



西北工业大学  
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

西北工业大学航空学院

飞行动力学（下）

课程大作业报告

作业名称：飞机静稳定性与动稳定性分析

学 院：航空学院

专 业：飞行器设计与工程

个人信息：冯铮浩 2017300281 01011704 班

联系方式：13815233646

任课老师：刘艳老师、白俊强老师（高老师班）

西安·西北工业大学

2020 年 5 月 1 日

# 目 录

<b>1 问题描述 .....</b>	<b>3</b>
1.1 问题一：飞机静稳定性、操纵面效率分析要求.....	3
1.2 问题二：飞机动稳定性、运动模态分析要求.....	3
<b>2 飞机飞行静稳定性、操纵面效率分析 .....</b>	<b>3</b>
2.1 飞机静稳定性分析准则及操纵面效率定义.....	3
2.1.1 飞机纵向静稳定分析准则与纵向操纵面效率定义.....	3
2.1.2 飞机航向静稳定分析准则与航向操纵面效率定义.....	5
2.1.3 飞机横向静稳定分析准则与横向操纵面效率定义.....	7
2.2 飞机纵横航三轴静稳定性、操纵面效率分析.....	8
2.2.1 飞机纵向静稳定性与纵向操纵面效率分析.....	8
2.2.2 飞机航向静稳定性与航向操纵面效率分析.....	10
2.2.3 飞机横向静稳定性与横向操纵面效率分析.....	11
2.3 飞机静稳定性、操纵面效率分析 MATLAB 源代码说明 .....	13
<b>3 飞机飞行动稳定性、运动模态分析 .....</b>	<b>14</b>
3.1 飞机运动方程.....	14
3.2 飞机小扰动线化运动方程.....	15
3.3 飞机动稳定性与典型模态说明.....	17
3.3.1 飞机小扰动线化运动方程的解与其动稳定特性.....	17
3.3.2 飞机运动方程典型特征根、模态与品质要求.....	17
3.4 给定飞机动稳定性评估与模态参数计算.....	21
3.4.1 主要步骤说明.....	21
3.4.2 给定飞机动稳定性分析结果.....	23
3.5 飞机动稳定性、运动模态分析 MATLAB 源代码说明 .....	29
<b>4 参考文献 .....</b>	<b>29</b>
<b>附录一：给定飞机气动数据表格 .....</b>	<b>30</b>
<b>附录二：飞机稳定性分析 MATLAB 源程序 .....</b>	<b>32</b>

# 1 问题描述

## 1.1 问题一：飞机静稳定性、操纵面效率分析要求

试根据气动数据（见附表 1 和 2），绘制飞机纵横航三轴静稳定性、操纵面效率随高度与马赫数的变化曲线，对曲线变化趋势及造成该趋势的原因进行分析。

## 1.2 问题二：飞机动稳定性、运动模态分析要求

运用给定飞机纵向与横航向气动数据（见附表 1 和 2），完成下列任务：

1. 计算纵向短周期模态（Short-period），横航向滚转收敛（Roll-subsidence）模态以及横航向荷兰滚（Dutch-roll）模态的参数，包括  $\zeta_{sp}$ ,  $\omega_{sp}$ ,  $T_r$ ,  $\zeta_d$ ,  $\omega_d$ ；

2. 评估飞机在非场域 A 种飞行阶段的飞行品质；

3. 设计合适的飞行控制系统使得飞机具有等级 I 的飞行品质；

给定飞行条件：①  $H = 5000\text{m}$ ,  $M = 0.8$ ;

②  $H = 8000\text{m}$ ,  $M = 0.8$ ;

③  $H = 14000\text{m}$ ,  $M = 1.4$ 。

飞机的主要几何与质量参数如表 1 所示。

表 1 飞机的主要几何与质量参数表

主要参数	数值	单位
$S$	23	$\text{m}^2$
$b$	7.15	$\text{m}$
$\bar{c}$	4.002	$\text{m}$
$m$	6000	$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$
$I_x$	4312	$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$
$I_y$	45374	$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$
$I_z$	48216	$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$
$I_{xz}$	0	$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$

## 2 飞机飞行静稳定性、操纵面效率分析

### 2.1 飞机静稳定性分析准则及操纵面效率定义

#### 2.1.1 飞机纵向静稳定分析准则与纵向操纵面效率定义

① 飞机纵向静稳定分析准则<sup>[1]</sup>

若飞机受到迎角扰动后，能够产生恢复初始状态的俯仰力矩，则纵向静稳定。

对于纵向静稳定飞机，在正的迎角扰动下，会产生低头恢复力矩（负），即

$$+\Delta\alpha \rightarrow -\Delta M \quad (1)$$

故定义纵向静稳定准则为

$$\frac{dM}{d\alpha} < 0 \quad \text{或} \quad \frac{dC_m}{d\alpha} < 0 \quad \text{或} \quad \frac{dC_m}{dC_L} < 0 \quad (2)$$

满足

$$\begin{cases} \frac{dC_m}{d\alpha} < 0 & \text{稳定;} \\ \frac{dC_m}{d\alpha} > 0 & \text{不稳定;} \\ \frac{dC_m}{d\alpha} = 0 & \text{中立稳定。} \end{cases} \quad (3)$$

定义平尾处的动压比为 $\eta_t$ ，满足

$$\eta_t = \frac{q_t}{q} \quad (4)$$

其中， $q_t$ 为平尾处动压， $q$ 为机翼处动压。

定义平尾尾容比为 $\bar{V}_1$ ，满足

$$\bar{V}_1 = \frac{S_t \cdot l_t}{S \cdot \bar{c}} \quad (5)$$

其中， $S_t$ 为平尾面积， $S$ 为机翼面积， $l_t$ 为平尾弦长， $\bar{c}$ 为机翼平均气动弦长。

飞机的握杆中性点计算公式为

$$N_0 = \bar{x}_{ac} - \left(\frac{dC_m}{dC_L}\right)_f + \frac{a_t}{a_w} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right) \eta_t \bar{V}_1 \quad (6)$$

可使用静稳定裕度 $H_n$ 描述飞机的纵向握杆静稳定度，有

$$H_n = N_0 - \bar{x}_{cg} = -\left(\frac{dC_m}{dC_L}\right)_{fix} \quad (7)$$

易知，当静稳定裕度 $H_n$ 为正时稳定。

## ② 飞机纵向操纵面效率定义

升降舵（Elevator）是最常用、有效的俯仰操纵方式。由于题目未给出操纵面类型，此处假设飞机纵向操纵面为常见的水平尾翼后缘襟翼，可绕铰链轴偏转。

定义升降舵操纵效率为  $C_{m\delta_e}$ ，满足

$$C_{m\delta_e} = -a_t \bar{V}_1 \eta_t \tau_1 \quad (8)$$

其中， $a_t$  代表平尾升力线斜率， $\bar{V}_1$  为平尾尾容比， $\eta_t$  为平尾动压比， $\tau_1$  为升降舵效率因子，等于单位升降舵偏角相当的平尾迎角改变量。

纵向配平所需升降舵偏角为

$$\delta_e = \frac{C_{L,w} \bar{x}_a + C_{mac,w} + C_{mf} - a_t (\alpha_w - i_w + i_t - \varepsilon) \bar{V}_1 \eta_t}{-C_{m\delta_e}} \quad (9)$$

配平升降舵偏角随升力系数  $C_L$  的变化梯度为

$$\frac{d\delta_e}{dC_L} = -\frac{(dC_m / dC_L)_{fix}}{C_{m\delta_e}} = -\frac{\bar{x}_{cg} - N_0}{C_{m\delta_e}}. \quad (10)$$

### 2.1.2 飞机航向静稳定分析准则与航向操纵面效率定义

#### ① 飞机航向静稳定分析准则

若飞机受到侧滑扰动后，能够产生恢复使机头指向来流方向的力矩，抵消侧滑，则称飞机航向静稳定。

对于航向静稳定飞机，在正侧滑下，产生右偏航力矩（正）抵消侧滑，即

$$+\Delta\beta \rightarrow +\Delta N \quad (11)$$

故定义纵向静稳定准则为

$$N_\beta = \frac{dN}{d\beta} > 0 \text{ 或 } C_{n\beta} = \frac{dC_n}{d\beta} > 0, \quad C_n = \frac{N}{qSb} \quad (12)$$

满足

$$\begin{cases} \frac{dC_n}{d\beta} > 0 & \text{稳定;} \\ \frac{dC_n}{d\beta} < 0 & \text{不稳定;} \\ \frac{dC_n}{d\beta} = 0 & \text{中立稳定。} \end{cases} \quad (13)$$

对于航向静稳定的飞机,  $(C_{n\beta})_{fix}$  应在期望迎角和飞行包线范围内为正,  $C_{n\beta}$  在 0.0010 ~ 0.0025 范围内视为足够。典型地, 对于高度追求机动性能的战斗机,  $C_{n\beta}$  随着迎角  $\alpha$  以及马赫数  $Ma$  的提高会快速下降。

垂直尾翼是航向静稳定性的最大来源, 其贡献为

$$(C_{n\beta,v})_{fix} = ka_v(1 + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta})\eta_v \bar{V}_2 \quad (14)$$

## ② 飞机航向操纵面效率定义

方向舵 (Rudder) 是飞机的航向主要操纵面。类似地, 由于题目未给出具体操纵面类型, 此处假设航向操纵面为常见的垂直尾翼后缘襟翼, 可绕铰链轴偏转。

定义垂尾处的动压比为  $\eta_v$ , 满足

$$\eta_v = \frac{q_v}{q} \quad (15)$$

其中,  $q_v$  为垂尾处动压,  $q$  为机翼处动压。

定义垂尾尾容比为  $\bar{V}_2$ , 满足

$$\bar{V}_2 = \frac{S_v \cdot l_v}{S \cdot b} \quad (16)$$

其中,  $S_v$  为垂尾面积,  $S$  为机翼面积,  $l_v$  为垂尾弦长,  $b$  为机翼翼展。

定义方向舵操纵效率为  $C_{n\delta_r}$ , 满足

$$C_{n\delta_r} = -k\eta_v \bar{V}_2 a_v \tau_2 \quad (17)$$

其中,  $k$  为经验因子,  $\eta_v$  为垂尾动压比,  $\bar{V}_2$  为垂尾尾容比,  $a_v$  代表垂尾升力线斜率,  $\tau_2$  为方向舵效率因子, 等于单位方向舵偏角带来的垂尾侧滑角变化。

产生或平衡侧滑角  $\beta$  所需的方向舵偏角满足

$$C_{n\beta}\beta + C_{n\delta_r}\delta_r = 0 \quad (18)$$

即有

$$\delta_r = -\frac{C_{n\beta}\beta}{C_{n\delta_r}} \quad (19)$$

可见, 飞机的航向静稳定度  $C_{n\beta}$  越高, 产生给定侧滑所需方向舵偏角  $\delta_r$  越大。

### 2.1.3 飞机横向静稳定分析准则与横向操纵面效率定义

#### ① 飞机横向静稳定分析准则

对于横向静稳定飞机，右滚转扰动会产生正侧滑，飞机会产生左滚转恢复力矩（负），即

$$+\Delta\beta \rightarrow -\Delta L \quad (20)$$

故定义横向静稳定准则为

$$L_\beta = \frac{dL}{d\beta} < 0 \quad \text{或} \quad C_{l_\beta} = \frac{dC_l}{d\beta} < 0 \quad (21)$$

满足

$$\begin{cases} \frac{dC_l}{d\beta} < 0 & \text{稳定;} \\ \frac{dC_l}{d\beta} > 0 & \text{不稳定;} \\ \frac{dC_l}{d\beta} = 0 & \text{中立稳定。} \end{cases} \quad (22)$$

上单翼增加横向稳定性，下单翼反之；上反角  $\Gamma$  和后掠角  $\Lambda$  都增稳，且横向稳定性可近似正比于上反角  $\Gamma$ ，正比于  $C_L \sin \Lambda$ 。

#### ① 飞机横向操纵面效率定义

飞机上最常见、最主要的横向操纵面是副翼（Aileron），非常规横向操纵面有升降副翼（Elevon），扰流板（Spoiler），差动平尾（Differential tailplane）等。

副翼的操纵效能通过副翼单位偏角（差动）所产生的滚转力矩系数来衡量，通常用  $C_{l_{\delta_a}}$  表示，可以使用片条理论来近似估算。需要注意的是，片条理论忽略了相邻机翼剖面之间的相互作用。副翼的操纵效能  $C_{l_{\delta_a}}$  满足

$$C_{l_{\delta_a}} = -\frac{2a_w \tau_a}{Sb} \int_{y_i}^{y_o} c_a(y) y dy \quad (23)$$

其中， $a_w$  为机翼升力线斜率， $\tau_a$  代表副翼单位偏角带来的机翼迎角变化量， $c_a(y)$  为包括副翼部分的局部机翼弦线， $y_i$  与  $y_o$  分别代表副翼在展向位置上的延伸起始点距机身对称面的距离。

副翼保持其操纵效能的迎角范围取决于机翼的平面。

## 2.2 飞机纵横航三轴静稳定性、操纵面效率分析

### 2.2.1 飞机纵向静稳定性与纵向操纵面效率分析

由附表 1 中飞机纵向气动数据，依次提取各个海拔高度与飞行马赫数下，表征纵向静稳定性参数  $C_{m\alpha}$  与纵向操纵面（升降舵）效率参数  $C_{m\delta_e}$ 。其中海拔高度取值为  $H = 0, 3, 5, 8, 10$  km，飞行马赫数取值范围  $Ma \in [0.600, 1.712]$ 。

编写 MATLAB 程序，绘制纵向静稳定性参数  $C_{m\alpha}$ 、纵向操纵面（升降舵）效率  $C_{m\delta_e}$  随高度与马赫数的变化曲线如图 1, 2 所示，两图中纵坐标轴设置反向。

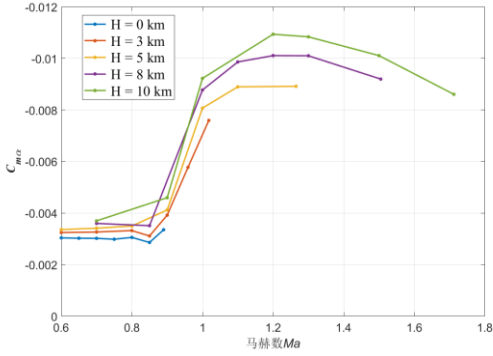


图 1 纵向静稳定性参数  $C_{m\alpha}$  随  $H, Ma$  变化曲线

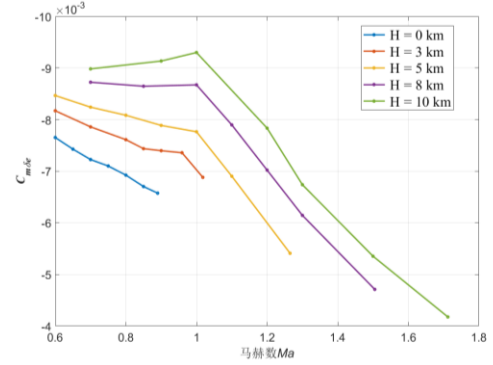


图 2 纵向操纵面（升降舵）效率参数  $C_{m\delta_e}$  随  $H, Ma$  变化曲线

① 观察图 1 所示曲线，总结出有关飞机纵向静稳定性的规律并分析原因如下：

- **规律一：**纵向静稳定性参数  $C_{m\alpha}$  在不同飞行海拔高度与马赫数下均为负值，可知飞机始终保持纵向静稳定状态。
- **规律二：**相同马赫数  $Ma$  情况下，随着飞行海拔高度的增加，纵向静稳定性参数  $C_{m\alpha}$  的绝对值增大，即飞机纵向稳定性提升。

**原因分析：**在飞机正常飞行的对流层（中纬度  $H \leq 12\text{km}$ ）与平流层区域（ $H \leq 57\text{km}$ ），随着海拔高度  $H$  增加，大气密度  $\rho$  减小，温度  $T$  降低，声速  $a = \sqrt{\gamma RT}$  减小，故在相同马赫数下，飞机飞行速度  $V$  减小，升力系数  $C_L$  增大，则对于纵向静稳定飞机，由纵向配平关系式

$$\delta_{e,trim} = \delta_{e,0} - \frac{\bar{x}_{cg} - N_0}{C_{m\delta_e}} C_L \quad (24)$$



可知此情况下，配平所需升降舵偏角  $\delta_{e,trim}$  减小，飞机纵向稳定性提升。

- **规律三：**相同海拔高度  $H$  情况下，随着飞行马赫数的不断增大，纵向静稳定性参数  $C_{m\alpha}$  的绝对值在亚声速状态区间（ $0.6 \leq Ma \leq 0.8$ ）基本不变；在跨声速状态区间（ $0.8 \leq Ma \leq 1.2$ ）的亚声速段迅速增大，并在超声速段继续保持较快增大趋势，并在马赫数  $Ma = 1.2$  附近达到最大值；在超声速状态区间（ $Ma > 1.2$ ）开始逐渐下降。飞机纵向静稳定性随马赫数的增加整体上呈先平缓提升，后迅速提升，再逐步下降的趋势。

**原因分析：**在相同海拔高度情况下，大气密度  $\rho$  与温度  $T$  均不变。在亚声速阶段，飞机气动中心（即焦点）较为靠前，且随马赫数  $Ma$  变化变化较小，故飞机静稳定性基本保持不变；在跨声速阶段，飞机飞行马赫数  $Ma$  增加，飞行速度  $V$  增加，全机焦点后移明显， $\bar{x}_{ac}$  增大，则  $\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ac}$  的绝对值增大，故飞机静稳定性明显提升。

考虑空气压缩性影响时，纵向配平条件有

$$\delta_e = \frac{1}{C_{m\delta_e}} \left[ C_{m0} - H_n \frac{2W/S}{\rho} \frac{1}{V^2} \right] \quad (25)$$

