

第二章 物理系统的数学模型

第二章 物理系统的数学模型

元件和系统运动方程的建立

运动方程的线性化

拉普拉斯变换

传递函数

结构图等效变换

反馈控制系统的传递函数

2.1 引言

何谓数学模型

描述系统输入、输出变量以及内部各变量之间关系的数学表达式。

数学表达式具有多种形式，同一系统的数学模型具有多样性。不同形式的数学模型所反映的量和量之间的本质关系不变。

为什么要建立数学模型

物理系统的内部变量和输入有关，内部变量对输出有影响，内部变量之间也会相互影响，如何影响，影响程度如何，都需要用数学语言来精确地定量描述，只有用数学语言描述后系统，其特性才得以精确地反映，才能为控制器所理解、所利用。

2.2 元件和系统运动方程的建立

获取系统数学模型的方法有二：

1、实验法（系统辨识法）—人为施加某种测试信号，记录输出响应。根据测试信号及响应信号随时间的变化规律，依赖某种算法，计算出模型的结构及参数。

特点：把系统当黑匣子处理，无需了解其结构、组成及工作机理。

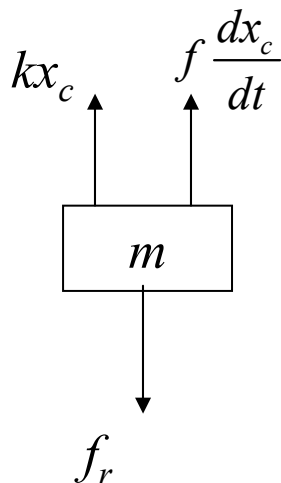
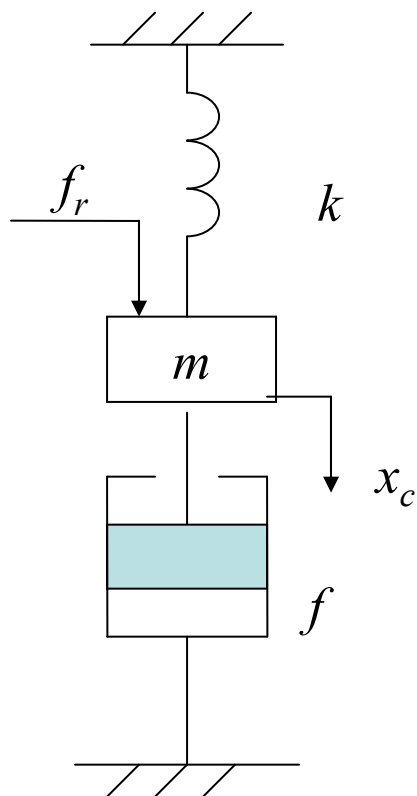
2、解析法（机理分析法）

对系统各部分的运动机理进行分析，依据系统及元件各变量之间所遵循的物理、化学定律，列出变量之间的数学表达式，建立数学模型。

建模步骤

1. 分析系统工作情况，明确各元部件或子系统的输入和输出变量, 并引入必要的中间变量
2. 从输入端开始，按照信号的传递顺序，依据各变量所遵循的物理或化学定律，列写元部件动态方程
3. 消去中间变量，得到系统输入、输出之间的微分方程
4. 标准化。将输入项按照导数阶次由高到低的顺序写在等号右边，输出项按照相同的方式写在左边，并将最高阶项系数归一化。

● 弹簧--质量--阻尼器系统



牛顿第二定律

$$m \frac{d^2 x_c}{dt^2} = f_r - kx_c - f \frac{dx_c}{dt}$$

$$m \frac{d^2 x_c}{dt^2} + f \frac{dx_c}{dt} + kx_c = f_r$$

若 m 、 k 、 f 为常数，则为
二阶常系数线性微分方程

$$\frac{m}{k} \frac{d^2 x_c}{dt^2} + \frac{f}{k} \frac{dx_c}{dt} + x_c = \frac{1}{k} f_r$$

$$\text{令 } T^2 = \frac{m}{k}, \quad 2\xi T = \frac{f}{k}$$

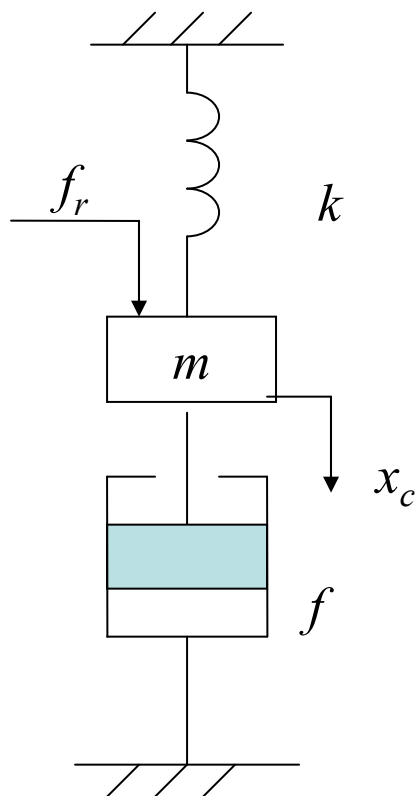
$$T = \sqrt{\frac{m}{k}},$$

$$\xi = \frac{f}{2\sqrt{mk}}$$

时间单位，称为时间常数

无量纲，称阻尼系数或阻尼比

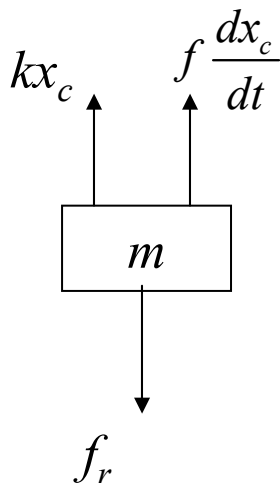
● 弹簧--质量--阻尼器系统



标准形式1: $\Rightarrow T^2 \frac{d^2 x_c}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx_c}{dt} + x_c = \frac{1}{k} f_r$

特点:

- 最低导数项系数为1
- 每项系数的量纲都是时间的若干次幂，幂次等于该项的导数阶数

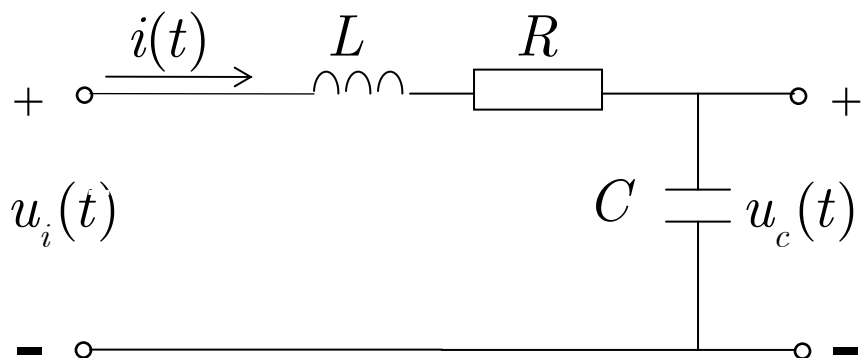


令 $\omega_n = \frac{1}{T}$, 有

标准形式2: $\Rightarrow \frac{d^2 x_c}{dt^2} + 2\xi \omega_n \frac{dx_c}{dt} + \omega_n^2 x_c = \frac{\omega_n^2}{k} f_r$

称 ω_n 为无阻尼振荡频率

RLC电路



克希霍夫回路电压定律

$$u_i = u_R + u_L + u_c(t)$$

$$u_i = Ri + L \frac{di}{dt} + u_c(t)$$

$$\text{又有: } i = C \frac{du_c}{dt}$$

i 是中间变量，消去后得：

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_i(t)$$

若 L 、 C 、 R 为常数，则为
二阶常系数线性微分方程

$$\text{令 } T^2 = LC, 2\xi T = RC \text{ 或 } T = \sqrt{LC}, \quad \xi = R\sqrt{C}/(2\sqrt{L}) \quad \omega_n = \frac{1}{T},$$

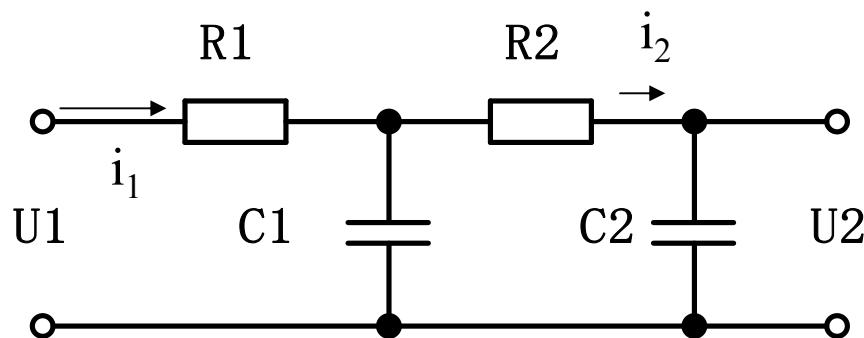
$$T^2 \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_i(t)$$

标准形式：

$$\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + 2\xi \omega_n \frac{du_c(t)}{dt} + \omega_n^2 u_c(t) = \omega_n^2 u_i(t)$$

● RC网络

右图为由一RC组成的网络。
试列写以 $U_1(t)$ 为输入量，
 $U_2(t)$ 为输出量的微分方程。



设回路电流 i_1 、 i_2 ，根据克希霍夫定律，列写方程：

$$U_1 = R_1 i_1 + U_{c1} \quad (1)$$

$$U_2 = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt \quad (4)$$

$$U_{c1} = \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt \quad (2)$$

$$U_{c1} = R_2 i_2 + U_{c2} \quad (3)$$

$$U_1 = R_1 i_1 + U_{c1} \quad \textcircled{1}$$

$$U_2 = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt \quad \textcircled{4}$$

$$U_{c1} = \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt \quad \textcircled{2}$$

$$U_{c1} = R_2 i_2 + U_{c2} \quad \textcircled{3}$$

由④得 $i_2 = C_2 \frac{dU_2}{dt}$

由②导出 $i_1 = C_1 \frac{dU_{c1}}{dt} + i_2 = C_1 \frac{dU_{c1}}{dt} + C_2 \frac{dU_2}{dt}$

将 i_1 、 i_2 代入①、③，则得

$$\mathbf{U_1 = R_1 i_1 + R_2 i_2 + U_{c2}}$$

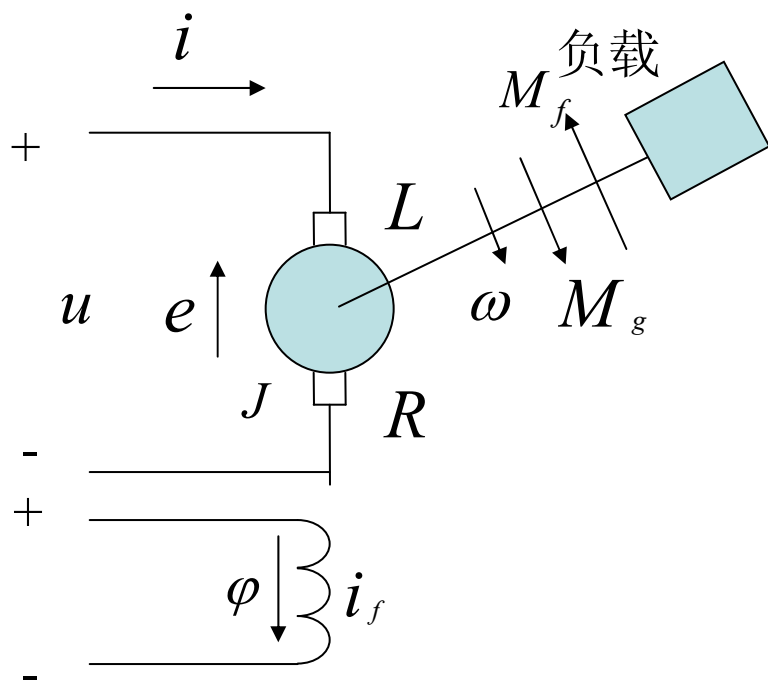
$$= R_1 (C_1 \frac{dU_{c1}}{dt} + C_2 \frac{dU_2}{dt}) + R_2 C_2 \frac{dU_2}{dt} + U_2$$

$$\begin{aligned}
 U_1 &= R_1 i_1 + R_2 i_2 + U_{c2} \\
 &= R_1 \left(C_1 \frac{dU_{c1}}{dt} + C_2 \frac{dU_2}{dt} \right) + R_2 C_2 \frac{dU_2}{dt} + U_2 \\
 &= R_1 \left[C_1 \frac{d}{dt} (R_2 i_2 + U_2) + C_2 \frac{dU_2}{dt} \right] + R_2 C_2 \frac{dU_2}{dt} + U_2 \\
 &= R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 U_2}{dt^2} + R_1 C_1 \frac{dU_2}{dt} + R_1 C_2 \frac{dU_2}{dt} + R_2 C_2 \frac{dU_2}{dt} + U_2
 \end{aligned}$$

$$\underbrace{R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 U_2}{dt^2}}_{T^2} + \underbrace{(R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) \frac{dU_2}{dt}}_{2\xi T} + U_2 = U_1$$

二阶常系数线性微分方程

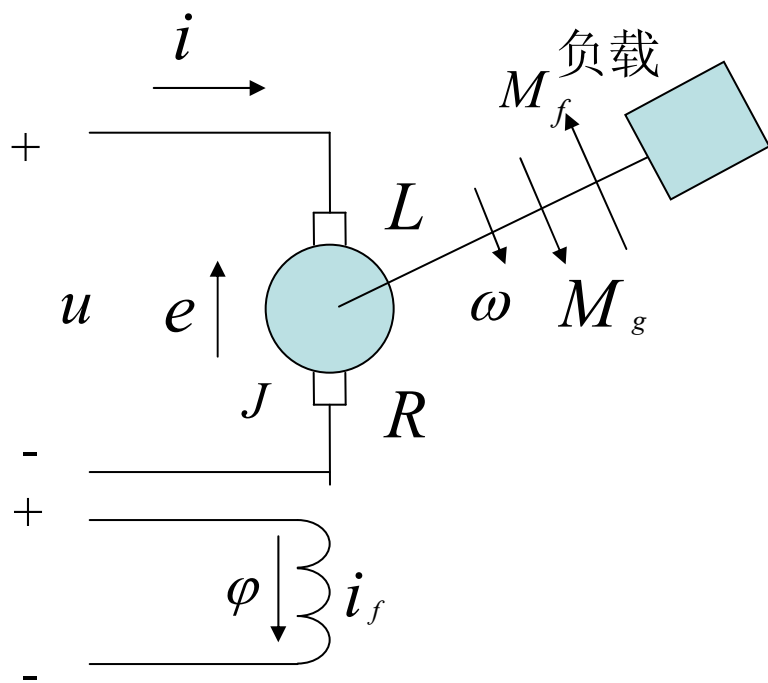
● 电枢控制的他励直流电动机



输入的电枢电压 u 在电枢回路中产生电枢电流 i ，再由电流 i 与激磁磁通相互作用产生电磁转矩 M_g ，从而拖动负载运动。因此，直流电动机的运动方程可由以下三部分组成。

- 电枢回路电压平衡方程
- 电磁转矩方程
- 电动机轴上的转矩平衡方程

● 电枢控制的他励直流电动机



(1) 电枢回路(克希霍夫定律)

$$L \frac{di}{dt} + iR + e = u$$

(2) 反电势(楞次定律)

$$e(t) = C_e \omega(t) \quad C_e \text{ 反电势系数}$$

(3) 电磁力矩 (安培定律)

$$M_g(t) = C_M i(t)$$

(4) 轴上动力学方程

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_g(t) - M_f(t) = C_M i(t) - M_f(t)$$

(电动机和负载折合到电动机轴上的转动惯量)

消去中间变量 i, e, M_g

$$\frac{LJ}{C_M C_e} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{RJ}{C_M C_e} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{C_e} u(t) - \left(\frac{1}{C_M C_e} \frac{dM_f}{dt} + \frac{R}{C_M C_e} M_f \right)$$

忽略电感 L 并认为负载转矩为常数，则方程简化为：

$$\frac{RJ}{C_M C_e} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{C_e} u(t) - \frac{R}{C_M C_e} M_f$$

