航空学院 冯铮浩 2017300281

No.

Date

《自动控制原理》 第3章 线性系统的时域分析与校正（课后习题 $P_{100}\sim 107$ (new)）

3.1 已知系统脉冲响应

$$k(t) = 0.0125 e^{-1.25t}$$

试求系统闭环传递函数 $\Phi(s)$。

解3.1：由一阶系统在脉冲输入下的响应特性

即 $r(t)=\delta(t)$，$R(s)=1$，$C(s)=\Phi(s)R(s)=\Phi(s)$

又 $c(t)=k(t)=0.0125e^{-1.25t}=\frac{1}{100}\times\left(\frac{1}{0.8}\right)e^{-\frac{1}{0.8}t}$

故 $\Phi(s)=C(s)=\mathcal{L}[c(t)]=\mathcal{L}[k(t)]$

$$\therefore \Phi(s)=\frac{1}{100(0.8s+1)}=\frac{1}{80s+100}$$

3.3 一阶系统结构图如图3-46所示。要求系统闭环增益 $K_\Phi=2$，调节时间 $t_s\le 0.4s$，试确定参数 K_1、K_2 的值。

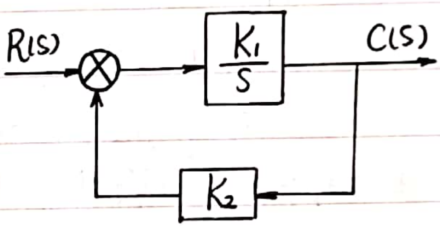


图3-46 系统结构图

解3.3：由结构图可知：

系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{\frac{K_1}{s}}{1+\frac{K_1}{s}\cdot K_2}=\frac{K_1}{s+K_1K_2}=\frac{\frac{1}{K_2}}{\frac{1}{K_1K_2}s+1}=\frac{K_\Phi}{T_\Phi s+1}$$

由题意要求可得：

$$\begin{cases} K_\Phi=\frac{1}{K_2}=2 \\ t_s=3T_\Phi=\frac{3}{K_1K_2}\le 0.4 \end{cases}$$

$\therefore$ 解得 $\begin{cases} K_1\ge 15 \\ K_2=0.5 \end{cases}$

(新版)

3.7 设角速度指示随动系统结构图如图3-49所示，其中 $T=0.1$。若要求系统单位阶跃响应无超调，且调节时间尽可能短，问开环增益 K 应取何值，调节时间 t_s 是多少？

解3.7：根据题意，考虑系统单位阶跃响应无超调，且调节时间尽可能短，应取阻尼比 $\zeta=1$；

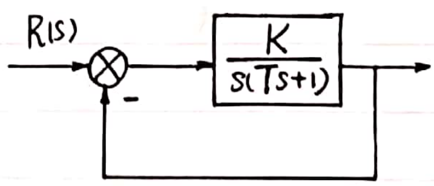


图3-49 系统结构图

(首"1"型)

由系统闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{\frac{K}{s(Ts+1)}}{1+\frac{K}{s(Ts+1)}}=\frac{K}{Ts^2+s+K}=\frac{\frac{K}{T}}{s^2+\frac{1}{T}s+\frac{K}{T}}$$

故有 $\begin{cases} \omega_n^2=\frac{K}{T}=\frac{K}{0.1} & ① \\ 2\zeta\omega_n=2\omega_n=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.1} & ② \end{cases}$

解得 $\omega_n=5Hz$，$K=2.5$

故特征方程为：$(s+5)^2=(s+\frac{1}{T_1})^2 \Rightarrow T_1=0.2$

查图3-7可得调节时间 $t_s=4.75T_1=0.95s$

3.8 给定典型二阶系统的设计指标：①超调量 $\sigma\% \leq 5\%$，②调节时间 $t_s < 3S$，③峰值时间 $t_p < 1S$，试确定系统极点配置的区域，以获得预期的响应特性。

解3.8：A. 为使该典型二阶系统获得预期的响应特性，须满足：

① 超调量：

$$\sigma\% = \frac{h(t_p)-h(\infty)}{h(\infty)} \times 100\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% \leq 5\% \quad (0<\xi<1)$$

解得 $$0<\xi\leq 0.6901 \qquad (1)$$

② 调节时间：

$$t_s \approx \frac{3.5}{\xi\omega_n} < 3S \quad 即\ \xi\omega_n > \frac{7}{6} \qquad (2)$$

