分离点: } \frac{1}{d+3} + \frac{1}{d+1-j} + \frac{1}{d+1+j} = \frac{1}{d+2} \Rightarrow (d+0.8)(d^2+4.7d+6.24)=0$$

$$d = -0.8$$

(4) 出射角：

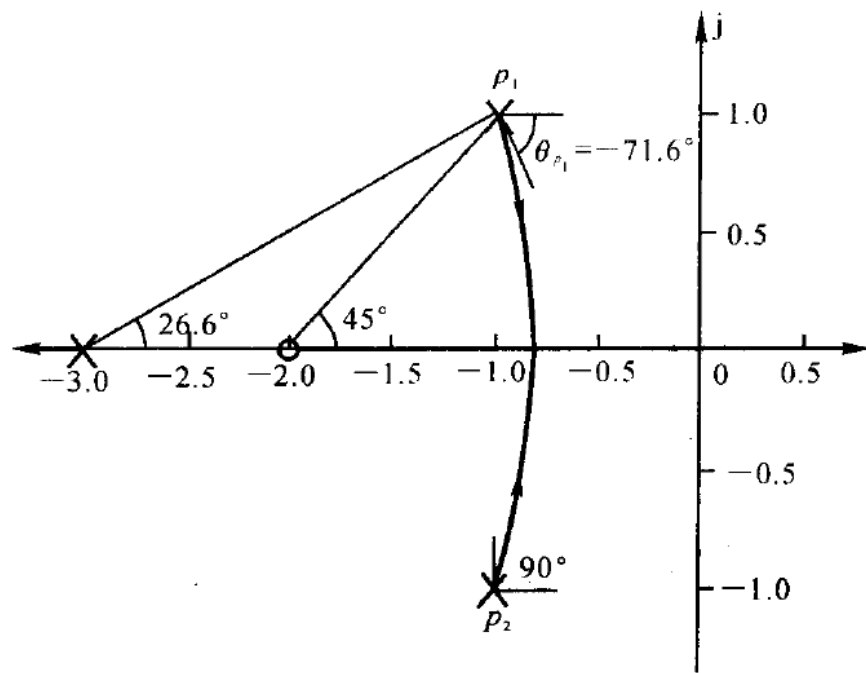
$$\theta_{p1} = 0^\circ + 45^\circ - (90^\circ + 26.6^\circ) = -71.6^\circ,$$

$$\theta_{p2} = 71.6^\circ$$

(5) 根轨迹与虚轴的交点就是原点，该点的根轨迹增益为

$$K_c^* = \frac{|0 - (-1+j)| |0 - (-1-j)| |0 - (-3)|}{|0 - (-2)|} = 3$$

$K_c^* < 3$ 时，该正反馈系统稳定。



思考：将该题改为负反馈，问 $K^* : 0 \rightarrow -\infty$ 时的根轨迹如何绘制？

例 系统开环传递函数 $G(s) = \frac{K^*(s+1)}{(s+3)^3}$, 分别绘制 0° 、 180° 根轨迹。

解. $G(s) = \frac{K^*(s+1)}{(s+3)^3} \quad \begin{cases} K = K^*/27 \\ \nu = 0 \end{cases}$

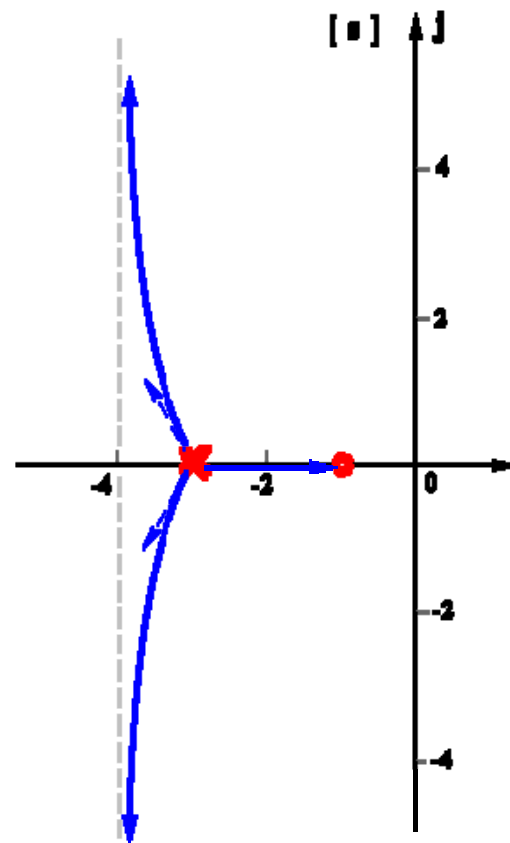
(1) 绘制 180° 根轨迹

① 实轴上的根轨迹: $[-3, -1]$

② 出射角: $180^\circ - 3\theta = (2k+1)\pi$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{2k\pi}{3} = 0^\circ, \pm 120^\circ$$

③ 渐近线: $\begin{cases} \sigma_a = \frac{-3 \times 3 + 1}{2} = -4 \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm 90^\circ \end{cases}$



解. $G(s) = \frac{K^*(s+1)}{(s+3)^3} \quad \begin{cases} K = K^*/27 \\ \nu = 0 \end{cases}$