令 $T_m = \frac{RJ}{C_e C_M}$, $K_m = \frac{1}{C_e}$, $K_M = \frac{R}{C_e C_M}$ 则

$$T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = K_m u(t) - K_M M_f$$

量纲：时间

称为机电时间常数

转速/电压

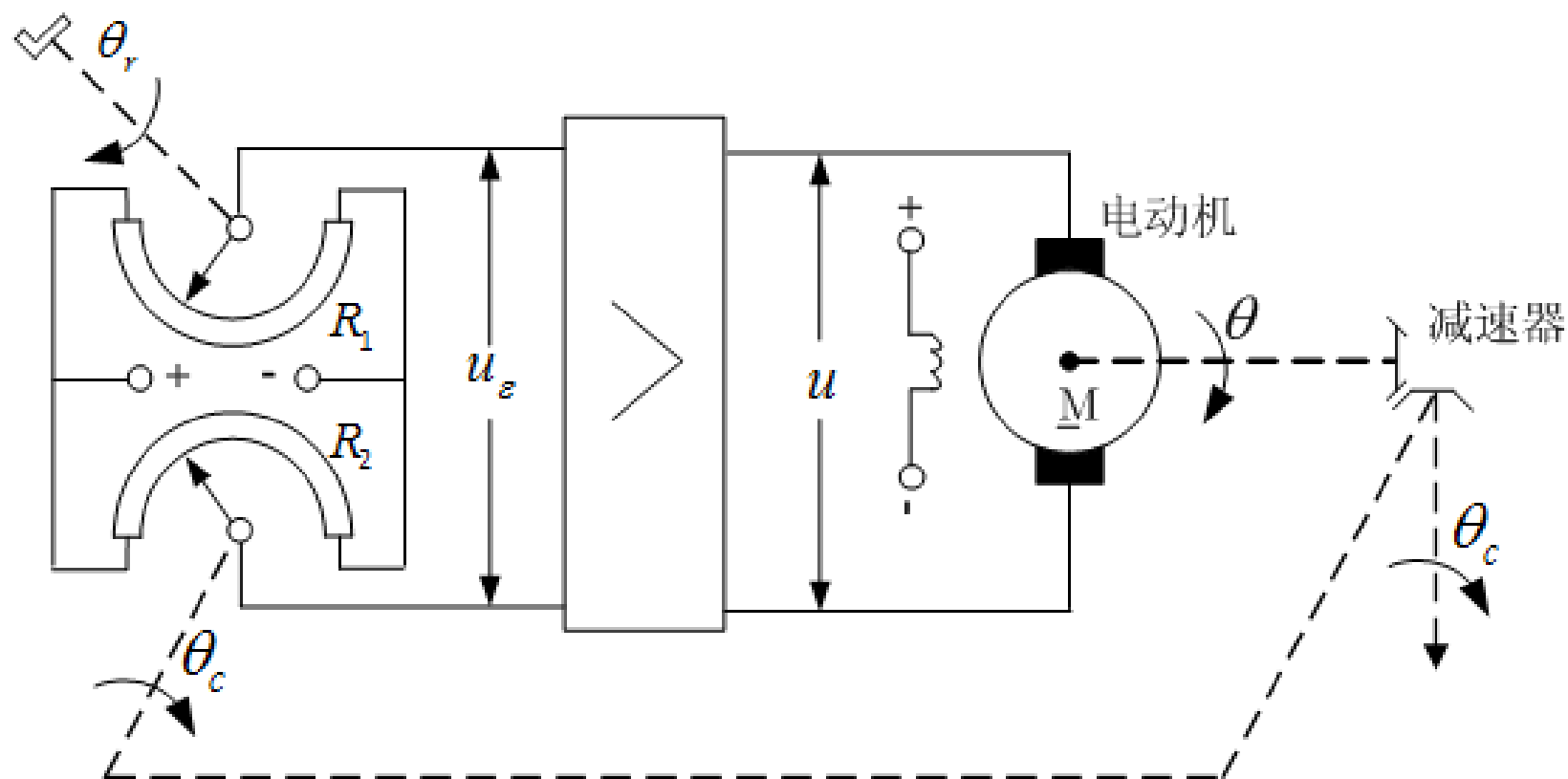
转速/转矩

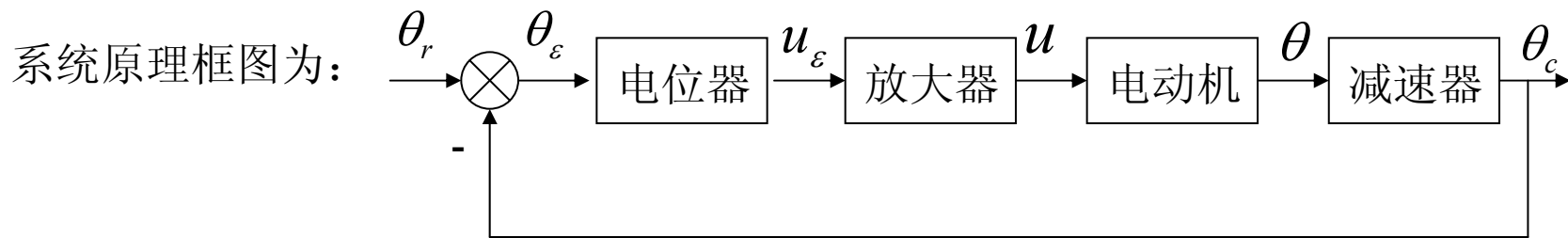
若以转角为输出，因为 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ 有

$$T_m \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = K_m u(t) - K_M M_f$$

有些小功率系统，负载较小，则 $T_m \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = K_m u(t)$

● 角度跟踪系统运动方程的列写





比较元件： $\theta_\varepsilon = \theta_r - \theta_c$

电位器： $u_\varepsilon = K_1 \theta_\varepsilon$

放大器： $u = K_2 u_\varepsilon$

电动机： $T_m \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = K_m u(t)$

减速器： $\theta_c = \theta / i$

消去中间变量 $\theta_\varepsilon, u_\varepsilon, u, \theta$ 得

$$T_m \frac{d^2 \theta_c}{dt^2} + \frac{d\theta_c}{dt} + K \theta_c = K \theta_r, \quad \text{其中 } K = K_1 K_2 K_m / i$$

即：

$$\frac{T_m}{K} \frac{d^2 \theta_c}{dt^2} + \frac{1}{K} \frac{d\theta_c}{dt} + \theta_c = \theta_r$$

标准化： $T^2 \frac{d^2 \theta_c}{dt^2} + 2\xi T \frac{d\theta_c}{dt} + \theta_c = \theta_r, \quad \frac{d^2 \theta_c}{dt^2} + 2\xi \omega_n \frac{d\theta_c}{dt} + \omega_n^2 \theta_c = \theta_r$

几点说明：

- 上述系统表面上虽然很不相同，但都可用二阶常系数线性微分方程描述，这表明其输出对输入的依赖关系从结构上讲是相同的，我们把这样的两个或多个系统称为相似系统。
- 能用二阶线性微分方程描述的系统称为二阶系统，很多系统经过简化后，都可归为二阶系统。三阶或三阶以上系统称为高阶系统。
- 微分方程是一种动态方程，它描述的是系统在运动状态下的输入、输出关系。
- 上面的系统都是针对线性元器件建立的，其数学模型是线性微分方程。对非线性元器件又该如何处理？

2-3 运动方程的线性化

- 严格地讲，实际物理系统都是非线性的；
- 建模原则：在保证模型具有可接受精确度的前提下应该尽量简单，阶数尽量低，最好是线性模型。采取的方法是：抓住主要因素忽略次要因素，使系统理想化；
- 有些元器件其非线性程度无法在全工作范围内用统一的线性模型描述；有些较复杂的系统，即使用一系列假设简化后，其输入、输出和状态量之间的关系仍是非线性的；
- 对非线性系统，一种近似处理方法是在工作点附近进行线性化处理，即小扰动线性化方程。

一元非线性函数 $y = f(x)$ ，在 x_0 处连续可微，则可将它在该点附近用泰勒级数展开.

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

增量较小时略去其高次幂项，则有

$$y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

令 $\Delta x = x - x_0$ $\Delta y = y - y_0$

有 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x = k\Delta x$

$$y = y_0 + \Delta y$$

二元(或多元)非线性函数 $y = f(x_1, x_2)$ 同样可在某工作点 (x_{10}, x_{20}) 附近用台劳级数展开

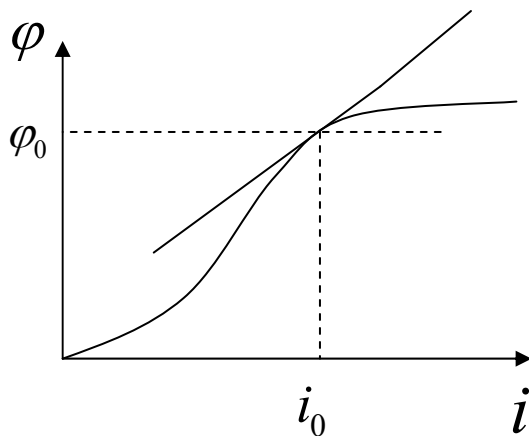
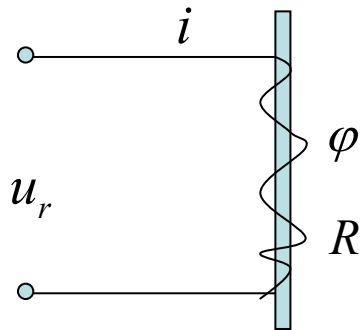
$$y = f(x_1, x_2) = f(x_{10}, x_{20}) + \left[\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \bigg|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} (x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \bigg|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} (x_2 - x_{20}) \right] \\ + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \bigg|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} (x_1 - x_{10})^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \bigg|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} (x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20}) \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \bigg|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} (x_2 - x_{20})^2 \right] + \dots$$

$$y - f(x_{10}, x_{20}) = \left[\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \bigg|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} (x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \bigg|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} (x_2 - x_{20}) \right]$$

$$\text{即: } \Delta y = k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2$$

这种小偏差线性化方法对于控制系统大多数工作状态是可行的

例：铁芯线圈：输入 u_r ，输出 i



根据克希霍夫定律

$$u_r = u_1 + Ri$$

感应电动势 u_1 :

$$u_1 = K_1 \frac{d\varphi(i)}{dt}$$

$\varphi(i)$ 磁通量

不是常数，且和
输出有关

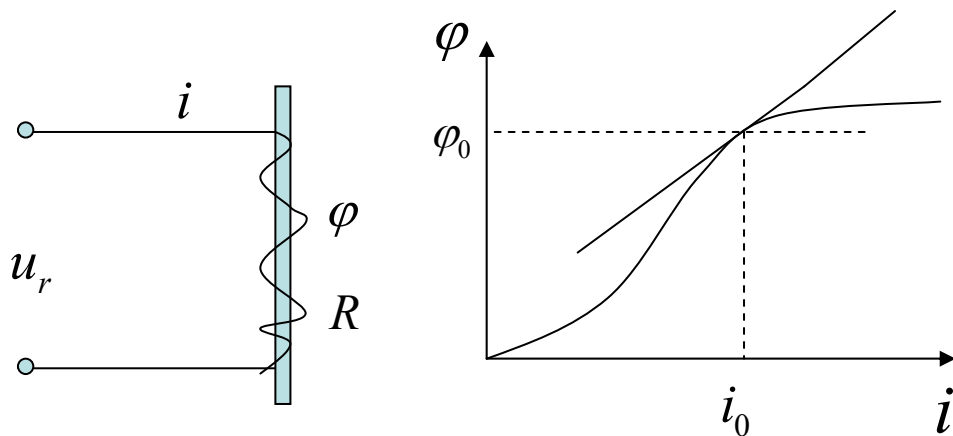
$$K_1 \frac{d\varphi(i)}{di} \frac{di}{dt} + Ri = u_r$$

注意：系数是变量，但和系统状态以及输入输出无关时不影响系统的线性性

设工作过程中，电压电流只在平衡点 (u_0, i_0) 附近微小变化，平衡点磁通量为 φ_0

$$K_1 \frac{d(\Delta\varphi(i) + \varphi_0)}{di} \frac{d(\Delta i + i_0)}{dt} + R(\Delta i + i_0) = (\Delta u_r + u_0)$$

$$K_1 \frac{d(\Delta\varphi(i))}{di} \frac{d(\Delta i)}{dt} + R(\Delta i + i_0) = (\Delta u_r + u_0)$$



如果系统中非线性元件不止一个，则必须依据实际系统中各元件所对应的平衡工作点建立线性化增量方程。

设工作过程中，电压电流只在平衡点 (u_0, i_0) 附近微小变化，平衡时磁通量为 φ_0

$$K_1 \frac{d(\Delta\varphi(i) + \varphi_0)}{di} \cdot \frac{d(\Delta i + i_0)}{dt} + R(\Delta i + i_0) = (\Delta u_r + u_0)$$

$$K_1 \frac{d(\Delta\varphi(i))}{di} \cdot \frac{d(\Delta i)}{dt} + R(\Delta i + i_0) = (\Delta u_r + u_0)$$

$$\varphi(i) = \varphi_0 + \left. \frac{d\varphi(i)}{di} \right|_{i=i_0} \Delta i + \dots$$

$$\Delta\varphi(i) = \left. \frac{d\varphi(i)}{di} \right|_{i=i_0} \Delta i = C_1 \Delta i$$

$$\frac{d\Delta\varphi(i)}{di} = \frac{dC_1 \Delta i}{di} = C_1 \frac{d((i - i_0))}{di} = C_1$$

$$K_1 C_1 \cdot \frac{d(\Delta i)}{dt} + R\Delta i + Ri_0 = \Delta u_r + u_0$$

平衡状态有 $Ri_0 = u_0$

小扰动线性化方程为（增量方程）：

$$K_1 C_1 \cdot \frac{d(\Delta i)}{dt} + R\Delta i = \Delta u_r$$

2.4 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换（拉氏变换） 在工程实践中常用来简便地解线性微分方程；它是建立经典控制理论复数域数学模型——传递函数的基础；其思想源自傅立叶变换，两者间关系密切。

关系：对一个函数进行傅氏变换，需要其满足的条件较高，当函数不满足特定条件时，可对其进行适当改造使其满足条件，此时我们把对改造后的函数的傅氏变换称为对原函数的拉氏变换

2.4.1 周期函数的傅立叶级数

傅立叶级数

周期函数 $f(t)$ 的傅立叶级数是由正弦和余弦函数组成的三角级数，其可展开的条件为（狄里赫来条件）：

- 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点
- 在一个周期内至多有有限个极值点

则 $f(t)$ 可展开成如下傅氏级数：
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

其中
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t dt \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$
$$\omega = 2\pi / T \quad \text{——基波频率}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$
$$n\omega \quad \text{——}n\text{次谐波频率}$$

傅立叶级数的复数形式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\omega t}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

证明过程需要用到以下欧拉公式：

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

对非周期函数该如何处理？

2.4.2 非周期函数的傅立叶变换

非周期函数不能展成傅立叶级数的形式，对傅氏级数理论在极限意义下作适当修改，可将非周期函数写成积分的形式，即傅氏积分

若 $f(t)$ 为非周期函数，则可视其为周期为无穷大、基波频率 $\omega_0 = 2\pi / T$ 趋于零的周期函数，此时相邻的谐波频率之差

$$(n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0$$

趋于零，谐波频率需要用变量 ω 来表示。

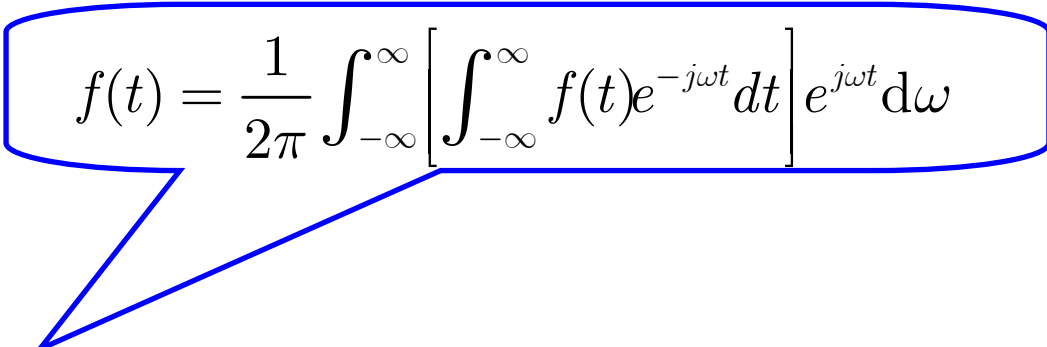
此时傅立叶级数可写为

$$f(t) = \sum_{\omega=-\infty}^{+\infty} a_{\omega} e^{j\omega t}, \quad a_{\omega} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

于是有

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{\omega=-\infty}^{+\infty} a_{\omega} e^{j\omega t} \\ &= \sum_{\omega=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\omega=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} \Delta\omega \end{aligned}$$

$T \rightarrow \infty$ 时, $\Delta\omega \rightarrow 0$ 求和运算转化为积分运算:


$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega$$

非周期函数的傅立叶积分形式

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

——傅立叶变换

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

——傅立叶反变换

通过傅立叶变换, 可以将非周期时域函数变换到频域。在工程实践中有何作用?

非周期函数的傅立叶变换存在的条件:

- 函数在任何有限区间满足狄里赫莱条件
- 在 $(-\infty, \infty)$ 上绝对可积, 即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ 存在

工程实践中很多常用函数 (如阶跃函数) 不满足绝对可积条件. 又该如何处理?

2.4.3 拉普拉斯变换

2.4.3.1 定义

例如，对单位阶跃函数 $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$ 直接进行傅氏变换

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\omega} (\sin \omega t + j \cos \omega t) \Big|_0^{\infty} \quad ?$$

不满足绝对可积条件的函数经过适当修改，一般都能进行傅氏变换，这就引入了拉普拉斯变换

改造：用指数衰减函数乘以原函数 $f(t)$ 。

改造后的阶跃函数 $e^{-\sigma t} 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\sigma t}, & t \geq 0 \quad (\sigma > 0) \end{cases}$

$$F_{\sigma}(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-\sigma t} 1(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

$$= \frac{-e^{-(\sigma + j\omega)t}}{\sigma + j\omega} \Big|_0^{+\infty} = \frac{-e^{-\sigma t} (\cos \omega t - j \sin \omega t)}{\sigma + j\omega} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sigma + j\omega}$$

单边广义
傅氏变换

- 函数不满足绝对可积条件，一般是因为当 t 趋于无穷时， $f(t)$ 衰减太慢，此时可用因子 $e^{-\sigma t}$ ($\sigma > 0$) 乘以 $f(t)$ ，则衰减会加快。 $e^{-\sigma t}$ 称为衰减因子。
- 衰减因子在 $t \rightarrow -\infty$ 时作用会相反，为此假设 $t < 0$ 时， $f(t)=0$ ，对实际的物理系统，做这一假设的合理性在于：研究时总可以把外作用加到系统上的瞬间选为 0 时刻，而 $t < 0$ 时的系统行为可以在初始条件中考虑。对 $f(t)$ 的研究就变为在时间 $t = 0 \rightarrow \infty$ 区间对函数 $f(t)e^{-\sigma t}$ 研究

$$\begin{aligned} F_{\sigma}(\omega) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt \\ &\stackrel{\text{令 } s=\sigma+j\omega}{=} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \end{aligned}$$

$$F_{\sigma}(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt \stackrel{\text{令 } s=\sigma+j\omega}{=} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

正变换

$$F_{\sigma}\left(\frac{s-\sigma}{j}\right) \Rightarrow F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

拉普拉斯变换公式

反变换

因为 $F_{\sigma}(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$, $f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅氏变换是 $F_{\sigma}(\omega)$
经傅氏反变换, 有:

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\sigma}(\omega)e^{j\omega t}d\omega \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\sigma}(\omega)e^{j\omega t}e^{\sigma t}d\omega$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_{\sigma}(\omega)e^{st}d(\sigma+j\omega)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}d(s)$$

$\begin{cases} F(s) & \text{像函数} \\ f(t) & \text{原函数} \end{cases}$

拉普拉斯反变换公式

关于拉氏变换积分下限的说明

$$\int_{0-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{0-}^{0+} f(t)e^{-st} dt + \int_{0+}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

当 $f(t)$ 满足拉氏变换存在的条件，且在 $t=0$ 处有界时， $\int_{0-}^{0+} f(t)e^{-st} dt = 0$

$$\therefore \int_{0-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{0+}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

当 $f(t)$ 在 $t=0$ 处无界时， $\int_{0-}^{0+} f(t)e^{-st} dt \neq 0$,

$$\therefore \int_{0-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \neq \int_{0+}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

