

文章编号:1004-3918(2019)06-0908-06

# 直线一级倒立摆的PID控制方法研究

姜海燕

(湖南铁道职业技术学院 轨道交通电务技术学院, 湖南 株洲 412001)

**摘要:** 直线一级倒立摆控制系统是控制理论研究的典型实验平台之一,它具有非线性、不确定性和开环不稳定性等特点。首先对直线一级倒立摆系统进行分析,建立其数学模型;其次由系统的传递函数设计出该系统的PID控制器;然后通过MATLAB仿真软件中的M模块建立其该系统的PID控制器模型;最后通过调节合适的PID参数来控制直线一级倒立摆系统的平衡性,并通过其响应曲线来验证所提出的算法和模型的正确性。

**关键词:** 倒立摆; PID控制器; MATLAB; 数学模型

**中图分类号:** TH 137; TP 206+.3      **文献标识码:** A

## PID Control Method of Straight Line Inverted Pendulum

JIANG Haiyan

(College of Rail Transit Electric Technology, Hunan Railway Professional Technology College, Zhuzhou 412001, Hunan China)

**Abstract:** The linear inverted pendulum control system is one of the typical experimental platforms for the control theory research. It is characterized by nonlinearity, uncertainty and open-loop instability. In this paper, the linear inverted pendulum system is analyzed first, and the mathematical model is established. The PID controller is designed by the transfer function of the system, and the PID controller model of the system is established by the M module in the MATLAB simulation software. Finally, the balance of the linear inverted pendulum system is controlled by adjusting the appropriate PID parameters, and the correctness of the proposed algorithm and model is verified by its response curves.

**Key words:** inverted pendulum; PID controller; MATLAB; mathematical model

倒立摆系统是一种典型的非线性、强耦合、多变量和自然不稳定的系统,也是高校的典型试验设备之一。在整个的控制过程中,倒立摆系统能有效地反映某些关键问题,如:系统的镇定性、鲁棒性、随动性和跟踪等关键问题。许多专家和学者利用直线一级倒立摆系统来检验各种控制理论与算法的正确性。因此,直线一级倒立摆系统广泛应用于控制理论科学研究中<sup>[1-9]</sup>。

倒立摆的控制策略与杂技运动员顶杆平衡表演的技巧极其相似,极富趣味性。因此,很多抽象的控制理论如:系统的稳定性、可控性和系统的抗干扰能力等等,都能通过实验室的倒立摆装置直观地模拟出来。所以,一直以来该系统很受自动控制学者的青睐。然而,PID控制器具有原理简单、使用方便、适应性强、鲁棒性好和可靠性高等优点,恰好解决了直线一级倒立摆的一系列特性。而且PID控制器算法也广泛应用于各种控制和机械领域<sup>[10-15]</sup>,文献[16]利用灰预测模型PID复合控制器来控制系统负载模拟器加载系统的力矩跟踪精度,提高了该系统的抗干扰能力。文献[17]提出了模糊PID控制策略的试验台加载控制方法,提高了试验台的输出加载力的响应速度。文献[18]将滑膜变结构控制器应用于直线一级倒立摆系统中,有效地抑制了直线一级倒立摆控制系统的参数震动引起的扰动和外加干扰,成功地控制了该倒立摆系统。文献[19]

**收稿日期:** 2019-03-04

**基金项目:** 2016年湖南省教育厅科学研究项目(16B176);2018年湖南省教育厅科学研究项目(18C1527)

**作者简介:** 姜海燕(1984-),女,讲师,硕士,主要从事自动化仪表、信号处理与模式识别方面的研究

将改进型自抗扰控制的新型控制策略应用于倒立摆系统中, 实验仿真结果表明, 该方法有效地提高了倒立摆系统的鲁棒性. 文献[20]求取中直线一级倒立摆系统状态空间函数, 利用状态空间函数在 MATLAB 中建立其控制模型, 实验仿真结果表明该方法具有一定准确性.