(2) 绘制 0° 根轨迹

① 实轴轨迹: $[-\infty, -3], [-1, \infty]$

② 出射角: $180^\circ - 3\theta = 2k\pi$

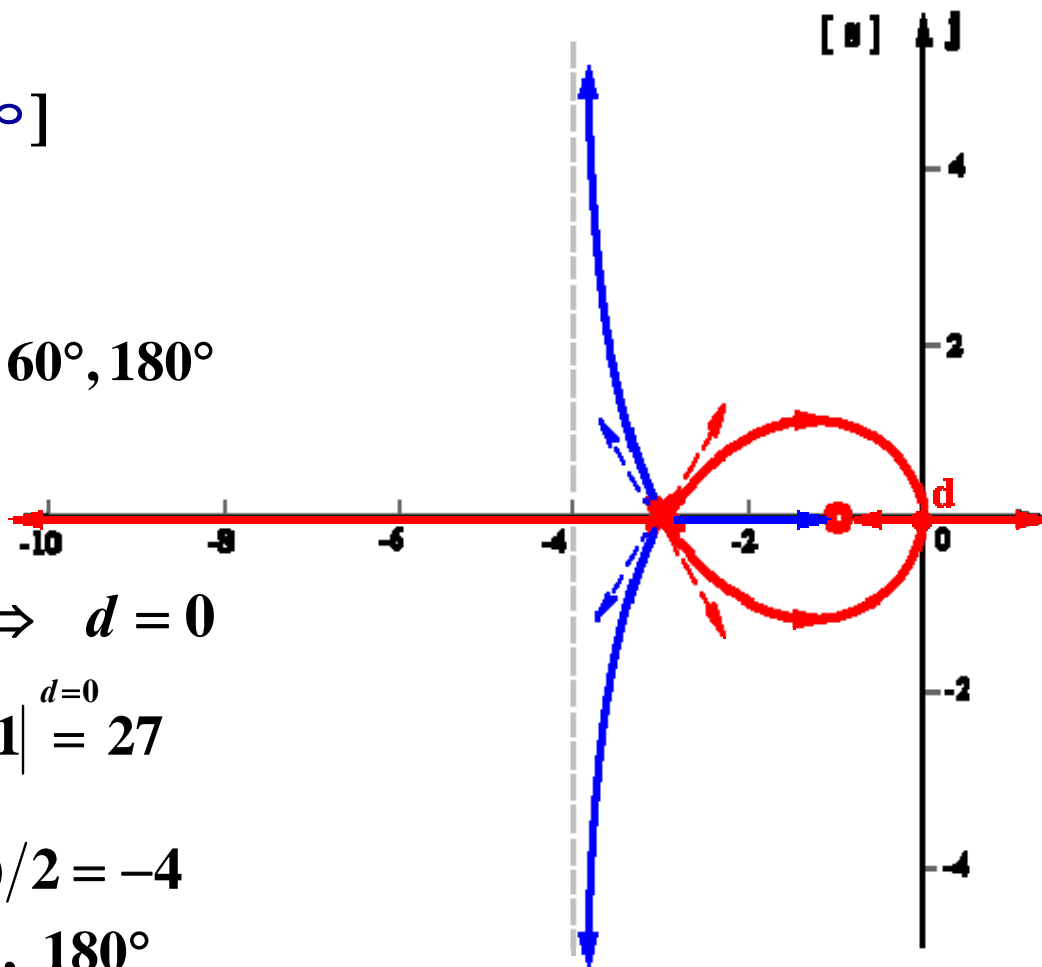
$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, 180^\circ$$

③ 分离点: $\frac{3}{s_d+3} = \frac{1}{s_d+1}$

整理得: $3s_d + 3 = s_d + 3 \Rightarrow d = 0$

$$K_d^* = \left| \frac{d+3}{d+1} \right|^3 \Big|_{d=0} = 27$$

④ 渐近线: $\begin{cases} \sigma_a = (-3 \times 3 + 1)/2 = -4 \\ \varphi_a = 2k\pi/2 = 0^\circ, 180^\circ \end{cases}$

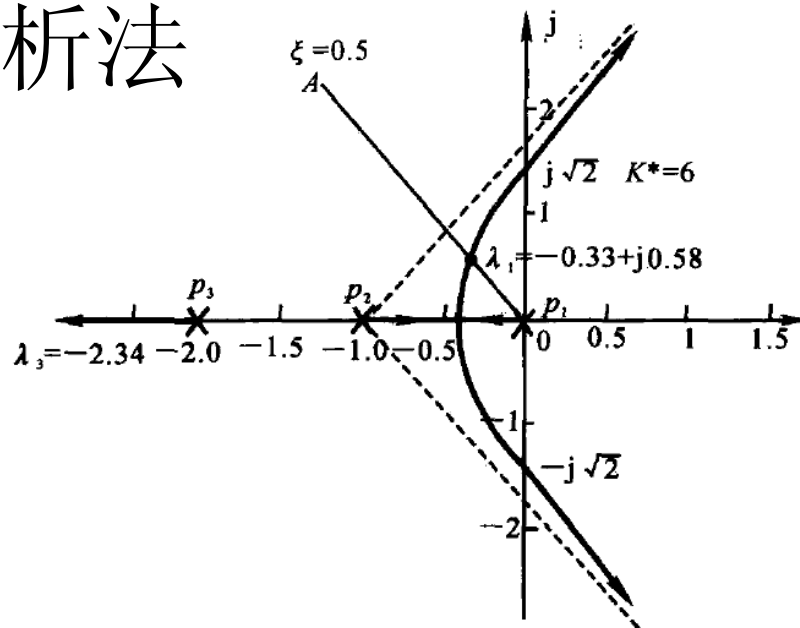


4-4 控制系统的根轨迹分析法

例：已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}, \text{ 试:}$$

(1) 用根轨迹法确定使系统稳定且处于欠阻尼状态的 K 的取值范围; (2) 计算阻尼比 $\xi=0.5$ 时的 K 值以及相应的闭环极点位置, 估算此时系统的动态性能指标。