其中 $$0.3<\xi<0.8 \qquad (3)$$

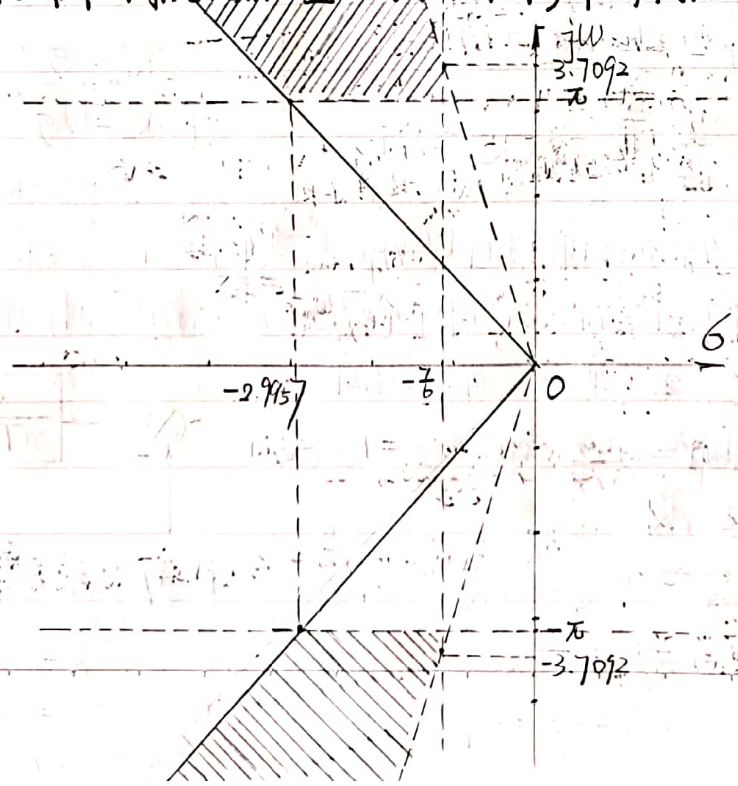
③ 峰值时间：

$$t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n} < 1S \quad 即\ \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n = \omega_d > \pi \qquad (4)$$

由限制条件(1)~(4)可得，若系统极点表示为 $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d$，则须满足

$$\begin{cases} 横坐标： & \sigma = -\xi\omega_n < -\frac{7}{6} \\ 纵坐标： & \omega_d = \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n > \pi \\ 阻尼角\beta： & \cos\beta = \xi \in (0.3,\ 0.6901] \Rightarrow \beta \in [46.36°,\ 72.54°) \end{cases}$$

B. 绘制符合条件的系统极点配置区域如下图阴影部分所示：



3.10 机器人控制系统结构图如图3-51所示。试确定参数K_1、K_2值，使系统阶跃响应的峰值时间$t_p=0.5s$，超调量$\sigma\%=2\%$。

解3.10：由控制系统结构图可得，

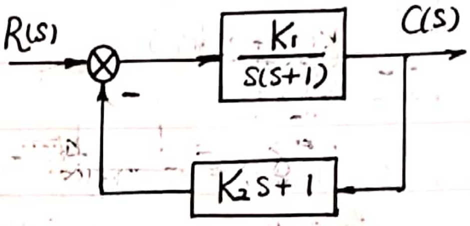


图3-51 机器人位置控制系统

系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{\frac{K_1}{s(s+1)}}{1+(K_2s+1)\frac{K_1}{s(s+1)}}$$

$$=\frac{K_1}{s^2+(K_1K_2+1)s+K_1}\Rightarrow\begin{cases}\omega_n^2=K_1\\2\xi\omega_n=K_1K_2+1\end{cases}$$

① 由系统阶跃响应的峰值时间，

$$t_p=\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n}=0.5s\Rightarrow(1-\xi^2)\omega_n^2=4\pi^2 \quad (1)$$

② 响应的超调量

$$\sigma\%=e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times100\%=2\%\Rightarrow\xi=0.7797 \quad (2)$$

结合(1)式可解得，$\omega_n=10.0346$

∴ 故有参数：$\begin{cases}K_1=\omega_n^2=100.6941\\K_2=\frac{2\xi\omega_n-1}{K_1}=0.1455\end{cases}$