综上所述, 直线一级倒立摆系统是一种典型的实验仿真模型, 因其具有非线性、强耦合、多变量和开环不稳定等特点, 与火箭飞行器控制、机器人行走控制等系统的控制原理相类似. 因此, 研究人员首先将不成熟的控制算法应用于直线一级倒立摆系统中, 验证其算法的正确性, 这样既可以避免不必要的损失, 还可以将算法继续改进, 提高算法的精度和鲁棒性. 而固高科技有限公司研制了一系列的倒立摆系统, 包括直线运动型、圆周运动型和复合倒立摆. 固高公司研制的产品具有开放性、模块化、简易安全、先进性和实验软件多样化等特点, 为研究人员提供了一个很好的实验平台. 因此, 直线一级倒立摆系统是一个理想的实验模型, 可以用来检验算法和模型的正确性, 受到广大学者的青睐.

本文通过分析直线一级倒立摆系统的数学模型和PID算法, 在 MATLAB 仿真软件的 M 文件中对直线一级倒立摆系统建立PID控制器模型, 并在模型中选择最优的比例、微分和积分参数对直线一级倒立摆系统进行最优控制. 实验仿真结果表明该控制方法能较好地控制倒立摆系统.

## 1 直线一级倒立摆系统及数学建模

### 1.1 直线一级倒立摆系统简介

本论文中使用的直线一级倒立摆来源于深圳固高公司. 摆杆、小车、皮带、导轨、安全限位传感器、交流伺服电机、交流伺服驱动器、GT400运动控制卡、绝对值编码器、光电码盘、实验工作台、计算机等组成了整个直线一级倒立摆系统. 直线倒立摆系统是高等院校实现自动化控制的一个重要的仿真系统<sup>[21]</sup>. 其系统的硬件结构图如图1所示.

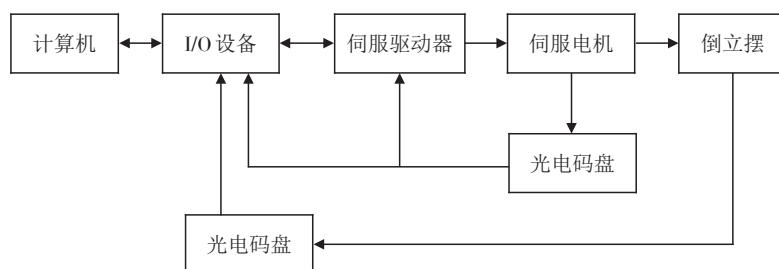


图1 直线单级倒立摆控制系统硬件结构

Fig.1 Hardware structure of linear single-stage inverted pendulum control system

倒立摆的摆杆安装在小车上, 摆杆只有一个支点, 可以在竖直平面内做 $360^\circ$ 的自由运动. 而小车由伺服电机经皮带牵引, 在有限长度的导轨上做直线运动. 在建立模型时, 默认为小车的初始位置为导轨的原点. 小车在导轨上的速度是经过电动机尾部的光电编码器测量出小车的位置并经差分的方法计算出的. 同时编码器还能测量摆杆的角度, 通过差分的方法计算出摆杆的角速度. 检测到的小车速度和摆杆角速度通过运动控制卡反馈给计算机, 通过计算后再发送给交流伺服驱动器, 从而控制电动机的旋转方向和速度. 最终经皮带控制小车在导轨上的直线运动, 来实现对摆杆的稳定控制.