解: (1) $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)} \stackrel{K^*=2K}{=} \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$

① 共有三条根轨迹, 分别起始于 $p_1=0, p_2=-1, p_3=-2$, 均终止于无穷远处;

② 实轴上的根轨迹: $[-\infty, -2], [-1, 0]$;

③ 渐近线: $\sigma_a = (-1-2)/3 = -1, \varphi_a = \pm 60^\circ, 180^\circ$;

④ 分离点: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} = 0 \Rightarrow 3d^2 + 6d + 2 = 0$, 解得: $d_1 = -1.577$ (舍), $d_2 = -0.432$

分离点对应的 K^* 值: $K_d^* = |d| |d+1| |d+2| = 0.4$

⑤ 与虚轴的交点: $D(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K^* = 0$, 令 $s = j\omega$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega)] = -3\omega^2 + K^* = 0 \\ \operatorname{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 2\omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K^* = 6 \end{cases}$$

使系统稳定且处于欠阻尼状态的 K 的取值范围

$$0.4 < K^* < 6 \Rightarrow 0.2 < K < 3$$

(2) $\xi=0.5$ 时对应的阻尼角 $\beta=60^\circ$ ，记等阻尼线与根轨迹的交点为

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -0.5\omega_n \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_n$$

记第三极点为 λ_3 ，则：

$$D(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) = s^3 + (\omega_n - \lambda_3)s^2 + (\omega_n^2 - \lambda_3\omega_n)s - \lambda_3\omega_n^2$$

$$\text{又} \quad D(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K^*$$

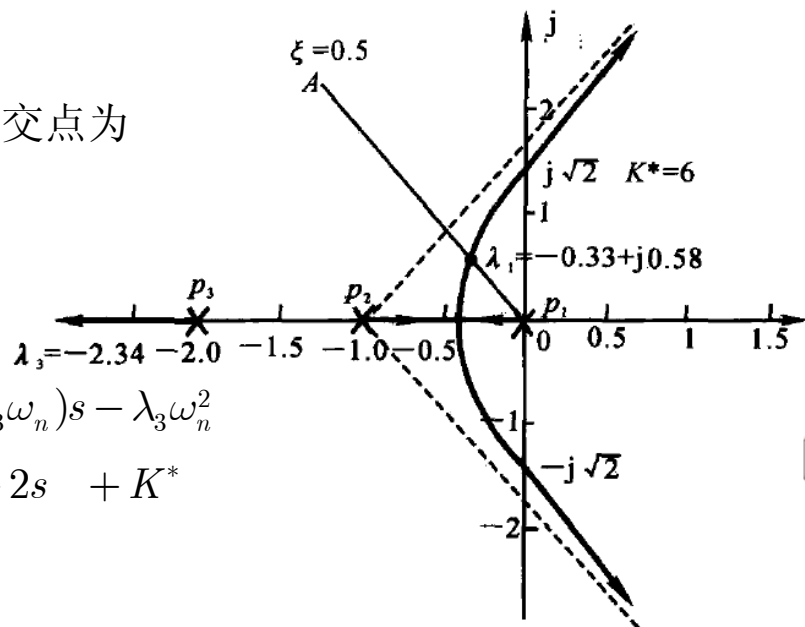
比较系数，得
$$\begin{cases} \omega_n - \lambda_3 = 3 \\ \omega_n^2 - \lambda_3\omega_n = 2 \\ \lambda_3\omega_n^2 = -K^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \frac{2}{3} \\ \lambda_3 = -2.33 \\ K^* = 1.04 \end{cases}$$

故当 $\xi=0.5$ 时， $K=0.5K^*=0.52$ ，三个极点分别为 $\lambda_{1,2} = -0.33 \pm j0.58$ ， $\lambda_3 = -2.33$

$$\therefore \frac{2.33}{0.33} \approx 7 \quad \therefore \text{主导极点：} \lambda_{1,2} = -0.33 \pm j0.58$$

原闭环传递函数为： $\Phi(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)+K}$ ，闭环增益为1

$$\text{故系统可降阶为：} \Phi_{\text{降}}(s) = \frac{0.33^2 + 0.58^2}{(s + 0.33 - j0.58)(s + 0.33 + j0.58)} = \frac{0.667^2}{s^2 + 2 \times 0.5 \times 0.667s + 0.667^2}$$



$$\Phi_{\text{降}}(s) = \frac{0.667^2}{s^2 + 2 \times 0.5 \times 0.667s + 0.667^2}$$