在跨声速阶段前段，零升力矩系数  $C_{m0}$  与配平升降舵偏角  $\delta_{e,trim}$  随速度  $V$  增大而增大。在跨声速后段到超声速阶段，零升力矩系数  $C_{m0}$  先增大后减小，故  $Ma$  的变化会导致  $\delta_{e,trim}$  出现偏折，即跨声速勺形区。当马赫数继续增大， $Ma \geq 1.2$  时，飞机焦点基本保持不动，配平所需升降舵偏角增大，飞机纵向静稳定性开始下降。

① 观察图 2 所示曲线，总结出有关飞机纵向操纵面效率的规律并分析原因如下：

- **规律一：**相同马赫数  $Ma$  情况下，随着飞行海拔高度的增加，纵向操纵面效率参数  $C_{m\delta_e}$  的绝对值增大，即飞机纵向操纵面效率提升。

**原因分析：**随着海拔高度  $H$  增加，大气密度  $\rho$  减小，温度  $T$  降低，声速  $a$  减小，在相同马赫数下，飞机飞行速度  $V$  减小，故在相同升降舵偏角下，可纵向配平的升力系数  $C_L$  增大，即飞机纵向操纵面效率提升。

- **规律二：**相同海拔高度  $H$  情况下，随着飞行马赫数的增加，纵向操纵面效率参数  $C_{m\delta_e}$  的绝对值减小，即飞机纵向操纵面效率降低。

**原因分析：**随着飞行马赫数的增加，飞机从亚声速状态进入跨声速和超声速状态，平尾处出现激波，受到空气压缩性影响显著，导致升降舵效率显著降低，铰链力矩剧增，且波动规律复杂。

### 2.2.2 飞机航向静稳定性与航向操纵面效率分析

由附表 2 中飞机横航向气动数据，依次提取各个海拔高度与飞行马赫数下，表征航向静稳定性参数  $C_{n\beta}$  与航向操纵面（方向舵）效率参数  $C_{n\delta_r}$ 。其中海拔高度取值为  $H = 0, 3, 5, 8 \text{ km}$ ，飞行马赫数取值范围  $Ma \in [0.600, 1.505]$ 。

编写 MATLAB 程序，绘制航向静稳定性参数  $C_{n\beta}$ 、航向操纵面（方向舵）效率  $C_{n\delta_r}$  随高度与马赫数的变化曲线如图 3, 4 所示，图 4 中纵坐标轴设置反向。

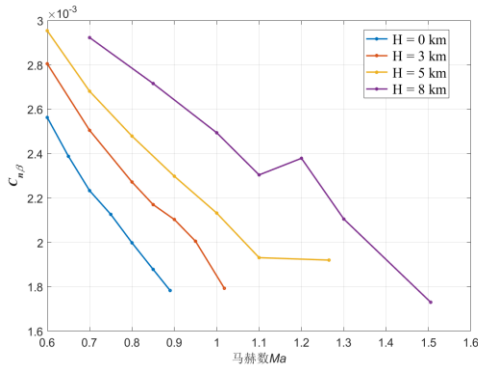


图 3 航向静稳定性参数  $C_{n\beta}$  随  $H, Ma$  变化曲线

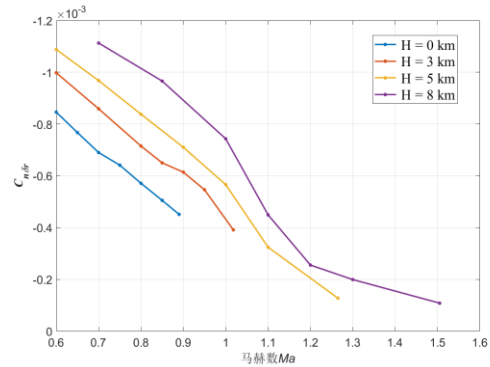


图 4 航向操纵面（升降舵）效率参数  $C_{n\delta_r}$  随  $H, Ma$  变化曲线

① 观察图 3 所示曲线，总结出有关飞机航向静稳定性的规律并分析原因如下：

- **规律一：**航向静稳定性参数  $C_{n\beta}$  在不同飞行海拔高度与马赫数下均为正值，可知飞机始终保持航向静稳定状态。
- **规律二：**相同马赫数  $Ma$  情况下，随着飞行海拔高度的增加，航向静稳定性参数  $C_{n\beta}$  的绝对值增大，即飞机航向静稳定性提升。

**原因分析：**随着海拔高度  $H$  增加，大气密度  $\rho$  减小，温度  $T$  降低，声速  $a$

减小, 雷诺数  $Re = \frac{\rho V x}{\mu}$  减小, 在相同马赫数下, 飞行速度  $V$  减小, 升力

系数  $C_L$  增大, 则机翼的上反角和后掠角总体对提升航向静稳定性的贡献增大, 机身对航向静稳定性的削弱作用减小, 垂尾对航向静稳定性的提升贡献增大, 故全机航向静稳定性提升。

- **规律三:** 相同海拔高度  $H$  情况下, 随着飞行马赫数的增加, 航向静稳定性参数  $C_{n\beta}$  的绝对值减小, 即飞机航向静稳定性下降。

**原因分析:** 随着飞行马赫数的增加, 飞机垂尾处的侧洗角减小, 则  $\frac{\partial \sigma}{\partial \beta}$  减小, 故垂尾的效率下降, 其对航向静稳定性的提升贡献会大幅下降, 因此, 飞机航向静稳定性下降。

## ② 观察图 4 所示曲线, 总结出有关飞机航向操纵面效率的规律并分析原因如下:

- **规律一:** 相同马赫数  $Ma$  情况下, 随着飞行海拔高度的增加, 航向操纵面效率参数  $C_{n\delta_r}$  的绝对值增大, 即飞机航向操纵面效率提升。

**原因分析:** 随着海拔高度  $H$  增加, 大气密度  $\rho$  减小, 温度  $T$  降低, 声速  $a$  减小, 雷诺数  $Re$  减小, 在相同马赫数下, 飞机飞行速度  $V$  减小, 故垂尾处侧洗角增大, 同时在跨声速和超声速阶段出现的激波强度较弱, 操纵面效率更高, 在相同方向舵偏角下, 可提供更大偏航力矩, 即飞机航向操纵面效率提升。

- **规律二:** 相同海拔高度  $H$  情况下, 随着飞行马赫数的增加, 航向操纵面效率参数  $C_{n\delta_r}$  的绝对值减小, 即飞机航向操纵面效率降低。

**原因分析:** 随着飞行马赫数的增加, 飞机从亚声速状态进入跨声速和超声速状态, 垂尾处侧洗角减小, 并出现激波, 气流流动复杂, 受到空气压缩性影响显著, 导致效率因子  $\tau_2$  减小, 方向舵效率显著降低。

### 2.2.3 飞机横向静稳定性与横向操纵面效率分析

由附表 2 中飞机横航向气动数据, 依次提取各个海拔高度与飞行马赫数下, 表征横向静稳定性参数  $C_{l\beta}$  与横向操纵面 (副翼) 效率参数  $C_{l\delta_a}$ 。其中海拔高度

取值为  $H = 0, 3, 5, 8 \text{ km}$ ，飞行马赫数取值范围  $Ma \in [0.600, 1.505]$ 。

编写 MATLAB 程序，绘制横向静稳定性参数  $C_{l\beta}$ 、横向操纵面（副翼）效率  $C_{l\delta_a}$  随高度与马赫数的变化曲线如图 5, 6 所示，两图中纵坐标轴设置均反向。

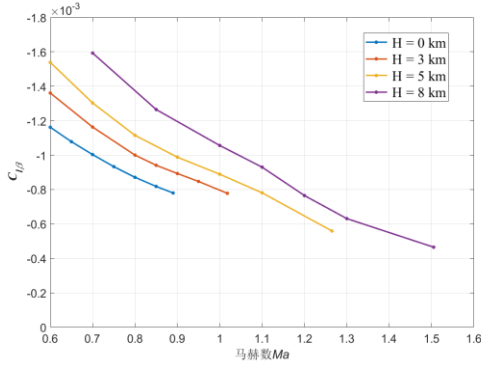


图 5 横向静稳定性参数  $C_{l\beta}$  随  $H, Ma$  变化曲线

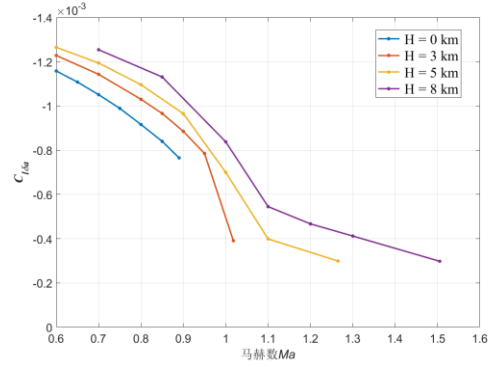


图 6 横向操纵面（副翼）效率参数  $C_{l\delta_a}$  随  $H, Ma$  变化曲线

① 观察图 5 所示曲线，总结出有关飞机横向静稳定性的规律并分析原因如下：

- **规律一：** 横向静稳定性参数  $C_{l\beta}$  在不同飞行海拔高度与马赫数下均为负值，可知飞机始终保持横向静稳定状态。
- **规律二：** 相同马赫数  $Ma$  情况下，随着飞行海拔高度的增加，横向静稳定性参数  $C_{l\beta}$  的绝对值增大，即飞机横向静稳定性提升。

**原因分析：** 随着海拔高度  $H$  增加，大气密度  $\rho$  减小，温度  $T$  降低，声速  $a$  减小，雷诺数  $Re$  减小，在相同马赫数下，飞行速度  $V$  减小，升力系数  $C_L$  增大，则机翼的上反角和后掠角总体对提升横向静稳定性的贡献增大；同时由前面航向静稳定性分析可知，垂尾的效率提升，又假设飞机处于定直平飞巡航状态，属于小迎角情况，此时全机重心位置位于垂尾焦点下方，故垂尾对横向的增稳作用也加强，故飞机横向静稳定性提升。

- **规律三：** 相同海拔高度  $H$  情况下，随着飞行马赫数的增加，横向静稳定性参数  $C_{l\beta}$  的绝对值减小，即飞机横向静稳定性下降。

**原因分析：** 随着飞行马赫数的增加，升力系数  $C_L$  下降，故后掠角对横向的增稳贡献减弱；同时，飞机垂尾由于出现激波以及侧洗角减小，受到

强烈空气压缩性影响，故效率下降，其对横向静稳定性的提升贡献会大幅下降，因此，飞机横向静稳定性下降。

② 观察图 6 所示曲线，总结出有关飞机横向操纵面效率的规律并分析原因如下：

- **规律一：**相同马赫数  $Ma$  情况下，随着飞行海拔高度的增加，横向操纵面效率参数  $C_{l\delta_a}$  的绝对值增大，即飞机横向操纵面效率提升。

**原因分析：**随着海拔高度  $H$  增加，大气密度  $\rho$  减小，温度  $T$  降低，声速  $a$  减小，雷诺数  $Re$  减小，在相同马赫数下，飞机飞行速度  $v$  减小，升力系数  $C_L$  增大，故副翼的偏转对机翼弯度的改变所产生的两侧机翼的升力差更大，操纵效率提升，在相同的差动偏角下，可提供更大的滚转力矩，即飞机横向操纵面效率提升。

- **规律二：**相同海拔高度  $H$  情况下，随着飞行马赫数的增加，横向操纵面效率参数  $C_{l\delta_a}$  的绝对值减小，即飞机横向操纵面效率降低。操纵面效率下降趋势在跨声速阶段最为剧烈，在马赫数进入超声速区间（ $Ma > 1.2$ ）后，下降趋势趋缓。

**原因分析：**随着飞行马赫数的增加，飞机从亚声速状态进入跨声速和超声速状态，机翼前缘与操纵副翼处出现激波，气流流动复杂，受到空气压缩性影响显著，导致效率因子  $\tau_a$  减小，操纵面效率大幅降低，即飞机横向操纵面效率降低。在跨声速阶段，机翼绕流情况更为复杂，扰动更大，故此阶段飞机的横向操纵面效率降低最剧烈。在马赫数更高的超声速阶段，机翼绕流情况相对规律，故效率降低趋势变得缓和。

## 2.3 飞机静稳定性、操纵面效率分析 MATLAB 源代码说明

根据气动数据，利用 MATLAB 编程绘制飞机纵横航三轴静稳定性、操纵面效率随高度与马赫数的变化曲线，程序源代码如附录二（程序 P1），原始文件详见附件。

程序文件名称：Program\_Static\_Stability\_Analysis.m

数据文件：① Longitudinal Aerodynamic Data.txt（纵向气动数据）

① Lateral-Directional Aerodynamic Data.txt（横航向气动数据）

测试软件：MATLAB R2019b 软件

运行结果（图形可视化）说明：

图 1.1：飞机纵向静稳定性  $C_{m\alpha}$  随马赫数  $Ma$  的变化曲线（不同海拔高度  $H$ ）；

图 1.2：飞机纵向操纵面效率  $C_{m\delta_e}$  随马赫数  $Ma$  的变化曲线（不同海拔高度  $H$ ）；

图 2.1：飞机航向静稳定性  $C_{n\beta}$  随马赫数  $Ma$  的变化曲线（不同海拔高度  $H$ ）；

图 2.2：飞机航向操纵面效率  $C_{n\delta_r}$  随马赫数  $Ma$  的变化曲线（不同海拔高度  $H$ ）

图 3.1：飞机横向静稳定性  $C_{l\beta}$  随马赫数  $Ma$  的变化曲线（不同海拔高度  $H$ ）；

图 3.2：飞机横向操纵面效率  $C_{l\delta_a}$  随马赫数  $Ma$  的变化曲线（不同海拔高度  $H$ ）；

### 3 飞机飞行稳定性、运动模态分析

#### 3.1 飞机运动方程

运动方程是飞机运动分析、计算及仿真的基础。

假设飞机为一个六自由度（6 DOF）的刚体，且忽略地球的曲率和自转，推导飞机运动方程，包括力方程、力矩方程、角速度方程、速度方程。

飞机的运动遵循牛顿运动方程，力方程与力矩方程如下：

$$\mathbf{F} = m \left( \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_i \quad (26)$$

$$\mathbf{M} = \left( \frac{d\mathbf{H}}{dt} \right)_i \quad (27)$$

两式中， $\mathbf{V}$  为速度， $\mathbf{H}$  为动量矩，下标 “ $i$ ” 表明加速度  $d\mathbf{V}/dt$  和动量矩的变化率  $d\mathbf{H}/dt$  是在惯性系中测量得到的。其中  $\mathbf{H} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ ， $\mathbf{I}$  为飞机的惯性矩， $\boldsymbol{\omega}$  是惯性系中飞机的角速度，则有

$$\mathbf{M} = \left( \frac{d\mathbf{I}}{dt} \right)_i \boldsymbol{\omega} + \mathbf{I} \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_i \quad (28)$$

满足

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (29)$$

经过一系列推导，得到全量运动方程如下：

① 力方程

$$\begin{cases} F_x = m(\dot{u} + qw - rv) \\ F_y = m(\dot{v} + ru - pw) \\ F_z = m(\dot{w} + pv - qu) \end{cases} \quad (30)$$

② 力矩方程

$$\begin{cases} L = I_x \dot{p} - I_{zx}(\dot{r} + pq) - (I_y - I_z)qr \\ M = I_y \dot{q} - I_{zx}(r^2 - p^2) - (I_z - I_x)rp \\ N = I_z \dot{r} - I_{zx}(\dot{p} - qr) - (I_x - I_y)pq \end{cases} \quad (31)$$

③ 角速度方程

$$\begin{cases} \dot{\phi} = p + \tan \theta (q \sin \phi + r \cos \phi) \\ \dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi \\ \dot{\psi} = \sec \theta (q \sin \phi + r \cos \phi) \end{cases} \quad (32)$$

④ 速度方程

$$\begin{cases} \dot{x}_E = u \cos \theta \cos \psi + v(\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) + w(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \\ \dot{y}_E = u \cos \theta \sin \psi + v(\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi) + w(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \\ \dot{z}_E = -u \sin \psi + v \sin \phi \cos \theta + w \cos \phi \cos \theta \end{cases} \quad (33)$$

共有 12 个方程，18 个未知数，有无穷多解。

$x, y, \psi$  不影响运动方程，可忽略相关的方程与变量；再加入与操纵面偏角和发动机油门相关的力/力矩，给定操纵向量  $u = [\delta_a \ \delta_e \ \delta_r \ \delta_p]^T$ ，则方程有唯一解。

### 3.2 飞机小扰动线化运动方程

飞机的全量运动方程耦合且非线性，很难获得对于飞机设计和评估来说很必要的解析解。可基于小扰动理论对其进行线化和解耦，以进行解析求解。

由线化小扰动假设，飞机受扰动后，

**所有参量 = 基准状态量 + 小扰动量**

使用泰勒级数表示扰动下的气动力与力矩系数，引入静导数、动导数、加速度导数、操纵导数的概念，可获得纵向与横航向的小扰动线化运动方程，两者可表达均为一阶状态空间矩阵方程形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (34)$$

其中， $\mathbf{A}$  代表系统矩阵， $\mathbf{B}$  代表操纵效能矩阵， $\mathbf{x}$  代表状态向量， $\mathbf{u}$  代表控制向量，矩阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  取决于飞机的气动布局与飞行状态。

矩阵方程各系数与具体表达形式如下：

### ① 纵向方程

$$\dot{\mathbf{x}}_{long} = \mathbf{A}_{long} \mathbf{x}_{long} + \mathbf{B}_{long} \mathbf{u}_{long} \quad (35)$$

$$\mathbf{A}_{long} = \begin{bmatrix} \frac{C_{xu} + \xi_1 C_{zu}}{m_1} & \frac{C_{x\alpha} + \xi_1 C_{z\alpha}}{m_1} & \frac{C_{xq} + \xi_1 (m_1 + C_{zq} c_1)}{m_1} & \frac{C_{x\theta} + \xi_1 C_{z\theta}}{m_1} \\ \frac{C_{zu}}{m_1} & \frac{C_{z\alpha}}{m_1} & \frac{m_1 + C_{zq} c_1}{m_1} & \frac{C_{z\theta}}{m_1} \\ \frac{C_{mu} + \xi_2 C_{zu}}{I_{y1}} & \frac{C_{m\alpha} + \xi_2 C_{z\alpha}}{I_{y1}} & \frac{C_{mq} c_1 + \xi_2 (m_1 + C_{zq} c_1)}{I_{y1}} & \frac{\xi_2 C_{z\theta}}{I_{y1}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$\mathbf{B}_{long} = \begin{bmatrix} \frac{C_{x\delta_e} + \xi_1 C_{z\delta_e}}{m_1} \\ \frac{C_{z\delta_e}}{m_1} \\ \frac{C_{m\delta_e} + \xi_2 C_{z\delta_e}}{I_{y1}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

