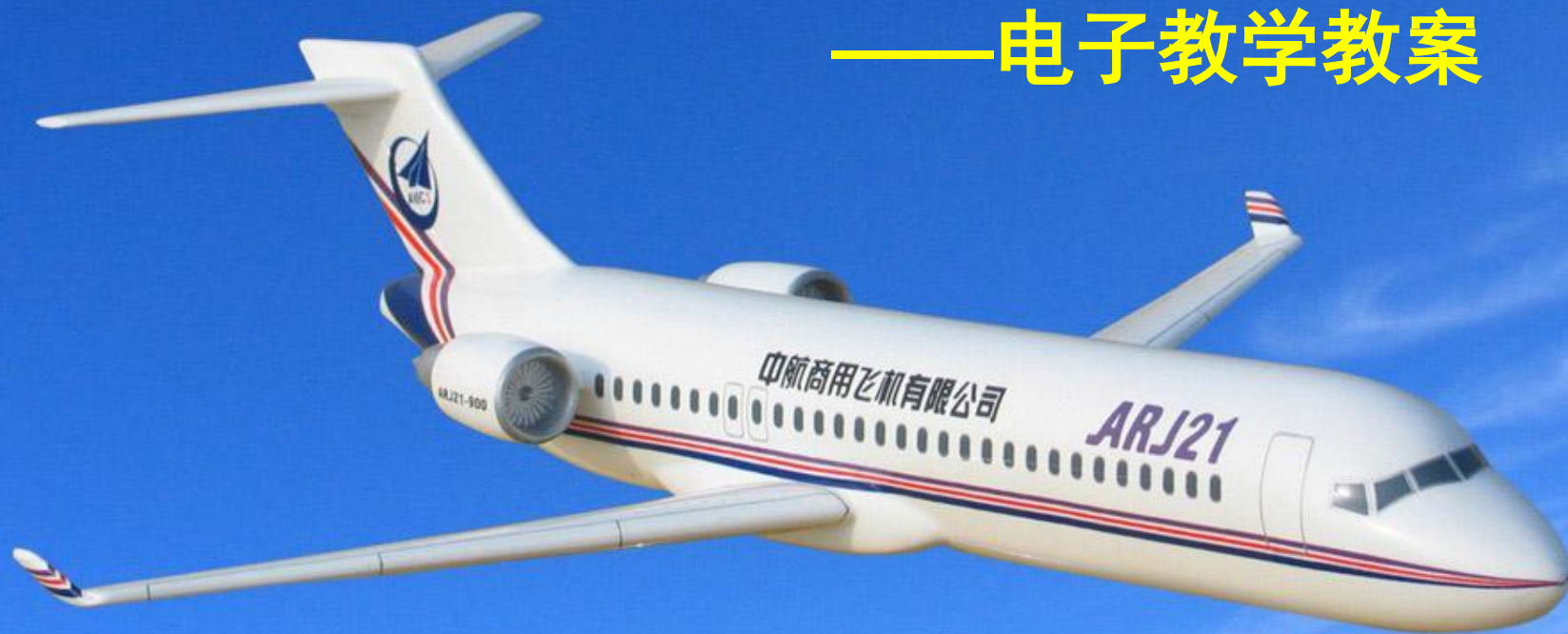


飞行器结构力学基础

——电子教学教案



西北工业大学航空学院
航空结构工程系

第七章

受剪板式薄壁结构内力和位移计算

第一讲

7.1 引言、计算模型

7.2 受剪板式薄壁结构元件的平衡

7.1 引言、计算模型

现代飞行器除了少数几个部位（如：发动机架、起落架、操纵系统的传动机构等）仍采用杆系结构外，其余大部分都采用薄壁结构。这种结构是由横向骨架（机身的隔框、机翼的翼肋）、纵向骨架（机身的桁梁、桁条，机翼的梁、桁条）和蒙皮组成。薄壁结构各元件之间的连接关系比较复杂，且每种元件的受力情况及其在传力中的作用也很复杂。为了能对实际工程结构进行分析，就必须对所有影响计算的因素（载荷、几何形状、传力路线、材料特性等）进行分析，保留起主要作用的因素，略去次要因素，使结构简化，分析切实可行。我们称这一简化过程为**结构的理想化**。实际结构在理想化之后，就变换成另一种与原结构不尽相同但又保持了原结构在受力和传力过程中的基本和主要力学特征的另一种理想化了的结构，即**计算模型**。

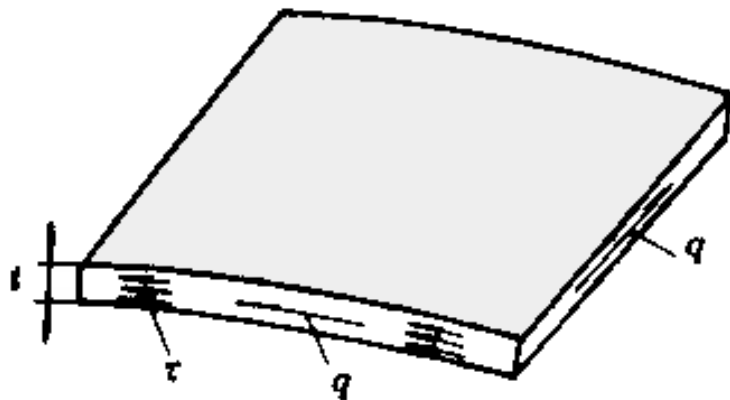
受剪板式薄壁结构计算模型，实践证明是比较切合实际的，是用于解决工程薄壁结构问题的有效途径之一。这种受剪板式的薄壁结构计算模型及其内力和位移的计算方法就是本章所要介绍的主要内容。

■ 飞机薄壁结构典型元件受力分析及其理想化

(1) 蒙皮

在结构作为一个整体的受力和传力过程中，蒙皮的主要作用是支承和传递由于剪切和扭转而引起的剪应力，同时它还部分支承和传递由于弯曲而引起的正应力。但正应力主要由较强的长桁和突缘等纵向元件承担，蒙皮在这方面的作用是第二位的。因此，在对蒙皮进行理想化的时候，假设蒙皮只承受并传递剪应力；蒙皮实际上具有的承受并传递正应力的能力将人为地折算到纵向元件（如长桁）上去。

由于蒙皮壁厚一般很薄，可近似认为蒙皮上的剪应力大小沿厚度方向不变化，且剪应力沿厚度中线的切线方向。因为剪应力的值沿厚度方向不变，所以可以用剪应力沿厚度方向的合力 $q = \tau \times t$ 来替代剪应力，称 q 为剪流，用半箭头表示。



■ 飞机薄壁结构典型元件受力分析及其理想化

(2) 长桁

长桁理想化为一根具有集中面积的杆，这是一根假想的杆(**Boom**)，它的全部面积集中在蒙皮壁板中线上的一点，没有高度，也没有宽度。在计算模型中，我们将用一个小圆来表示理想化的杆元件。理想化长桁的集中面积由两部分组成，即长桁的真实面积和蒙皮的有效面积。

为了使计算模型的力学特性与实际结构的相同或相近，应该把蒙皮承受正应力的能力折算到与蒙皮相连的长桁上去。

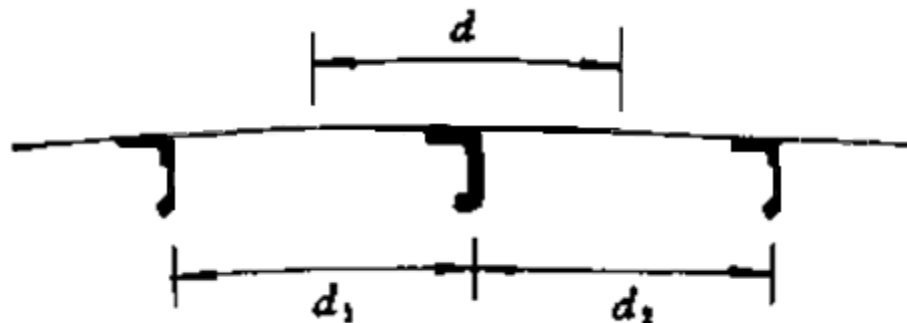
例如：蒙皮的附加面积可以这样计算：令所考虑的长桁面积为 A_{st} ，它与左右长桁的间距分别为 d_1 和 d_2 ，蒙皮的厚度为 t_{sk} 。

理想化长桁的集中面积为

$$A_{st,e} = A_{st} + A_{sk,e}$$

其中， $A_{sk,e}$ 为蒙皮的有效面积：

$$A_{sk,e} = \frac{(d_1 + d_2)t_{sk}}{2}$$



飞机薄壁结构典型元件受力分析及其理想化

(3) 翼梁

翼梁由上、下凸缘和腹板组成，通常在根部与机身固接，在凸缘上和蒙皮相连接。墙也叫做腹板，没有凸缘或只有很弱的凸缘。和长桁不同之处在于，翼梁凸缘除和蒙皮相连外，还和腹板连接。因此，在对凸缘理想化时，除凸缘自身面积外和蒙皮的有效面积，还应把腹板承受弯曲正应力的能力折算成腹板的有效面积。于是，凸缘的有效面积为