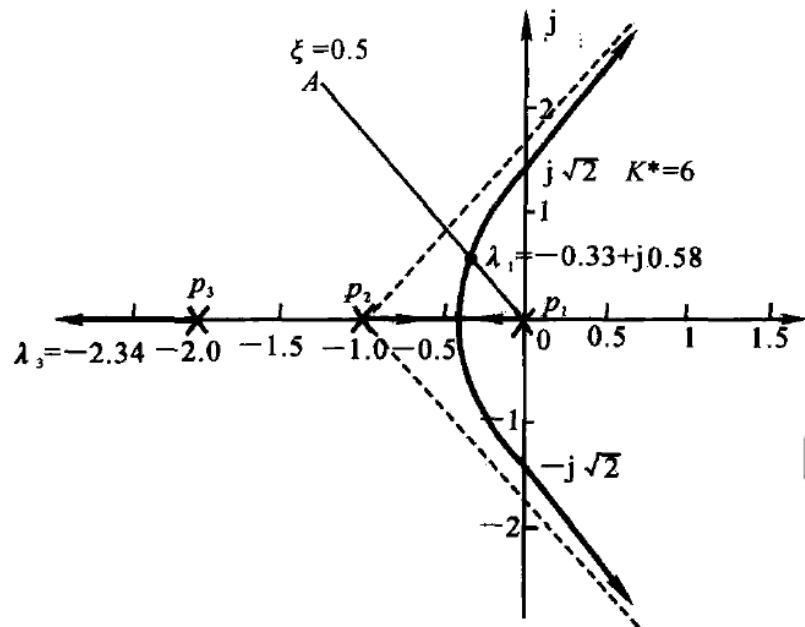
性能计算: $\xi=0.5$, $\omega_n = \frac{2}{3}$

超调量: $\sigma\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 16.3\%$

调节时间: $t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n} = 10.5\text{s}$

稳态误差: 1型系统

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{0.52}{s(s+1)(0.5s+1)}} \frac{1}{s} = 1.9$$



例：已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*}{(s+1)^2(s+4)^2}$$

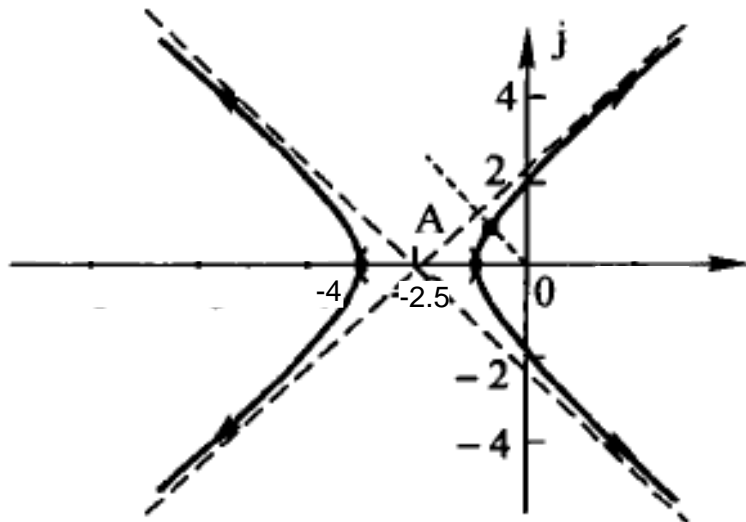
(1) 绘制根轨迹；

(2) 能否通过选择 K^* 满足最大超调量 $\sigma\% \leq 4.32\%$ 的要求？

(3) 能否通过选择 K^* 满足调节时间 $t_s \leq 2s$ 的要求？

(4) 能否通过选择 K^* 满足位置误差系数 $K_p \geq 10$ 的要求？

解：(1) 绘制根轨迹，如图



渐近线： $\sigma_a = -2.5$, $\varphi_a = \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}$

出射角：对应于 $p_{1,2} = -1$ 的出射角： $0 - (2\theta_{1,2} + 0 + 0) = (2k+1)\pi \Rightarrow \theta_{1,2} \pm 90^\circ$

对应于 $p_{3,4} = -4$ 的出射角为： $0 - (2\theta_{3,4} + 180^\circ + 180^\circ) = (2k+1)\pi \Rightarrow \theta_{3,4} = \pm 90^\circ$

与虚轴的交点： $D(j\omega) = s^4 + 10s^3 + 33s^2 + 40s + 16 + K^* \big|_{s=j\omega} = 0$

$$\text{解得：} \begin{cases} \omega = \pm 2 \\ K_c^* = 100 \end{cases}$$

(2)系统存在共轭主导极点，可当成二阶系统近似分析。

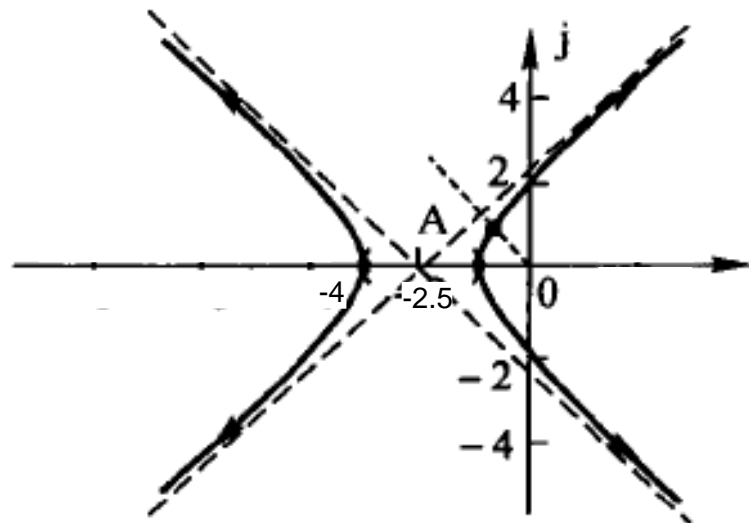
超调量 $\leq 4.32\% \Rightarrow \xi \geq 0.707 \Rightarrow \beta \leq 45^\circ$,