为了反映脉冲函数在 $[0-, 0+]$ 区间的跳跃特性并保证积分结果的唯一性，因此拉氏变换的定义应为：

$$F(s) = \int_{0-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

通常简写为

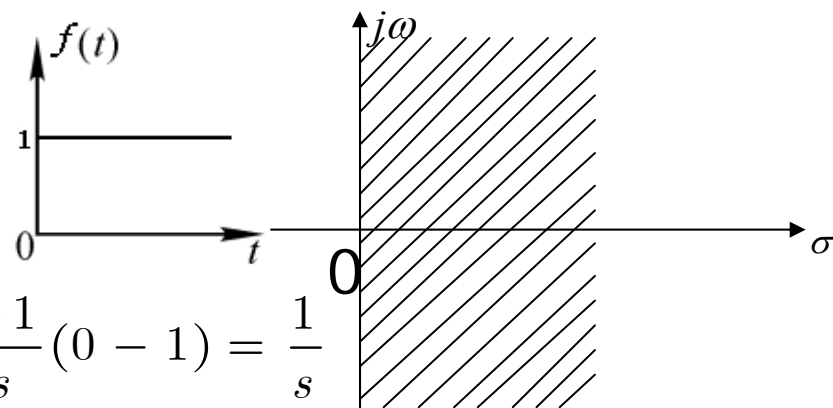
$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

2.4.3.2 典型函数的拉氏变换

例如

(1) 阶跃函数 $f(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{-1}{s} [e^{-st}]_0^{\infty} = \frac{-1}{s} (0 - 1) = \frac{1}{s}$$

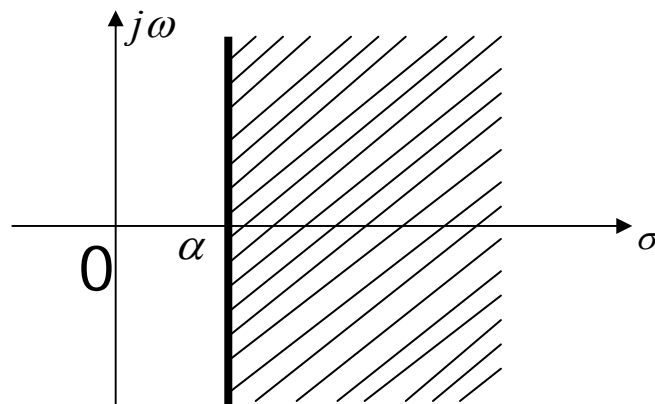
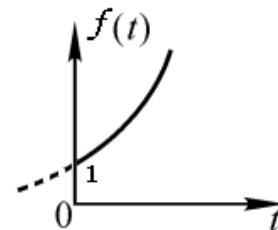


s 的实部 >0 时存在

(2) 指数函数

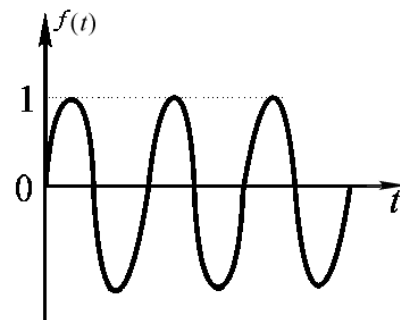
$$f(t) = \begin{cases} e^{at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt \\ &= \frac{-1}{s-a} [e^{-(s-a)t}]_0^{\infty} = \frac{-1}{s-a} (0 - 1) = \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$



s 的实部 $>a$ 时存在

(3) 正弦函数 $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin \omega t & t \geq 0 \end{cases}$



$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{\infty} \sin \omega t \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{2j} [e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}] \cdot e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2j} [e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}] dt \\
 &= \frac{1}{2j} \left[\frac{-1}{s-j\omega} e^{-(s-j\omega)t} \Big|_0^{\infty} - \frac{-1}{s+j\omega} e^{-(s+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} \right] \\
 &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{1}{2j} \cdot \frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

s 的实部 >0 时存在

(3) 余弦函数 $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \cos \omega t & t \geq 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad (\operatorname{Re}(s) > 0 \text{ 存在})$$

(4) 单位斜坡函数 $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0 \text{ 时存在})$$

(5) 单位脉冲函数

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (\operatorname{Re}(s) > -\infty \text{ 时存在})$$

单位脉冲函数的定义

$$\delta(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0} [1(t) - 1(t - t_0)]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{换成 } e^{-st}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

$$\text{及 } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0} [1(t) - 1(t - t_0)] e^{-st} dt = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0} \int_0^{\infty} [1(t) - 1(t - t_0)] \cdot e^{-st} dt$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0} \left[\int_0^{\infty} 1(t) \cdot e^{-st} dt - \int_0^{\infty} 1(t - t_0) \cdot e^{-st} dt \right] = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0} \left[\frac{1}{s} - \int_{-t_0}^{\infty} 1(\tau) \cdot e^{-s(\tau+t_0)} d\tau \right]$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0} \left[\frac{1}{s} - \left[\int_{-t_0}^0 1(\tau) \cdot e^{-s(\tau+t_0)} d\tau + \int_0^{\infty} 1(\tau) \cdot e^{-s(\tau+t_0)} d\tau \right] \right]$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0} \left[\frac{1}{s} - \int_0^{\infty} 1(\tau) \cdot e^{-s(\tau+t_0)} d\tau \right] = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0} \left[\frac{1}{s} - e^{-st_0} \int_0^{\infty} 1(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau \right]$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0} \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-st_0}}{s} \right] = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \left[\frac{1 - e^{-st_0}}{t_0 s} \right] \quad \text{罗彼塔法则}$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \left[\frac{se^{-st_0}}{s} \right] = 1$$

单位阶跃
函数的拉
氏变换

单位阶跃
函数的拉
氏变换

2.4.3.3拉氏变换的有关定理

设 $L[f(t)] = F(s)$, $L[f_1(t)] = F_1(s)$, $L[f_2(t)] = F_2(s)$, 则有

(1) 线性性质: $L[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s)$

$$\begin{aligned} L[af_1(t) + bf_2(t)] &= \int_0^{\infty} (af_1(t) + bf_2(t))e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} af_1(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} bf_2(t)e^{-st} dt \\ &= a \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt + b \int_0^{\infty} f_2(t)e^{-st} dt \\ &= aF_1(s) + bF_2(s) \end{aligned}$$

求 $\cos \omega t$ 的拉式变换

$$\begin{aligned} L[\cos(\omega t)] &= L\left[\frac{1}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}\right] = \frac{1}{2}L[e^{j\omega t}] + \frac{1}{2}L[e^{-j\omega t}] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{2} \frac{1}{s + j\omega} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

(2) 微分定理: $L[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0)$

$$\begin{aligned} \text{证明: 左} &= \int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} df(t) \\ &= \left[e^{-st} f(t) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) de^{-st} \\ &= [0 - f(0)] + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

进一步:

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

零初始条件下有: $L[f^{(n)}(t)] = s^n \cdot F(s)$

例：某动态电路的输入-输出方程为

$$\frac{d^2}{dt^2} r(t) + a_1 \frac{d}{dt} r(t) + a_0 r(t) = b_1 \frac{d}{dt} e(t) + b_0 e(t)$$

系统输出及其一阶导数的初值分别为 $r(0)$ 和 $r'(0)$ ，输入函数的初值为 $e(0) = 0$ ，求输出的拉氏变换表达式。

解：

$$\left[s^2 R(s) - sr(0) - r'(0) \right] + a_1 \left[sR(s) - r(0) \right] + a_0 R(s) = b_1 \left[sE(s) - e(0) \right] + b_0 E(s)$$

$$\left[s^2 + a_1 s + a_0 \right] R(s) + \left[-s - a_1 \right] r(0) - r'(0) = \left[b_1 s + b_0 \right] E(s) - b_1 e(0)$$

$$R(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} E(s) + \frac{s + a_1}{s^2 + a_1 s + a_0} r(0) + \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} r'(0)$$

● 例：求 $L[\delta(t)]$

$$\text{解：} \because \delta(t) = 1'(t), \therefore L[\delta(t)] = L[1'(t)] = s \cdot \frac{1}{s} - 1(0^-) = 1 - 0 = 1$$

● 例：求 $L[\cos \omega t]$

$$\text{解：} \because \cos \omega t = \frac{1}{\omega} \sin' \omega t$$

$$L[\cos \omega t] = \frac{1}{\omega} L[\sin' \omega t] = \frac{1}{\omega} \cdot s \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$(3) \text{ 积分定理：} L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} \cdot F(s)$$

$$\begin{aligned} L\left[\int_0^t f(t) dt\right] &= \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_0^t f(t) dt\right] e^{-st} dt \\ &= \left[\int_0^t f(t) dt\right] \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) \Big|_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} \left(\frac{e^{-st}}{s}\right) f(t) dt \end{aligned}$$

证：

$$= \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} \left[\int_0^t f(t) dt\right] \Big|_{t=0^-} = \frac{1}{s} \cdot F(s)$$

例：求 $L[t] = ?$

解： $\because t = \int 1(t) dt$

$$\therefore L[t] = L\left[\int 1(t) dt\right] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

例：求 $L\left[\frac{t^2}{2}\right]$

解： $\because \frac{t^2}{2} = \int t dt$

$$\therefore L\left[\frac{t^2}{2}\right] = L\left[\int t dt\right] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^3}$$

(4) 实位移定理 $L[f(t - \tau_0)] = e^{-\tau_0 \cdot s} \cdot F(s)$

证明: 左 = $\int_0^{\infty} f(t - \tau_0) \cdot e^{-t \cdot s} dt$

令 $t - \tau_0 = \tau$

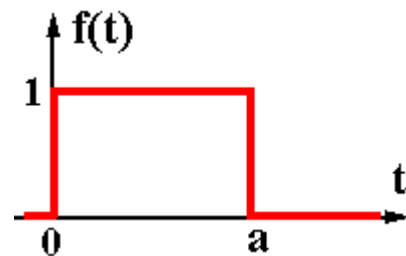
$$= \int_{-\tau_0}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-s(\tau + \tau_0)} d\tau = e^{-\tau_0 s} \int_{-\tau_0}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-\tau s} d\tau$$

$$= e^{-\tau_0 s} \int_{-\tau_0}^0 f(\tau) \cdot e^{-\tau s} d\tau + e^{-\tau_0 s} \int_0^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-\tau s} d\tau = \text{右}$$

等于0

例 $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < a \\ 0 & t > a \end{cases}$, 求 $F(s)$

解. $f(t) = 1(t) - 1(t - a)$



$$L[f(t)] = L[1(t) - 1(t - a)] = \frac{1}{s} - e^{-as} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-as}}{s}$$

例 求 $u(t)$ 的拉普拉斯变换像函数 $U(s)$

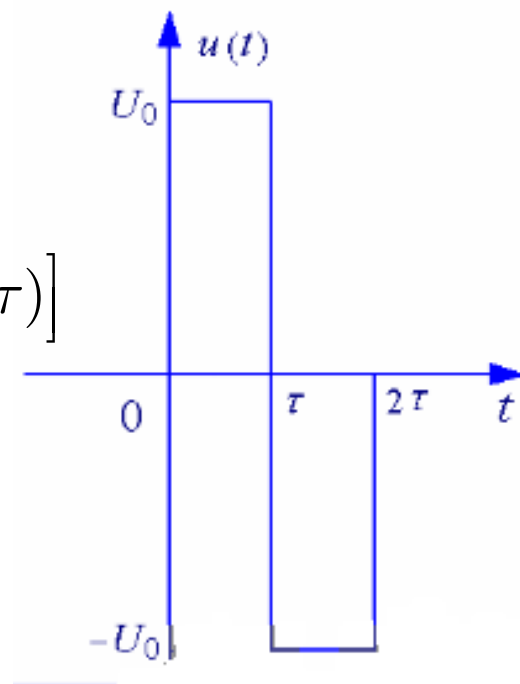
解

$$\therefore u(t) = U_0 1(t) - 2U_0 1(t - \tau) + U_0 1(t - 2\tau)$$

$$\therefore L[u(t)] = L[U_0 1(t) - 2U_0 1(t - \tau) + U_0 1(t - 2\tau)]$$

$$= \frac{U_0}{s} - \frac{2U_0 e^{-\tau s}}{s} + \frac{U_0 e^{-2\tau s}}{s}$$

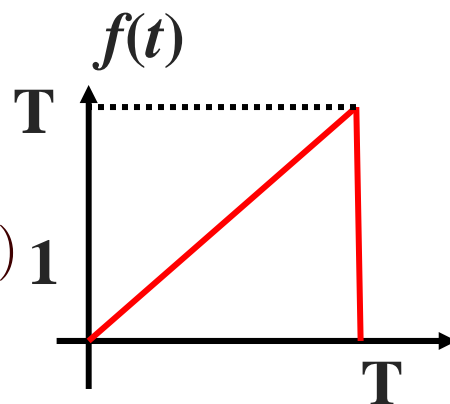
$$= \frac{U_0}{s} [1 - 2e^{-\tau s} + e^{-2\tau s}]$$



例：求三角波的像函数

解 $f(t) = t \cdot [1(t) - 1(t - T)]$

$$= t \cdot 1(t) - (t - T) \cdot 1(t - T) - T \cdot 1(t - T)$$



$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-sT} - \frac{T}{s} e^{-sT}$$

(5) 复位移定理 $L[e^{A \cdot t} f(t)] = F(s - A)$

证明: 左 = $\int_0^{\infty} e^{At} f(t) \cdot e^{-t \cdot s} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-(s-A) \cdot t} dt$

\downarrow 令 $s - A = \hat{s}$

= $\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-\hat{s} \cdot t} dt = F(\hat{s}) = F(s - A) =$ 右

例 $L[e^{at}] = L[1(t) \cdot e^{at}] = \frac{1}{\hat{s}} \Big|_{\hat{s} \rightarrow s-a} = \frac{1}{s-a}$

例 $L[e^{-3t} \cdot \cos 5t] = \frac{\hat{s}}{\hat{s}^2 + 5^2} \Big|_{\hat{s} \rightarrow s+3} = \frac{s+3}{(s+3)^2 + 5^2}$

例 $L\left[e^{-2t} \cos\left(5t - \frac{\pi}{3}\right)\right] = L\left\{e^{-2t} \cos\left[5\left(t - \frac{\pi}{15}\right)\right]\right\}$

= $\left\{e^{-\frac{\pi}{15}\hat{s}} \frac{\hat{s}}{\hat{s}^2 + 5^2}\right\}_{\hat{s} \rightarrow s+2} = e^{-\frac{\pi}{15}(s+2)} \cdot \frac{s+2}{(s+2)^2 + 5^2}$

(6) 初值定理 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$

证明：由微分定理 $\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-st} dt = s \cdot F(s) - f(0)$

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot F(s) - f(0)]$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot F(s) - f(0)]$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) - \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

当 $\frac{df(t)}{dt} = \infty$ 时初值定理不能直接用，比如 $f(t) = 1(t)$ ，为什么？

例

$$\begin{cases} f(t) = t \\ F(s) = \frac{1}{s^2} \end{cases} \quad f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{1}{s^2} = 0$$

(7) 终值定理 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$ (终值确实存在时)

证明：由微分定理 $\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-st} dt = s \cdot F(s) - f(0)$

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot F(s) - f(0)]$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) - f(0)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} df(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) - f(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) - f(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

例 $F(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)}$ $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s(s+a)(s+b)} = \frac{1}{ab}$

例 $F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ $f(\infty) = \sin \omega t \Big|_{t \rightarrow \infty} \neq \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = 0$

(8) 相似定理

$$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as)$$

证明：

$$\begin{aligned} L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] &= \int_0^{\infty} f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-ast_1} d(at_1) \\ &= a \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-ast_1} d(t_1) \\ &= aF(as) \end{aligned}$$

计算时域函数的拉氏变换有两种思路

- 定义法：应用拉氏变换的定义计算（笨办法）
- 查表法：简单的函数可直接查表；较复杂函数，可先将其分解为多个简单函数之和，并分别查表求其拉氏变换，求解时注意运用拉氏变换的性质

例. 1). $f(t) = 1 - e^{-\frac{1}{T}t}$ $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} = \frac{\frac{1}{T}}{s\left(s + \frac{1}{T}\right)}$

2). $f(t) = 0.03(1 - \cos 2t)$ $F(s) = 0.03\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 2^2}\right] = \frac{0.12}{s(s^2 + 2^2)}$

3). $f(t) = \sin\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$ $F(s) = \frac{5}{s^2 + 5^2} e^{\frac{\pi}{15}s}$

4). $f(t) = e^{-0.4t} \cos 12t$ $F(s) = \frac{s + 0.4}{(s + 0.4)^2 + 12^2} = \frac{s + 0.4}{s^2 + 0.8s + 144.16}$

定义：若给定的两个函数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 在 $t < 0$ 时均为零,

则积分式 $\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ 称为 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 的卷积,

记作 $f_1(t)*f_2(t)$, 即:

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

定理：若 $F_1(s) = L[f_1(t)]$, $F_2(s) = L[f_2(t)]$, 则

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)$$

或

$$L^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = f_1(t) * f_2(t)$$

2.4.3.4 拉氏反变换

(1) 反演积分

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds ,$$

(2) 查表法——部分分式展开。

部分分式展开的作用：

🧩 查表法要求 $F(s)$ 是变换表中能立即辨认的形式，而大量的拉氏变换表达式在表中不能直接找到对应的反变换式，即不能直接套用拉氏变换表，需要先将 $F(s)$ 写成 s 的简单函数（部分分式展开），使各个简单函数的拉氏反变换是可直接查表获取的。

🧩 本课程涉及的控制对象都是线性的，可用线性微分方程描述，线性微分方程对应的 $F(s)$ 一般是多项式分式，即 $F(s) = A(s)/B(s)$ ，其中 $A(s)$ 和 $B(s)$ 都是 s 的多项式。采用部分分式展开能将其分解为 s 的多个一次、二次分式函数之和。

设

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

部分分式展开要求 $n > m$ ，即要求 $F(s)$ 是严格真分式，若此条件不满足，必须用 $A(s)$ 去除 $B(s)$ ，得到一个 s 的多项式和严格真分式。

若展开结果为：

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s)$$

其中 $F_i(s)$ 是多项式或者 s 的一次/二次分式，其反变换可查表求得，则

$$L^{-1}(F(s)) = L^{-1}(F_1(s)) + L^{-1}(F_2(s)) + \dots + L^{-1}(F_n(s))$$

部分分式展开法

一般有
$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (n > m)$$

设
$$A(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)$$

I. 当 $A(s) = 0$ 无重根时

$$F(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_n}{s - p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{s - p_i}$$

则:
$$f(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}$$

其中:
$$\begin{cases} C_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) \cdot F(s) \\ C_i = \left. \frac{B(s)}{A'(s)} \right|_{s=p_i} \end{cases}$$