其中

$$m_1 = \frac{2m}{\rho U_0 S}, c_1 = \frac{\bar{c}}{2U_0}, I_{y1} = \frac{I_y}{q_c S \bar{c}}, \xi_1 = \frac{C_{x\dot{\alpha}} c_1}{m_1}, \xi_2 = \frac{C_{m\dot{\alpha}} c_1}{m_1} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} C_{xu} &= -2C_D - C_{Du}, & C_{x\dot{\alpha}} &= -C_{D\dot{\alpha}}, & C_{z\dot{\alpha}} &= -C_{L\dot{\alpha}} \\ C_{x\alpha} &= C_L - C_{D\alpha}, & C_{xq} &= -C_{Dq} = 0, & C_{zq} &= -C_{Lq} = 0 \\ C_{x\theta} &= -C_L \cos \theta, & C_{z\alpha} &= -C_{L\alpha} - C_D, & C_{x\delta_e} &= -C_{D\delta_e} \\ C_{z\theta} &= -C_L \sin \theta, & C_{zu} &= -2C_L - C_{Lu}, & C_{z\delta_e} &= -C_{L\delta_e} \end{aligned} \quad (39)$$

### ② 横航向方程

$$\dot{\mathbf{x}}_{lat} = \mathbf{A}_{lat} \mathbf{x}_{lat} + \mathbf{B}_{lat} \mathbf{u}_{lat} \quad (40)$$

$$\mathbf{A}_{lat} = \begin{bmatrix} \frac{C_{y\beta}}{m_1} & \frac{C_{y\phi}}{m_1} & \frac{C_{yp} b_1}{m_1} & -\frac{m_1 - b_1 C_{yr}}{m_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ C_{l\beta} I'_{z1} + C_{n\beta} I'_{xz1} + b_1 \xi_3 a_{11} & \xi_3 b_1 a_{12} & b_1 (C_{lp} I'_{z1} + C_{np} I'_{xz1} + \xi_3 a_{13}) & b_1 (C_{lr} I'_{z1} + C_{nr} I'_{xz1} + \xi_3 a_{14}) \\ I'_{x1} C_{n\beta} + I'_{xz1} C_{l\beta} + b_1 \xi_4 a_{11} & \xi_4 b_1 a_{12} & b_1 (C_{np} I'_{x1} + C_{lp} I'_{xz1} + \xi_4 a_{13}) & b_1 (I'_{x1} C_{nr} + I'_{xz1} C_{lr} + \xi_4 a_{14}) \end{bmatrix} \quad (41)$$



$$\mathbf{B}_{lat} = \begin{bmatrix} \frac{C_{y\delta_a}}{m_1} & \frac{C_{y\delta_r}}{m_1} \\ 0 & 0 \\ C_{l\delta_a} I'_{z1} + C_{n\delta_a} I'_{xz1} + \xi_3 b_1 b_{11} & C_{l\delta_r} I'_{z1} + C_{n\delta_r} I'_{xz1} + \xi_3 b_1 b_{12} \\ C_{n\delta_a} I'_{x1} + C_{l\delta_a} I'_{xz1} + \xi_4 b_1 b_{11} & C_{n\delta_r} I'_{x1} + C_{l\delta_r} I'_{xz1} + \xi_4 b_1 b_{12} \end{bmatrix} \quad (42)$$

其中

$$C_{y\phi} = \frac{Y_\phi}{qS} = \frac{G \cos \phi}{qS}, b_1 = \frac{b}{2U_0}, I_{x1} = \frac{I_x}{q_c S b}, I_{z1} = \frac{I_z}{q_c S b}, I_{xz1} = \frac{I_{xz}}{q_c S b} \quad (43)$$

$$I'_{x1} = \frac{I_{x1}}{I_{x1} I_{z1} - I_{xz1}^2}, I'_{z1} = \frac{I_{z1}}{I_{x1} I_{z1} - I_{xz1}^2}, I'_{xz1} = \frac{I_{xz1}}{I_{x1} I_{z1} - I_{xz1}^2} \quad (44)$$

$$\xi_3 = I'_{z1} C_{l\beta}, \xi_4 = I'_{x1} C_{n\beta} \quad (45)$$

由纵向与横航向气动导数数据，可计算出两组运动方程中的系统矩阵与操纵矩阵，其中系统矩阵  $\mathbf{A}$  是后续判断飞机动稳定性以及模态特性的重要根据。

### 3.3 飞机动稳定性与典型模态说明

#### 3.3.1 飞机小扰动线化运动方程的解与其动稳定特性

飞机动稳定性考虑的是扰动后飞机的响应特性，即  $\mathbf{x}_0 \neq 0, \mathbf{u} = 0$ 。对于一阶微分方程  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ，有通解  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{\lambda t}$ ，代入方程后，可得  $\lambda$  为对应系统矩阵  $\mathbf{A}$  的特征根。飞机的动稳定性取决于相应的特征根。一般地，对于实特征根，负实根对应动稳定；对于复特征根，复数负实部对应动稳定。也可由四阶飞机特征方程，根据 Routh-Hurwitz 判据，在不求解特征根的情况下可判断飞机动稳定性。

飞行动力学中将特征值及相应特征根称为模态，飞机响应是各模态之和，有

$$\mathbf{x}(t) = \sum_i \mathbf{x}_{0i} e^{\lambda_i t} \quad (46)$$

#### 3.3.2 飞机运动方程典型特征根、模态与品质要求

##### ① 典型纵向特征根、模态及品质要求

对于传统的静稳定飞机， $C_{m\alpha} < 0$ ，纵向特征方程系统矩阵通常有如下形式的两组共轭复根

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= r_1 \pm is_1 \\ \lambda_{3,4} &= r_2 \pm is_2\end{aligned}\tag{47}$$

其中，实部与虚部绝对值均较大的一对共轭复根分别对应具有重阻尼、较高频率的短周期模态，另一对对应具有轻阻尼、较低频率的长周期模态。

### A. 短周期模态

在自由响应下，短周期模态振荡收敛至稳定状态较快，超调量较大。驾驶员无需对该模态采取任何措施，主要运动参数包括迎角、俯仰角和俯仰角速度。

其近似自由频率与阻尼分别为

$$\omega_{n,sp} = \sqrt{\frac{C_{z\alpha}c_1C_{mq}}{m_1I_{y1}} - \frac{C_{m\alpha}}{I_{y1}}}, \quad \zeta_{sp} = \frac{-\left(\frac{C_{z\alpha}}{m_1} + \frac{c_1}{I_{y1}}(C_{mq} + C_{m\dot{\alpha}})\right)}{2\sqrt{\frac{C_{z\alpha}c_1C_{mq}}{m_1I_{y1}} - \frac{C_{m\alpha}}{I_{y1}}}}\tag{48}$$

纵向运动短周期品质要求如下：

- $O_s$ （精度）取决于  $\zeta_{sp}$ ， $\zeta_{sp}$  越大， $O_s$  越小，精度越高；
- $T_p$ （速度）取决于  $\omega_{n,sp}$  与  $\zeta_{sp}$ ， $\omega_{n,sp}$  越小， $\zeta_{sp}$  越大， $T_p$  越大，速度越慢；

对于不同飞行阶段（A, B, C）与飞机类型（I ~ IV），短周期模态的阻尼比与操纵期望参数（CAP）要求如表 2, 3 所示。

表 2 短周期模态阻尼比  $\zeta_{sp}$  要求

	CAT A & C	CAT A & C	CAT B	CAT B
	$\zeta_{sp,min}$	$\zeta_{sp,max}$	$\zeta_{sp,min}$	$\zeta_{sp,max}$
等级 I	0.35	1.3	0.3	2.0
等级 II	0.25	2.0	0.2	2.0
等级 III	0.15	—	0.15	—

表 3 短周期模态操纵期望参数（CAP） $\frac{\omega_{n,sp}^2}{n/\alpha}$  要求

	CAT A	CAT A	CAT B	CAT B	CAT C	CAT C
	$CAP_{min}$	$CAP_{max}$	$CAP_{min}$	$CAP_{max}$	$CAP_{min}$	$CAP_{max}$
等级 I	0.28	3.6	0.085	3.6	0.16	3.6
等级 II	0.16	10.0	0.038	10.0	0.096	10.0
等级 III	0.16	—	0.038	—	0.096	—

### B. 长周期模态

在自由响应下，长周期模态振荡收敛至稳定状态较慢，超调量较小。驾驶员可轻易通过纵向控制消除该模态，主要运动参数包括俯仰角和速度。

其近似自由频率与阻尼分别为

$$\omega_{n,p} = \frac{\sqrt{C_{x\theta}C_{zu}}}{m_1}, \quad \zeta_p = -\frac{C_{xu}}{2m_1\omega_{n,p}} \quad (49)$$

其中

$$\begin{cases} C_{xu} = -2C_D - C_{Du} \\ C_{x\theta} = -C_L \cos \theta_0 \\ C_{zu} = -2C_L - C_{Lu} \end{cases} \quad (50)$$

纵向运动长周期模态不稳定是可以接受的，倍幅时间 $T_2$ 越大，运动发散越慢，飞行品质越好。

对于不同飞行阶段（A, B, C）与飞机类型（I~IV），长周期模态品质要求基本相同，如表 4 所示。

表 4 长周期模态品质要求

	参数要求
等级 I	$\zeta_p > 0.04$
等级 II	$\zeta_p > 0$
等级 III	$T_2 > 55s$

### ① 典型横航向特征根、模态及品质要求

横航向运动方程系统矩阵的特征根形式、响应速度以及主要参数如表 5 所示。

表 5 典型横航向特征根对应模态及特性

特征根	响应速度	主要参数	模态名称
小负实根	缓慢	$\phi, r$	螺旋模态
大负实根	快速	$\phi, p$	滚转收敛模态
中等共轭复根	中等	$\beta, \phi, r$	荷兰滚模态

#### A. 滚转收敛模态

飞机受到横航向扰动后，首先体现的是重阻尼的滚转收敛模态，期间飞机主要关于  $x$  轴滚转并迅速建立稳定，其他参数变化缓慢。

其近似特征值为

$$\lambda_r = \frac{C_p b_1}{I_{x1}} \quad (51)$$

定义滚转收敛时间常数 $T_R$ ，满足

$$T_R = -\frac{1}{\lambda_R} \quad (52)$$

对于不同飞行阶段（A, B, C）与飞机类型（I ~ IV），滚转收敛模态  $T_R$  的飞行品质要求如表 6 所示。

表 6 滚转收敛模态  $T_R$  要求

飞机类型	飞行阶段	等级 I	等级 II	等级 III
I, IV	A & C	1.0	1.4	10.0
II, III	A & C	1.4	3.0	10.0
ALL	B	1.4	3.0	10.0

## B. 荷兰滚模态

飞机在横航向上紧随滚转收敛模态的振荡运动被称为荷兰滚模态，得名于荷兰人滑冰时左右摇摆着前进的姿态，其主要包括侧滑与航向运动。

其近似自由频率与阻尼分别为

$$\omega_{n,d} = \sqrt{\frac{1}{m_1 I_{z1}} [C_{y\beta} C_{nr} b_1 + C_{n\beta} (m_1 - b_1 C_{yr})]}, \quad \zeta_d = -\left( \frac{1}{2\omega_{n,d}} \right) \left( \frac{C_{y\beta}}{m_1} + \frac{b_1 C_{nr}}{I_{z1}} \right) \quad (53)$$

横航向运动荷兰滚品质要求如下：

- $O_s$ （精度）取决于  $\zeta_d$ ， $\zeta_d$  越大， $O_s$  越小，精度越高；
- $T_p$ （速度）取决于  $\omega_{n,d}$ ， $\omega_{n,d}$  越小， $T_p$  越大，速度越慢；

对于不同飞行阶段（A, B, C）与飞机类型（I ~ IV），荷兰滚模态的阻尼比、阻尼比与自然频率乘积、自然频率的要求如表 7 所示。

表 7 荷兰滚模态飞行品质要求\*

等级	飞行阶段	飞机类型	$\zeta_{d,\min}$	$(\zeta_d \omega_{n,d})_{\min}$	$\omega_{n,d,\min}$
I	A	I, IV	0.19	0.35	1.0
I	A	II, III	0.19	0.35	0.4
I	B	ALL	0.08	0.15	0.4
I	C	I, II-C <sup>b</sup> , IV	0.08	0.15	1.0
I	C	II-L <sup>b</sup> , III	0.08	0.15	0.4
II	ALL	ALL	0.02	0.05	0.4
III	ALLA	ALLA	0.02	—	0.4

\*注：① 对飞行品质起决定作用的参数为  $\zeta_d$ ；

② 飞机类型中字母 C 与 L 分别代表舰载（Carrier）和陆基（Land-based）飞机。

## C. 螺旋模态

横航向系统矩阵特征值中，较小的负实根对应螺旋模态，飞机作缓慢收敛运动，侧滑变化缓慢，滚转角速度很小。

其近似特征值为

$$\lambda_s = \frac{b_1(C_{nr}C_{l\beta} - C_{n\beta}C_{lr})}{I_{z1}C_{l\beta}} \quad (54)$$

满足当 $|C_{l\beta}C_{nr}| > |C_{lr}C_{n\beta}|$ 时，螺旋模态稳定。

螺旋模态发展缓慢，即使不稳定，飞行员也能轻易干预并消除该模态，故允许不稳定，只要发散不太快，其倍幅时 $T_s$ 飞行品质要求如表 8 所示。

表 8 螺旋模态倍幅时 $T_s$ 飞行品质要求

飞机类型	飞行阶段	等级 I	等级 II	等级 III
I, IV	A	12 s	8 s	4 s
I, IV	B & C	20 s	12 s	4 s
II, III	ALL	20 s	12 s	4 s

若 $\lambda_s < 0$ ，则螺旋模态稳定，飞行品质为等级 I。

### 3.4 给定飞机动稳定性评估与模态参数计算

#### 3.4.1 主要步骤说明

根据给定飞机在不同海拔高度与飞行马赫数情况下测得的纵向与横航向气动数据，进行动稳定性评估与模态识别主要按八个步骤展开，下面进行详细介绍。

**步骤一：**定义飞机飞行状态。

根据题意要求，需要考虑的飞机飞行状态有三种：

- ①  $H = 5000\text{m}$ ,  $M = 0.8$ （对流层，亚声速飞行）；
- ②  $H = 8000\text{m}$ ,  $M = 0.8$ （对流层，亚声速飞行）；
- ③  $H = 14000\text{m}$ ,  $M = 1.4$ （平流层，超声速飞行）。

**步骤二：**定义飞机主要几何与质量参数。已在前面所列表 1 中说明。

**步骤三：**根据飞机飞行状态，结合大气模型，计算飞行速度与当地大气密度。

大气密度 $\rho$ ，温度 $T$ ，压强 $p$ 均随着海拔高度 $H$ 的增加而发生变化，对于理想气体，有状态关系式

$$p = \rho RT \quad (55)$$

其中，理想气体状态常数  $R = 287 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$  与气体性质有关，与密度压强等无关。

理想大气模型<sup>[1]</sup>（1976 US Standard Atmosphere Model）如下：

若满足  $H < 11000\text{m}$ ，则有

$$\begin{aligned} T &= 288.15 - 0.0065H \\ p &= 101325(1 - 2.25577H \cdot 10^{-5})^{5.2588} \end{aligned} \quad (56)$$

若满足  $11000\text{m} \leq H < 20000\text{m}$ ，则有

$$\begin{aligned} T &= 216.65 \\ p &= 22631 \cdot e^{\frac{(H-11000)g}{287 \cdot 216.65}} \end{aligned} \quad (57)$$

大气密度与声速计算式为

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\gamma RT} \\ \rho &= \frac{p}{RT} \end{aligned} \quad (58)$$

**步骤四：** 导入纵向与横航向气动数据。

给定气动数据中，有关角度的静导数均以度为单位，需要在计算运动方程系数矩阵时转化为以弧度为单位。同时，由于本题中未给出飞机阻力系数信息，通过查阅相关资料<sup>[3]</sup>，可知此飞机主要的几何与质量参数方面与我国歼-7 飞机（仿前苏联米格-21）类似，设置飞机的阻力极曲线为

$$C_D = 0.012 + 0.07C_L^2 \quad (59)$$

其中诱导阻力因子  $k = 0.07$ ，故有

$$C_{D\alpha} = 2kC_L C_{L\alpha} \quad (60)$$

**步骤五：** 计算给定飞行状态下的气动导数（利用插值方法）

由于三个飞行状态中，有两个状态（②与③）没有对应气动导数数据，故需要利用插值（Interpolation）方法，由已知数据推算当前飞行状态下的气动导数。

使用 MATLAB 线性插值函数实现，利用插值方法获得数据有以下两种情况：

- 情况一：若飞行高度在表格中给定集合中，则提取对应高度下的气动数据，再通过插值马赫数获得气动导数数据；
- 情况二：若飞行高度不在表格中给定集合中，则采用两次插值（先插值

马赫数，再插值高度）来获得气动导数数据。

若飞行高度和马赫数超出已有数据的最大范围，则需要使用外插方法，在 MATLAB 相应调用函数中需要添加 'extrap' 方法控制。

在编写程序的过程中，发现对于需要外插的数据必须在一定合理区间，否则会导致大量数据与正常值偏差较大，从而影响动稳定性和模态计算的正确性。本文中的解决方法，是根据气动导数数据趋势，适当减少插值节点数，以避免大量插值点导致插值曲线不稳定的情况。另一种可以考虑的策略，是直接利用人工神经网络（如 BP 神经网络，RBF 神经网络等）直接建立有关气动导数与海拔高度  $H$  以及飞行马赫数  $Ma$  之间的预测代理模型，经过试验调试，发现 BP 神经网络代理模型的精度与神经元个数关系较大，不太稳定，需要未来进一步改进完善。