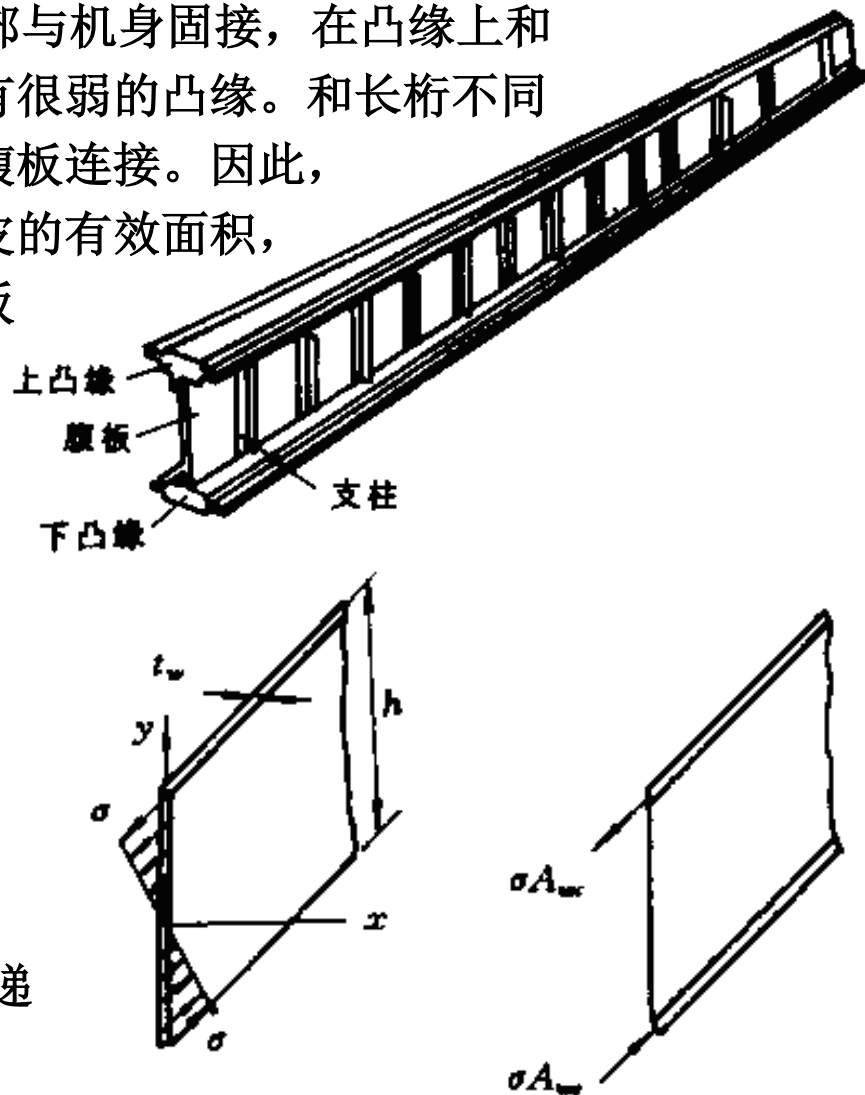
$$A_{f,e} = A_f + A_{sk,e} + A_{w,e}$$

其中， A_f 为凸缘自身的横截面积； $A_{sk,e}$ 是蒙皮的有效面积，其计算的方法和长桁一节中的相同； $A_{w,e}$ 为翼梁腹板的有效面积，等于

$$A_{w,e} = \frac{t_w h}{6}$$

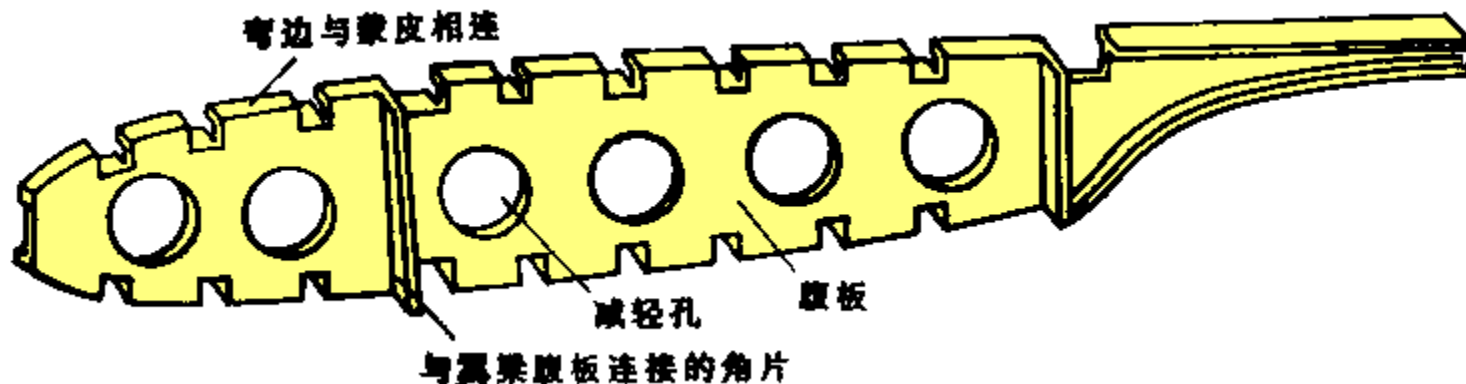
?

理想化后的腹板厚度仍为 t_w ，但只承受和传递剪力，不再承受正应力。



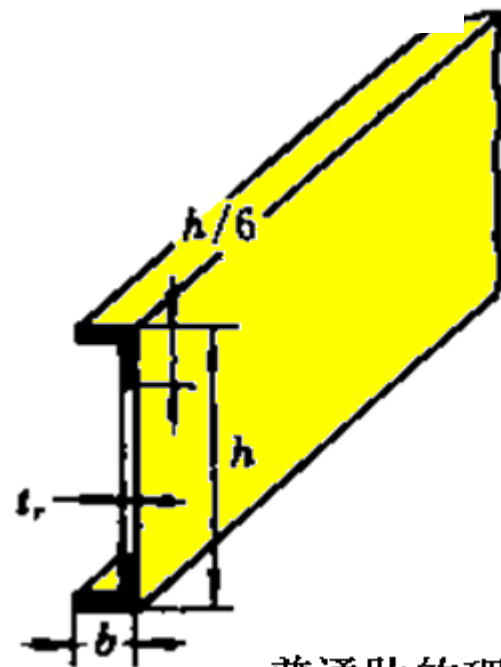
飞机薄壁结构典型元件受力分析及其理想化

(4) 翼肋



翼肋从本质上讲也是梁，它的理想化与翼梁相似。加强翼肋一般布置有较强的缘条，进行理想化时，翼肋腹板只承受剪流，而把腹板承受正应力的能力折算到缘条上，除缘条的自身面积 A_f 外，其余的有效面积计算都和翼梁的相同，

普通的腹板式翼肋大多是薄板冲压件，通过弯边与蒙皮相连。在这种情况下，把弯边视为缘条，其面积为 $A_f = b \times t_r$ ，其中 b 为弯边的宽度， t_r 为翼肋的板厚。



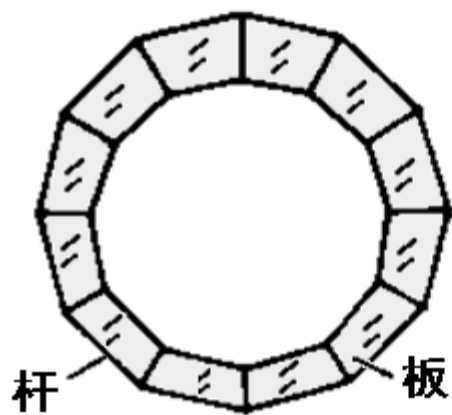
普通肋的理想化

■ 飞机薄壁结构典型元件受力分析及其理想化

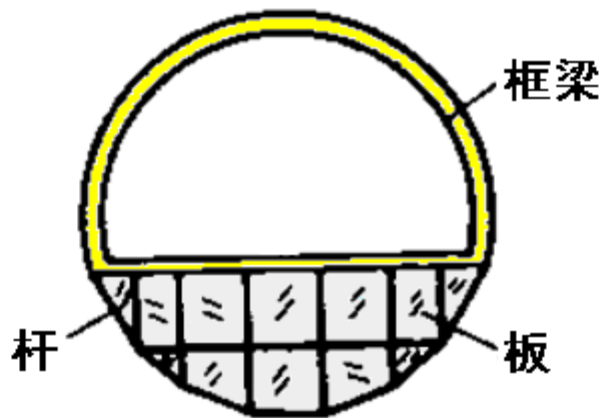
(5) 隔框

机身的蒙皮和纵向加强元件（长桁与桁梁）的理想化与机翼的相似，但隔框的理想化与翼肋则有较大差异。在计算模型中，隔框的理想化根据框的承力特点进行，以受剪、弯为主的框可理想化为框架或梁，以承受轴向力和传递剪流为主的壁板，可以用杆—板结构。

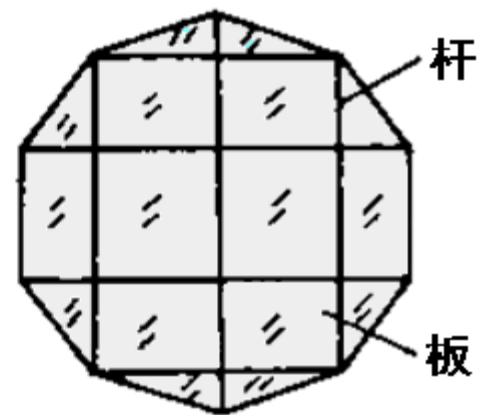
例如，把普通框理想化成环形框架，环形加强框可视为由若干直梁段构成（图(a)）。有时，隔框也可以理想化为框架—杆—板组合结构（图(b)）或纯粹的杆—板组合结构（图(c)）。



(a)



(b)