推导系数计算式 $C_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i).F(s)$

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (n > m) \\
 &= \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_n}{s - p_n} \\
 &= \frac{C_1 \left((s - p_2) \cdots (s - p_n) \right) + \dots + C_i \left((s - p_1) \cdots (s - p_{i-1}) (s - p_{i+1}) \cdots (s - p_n) \right) + \dots + C_n \left((s - p_1) (s - p_2) \cdots (s - p_{n-1}) \right)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i).F(s) \\
 &= \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) \\
 &\bullet \frac{C_1 \left((s - p_2) \cdots (s - p_n) \right) + \dots + C_i \left((s - p_1) \cdots (s - p_{i-1}) (s - p_{i+1}) \cdots (s - p_n) \right) + \dots + C_n \left((s - p_1) (s - p_2) \cdots (s - p_{n-1}) \right)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \\
 &= C_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{B(s)}{A'(s)} \Big|_{s=p_i} &= \frac{C_1 \left((s - p_2) \cdots (s - p_n) \right) + \dots + C_i \left((s - p_1) \cdots (s - p_{i-1}) (s - p_{i+1}) \cdots (s - p_n) \right) + \dots + C_n \left((s - p_1) (s - p_2) \cdots (s - p_{n-1}) \right)}{\left((s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n) \right)'} \Big|_{s=p_i} \\
 &= \frac{C_1 \left((s - p_2) \cdots (s - p_n) \right) + \dots + C_i \left((s - p_1) \cdots (s - p_{i-1}) (s - p_{i+1}) \cdots (s - p_n) \right) + \dots + C_n \left((s - p_1) (s - p_2) \cdots (s - p_{n-1}) \right)}{(s - p_2) \cdots (s - p_n) + \dots + (s - p_1) \cdots (s - p_{n-1})} \Big|_{s=p_i} \\
 &= C_i
 \end{aligned}$$

例 已知 $F(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$, 求 $f(t) = ?$

$$\begin{aligned} \text{解. } F(s) &= \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+3} \\ &\quad \left\{ \begin{aligned} C_1 &= \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{-1+2}{-1+3} = \frac{1}{2} \\ C_2 &= \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{-3+2}{-3+1} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right. \\ &\quad \downarrow \\ F(s) &= \frac{1/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+3} \qquad f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \end{aligned}$$

例 已知 $F(s) = \frac{s^2+5s+5}{s^2+4s+3}$, 求 $f(t) = ?$

$$\text{解. } F(s) = \frac{(s^2+4s+3) + (s+2)}{s^2+4s+3} = 1 + \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

$$f(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

例 已知 $F(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+2}$, 求 $f(t) = ?$

解一. $F(s) = \frac{s+3}{(s+1-j)(s+1+j)} = \frac{C_1}{s+1-j} + \frac{C_2}{s+1+j}$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow -1+j} (s+1-j) \frac{s+3}{(s+1-j)(s+1+j)} = \frac{2+j}{2j}$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow -1-j} (s+1+j) \frac{s+3}{(s+1-j)(s+1+j)} = \frac{2-j}{-2j}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2+j}{2j} e^{(-1+j)t} - \frac{2-j}{2j} e^{(-1-j)t} = \frac{1}{2j} e^{-t} \left[(2+j)e^{jt} - (2-j)e^{-jt} \right] \\ &= \frac{1}{2j} e^{-t} \cdot j \left[2 \cos t + 4 \sin t \right] = e^{-t} \cdot [\cos t + 2 \sin t] \end{aligned}$$

解二: $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2+1^2} = \frac{s+1+2}{(s+1)^2+1^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} + 2 \frac{1}{(s+1)^2+1^2}$

$$f(t) = e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \sin t$$

$$\begin{cases} e^{-jt} = \cos t - j \sin t \\ e^{jt} = \cos t + j \sin t \\ \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} = \sin t \\ \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} = \cos t \end{cases}$$

II. 当 $A(s) = (s - p_1) \cdots (s - p_n) = 0$ 有重根时 (设 p_1 为 m 重根, 其余为单根)

$$F(s) = \frac{C_m}{(s-p_1)^m} + \frac{C_{m-1}}{(s-p_1)^{m-1}} + \cdots + \frac{C_1}{s-p_1} + \frac{C_{m+1}}{s-p_{m+1}} + \cdots + \frac{C_n}{s-p_n}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_m = \lim_{s \rightarrow p_1} (s - p_1)^m \cdot F(s) \\ C_{m-1} = \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d}{ds} [(s - p_1)^m \cdot F(s)] \\ \dots \\ C_{m-j} = \frac{1}{j!} \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d^{(j)}}{ds^j} [(s - p_1)^m \cdot F(s)] \\ \dots \\ C_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d^{(m-1)}}{ds^{m-1}} [(s - p_1)^m \cdot F(s)] \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1} \left[\frac{C_m}{(s-p_1)^m} + \frac{C_{m-1}}{(s-p_1)^{m-1}} + \cdots + \frac{C_1}{s-p_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_{m+1}}{s-p_{m+1}} + \cdots + \frac{C_n}{s-p_n} \right] \\ &= \left[\frac{C_m}{(m-1)!} t^{m-1} + \frac{C_{m-1}}{(m-2)!} t^{m-2} + C_2 t + C_1 \right] \cdot e^{p_1 t} \\ &\quad + \sum_{i=m+1}^n C_i e^{p_i t} \end{aligned}$$

证明:

$$F(s) = \frac{C_m}{(s-p_1)^m} + \frac{C_{m-1}}{(s-p_1)^{m-1}} + \dots + \frac{C_1}{s-p_1} + \frac{C_{m+1}}{s-p_{m+1}} + \dots + \frac{C_n}{s-p_n}$$

$$(s-p_1)^m F(s) = C_m + C_{m-1}(s-p_1) + C_{m-2}(s-p_1)^2 + \dots + C_1(s-p_1)^{m-1} + \frac{C_{m+1}(s-p_1)^m}{s-p_{m+1}} + \dots + \frac{C_n(s-p_1)^m}{s-p_n}$$

$$\lim_{s \rightarrow p_1} (s-p_1)^m \cdot F(s) = C_m$$

$$\frac{d}{ds} [(s-p_1)^m \cdot F(s)] = 0 + C_{m-1} + 2C_{m-2}(s-p_1) + \dots + (m-1)C_1(s-p_1)^{m-2} + \dots$$

$$\frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d}{ds} [(s-p_1)^m \cdot F(s)] = C_{m-1}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} [(s-p_1)^m \cdot F(s)] = 0 + 0 + 2C_{m-2} + \dots + (m-1)(m-2)C_1(s-p_1)^{m-3} + \dots$$

$$\frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d^2}{ds^2} [(s-p_1)^m \cdot F(s)] = C_{m-2}$$

...

例 已知 $F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}$, 求 $f(t) = ?$

解. $F(s) = \frac{C_2}{(s+1)^2} + \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_3}{s} + \frac{C_4}{s+3}$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)^2 \frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)} = \frac{-1+2}{(-1)(-1+3)} = -\frac{1}{2}$$

$$C_1 = \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left[(s+1)^2 \frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)} \right] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s(s+3) - (s+2)[s+3+s]}{s^2(s+3)^2} = -\frac{3}{4}$$

$$C_3 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)} = \frac{2}{3}$$

$$C_4 = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) \frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)} = \frac{1}{12}$$

$$F(s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{s+3}$$

$$f(t) = -\frac{1}{2}te^{-t} - \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12}e^{-3t}$$

2.4.3.4 用拉氏变换求解线性微分方程

用拉氏变换求解线性微分方程分三步：

1. 对微分方程的每一项进行拉氏变换，将微分方程转换为 s 的代数方程

$$c^{(n)}(t) + a_1 c^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} c'(t) + c(t) = b_0 r^{(m)}(t) + b_1 r^{(m-1)}(t) + \cdots + b_{m-1} r'(t) + b_m r(t)$$

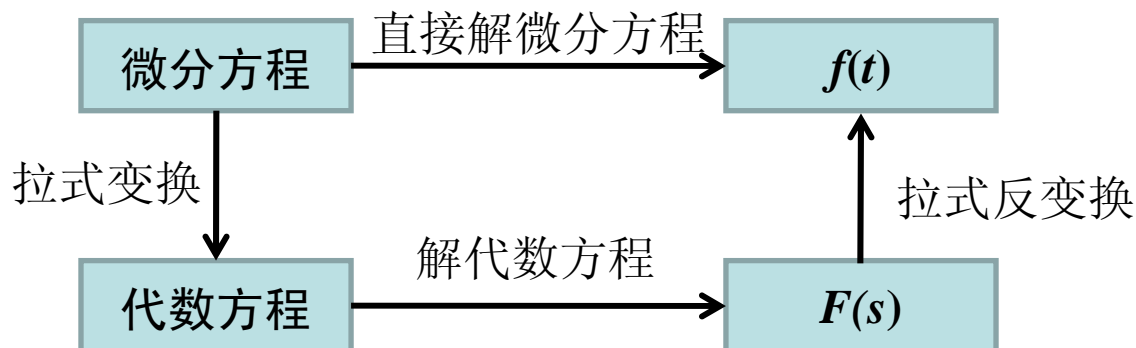
设初始条件为 0，则

$$\left[s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \right] C(s) = \left[b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m \right] R(s)$$

2. 求解代数方程，得到因变量的拉氏变换表达式

$$C(s) = \frac{(b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m) R(s)}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

3. 对表达式进行反变换得到微分方程的解。



例 求 $y'''+3y''+3y'+y=1$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$ 的特解.

解 设 $\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$, 方程两边同取拉氏变换

$$s^3Y(s) + 3s^2Y(s) + 3sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s},$$

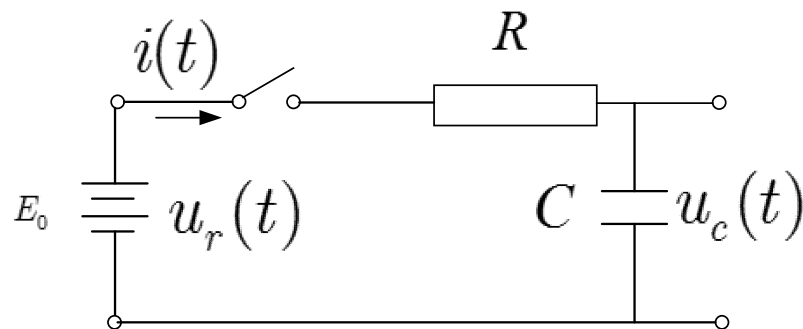
于是

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s(s+1)^3} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3}, \end{aligned}$$

取逆变换, 得

$$y(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^{-t}.$$

例 R - C 电路计算



$$u_r = Ri + u_c$$

$$\downarrow i = C\dot{u}_c \quad RC\dot{u}_c + u_c = u_r$$

$$u_r = RC\dot{u}_c + u_c$$

$$RC[sU_c(s) - u_c(0)] + U_c(s) = U_r(s)$$

$$(RCs + 1)U_c(s) = U_r(s) + RCu_c(0)$$

$$u_r(t) = E_0 \cdot 1(t)$$

$$U_r(s) = \frac{E_0}{s}$$

$$U_c(s) = \frac{U_r(s)}{RCs + 1} + \frac{RCu_c(0)}{RCs + 1} = \frac{E_0}{s(RCs + 1)} + \frac{RCu_c(0)}{RCs + 1}$$

$$= \frac{E_0/RC}{s(s + \frac{1}{RC})} + \frac{u_c(0)}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{u_c(0)}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{E_0/RC}{s(s + \frac{1}{RC})} = E_0 \\ C_1 = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{RC}} (s + \frac{1}{RC}) \frac{E_0/RC}{s(s + \frac{1}{RC})} = -E_0 \end{array} \right.$$

$$U_c(s) = \frac{E_0}{s} - \frac{E_0}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{u_c(0)}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$u_c(t) = E_0 - E_0 e^{-\frac{1}{RC}t} + u_c(0) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$u_c(t) = E_0 - [E_0 - u_c(0)] \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

通过拉氏变换的初值及终值定理，在无需求解微分方程的前提下可计算响应的初值及终值：

$$U_c(s) = \frac{E_0}{s} - \frac{E_0}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{u_c(0)}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} U_c(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s U_c(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[\frac{E_0}{s} - \frac{E_0}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{u_c(0)}{s + \frac{1}{RC}} \right] = u_c(0)$$

$$U_c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s U_c(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{E_0}{s} - \frac{E_0}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{u_c(0)}{s + \frac{1}{RC}} \right] = E_0$$

2.4.3.5 系统的模态

线性常微分方程解的结构：**齐次方程的通解+非齐次方程的特解**。通解由微分方程的特征根决定，每个特征根确定一个运动模态，每种模态代表一种类型的运动，确定模态的方法如下：

1. 若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 是系统的单重根，则给出 m 个模态：

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_m t}。$$

2. 若 λ_i 是系统的 m 重实根，则给出 m 个模态： $e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda_i t}$

3. 若特征方程有两个共轭复数根 $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ ，则给出两个复模态

$$e^{(\sigma-j\omega)t}, e^{(\sigma+j\omega)t}，这两个复模态可以导出两个实函数模态 $e^{\sigma t} \sin \omega t, e^{\sigma t} \cos \omega t$$$

$\therefore e^{(\sigma-j\omega)t}, e^{(\sigma+j\omega)t}$ 是齐次方程的根

$\therefore \frac{e^{(\sigma-j\omega)t} + e^{(\sigma+j\omega)t}}{2}, \frac{e^{(\sigma+j\omega)t} - e^{(\sigma-j\omega)t}}{2j}$ 也是齐次方程的根，可以证明

这两个函数就是 $e^{\sigma t} \sin \omega t$ 和 $e^{\sigma t} \cos \omega t$

$$\frac{e^{(\sigma-j\omega)t} + e^{(\sigma+j\omega)t}}{2} = e^{\sigma t} \frac{\cos(\omega t) - j \sin(\omega t) + \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)}{2} = e^{\sigma t} \cos(\omega t)$$

$$\frac{e^{(\sigma+j\omega)t} - e^{(\sigma-j\omega)t}}{2j} = e^{\sigma t} \frac{\cos(\omega t) + j \sin(\omega t) - (\cos(\omega t) - j \sin(\omega t))}{2j} = e^{\sigma t} \sin(\omega t)$$

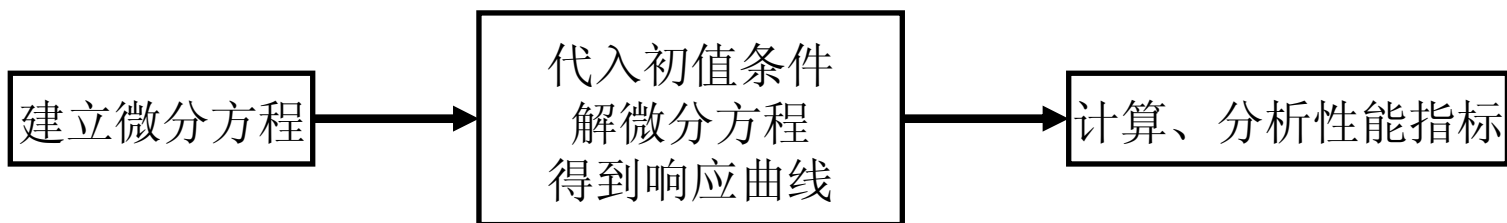
4. 若特征方程有 m 个共轭复数根 $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ ，则给出 $2m$ 个

$$e^{\sigma t} \sin \omega t, t e^{\sigma t} \sin \omega t, \dots, t^{m-1} e^{\sigma t} \sin \omega t$$

$$\text{模态 } e^{\sigma t} \cos \omega t, t e^{\sigma t} \cos \omega t, \dots, t^{m-1} e^{\sigma t} \cos \omega t$$

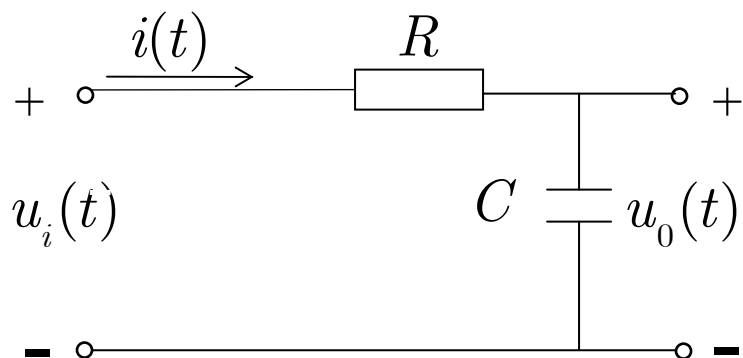
2.5 传递函数

- 以微分方程为模型的系统分析方法；



- 缺乏直观性，当系统参数改变时，上述过程需要反复进行，非常不便；
- 经典控制理论主要以传递函数为基础来分析、设计系统，并同时派生了系统设计的复数域方法（根轨迹法）和频域法，这些方法绕过了对微分方程的求解，可方便地用图形表示，直观简便；
- 传递函数是经典控制理论中最重要的概念之一；

一. 传递函数的概念



$$RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

在0初始条件下 ($u_o(0) = 0$)

$$RCsU_o(s) + U_o(s) = U_i(s)$$

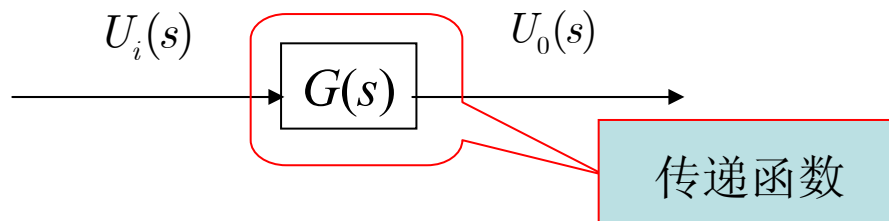
经过变换后，微分方程成了代数方程

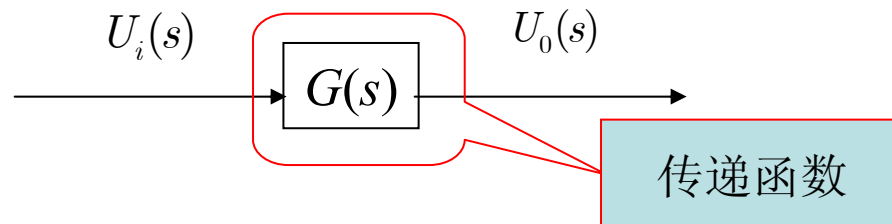
$$U_o(s) = \frac{1}{RCs + 1} U_i(s)$$

取决于系统结构及参数
而与输入输出无关

输入信号的拉氏变换
由输入的形式决定

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{Ts + 1} \triangleq G(s)$$



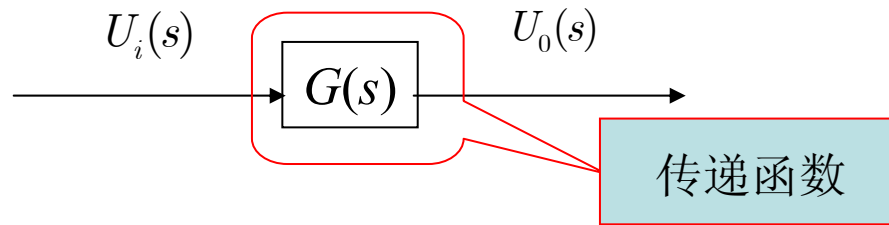


传递函数的定义：

线性定常系统在零初始条件下，输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。

结构图：

传递函数给出了元部件（或系统）输出与输入之间的关系。在方框图中用传递函数代替元器件的名称，从而构成结构图。结构图能从本质上揭示系统的运动规律，因而更为常用。



几点说明:

- 仅由系统结构、参数决定，是系统的动态模型，和输入输出无关；
- 传递函数是对线性系统定义的，对非线性系统不适用；
- 因为系统具有惯性且能源功率有限，传递函数是复变量 s 的实系数有理真分式，通常分子多项式次数小于等于分母多项式次数。

- 零初始条件含义有二：输入是在 $t=0$ 以后才作用于系统，系统输入的各阶导数在 $t=0^-$ 时的值为零；输入作用之前系统是相对静止的，系统输出量及其各阶导数在 $t=0^-$ 时的值为零。

某电路系统的微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}c(t) + a_1 \frac{d}{dt}c(t) + a_0 c(t) = b_1 \frac{d}{dt}r(t) + b_0 r(t)$$

系统输出及其一阶导数的初值分别为 $c(0)$ 和 $c'(0)$ ，输入函数的初值为 $r(0) = 0$ 。

$$\begin{aligned} [s^2 C(s) - sc(0) - c'(0)] + a_1 [sC(s) - c(0)] + a_0 C(s) &= b_1 [sR(s) - r(0)] + b_0 R(s) \\ [s^2 + a_1 s + a_0] C(s) + [-s - a_1] c(0) - c'(0) &= [b_1 s + b_0] R(s) - b_1 r(0) \end{aligned}$$

$$C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} R(s) + \frac{s + a_1}{s^2 + a_1 s + a_0} c(0) + \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} c'(0)$$

传递函数

- 为什么要规定零初始条件：只有在零初始条件下，输入输出的拉氏变换之比才唯一地由系统的结构和参数确定，才能准确反映系统本身的特性。
- 为什么可以规定零初始条件：研究系统的响应，都是从开始研究它的瞬时才把信号加上去的，而绝大多数系统，当输入为0时，都处于相对静止状态；零初始条件的规定，并不妨碍非零初条件时系统全响应的求解(可以由 $G(s)$ 回到系统微分方程，加上初条件求解)。

- 传函的局限性1：对非零初始条件的系统，传递函数不能完全描述其行为。
- 传函的局限性2：传递函数只是通过系统的输入变量与输出变量之间的关系来描述系统，即系统的外部描述，对内部其他变量却不完全知道。能同时反映内部变量运动特性的模型是状态空间模型。
- 传函的局限性3：只适合单输入单输出（SISO）系统

传递函数的一般形式

线性常系数微分方程的一般形式：

$$a_n c^{(n)}(t) + a_{n-1} c^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 c'(t) + a_0 c(t) = b_m r^{(m)}(t) + b_{m-1} r^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 r'(t) + b_0 r(t)$$

$r(t)$ 为输入， $c(t)$ 为输出， a_0, \dots, a_n 以及 b_0, \dots, b_m 是由系统结构及参数决定的。

拉氏变换：
$$\left[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \right] C(s) = \left[b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 \right] R(s)$$

传递函数：
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = G(s)$$

令
$$M(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0; \quad N(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

$$G(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$$

令 $s=0$ 得系统放大系数
$$G(0) = \frac{b_0}{a_0}$$

系统放大系数的物理意义：系统达到稳态时，输出与输入之比

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = G(s)$$

分子分母系数都除以 a_n

分子分母系数都除以 a_0

(1) 首1标准型:

$$G(s) = \frac{K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

根轨迹增益: $K^* = \frac{b_m}{a_m}$

零极点模型

(2) 尾1标准型:

$$G(s) = K \frac{\prod_{k=1}^{m_1} (\tau_k s + 1) \prod_{l=1}^{m_2} (\tau_l^2 s^2 + 2\xi\tau_l s + 1)}{\prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1) \prod_{j=1}^{n_2} (T_j^2 s^2 + 2\xi T_j s + 1)}$$

增益: $K = \frac{b_0}{a_0}$

典型环节形式

两种增益间的关系:

$$K = \frac{K^* \prod_{j=1}^m (-z_j)}{\prod_{i=1}^n (-p_i)}, \text{ 其中 } z_j \text{ 和 } p_i \text{ 中不包含那些位于原点的零极点。}$$

典型环节是传递函数的基本构成体，其形式主要有：

$$G(s) = K \frac{\prod_{k=1}^{m_1} (\tau_k s + 1) \prod_{l=1}^{m_2} (\tau_l^2 s^2 + 2\xi\tau_l s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1) \prod_{j=1}^{n_2} (T_j^2 s^2 + 2\xi T_j s + 1)}$$

1. 比例环节 $y(t) = Kx(t) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K$

2. 积分环节 $y(t) = \int x(t)dt \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s}$

3. 纯微分环节 $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow G(s) = s$

4. 惯性环节 $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$

5. 一阶微分环节 $y(t) = \tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \Rightarrow G(s) = \tau s + 1$

6. 震荡环节

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2T\xi \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

7. 二阶微分环节

$$y(t) = \tau^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi\tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$G(s) = \tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1$$

零极点模型

$$G(s) = \frac{K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

零点：使传递函数分子多项式取值为零的点。 z_1, z_2, \dots, z_m

极点：使传递函数分母多项式取值为零的点。 p_1, p_2, \dots, p_m

零极点分布图：把传递函数的零、极点同时表示在复平面上而得到的图形。

例 已知某系统在0初条件下的单位阶跃响应为：

$$c(t) = 1 - \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}$$

- 试求：
- (1) 系统的传递函数；
 - (2) 系统的增益；
 - (3) 系统的特征根及相应的模态；
 - (4) 画出对应的零极点图；
 - (5) 求系统的单位脉冲响应；
 - (6) 求系统微分方程；
 - (7) 当 $c(0)=-1$, $c'(0)=0$; $r(t)=1(t)$ 时，求系统的响应。

解. (1)

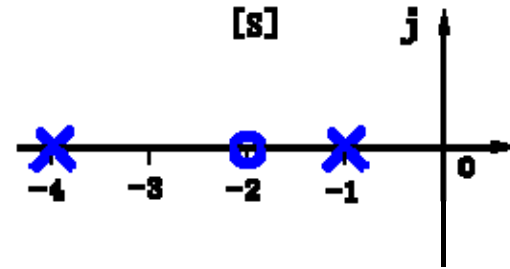
$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+4} = \frac{2(s+2)}{s(s+1)(s+4)}$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{C(s)}{1/s} = s \cdot C(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+4)}$$

$$\therefore G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+4)} = \frac{\left(\frac{1}{2}s+1\right)}{(s+1)\left(\frac{1}{4}s+1\right)}$$

$$(2) \quad K = \frac{2 \times 2}{4} = 1$$

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} e^{-t} \\ e^{-4t} \end{cases}$$



(4) 如图所示

$$(5) \quad k(t) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[\frac{2(s+2)}{(s+1)(s+4)}\right] = L^{-1}\left[\frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+4}\right]$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{2(s+2)}{s+4} = \frac{2}{3} \quad C_2 = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{2(s+2)}{s+1} = \frac{4}{3}$$

$$k(t) = L^{-1}\left[\frac{2}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{4}{3} \frac{1}{s+4}\right] = \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{4}{3} e^{-4t}$$

$$(6) \quad G(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+4)} = \frac{2s+4}{s^2+5s+4} = \frac{C(s)}{R(s)}$$

$$(s^2 + 5s + 4)C(s) = (2s + 4)R(s)$$

$$L^{-1}: \quad \ddot{c}(t) + 5\dot{c}(t) + 4c(t) = 2\dot{r}(t) + 4r(t)$$

$$L^{-1}: \ddot{c}(t) + 5\dot{c}(t) + 4c(t) = 2\dot{r}(t) + 4r(t)$$

(7)

$$L: [s^2C(s) - sc(0) - \dot{c}(0)]$$

$$+ 5[sC(s) - c(0)]$$

$$+ [4C(s)]$$

$$(s^2 + 5s + 4)C(s) - (s + 5)c(0) - \dot{c}(0) = 2(s + 2)R(s)$$

$$C(s) = \frac{2(s + 2)}{s^2 + 5s + 4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{s + 5}{s^2 + 5s + 4}$$

其中初条件引起的自由响应部分

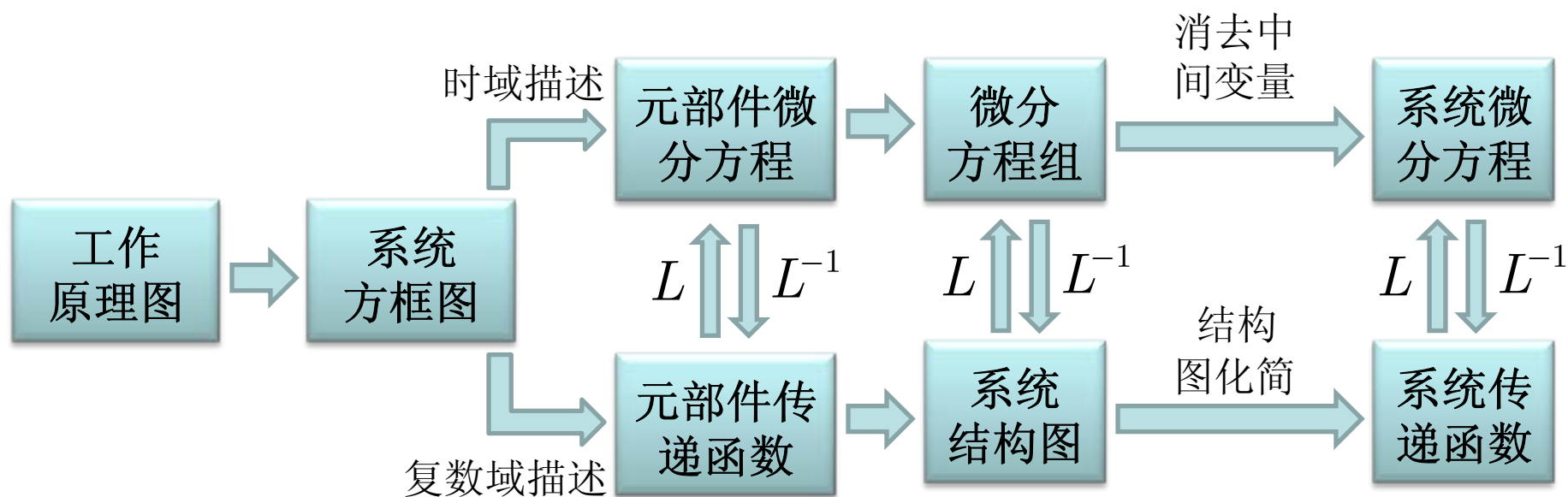
$$C_0(s) = \frac{-(s + 5)}{(s + 1)(s + 4)} = \frac{C_1}{s + 1} + \frac{C_2}{s + 4} = \frac{-4}{3} \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s + 4}$$

$$\downarrow \quad C_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{-(s + 5)}{s + 4} = \frac{-4}{3} \quad C_2 = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{-(s + 5)}{s + 1} = \frac{1}{3}$$

$$c_0(t) = \frac{-4}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{-4t}$$

$$c(t) = c_r(t) + c_0(t) = 1 - \frac{2}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-4t} - \frac{4}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{-4t} = 1 - 2e^{-t}$$

2.6 结构图及其等效变换



系统传递函数模型的建立过程

两个子问题:

①如何建立系统结构图;

②如何对所建结构图进行简化以获取系统的传递函数

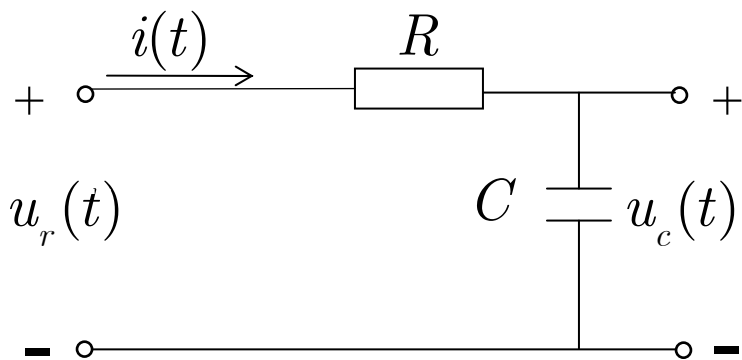
2.6.1 系统结构图的建立

系统结构图是描述系统各元部件之间信号传递关系的数学图形；结构图**是一种数学模型**，它是原理方框图和数学方程的结合。

建立系统结构图的步骤

- 建立控制系统各元部件的微分方程；
- 对各元部件的微分方程分别进行拉氏变换，并作出各元部件的结构图；
- 按照系统中各信号的传递顺序，依次将各元件结构图连接起来，即可得到系统的结构图。

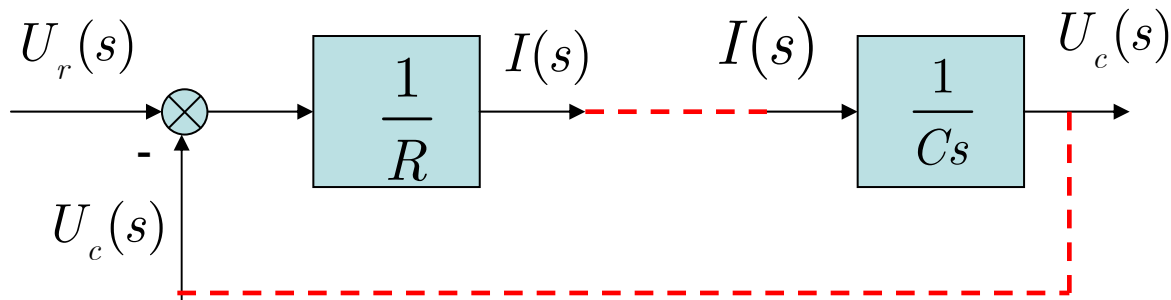
例：RC网络



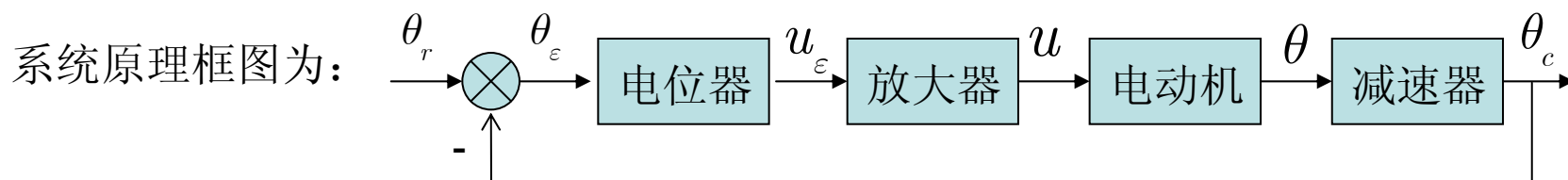
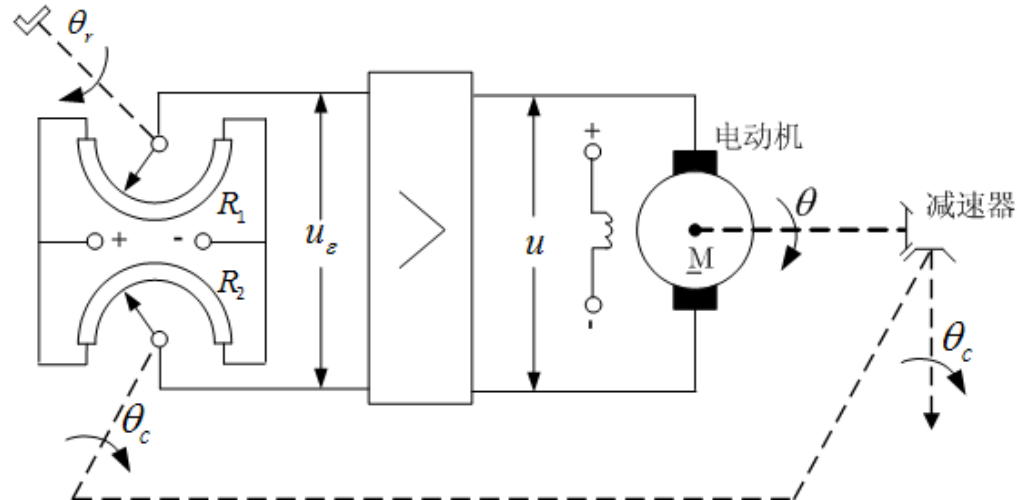
$$\begin{cases} u_r(t) = Ri(t) + u_c(t) \\ u_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \end{cases}$$

不消掉中间变量，而是直接进行拉氏变换

$$\begin{cases} U_r(s) = RI(s) + U_c(s) \\ U_c(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \end{cases} \quad \text{即} \quad \frac{1}{R} [U_r(s) - U_c(s)] = I(s)$$



例：建立如图所示随动系统的结构图。



比较元件： $\theta_\varepsilon(t) = \theta_r(t) - \theta_c(t)$ \longrightarrow $\theta_\varepsilon(s) = \theta_r(s) - \theta_c(s)$

电位器： $u_\varepsilon(t) = K_1 \theta_\varepsilon(t)$ $\xrightarrow{\text{拉}} U_\varepsilon(s) = K_1 \theta_\varepsilon(s)$

放大器： $u(t) = K_2 u_\varepsilon(t)$ $\xrightarrow{\text{氏}} U(s) = K_2 U_\varepsilon(s)$

电动机： $T_m \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{d\theta(t)}{dt} = K_m u(t)$ $\xrightarrow{\text{变换}} s(T_m s + 1)\theta(s) = K_m U(s)$

减速器： $\theta_c(t) = \frac{\theta(t)}{i}$ $\longrightarrow \theta_c(s) = \frac{1}{i} \theta(s)$