**步骤六：**计算运动方程系数矩阵  $A_{long}, B_{long}, A_{lat}, B_{lat}$ 。

利用直接或插值得到的纵向与横航向气动导数数据，由小扰动运动状态矩阵方程，分别计算纵向与横航向运动方程系数矩阵。

**步骤七：**计算主要运动模态参数。

对于纵向运动方程，计算  $A_{long}$  矩阵所有特征值，识别对应短周期模态与长周期模态的特征值，并计算短周期模态参数  $\zeta_{sp}, \omega_{sp}, CAP$ ；

对于横航向运动方程，计算  $A_{lat}$  矩阵所有特征值，识别对应滚转收敛、荷模态与螺旋模态的特征值，并计算滚转收敛模态参数  $T_r$  与荷兰滚模态参数  $\zeta_d, \omega_d$ 。

**步骤八：**主要运动模态飞行品质评估（对于 A 类飞行阶段）。

本步骤中，首先导入运动模态的飞行品质要求条件，并定义飞机类型（本题中可认为是战斗机/歼击机，即为 IV 类飞机）与飞行场域条件（A 类），对各个模态的飞行品质依次进行评估与结果输出。实际编程时适应各种条件通用输入。

### 3.4.2 给定飞机动稳定性分析结果

根据气动数据，利用 MATLAB 编程计算三种飞行状态下飞机的动稳定性与各运动模态特性，并对飞行品质进行分析，最终输出结果至命令行窗口。

① 飞行状态一： $H = 5000m, M = 0.8$ （对流层，亚声速飞行）；

当前飞行状态主要参数如表 9 所示。

表 9 飞行状态主要参数表（状态一）

高度 $H$	马赫数 $Ma$	大气温度 $T$ ( $K$ )	大气压强 $P$ ( $Pa$ )	大气密度 $\rho$ ( $kg/m^3$ )	当地声速 $a$ ( $m/s$ )	飞行速度 $V$ ( $m/s$ )
5000m	0.80	255.65	54001.01	0.74	320.50	256.40

纵向系统矩阵  $A_{long}$  与操纵矩阵  $B_{long}$  计算结果：

$$A_{long} = \begin{bmatrix} -0.0092 & 0.0223 & 0 & -0.0382 \\ -0.0765 & -1.0798 & 1 & 0 \\ 0.0237 & -9.5021 & -0.8851 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_{long} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1565 \\ -22.6886 \\ 0 \end{bmatrix}$$

横航向系统矩阵  $A_{lat}$  与操纵矩阵  $B_{lat}$  计算结果：

$$A_{lat} = \begin{bmatrix} -0.2953 & 0.0382 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -58.7003 & -0.0314 & -2.3503 & -0.1932 \\ 11.6716 & 0.0063 & -0.0711 & -0.7778 \end{bmatrix}, B_{lat} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0228 \\ 0 & 0 \\ -57.9386 & -57.9574 \\ 0 & -3.9580 \end{bmatrix}$$

飞机的纵向与横航向各特征运动模态分析如下：

#### A. 纵向运动模态计算分析

纵向系统矩阵  $A_{long}$  的特征值为

$$\lambda_{1,2} = -0.9826 \pm 3.0809i$$

$$\lambda_{3,4} = -0.0045 \pm 0.0523i$$

1) 纵向模态提取 I：短周期模态，对应一对较大共轭复根  $\lambda_{1,2}$ 。

计算短周期模态主要参数（取 4 位小数）如表 10 所示。

表 10 短周期模态主要参数表

	阻尼比 $\zeta_{sp}$	自由频率 $\omega_{sp}$	操纵期望参数 CAP ( $\frac{\omega_{n,sp}^2}{n/\alpha}$ )
直接计算	0.3039	3.2338	0.3720
近似公式	0.3038	3.2339	0.3720
两者误差	0.0190%	0.0018%	0.0037%

可见直接计算结果与近似公式结果符合较好，数据较为可靠，飞行品质如下：

短周期模态阻尼比  $\zeta_{sp}$  等级为：II 级；

短周期模态操纵期望参数 CAP 等级为：I 级；

短周期模态最终飞行品质评估等级为：II 级。



2) 纵向模态提取 II: 长周期模态, 对应一对较小共轭复根  $\lambda_{3,4}$ 。

长周期模态阻尼比为  $\zeta_p = 0.0849$ , 自由频率  $\omega_p = 0.0525$ 。

## B. 横航向运动模态计算分析

横航向系统矩阵  $\mathbf{A}_{lat}$  的特征值为

$$\lambda_{1,2} = -0.3337 \pm 3.5132i$$

$$\lambda_3 = -2.7014$$

$$\lambda_4 = -0.0547$$

1) 横航向模态提取 I: 滚转收敛模态, 对应一个较大负实根  $\lambda_3$ 。

滚转收敛时间常数  $T_r$ , 直接计算结果为 0.3702, 近似公式结果为 0.4255, 两者误差约为 14.9380%, 结果较为接近, 飞行品质如下:

滚转收敛模态最终飞行品质评估等级为: I 级。

2) 横航向模态提取 II: 荷兰滚模态, 对应一对中等共轭复根  $\lambda_{1,2}$ 。

计算荷兰滚模态主要参数 (取 4 位小数) 如表 11 所示。

表 11 荷兰滚模态主要参数表

	阻尼比 $\zeta_d$	自由频率 $\omega_d$	阻尼比 $\zeta_d$ * 自由频率 $\omega_d$
直接计算	0.0945	3.5290	0.3337
近似公式	0.1289	3.4498	0.4446
两者误差	36.3205%	2.2449%	33.2603%

可见自由频率  $\omega_d$  直接计算结果与近似公式结果符合较好, 数据较为可靠; 阻尼比虽偏差较大, 但一般而言直接计算结果较为准确, 飞行品质如下:

荷兰滚模态最终飞行品质评估等级为: II 级。

3) 横航向模态提取 III: 螺旋模态, 对应一对较小负实根  $\lambda_4$ , 具体评估略。

## ② 飞行状态二: $H = 8000\text{m}$ , $M = 0.8$ (对流层, 亚声速飞行);

当前飞行状态主要参数如表 12 所示。

表 12 飞行状态主要参数表 (状态二)

高度 $H$	马赫数 $Ma$	大气温度 $T$ (K)	大气压强 $P$ (Pa)	大气密度 $\rho$ ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	当地声速 $a$ ( $\text{m}/\text{s}$ )	飞行速度 $V$ ( $\text{m}/\text{s}$ )
5000m	0.80	236.15	35579.09	0.52	308.03	246.43

纵向系统矩阵  $\mathbf{A}_{long}$  与操纵矩阵  $\mathbf{B}_{long}$  计算结果:

$$\mathbf{A}_{long} = \begin{bmatrix} -0.0068 & 0.0229 & 0 & -0.0398 \\ -0.0796 & -0.7573 & 1 & 0 \\ 0.0174 & -6.3947 & -0.6431 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{long} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1155 \\ -16.0459 \\ 0 \end{bmatrix}$$

横航向系统矩阵  $\mathbf{A}_{lat}$  与操纵矩阵  $\mathbf{B}_{lat}$  计算结果：

$$\mathbf{A}_{lat} = \begin{bmatrix} -0.2118 & 0.0398 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -47.7207 & -0.0276 & -1.6286 & -0.1347 \\ 8.6482 & 0.0050 & -0.0523 & -0.5691 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{lat} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0189 \\ 0 & 0 \\ -40.8205 & -40.8336 \\ 0 & -3.1592 \end{bmatrix}$$

飞机的纵向与横航向各特征运动模态分析如下：

### A. 纵向运动模态计算分析

纵向系统矩阵  $\mathbf{A}_{long}$  的特征值为

$$\lambda_{1,2} = -0.7004 \pm 2.5279i$$

$$\lambda_{3,4} = -0.0032 \pm 0.0549i$$

1) 纵向模态提取 I：短周期模态，对应一对较大共轭复根  $\lambda_{1,2}$ 。

计算短周期模态主要参数（取 4 位小数）如表 13 所示。

表 13 短周期模态主要参数表

	阻尼比 $\zeta_{sp}$	自由频率 $\omega_{sp}$	操纵期望参数 CAP ( $\frac{\omega_{n,sp}^2}{n/\alpha}$ )
直接计算	0.2670	2.6232	0.3632
近似公式	0.2669	2.6233	0.3633
两者误差	0.0333%	0.0047%	0.0093%

可见直接计算结果与近似公式结果符合较好，数据较为可靠，飞行品质如下：

短周期模态阻尼比  $\zeta_{sp}$  等级为：II 级；

短周期模态操纵期望参数 CAP 等级为：I 级；

短周期模态最终飞行品质评估等级为：II 级。

2) 纵向模态提取 II：长周期模态，对应一对较小共轭复根  $\lambda_{3,4}$ 。

长周期模态阻尼比为  $\zeta_p = 0.0586$ ，自由频率  $\omega_p = 0.0550$ 。

### B. 横航向运动模态计算分析

横航向系统矩阵  $\mathbf{A}_{lat}$  的特征值为

$$\lambda_{1,2} = -0.1882 \pm 3.0228i$$

$$\lambda_3 = -1.9705$$

$$\lambda_4 = -0.0625$$

1) 横航向模态提取 I: 滚转收敛模态, 对应一个较大负实根  $\lambda_3$ 。

滚转收敛时间常数  $T_r$ , 直接计算结果为 0.5075, 近似公式结果为 0.6140, 两者误差约为 20.9937%, 结果较为接近, 飞行品质如下:

滚转收敛模态最终飞行品质评估等级为: I 级。

2) 横航向模态提取 II: 荷兰滚模态, 对应一对中等共轭复根  $\lambda_{1,2}$ 。

计算荷兰滚模态主要参数 (取 4 位小数) 如表 14 所示。

表 14 荷兰滚模态主要参数表

	阻尼比 $\zeta_d$	自由频率 $\omega_d$	阻尼比 $\zeta_d$ * 自由频率 $\omega_d$
直接计算	0.0621	3.0286	0.1882
近似公式	0.1081	2.9612	0.3202
两者误差	74.0227%	2.2260%	70.1490%

可见自由频率  $\omega_d$  直接计算结果与近似公式结果符合较好, 数据较为可靠; 阻尼比虽偏差较大, 但一般而言直接计算结果较为准确, 飞行品质如下:

荷兰滚模态最终飞行品质评估等级为: II 级。

3) 横航向模态提取 III: 螺旋模态, 对应一对较小负实根  $\lambda_4$ , 具体评估略。

### ③ 飞行状态三: $H = 14000\text{m}$ , $M = 1.4$ (平流层, 超声速飞行)。

当前飞行状态主要参数如表 15 所示。

表 15 飞行状态主要参数表 (状态三)

高度 $H$	马赫数 $Ma$	大气温度 $T$ ( $K$ )	大气压强 $P$ ( $Pa$ )	大气密度 $\rho$ ( $kg/m^3$ )	当地声速 $a$ ( $m/s$ )	飞行速度 $V$ ( $m/s$ )
14000m	1.40	216.65	14099.67	0.23	295.04	413.06

纵向系统矩阵  $A_{long}$  与操纵矩阵  $B_{long}$  计算结果:

$$A_{long} = \begin{bmatrix} -0.0047 & 0.0133 & 0 & -0.0237 \\ -0.0475 & -0.5684 & 1 & 0 \\ 0.0055 & -27.1268 & -0.4361 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_{long} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0663 \\ -16.2891 \\ 0 \end{bmatrix}$$

横航向系统矩阵  $A_{lat}$  与操纵矩阵  $B_{lat}$  计算结果:

$$\mathbf{A}_{lat} = \begin{bmatrix} -0.1462 & 0.0237 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -38.9126 & -0.0080 & -1.0327 & -0.2245 \\ 4.7427 & 0.0010 & -0.0432 & -0.3988 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{lat} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0017 \\ 0 & 0 \\ 4.1997 & 4.1991 \\ 0 & -0.5498 \end{bmatrix}$$

飞机的纵向与横航向各特征运动模态分析如下：

### A. 纵向运动模态计算分析

纵向系统矩阵  $\mathbf{A}_{long}$  的特征值为

$$\lambda_{1,2} = -0.5022 \pm 5.2079i$$

$$\lambda_{3,4} = -0.0024 \pm 0.0334i$$

1) 纵向模态提取 I：短周期模态，对应一对较大共轭复根  $\lambda_{1,2}$ 。

计算短周期模态主要参数（取 4 位小数）如表 16 所示。

表 16 短周期模态主要参数表

	阻尼比 $\zeta_{sp}$	自由频率 $\omega_{sp}$	操纵期望参数 CAP ( $\frac{\omega_{n,sp}^2}{n/\alpha}$ )
直接计算	0.0960	5.2320	1.1483
近似公式	0.0960	5.2321	1.1483
两者误差	0.0037%	0.0008%	0.0017%

可见直接计算结果与近似公式结果符合较好，数据较为可靠，飞行品质如下：

短周期模态阻尼比  $\zeta_{sp}$  等级小于 III 级，需要通过飞行控制系统来提升短周期模态飞行品质。

短周期模态操纵期望参数 CAP 等级为：I 级。

2) 纵向模态提取 II：长周期模态，对应一对较小共轭复根  $\lambda_{3,4}$ 。

长周期模态阻尼比为  $\zeta_p = 0.0705$ ，自由频率  $\omega_p = 0.0335$ 。

### B. 横航向运动模态计算分析

横航向系统矩阵  $\mathbf{A}_{lat}$  的特征值为

$$\lambda_{1,2} = -0.0522 \pm 2.2647i$$

$$\lambda_3 = -1.4191$$

$$\lambda_4 = -0.0541$$

1) 横航向模态提取 I：滚转收敛模态，对应一个较大负实根  $\lambda_3$ 。

滚转收敛时间常数 $T_r$ ，直接计算结果为 0.7047，近似公式结果为 0.9683，两者误差约为 37.4143%，模态飞行品质如下：

滚转收敛模态最终飞行品质评估等级为：I 级。

2) 横航向模态提取 II：荷兰滚模态，对应一对中等共轭复根 $\lambda_{1,2}$ 。

计算荷兰滚模态主要参数（取 4 位小数）如表 17 所示。

表 17 荷兰滚模态主要参数表

	阻尼比 $\zeta_d$	自由频率 $\omega_d$	阻尼比 $\zeta_d$ *自由频率 $\omega_d$
直接计算	0.0230	2.2653	0.0522
近似公式	0.1112	2.1911	0.2437
两者误差	382.4802%	3.2730%	366.6887%

可见自由频率 $\omega_d$ 直接计算结果与近似公式结果符合较好，数据较为可靠；阻尼比偏差较大，近似结果一致性差。荷兰滚模态飞行品质如下：

荷兰滚模态最终飞行品质评估等级为：II 级。

3) 横航向模态提取 III：螺旋模态，对应一对较小负实根 $\lambda_4$ ，具体评估略。

### 3.5 飞机动稳定性、运动模态分析 MATLAB 源代码说明

根据气动数据，利用 MATLAB 编程计算飞机纵向与横航向方程系数矩阵，并分析动稳定性以及各运动模态参数，最终进行飞行品质评估。程序源代码如附录二（程序 P2）所示，原始文件详见附件。

程序文件名称：Program\_Dynamic\_Stability\_Analysis.m

数据文件：① Longitudinal Aerodynamic Data.txt（纵向气动数据）

① Lateral-Directional Aerodynamic Data.txt（横航向气动数据）

测试软件：MATLAB R2019b 软件，运行结果均在命令行窗口输出。

## 4 参考文献

- [1] Pamadi B N. Performance, stability, dynamics, and control of airplanes[M]. American Institute of aeronautics and astronautics, 2004.
- [2] Appendix B - 1976 US Standard Atmosphere Model, Commercial Airplane Design Principles, Butterworth-Heinemann, 2014, Pages 487-495.
- [3] [https://en.wikipedia.org/wiki/Mikoyan-Gurevich\\_MiG-21](https://en.wikipedia.org/wiki/Mikoyan-Gurevich_MiG-21)