### 1.2 直线一级倒立摆的数学模型

本文利用牛顿-欧拉方法建立直线型一级倒立摆系统的数学模型. 为了便于分析, 将直线一级倒立摆系统简化为一个小车上拖着一个倒摆的简易模型如图2所示(其中:  $F$  为作用于小车的力;  $M$  为小车质量;  $m$  为摆杆质量;  $l$  为摆杆中心到小车的

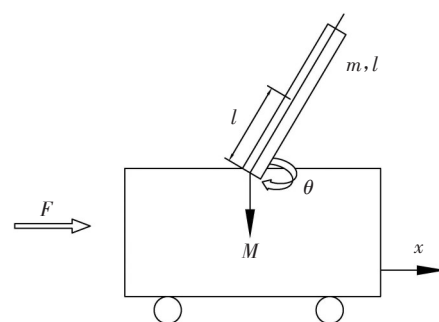


图2 倒立摆的简易模型

Fig.2 Simple model of the inverted pendulum

长度; $I$ 为摆杆惯性; $\theta$ 为摆杆与垂直方向下方向的夹角; $x$ 为小车位移)。

在设计PID控制器之前首先应推导出该系统的传递函数,通过对直线一级倒立摆系统中的小车和摆杆的受力分析,即可得到系统的微分方程,该系统的小车和摆杆的受力分析图如图3所示。其相关参数为: $N$ 为小车与摆杆相互作用力的水平方向的分量; $P$ 为小车与摆杆相互作用力的垂直方向的分量; $b$ 为小车的阻尼速度; $\dot{x}$ 为小车速度; $\ddot{x}$ 为小车的加速度; $mg$ 为摆杆的重力; $\ddot{\theta}$ 为摆杆与垂直方向的旋转加速度。

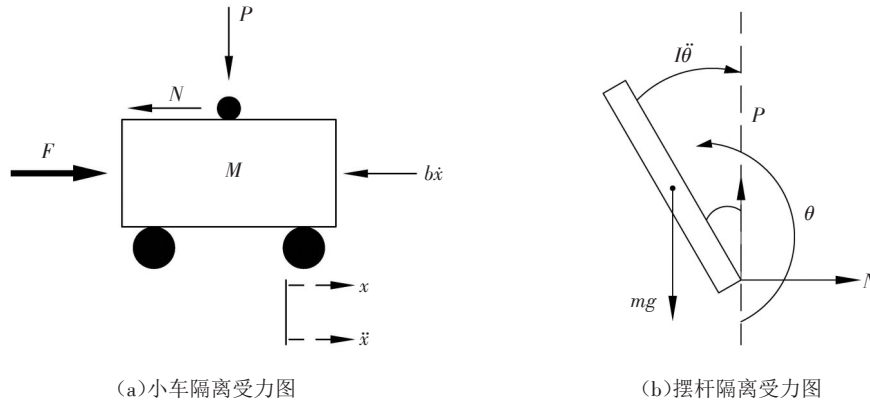


图3 直线一级倒立摆小车和摆杆的受力分析图

Fig.3 Force analysis of a straight-line inverted pendulum trolley and pendulum

受力分析过程在另外的文献中都有详细的介绍,本文在此不再讨论。为了提高分析的可靠性,本文对该系统做了合理的假设。由于摆杆是在竖直向上的平衡位置,若将其位置上的方程线性化,则有 $\theta = \pi$ 。并且假设该系统在平衡位置很小的误差范围内保持稳定,即 $\phi \leq 20^\circ$  ( $\phi$ 为摆杆与竖直平衡位置之间的角度)。则可得 $\theta = \pi + \phi$ ,由于 $\phi$ 很少,故 $\cos \theta \approx -1$ ,  $\sin \theta = \phi$ ,  $\dot{\theta}^2 = \dot{\phi}^2 \approx 0$ 。并以 $u$ 代替输入 $F$ 。最终得到直线一级倒立摆的方程为:

$$\begin{cases} (I + ml^2)\ddot{\phi} - mgl\phi = ml\ddot{x}, \\ (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\phi} = u. \end{cases} \quad (1)$$

对方程组(1)进行拉普拉斯变换之后得:

$$\begin{cases} (I + ml^2)\Phi(s)s^2 - mgl\Phi(s) = mlX(s)s^2, \\ (M + m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\Phi(s)s^2 = U(s). \end{cases} \quad (2)$$