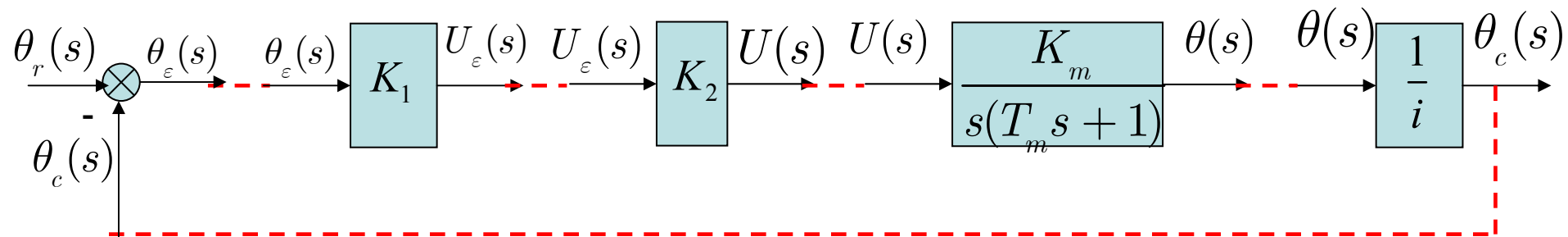
比较元件: $\theta_\varepsilon(t) = \theta_r(t) - \theta_c(t) \longrightarrow \theta_\varepsilon(s) = \theta_r(s) - \theta_c(s)$

电位器: $u_\varepsilon(t) = K_1 \theta_\varepsilon(t) \xrightarrow{\text{拉氏变换}} U_\varepsilon(s) = K_1 \theta_\varepsilon(s)$

放大器: $u(t) = K_2 u_\varepsilon(t) \xrightarrow{\text{拉氏变换}} U(s) = K_2 U_\varepsilon(s)$

电动机: $T_m \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{d\theta(t)}{dt} = K_m u(t) \xrightarrow{\text{拉氏变换}} \theta(s) = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} U(s)$

减速器: $\theta_c(t) = \frac{\theta(t)}{i} \longrightarrow \theta_c(s) = \frac{1}{i} \theta(s)$



例：若描述系统的微分方程组如下：

$$\begin{cases} x_1(t) + n(t) = c(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = K_1 r(t) - T_2 c(t) \\ \frac{dx_1(t)}{dt} + T_1 x_1(t) = K_2 r(t) + x_2(t) - n(t) \end{cases}$$

已知初始条件全部为零，分别对上述各式进行拉氏变换，再根据变换结果直接试绘制出系统的结构图，并利用结构图化简方法分别求出系统传递函数 $C(s)/R(s)$ 和 $C(s)/N(s)$ 。

解：对方程组进行拉氏变换

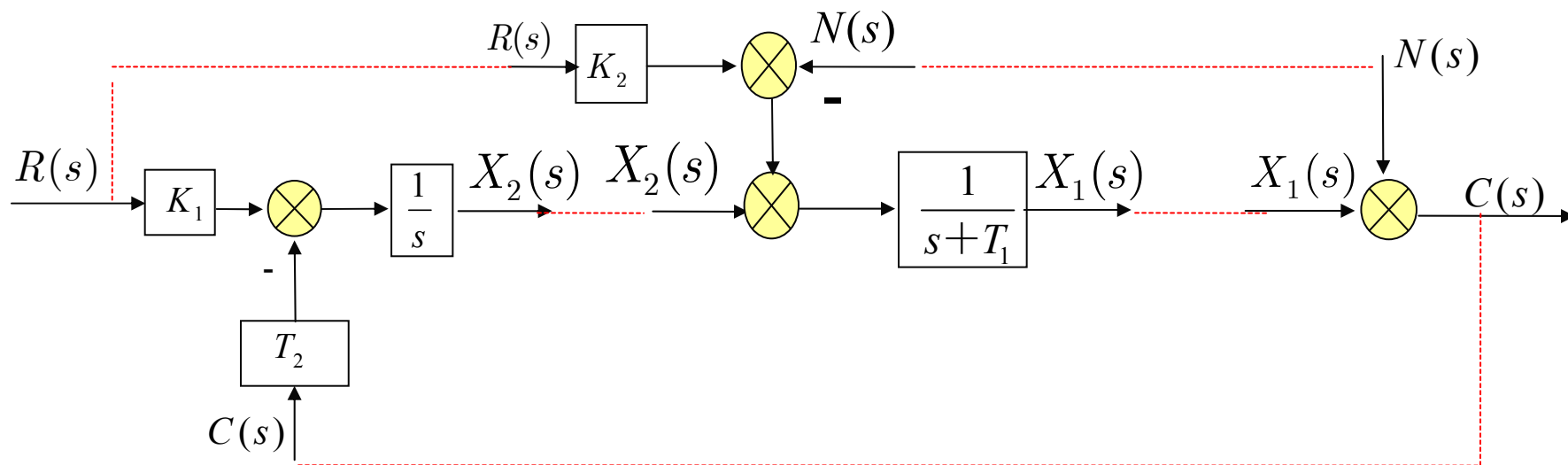
$$\begin{cases} X_1(s) + N(s) = C(s) \\ sX_2(s) = K_1 R(s) - T_2 C(s) \\ sX_1(s) + T_1 X_1(s) = K_2 R(s) + X_2(s) - N(s) \end{cases}$$

解：对方程组进行拉氏变换

$$\begin{cases} X_1(s) + N(s) = C(s) \\ sX_2(s) = K_1R(s) - T_2C(s) \\ sX_1(s) + T_1X_1(s) = K_2R(s) + X_2(s) - N(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1(s) + N(s) = C(s) \\ X_2(s) = \frac{1}{s}[K_1R(s) - T_2C(s)] \\ X_1(s) = \frac{1}{s + T_1}[K_2R(s) + X_2(s) - N(s)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1(s) + N(s) = C(s) \\ X_2(s) = \frac{1}{s} [K_1 R(s) - T_2 C(s)] \\ X_1(s) = \frac{1}{s + T_1} [K_2 R(s) + X_2(s) - N(s)] \end{cases}$$



2.6.2 结构图的简化

采用直接对元器件微分方程组进行拉氏变换的方法建立的结构图往往比较复杂，**如何对结构图做简化？**

简化的原则：

进行等效变换，保持系统输出、输入之间的关系不变。

简化方法：

(a) **逐步等效变换；** (b) **梅逊公式法。**

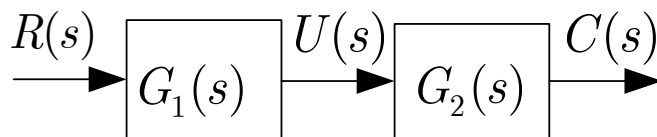
(a) 逐步等效变换

结构图等效变换的法则

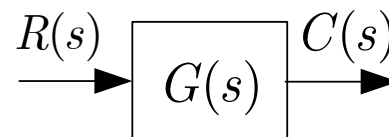
1. 环节的合并



串联



(a)



(b)

$$C(s) = G_2(s)U(s) = G_2(s)G_1(s)R(s)$$

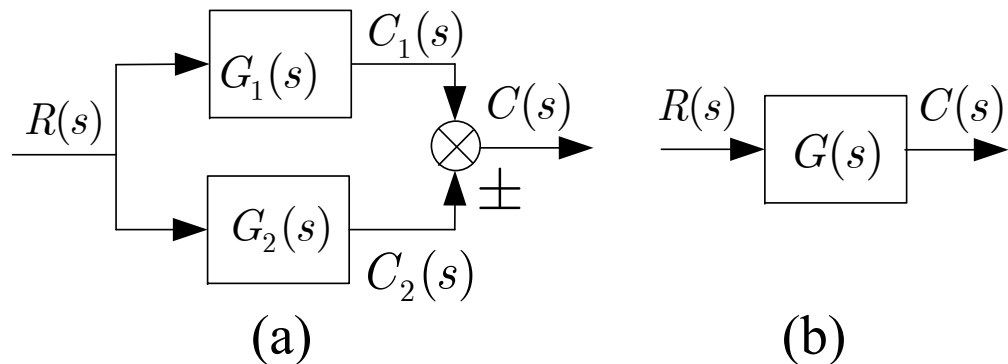
$$\text{又} \because C(s) = G(s)R(s)$$

$$\therefore G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = G_2(s)G_1(s)$$

结论：两个传递函数串联后的等效传递函数等于这两个传递函数的乘积

推广：N个传递函数串联后的等效传递函数等于这N个传递函数的乘积

● 并联



$$C(s) = G_1(s)R(s) \pm G_2(s)R(s) = [G_1(s) \pm G_2(s)]R(s)$$

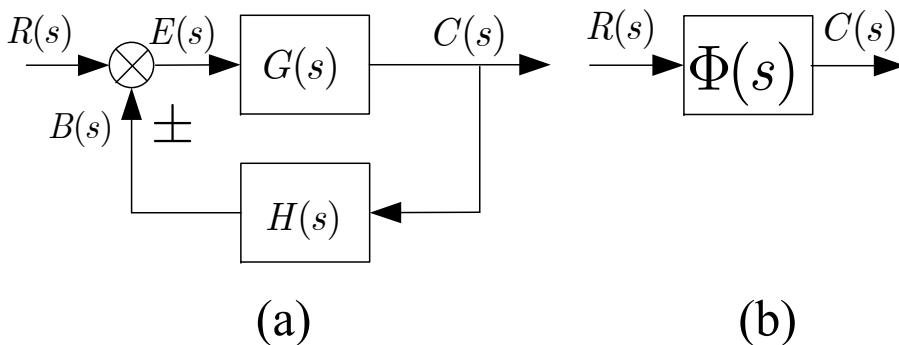
$$\text{又} \because C(s) = G(s)R(s)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s) \pm G_2(s)$$

结论：两个传递函数并联的等效传递函数等于这两个传递函数的代数和

推广： N 个传递函数并联的等效传递函数等于这 N 个传递函数的代数和

● 正、负反馈



$$C(s) = G(s)E(s) = G(s)[R(s) \pm B(s)] = G(s)[R(s) \pm H(s)C(s)]$$

$$\text{解得: } C(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)} R(s)$$

$$\text{又} \because C(s) = \Phi(s)R(s)$$

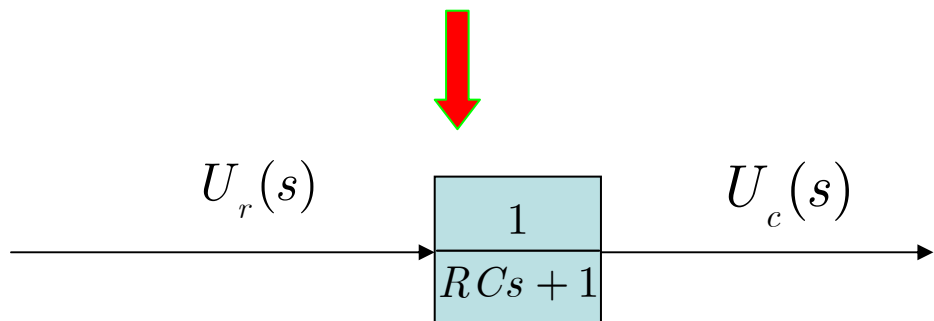
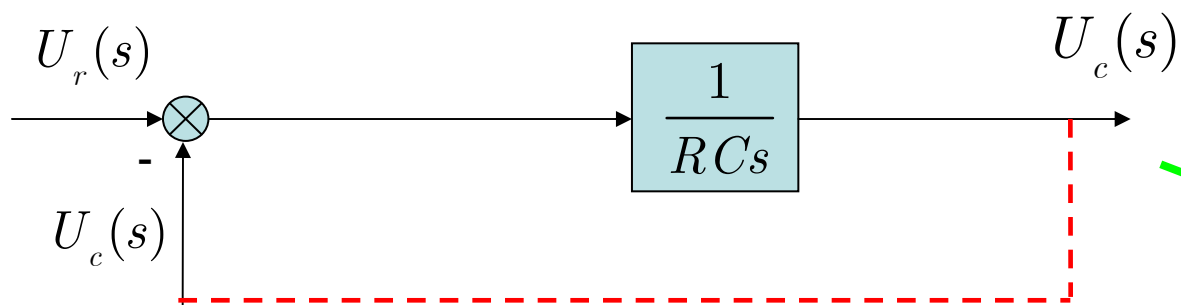
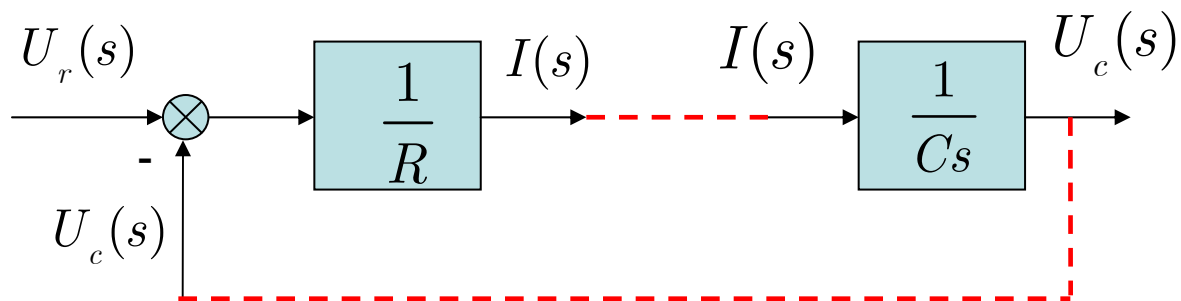
$$\text{故 } \Phi(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}$$

注意：负反馈对应的是“+”号；正反馈对应的是“-”号。

当 $H(s)=1$ 时，上述系统称为单位反馈系统。对单位负反馈系统有

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)}$$

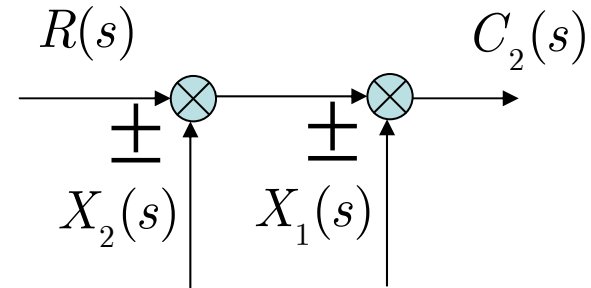
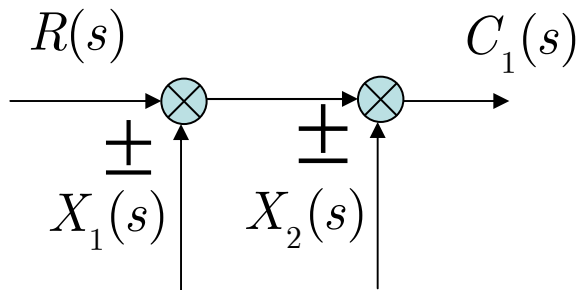
例：RC网络结构图的简化过程



$$\frac{\frac{1}{RCs}}{1 + \frac{1}{RCs}} = \frac{1}{RCs + 1}$$

2. 比较点和引出点的移动

● 比较点之间的移动



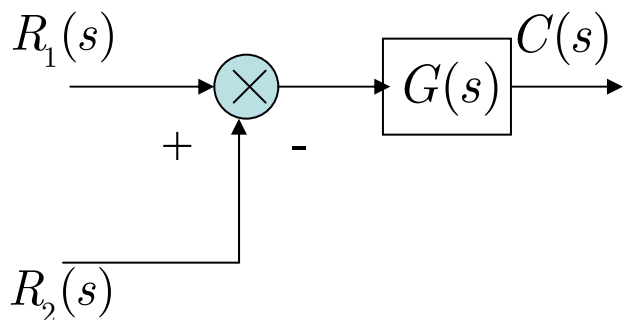
$$C_1(s) = R(s) \pm X_1(s) \pm X_2(s)$$

$$C_2(s) = R(s) \pm X_2(s) \pm X_1(s)$$

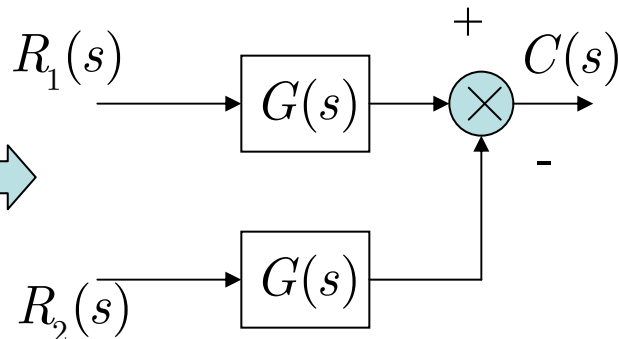
\Downarrow

$$C_1(s) = C_2(s)$$

● 比较点后移

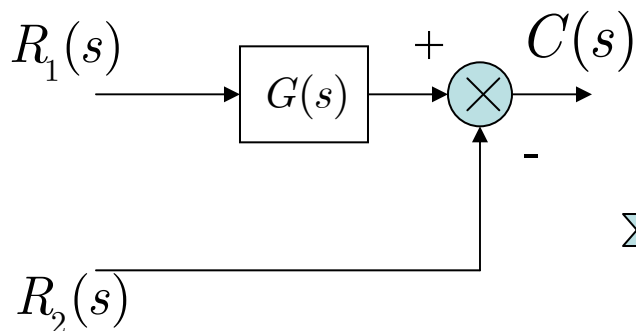


$$C(s) = G(s)[R_1(s) \pm R_2(s)]$$

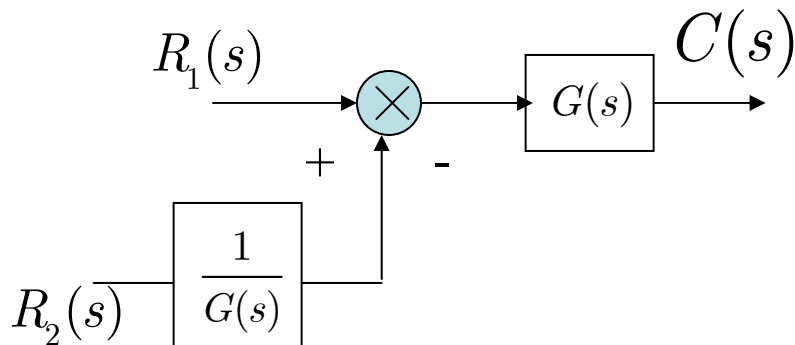


$$C(s) = G(s)R_1(s) \pm G(s)R_2(s)$$

● 比较点前移

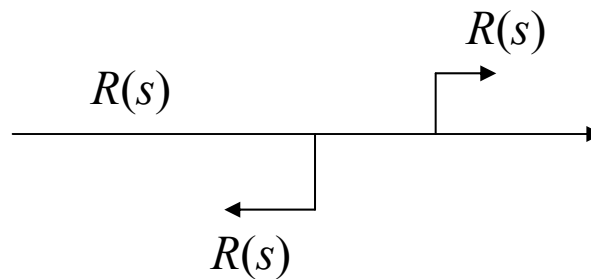
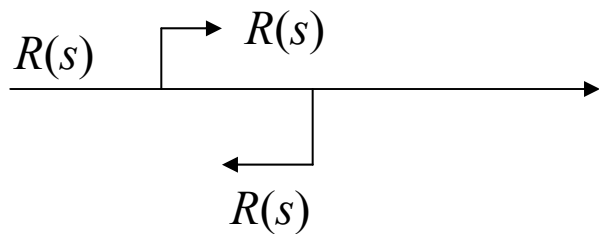


$$C(s) = G(s)R_1(s) \pm R_2(s)$$

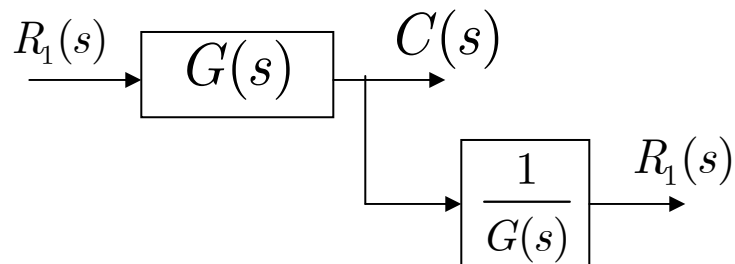
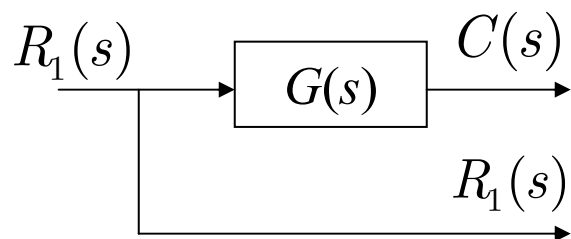


$$C(s) = G(s)\left[R_1(s) \pm \frac{1}{G(s)}R_2(s)\right]$$

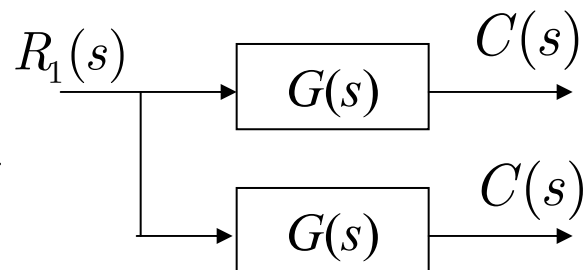
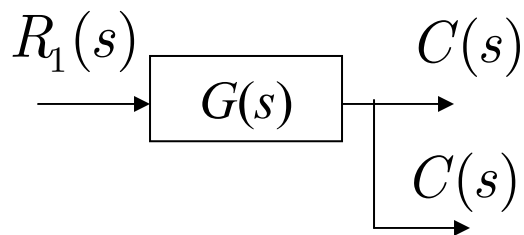
● 引出点之间的移动