## 附录一：给定飞机气动数据表格

问题中给定飞机的纵向与横航向气动数据分别如附表 1 与 2 所示。

附表 1 飞机纵向气动数据

$H$	$Ma$	$C_{L\alpha}$	$C_{m\dot{C}_L}$	$C_{m\dot{\delta}_e}$	$C_{L\dot{\delta}_e}$	$C_{mq}$	$C_{m\dot{\alpha}}$	$C_{m\ddot{\alpha}}$	$C_{m0}$
0	0.6	0.049134	-0.061853	-0.007654	0.007516	-1.352448	-0.68187	-0.003039	-0.004
	0.65	0.049152	-0.061533	-0.007429	0.007233	-1.331722	-0.69576	-0.003024	-0.003938
	0.7	0.049275	-0.061298	-0.007227	0.00696	-1.316724	-0.711698	-0.00302	-0.004
	0.75	0.049285	-0.060591	-0.007102	0.006751	-1.31355	-0.719744	-0.002986	-0.004125
	0.8	0.049808	-0.061364	-0.006925	0.006485	-1.310812	-0.747389	-0.003056	-0.0045
	0.85	0.050458	-0.056698	-0.006704	0.006225	-1.310943	-0.76016	-0.002861	-0.00588
	0.89	0.051936	-0.064577	-0.006576	0.005983	-1.311692	-0.82838	-0.003354	-0.00588
3	0.6	0.049813	-0.065142	-0.008173	0.008018	-1.428057	-0.701682	-0.003245	-0.004
	0.7	0.050247	-0.064988	-0.007861	0.007561	-1.416511	-0.739499	-0.003266	-0.004
	0.8	0.051114	-0.064963	-0.007613	0.007117	-1.426153	-0.785726	-0.003321	-0.0045
	0.85	0.05192	-0.059929	-0.007438	0.006894	-1.441501	-0.804845	-0.003112	-0.005335
	0.9	0.054187	-0.072319	-0.007399	0.006672	-1.470148	-0.911483	-0.003919	-0.0065
	0.959	0.057683	-0.100099	-0.007359	0.006345	-1.488155	-1.094159	-0.005774	-0.0065
	1.018	0.054401	-0.139592	-0.006882	0.005774	-1.416703	-1.079232	-0.007594	-0.007058
5	0.6	0.050181	-0.067	-0.008468	0.008304	-1.470788	-0.712302	-0.003362	-0.004
	0.7	0.050788	-0.067203	-0.008243	0.007923	-1.475907	-0.75469	-0.003413	-0.004
	0.8	0.051882	-0.067421	-0.008086	0.007553	-1.50342	-0.807499	-0.003498	-0.0045
	0.9	0.055177	-0.074666	-0.007889	0.007105	-1.56125	-0.944372	-0.00412	-0.006
	1	0.057773	-0.139723	-0.007766	0.006529	-1.604251	-1.221508	-0.008072	-0.007
	1.1	0.054718	-0.162558	-0.006904	0.005795	-1.543589	-0.894465	-0.008895	-0.007
	1.265	0.050743	-0.175728	-0.00541	0.004635	-1.282072	-0.622324	-0.008917	-0.003936
8	0.7	0.05144	-0.06997	-0.008726	0.008382	-1.550567	-0.772805	-0.003599	-0.004
	0.85	0.053881	-0.065182	-0.008649	0.007999	-1.649769	-0.862703	-0.003512	-0.005333
	1	0.059819	-0.146665	-0.008675	0.007281	-1.79449	-1.303964	-0.008773	-0.007
	1.1	0.056965	-0.173093	-0.007899	0.006613	-1.752683	-0.791361	-0.00986	-0.007
	1.2	0.054372	-0.185887	-0.007022	0.005877	-1.601885	-0.770582	-0.010107	-0.006
	1.3	0.052629	-0.191936	-0.006145	0.005296	-1.439433	-0.635595	-0.010101	-0.003
	1.505	0.048309	-0.190349	-0.00471	0.004405	-1.166491	-0.443293	-0.009196	0.000004
10	0.7	0.051777	-0.071439	-0.008985	0.008627	-1.590357	-0.782104	-0.003699	-0.004
	0.9	0.057216	-0.080334	-0.009137	0.008213	-1.785426	-1.009267	-0.004596	-0.006
	1	0.061046	-0.151107	-0.009302	0.007799	-1.923216	-1.353289	-0.009224	-0.007
	1.2	0.055978	-0.195356	-0.007836	0.006542	-1.762919	-0.81117	-0.010936	-0.006
	1.3	0.054075	-0.200377	-0.006739	0.005794	-1.562019	-0.666854	-0.010835	-0.003
	1.5	0.04997	-0.202259	-0.005353	0.004982	-1.302829	-0.461777	-0.010107	0
	1.712	0.044438	-0.193633	-0.004176	0.004068	-1.032418	-0.312294	-0.008605	0

附表 2 飞机横航向气动数据

$H$	$Ma$	$C_{y\beta}$	$C_{l\beta}$	$C_{n\beta}$	$C_{y\delta_z}$	$C_{l\delta_z}$	$C_{n\delta_z}$	$C_{l\delta_a}$	$C_{l_p}$	$C_{n_r}$	$C_{n_p}$	$C_{l_r}$
0	0.6	-0.01465	-0.001162	0.002563	0.001123	-0.000175	-0.000846	-0.001158	-0.177226	-0.500806	-0.054195	-0.070223
	0.65	-0.01432	-0.001078	0.002388	0.001008	-0.000157	-0.000767	-0.001108	-0.175531	-0.49232	-0.054138	-0.06733
	0.7	-0.014	-0.001003	0.002233	0.000896	-0.000139	-0.00069	-0.001051	-0.174449	-0.48634	-0.054068	-0.065004
	0.75	-0.0137	-0.000933	0.002126	0.00083	-0.000128	-0.000641	-0.000989	-0.174482	-0.488417	-0.054475	-0.063813
	0.8	-0.01343	-0.000871	0.001998	0.000717	-0.000111	-0.000571	-0.000916	-0.174009	-0.485736	-0.054429	-0.062247
	0.85	-0.01325	-0.000818	0.001878	0.000597	-0.000093	-0.000505	-0.00084	-0.17093	-0.477364	-0.054632	-0.060999
	0.89	-0.01311	-0.00078	0.001783	0.000501	-0.00008	-0.000451	-0.000765	-0.171269	-0.475552	-0.054279	-0.059777
3	0.6	-0.01511	-0.001361	0.002805	0.001344	-0.000213	-0.000998	-0.001228	-0.180342	-0.524674	-0.057369	-0.081807
	0.7	-0.01448	-0.001163	0.002505	0.00114	-0.00018	-0.000859	-0.001143	-0.178675	-0.514419	-0.058153	-0.075348
	0.8	-0.0139	-0.001	0.002272	0.000924	-0.000144	-0.000715	-0.00103	-0.179509	-0.512287	-0.058713	-0.07111
	0.85	-0.01374	-0.000941	0.00217	0.000798	-0.000126	-0.00065	-0.000966	-0.177105	-0.504661	-0.0593	-0.069518
	0.9	-0.01363	-0.000893	0.002103	0.000709	-0.000115	-0.000614	-0.000885	-0.179067	-0.508171	-0.059729	-0.068502
	0.95	-0.0135	-0.000847	0.002005	0.00058	-0.000098	-0.000546	-0.000785	-0.184234	-0.514386	-0.0589	-0.066468
	1.018	-0.01341	-0.000778	0.001793	0.000393	-0.000067	-0.000391	-0.000391	-0.178272	-0.506353	-0.056859	-0.064916
5	0.6	-0.01542	-0.001539	0.002954	0.001475	-0.000237	-0.001088	-0.001265	-0.181979	-0.539751	-0.059154	-0.091615
	0.7	-0.01481	-0.001303	0.002681	0.0013	-0.000208	-0.000968	-0.001194	-0.180983	-0.53354	-0.060677	-0.083889
	0.8	-0.01425	-0.001115	0.002479	0.001102	-0.000174	-0.000838	-0.001096	-0.182699	-0.534032	-0.061831	-0.078902
	0.9	-0.01397	-0.000988	0.002298	0.000833	-0.000136	-0.00071	-0.000965	-0.18313	-0.526818	-0.062788	-0.074911
	1	-0.01393	-0.000889	0.002132	0.000605	-0.000104	-0.000566	-0.0007	-0.192309	-0.537379	-0.062224	-0.073001
	1.1	-0.01376	-0.000781	0.001931	0.000327	-0.000061	-0.000324	-0.000399	-0.177831	-0.527219	-0.05793	-0.067053
	1.265	-0.01345	-0.000559	0.00192	0.000106	-0.000023	-0.000127	-0.000299	-0.169904	-0.55426	-0.056923	-0.062751
8	0.7	-0.01532	-0.001593	0.002923	0.00151	-0.000249	-0.001113	-0.001254	-0.183656	-0.56193	-0.063935	-0.100498
	0.85	-0.0147	-0.001265	0.002716	0.001237	-0.000201	-0.000966	-0.001131	-0.185183	-0.561999	-0.067434	-0.09078
	1	-0.01454	-0.001056	0.002494	0.000823	-0.000144	-0.000743	-0.000838	-0.20089	-0.574043	-0.067852	-0.085544
	1.1	-0.01437	-0.00093	0.002304	0.000482	-0.000091	-0.000449	-0.000545	-0.187588	-0.563935	-0.063989	-0.078516
	1.2	-0.01415	-0.000765	0.002379	0.000258	-0.000052	-0.000255	-0.000467	-0.183321	-0.576533	-0.062807	-0.074111
	1.3	-0.01385	-0.000631	0.002105	0.000202	-0.000042	-0.000199	-0.000412	-0.17704	-0.618098	-0.066271	-0.074584
	1.505	-0.01313	-0.000465	0.00173	0.000109	-0.000022	-0.000108	-0.000298	-0.170271	-0.579571	-0.062926	-0.066663

## 附录二：飞机稳定性分析 MATLAB 源程序

飞机静稳定性、操纵面效率分析以及动稳定性、运动模态飞行品质分析 MATLAB 程序分别如 P1 与 P2 所示。

程序编号	P1	实现功能	飞机静稳定性、操纵面效率分析
程序名称	Program_Static_Stability_Analysis.m	读取文件	① Longitudinal Aerodynamic Data.txt ② Lateral-Directional Aerodynamic Data.txt
<pre> %% 《飞行动力学》（下）课程大作业 %% N0.1: 飞机纵横航三轴静稳定性、操纵面效率分析 %% 问题描述 % 试根据表1与表2中的气动数据，绘制飞机纵横航三轴静稳定性、操纵面效率 % 随高度与马赫数的变化曲线，并对曲线变化趋势及造成该趋势的原因进行分析。  %% 个人信息 % 授课老师：刘艳老师 % 姓名：冯铮浩 % 学号：2017300281 % 学院：航空学院 % 完成时间：2020年5月1日  %% 程序初始化与数据导入 % 程序初始化 clear all clc format short; fprintf('【个人信息】\n'); fprintf('《飞行动力学》（下）课程大作业\n'); fprintf('姓名：冯铮浩\n'); fprintf('学号：2017300281\n'); fprintf('学院：航空学院\n'); fprintf('\n'); fprintf('【Problem 1】 飞机静稳定性、操纵面效率分析程序运行结果\n'); fprintf('\n'); fprintf('图形可视化结果见图窗 Figure 1 ~ 6: \n'); fprintf('\n'); fprintf('图1.1: 飞机纵向静稳定性随马赫数Ma的变化曲线（不同海拔高度H）\n'); fprintf('图1.2: 飞机纵向操纵面效率随马赫数Ma的变化曲线（不同海拔高度H）\n'); fprintf('图2.1: 飞机航向静稳定性随马赫数Ma的变化曲线（不同海拔高度H）\n'); fprintf('图2.2: 飞机航向操纵面效率随马赫数Ma的变化曲线（不同海拔高度H）\n'); fprintf('图3.1: 飞机横向静稳定性随马赫数Ma的变化曲线（不同海拔高度H）\n'); fprintf('图3.2: 飞机横向操纵面效率随马赫数Ma的变化曲线（不同海拔高度H）\n'); fprintf('\n'); </pre>			



```

% 导入飞机纵向与横航向气动数据
LAD=load('Longitudinal Aerodynamic Data.txt');
% 纵向气动数据各列代表变量说明
% 1 - H（高度）； 2 - Ma（马赫数）； 3 - C_L_alfa（升力线斜率）； 4 - C_m_CL;
% 5 - C_m_det_e（升降舵操纵效率）； 6 - C_L_det_e; 7 - C_m_q（阻尼动导数）；
% 8 - C_m_alfa_dot（阻尼动导数）； 9 - C_m_alfa（纵向静稳定性指标，俯仰力矩对迎角导数的导数）；
% 10 - C_m0（零升俯仰力矩系数）

% 导入飞机横航向气动数据
LDAD=load('Lateral-Directional Aerodynamic Data.txt');
% 横航向气动数据各列代表变量说明
% 1 - H（高度）； 2 - Ma（马赫数）； 3 - C_y_beta; 4 - C_l_beta（横向静稳定性指标，升力对侧滑角的导数）；
% 5 - C_n_beta（航向静稳定性指标，偏航力矩对侧滑角的导数）； 6 - C_y_det_r; 7 - C_l_det_r;
% 8 - C_n_det_r（方向舵操纵效率）； 9 - C_l_det_a（操纵副翼操纵效率）；
% 10 - C_l_p（滚转阻尼动导数）； 11 - C_n_r（偏航阻尼动导数）； 12 - C_n_p（交叉阻尼动导数）； 13 - C_l_r（交叉阻尼导数）

% 提取纵横航向状态的个数
LAD_num=length(LAD);
LDAD_num=length(LDAD);

%% 程序模块①-->静稳定性分析：纵向静稳定性与纵向操纵面（升降舵Elevator）效率绘图分析
%% 步骤一：提取分析纵向静稳定性与纵向操纵面效率参数矩阵
% 预设飞行高度H的取值集合
Long_H_set=[0,3,5,8,10];
Long_Ma_Sta_Mat=zeros(5,7); % 设定对应状态马赫数矩阵
Long_Sta_Mat=zeros(5,7); % 设定纵向静稳定性状态矩阵
Long_Ctrl_Mat=zeros(5,7); % 设定对应状态升降舵操纵效率矩阵
Long_Mat_num=zeros(1,5);
for i=1:LAD_num
    k=find(Long_H_set==LAD(i,1)); % 记录飞机当前所在海拔高度的对应状态编号
    Long_Mat_num(1,k)=Long_Mat_num(1,k)+1; % 计数器加1
    Long_Sta_Mat(k,Long_Mat_num(1,k))=LAD(i,9); % 记录C_m_alfa
    Long_Ma_Sta_Mat(k,Long_Mat_num(1,k))=LAD(i,2); % 记录对应Ma
    Long_Ctrl_Mat(k,Long_Mat_num(1,k))=LAD(i,5); % 记录对应C_m_det_e
end

%% 步骤二：绘制飞机纵向静稳定性随马赫数的变化曲线（共5个高度）
plot(Long_Ma_Sta_Mat,Long_Sta_Mat,'LineWidth',2,'MarkerSize',3,'Marker','o');
xlabel('马赫数\itMa'),ylabel('C_{m\alpha}'),title('图1.1：飞机纵向静稳定性C_{m\alpha}随马

```

```

赫数Ma的变化曲线（不同海拔高度H）');
legend('H = 0 km','H = 3 km','H = 5 km','H = 8 km','H = 10 km','FontName','Times New Roman');
grid on;
box on;

% 设置Y坐标范围
ylim(gca,[-0.012 0]);

% 对Y方向反转
set(gca,'YDir','reverse');

%% 步骤三：绘制飞机纵向操纵面效率随马赫数的变化曲线（共5个高度）
figure;
plot(Long_Ma_Sta_Mat,Long_Ctrl_Mat,'LineWidth',2,'MarkerSize',3,'Marker','o');
xlabel('马赫数\itMa'),ylabel('C_{m\delta{e}}'),title('图1.2：飞机纵向操纵面（升降舵）效率C_{m\delta{e}}随马赫数Ma的变化曲线（不同海拔高度H）');
legend('H = 0 km','H = 3 km','H = 5 km','H = 8 km','H = 10 km','FontName','Times New Roman');
grid on;
box on;
% 对Y方向反转
set(gca,'YDir','reverse');
% 设置Y坐标范围
ylim(gca,[-0.010 -0.004]);

%% 程序模块②-->静稳定性分析：航向静稳定性与航向操纵面（方向舵Rudder）效率绘图分析
%% 步骤一：提取分析航向静稳定性与航向操纵面效率参数矩阵
Dir_H_set=[0,3,5,8];
Dir_Ma_Sta_Mat=zeros(4,7); % 设定对应状态马赫数矩阵
Dir_Sta_Mat=zeros(4,7); % 设定航向静稳定性状态矩阵
Dir_Ctrl_Mat=zeros(4,7); % 设定对应状态方向舵操纵效率矩阵
Dir_Mat_num=zeros(1,4);
for i=1:LDAD_num
    k=find(Dir_H_set==LDAD(i,1)); % 记录飞机当前所在海拔高度的对应状态编号
    Dir_Mat_num(1,k)=Dir_Mat_num(1,k)+1; % 计数器加1
    Dir_Ma_Sta_Mat(k,Dir_Mat_num(1,k))=LDAD(i,2); % 记录对应Ma
    Dir_Sta_Mat(k,Dir_Mat_num(1,k))=LDAD(i,5); % 记录C_l_beta
    Dir_Ctrl_Mat(k,Dir_Mat_num(1,k))=LDAD(i,8); % 记录对应C_n_det_r
end

%% 步骤二：绘制飞机航向静稳定性随马赫数的变化曲线（共4个高度）
figure;

```

```

plot(Dir_Ma_Sta_Mat,Dir_Sta_Mat,'LineWidth',2,'MarkerSize',3,'Marker','o');
xlabel('马赫数\itMa'),ylabel('C_{n\beta}'),title('图2.1: 飞机航向静稳定性C_{n\beta}随马赫数Ma的变化曲线（不同海拔高度H）');
legend('H = 0 km','H = 3 km','H = 5 km','H = 8 km','FontName','Times New Roman');
grid on;
box on;

%% 步骤三：绘制飞机航向操纵面效率随马赫数的变化曲线（共4个高度）
figure;
plot(Dir_Ma_Sta_Mat,Dir_Ctrl_Mat,'LineWidth',2,'MarkerSize',3,'Marker','o');
xlabel('马赫数\itMa'),ylabel('C_{n\delta{r}}'),title('图2.2: 飞机航向操纵面（方向舵）效率C_{n\delta{r}}随马赫数Ma的变化曲线（不同海拔高度H）');
legend('H = 0 km','H = 3 km','H = 5 km','H = 8 km','FontName','Times New Roman');
grid on;
box on;
% 对Y方向反转
set(gca,'YDir','reverse');

%% 程序模块③-->静稳定性分析：横向静稳定性与横向操纵面（副翼Ailron）效率绘图分析
%% 步骤一：提取分析横向静稳定性与横向操纵面效率参数矩阵
Lat_H_set=[0,3,5,8];
Lat_Ma_Sta_Mat=zeros(4,7); % 设定对应状态马赫数矩阵
Lat_Sta_Mat=zeros(4,7); % 设定横向静稳定性状态矩阵
Lat_Ctrl_Mat=zeros(4,7); % 设定对应状态方向舵操纵效率矩阵
Lat_Mat_num=zeros(1,4);
for i=1:LDAD_num
    k=find(Lat_H_set==LDAD(i,1)); % 记录飞机当前所在海拔高度的对应状态编号
    Lat_Mat_num(1,k)=Lat_Mat_num(1,k)+1; % 计数器加1
    Lat_Ma_Sta_Mat(k,Lat_Mat_num(1,k))=LDAD(i,2); % 记录对应Ma
    Lat_Sta_Mat(k,Lat_Mat_num(1,k))=LDAD(i,4); % 记录C_n_beta
    Lat_Ctrl_Mat(k,Lat_Mat_num(1,k))=LDAD(i,9); % 记录对应C_l_det_a
end

%% 步骤二：绘制飞机横向静稳定性随马赫数的变化曲线（共4个高度）
figure;
plot(Lat_Ma_Sta_Mat,Lat_Sta_Mat,'LineWidth',2,'MarkerSize',3,'Marker','o');
xlabel('马赫数\itMa'),ylabel('C_{l\beta}'),title('图3.1: 飞机横向静稳定性C_{l\beta}随马赫数Ma的变化曲线（不同海拔高度H）');
legend('H = 0 km','H = 3 km','H = 5 km','H = 8 km','FontName','Times New Roman');
grid on;
box on;
% 对Y方向反转
set(gca,'YDir','reverse');

