

Prandtl 边界层方程推导中的尺度化分析

樊福梅¹ 梁平¹ 龙新峰²

(1. 华南理工大学 电力学院, 广东 广州 510640; 2. 华南理工大学 化工学院, 广东 广州 510640)

摘要: 针对 Navier-Stokes 方程中的各项微商, 通过选择内禀参考尺度, 并根据连续函数的若干性质, 在结合实验观察结果的基础上, 确定其数量级的大小, 再进一步对方程中的各项进行尺度化分析, 使得方程中各项的数量级无量纲化, 并评估方程中各项微商的数量级大小, 略去数量级小于 1 的项, 从而成功推导出了 Prandtl 边界层微分方程. 该方法在一定程度上揭示了边界层微分方程的数学物理实质.

关键词: 边界层; 尺度化; 数量级

中图分类号: TK 124

文献标识码: A

1904 年, Prandtl 在实验观察的基础上提出了边界层的概念, 并根据边界层的性质, 用数量级比较的方法, 简化了 Navier-Stokes 方程, 得出了著名的 Prandtl 边界层微分方程. 此后不久, 边界层理论就被成功地用于摩擦阻力的计算. 此后, 经过约 20 年的时间, 层流边界层理论又被成功地应用于对流换热的理论计算. 边界层理论的迅速发展, 使它成为现代空气动力学的一个重要的独立领域.

但 Prandtl 对 Navier-Stokes 方程中各项微商的数量级的尺度化分析偏于粗糙, 不易为人接受. 此后, 其他科学家采用奇异摄动理论的匹配渐近展开法(The Method of Matched Asymptotic Expansions)更严格、更精确地推导出了边界层方程^[1], 但由于 Prandtl 的推导很简单, 故多年来流体力学及传热学教材中基本上仍沿用 Prandtl 推导方法, 由于该推导方法不易被学生接受, 使这部分内容成为公认的教学难点.

本研究中, 笔者在文献[2]的基础上, 根据连续函数的若干性质, 并结合实验观察资料, 对 Navier-Stokes 方程(简称为 N-S 方程)中各项微商的数量级进行了尺度化分析, 成功地推导出了 Prandtl 边

界层微分方程. 该方法具有数学定义明确、物理概念清晰、易为人所理解等优点, 并在一定程度上揭示了边界层微分方程的数学物理实质.

1 Prandtl 边界层方程尺度化分析基础

1.1 基本简化步骤

对描述物理过程的微分方程组进行简化, 就有可能避免大量的机械运算和繁重的分析工作, 而仍得到有用的解, 即使是对于那些不用多费功夫便能精确求解的方程组, 简化后的方程组的解也不但足够精确, 且其物理意义往往比精确解更加明显.

分析中经常使用的基本简化步骤是:

(1) 设法把比较小的项辨认出来. 即通过选择内禀参考尺度, 根据实验观察结果, 确定其数量级, 再进一步对方程中的各项进行尺度化分析, 使得各项的数量级无量纲化, 并评估各项数量级的大小.

(2) 删掉比较小的项, 从而求解所得简化模型.

(3) 核对自洽性. 即利用实验观察结果, 评估被忽略的那些项, 以确保近似解有足够的精度.

1.2 数量级定义

数量级的严格定义为: 如果一个数满足

$$3 \times 10^{n-1} < A \leq 3 \times 10^n,$$

n 是整数, 那么就说数 A 的数量级为 10^n . 因为 $\lg 3 \approx 1/2$, 所以一个数量级为 10^n 的数 A , 其实际上的等价表征为: $n - 1/2 < \lg |A| \leq n + 1/2$.

收稿日期: 2003-04-14

作者简介: 樊福梅(1977—), 女, 硕士生, 主要从事热工过程优化控制研究.

在某个区间上定义的一个函数 f 的数量级指的是一个数 M 的数量级,这个数是 $|f|$ 在给定区间上的最大值(上确界)^[3].在简化过程中,对方程中各项数量级大小的评估,是尺度化分析中最困难的部分.