3.11 某典型二阶系统的单位阶跃响应如图3-52所示。试确定系统的闭环传递函数。

解3.11：设该典型二阶系统的闭环传递函数为

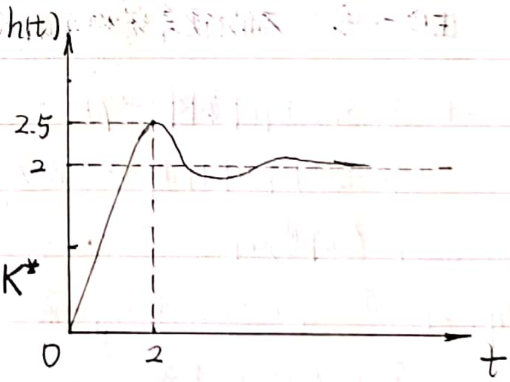


图3-52 单位阶跃响应

$$\Phi(s)=\frac{K^*\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2}$$

由单位阶跃响应曲线有

$$h(\infty)=2=\lim_{s\to0}s\Phi(s)R(s)=\lim_{s\to0}\frac{K^*\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2}=K^*$$

$$\begin{cases}t_p=\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n}=2\\\sigma\%=\frac{2.5-2}{2}\times100\%=25\%=e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times100\%\end{cases}$$

联立可求解得，$\begin{cases}\xi=0.4037\\\omega_n=1.7169\end{cases}$

∴ 故系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{2\times1.7169^2}{s^2+2\times0.4037\times1.7169s+1.7169^2}=\frac{5.8955}{s^2+1.3862s+2.9477}$$

3.16 图3-55是某垂直起降飞机的高度控制系统结构图，试确定使系统稳定的K值范围。

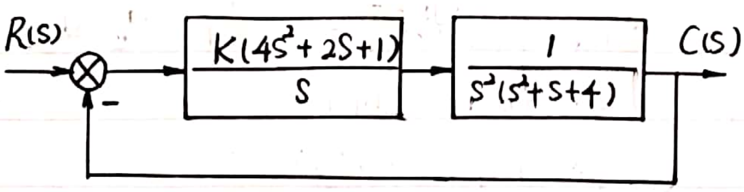


图3-55 垂直起降飞机高度控制系统结构图

解3.16. 系统开环传递函数为

$$G(S) = \frac{K(4S^2+2S+1)}{S^3(S^2+S+4)}$$

故闭环系统特征方程为：

$$D(S) = S^3(S^2+S+4) + K(4S^2+2S+1)$$
$$= S^5 + S^4 + 4S^3 + 4KS^2 + 2KS + K = 0$$

列劳斯表

S^5	1	4	2K
S^4	1	4K	K
S^3	$4-4K$	K	0
S^2	$\frac{-16K^2+15K}{4-4K}$	K	0
S^1	$\frac{-32K^3+47K^2-16K}{-16K^2+15K}$	0	
S^0	K		

① $\Rightarrow 4-4K>0 \Rightarrow K<1$

② $\Rightarrow -16K^2+15K>0$

$\Rightarrow 0<K<\frac{15}{16}=0.9375$

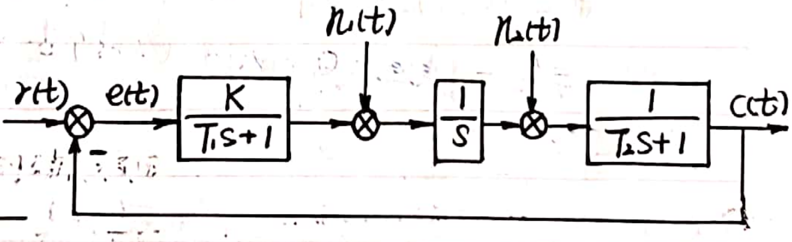
③ $\Rightarrow -32K^2+47K-16>0$

$\Rightarrow 0.5361<K<0.9326$

④ $K>0$

∴由①~④，确定使系统稳定的K值范围为 (0.5361, 0.9326).

3.24 系统结构图如图3-59所示。已知 $r(t)=n_1(t)=n_2(t)=1(t)$，试分别计算 $r(t)$, $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 作用时的稳态误差，并说明积分环节设置位置对减小输入和干扰作用下的稳态误差的影响。



解3.24. ① 当 $r(t)$ 作用时，

有误差传递函数

$$\Phi_e(s) = \frac{E(S)}{R(S)} = \frac{1}{1+\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}}$$
$$= \frac{s(T_1s+1)(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K}$$

∴则稳态误差为 $e_{ssr} = \lim\limits_{s\to 0} s\,\Phi_e(s)R(s) = \lim\limits_{s\to 0} s\cdot\frac{s(T_1s+1)(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K}\cdot\frac{1}{s} = 0$

No.