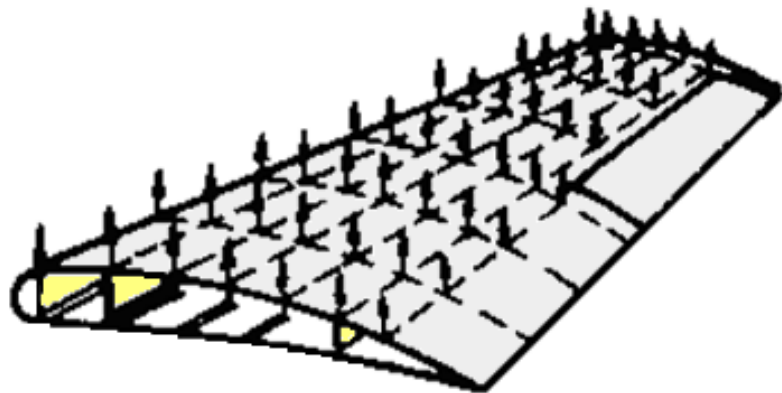


(c)

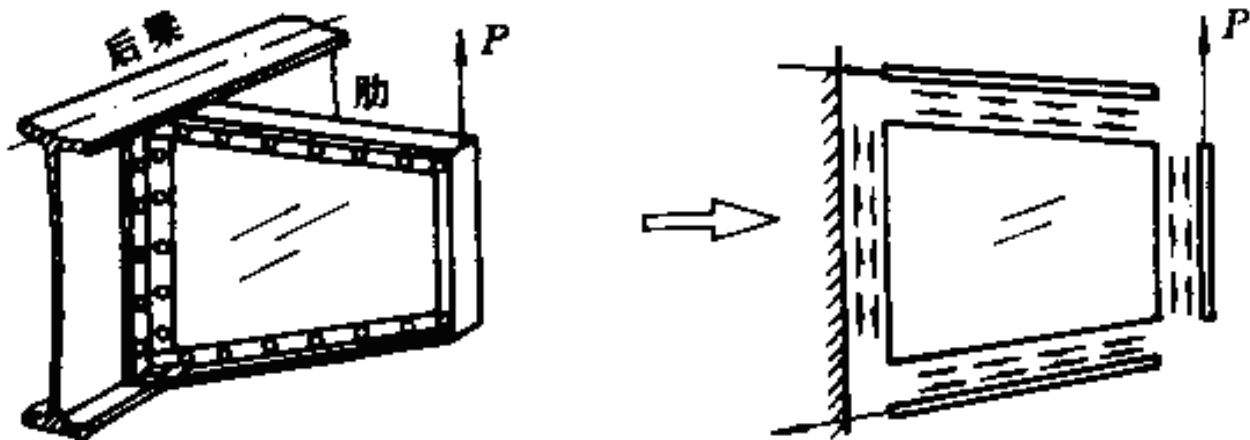
■ 受剪板式薄壁结构的计算模型

在受剪板式薄壁结构的计算模型中，除了满足**小变形**和**线弹性**这两个基本假设外，还引入了以下几个简化假设：

(1) 假设骨架是主要承力构件，骨架的交叉点是铰接的**结点**，将蒙皮上的局部空气动力载荷都等效地简化到结点上。



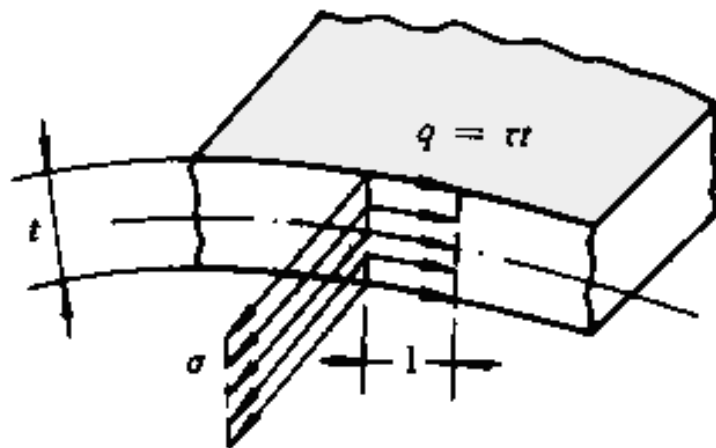
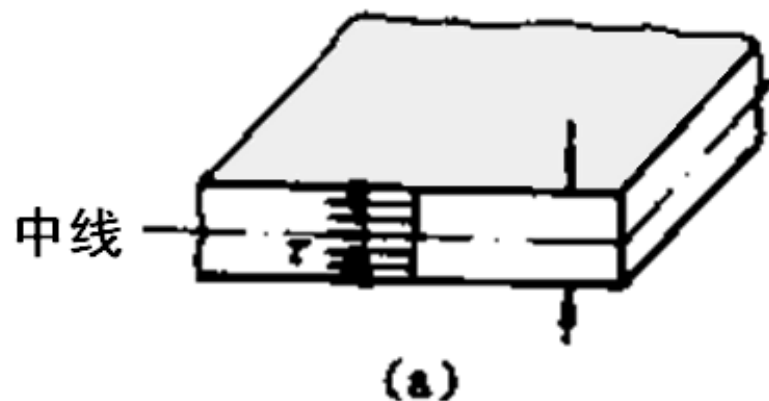
(2) 组成骨架的杆子只承受轴向力；镶在骨架上的板（蒙皮）四边只受剪切，每块板与其周围的杆子之间只有剪力作用。



■ 受剪板式薄壁结构的计算模型

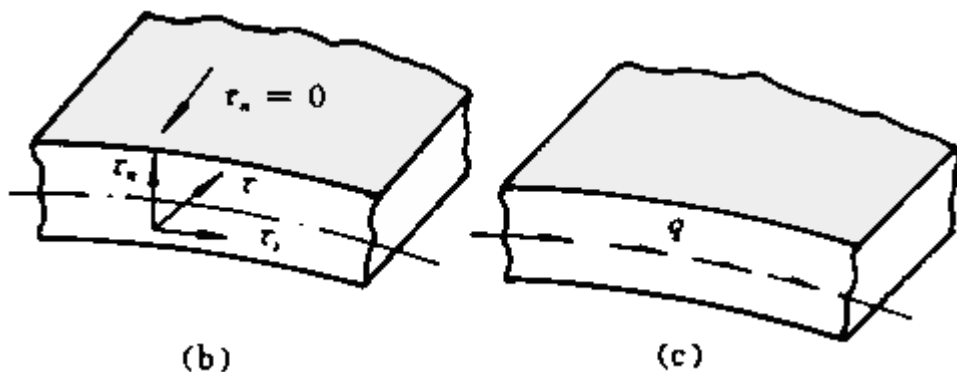
(3) 板的厚度相对于长、宽等其它尺寸是很小的，可以认为板很薄。因此可近似认为板剖面上的剪应力 τ 沿厚度不变（如图(a)示）。

设壁厚为 t ，由于剪应力 τ 沿壁厚均匀分布，将沿薄壁周边的剪应力用 $q = \tau \times t$ 代替，称 q 为**剪流**。剪流的常用单位为[力/长度]，在图上常用半箭头表示。



■ 受剪板式薄壁结构的计算模型

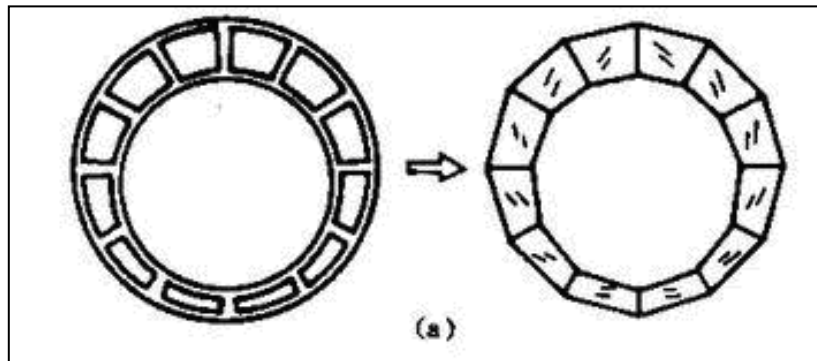
(4) 板剖面上的剪流 q 的方向总是沿着板剖面中线的切线方向，如图(b)所示。由于一般情况下，蒙皮表面没有切向载荷，根据剪应力互等定理，垂直于剖面中线的剪应力分量也就不存在，如图(b)所示。



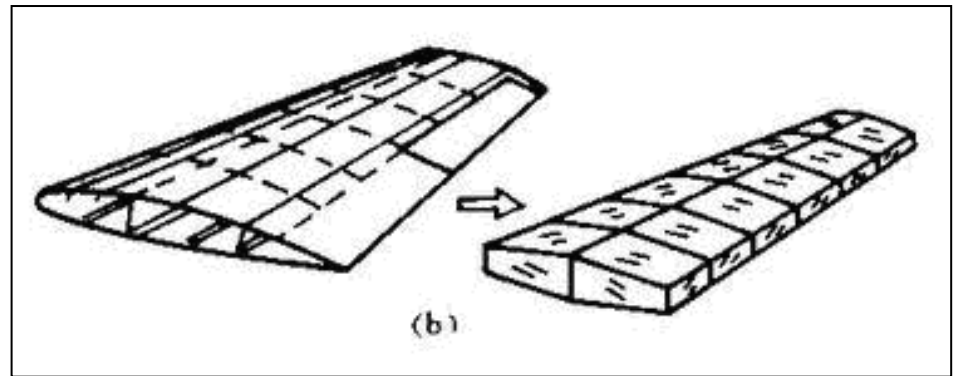
(5) 常剪流——**板每一个边上的剪流沿周线不变**（即剪流为常量）。这样，板的每一个边上就只有一个未知剪流。

