层流附面层内流体运动方程的推导及应用

乔　华

(襄樊职业技术学院, 湖北 襄樊 441021)

摘要:从纳维埃-司托克斯方程出发,结合层流附面层内流体的特点,推导出层流附面层内流体的运动方程,将其应用到平板的绕流中,并将理论结果与实验分析作了比较。

关键词:层流;附面层;纳维埃-司托克斯方程;伯努利方程

中图分类号:O351.2　　**文献标识码**:B　　**文章编号**:1671-914X(2004)02-0011-02

在研究靠近刚体壁面处的一薄层流体的流动时,不能将其看成非粘性流体作无涡运动,而是粘性流体的有涡运动。我们将靠近刚体壁面处的这一薄层叫附面层。在大雷诺数 Re 的情况下,即流体的粘滞性极小,但无论流体的粘滞性如何小,在紧贴刚体壁上的流体的速度等于零。而随着离壁面距离的增加,流体的速度也在增加,因而附面层的一个显著特征为其中存在很大的速度梯度。在附面层内流体的运动可以是层流的也可以是湍流的。这里只研究层流附面层的运动规律。

1　层流附面层内流体运动方程的推导

不可压缩粘性流体的纳维埃-司托克斯方程式[1]为:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \vartheta_x}{\partial t}+\partial_x\frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}+\partial_y\frac{\partial \vartheta_x}{\partial y}+\partial_z\frac{\partial \vartheta_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\gamma\nabla^2\partial_x\\
&\frac{\partial \vartheta_y}{\partial t}+\partial_x\frac{\partial \vartheta_y}{\partial x}+\partial_y\frac{\partial \vartheta_y}{\partial y}+\partial_z\frac{\partial \vartheta_y}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\gamma\nabla^2\partial_y\\
&\frac{\partial \vartheta_z}{\partial t}+\partial_x\frac{\partial \vartheta_z}{\partial x}+\partial_y\frac{\partial \vartheta_z}{\partial y}+\partial_z\frac{\partial \vartheta_z}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z}+\gamma\nabla^2\partial_z
\end{aligned}\right\}\quad(1\text{-}1)$$

式中 ∇^2 为 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ 的简写。γ 为运动粘滞系数。X、Y、Z 是单位质量力在 x、y、z 轴上的投影。而当质量力中只有重力一种时,则 X=0、Y=0、Z=-g。

为简单起见,我们设质量力中只有重力一种,只研究刚体表面的平面部分的二维绕流,且为稳定流动,各空间点对应的流速不随时间改变,即 $\frac{\alpha\upsilon}{\alpha t}=0$。将刚体表面这一平面作为 x、z 平面,并且 x 轴指向绕流方向,则速度的分布不依赖于 z 坐标即速度的 z 分量为零。由上述的约定条件,则 1-1 式变为

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_x\frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}+\partial_y\frac{\partial \vartheta_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\gamma\left(\frac{\partial \vartheta_x}{\partial x^2}+\frac{\partial \vartheta_x}{\partial y^2}\right)\\
&\partial_x\frac{\partial \vartheta_y}{\partial x}+\partial_y\frac{\partial \vartheta_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\gamma\left(\frac{\partial^2 \vartheta_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vartheta_y}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}\right\}\quad(1\text{—}2)$$

附面层很薄,显然其内的流体的运动基本上是平行于刚体表面的,即速度 $\vartheta y \ll \vartheta x$。但当沿 y 轴的方向速度变化得很快,因而速度对 y 的导数比对 x 的导数大得多[2]。由此可知,在 1-2 式中第一式子中,与 $\frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial y^2}$ 比较起来,$\frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial x^2}$ 是非常小的,是可以略去的。又比较 1-2 式中的两个方程。可知导数 $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ 应较 $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ 小。因而在允许的近似程度内可以直接令 $\frac{\partial \rho}{\partial y}=0$。即可认为在附面层内不存在压力的横向梯度。用全导数 $\frac{\partial p(x)}{\partial x}$ 替代 $\frac{\partial \rho}{\partial x}$。全导数可借基本流束的速度 Vx 来表示。又由于附面层外的运动是具势的,所以伯努利方程是成立的:

$$P-\frac{\partial v^2}{2}=\text{const.}\qquad 则\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}=-v\frac{dv}{dx}$$