Date

② 当干扰 $n_1(t)$ 单独作用时，有误差传递函数

$$\Phi_{en_1}(s)=\frac{E(s)}{N_1(s)}=\frac{-\frac{1}{s(T_2s+1)}}{1+\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}}=\frac{-(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K}$$

∴ 则干扰 $n_1(t)$ 作用下的稳态误差为：

$$e_{ssn_1}=\lim_{s\to0}s\,\Phi_{en_1}(s)N_1(s)=\lim_{s\to0}s\cdot\frac{-(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K}\cdot\frac{1}{s}=-\frac{1}{K}$$

③ 当干扰 $n_2(t)$ 单独作用时，有误差传递函数

$$\Phi_{en_2}(s)=\frac{E(s)}{N_2(s)}=\frac{-\frac{1}{T_2s+1}}{1+\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}}=\frac{-s(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K}$$

∴ 则干扰 $n_2(t)$ 作用下的稳态误差为：

$$e_{ssn_2}=\lim_{s\to0}s\,\Phi_{en_2}(s)N_2(s)=\lim_{s\to0}s\cdot\frac{-s(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K}\cdot\frac{1}{s}=0$$

④ 讨论：

1) 积分环节分布在回路的任何位置，对于减小或消除 $r(t)$ 作用下的稳态误差均有效，

2) 只有分布在前向通道主反馈口到干扰作用点之间的积分环节才对减小或消除干扰作用下的稳态误差有效；

3) 设计系统时应尽量在前向通道的主反馈口到干扰作用点之间提高增益、设置积分环节，这样可以同时减小或消除控制输入和干扰作用下产生的稳态误差。

3.28 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{25}{s(s+5)}$$

(1) 求各静态误差系数和 $r(t)=1+2t+0.5t^2$ 时的稳态误差 e_{ss}；

(2) 问当输入作用10s时的动态误差是多少？

解3.28：① 控制输入 $r(t)$ 作用下的误差传递函数为

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G(s)H(s)}=\frac{1}{1+\frac{25}{s(s+5)}}=\frac{s(s+5)}{s^2+5s+25}$$

各静态误差系数为：

1) 静态位置误差系数：$K_p=\lim_{s\to0}G(s)H(s)=\lim_{s\to0}\frac{25}{s(s+5)}=\infty$；

No.

Date

2) 静态速度误差系数：$K_v = \lim\limits_{s\to 0} sG(s)H(s) = \lim\limits_{s\to 0} s\cdot\frac{25}{s(s+5)} = 5$；

3) 静态加速度误差系数：$K_a = \lim\limits_{s\to 0} s^2G(s)H(s) = \lim\limits_{s\to 0} s^2\cdot\frac{25}{s(s+5)} = 0$.

② 在输入 $r(t) = 1+2t+0.5t^2$ 时，

$$R(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^3}$$

∴ 则在此输入下的稳态误差为：

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+H(s)G(s)}R(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\frac{25}{s(s+5)}}\left(\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s^3}\right)$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{(s^2+5s)(s^2+2s+1)}{s^2(s^2+5s+25)} = \lim_{s\to 0}\frac{s^3+7s^2+11s+5}{s^3+5s^2+25s} = \infty$$

③ 由系统误差传递函数为

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(s+5)}{s^2+5s+25} = C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + \cdots$$

有 $s^2+5s = [C_0+C_1 s+C_2 s^2+\cdots](s^2+5s+25)$

$$= 25C_0 + (5C_0+25C_1)s + (C_0+5C_1+25C_2)s^2 + \cdots$$

比较系数可得，

$$\begin{cases} 25C_0 = 0 \\ 5C_0+25C_1 = 5 \\ C_0+5C_1+25C_2 = 1 \\ \vdots \end{cases}$$

联立求解得：

$$\begin{cases} C_0 = 0 \\ C_1 = \frac{1}{5} \\ C_2 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

由输入表达式 $r(t) = 1+2t+0.5t^2$ 时，$r'(t) = 2+t$，$r''(t) = 1$，$r'''(t) = 0, \cdots$

代入表达式 $e_s(t) = C_0 r(t) + C_1 r'(t) + C_2 r''(t) + \cdots = \sum\limits_{i=0}^{\infty} C_i r^{(i)}(t)$