```

```

% 设置Y坐标范围
ylim(gca,[-0.0018 0]);

%% 步骤三：绘制飞机横向操纵面效率随马赫数的变化曲线（共4个高度）
figure;
plot(Lat_Ma_Sta_Mat',Lat_Ctrl_Mat','LineWidth',2,'MarkerSize',3,'Marker','o');
xlabel('马赫数\itMa'),ylabel('C_{l\delta{a}}'),title('图3.2：飞机横向操纵面（方向舵）效率C_{l\delta{a}}随马赫数Ma的变化曲线（不同海拔高度H）');
legend('H = 0 km','H = 3 km','H = 5 km','H = 8 km','FontName','Times New Roman');
grid on;
box on;
% 对Y方向反转
set(gca,'YDir','reverse');
% 设置Y坐标范围
ylim(gca,[-0.0014 0]);

```

程序编号	P2	实现功能	飞机动稳定性、运动模态分析	
程序名称	Program_Dynamic_Stability_Analysis.m	读取文件	① Longitudinal Aerodynamic Data.txt	② Lateral-Directional Aerodynamic Data.txt
<p>%% 《飞行动力学》（下）课程大作业</p> <p>%% N0.2：飞机动稳定性、各运动模态特性分析</p> <p>%% 问题描述</p> <p>% Using the data of the given aircraft to</p> <p>% 1. Calculate the short-period, roll-subsidence and Dutch-roll mode parameters, including <math>\zeta_{sp}</math>, <math>\omega_{sp}</math>, <math>T_r</math>, <math>\zeta_d</math>, <math>\omega_d</math>;</p> <p>% 2. Evaluate the flying quality for Category A flight phases;</p> <p>% 3. Design proper flight control system to make the aircraft has Level I flying quality</p> <p>% For the given flight condition: ① H=5000m, M=0.8; ② H=8000m, M=0.8; ③ H=14000m, M=1.4.</p> <p>%% 求解关键步骤</p> <p>% Step 1: Define the flight condition;</p> <p>% Step 2: Define the geometry and mass data;</p> <p>% Step 3: Calculate the airspeed and density based on flight condition,using the atmosphere model;</p> <p>% Step 4: Load aerodynamic data;</p> <p>% Step 5: Calculate the aerodynamic derivatives based on the flight condition using interpolation;</p> <p>% Step 6: Calculate the matrix A_long,B_long, A_lat, B_lat;</p> <p>% Step 7: Calculate the mode parameters, i.e., <math>\zeta_{sp}</math>, <math>\omega_{sp}</math>, CAP,and <math>T_r,\zeta_d, \omega_d</math>;</p>				

```

%% 个人信息
% 授课老师: 刘艳老师
% 姓名: 冯铮浩
% 学号: 2017300281
% 学院: 航空学院
% 完成时间: 2020年5月1日

%% 程序初始化与环境设置
clear all
clc
format short;
fprintf('【个人信息】\n');
fprintf('《飞行动力学》（下）课程大作业\n');
fprintf('姓名: 冯铮浩\n');
fprintf('学号: 2017300281\n');
fprintf('学院: 航空学院\n');
fprintf('\n');
fprintf('【Problem 2】 飞机稳定性、运动模态分析程序运行结果\n');
fprintf('\n');

%% Question 1 (特征模态计算: Calculate the short-period, roll-subsidence and Dutch-roll
mode parameters, including  $\zeta_{sp}$ ,  $\omega_{sp}$ ,  $T_r$ ,  $\zeta_d$ ,  $\omega_d$ )
fprintf('【Question 1】 飞机飞行特征模态计算: \n');
fprintf('\n');

%% Step 1: 定义飞行状态
% 导入飞机飞行数据
H=5000; % 定义飞行高度 (可调整输入变量)
Ma=0.8; % 定义飞行马赫数 (可调整输入变量)
g=9.807; % 北纬45度地区的重力加速度值

% 定义飞机水平定值飞行各角度状态
alfa=0; % 迎角
beta=0; % 侧滑角

psi=0; % 偏航角
theta=alfa; % 俯仰角
phi=0; % 滚转角

%% Step 2: 定义飞机几何与质量参数
fprintf('【Part 1】 飞机的主要几何与质量参数\n');
fprintf('\n');
% 导入飞机几何相关数据
S=23; % 参考机翼面积 (单位: m^2)

```

```

b=7.15;% 机翼翼展长度（单位：m）
c_mean=4.002;% 机翼平均气动弦长（单位：m）

fprintf('飞机的主要几何尺寸：\n');
fprintf('参考机翼面积 S = %.4f m^2\n',S);
fprintf('机翼翼展长度 b = %.4f m\n',b);
fprintf('机翼平均气动弦长 c_mean = %.4f m\n',c_mean);
fprintf('\n');

% 导入飞机质量相关数据
m=6000;% 全机重量（单位：kg）
Ix=4312;% 全机绕x轴主惯性矩（单位：kg*m^2）
Iy=45374;% 全机绕y轴主惯性矩（单位：kg*m^2）
Iz=48216;% 全机绕z轴主惯性矩（单位：kg*m^2）
Ixz=0;% 全机绕x轴,z轴惯性积（单位：kg*m^2）

fprintf('飞机的主要质量参数：\n');
fprintf('全机重量 m = %.4f kg\n',m);
fprintf('全机绕x轴主惯性矩 Ix = %.4f kg*m^2\n',Ix);
fprintf('全机绕y轴主惯性矩 Iy = %.4f kg*m^2\n',Iy);
fprintf('全机绕z轴主惯性矩 Iz = %.4f kg*m^2\n',Iz);
fprintf('全机绕x轴,z轴惯性积 Ixz = %.4f kg*m^2\n',Ixz);
fprintf('\n');

%% Step 3: 根据飞机飞行状态，结合大气模型，计算飞行速度与当地大气密度
% 计算当前飞行海拔高度下的温度T与压强p
if (H<11000) % 对流层高度
    T=288.15-0.0065*H;
    p=101325*((1-2.25577*H*(1e-5)).^(5.2588)); % 压强p与海拔高度H之间关系计算公式一
% p=101.3*1000*((288.15./((288.15-6.5*H*0.001)).^(34.17./(-6.5)))); % 压强p与海拔高度H之间关系计算公式二
elseif (H<20000) % 同温层高度
    T=216.65;
    p=22631*exp(-((H-11000)*g)/(287*216.65));
else
    fprintf('\n');
    fprintf('错误：当前飞行海拔高度大于20000m！请调整状态参数后重新启动程序！\n');
    fprintf('\n');
    exit;
end

% 计算当前飞行速度
a=sqrt(1.4*287*T); % 计算当地音速

```

```

V=Ma*a; % 计算飞行速度

% 计算当地大气密度
rou=p/(287*T);

% 输出当前飞行状态信息
fprintf('【Part 2】 飞机当前设定飞行状态\n');
fprintf('\n');

fprintf('飞行海拔高度: H = %d (m) \n',H);
fprintf('飞行马赫数: Ma = %.2f\n',Ma);
fprintf('当地温度: T = %.2f (K) \n',T);
fprintf('当地大气压强: p = %.2f (Pa) \n',p);
fprintf('当地大气密度:  $\rho = %.2f$  (kg/m^3) \n',rou);
fprintf('当地音速: a = %.2f (m/s) \n',a);
fprintf('当前飞行速度: V = %.2f (m/s) \n',V);
fprintf('\n');

%% Step 4: 导入给定飞机气动数据
LAD=load('Longitudinal Aerodynamic Data.txt');
% 纵向气动数据各列代表变量说明
% 1 - H (高度); 2 - Ma (马赫数); 3 - C_L_alfa (升力线斜率); 4 - C_m_CL;
% 5 - C_m_det_e (升降舵操纵效率); 6 - C_L_det_e; 7 - C_m_q (阻尼动导数);
% 8 - C_m_alfa_dot (阻尼动导数); 9 - C_m_alfa (纵向静稳定性指标, 俯仰力矩对迎角导数的导数);
% 10 - C_m0 (零升俯仰力矩系数)

% 导入飞机横航向气动数据
LDAD=load('Lateral-Directional Aerodynamic Data.txt');
% 横航向气动数据各列代表变量说明
% 1 - H (高度); 2 - Ma (马赫数); 3 - C_y_beta; 4 - C_l_beta (横向静稳定性指标, 升力对侧滑角的导数);
% 5 - C_n_beta (航向静稳定性指标, 偏航力矩对侧滑角的导数); 6 - C_y_det_r; 7 - C_l_det_r;
% 8 - C_n_det_r (方向舵操纵效率); 9 - C_l_det_a (操纵副翼操纵效率);
% 10 - C_l_p (滚转阻尼动导数); 11 - C_n_r (偏航阻尼动导数); 12 - C_n_p (交叉阻尼动导数); 13 - C_l_r (交叉阻尼导数)

% 提取纵横航向状态的个数
LAD_num=length(LAD); % 纵向状态个数
LDAD_num=length(LDAD); % 横航向状态个数

%% Step 5: 计算给定飞行状态下的气动导数 (利用插值方法)
% 纵向气动导数获取计算
Long_Num=8; % 纵向气动导数共有8个

```

```

H_LAD=[0,3,5,8,10]; % 纵向气动数据表格中给定高度集合
N_Ma_long=[5,6,7];
H1=H/1000;
times_long=(H1-H_LAD(end))/(H_LAD(end)-H_LAD(end-1));
Long_Com=zeros(length(H_LAD),Long_Num);
% Case 1: 若飞行高度在表格中给定集合中, 则提取对应高度数据, 再通过插值马赫数获得
气动导数数据
% Case 2: 否则, 采用两次插值 (先插值马赫数, 再插值高度) 获得气动导数数据
% Case 1:
if (~isempty(find(H_LAD==H1,1)))
    % 步骤一: 提取对应高度数据
    cnt=0;
    for i=1:LAD_num
        if (LAD(i,1)==H1)
            cnt=cnt+1;
            Long_Ori_Data(cnt,:)=LAD(i,:);
        end
    end
    % 步骤二: 对Ma插值获得当前飞行状态下的各纵向气动导数
    if (Ma>max(LAD(:,2)))
        Long_Ma=Long_Ori_Data(:,2);
        Long_003=Long_Ori_Data(:,3);
        Long_004=Long_Ori_Data(:,4);
        Long_005=Long_Ori_Data(:,5);
        Long_006=Long_Ori_Data(:,6);
        Long_007=Long_Ori_Data(:,7);
        Long_008=Long_Ori_Data(:,8);
        Long_009=Long_Ori_Data(:,9);
        Long_010=Long_Ori_Data(:,10);
        C_l_alfa=interp1(Long_Ma(N_Ma_long),Long_003(N_Ma_long),Ma,'spline');
        C_m_Cl=interp1(Long_Ma(N_Ma_long),Long_004(N_Ma_long),Ma,'spline');
        C_m_det_e=interp1(Long_Ma(N_Ma_long),Long_005(N_Ma_long),Ma,'spline');
        C_l_det_e=interp1(Long_Ma(N_Ma_long),Long_006(N_Ma_long),Ma,'spline');
        C_m_q=interp1(Long_Ma(N_Ma_long),Long_007(N_Ma_long),Ma,'spline');
        C_m_alfa_dot=interp1(Long_Ma(N_Ma_long),Long_008(N_Ma_long),Ma,'spline');
        C_m_alfa=interp1(Long_Ma(N_Ma_long),Long_009(N_Ma_long),Ma,'spline');
        C_m0=interp1(Long_Ma(N_Ma_long),Long_010(N_Ma_long),Ma,'spline');
    else
        C_l_alfa=interp1(Long_Ori_Data(:,2),Long_Ori_Data(:,3),Ma,'linear');
        C_m_Cl=interp1(Long_Ori_Data(:,2),Long_Ori_Data(:,4),Ma,'linear');
        C_m_det_e=interp1(Long_Ori_Data(:,2),Long_Ori_Data(:,5),Ma,'linear');
        C_l_det_e=interp1(Long_Ori_Data(:,2),Long_Ori_Data(:,6),Ma,'linear');
        C_m_q=interp1(Long_Ori_Data(:,2),Long_Ori_Data(:,7),Ma,'linear');
        C_m_alfa_dot=interp1(Long_Ori_Data(:,2),Long_Ori_Data(:,8),Ma,'linear');
    end
end

```



```

        C_m_alfa=interp1(Long_Ori_Data(:,2),Long_Ori_Data(:,9),Ma,'linear');
        C_m0=interp1(Long_Ori_Data(:,2),Long_Ori_Data(:,10),Ma,'linear');
    end
% Case 2:
else
    % 步骤一：对已知高度（H=0,3,5,8,10km）下在飞行马赫数状态进行插值，并合并数据
    for k=1:length(H_LAD)
        cnt=0;
        for i=1:LAD_num
            if (LAD(i,1)==H_LAD(k))
                cnt=cnt+1;
                Long_Data_k(cnt,:)=LAD(i,:);
            end
        end
        Long_Ma=Long_Data_k(:,2);
        for j=1:8
            if (Ma>max(Long_Ma))
                Long_para=Long_Data_k(:,(j+2));
            end
        end
        Long_Com(k,j)=interp1(Long_Ma(N_Ma_long),Long_para(N_Ma_long),Ma,'spline');
    else
        Long_Com(k,j)=interp1(Long_Ma,Long_Data_k(:,(j+2)),Ma,'linear');
    end
end
clear Long_Data_k;
end
% 步骤二：对给定飞行高度状态进行插值（内插或外插），获得各个纵向气动导数
if (H1>max(H_LAD))
    C_l_alfa=Long_Com(5,1)+(times_long*(Long_Com(5,1)-Long_Com(4,1)));
    C_m_Cl=Long_Com(5,2)+(times_long*(Long_Com(5,2)-Long_Com(4,2)));
    C_m_det_e=Long_Com(5,3)+(times_long*(Long_Com(5,3)-Long_Com(4,3)));
    C_l_det_e=Long_Com(5,4)+(times_long*(Long_Com(5,4)-Long_Com(4,4)));
    C_m_q=Long_Com(5,5)+(times_long*(Long_Com(5,5)-Long_Com(4,5)));
    C_m_alfa_dot=Long_Com(5,6)+(times_long*(Long_Com(5,6)-Long_Com(4,6)));
    C_m_alfa=Long_Com(5,7)+(times_long*(Long_Com(5,7)-Long_Com(4,7)));
    C_m0=Long_Com(5,8)+(times_long*(Long_Com(5,8)-Long_Com(4,8)));
else
    C_l_alfa=interp1(H_LAD,Long_Com(:,1)',H1,'linear');
    C_m_Cl=interp1(H_LAD,Long_Com(:,2)',H1,'linear');
    C_m_det_e=interp1(H_LAD,Long_Com(:,3)',H1,'linear');
    C_l_det_e=interp1(H_LAD,Long_Com(:,4)',H1,'linear');
    C_m_q=interp1(H_LAD,Long_Com(:,5)',H1,'linear');
    C_m_alfa_dot=interp1(H_LAD,Long_Com(:,6)',H1,'linear');

```

```

        C_m_alfa=interp1(H_LAD,Long_Com(:,7)',H1,'linear');
        C_m0=interp1(H_LAD,Long_Com(:,8)',H1,'linear');
    end
end

% 横航向气动导数获取计算
Lat_Dir_Num=11; % 横航向气动导数共有11个
H_LDAD=[0,3,5,8]; % 横航向气动数据表格中给定高度集合
H2=H/1000;
times_lat=(H2-H_LDAD(end))/(H_LDAD(end)-H_LDAD(end-1));
N_Ma_lat=[5,6,7];
Lat_Dir_Com=zeros(length(H_LDAD),Lat_Dir_Num);
% Case 1: 若飞行高度在表格中给定集合中, 则提取对应高度数据, 再通过插值马赫数获得
气动导数数据
% Case 2: 否则, 采用两次插值(先插值马赫数, 再插值高度)获得气动导数数据
% Case 1:
if (~isempty(find(H_LDAD==H2,1)))
    % 步骤一: 提取对应高度数据
    cnt=0;
    for i=1:LDAD_num
        if (LDAD(i,1)==H2)
            cnt=cnt+1;
            Lat_Dir_Ori_Data(cnt,:)=LDAD(i,:);
        end
    end
    % 步骤二: 对Ma插值获得当前飞行状态下的各纵向气动导数
    if (Ma>max(LDAD(:,2)))
        Lat_Ma=Lat_Dir_Ori_Data(:,2);
        Lat_003=Lat_Dir_Ori_Data(:,3);
        Lat_004=Lat_Dir_Ori_Data(:,4);
        Lat_005=Lat_Dir_Ori_Data(:,5);
        Lat_006=Lat_Dir_Ori_Data(:,6);
        Lat_007=Lat_Dir_Ori_Data(:,7);
        Lat_008=Lat_Dir_Ori_Data(:,8);
        Lat_009=Lat_Dir_Ori_Data(:,9);
        Lat_010=Lat_Dir_Ori_Data(:,10);
        Lat_011=Lat_Dir_Ori_Data(:,11);
        Lat_012=Lat_Dir_Ori_Data(:,12);
        Lat_013=Lat_Dir_Ori_Data(:,13);
        C_y_beta=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_003(N_Ma_lat),Ma,'spline');
        C_l_beta=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_004(N_Ma_lat),Ma,'spline');
        C_n_beta=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_005(N_Ma_lat),Ma,'spline');
        C_y_det_r=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_006(N_Ma_lat),Ma,'spline');
        C_l_det_r=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_007(N_Ma_lat),Ma,'spline');
    end
end