于是 1-2 式就变成如下形式

$$\partial_x\frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}+\partial_y\frac{\partial \vartheta_x}{\partial y}-\gamma\frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial y^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

即:

$$\partial_x\frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}+\partial_y\frac{\partial \vartheta_x}{\partial y}-\gamma\frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial y^2}=V\frac{dv}{dx}\qquad(1\text{-}3)$$

上式(1-3)为稳定流动的层流附面层内的流体的运动方程。

2　层流附面层内流体运动方程的应用

下面我们将层流附面层内流体运动方程应用于

收稿日期:2003-10-18　　修回日期:2004-02-10
作者简介:乔华(1969-),男,湖北洪湖人,襄樊职业技术学院讲师,主要从事物理教学。

面平行的流束对平板的绕流中。设板面与对应于正x的x和z半平面相合。设在x轴的正向上薄板长度为无限大。在这种情况下基本流束的速度显然为恒量V=const[3]。则(1-3)式变成如下形式:

$$\vartheta_x\frac{\partial\vartheta_x}{\partial x}+\vartheta_y\frac{\partial\vartheta_x}{\partial y}=\gamma\frac{\partial^2\vartheta_x}{\partial y^2}\qquad\frac{dv}{dx}=0\qquad(2-1)$$

由薄板面上的边界条件

有 $\vartheta_x=\vartheta_y=0$　　当 $x\geqslant 0$　　$y=0$

在距薄板距离较远，则速度应渐趋近于迎面流速V。

$\vartheta_x=V$　　当 $y\to\pm\infty$ 时,

2-1方程式的解可取如下形式

$$\vartheta_x=Vf\left(y\sqrt{\frac{v}{xy}}\right)$$

$$\vartheta_y=\sqrt{\frac{v\gamma}{x}}f_1\left(y\sqrt{\frac{v}{x\gamma}}\right)$$

(其中f、f1为某些无量纲的函数)

由此可知,附面层在被绕薄板上的厚度 约为

$$\delta\propto\sqrt{\frac{v\gamma}{x}}\qquad(2-2)$$

在前面我们已提到附面层的厚度沿长度方向，即沿流体的流动方向是逐渐增厚的。根据实验分析,当不可压缩流体绕过平板流动时层流附面层的厚度为[4]。

$$\delta=5.83\sqrt{\frac{v\gamma}{v}}\qquad(2-3)$$

式2-3正好与式2-2相吻合。

两式均说明层流附面层的厚度与长度方面x、运动粘滞系数γ成正比,与来流束的速度V成反比。

参考文献:

[1] 朗道. 栗弗席兹.连续介质力学[M]. 北京:人民教育出版社, 1994.36-38.

[2]朱一坤. 流体力学基础[M]. 北京:北京航空航天大学出版,2000.145-176.

[3]钟声玉. 流体力学和热工理论基础[M]. 北京:机械工业出版社, 2002.91-107.

[4]清华大学工程力学系. 流体力学基础[M]. 北京:机械工业出版社, 1999.79-83.

Analysis and Use of Moving Equation of Laminar Flow and Attached Laminar

QIAO Hua

(Xiangfan Vocational and Techincal Collge, Xiangfan Hubei 441021, China)

Abstract: According to the lovea -stocks equation and the characteristec of moving objects in the Laminar flow,We result in the moving equation of the Laminar flow and use it in round and compared the theory with the analyse of the practice.

Key words: Laminar flow; atlached Laminar; Lovea -stocks equation; Boluly equation.

(责任编辑:聂国朝)