可得，

$$e_s(t) = 0\times(1+2t+0.5t^2) + \frac{1}{5}(2+t) + 0\times 1 + 0$$

$$= \frac{1}{5}(2+t)$$

∴ 则当输入作用 $t=10s$ 时，系统的动态误差为 $e_s(t) = \frac{12}{5} = 2.4s$

3.33 设复合校正控制系统结构图如图3-66所示，其中N(s)为可量测扰动。若要求系统输出C(s)完全不受N(s)的影响，且跟踪阶跃指令的稳态误差为零，试确定前馈补偿装置 $G_{c1}(s)$ 和串联校正装置 $G_{c2}(s)$。

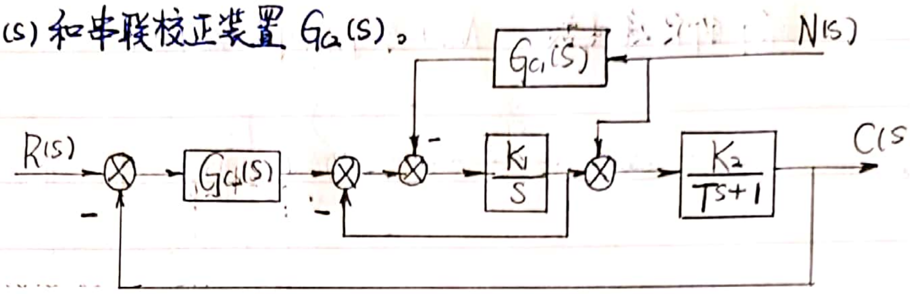


图3-66 复合控制系统结构图

解3.33：由复合校正控制系统结构图：

① 当n(t)作用时，令n(t)作用下的系统误差函数

$$\Phi_{en}(s)=\frac{E(s)}{N(s)}=\frac{-\frac{K_2}{Ts+1}+G_{c1}(s)\cdot\left(\frac{\frac{K_1}{s}}{1+\frac{K_1}{s}}\right)\cdot\left(\frac{K_2}{Ts+1}\right)}{1+G_{c2}(s)\cdot\left(\frac{\frac{K_1}{s}}{1+\frac{K_1}{s}}\right)\cdot\left(\frac{K_2}{Ts+1}\right)}$$

$$=\frac{-\frac{K_2}{Ts+1}\left(1+\frac{K_1}{s}\right)+G_{c1}(s)\cdot\frac{K_1K_2}{s(Ts+1)}}{1+\frac{K_1}{s}+G_{c2}(s)\cdot\frac{K_1K_2}{s(Ts+1)}}$$

$$=\frac{-K_2(s+K_1)+K_1K_2\cdot G_{c1}(s)}{s(Ts+1)+K_1(Ts+1)+K_1K_2\cdot G_{c2}(s)}$$

∴故有

$$e_{ssn}=\lim_{s\to0}s\,\Phi_{en}(s)N(s)=\lim_{s\to0}\frac{\{K_1K_2[G_{c1}(s)-1]-sK_2\}\,sN(s)}{(s+K_1)(Ts+1)+K_1K_2\cdot G_{c2}(s)}\equiv0$$

则当 $G_{c1}(s)=\frac{s}{K_1}+1$，可使 $e_{ssn}\equiv0$，即系统输出C(s)完全不受N(s)的影响。

② 当 $r(t)=1(t)$ 输入作用时，令r(t)作用下的系统误差函数

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_{c2}(s)\cdot\left(\frac{\frac{K_1}{s}}{1+\frac{K_1}{s}}\right)\left(\frac{K_2}{Ts+1}\right)}=\frac{1+\frac{K_1}{s}}{1+\frac{K_1}{s}+G_{c2}(s)\cdot\frac{K_1K_2}{s(Ts+1)}}$$

$$=\frac{(s+K_1)(Ts+1)}{(s+K_1)(Ts+1)+K_1K_2\cdot G_{c2}(s)}$$

∴故有

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}s\,\Phi_e(s)R(s)=\lim_{s\to0}\frac{(s+K_1)(Ts+1)}{(s+K_1)(Ts+1)+K_1K_2\cdot G_{c2}(s)}=\frac{K_1}{K_1+K_1K_2\cdot G_{c2}(s)}=0$$

则当 $G_{c2}(s)=\frac{A}{s}$（A为增益）积分环节时，可使系统跟踪阶跃指令的稳态误差为零，一般可取 $G_{c2}(s)=\frac{1}{s}$ 即可。

No.