采用了上述简化假设的受剪板式薄壁结构计算模型中，只包含两类结构元件：承受轴力的杆和承受剪流的板，杆和板之间只有剪流作用。

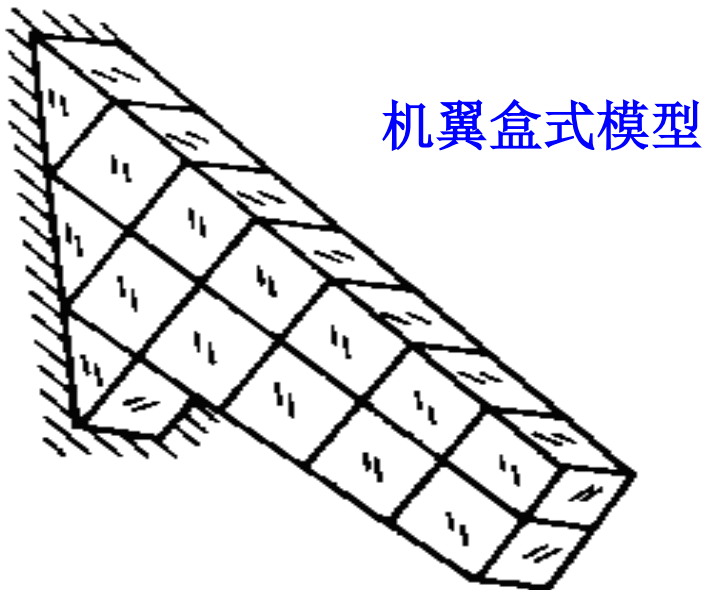
■ 受剪板式薄壁结构计算模型的几个例子。



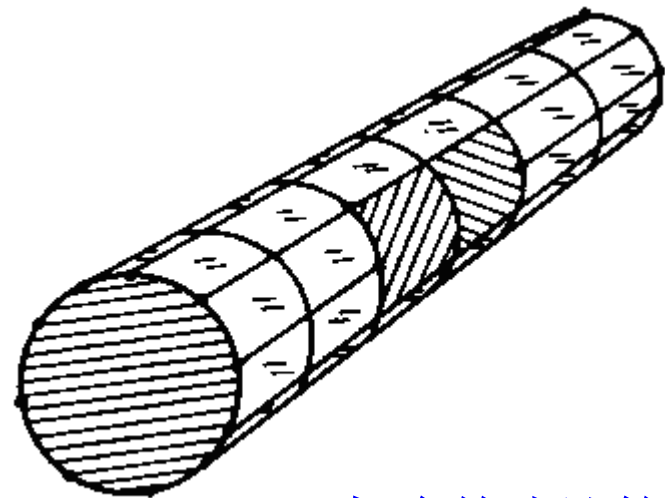
图(a)机身圆形框，可以简化为由若干段直梁所组成的受力模型



图(b)机翼，可以简化为由若干个盒式结构组成的受力模型



机翼盒式模型



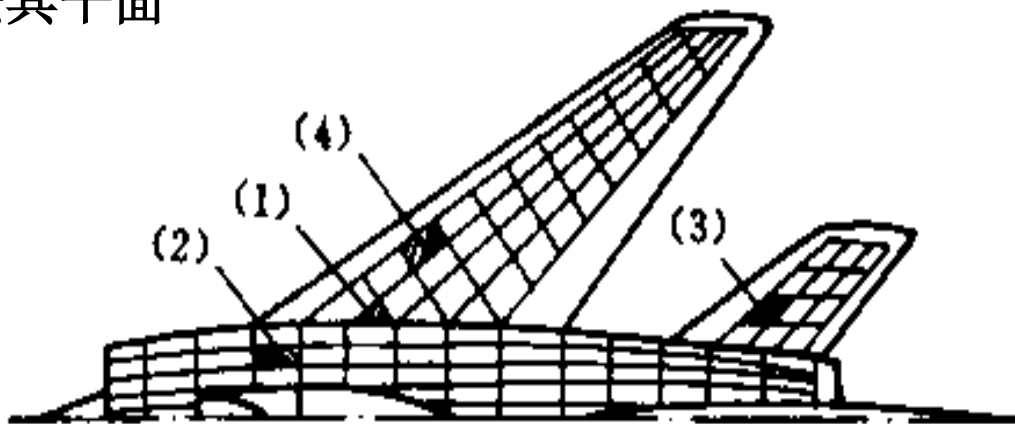
机身笼式计算模型

7.2 受剪板式薄壁结构元件的平衡

1、板的平衡

组成飞机薄壁结构的板元件，按其平面形状的不同一般可简化分：

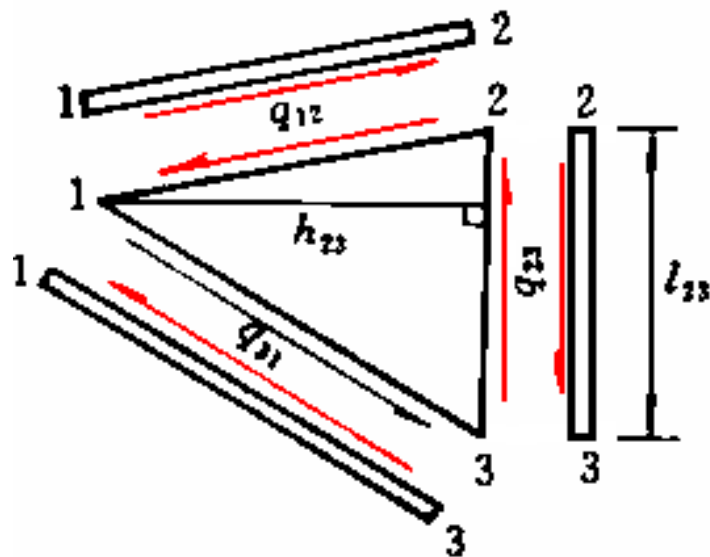
- (1) 三角形板；
- (2) 长方形板（矩形板）；
- (3) 平行四边形板；
- (4) 梯形板。



另一方面，按照板有无曲度可分为平板和曲板。通常蒙皮的曲率较小，一般可以略去不计，近似地作为平板研究。

(1) 三角形板的平衡

切出镶在三角形骨架内的三角形板，用未知剪流代替杆子对它的作用。由于受剪板式计算模型中，杆和板之间只有剪流作用，且板每一边的剪流为一常量，所以我们可以用三个剪流 q_{12} 、 q_{23} 、 q_{31} 来表示三角形板的受力，如图示。



剪流 q_{ij} 的下标 ij 表示杆对板的剪流 q_{ij} 就是由点 j 指向 i 点

现对图示的三角形板，列平衡方程式，有：

$$q_{23} l_{23} h_{23}$$

从物理意义上说，因三角形骨架本身是能够承受外载荷而保持其几何外形不变的几何不变系统，这样，外力就主要由板周围的三角形骨架负担，而传到板上的力是很小的，故可近似认为三角形板不受力。

杆对板的剪

力矩平衡

同理可得 q_{12} 、 q_{31} 也都等于零。

所以，对三角形板： $q_{12} = q_{23} = q_{31} = 0$

三角形板在受剪板式计算模型中是不受力的。

(2) 长方形板的平衡

长方形板四个边上的四个未知剪流 q_{12} 、 q_{14} 、 q_{32} 、 q_{34} ，板在其作用下处于平衡

由平面力系有三个平衡方程，可得：

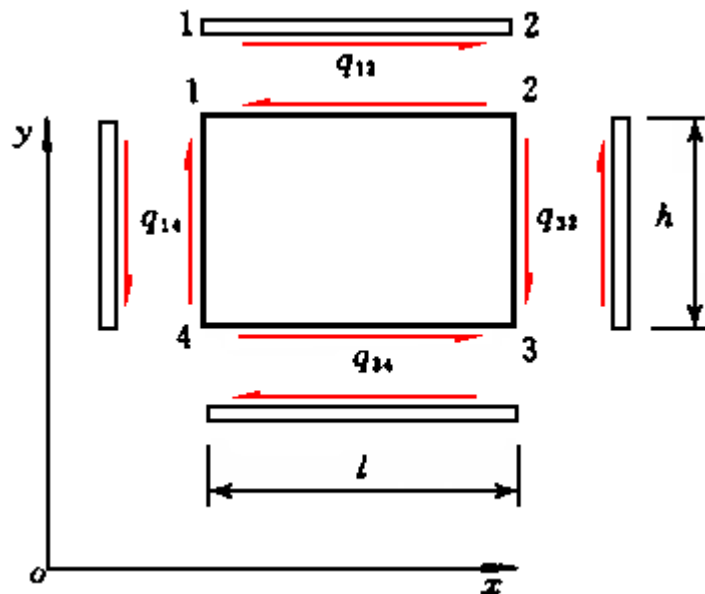
$$\sum X = 0 \quad -q_{12}l + q_{34}l = 0 \quad q_{34} = q_{12}$$