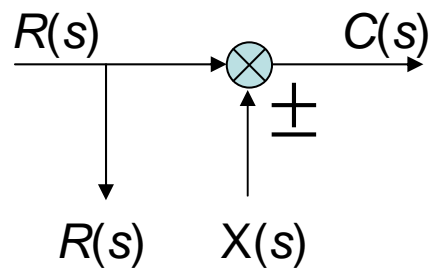
● 引出点后移



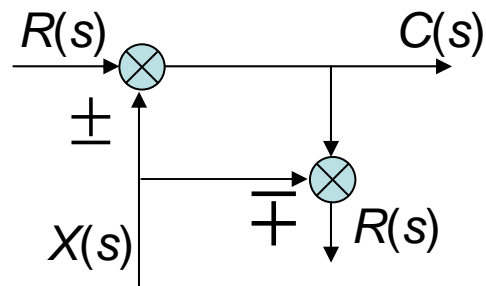
● 引出点前移



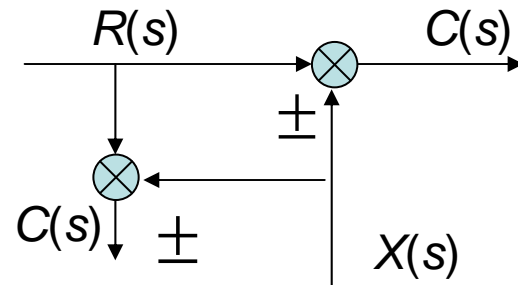
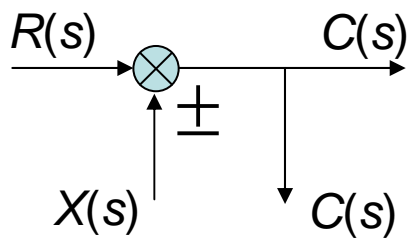
● 引出点和比较点之间的移动



等效

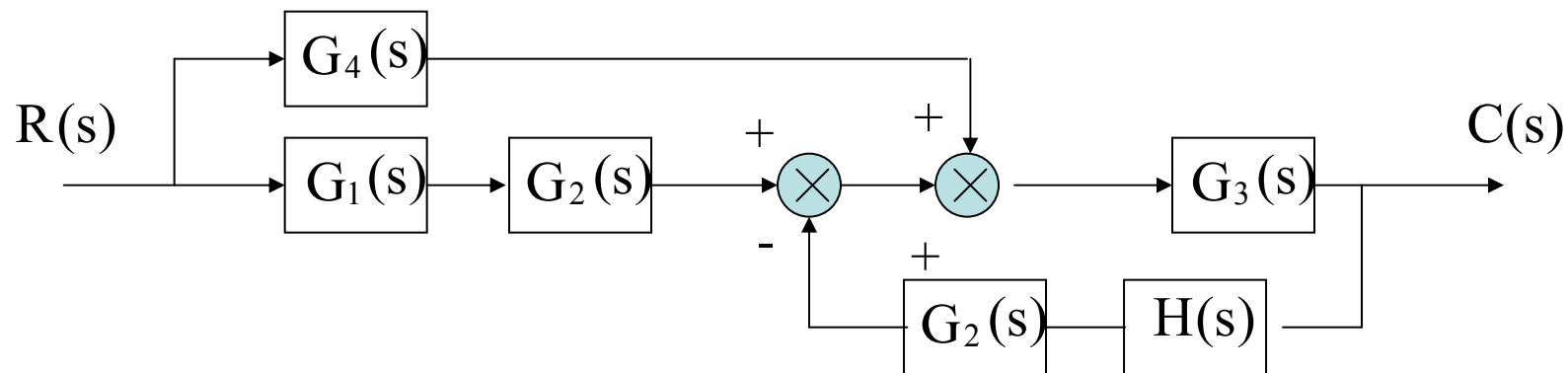
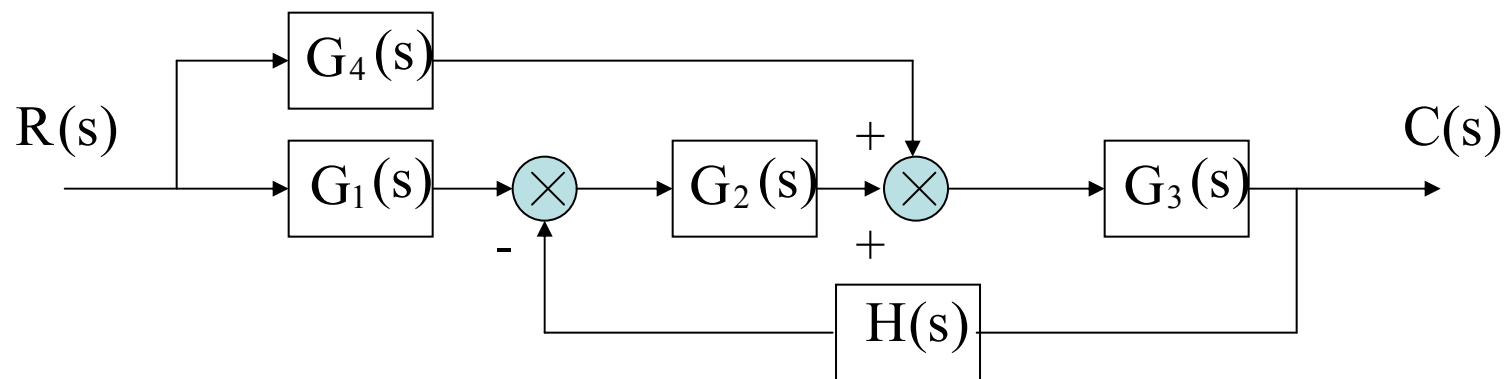


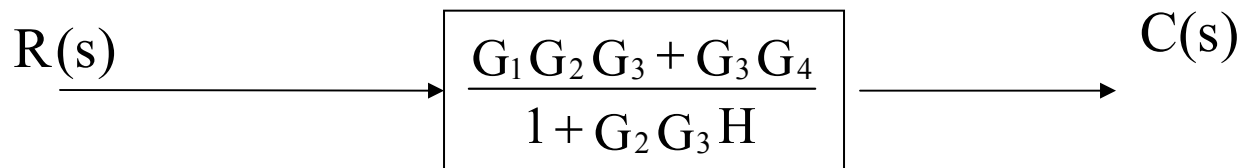
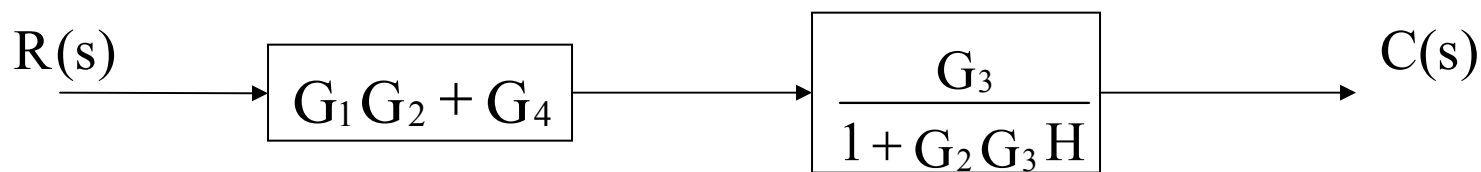
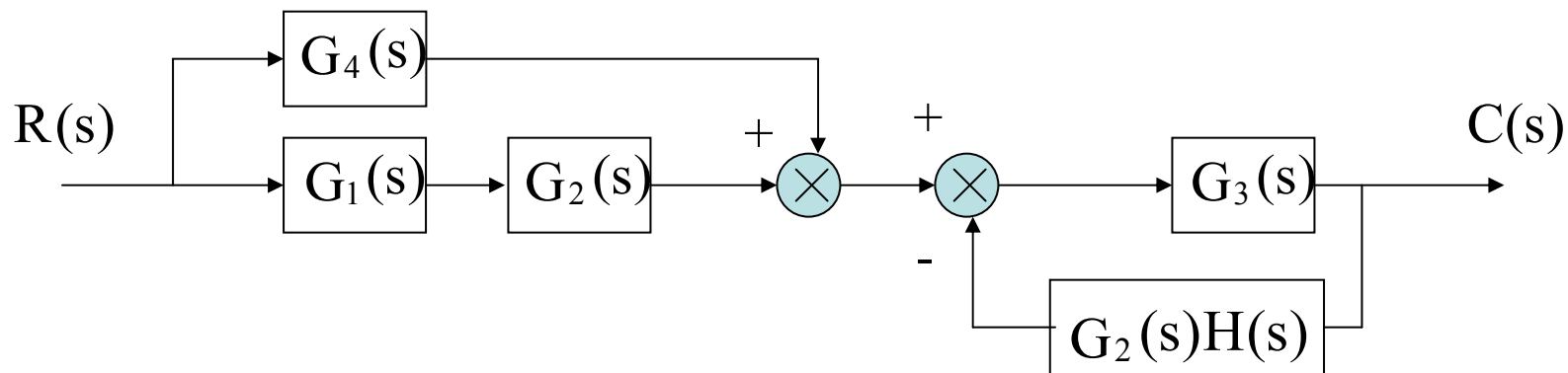
等效



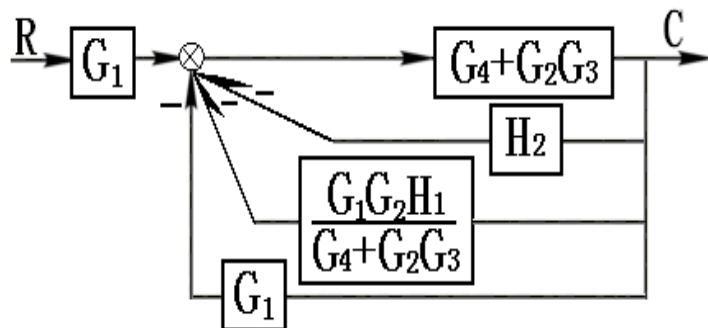
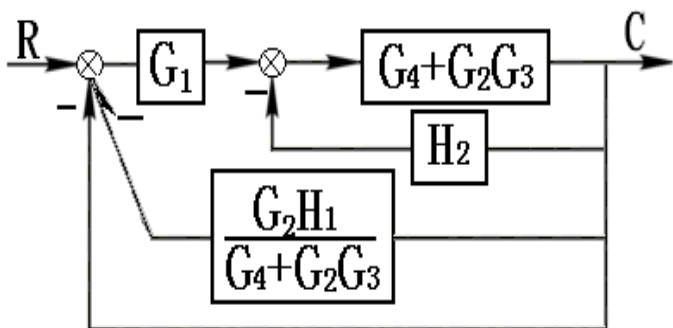
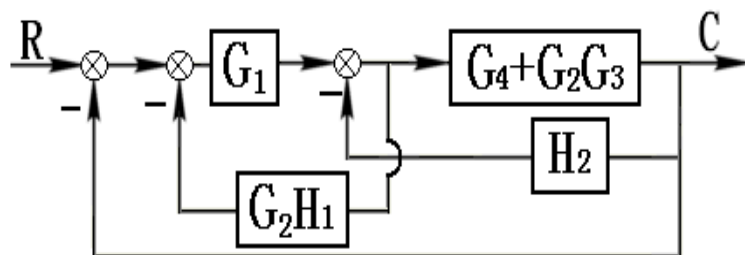
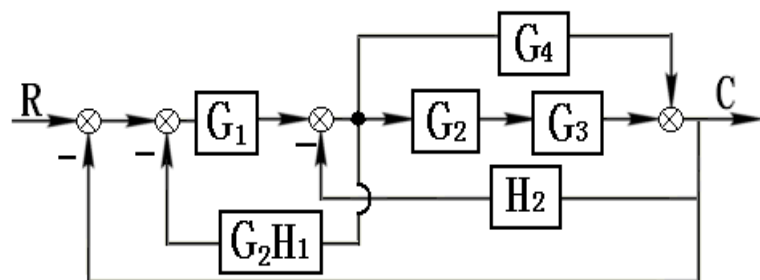
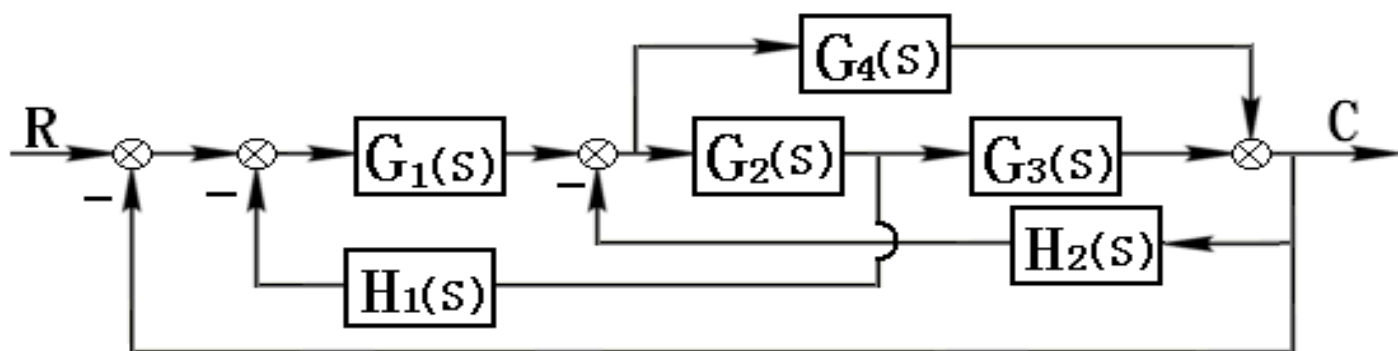
结构图等效变换举例

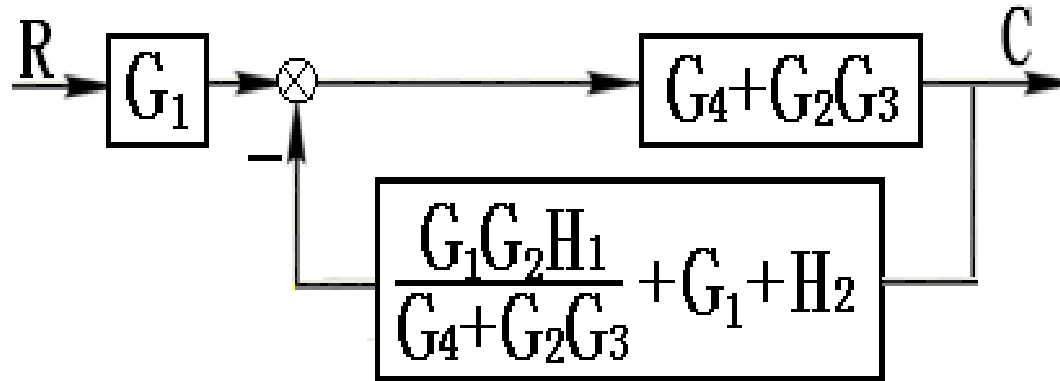
[例]