绘制等阻尼线，与根轨迹交于A。

设A及其共轭点为： $\lambda_{1,2} = -\sigma \pm j\sigma$;

另两个共轭极点为： $\lambda_{3,4} = -\delta \pm j\sigma$ 。

由根之和条件： $-10 = -2\sigma - 2\delta \Rightarrow \delta = 5 - \sigma$



$$G(s) = \frac{K^*}{(s+1)^2(s+4)^2}$$

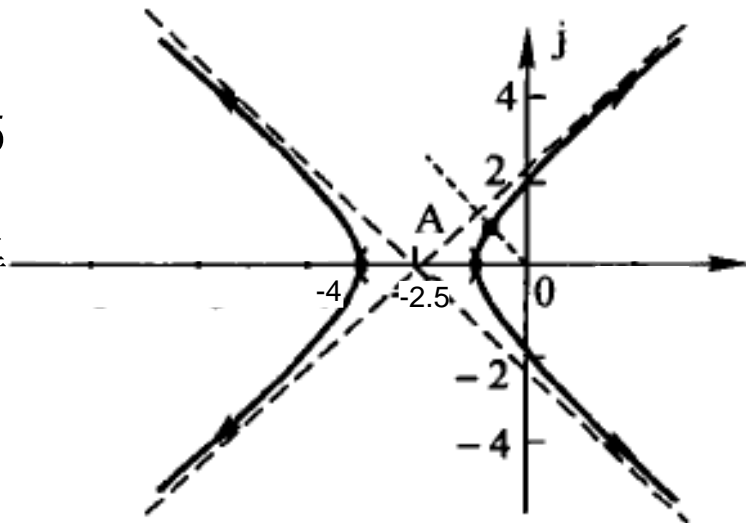
$$\begin{aligned} D(s) &= (s + \sigma + j\sigma)(s + \sigma - j\sigma)(s + 5 - \sigma + j\sigma)(s + 5 - \sigma - j\sigma) = \\ &= s^4 + 10s^3 + (25 + 10\sigma)s^2 + 50\sigma s + (50 - 20\sigma + 4\sigma^2)\sigma^2 = \\ &= s^4 + 10s^3 + 33s^2 + 40s + 16 + K^* = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sigma = 0.8 \\ K^* = 7.8934 \end{cases}$$

可见当 $K^* \leq 7.8934$ 时，超调量 $\sigma\% \leq 4.32\%$ 。

(3) 当 $t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n} \leq 2$ 时，必然要求 $\xi\omega_n \geq 1.75$

根轨迹反映，这一要求无法通过调整 K^* 而得到满足。



$$(4) \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K^*}{(s+1)^2(s+4)^2} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{K^*}{16} \geq 10 \Rightarrow K^* \geq 160$$

由跟轨迹知，要使系统稳定，要求 $K^* < 100$;

故使 $K_p \geq 10$ 的要求无法满足。

增加开环零点对根轨迹的影响

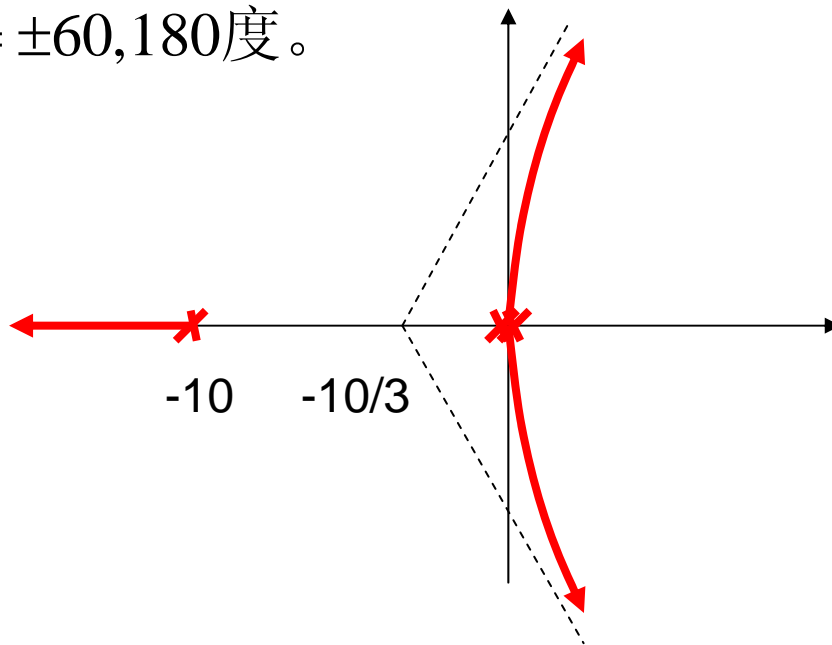
例：一单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*}{s^2(s+10)}$,