$$\sum Y = 0 \quad q_{14}h - q_{32}h = 0 \quad q_{14} = q_{32}$$

$$\sum M_o = 0 \quad q_{12}lh - q_{32}hl = 0 \quad q_{32} = q_{12}$$

因此，长方形受剪板四边的剪流均相等，即

$$q_{14} = q_{34} = q_{32} = q_{12} = q$$

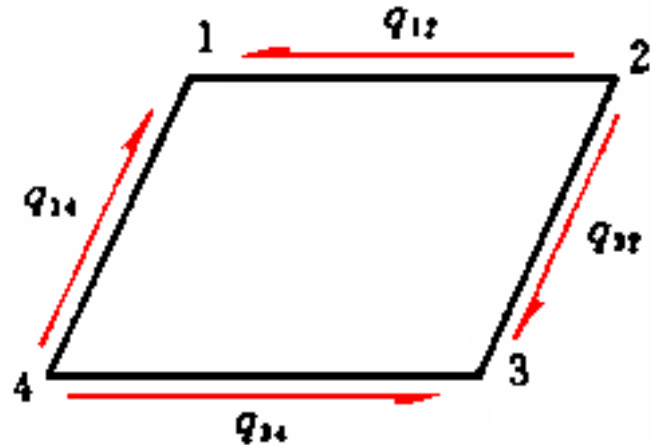


长方形受剪板四边的剪流相等，只有一个未知力 q 。
长方形受剪板相当于起一个约束的作用， $C=1$ 。

(3) 平行四边形板的平衡

由平面力系有三个平衡方程，同样可证：
平行四边形受剪板四边剪流相等，即有：

$$q_{14} = q_{34} = q_{32} = q_{12} = q$$



平行四边形受剪板四边的剪流相等，只有一个未知力 q 。
平行四边形受剪板相当于起一个约束的作用， $C = 1$ 。

(4) 梯形板的平衡

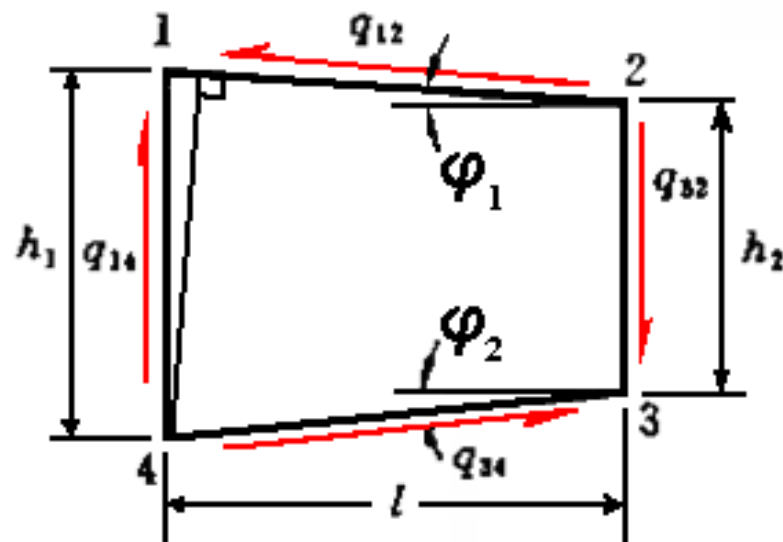
对于图示的梯形板，也有四个剪流及三个平衡方程式。

$$\sum M_4 = 0 \quad q_{12} \frac{l}{\cos \varphi_1} h_1 \cos \varphi_1 - q_{32} h_2 l = 0$$

$$q_{32} = q_{12} \frac{h_1}{h_2}$$

$$\sum M_1 = 0 \quad q_{34} \frac{l}{\cos \varphi_2} h_2 \cos \varphi_2 - q_{32} h_2 l = 0$$

$$\sum M_2 = 0 \quad q_{34} \frac{l}{\cos \varphi_2} h_2 \cos \varphi_2 - q_{14} h_1 l = 0$$



$$q_{34} = q_{32} \frac{h_2}{h_1} = q_{12} \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{h_2}{h_1} = q_{12}$$

$$q_{14} = q_{34} \frac{h_2}{h_1} = q_{12} \frac{h_2}{h_1}$$

可知，梯形板两腰上的剪流值相等，现以 \bar{q} 表示之，则有 $q_{34} = q_{12} = \bar{q}$

由以上关系可推出：

$$\bar{q} = \sqrt{q_{34} q_{12}} = \sqrt{q_{14} q_{23}}$$

故 \bar{q} 又可称为两对边的几何平均剪流。

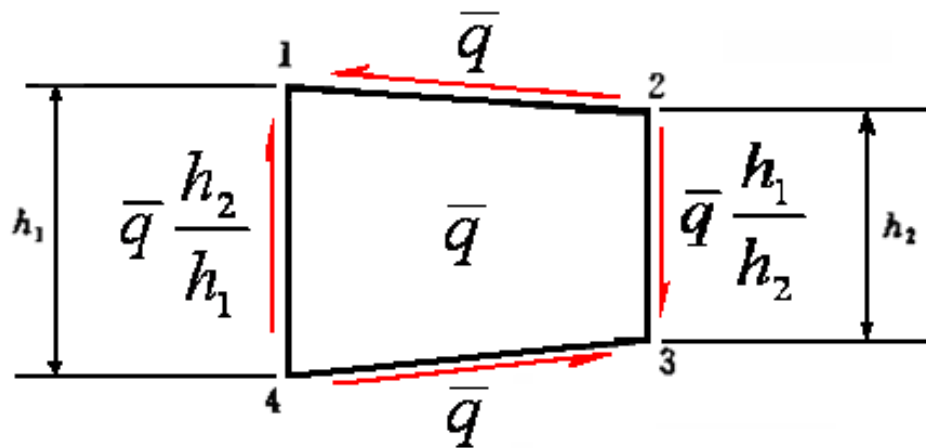
(4) 梯形板的平衡

现在用平均剪流 \bar{q} 表示梯形板两腰的剪流。则梯形板各边的剪流为：

$$q_{34} = q_{12} = \bar{q}$$

$$q_{32} = \bar{q} \frac{h_1}{h_2}$$

$$q_{14} = \bar{q} \frac{h_2}{h_1} = q_{32} \frac{h_2^2}{h_1^2}$$

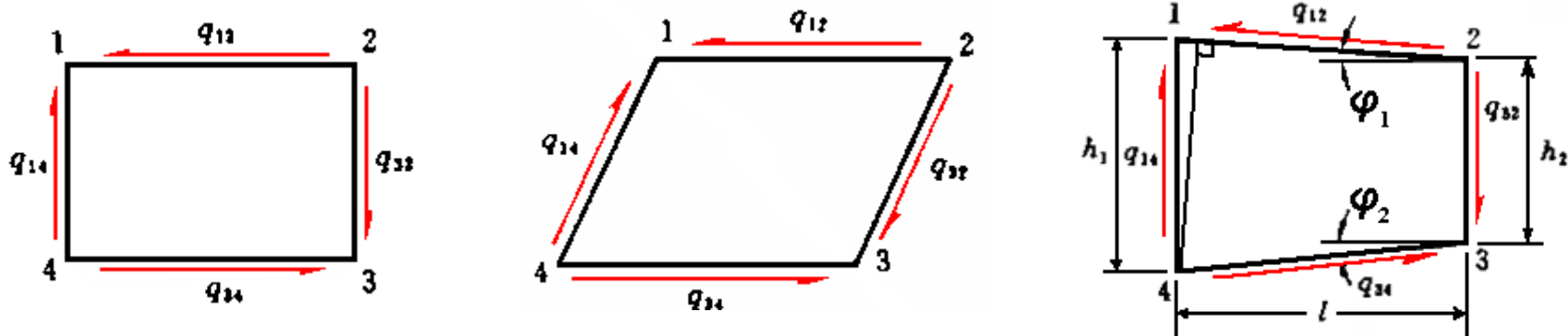


显然，梯形板两底边的剪流等于腰上的剪流 \bar{q} 乘以两底边的长度比，而且长边剪流小于 \bar{q} ，短边剪流大于 \bar{q} 。

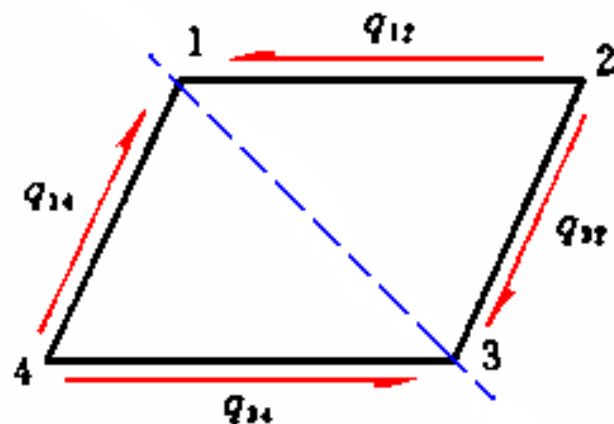
梯形受剪板四边的剪流中，只有一个未知力。因此，梯形受剪板也相当于起一个约束的作用， $C=1$ 。

注意事项：

利用板元件的静力平衡条件，确定的板平衡时剪流的真实方向应该是，它们在相邻两边总是头对头和尾对尾的。



对于任一受剪板，若通过剪流箭头方向所指的角顶作出对角线，如图示虚线，那么这个对角线只可能有两种方向，一般可用正负号区别不同方向的剪流，若规定某一方向为正时，则另一方向就规定为负。