1.3 数学物理模型及内禀参考尺度

对不可压、体积力不计的二元层流边界层,其相应的 N-S 方程和连续方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

式中, u 和 v 分别为 x 和 y 方向的速度分量, τ 为时间, ρ 为流体密度, p 为压力, ν 为流体的运动粘度.

大多数工程流动均可以归结为“准稳定流动”,而对于“准稳定流动”,可以忽略 N-S 方程中的 $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial \tau}$ 项^[4].

另外,由于曲率不大的曲面边界层亦可作为平面边界层来考虑,因此以流体平行流过几何条件最简单的平板作为分析对象,设平行来流速度为 u_∞ ,以零冲角流经极薄平板,如图 1 所示.

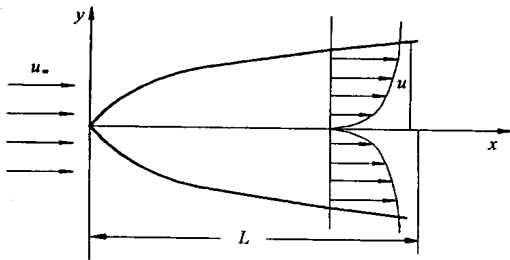


图 1 速度剖面
Fig. 1 Velocity cross section

在 N-S 方程中,除压力梯度项以外,还含有两个量纲不同的物理量,即长度与速度.由于量纲不同的物理量相互之间不能比较大小,所以对这两个物理量的内禀参考尺度要分别进行确定^[3].以板长 L 作为内禀参考长度,令 L 的数量级为 1,以来流速度 u_∞ 的尺度作为内禀参考速度,亦令 u_∞ 的数量级为 1,用符号“ \sim ”表示数量级相同,则有 $L \sim 1, u_\infty \sim 1$.

实验观察结果表明,边界层具有薄层性质,即边界层厚度 $\delta \ll L$,那么可以认为,边界层厚度比板长小一个数量级,令 $\delta \sim \Delta$,则有 $\Delta \ll 1$.

对于边界层内的坐标变量和 x 方向的速度变

量,根据数量级定义,由变量变化范围的上限来确定变量的数量级,如此则有

- (1) $x: 0 \leq x \leq L, L \sim 1, x \sim 1;$
- (2) $y: 0 \leq y \leq \delta, \delta \sim \Delta, y \sim \Delta;$
- (3) $u: 0 \leq u \leq u_\infty, u_\infty \sim 1, u \sim 1.$

利用所确定的内禀参考尺度的数量级,可进一步对 N-S 方程中的各项微商进行尺度化分析.

1.4 连续函数的几个性质

为了对 N-S 方程中各项一阶及二阶微商进行尺度化分析,引入有关连续函数的几个性质:

(1) 函数在闭区间 $[a, b]$ 上连续的含义是指:函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续,而在端点 a, b 分别存在左、右极限,并且其极限值分别为 $f(a)$ 和 $f(b)$ ^[5].

(2) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在开区间 (a, b) 上可导,则有

$$\int_a^b f'(x) dx = \int_a^x f'(x) dx + \int_x^b f'(x) dx.$$

式中,

$$\int_a^x f'(x) dx = f(x) - f(x) \Big|_{x \rightarrow a+0} \quad (3)$$

$$\int_x^b f'(x) dx = f(x) \Big|_{x \rightarrow b-0} - f(x) \quad (4)^{[6]}$$

(3) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 上可导,则有

$$\int_a^b f'(x) dx = (b - a) f(c) \quad (5)^{[5]}$$

式中, $a < c < b$.

2 N-S 方程中各项微商的尺度化分析

现在根据对边界层的实验观察结果,利用所确定的内禀参考尺度的数量级,结合连续函数的有关性质,对 N-S 方程中各项一阶及二阶微商进行尺度化分析.