Date

3.36 设复合控制系统结构图如图3-69所示。图中$G_n(s)$为前馈补偿装置的传递函数，$G_c(s)=K_t's$为测速发电机及分压电位器的传递函数，$G_1(s)$和$G_2(s)$为前向通路环节的传递函数，$N(s)$为可量测扰动。

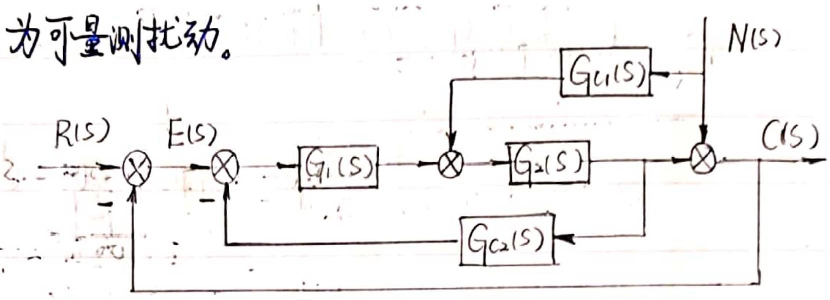


图3-69 复合控制系统结构图

如果$G_1(S)=K_1$，$G_2(S)=\frac{1}{S^2}$，试确定$G_n(S)$、$G_c(S)$和K_1，使系统输出量完全不受扰动的影响，且单位阶跃响应的超调量$\sigma\%=25\%$，峰值时间$t_p=2S$。

解3.36：变换复合控制系统结构图如右图3-69(a)所示。

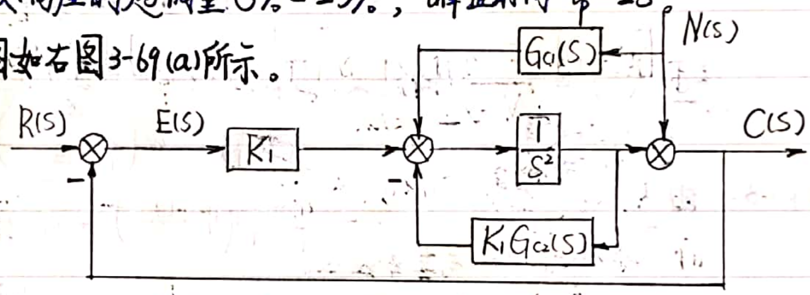


图3-69(a)

①满足系统输出量完全不受扰动的影响.（条件1）

当$n(t)$单独作用下，

系统的误差函数为

$$\Phi_{en}(S)=\frac{E(S)}{N(S)}=\frac{-G_n(S)\cdot\left[\frac{\frac{1}{S^2}}{1+\frac{1}{S^2}\cdot K_1G_c(S)}\right]-1}{1+K_1\cdot\left[\frac{\frac{1}{S^2}}{1+\frac{1}{S^2}\cdot K_1G_c(S)}\right]}=\frac{-S^2-G_n(S)-K_1G_c(S)}{S^2+K_1G_c(S)+K_1}$$

∴故有 $$e_{ssn}=\lim_{s\to0}s\Phi_{en}(S)N(S)=\lim_{s\to0}\frac{-[S^2+G_n(S)+K_1G_c(S)]\cdot sN(S)}{S^2+K_1G_c(S)+K_1}\equiv0 \quad 恒成立$$

需满足 $G_n(S)+K_1G_c(S)=-S^2$ 成立　　(1)

② 满足复合控制系统单位阶跃响应的超调量$\sigma\%=25\%$，峰值时间$t_p=2S$；

由系统的闭环传递函数为

$$\Phi(S)=\frac{K_1\cdot\frac{\frac{1}{S^2}}{1+\frac{1}{S^2}K_1G_c(S)}}{1+K_1\cdot\frac{\frac{1}{S^2}}{1+\frac{1}{S^2}K_1G_c(S)}}=\frac{K_1}{S^2+K_1K_t'S+K_1}$$

又由 $$\begin{cases}\sigma\%=e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times100\%=25\%\\ t_p=\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n}=2s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\xi=0.4037\\ \omega_n=1.7169\end{cases}\Rightarrow$$ 故系统闭环传递函数标准型为 $\Phi(S)=\frac{\omega_n^2}{S^2+2\xi\omega_nS+\omega_n^2}$

比较闭环传递函数可得，$K_1=\omega_n^2=2.9479$，$K_t'=0.4703$，$G_c(S)=0.4703S$；(2)

联立(1)(2)可解得. $G_n(S)=-S^2-1.3863S$

Campus ∴ $G_n(S)=-S^2-1.3863S$；$G_c(S)=0.4703S$；$K_1=\omega_n^2=2.9479$