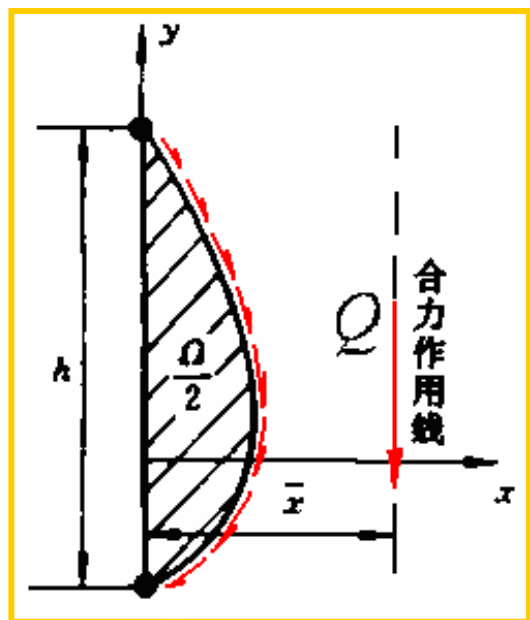


(5) 曲板的剪流平衡

对于平板，其四边剪流的合力都在板平面之内。如果板的曲度较大，就不能作为平板处理了。

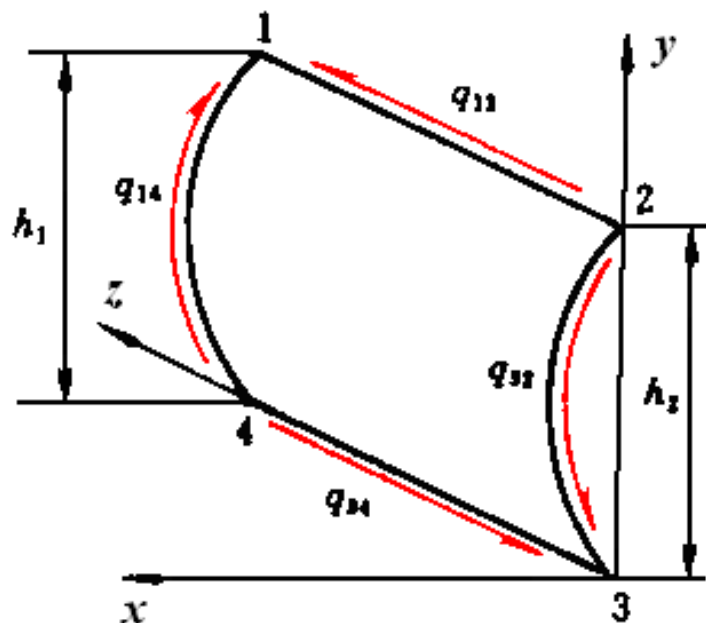
对图示的曲板，为了建立曲板力的平衡方程式，应首先求出各边剪流合力。

已经知道，对任意曲边，其剪流合力及其作用线的位置为：



$$Q = qh$$

$$\bar{x} = \frac{\Omega}{h}$$



可以证明，曲板两对边所形成的力偶位于两个平行平面上。除此而外，关于平板各剪流之间的关系式，同样适用于曲板。

2、杆元件的平衡

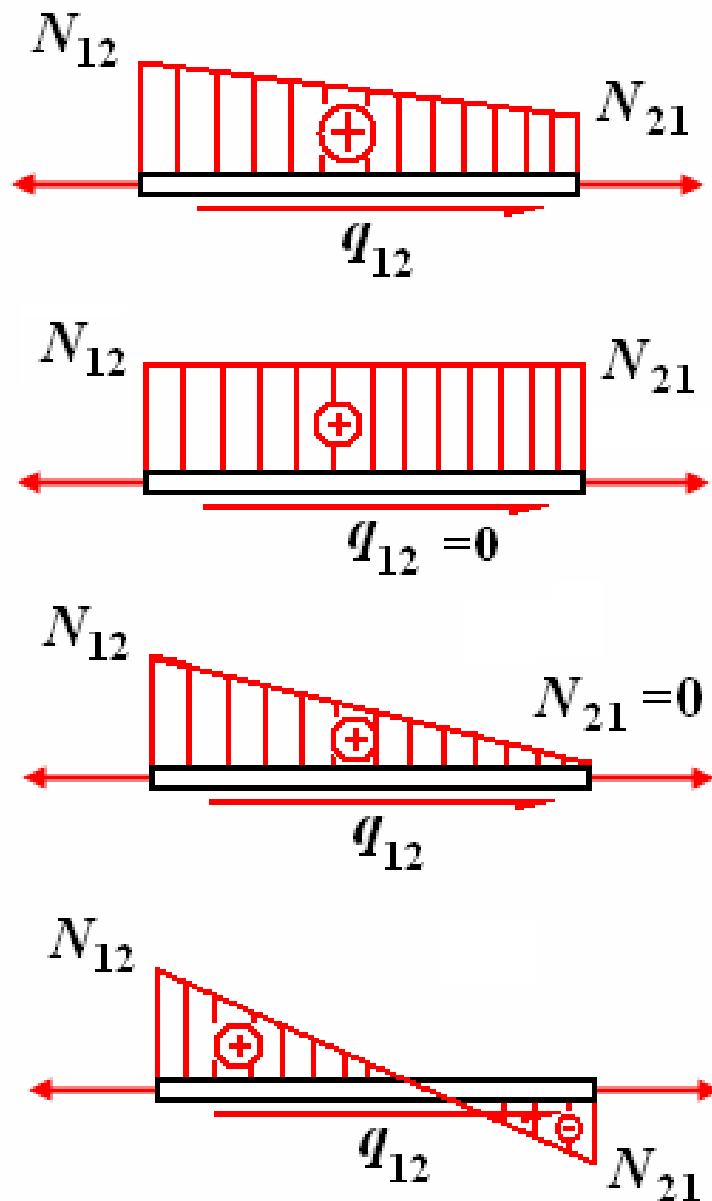
受剪板式薄壁结构的计算模型中，杆与剪流的方向与杆轴线方向一致。对于杆元件时承受两端结点作用的轴向力，杆在这些

由全杆的平衡方程：

$$N_{12} = N_{21} + q_{12} \cdot L$$

若剪流已知，则杆一端的轴力可以用剪流和另一端的轴力来表示，即杆子两端的轴力仅相当于一个独立变量。因此，受剪杆相当于起一个约束。

(4) 杆轴力的内力图，有4中可能。



A_{we} 的计算。

图 (a) 所示的翼梁腹板，厚度为 t_w ，高度为 h ，剖面绕水平对称轴 x 的惯性矩为 $J_x = \frac{t_w h^3}{12}$ ，

在弯矩 M_w 的作用下，最大正应力为

$$\sigma = \frac{M_w}{J_x} \cdot \frac{h}{2} = \frac{6M_w}{t_w h^2}$$

现在将腹板理想化，使其承受和传递弯矩（正应力）的能力由假想的如图 (b) 所示的两集中面积所替代。按理想化后剖面惯性矩不变的条件，可得理想化后的有效面积为

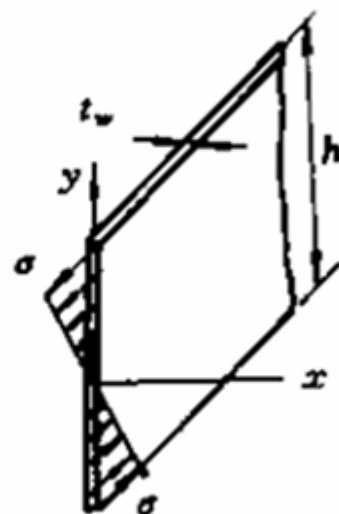
$$A_{we} = \frac{t_w h^3}{12} \bigg/ \frac{h^2}{2} = \frac{t_w h}{6}$$

这时，假想集中面积中的正应力值为

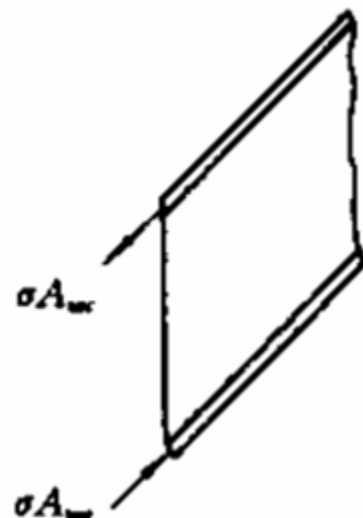
$$\sigma = \frac{M_w}{h A_{we}} = \frac{6M_w}{t_w h^2}$$

与理想化以前原腹板中的最大正应力相同。

理想化后的腹板厚度仍为 t_w ，但只承受和传递剪力，不再承受正应力。



(a)



(b)

计算凸缘有效面积时腹板的理想化

20.2 Idealization of a panel

Suppose that we wish to idealize the panel of Fig. 20.3(a) into a combination of direct stress carrying booms and shear stress only carrying skin as shown in Fig. 20.3(b). In Fig. 20.3(a) the direct stress carrying thickness t_D of the skin is equal to its actual thickness t while in Fig. 20.3(b) $t_D = 0$. Suppose also that the direct stress distribution in the actual panel varies linearly from an unknown value σ_1 to an unknown value σ_2 .

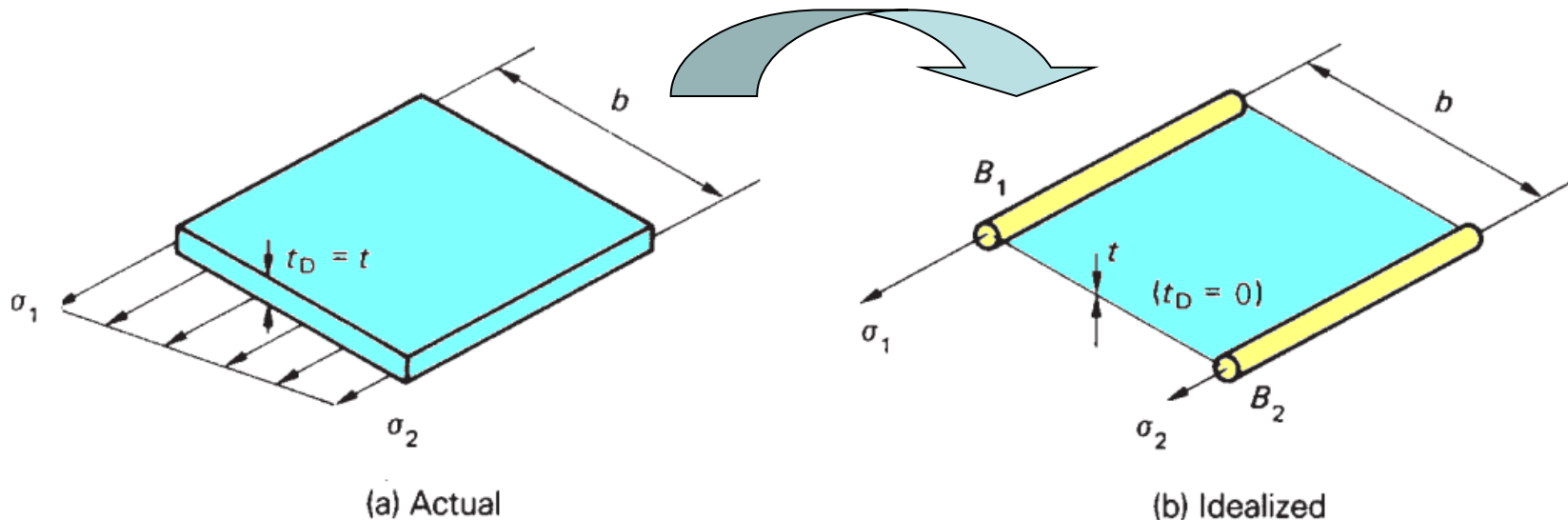


Fig. 20.3 Idealization of a panel.

