

尼对振幅有显著影响, 即阻尼增大, 振幅显著地下降.

同样可绘制相频曲面, 观察相位差  $\varepsilon$  随  $\zeta$  的连续变化.

在计算机上显示彩色曲面景色形象壮观.

## 参 考 文 献

- 1 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学 (下册). 北京: 人民教育出版社, 1982. 325
- 2 裘宗燕. Mathematica 数学软件系统的应用及其程序设计. 北京: 北京大学出版社, 1996

# 我怎样讲授边界层概念<sup>1)</sup>

严宗毅

(北京大学力学与工程科学系, 北京 100871)

**摘要** 本文概述作者在本科生流体力学课程中讲授边界层概念的体会: 一方面通过实例反复阐明高雷诺数极限下在物面附近引入边界层概念的必要性; 另一方面通过反复练习培养学生掌握量阶分析方法.

**关键词** 流体力学, 边界层, 粘性流动, 高雷诺数, 量阶分析

Prandtl 引入边界层概念是本世纪初流体力学最杰出的成就之一. 在本科生流体力学课程中讲授边界层概念, 我主要强调两点: 一是讲清为什么 Navier-Stokes 方程在低雷诺数极限下可以在全场忽略惯性项, 可是在高雷诺数极限下却不能在全场忽略粘性项, 而必须在物面附近考虑边界层; 二是通过反复练习, 培养学生掌握量阶分析方法, 学会举一反三地应用这一有力的工具来分析和解决实际问题.

## 1 从物理和数学上探讨引入边界层概念的必要性

早在讲授层流流动准确解的时候, 我们就为引入边界层概念做思想准备.

Stokes 第一问题指的是一个无穷大的平板一侧充满均质不可压缩流体, 当平板在其自身平面内突然启动时所引起的流体流动 (文 [1] 下册 226~230, 文 [2] 上册 275~278). 我们在图 1 中画出了流体速度剖面的变化 (图中各量用同一单位制, 单位一律不标注), 原意是显示当流体粘度  $\nu$  不变时, 流体如何随着时间  $t$  的增长由板面 ( $y = 0$ ) 到远处一层一层地被带动. 但是如果假设时间  $t$  不变, 那么当流体运动学粘度  $\nu$  减

小时 (如果任取某一长度定义雷诺数  $Re$ , 则当其它条件不变时,  $\nu$  减小也就相当于  $Re$  增大), 平板所带动的流体层也就越薄. 在极限情形下, 如果流体运动粘度  $\nu$  非常小, 即使平板已经启动很长时间, 它所带动的流体层厚度依然很薄. 如果把坐标系固结在平板上,

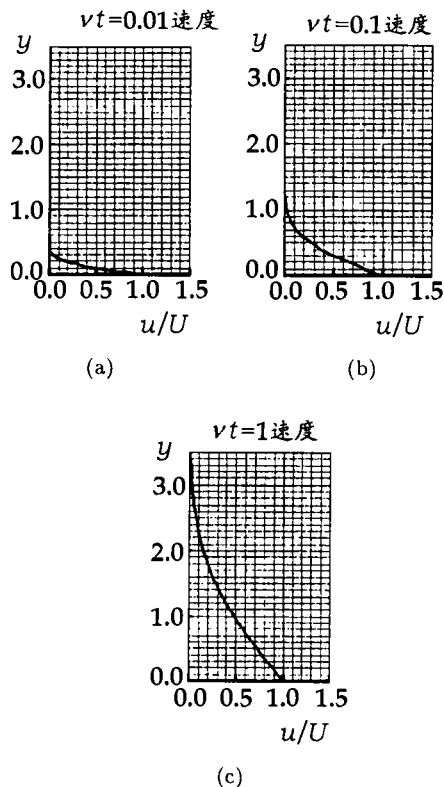


图 1 Stokes 第一问题中速度剖面随  $vt$  的变化

1) 国家理科基地创建名牌课程项目资助.

1999-09-04 收到第 1 稿, 1999-10-20 收到修改稿.

把  $t$  看作流体从板前缘流到某一纵向位置  $x$  所需的时间, 就很容易看出, 对于固定的纵向位置  $x$ , 当流体动粘度  $\nu$  非常小 (或者说  $Re = Ux/\nu$  很大) 时, 只有平板附近很薄一层流体明显受到平板的阻滞, 薄层外的流体速度几乎与来流相同. 这一薄层就是边界层.