2.1 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的尺度化分析

显然,对 x 方向的任一点 x (除原点及其微小邻域外), $u, \frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 在开区间 $(0, x)$ 内处处连续可导.这里为表达更清楚,在开区间 $(0, x)$ 内将 x 方向的变量变换为 ξ .我们知道,由于流体粘性的作用,紧贴板面的流体流速为 0,即在紧贴板面处存在一静止不动的流体微元层,根据边界层性质,当 $\xi \rightarrow +0$ 时, $\delta \rightarrow 0$;而当边界层厚度小于静止微元层厚度时,边界层内整个断面上 x 方向的速度为零,所以

当 $\xi \rightarrow +0$ 时, $\delta \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$, 即 $\lim_{\xi \rightarrow +0} u = 0$. 既然在 $\xi \rightarrow +0$ 时, 边界层的厚度已小于静止微元层厚度, 即边界层已处于静止微元层内, 而沿整个板面静止微元层内的 x 向的速度 $u \equiv 0$, 故此时边界层内 x 方向的速度即为静止微元层内 x 方向的速度. 因此 $\lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. 所以 u , $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 均在闭区间 $[0, x]$ 内连续, 满足式(3)和(5).

根据式(3)和(5), 有

$$(1) \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x} dx = u(x) - u|_{x \rightarrow +0} = u, \text{ 又因为}$$

$$\int_0^x \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_c \cdot (x - 0) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_c \cdot x,$$

其中 $0 < c < x$, 所以 $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_c = \frac{u}{x}$, 则有 $\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u}{x}$;

$$(2) \int_0^x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow +0} = \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ 又因为}$$

$$\int_0^x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_c \cdot (x - 0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_c \cdot x,$$

所以 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_c \cdot x$, 即 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_c = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_c \cdot \frac{1}{x}$, 则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{x} \sim \frac{u}{x^2}.$$

2.2 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ 的尺度化分析

显然, v , $\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ 在 $(0, x)$ 连续可导. 当 $\xi \rightarrow +0$ 时, $\delta \rightarrow 0$, $v \rightarrow v_w$, v_w 为 y 方向的板面速度, 由于板面同流体之间不存在质量交换, 所以 y 方向的板面速度均为 0. 同样, 由于当 $\xi \rightarrow +0$ 时 $\delta \rightarrow 0$, 边界层厚度小于静止微元层厚度, 因此在板面上沿 x 方向有 $\lim_{\xi \rightarrow +0} v = 0$, $\lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$. 如此 v , $\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ 均在闭区间 $[0, x]$ 内连续, 满足式(3)和(5).

类似地, 由式(3)和(5), 可得 $\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{v}{x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \frac{v}{x^2}$.

2.3 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 的尺度化分析

在平板的前缘点附近, 速度会突然出现变化, 因此在近前缘处的一个极小区域内的流动是不能用边界层方程来描述的, 所以我们的分析是不包含原点及微小邻域的. 除原点及其微小邻域外, 在任一 x ,

断面上, u , $\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 在闭区间 $[0, \delta]$ 内连续, 在开区间 $(0, \delta)$ 内可导. 已知 $u|_{y=0} = 0$, 另外, 根据边界层性质, 当 $u = 0.99u_\infty$ 时, $y = \delta$ 因此我们近似认为 $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = 0$. 由式(3)和(5), 我们有

$$(1) \int_0^y \frac{\partial u}{\partial y} dy = u(y) - u|_{y \rightarrow +0} = u, \text{ 又因为}$$

$$\int_0^y \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_c \cdot (y - 0) = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_c \cdot y,$$

其中 $0 < c < y$, 所以 $u = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_c \cdot y$, 即 $\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{u}{y}$.

根据式(4)和(5), 则有

$$(2) \int_y^\delta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_\delta - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_c = -\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_c, \text{ 又因为}$$

$$\int_y^\delta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_c \cdot (\delta - y),$$

其中 $y < c < \delta$ 所以 $-\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_c = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_c \cdot (\delta - y)$, 即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\delta - y}.$$

令 $z = \delta - y$, 可知 $0 \leq z \leq \delta$ 根据前述数量级

定义, 有 $z \sim \delta \sim y$, 所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim -\frac{u}{y^2}$.