假设初始条件为0,消除上述方程组中的 $X(s)$ ,则得到小车对摆杆角度的传递函数为:

$$G_1(s) = \frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s}{s^4 + \frac{b(I + ml^2)}{q}s^3 - \frac{(m + M)mgl}{q}s^2 - \frac{bmgl}{q}s}. \quad (3)$$

消除方程组(2)中的 $\Phi(s)$ ,则得到小车位移作为输出的传递函数为:

$$G_2(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{\frac{(I + ml^2)}{q}s^2 - \frac{mgl}{q}}{s^4 + \frac{b(I + ml^2)}{q}s^3 - \frac{(m + M)mgl}{q}s^2 - \frac{bmgl}{q}s}. \quad (4)$$

其中:  $q = [(m + M)(I + ml^2) - (ml)^2]$ 。

## 2 球杆系统的PID控制器设计

具有线性控制器特点的PID控制器由偏差的比例、积分和微分通过线性组合的控制器。PID的控制器的传递函数为:

$$K_D(s) = T_D s + K_P + \frac{T_I}{s} = \frac{T_D s^2 + K_P s + T_I}{s}. \quad (5)$$

其中:  $K_P$  为比例系数;  $T_I$  为积分时间常数;  $T_D$  为微分时间常数。

以倒立摆系统的摆杆角度(平衡位置为垂直向上)为输出量,得到该系统的PID控制原理框图如图4所示。

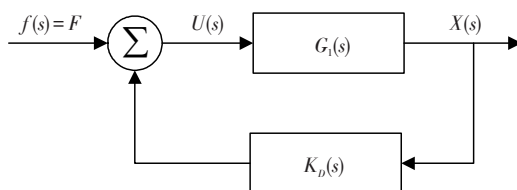


图4 以摆杆角度为输出的系统PID控制原理图

Fig.4 Schematic diagram of system PID control with pendulum angle as output

由图4的控制原理框图可以得到以倒立摆系统的摆杆角度(平衡位置为垂直向上)为输出量的直线一级倒立摆系统的PID控制的传递函数为:

$$T(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + K_D(s)G_1(s)} = \frac{\frac{\text{num}_1}{\text{den}_1}}{1 + \frac{(\text{numPID})(\text{num}_1)}{(\text{denPID})(\text{den}_1)}}. \quad (6)$$

其中:  $\text{num}_1, \text{den}_1$  分别代表传递函数  $G_1$  的分子和分母;  $\text{numPID}$  和  $\text{denPID}$  分别代表PID传递函数的分子和分母。

以倒立摆系统的摆杆角度(平衡位置为垂直向上)和小车位移为输出量,最终得到的改进的系统PID控制框图如图5所示。

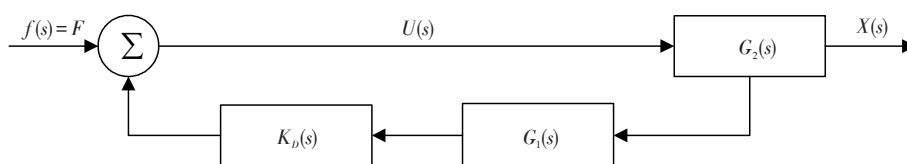


图5 直线一级倒立摆系统的PID控制原理框图

Fig.5 Block diagram of PID control of linear inverted pendulum system

由图5的控制原理框图,并考虑了倒立摆系统的摆杆角度(平衡位置为垂直向上)的影响,小车位移为输出量的直线一级倒立摆系统的PID控制的传递函数为:

$$T_1(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + K_D(s)G_1(s)} = \frac{\frac{\text{num}_2}{\text{den}_2}}{1 + \frac{(\text{numPID})(\text{num}_1)}{(\text{denPID})(\text{den}_1)}}. \quad (7)$$

其中:  $\text{num}_2, \text{den}_2$  分别代表传递函数  $G_2$  的分子和分母。

### 3 系统的MATLAB建模及实验

本设计采用MATLAB中的M函数对该系统进行PID控制. 具体实现过程为: 首先新建一个M文件, 添加相关的代码, 在M文件中建立该系统的PID控制模型. 然后使用反馈命令产生第2节提到的闭环传递函数 $T(s)$ , 外力 $F$ (即 $U$ )作为该系统的输入, 摆杆偏离竖直平衡位置的角度 $\phi$ 作为输出. 得到该系统的PID控制模型的M文件如图6所示.