绘制闭环系统根轨迹。

解： $n=3, m=0$

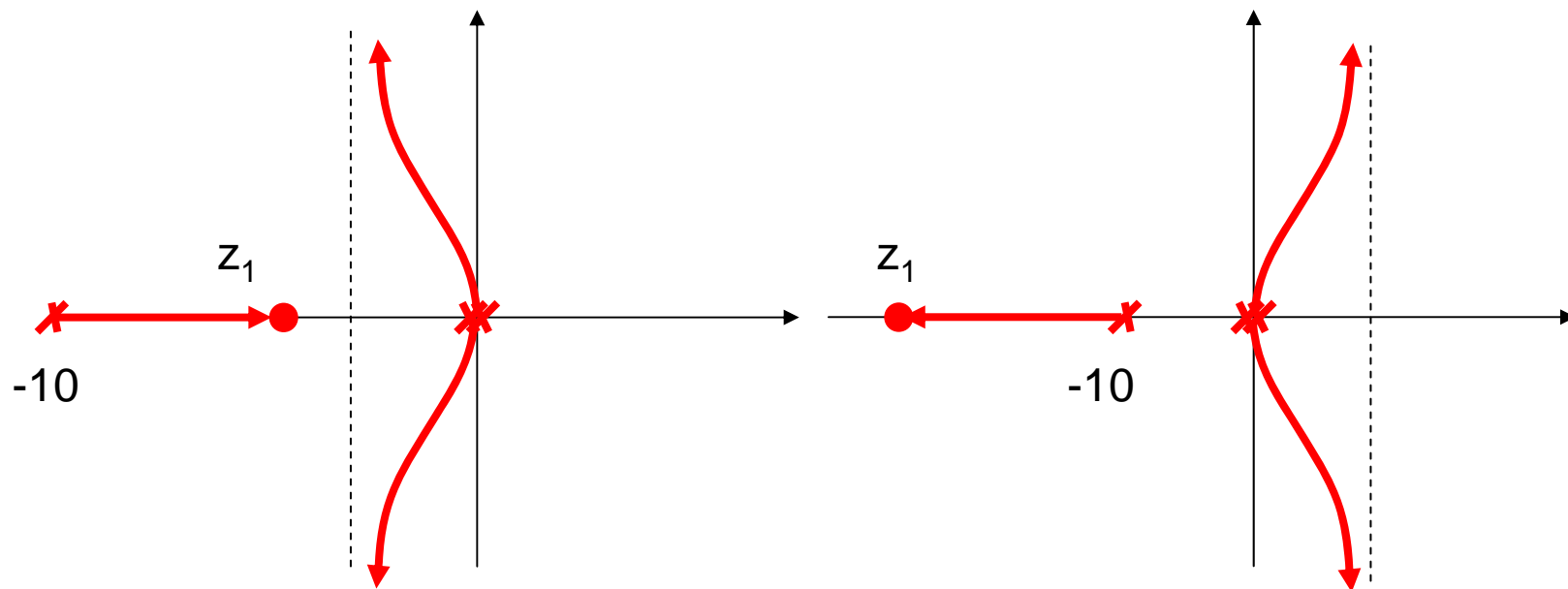
实轴上的根轨迹 $[-\infty, -10]$.

渐近线： $\sigma_a = -\frac{10}{3}, \varphi = \pm 60, 180$ 度。



为以上系统增添一个位于 $(-10, 0)$ 区间的开环零点，

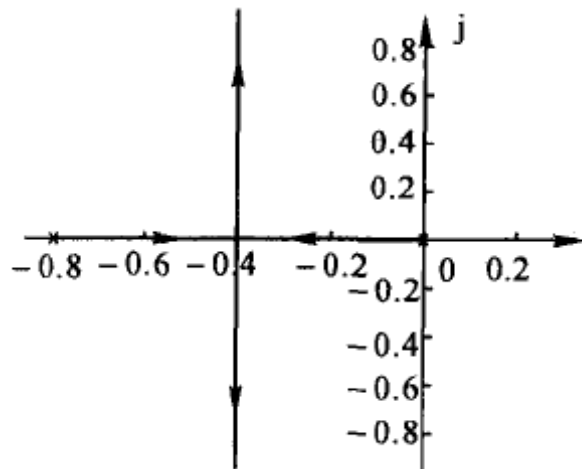
即 $G(s) = \frac{K^*(s - z_1)}{s^2(s + 10)}$ ，则根轨迹为左图。



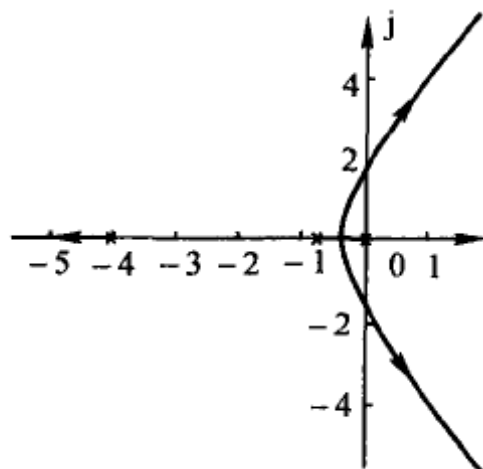
若增添的开环零点位于 $(-\infty, -10)$ 区间的则根轨迹为右图。

增加开环极点对根轨迹的影响

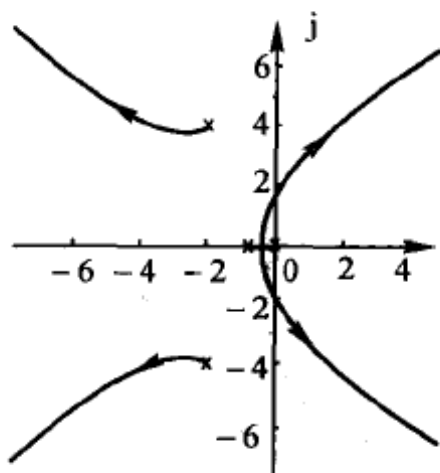
例：单位负反馈系统的开环传递函数分别为 $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ 和 $G_4(s)$ 试绘制其根轨迹。