```

```

C_n_det_r=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_008(N_Ma_lat),Ma,'spline');
C_l_det_a=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_009(N_Ma_lat),Ma,'spline');
C_l_p=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_010(N_Ma_lat),Ma,'spline');
C_n_r=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_011(N_Ma_lat),Ma,'spline');
C_n_p=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_012(N_Ma_lat),Ma,'spline');
C_l_r=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_013(N_Ma_lat),Ma,'spline');
else
    C_y_beta=interp1(Lat_Dir_Ori_Data(:,2),Lat_Dir_Ori_Data(:,3),Ma,'linear');
    C_l_beta=interp1(Lat_Dir_Ori_Data(:,2),Lat_Dir_Ori_Data(:,4),Ma,'linear');
    C_n_beta=interp1(Lat_Dir_Ori_Data(:,2),Lat_Dir_Ori_Data(:,5),Ma,'linear');
    C_y_det_r=interp1(Lat_Dir_Ori_Data(:,2),Lat_Dir_Ori_Data(:,6),Ma,'linear');
    C_l_det_r=interp1(Lat_Dir_Ori_Data(:,2),Lat_Dir_Ori_Data(:,7),Ma,'linear');
    C_n_det_r=interp1(Lat_Dir_Ori_Data(:,2),Lat_Dir_Ori_Data(:,8),Ma,'linear');
    C_l_det_a=interp1(Lat_Dir_Ori_Data(:,2),Lat_Dir_Ori_Data(:,9),Ma,'linear');
    C_l_p=interp1(Lat_Dir_Ori_Data(:,2),Lat_Dir_Ori_Data(:,10),Ma,'linear');
    C_n_r=interp1(Lat_Dir_Ori_Data(:,2),Lat_Dir_Ori_Data(:,11),Ma,'linear');
    C_n_p=interp1(Lat_Dir_Ori_Data(:,2),Lat_Dir_Ori_Data(:,12),Ma,'linear');
    C_l_r=interp1(Lat_Dir_Ori_Data(:,2),Lat_Dir_Ori_Data(:,13),Ma,'linear');
end
% Case 2:
else
    % 步骤一：对已知高度（H=0,3,5,8km）下在飞行马赫数状态进行插值，并合并数据
    for k=1:length(H_LDAD)
        cnt=0;
        for i=1:LDAD_num
            if (LDAD(i,1)==H_LDAD(k))
                cnt=cnt+1;
                Lat_Dir_Data_k(cnt,:)=LDAD(i,:);
            end
        end
        Lat_Ma=Lat_Dir_Data_k(:,2);
        Lat_003=Lat_Dir_Data_k(:,3);
        Lat_004=Lat_Dir_Data_k(:,4);
        Lat_005=Lat_Dir_Data_k(:,5);
        Lat_006=Lat_Dir_Data_k(:,6);
        Lat_007=Lat_Dir_Data_k(:,7);
        Lat_008=Lat_Dir_Data_k(:,8);
        Lat_009=Lat_Dir_Data_k(:,9);
        Lat_010=Lat_Dir_Data_k(:,10);
        Lat_011=Lat_Dir_Data_k(:,11);
        Lat_012=Lat_Dir_Data_k(:,12);
        Lat_013=Lat_Dir_Data_k(:,13);
        Lat_Dir_Com(k,1)=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_003(N_Ma_lat),Ma,'spline');
        Lat_Dir_Com(k,2)=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_004(N_Ma_lat),Ma,'spline');
    end
end

```

```

Lat_Dir_Com(k,3)=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_005(N_Ma_lat),Ma,'spline');
Lat_Dir_Com(k,4)=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_006(N_Ma_lat),Ma,'spline');
Lat_Dir_Com(k,5)=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_007(N_Ma_lat),Ma,'spline');
Lat_Dir_Com(k,6)=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_008(N_Ma_lat),Ma,'spline');
Lat_Dir_Com(k,7)=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_009(N_Ma_lat),Ma,'spline');
Lat_Dir_Com(k,8)=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_010(N_Ma_lat),Ma,'spline');
Lat_Dir_Com(k,9)=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_011(N_Ma_lat),Ma,'spline');
Lat_Dir_Com(k,10)=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_012(N_Ma_lat),Ma,'spline');
Lat_Dir_Com(k,11)=interp1(Lat_Ma(N_Ma_lat),Lat_013(N_Ma_lat),Ma,'spline');
clear Lat_Dir_Data_k;
end
% 步骤二：对给定飞行高度状态进行插值（内插或外插），获得各个纵向气动导数
if (H2>max(H_LDAD))
    C_y_beta=Lat_Dir_Com(4,1)+(times_lat*(Lat_Dir_Com(4,1)-Lat_Dir_Com(3,1)));
    C_l_beta=Lat_Dir_Com(4,2)+(times_lat*(Lat_Dir_Com(4,2)-Lat_Dir_Com(3,2)));
    C_n_beta=Lat_Dir_Com(4,3)+(times_lat*(Lat_Dir_Com(4,3)-Lat_Dir_Com(3,3)));
    C_y_det_r=Lat_Dir_Com(4,4)+(times_lat*(Lat_Dir_Com(4,4)-Lat_Dir_Com(3,4)));
    C_l_det_r=Lat_Dir_Com(4,5)+(times_lat*(Lat_Dir_Com(4,5)-Lat_Dir_Com(3,5)));
    C_n_det_r=Lat_Dir_Com(4,6)+(times_lat*(Lat_Dir_Com(4,6)-Lat_Dir_Com(3,6)));
    C_l_det_a=Lat_Dir_Com(4,7)+(times_lat*(Lat_Dir_Com(4,7)-Lat_Dir_Com(3,7)));
    C_l_p=Lat_Dir_Com(4,8)+(times_lat*(Lat_Dir_Com(4,8)-Lat_Dir_Com(3,8)));
    C_n_r=Lat_Dir_Com(4,9)+(times_lat*(Lat_Dir_Com(4,9)-Lat_Dir_Com(3,9)));
    C_n_p=Lat_Dir_Com(4,10)+(times_lat*(Lat_Dir_Com(4,10)-Lat_Dir_Com(3,10)));
    C_l_r=Lat_Dir_Com(4,11)+(times_lat*(Lat_Dir_Com(4,11)-Lat_Dir_Com(3,11)));
else
    C_y_beta=interp1(H_LDAD,Lat_Dir_Com(:,1)',H2,'linear');
    C_l_beta=interp1(H_LDAD,Lat_Dir_Com(:,2)',H2,'linear');
    C_n_beta=interp1(H_LDAD,Lat_Dir_Com(:,3)',H2,'linear');
    C_y_det_r=interp1(H_LDAD,Lat_Dir_Com(:,4)',H2,'linear');
    C_l_det_r=interp1(H_LDAD,Lat_Dir_Com(:,5)',H2,'linear');
    C_n_det_r=interp1(H_LDAD,Lat_Dir_Com(:,6)',H2,'linear');
    C_l_det_a=interp1(H_LDAD,Lat_Dir_Com(:,7)',H2,'linear');
    C_l_p=interp1(H_LDAD,Lat_Dir_Com(:,8)',H2,'linear');
    C_n_r=interp1(H_LDAD,Lat_Dir_Com(:,9)',H2,'linear');
    C_n_p=interp1(H_LDAD,Lat_Dir_Com(:,10)',H2,'linear');
    C_l_r=interp1(H_LDAD,Lat_Dir_Com(:,11)',H2,'linear');
end
end

%% Step 6: 计算纵向系统矩阵A_long，纵向操纵矩阵B_long；横航向系统矩阵A_lat，横航
向操纵矩阵B_lat
fprintf('【Part 3】 飞机的线化小扰动运动方程各系统与操纵矩阵计算结果\n');
fprintf('\n');

```

```

%% ① 纵向运动方程矩阵A_long与B_long计算
% 对插值得到的气动参数进行per度数(deg)-->per弧度(rad)的转化(对于所有关于角度的导数)
mk=(180/pi); % 定义转化因子
% 纵向气动参数转化
C_l_alfa=C_l_alfa*mk;
C_m_det_e=C_m_det_e*mk;
C_l_det_e=C_l_det_e*mk;
C_m_alfa=C_m_alfa*mk;
% 横航向气动参数转化
C_y_beta=C_y_beta*mk;
C_l_beta=C_l_beta*mk;
C_n_beta=C_n_beta*mk;
C_y_det_r=C_y_det_r*mk;
C_l_det_r=C_l_det_r*mk;
C_n_det_r=C_n_det_r*mk;
C_l_det_a=C_l_det_a*mk;

% 由于原数据中未给出阻力系数（极曲线）信息，故参考查阅米格-21/歼-7飞机参数
% 假设阻力极曲线为  $CD = 0.012 + 0.07*CL^2$  ( $CD = CD0 + k*CL^2$ ) (0.025)
% 主要气动参数计算
W=m*g; % 飞机重量
L=W; % 水平定值
CL=L/(0.5*rou*V*V*S); % 升力系数计算
C_D0=0.012; % 零升阻力系数
ke=0.07; % 诱导阻力系数
CD=C_D0+ke*(CL^2); % 阻力系数计算
E=CL/CD; % 升阻比计算
C_D_det_e=0;

% 更多气动导数定义
C_D_u=0;
C_D_alfa_dot=0;
C_l_alfa_dot=0;
C_D_alfa=2*ke*CL*C_l_alfa;
C_D_q=0;
C_l_q=0;
C_l_u=0;
C_m_u=0;

% 定义新符号变量
m1=(2*m)/(rou*V*S);
c1=c_mean/(2*V);
q=0.5*rou*V*V;

```

```

qc=q;
ly1=ly/(qc*S*c_mean);

C_x_u=-(2*CD)-C_D_u;
C_x_alfa_dot=(-1)*C_D_alfa_dot;
C_z_alfa_dot=(-1)*C_l_alfa_dot;
C_x_alfa=CL-C_D_alfa;
C_x_q=(-1)*C_D_q;
C_z_q=(-1)*C_l_q;
C_x_theta=(-1)*CL*cos(theta);
C_z_alfa=(-1)*C_l_alfa+(-1)*CD;
C_x_det_e=(-1)*C_D_det_e;
C_z_theta=(-1)*CL*sin(theta);
C_z_u=(-2)*CL+(-1)*C_l_u;
C_z_det_e=(-1)*C_l_det_e;

Eps1=(C_x_alfa_dot*c1)/m1;
Eps2=(C_m_alfa_dot*c1)/m1;

% 计算纵向系统矩阵A_long各元素
A11_long=(C_x_u+(Eps1*C_z_u))/m1;
A12_long=(C_x_alfa+(Eps1*C_z_alfa))/m1;
A13_long=(C_x_q+Eps1*(m1+(C_z_q*c1)))/m1;
A14_long=(C_x_theta+(Eps1*C_z_theta))/m1;
A21_long=C_z_u/m1;
A22_long=C_z_alfa/m1;
A23_long=(m1+(C_z_q*c1))/m1;
A24_long=C_z_theta/m1;
A31_long=(C_m_u+(Eps2*C_z_u))/ly1;
A32_long=(C_m_alfa+(Eps2*C_z_alfa))/ly1;
A33_long=((C_m_q*c1)+(Eps2*(m1+(C_z_q*c1))))/ly1;
A34_long=(Eps2*C_z_theta)/ly1;
A41_long=0;
A42_long=0;
A43_long=1;
A44_long=0;

% 计算完整纵向系统矩阵A_long
fprintf('[3.1] 纵向运动方程主要系数矩阵如下: \n');
fprintf('\n');
fprintf('纵向系统矩阵A_long: \n');

A_long=[A11_long A12_long A13_long A14_long
        A21_long A22_long A23_long A24_long

```

```

        A31_long A32_long A33_long A34_long
        A41_long A42_long A43_long A44_long];
% 输出纵向系统矩阵A_long
A_long

% 计算纵向操纵矩阵B_long各元素
B11_long=(C_x_det_e+(Eps1*C_z_det_e))/m1;
B21_long=C_z_det_e/m1;
B31_long=(C_m_det_e+(Eps2*C_z_det_e))/Iy1;
B41_long=0;

% 计算完整纵向操纵矩阵B_long
fprintf('纵向操纵矩阵B_long: \n');

B_long=[B11_long
        B21_long
        B31_long
        B41_long];
% 输出纵向操纵矩阵B_long
B_long

%% ② 横航向运动方程矩阵A_lat与B_lat计算
% 定义新符号变量
C_y_phi=(m*g*cos(phi))/(q*S);
b1=b/(2*V);
Ix1=Ix/(qc*S*b);
Iz1=Iz/(qc*S*b);
Ixz1=Ixz/(qc*S*b);
Ix1_dot=Ix1/((Ix1*Iz1)-(Ixz1^2));
Iz1_dot=Iz1/((Ix1*Iz1)-(Ixz1^2));
Ixz1_dot=Ixz1/((Ix1*Iz1)-(Ixz1^2));
Eps3=Iz1_dot*C_l_beta;
Eps4=Ix1_dot*C_n_beta;

% 定义更多气动导数
C_y_p=0;
C_y_r=0;
C_y_det_a=0;
C_n_det_a=0;

% 计算横航向系统矩阵A_lat各元素
A11_lat=C_y_beta/m1;
A12_lat=C_y_phi/m1;
A13_lat=C_y_p*b1/m1;

```

```

A14_lat=(-1)*((m1-(b1*C_y_r))/m1);
A21_lat=0;
A22_lat=0;
A23_lat=1;
A24_lat=0;
A31_lat=(C_l_beta*Iz1_dot)+(C_n_beta*Ixz1_dot)+(b1*Eps3*A11_lat);
A32_lat=(Eps3*b1*A12_lat);
A33_lat=b1*((C_l_p*Iz1_dot)+(C_n_p*Ixz1_dot)+(Eps3*A13_lat));
A34_lat=b1*((C_l_r*Iz1_dot)+(C_n_r*Ixz1_dot)+(Eps3*A14_lat));
A41_lat=(Ix1_dot*C_n_beta)+(Ixz1_dot*C_l_beta)+(b1*Eps4*A11_lat);
A42_lat=Eps4*b1*A12_lat;
A43_lat=b1*((C_n_p*Ix1_dot)+(C_l_p*Ixz1_dot)+(Eps4*A13_lat));
A44_lat=b1*((Ix1_dot*C_n_r)+(Ixz1_dot*C_l_r)+(Eps4*A14_lat));

% 计算完整横航向系统矩阵A_lat
fprintf('[3.2] 横航向运动方程主要系数矩阵如下: \n');
fprintf('\n');
fprintf('横航向系统矩阵A_lat: \n');

A_lat=[A11_lat A12_lat A13_lat A14_lat
        A21_lat A22_lat A23_lat A24_lat
        A31_lat A32_lat A33_lat A34_lat
        A41_lat A42_lat A43_lat A44_lat];

% 输出横航向系统矩阵A_lat
A_lat

% 计算横航向操纵矩阵B_lat各元素
B11_lat=C_y_det_a/m1;
B12_lat=C_y_det_r/m1;
B21_lat=0;
B22_lat=0;
B31_lat=(C_l_det_a*Iz1_dot)+(C_n_det_a*Ixz1_dot)+(Eps3*b1*B11_lat);
B32_lat=(C_l_det_a*Iz1_dot)+(C_n_det_r*Ixz1_dot)+(Eps3*b1*B12_lat);
B41_lat=(C_n_det_a*Ix1_dot)+(C_l_det_a*Ixz1_dot)+(Eps4*b1*B11_lat);
B42_lat=(C_n_det_r*Ix1_dot)+(C_l_det_r*Ixz1_dot)+(Eps4*b1*B12_lat);

% 计算完整横航向操纵矩阵B_lat
fprintf('横航向操纵矩阵B_lat: \n');
B_lat=[B11_lat B12_lat
        B21_lat B22_lat
        B31_lat B32_lat
        B41_lat B42_lat];

% 输出横航向操纵矩阵B_lat
B_lat