当PID控制的对应参数为 $K_p=100$ 、 $T_i=8$ 、 $T_d=40$ 时, 对应的响应曲线如图7所示.

当考虑小车在水平直线上的位移 $x$ 也作为输出时, 即外力 $F$ (即 $U$ )作为该系统的输入, 摆杆偏离竖直平衡位置的角度 $\phi$ 和小车在水平直线上的位移 $x$ 作为输出. 得到该系统的最终PID控制模型的M文件, 该M文件的闭环传递函数为第2节提到的 $T_1(s)$ , 此文件模型的建立跟上述方法一致, 本文在此不再陈述. 得到的小车位置响应曲线图如图8所示.

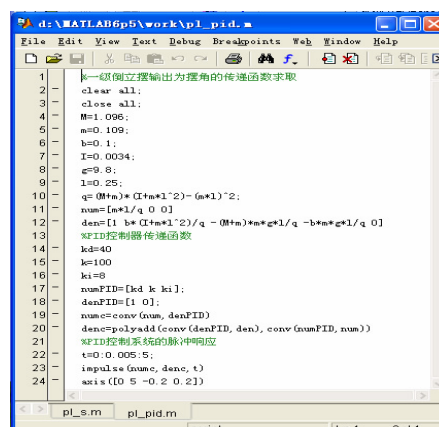


图6 直线一级倒立摆系统的PID控制模型的M文件

Fig.6 M file of the PID control model of the linear inverted pendulum system

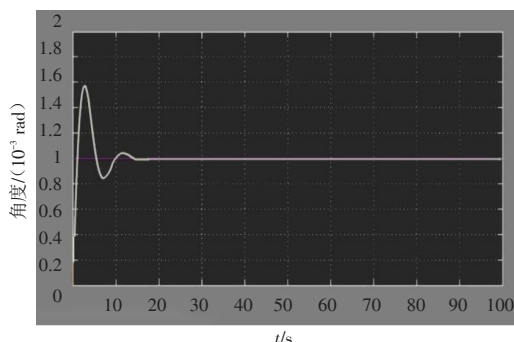


图7 小车摆杆角度响应曲线图

Fig.7 Angle response curve of the car swing lever

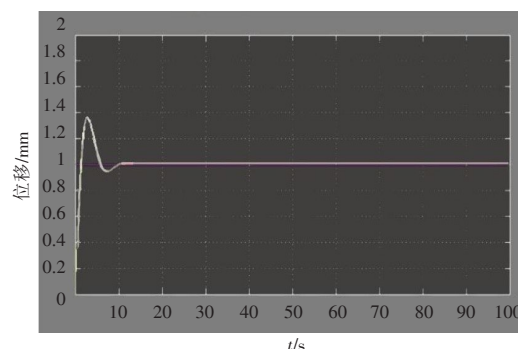


图8 小车位移的响应曲线

Fig.8 Response curve of trolley displacement

从上图2个仿真试验结果来看, 不管是小车摆杆角度还是小车位移都在很短的一段时间之内趋于稳定. 故该PID控制器能较好地控制直线一级倒立摆系统, 使该系统处于稳定状态.

### 4 结论

直线一级倒立摆系统是一个典型的开环不稳定系统. 本文通过对直线一级倒立摆系统进行分析, 对其建立数学模型, 并推导出其小车摆杆角度和小车位移的传递函数, 通过其传递函数结合PID控制器建立了该系统的PID控制模型. 通过MATLAB的仿真得到该模型的小车摆杆角度和小车位移的响应曲线, 从响应曲线可得该算法准确性良好.