多孔平板吸吮问题指的是无穷大多孔平板一侧, 均质不可压缩流体平行于板面流动, 当板面孔隙吸吮时, 求解流体的速度分布 (文 [2] 下册, 174 页, 8.13 题, 文 [3] 146~147). 我布置这一有关层流准确解的作业时, 要求学生任取一长度定义雷诺数, 画图给出雷诺数由小到大时流体的速度剖面. 由图 2 所示的典型结果可知, 流体速度在物面附近一层内由零增长到来流值 (无量纲速度  $u'$  由 0 变为 1), 随着雷诺数增大, 这一层的厚度变得越来越薄. 但是, 不管雷诺数多么大, 它的解与图中的无粘流解都有本质区别, 因为无粘流直到物面 ( $y' = 0$ ) 都有  $u' \equiv 1$ , 不能满足物面无滑移的边界条件. 类比地, 可以说明薄边界层对于满足物面边界条件的重要性, 即使在大雷诺数下也不能忽略边界层.

多孔平板上方的流动  $u' = 1 - \exp(-0.1Rey')$

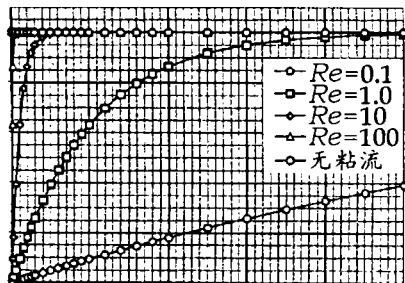


图 2 不同雷诺数 ( $Re$ ) 下, 多孔平板吸吮问题的速度剖面 (设吸吮速度: 来流速度 =  $1/10$ )

我们还引用了 Prandtl 自己 1931 年在哥廷根大学演讲时所举的小质量阻尼振动的例子<sup>[4]</sup>. 小质量的位移  $z$  被一个二阶常微分方程所描述. 如果初始时刻质量处于平衡位置 ( $t = 0: z = 0$ ), 由于某一初始速度而开始振动, 则其无量纲解的形式为

$$z = e^{-t} - e^{-t/m} \quad (1)$$

这里  $m$  正比于质量. 当质量很小时, (1) 式中后一项随时间  $t$  衰减很快, 只在很短时间起作用, 称为瞬时解; 而前一项则称为长时间解. 如图 3 所示, 当  $m$  很小时, 位移  $z$  在很短的时间内即由 0 增长到趋近于长时间解. 当  $m \rightarrow 0$  时, 位移  $z$  几乎变得和长时间解完全一致, 只不过长时间解在  $t = 0$  时的值是  $z = 1$ , 不

能满足初始条件. 这是因为, 二阶常微分方程中最高阶 (二阶) 导数项的系数就是小质量, 如果直接忽略掉二阶导数项, 就得到长时间解. 尽管这个近似解对于长时间是正确的, 但由于忽略最高阶导数项后微分方程降为一阶, 所以不可能同时满足速度和位移两个初始条件. 与此类似, 在大雷诺数之下, Navier-Stokes 方程中最高阶 (二阶) 导数项的系数也是小量 (正比于粘度, 或者说反比于雷诺数). 倘若在 Navier-Stokes 方程中直接忽略二阶导数项 (粘性项), 也会导致微分方程降为一阶, 使得物面无滑移边界条件无法满足. 大雷诺数下 Navier-Stokes 方程在远离物面处的解即外部位势流动的解, 就象本例中的长时间解. 但在物面附近的薄边界层中, 正是类似于本例中的瞬时解发挥重要作用, 才能保证物面边界条件得到满足.

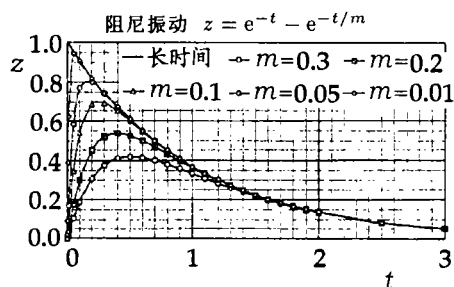


图 3 小质量阻尼振动的位移解

在分析完上述例题之后, 我们通常给学生演示一些边界层中速度剖面的图片<sup>[5]</sup>. 进而从物理图象的角度分析, 为什么大雷诺数下在外流中可以忽略粘性项却不可以边界层中完全忽略粘性项? 我们指出粘性力不仅正比于流体的粘度, 而且正比于流场中速度沿空间的变化率. 即使对于象水和空气这样粘度很小的流体, 速度沿薄边界层横向的急剧变化也会导致不可忽略的粘性力. 这就自然地导出了边界层中粘性力与惯性力同量级的假设.

这时, 再具体引入边界层的概念, 可以说是水到渠成了.

根据这一思路, 我们已经指导学生做成计算机演示软件. 上述各例的全部内容, 包括流体速度剖面如何随粘度而变化, 边界层厚度如何随雷诺数加大而变薄, 全都用动画直观、生动地在课堂上演示出来, 给学生留下深刻的印象.