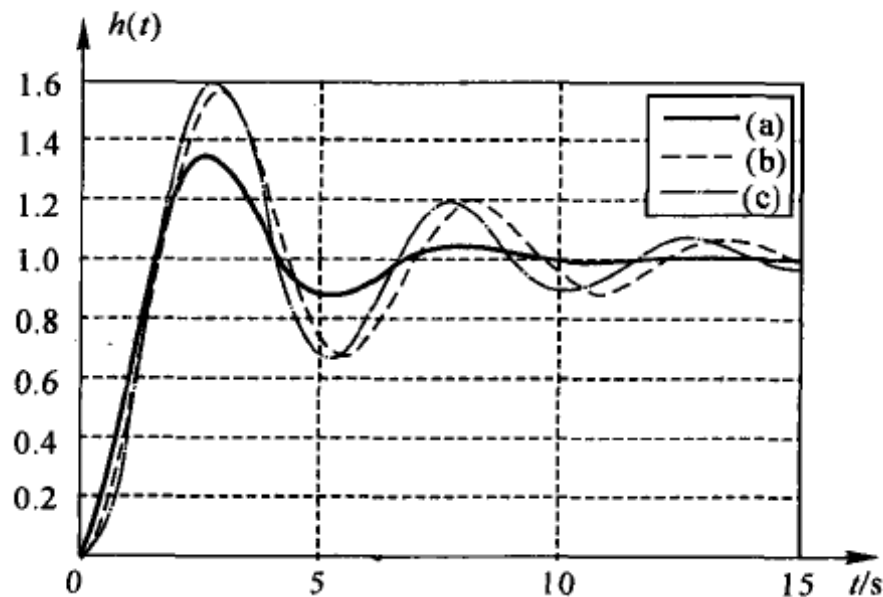
(a)



(b)



(c)



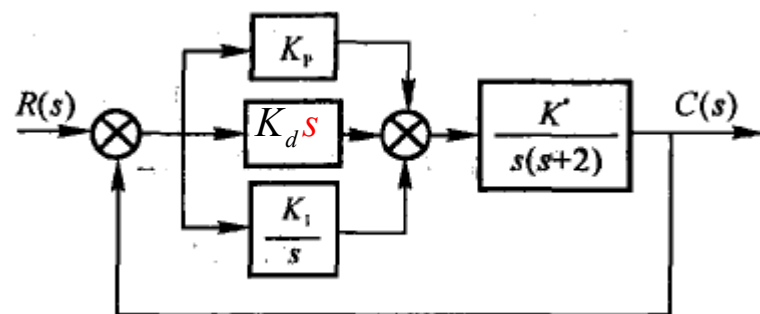
$$G_1(s) = \frac{K^*}{s(s+0.8)}$$

$$G_2(s) = \frac{K^*}{s(s+0.8)(s+4)}$$

$$G_3(s) = \frac{K^*}{s(s+0.8)(s+2+j4)(s+2-j4)}$$

PID控制对根轨迹的影响

例：采用PID控制器的系统结构如图所示。设控制器参数 $K_P = 1$, $K_D = 0.25$, $K_I = 1.5$ 。试绘制当 $K^* = 0 \rightarrow \infty$ ，分别采用P / PD / PI / PID控制时系统的根轨迹。



解：(1) 比例(P)控制器

$$\text{开环传递函数: } G_P(s) = \frac{K_P K^*}{s(s+2)} \quad \begin{cases} K = K_P K^* = K^* \\ v = 1 \end{cases}$$

(2) 比例微分(PD)控制器

$$\text{开环传递函数: } G_{PD}(s) = \frac{K^* (0.25s + 1)}{s(s+2)} = \frac{\frac{K^*}{4}(s+4)}{s(s+2)} \quad \begin{cases} K = \frac{K^*}{2} \\ v = 1 \end{cases}$$

(3) 比例积分(PI)控制器

$$\text{开环传递函数: } G_{PI}(s) = \frac{K^* (1 + \frac{1.5}{s})}{s(s+2)} = \frac{K^* (s+1.5)}{s^2(s+2)} \quad \begin{cases} K = \frac{3}{4} K^* \\ v = 2 \end{cases}$$

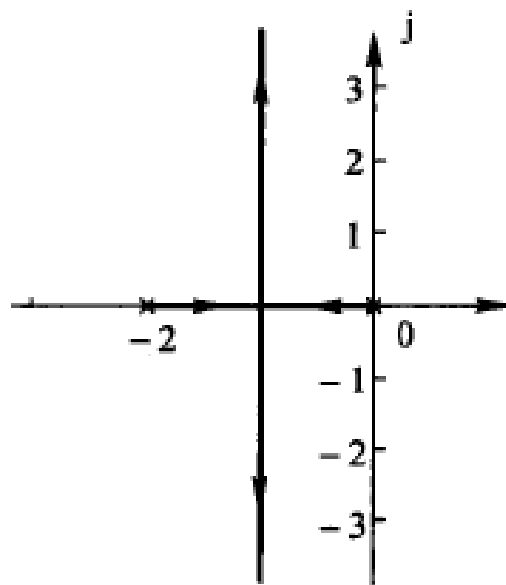
(4) 比例积分微分(PID)控制器

开环传递函数:

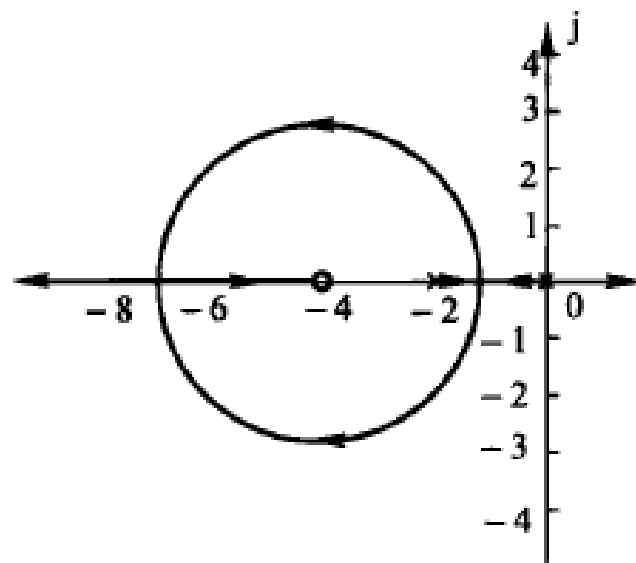
$$G_{PID}(s) = \frac{K^* (1 + 0.25s + \frac{1.5}{s})}{s(s+2)}$$

$$= \frac{\frac{K^*}{4} (s+2+j\sqrt{2})(s+2-j\sqrt{2})}{s^2(s+2)}$$

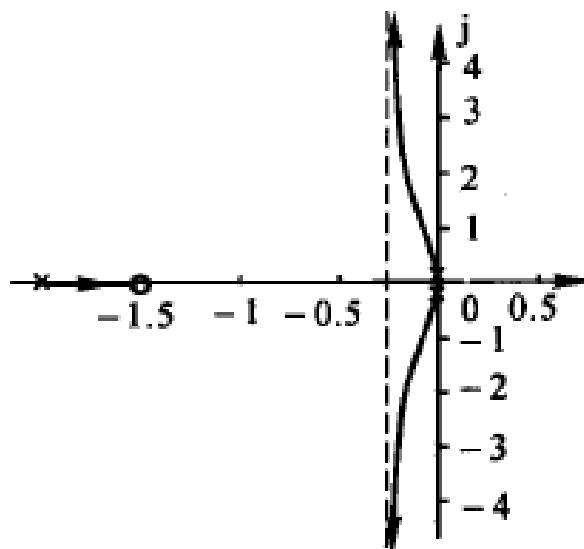
$$\begin{cases} K = \frac{K^*}{2} \\ v = 1 \end{cases}$$



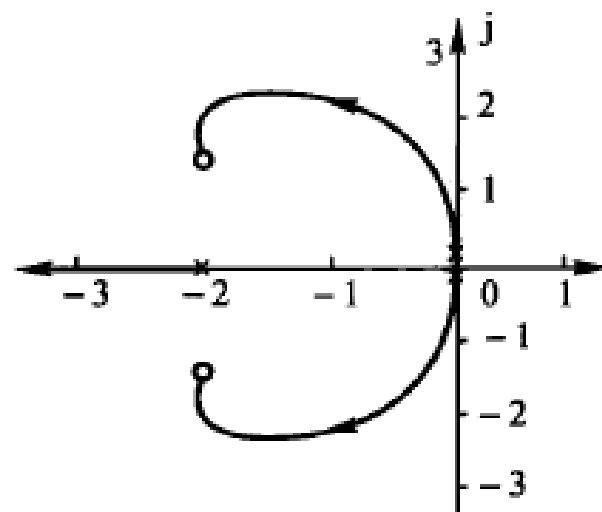
P控制



PD控制



PI控制



PID控制

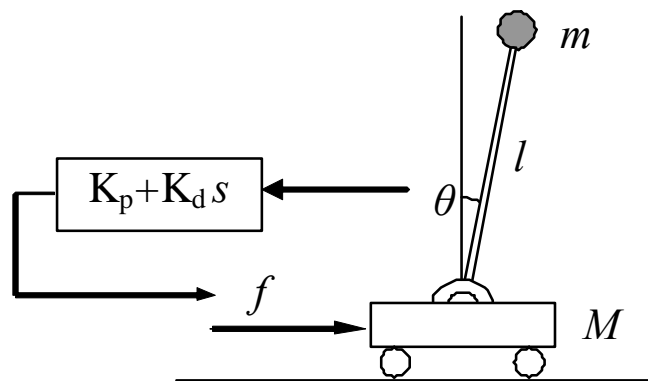
习题

4.3 4.5 (常规)

4.14 (参数)

4.16 (控制器)

2.6D 倒立摆控制系统根轨迹(自设参数)



建议参数设置:

M 可取10kg

m 取个人体重

l 取个人身高的60%

2.6D. 在2.6C闭环倒立摆系统基础上, 绘制该系统根轨迹。

谢谢