Idealization of a panel

The analysis should predict the extremes of stress σ_1 and σ_2 although the distribution of direct stress is obviously lost. Since the loading producing the direct stresses in the actual and idealized panels must be the same, we can equate moments to obtain expressions for the boom areas B_1 and B_2 .

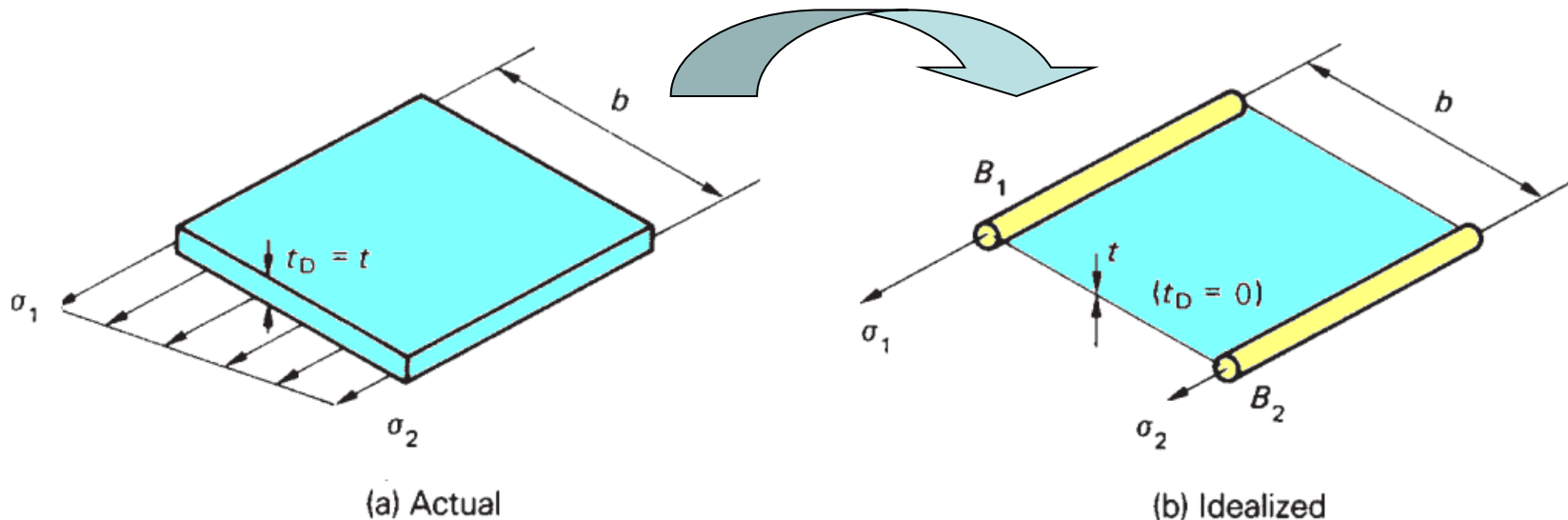


Fig. 20.3 Idealization of a panel.

Idealization of a panel

Taking moments about the right-hand edge of each panel

$$\sigma_2 t_D \frac{b^2}{2} + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) t_D b \frac{2}{3} b = \sigma_1 B_1 b$$
$$B_1 = \frac{t_D b}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \quad (20.1)$$

Similarly

$$B_2 = \frac{t_D b}{6} \left(2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \quad (20.2)$$

In Eqs (20.1) and (20.2) the ratio of σ_1 to σ_2 , if not known, may frequently be assumed.

For axial load only $\sigma_1/\sigma_2 = 1$ and $B_1 = B_2 = t_D b/2$;
for a pure bending moment $\sigma_1/\sigma_2 = -1$ and $B_1 = B_2 = t_D b/6$.

Idealization of a panel

Example 20.1

Part of a wing section is in the form of the two-cell box shown in Fig. 20.4(a) in which the vertical spars are connected to the wing skin through angle sections all having a cross-sectional area of 300mm^2 . Idealize the section into an arrangement of direct stress carrying booms and shear stress only carrying panels suitable for resisting bending moments in a vertical plane. Position the booms at the spar/skin junctions.

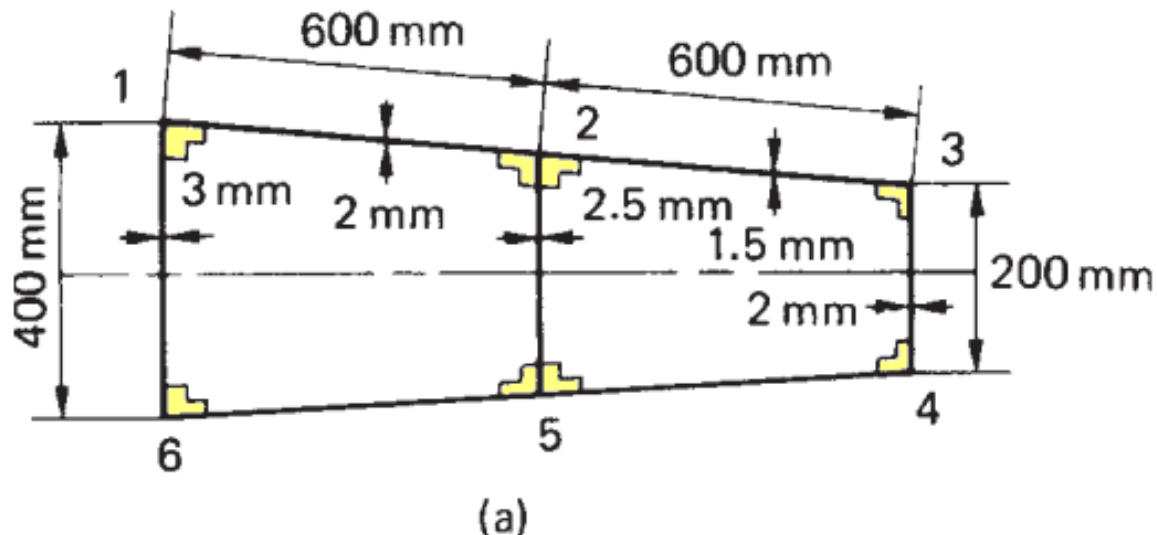


Fig. 20.4 Idealization of a wing section.

Idealization of a panel

Solution

The idealized section is shown in Fig. 20.4(b) in which, from symmetry, $B_1 = B_6$, $B_2 = B_5$, $B_3 = B_4$. Since the section is required to resist bending moments in a vertical plane, the direct stress at any point in the actual wing section is directly proportional to its distance from the horizontal axis of symmetry. Further, the distribution of direct stress in all the panels will be linear so that either of Eqs (20.1) or (20.2) may be used.

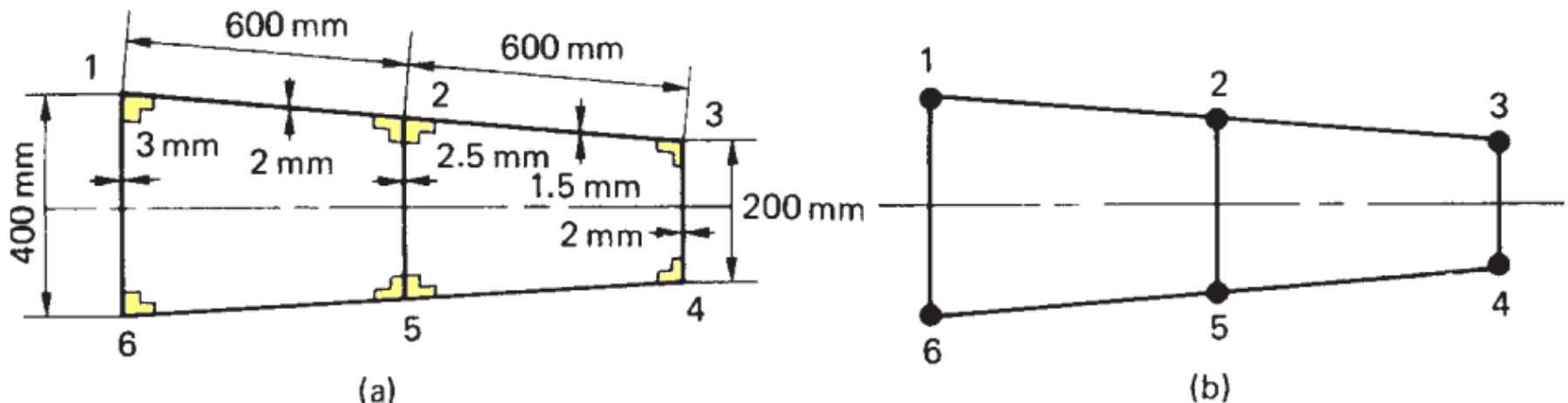


Fig. 20.4 Idealization of a wing section.