```



```

%% Step 7: 计算short-period（短周期），roll-subsidence（滚转收敛）and Dutch-roll（荷兰滚）模态参数 $\zeta_{sp}$ ,  $\omega_{sp}$ , CAP, and  $T_r, \zeta_d, \omega_d$ ;
%% ① 计算短周期（short-period）模态参数 $\zeta_{sp}, \omega_{sp}$  与 CAP
% 计算A_long矩阵的特征值，判断纵向稳定性与各模态参数
fprintf('【Part 4】 飞机的纵向、横航向各特征模态分析\n');
fprintf('\n');
fprintf('[4.2] 飞机的纵向特征模态分析: \n');
fprintf('\n');
fprintf('纵向系统矩阵A_long的特征值为: \n');
A_long_eig=eig(A_long);
% 输出纵向系统矩阵A_long的特征值
A_long_eig
A_long_eig_real=real(A_long_eig); % 计算A_long矩阵特征值的实部
A_long_eig_imag=imag(A_long_eig); % 计算A_long矩阵特征值的虚部

% 由A_long矩阵的特征值（对应模态）计算结果获得对应重阻尼、高频的短周期模态
% 飞机纵向模态说明
% 【特征根 1】 一对较大共轭复根——对应短周期模态
Lambda_sp_1=A_long_eig(1);
Lambda_sp_2=A_long_eig(2);
fprintf('[纵向模态提取 1: 短周期（short-period）模态]\n');
fprintf('\n');
fprintf('对应短周期模态的一对共轭复根 Lambda_sp = %.4f\n',real(Lambda_sp_1),abs(imag(Lambda_sp_1)));
fprintf('\n');
Omega_sp=sqrt((real(Lambda_sp_1))^2+(imag(Lambda_sp_1))^2); % 短周期模态自由频率
 $\omega_{sp}$ 
Zeta_sp=(-1)*real(Lambda_sp_1)/Omega_sp; % 短周期模态阻尼比 $\zeta_{sp}$ 
n_alfa=(1/(2*W))*rou*V*V*S*C_l_alfa;
CAP_sp=(Omega_sp^2)/n_alfa; % 短周期模态操纵期望参数CAP
fprintf('短周期模态 阻尼比（直接）  $\zeta_{sp}$  = %.4f\n',Zeta_sp);
fprintf('短周期模态 自由频率（直接）  $\omega_{sp}$  = %.4f\n',Omega_sp);
fprintf('短周期模态 操纵期望参数（直接） CAP = %.4f\n',CAP_sp);
fprintf('\n');

% 利用短周期近似计算模态特征参数
Omega_sp_appro=sqrt(((C_z_alfa*c1*C_m_q)/(m1*Iy1))-(C_m_alfa/Iy1));
Zeta_sp_appro=(-1)*(C_z_alfa/m1+(c1/Iy1)*(C_m_q+C_m_alfa_dot))/(2*sqrt(((C_z_alfa*c1*C_m_q)/(m1*Iy1))-(C_m_alfa/Iy1)));
CAP_sp_appro=(Omega_sp_appro^2)/n_alfa;
fprintf('短周期模态 阻尼比（近似）  $\zeta_{sp\_appro}$  = %.4f\n',Zeta_sp_appro);
fprintf('短周期模态 自由频率（近似）  $\omega_{sp\_appro}$  = %.4f\n',Omega_sp_appro);
fprintf('短周期模态 操纵期望参数（近似） CAP_appro = %.4f\n',CAP_sp_appro);

```

```

fprintf('\n');

% 短周期模态直接与近似计算模态特征参数误差比较
Omega_sp_error=(abs(Omega_sp-Omega_sp_appro))/(Omega_sp);
Zeta_sp_error=(abs(Zeta_sp-Zeta_sp_appro))/(Zeta_sp);
CAP_sp_error=(abs(CAP_sp-CAP_sp_appro))/(CAP_sp);
fprintf('短周期模态 阻尼比（近似与直接计算误差）  $\zeta_{sp\_error}$ 
= %.4f %%\n',Zeta_sp_error*100);
fprintf('短周期模态 自由频率（近似与直接计算误差）  $\omega_{sp\_error}$ 
= %.4f %%\n',Omega_sp_error*100);
fprintf('短周期模态 操纵期望参数（近似与直接计算误差） CAP_error
= %.4f %%\n',CAP_sp_error*100);
fprintf('\n');

% 【特征根 II】 一对较小共轭复根——对应长周期模态（浮沉模态）
Lambda_p_1=A_long_eig(3);
Lambda_p_2=A_long_eig(4);
fprintf('[纵向模态提取 II: 长周期（long-period/phugoid）模态]\n');
fprintf('\n');
fprintf('对应长周期模态的一对共轭复根 Lambda_p = %.4f
+(-) %.4fi\n',(real(Lambda_p_1)),abs(imag(Lambda_p_1)));
fprintf('\n');
Omega_p=sqrt((real(Lambda_p_1))^2+(imag(Lambda_p_1))^2);
Zeta_p=(-1)*real(Lambda_p_1)/Omega_p;
fprintf('长周期模态 阻尼比（直接）  $\zeta_p$  = %.4f\n',Zeta_p);
fprintf('长周期模态 自由频率（直接）  $\omega_p$  = %.4f\n',Omega_p);
fprintf('\n');

%% ② 计算roll-subsidence（滚转收敛）and Dutch-roll（荷兰滚）模态参数  $T_r, \zeta_d, \omega_d$ 
% 计算A_lat矩阵的特征值，判断横航向稳定性与各模态参数
fprintf('[4.3] 飞机的横航向特征模态分析: \n');
fprintf('\n');
fprintf('横航向系统矩阵A_lat的特征值为: \n');
A_lat_eig=eig(A_lat);
% 输出横航向系统矩阵A_lat的特征值
A_lat_eig
A_lat_eig_real=real(A_lat_eig); % 计算A_lat矩阵特征值的实部
A_lat_eig_imag=imag(A_lat_eig); % 计算A_lat矩阵特征值的虚部

% 飞机横航向各模态说明
% 【特征根 I】 一个较大负实根——对应滚转收敛模态（响应快速）
Lambda_r=A_lat_eig(3);
fprintf('[横航向模态提取 I: 滚转收敛（roll-subsidence）模态]\n');
fprintf('\n');

```

```

fprintf('对应滚转收敛模态（响应快速）的一个较大负实根 Lambda_r = %.4f\n',Lambda_r);
fprintf('\n');

% 计算roll-subsidence（滚转收敛）滚转收敛时间常数T_r
T_r=(-1)*(1/Lambda_r);
fprintf('滚转收敛模态 滚转收敛时间常数（直接） T_r = %.4f\n',T_r);
fprintf('\n');

% 利用滚转收敛近似计算模态特征参数
Lambda_r_appro=(C_l_p*b1)/I_x1;
T_r_appro=(-1)*(1/Lambda_r_appro);
fprintf('滚转收敛模态 滚转收敛时间常数（近似） T_r_appro = %.4f\n',T_r_appro);
fprintf('\n');

% 滚转收敛模态直接与近似计算模态特征参数误差比较
T_r_error=(abs(T_r-T_r_appro))/(T_r);
fprintf('滚转收敛模态 滚转收敛时间常数（近似与直接计算误差） T_r_error = %.4f %%\n',T_r_error*100);
fprintf('\n');

% 【特征根 II】 一对中等共轭复根——对应荷兰滚模态（响应中等）
Lambda_d_1=A_lat_eig(1);
Lambda_d_2=A_lat_eig(2);
fprintf('[横航向模态提取 II： 荷兰滚（Dutch-roll）模态]\n');
fprintf('\n');
fprintf('对应荷兰滚模态（响应中等）的一对中等共轭复根 Lambda_d = %.4f +(-) %.4fi\n',(real(Lambda_d_1)),abs(imag(Lambda_d_1)));
fprintf('\n');

% 计算Dutch-roll（荷兰滚） $\zeta_d, \omega_d$ 
Omega_d=sqrt((real(Lambda_d_1))^2+(imag(Lambda_d_1))^2);
Zeta_d=(-1)*real(Lambda_d_1)/Omega_d;
Zeta_d_Omega_d=Omega_d*Zeta_d;
fprintf('荷兰滚模态 阻尼比（直接）  $\zeta_d = %.4f$ \n',Zeta_d);
fprintf('荷兰滚模态 自由频率（直接）  $\omega_d = %.4f$ \n',Omega_d);
fprintf('荷兰滚模态 阻尼比*自由频率（直接）  $\zeta_d*\omega_d = %.4f$ \n',Zeta_d_Omega_d);
fprintf('\n');

% 利用荷兰滚近似计算模态特征参数
Omega_d_appro=sqrt((1/(m1*I_z1))*((C_y_beta*C_n_r*b1)+C_n_beta*(m1-(b1*C_y_r))));
Zeta_d_appro=(-1)*(1/(2*Omega_d))*((C_y_beta/m1)+((b1*C_n_r)/I_z1));
Zeta_d_Omega_d_appro=Zeta_d_appro*Omega_d_appro;
fprintf('荷兰滚模态 阻尼比（近似）  $\zeta_d\_appro = %.4f$ \n',Zeta_d_appro);
fprintf('荷兰滚模态 自由频率（近似）  $\omega\_d\_appro = %.4f$ \n',Omega_d_appro);

```

```

fprintf('荷兰滚模态 阻尼比*自由频率（近似）  $\zeta_d \omega_d$  appro
= %.4f\n', Zeta_d_Omega_d_appro);
fprintf('\n');

%荷兰滚模态直接与近似计算模态特征参数误差比较
Omega_d_error=(abs(Omega_d-Omega_d_appro))/(Omega_d);
Zeta_d_error=(abs(Zeta_d-Zeta_d_appro))/(Zeta_d);
Zeta_d_Omega_d_error=(abs(Zeta_d_Omega_d-Zeta_d_Omega_d_appro))/(Zeta_d_Omega_d);
fprintf('荷兰滚模态 阻尼比（近似与直接计算误差）  $\zeta_d$  error
= %.4f %%\n', Zeta_d_error*100);
fprintf('荷兰滚模态 自由频率（近似与直接计算误差）  $\omega_d$  error
= %.4f %%\n', Omega_d_error*100);
fprintf('荷兰滚模态 阻尼比*自由频率（近似与直接计算误差）  $\zeta_d \omega_d$  error
= %.4f %%\n', Zeta_d_Omega_d_error*100);
fprintf('\n');

% 【特征根 III】 一个较小负实根——对应螺旋模态（响应缓慢）
Lambda_s=A_lat_eig(4);
fprintf('[横航向模态提取 III: 螺旋（spiral）模态]\n');
fprintf('\n');
fprintf('对应螺旋模态（响应缓慢）的一个较小负实根 Lambda_s = %.4f\n', Lambda_s);
fprintf('\n');

%% Question 2（飞行品质评估：Evaluate the flying quality for Category A flight phases;）
fprintf('【Question 2】 飞机飞行飞行品质评估：\n');
fprintf('\n');

%% Step 8: 评估飞机在非场域A种飞行阶段的飞行品质（拓展功能plus）
% 定义需要评估飞行品质的对象信息
Flight_phases='A'; % 定义需要评估飞行品质的飞行阶段类型
Airplane_Class='IV'; % 定义需要评估飞行品质的飞机类型
fprintf('【Part 5】 定义需要评估飞行品质的对象信息如下：\n');
fprintf('需要评估飞行品质的飞行阶段类型为： %s级\n', Flight_phases);
fprintf('需要评估飞行品质的飞机类型为： %s级\n', Airplane_Class);
fprintf('\n');

% 【纵向飞行品质】评估
% 短周期模态品质要求评估（ $\zeta_{sp}$ ,  $\omega_{sp}$  与 CAP）
fprintf('【Part 6】 纵向飞行品质要求评估：\n');
fprintf('\n');
fprintf('[6.1] 短周期模态品质要求评估（ $\zeta_{sp}$ ,  $\omega_{sp}$  与 CAP）：\n');
fprintf('\n');

% ① 阻尼比 $\zeta_{sp}$ 要求

```

```

if ((Flight_phases=='A') || (Flight_phases=='C'))
    if ((Zeta_sp>=0.35) && (Zeta_sp<=1.30))
        Type_Zeta_sp='I';
    elseif ((Zeta_sp>=0.25) && (Zeta_sp<=2.00))
        Type_Zeta_sp='II';
    elseif (Zeta_sp>=0.15)
        Type_Zeta_sp='III';
    else
        Type_Zeta_sp='Unknown';
    end
else
    if ((Zeta_sp>=0.30) && (Zeta_sp<=2.00))
        Type_Zeta_sp='I';
    elseif ((Zeta_sp>=0.20) && (Zeta_sp<=2.00))
        Type_Zeta_sp='II';
    elseif (Zeta_sp>=0.15)
        Type_Zeta_sp='III';
    else
        Type_Zeta_sp='Unknown';
    end
end
fprintf('短周期模态 阻尼比  $\zeta_{sp}$  等级为: %s级\n',Type_Zeta_sp);

```

% ② 操纵期望参数CAP要求

```

if (Flight_phases=='A')
    if ((CAP_sp>=0.28) && (CAP_sp<=3.60))
        Type_CAP_sp='I';
    elseif ((CAP_sp>=0.16) && (CAP_sp<=10.00))
        Type_CAP_sp='II';
    elseif (CAP_sp>=0.16)
        Type_CAP_sp='III';
    else
        Type_CAP_sp='Unknown';
    end
elseif (Flight_phases=='B')
    if ((CAP_sp>=0.085) && (CAP_sp<=3.60))
        Type_CAP_sp='I';
    elseif ((CAP_sp>=0.038) && (CAP_sp<=10.00))
        Type_CAP_sp='II';
    elseif (CAP_sp>=0.038)
        Type_CAP_sp='III';
    else
        Type_CAP_sp='Unknown';
    end
end

```

```

else
    if ((CAP_sp>=0.16) && (CAP_sp<=3.6))
        Type_CAP_sp='I';
    elseif ((CAP_sp>=0.096) && (CAP_sp<=10.00))
        Type_CAP_sp='II';
    elseif (CAP_sp>=0.096)
        Type_CAP_sp='III';
    else
        Type_CAP_sp='Unknown';
    end
end
fprintf('短周期模态 操纵期望参数CAP 等级为: %s级\n',Type_CAP_sp);
fprintf('\n');

% 短周期模态最终飞行品质评估
% 比较阻尼比 $\zeta_{sp}$ 与操纵期望参数CAP的等级，取等级较小者
if (length(Type_Zeta_sp)>length(Type_CAP_sp))
    Type_sp=Type_Zeta_sp;
else
    Type_sp=Type_CAP_sp;
end
fprintf('短周期模态 最终飞行品质评估 等级为: %s级\n',Type_sp);
fprintf('\n');

% 【横航向飞行品质】评估
% 滚转收敛模态品质要求评估 (T_r)
fprintf('【Part 7】 纵向飞行品质要求评估: \n');
fprintf('\n');

% 滚转收敛时间常数T_r要求
fprintf('[7.1] 滚转收敛模态品质要求评估 (T_r) : \n');
fprintf('\n');
if ((Flight_phases=='A') || (Flight_phases=='C'))
    if ((strcmp(Airplane_Class,'I')==1) || (strcmp(Airplane_Class,'IV')==1))
        if (T_r<=1.0)
            Type_T_r='I';
        elseif (T_r<=1.4)
            Type_T_r='II';
        elseif (T_r<=10.0)
            Type_T_r='III';
        else
            Type_T_r='Unknown';
        end
    end
else

```

```

        if (T_r<=1.0)
            Type_T_r='I';
        elseif (T_r<=1.4)
            Type_T_r='II';
        elseif (T_r<=10.0)
            Type_T_r='III';
        else
            Type_T_r='Unknown';
        end
    end
else
    if (T_r<=1.4)
        Type_T_r='I';
    elseif (T_r<=3.0)
        Type_T_r='II';
    elseif (T_r<=10.0)
        Type_T_r='III';
    else
        Type_T_r='Unknown';
    end
end
fprintf('滚转收敛模态 最终飞行品质评估 等级为: %s级\n',Type_T_r);
fprintf('\n');

% 横航向飞行品质: 荷兰滚模态品质要求评估 ( $\zeta_d, \zeta_d \cdot \omega_d, \omega_d$ )
fprintf('[7.2] 荷兰滚模态品质要求评估 ( $\zeta_d, \zeta_d \cdot \omega_d, \omega_d$ ): \n');
fprintf('\n');
% ① 阻尼比 $\zeta_d$ 要求、 $\zeta_d \cdot \omega_d$ 要求、自然频率 $\omega_d$ 要求
if (Flight_phases=='A')
    if ((strcmp(Airplane_Class,'I')==1) || (strcmp(Airplane_Class,'IV')==1))
        if ((Zeta_d>=0.19) && (Zeta_d_Omega_d>=0.35) && (Omega_d>=1.0))
            Type_dutch_roll='I';
        elseif ((Zeta_d>=0.02) && (Zeta_d_Omega_d>=0.05) && (Omega_d>=0.4))
            Type_dutch_roll='II';
        elseif ((Zeta_d>=0.02) && (Omega_d>=0.4))
            Type_dutch_roll='III';
        else
            Type_dutch_roll='Unknown';
        end
    else
        if ((Zeta_d>=0.19) && (Zeta_d_Omega_d>=0.35) && (Omega_d>=0.4))
            Type_dutch_roll='I';
        elseif ((Zeta_d>=0.02) && (Zeta_d_Omega_d>=0.05) && (Omega_d>=0.4))
            Type_dutch_roll='II';
        end
    end
end

```

```

elseif ((Zeta_d>=0.02) && (Omega_d>=0.4))
    Type_dutch_roll='III';
else
    Type_dutch_roll='Unknown';
end
end
elseif (Flight_phases=='B')
    if ((Zeta_d>=0.08) && (Zeta_d_Omega_d>=0.15) && (Omega_d>=0.4))
        Type_dutch_roll='I';
    elseif ((Zeta_d>=0.02) && (Zeta_d_Omega_d>=0.05) && (Omega_d>=0.4))
        Type_dutch_roll='II';
    elseif ((Zeta_d>=0.02) && (Omega_d>=0.4))
        Type_dutch_roll='III';
    else
        Type_dutch_roll='Unknown';
    end
else
    if ((strcmp(Airplane_Class,'I')==1) || (strcmp(Airplane_Class,'II_C_b')==1) ||
(strcmp(Airplane_Class,'IV')==1))
        if ((Zeta_d>=0.08) && (Zeta_d_Omega_d>=0.15) && (Omega_d>=1.0))
            Type_dutch_roll='I';
        elseif ((Zeta_d>=0.02) && (Zeta_d_Omega_d>=0.05) && (Omega_d>=0.4))
            Type_dutch_roll='II';
        elseif ((Zeta_d>=0.02) && (Omega_d>=0.4))
            Type_dutch_roll='III';
        else
            Type_dutch_roll='Unknown';
        end
    else
        if ((Zeta_d>=0.08) && (Zeta_d_Omega_d>=0.15) && (Omega_d>=0.4))
            Type_dutch_roll='I';
        elseif ((Zeta_d>=0.02) && (Zeta_d_Omega_d>=0.05) && (Omega_d>=0.4))
            Type_dutch_roll='II';
        elseif ((Zeta_d>=0.02) && (Omega_d>=0.4))
            Type_dutch_roll='III';
        else
            Type_dutch_roll='Unknown';
        end
    end
end
end
fprintf('荷兰滚模态 最终飞行品质评估 等级为: %s级\n',Type_dutch_roll);
fprintf('\n');

```