### 参考文献:

- [1] 唐小岚, 邓焱, 杜晓. 基于 Lab Windows/CVI 的直线一级倒立摆系统 PID 控制[J]. 唐山师范学院学报, 2017, 39(2): 62-64.
- [2] 王惠萍, 孔庆忠. 基于 Matlab 的直线一级倒立摆的 PID 控制研究[J]. 机械工程与自动化, 2015, 24(5): 180-182.
- [3] 洪金文, 刘丙友, 王力超. 基于改进型 ADRC 的一级直线倒立摆高精度控制[J]. 黑龙江工业学院学报, 2018, 18(12): 70-75.



- [4] 裴月琳, 李斌, 王强. 嵌入式组合控制直线一级倒立摆系统[J]. 现代电子技术, 2012, 35(1): 143-145.
- [5] 魏胜男. 一级直线倒立摆的模糊控制方法[D]. 太原: 太原科技大学, 2012.
- [6] 王惠萍, 孔庆忠. 直线一级倒立摆的数学建模和根轨迹控制[J]. 内蒙古工业大学学报, 2015, 34(1): 20-24.
- [7] 梁春辉, 冯雷, 张欣. 直线一级倒立摆控制策略研究及仿真分析[J]. 长春工程学院学报(自然科学版), 2010, 11(1): 36-40.
- [8] 周明佳, 苗欣欣, 陈沐儒. 直线一级倒立摆小车控制系统分析与校正[J]. 电子测试, 2018, 17(9): 43-45.
- [9] CHANG Y H, CHANG C W, TAO C W, et al. Fuzzy sliding-mode control for ball and beam system with fuzzy ant colony optimization[J]. Expert Systems with Applications, 2012, 39(3): 3624-3633.
- [10] OH S K, JANG H J, PEDRYCZ W. Optimized fuzzy PD cascade controller: a comparative analysis and design[J]. Simulation Modelling Practice and Theory, 2010, 19(1): 181-195.
- [11] MUSKINJA N, RIZNAR M. Optimized PID position control of a nonlinear system based on correlating the velocity with position error[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2(10): 312-320.
- [12] SATHIYAVATHI S, KRISHNAMURTHY K. PID control of ball and beam system: a real time experimentation[J]. Journal of Scientific & Industrial Research, 2013, 72(8): 481-484.
- [13] 李振兴. 基于模糊自适应PID控制的汽车用锻压镁合金性能研究[J]. 热加工工艺, 2019, 48(5): 166-169.
- [14] 段友祥, 任辉, 孙歧峰, 等. 基于异步优势执行器评价器的自适应PID控制[J]. 计算机测量与控制, 2019, 27(2): 70-78.
- [15] 李雪梅, 刘诗文, 陈综艺, 等. 螺旋给料流量系统单神经PID控制及仿真研究[J]. 机械设计与制造, 2019, 23(3): 187-190.
- [16] 闫时军, 高强, 侯远龙, 等. 某随动系统负载模拟器灰预测模糊PID控制[J]. 火炮发射与控制学报, 2019, 40(1): 19-24.
- [17] 张兆东, 徐小亮, 杨杨, 等. 基于模糊PID控制策略的液压缸试验台加载系统设计[J]. 南京理工大学学报, 2019, 43(1): 78-85.
- [18] 姚胜兴, 彭楚武. 基于比例切换变结构控制的倒立摆系统研究[J]. 武汉理工大学学报, 2007, 29(4): 114-117.
- [19] 王瑶为, 邢科新, 马剑, 等. 直线一级倒立摆的自抗扰控制方法及实现[J]. 控制工程, 2017, 24(4): 711-715.
- [20] 马燕, 徐立军. 状态观测器在直线一级倒立摆系统中的应用[J]. 山东工业技术, 2015, 23(12): 269-271.
- [21] 固高科技(深圳)有限公司. 直线一级倒立摆系统用户手册和实验指导书[Z]. 深圳: 固高科技有限公司, 2015.

(编辑 张继学)