## 2 通过反复练习掌握量阶分析方法

大多数教科书在推导边界层方程时用的是量阶分析方法. 这一方法是流体力学和应用数学中具有广泛

应用价值的重要方法，但对于三年级本科生说来，还没有怎么接触过类似问题。因此，我们有意识地给他们提供了较多的练习机会，以增进他们对于此法的理解，提高他们应用此法解决实际问题的能力。

某一空间尺度明显小于其它尺度从而可以通过量阶分析使问题简化的例子有：润滑间隙，射流，尾迹，渠道或者管道的入口区，Hele-Shaw 流动等。限于学时，我们在课堂上只是图解式地罗列各种情况的特点，对于润滑理论则完全不在课堂讲授，但指定作为课后必读材料（文 [1] 下册 336~344，文 [2] 下册 125~127）。练习的重点安排在习题课和作业中。除了文 [2] 下册 P.178, 8.31 题（Hele-Shaw 流动）和 8.32 题（两个大圆板相互靠拢），P.302, 9.4 题（推导轴对称边界层方程组）以及 P.292~301, 9.18（自由湍流）和 9.19（平面湍射流）的内容可供选用之外，我还根据科研中较熟悉的润滑理论领域自拟了一些补充题，举例如下：

**补充题 1** 考虑图 4 所示轴对称润滑流动（ $\varepsilon = \delta/L \ll 1$ ,  $\frac{\rho UL}{\mu} \varepsilon^2 \ll 1$ ），试由轴对称 Navier-Stokes 方程组出发，用量阶估计方法对  $L$  所限定的区域推导轴对称润滑方程。

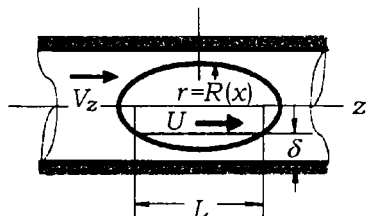


图 4

**补充题 2** 红细胞挤入圆孔的过程可以近似地用图 5 的轴对称模型表示。设孔半径为 1，细胞表面  $BA$  段方程为  $r = R(z)$ ，近似地以速度  $-U$  沿  $z$  方向滑移。设细胞与孔壁间隙很窄，雷诺数很低，请你从圆柱

坐标系  $(r, \theta, z)$  中定常轴对称 Navier-Stokes 方程组出发，简化推导出润滑理论的运动方程和边界条件，并求解间隙中牛顿流体的速度  $V_z(r, z)$ ，结果用  $dp/dz$  和  $U$  表示。

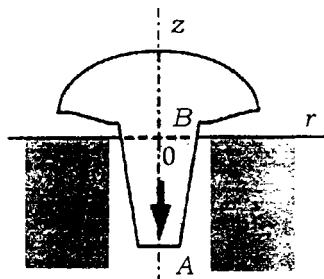


图 5

我们注意到，在推导边界层方程时，也有学者从摄动法的观点出发<sup>[6]</sup>，数学上更为严谨。如果采用这种讲法，也可以练习用摄动法来简化上述问题。

本文写出我们的讲授方法，旨在抛砖引玉，与同行交流。不当之处，敬请指正。

#### 参 考 文 献

- 1 吴望一编著. 流体力学 (上、下册). 北京: 北京大学出版社, 1982
- 2 周光炯, 严宗毅, 许世雄, 章克本编著. 流体力学 (上、下册). 北京: 高等教育出版社, 1992
- 3 怀特 FM 著. 魏中磊, 甄思森译. 粘性流体动力学. 北京: 机械工业出版社, 1982
- 4 Schlichting H. Boundary Layer Theory. New York: McGraw-Hill, 1960. 63~65
- 5 Van Dyke M. An Album of Fluid Motion. Stanford: The Parabolic Press, 1982. 22
- 6 王培光, 王振东. 用摄动法建立边界层方程. 力学与实践, 1995, 17(5): 59~60

## 首届“中国流变学青年奖”已颁发

1999 年 11 月 2 日，在第 6 届全国流变学学术会议开幕式上，中国力学学会与中国化学会流变学专业委员会颁发了首届“中国流变学青年奖”，刚芹果、罗文波和宋道云获奖。

流变学专业委员会主任江体乾教授主持颁奖；副主任杨挺青教授简介了“评奖条例”和评奖过程。国际理论与应用力学联合会 (IUTAM) 执行委员会委员、中国力学学会原理事长王仁院士，国家自然科学基金委力学学科主任靳征漠研究员，瑞士大昌洋行有限公司代表陈飞跃先生分别向三位获奖者颁发奖状和奖金。