2.4 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ 的尺度化分析

除原点及其微小邻域外, v , $\frac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ 在闭区间 $[0, \delta]$ 内连续可导, 满足式(4)及(5). 已知 $v|_{y=0} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = 0$, 类似地, 由式(4)及(5), 可推导出 $\frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{v}{y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim -\frac{v}{y^2}$.

2.5 v 的尺度化分析

由连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

可得 $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$. 又因为 $\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u}{x}$, 故有 $\frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{v}{y} \sim \frac{v}{\Delta}$.

方程要成立, 两项必为同一数量级, 所以 $v \sim \Delta$.

3 Prandtl 边界层微分方程的导出

将 x, y, u 和 v 的无量纲数量级代入各项微商

的尺度化分析结果为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u}{x} \sim \frac{1}{1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{u}{y} \sim \frac{1}{\Delta}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{v}{x} \sim \frac{\Delta}{1}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{v}{y} \sim \frac{\Delta}{\Delta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{u}{x^2} \sim \frac{1}{1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim -\frac{u}{y^2} \sim -\frac{1}{\Delta^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \frac{v}{x^2} \sim \frac{\Delta}{1}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim -\frac{v}{y^2} \sim -\frac{1}{\Delta}. \end{aligned}$$

将各项微商的无量纲化的数量级代入 x 方向的动量方程中, 惯性力项具有 1 的数量级, 由边界层的性质知, 边界层内惯性力与粘性力具有相同的数量级, 而对粘性力项的数量级分析表明, 只有当运动粘度 ν 的数量级为 Δ^2 时才有此可能, 因此可确定运动粘度 ν 的数量级为 Δ^2 . 然后再对 N-S 方程中的各项进行数量级比较, 略去数量级小于 1 的项, 则有

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{6}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{7}$$

将式(6)和(7)合并为一个方程, 得

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{8}$$

式(8)即为著名的 Prandtl 层流边界层微分方程.

对平面边界层, 可以证明 $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. 证明从略.

参考文献:

[1] Van Dyke M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics [M]. Stanford: Parabolic Press, 1975. 76—88.
[2] 梁平. 普朗特边界层方程推导新法 [J]. 华北电力学院学报, 1987(1): 57—62.
[3] 林家翘, 西格尔 L A. 自然科学中确定性问题的应用数学 [M]. 赵国英, 朱保如译. 北京: 科学出版社, 1986. 211, 244.
[4] 埃克特 E R G. 传热与传质分析 [M]. 航青译. 北京: 科学出版社, 1983. 289.
[5] 复旦大学数学系. 数学分析(上册) [M]. 上海: 上海科技出版社, 1978. 98, 199.
[6] 菲赫金歌尔茨 IM. 微积分教程(第二卷第一分册) [M]. 徐献瑜, 冷生明, 梁文骐, 等译. 北京: 高等教育出版社, 1957. 108, 120—121.

Scaling Analysis for Inducing Prandtl Boundary Layer Equation

Fan Fu-mei¹ Liang Ping¹ Long Xin-feng²

(1. College of Electric Power, South China Univ. of Tech., Guangzhou 510640, China;
2. College of Chemical Engineering, South China Univ. of Tech., Guangzhou 510640, China)

Abstract: By selecting intrinsic reference scaling, and according to some related properties of continuous function, the magnitude of each tiny quotient in Navier-Stokes equation was determined based on some experimental materials. Then scaling analysis was carried out to make each part of the equation non-dimensional, and the magnitude of each tiny quotient of the equation was evaluated. By removing the parts whose magnitude was less than 1, Prandtl boundary layer differential equation was induced successfully. To a certain extent, this method discloses the mathematical and physical essence of boundary differential equation.

Key words: boundary layer; scaling; magnitude