Idealization of a panel

$$B_1 = 300 + \frac{3.0 \times 400}{6} \left(2 + \frac{\sigma_6}{\sigma_1} \right) + \frac{2.0 \times 600}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)$$

$$B_1 = 300 + \frac{3.0 \times 400}{6} (2 - 1) + \frac{2.0 \times 600}{6} \left(2 + \frac{150}{200} \right)$$

$$B_1 (= B_6) = 1050 \text{ mm}^2$$

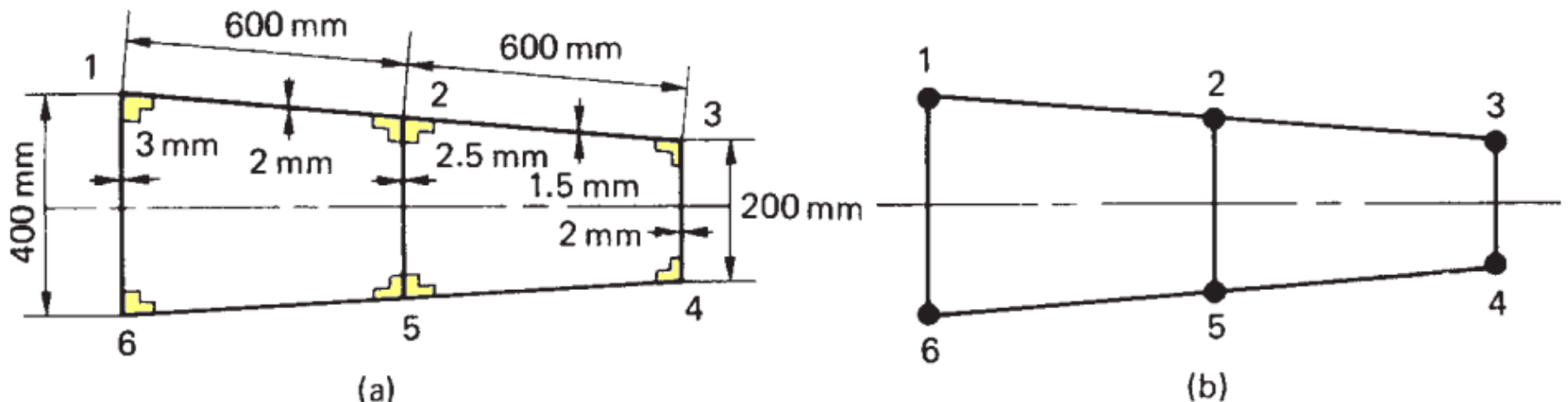


Fig. 20.4 Idealization of a wing section.

Idealization of a panel

$$B_2 = 2 \times 300 + \frac{2.0 \times 600}{6} \left(2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) + \frac{2.5 \times 300}{6} \left(2 + \frac{\sigma_5}{\sigma_2} \right) + \frac{1.5 \times 600}{6} \left(2 + \frac{\sigma_3}{\sigma_2} \right)$$

$$B_2 = 2 \times 300 + \frac{2.0 \times 600}{6} \left(2 + \frac{200}{150} \right) + \frac{2.5 \times 300}{6} (2 - 1) + \frac{1.5 \times 600}{6} \left(2 + \frac{100}{150} \right)$$

$$B_2 (= B_5) = 1791.7 \text{ mm}^2$$

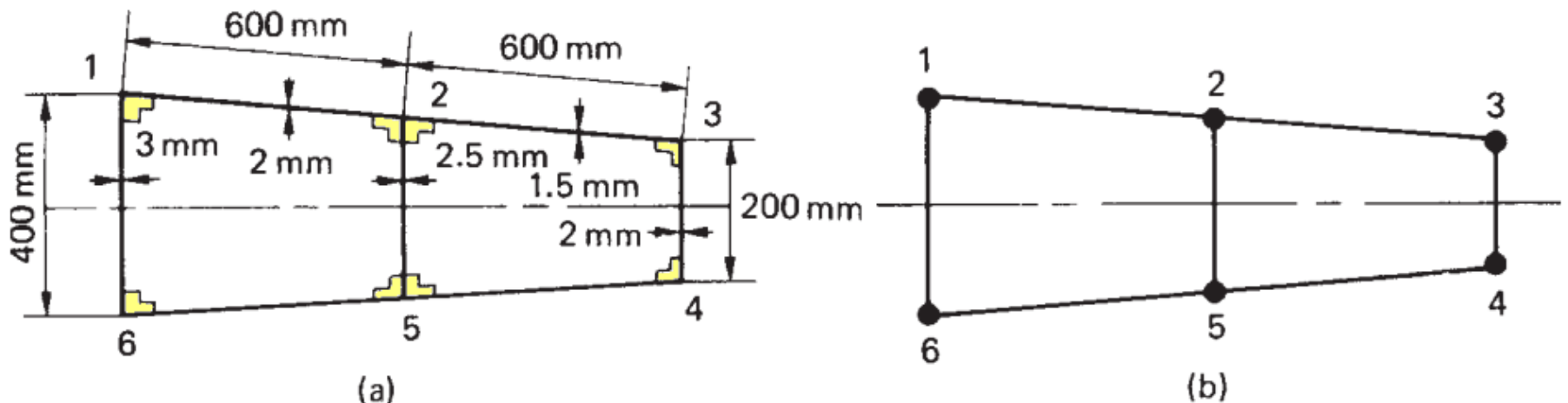


Fig. 20.4 Idealization of a wing section.

Idealization of a panel

$$B_3 = 300 + \frac{1.5 \times 600}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \right) + \frac{2.0 \times 200}{6} \left(2 + \frac{\sigma_4}{\sigma_3} \right)$$

$$B_3 = 300 + \frac{1.5 \times 600}{6} \left(2 + \frac{150}{100} \right) + \frac{2.0 \times 200}{6} (2 - 1)$$

$$B_3 (= B_4) = 891.7 \text{ mm}^2$$

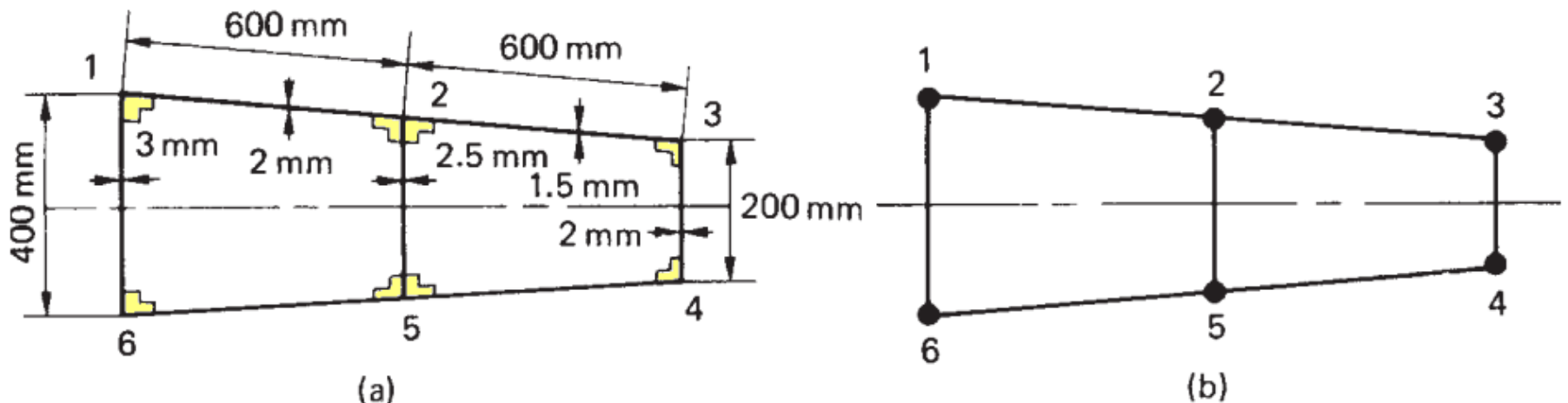


Fig. 20.4 Idealization of a wing section.

Idealization of a panel

Generally, in any idealization, different loading conditions require different idealizations of the same structure.

In Example 20.1, the loading is applied in a vertical plane. If, however, the loading had been applied in a horizontal plane, the assumed stress distribution in the panels of the section would have been different, resulting in different values of boom area.

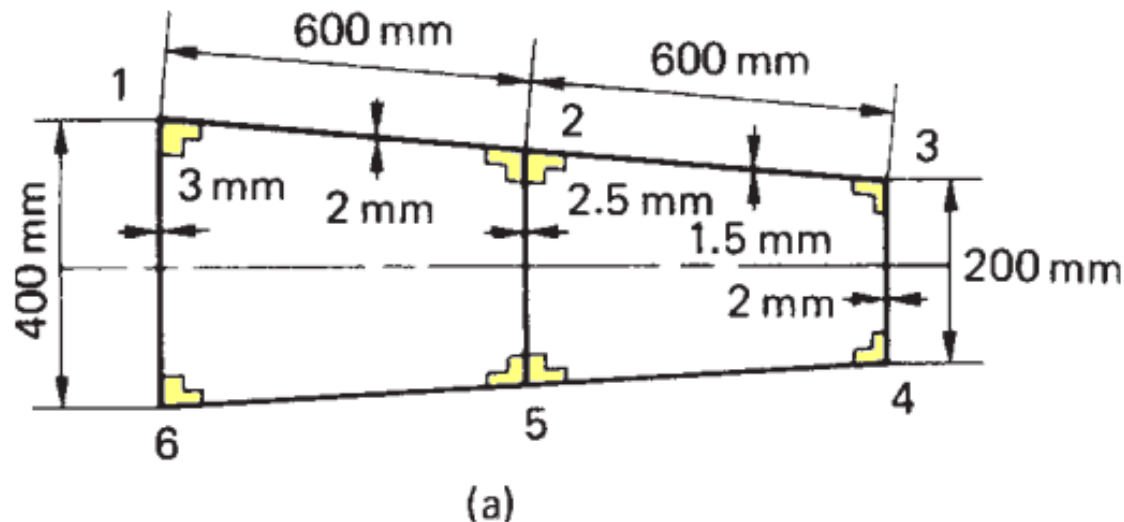


Fig. 20.4 Idealization of a wing section.