例





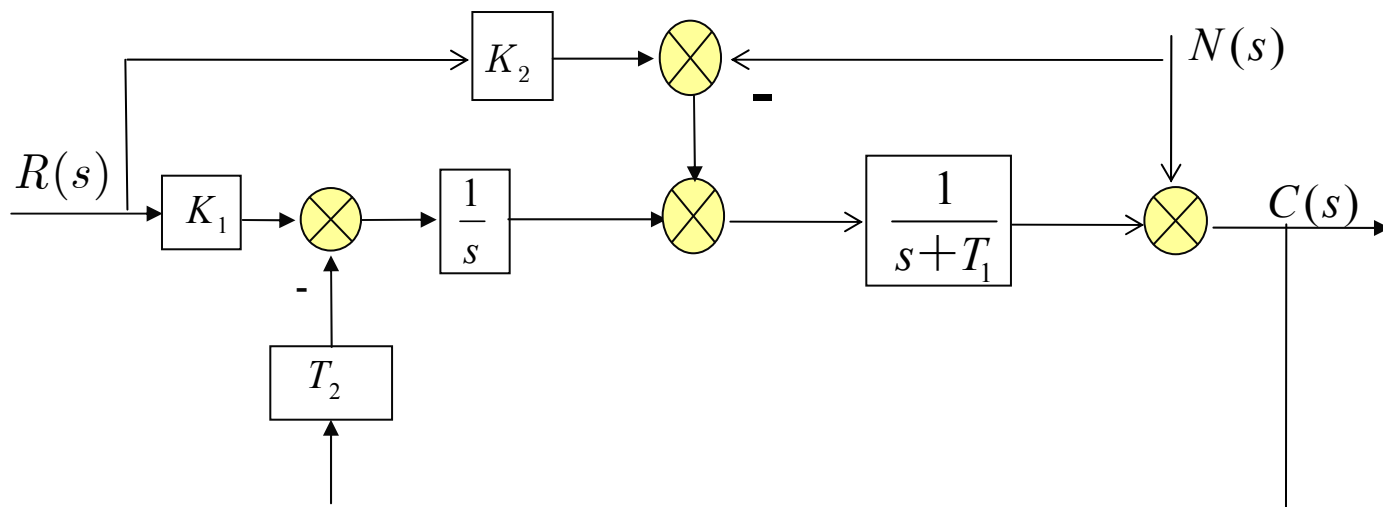
$$\begin{aligned}
 \therefore \Phi(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(G_4 + G_2G_3)}{1 + [G_1 + H_2 + \frac{G_1G_2H_1}{G_4 + G_2G_3}](G_4 + G_2G_3)} \\
 &= \frac{G_1G_4 + G_1G_2G_3}{1 + G_1G_4 + G_4H_2 + G_2G_3H_2 + G_1G_2H_1 + G_1G_2G_3}
 \end{aligned}$$

例

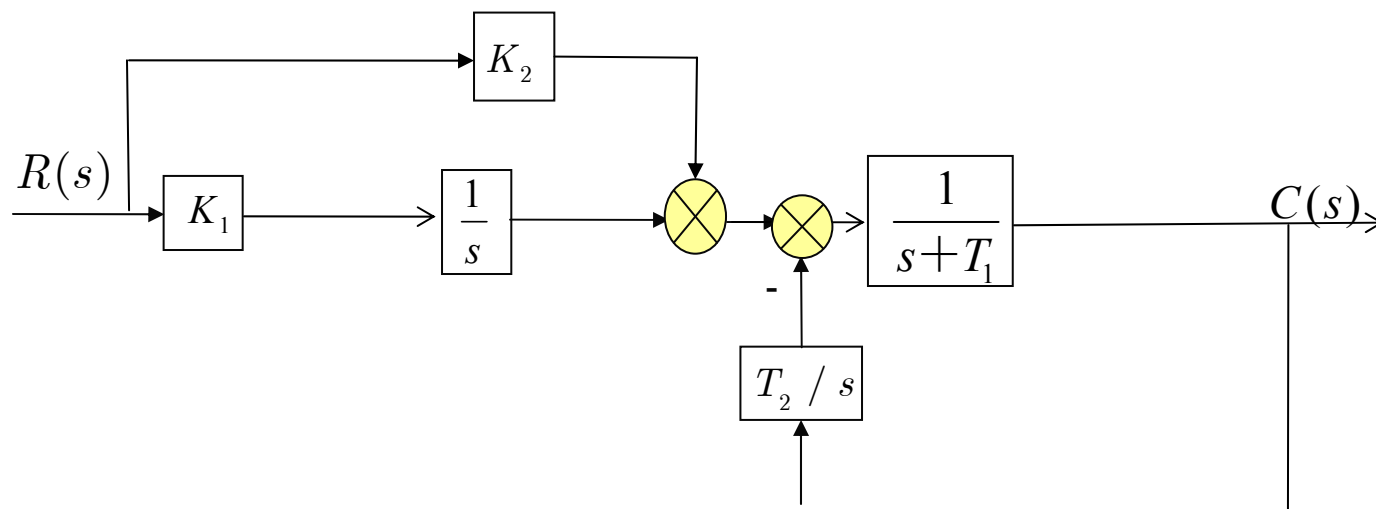
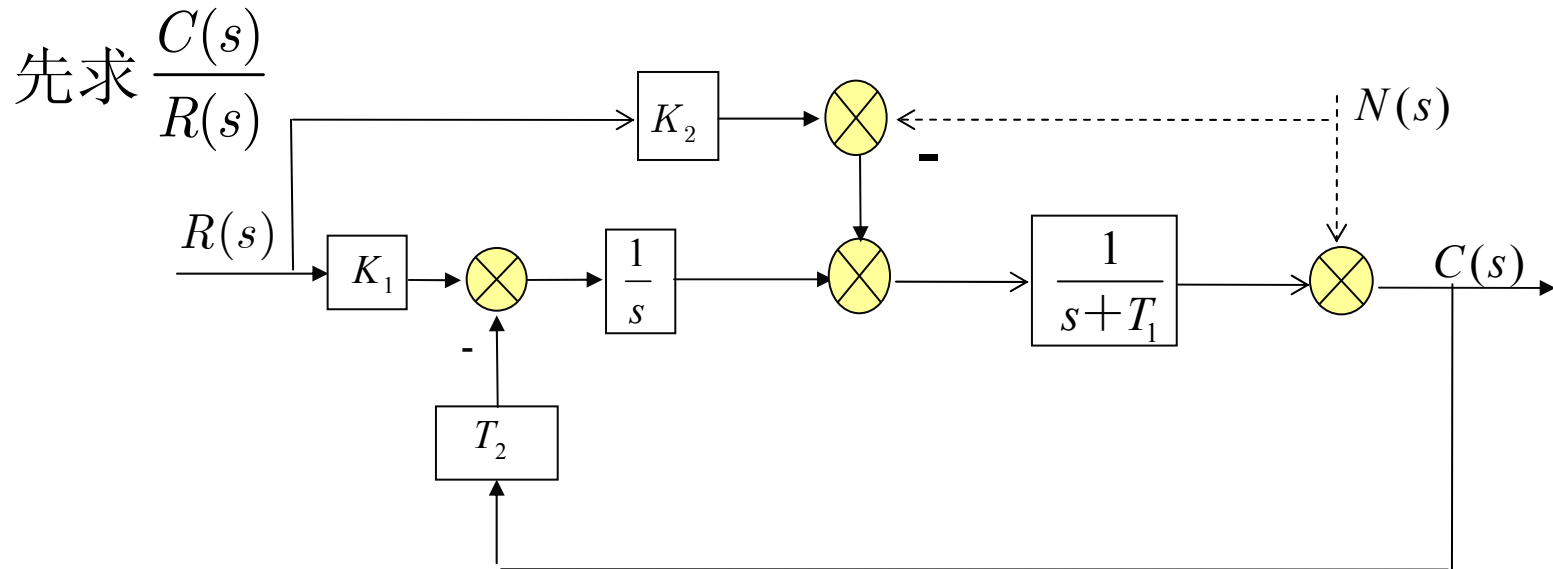
$$\begin{cases} x_1(t) + n(t) = c(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = K_1 r(t) - T_2 c(t) \\ \frac{dx_1(t)}{dt} + T_1 x_1(t) = K_2 r(t) + x_2(t) - n(t) \end{cases}$$



结构图

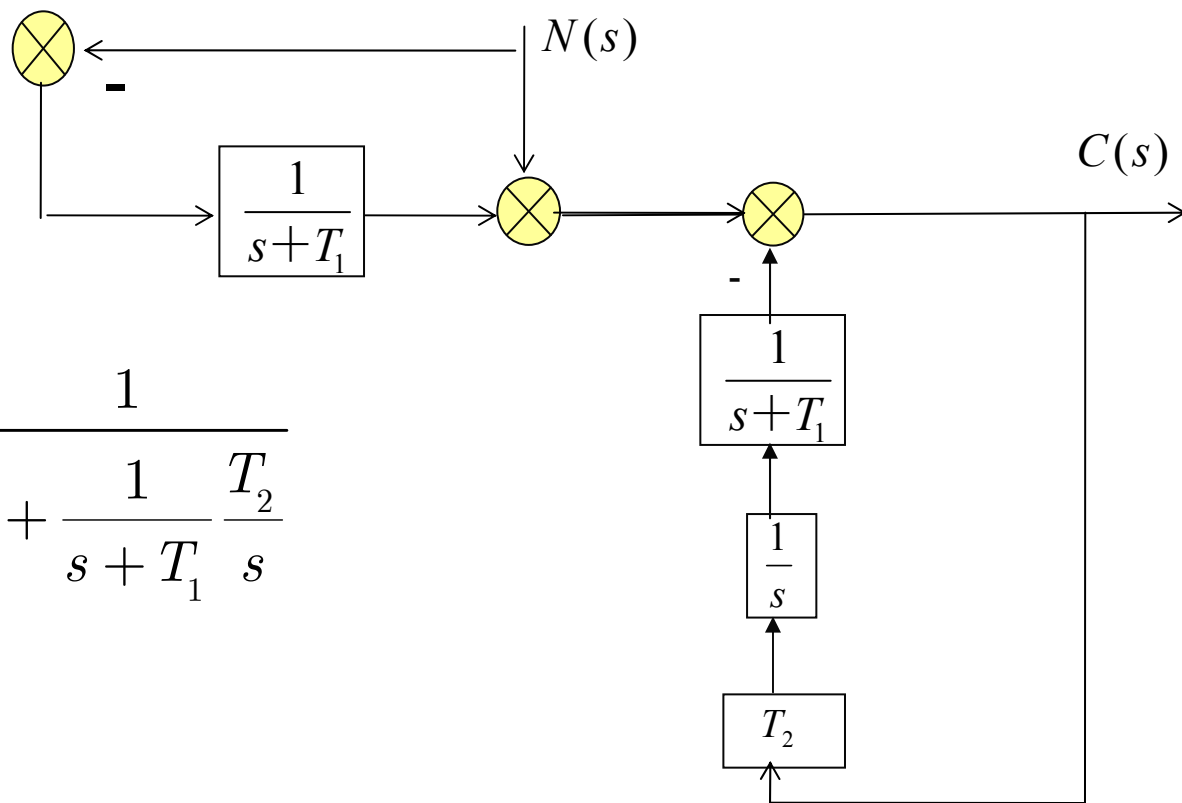
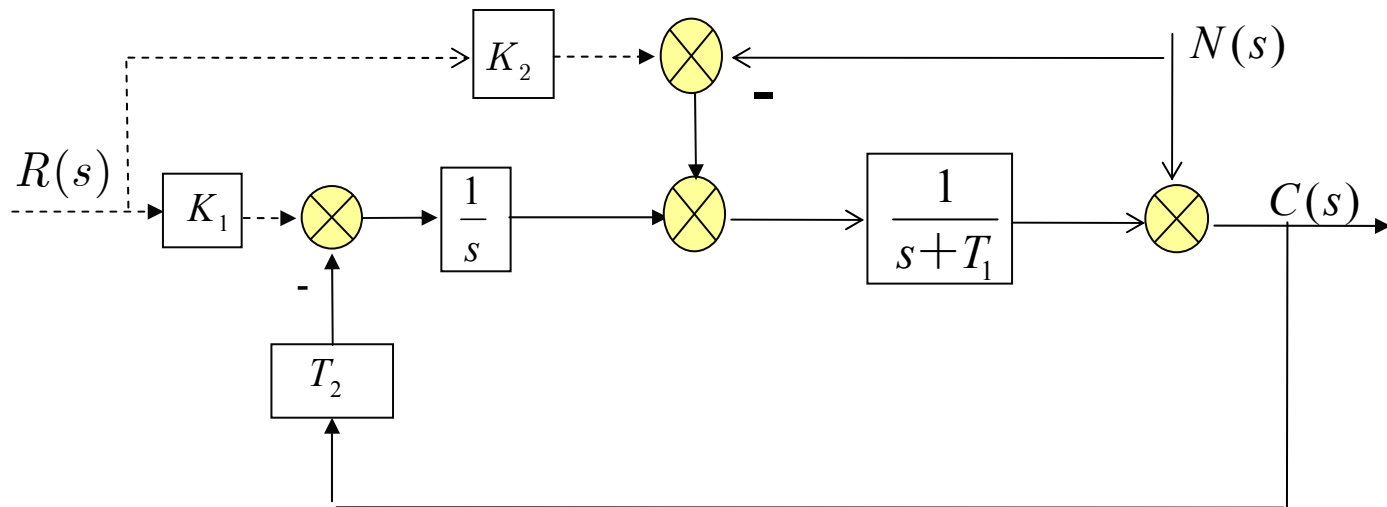


求 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 和 $\frac{N(s)}{R(s)}$



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \left(K_2 + \frac{K_1}{s} \right) \frac{\frac{1}{s+T_1}}{1 + \frac{1}{s+T_1} \frac{T_2}{s}} = \frac{K_1 + K_2 s}{s^2 + T_1 s + T_2}$$

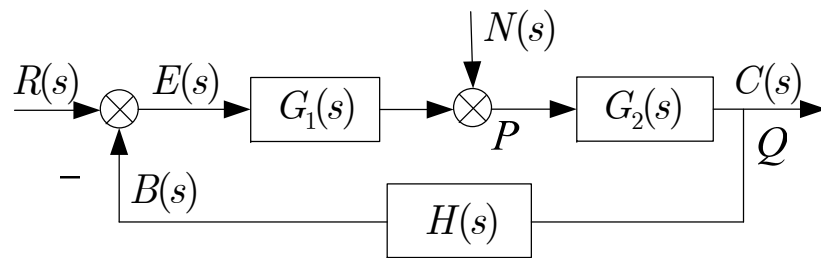
再求 $\frac{C(s)}{N(s)}$



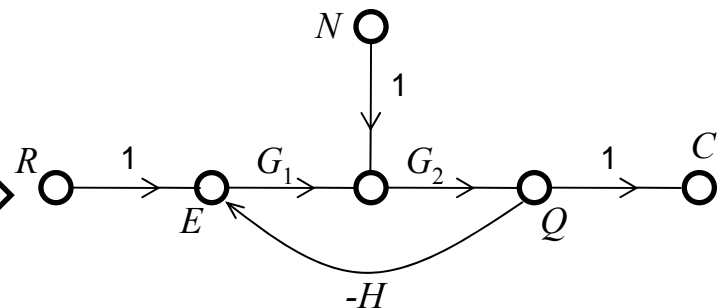
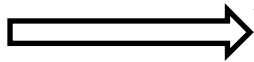
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \left(1 - \frac{1}{s+T_1}\right) \frac{1}{1 + \frac{1}{s+T_1} \frac{T_2}{s}}$$

$$= \frac{s(s+T_1-1)}{s^2 + T_1s + T_2}$$

(b) 梅逊公式法



结构图的等
价表示形式



信号流图

组成信号流图的三种基本要素：节点、支路和支路增益。

节点：系统中的一个变量(信号)，用“○”表示；

支路：连接两个节点的有向线段，用“→”表示；

支路增益：标注在支路上表示支路上信号的传递关系；

源节点：只连接着输出支路的节点，如 R 和 N ；

阱节点：只连接着输入支路的节点，如 C 节点；

混合节点：同时和输入支路、输出支路连接着的节点；

前向通路：信号从源节点到阱节点传递时，每个支路最多只通过一次的通路；

前向通路传递函数：前向通路上所有支路增益的乘积（包含极性）；

回路：从某一节点出发，沿着信号流动的方向回到该节点，且与其他节点相交不多于1次的闭合通路

回路传递函数：回路上所有支路增益的乘积（包含反馈极性）。

利用梅逊公式，可一步写出系统的传递函数

公式：
$$\Phi(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i$$

其中： $\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \cdots$ 称为特征式

$\sum L_i$ ：所有单回路的“回路增益(传递函数)”之和；

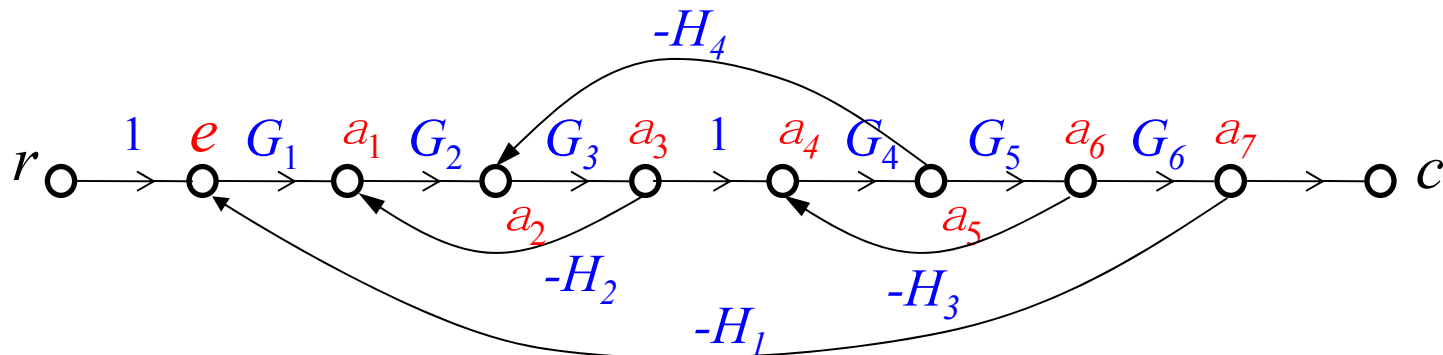
$\sum L_i L_j$ ：两两不接触回路的“回路增益(传递函数)”的乘积之和；

$\sum L_i L_j L_k$ ：所有三个互不接触回路，其“回路增益(传递函数)”的乘积之和；

P_i ：从输入端到输出端第 i 条前向通路的增益(传递函数)；

Δ_i ：在 Δ 中，将与第 i 条前向通路相接触的回路所在项除去后所余下的部分，称为余子式。

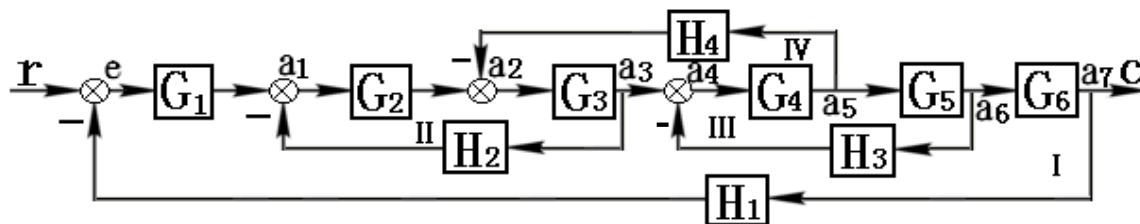
例



共有 4 个单回路：

$$\sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^4 L_i = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$$

$$= -G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_1 - G_2 G_3 H_2 - G_4 G_5 H_3 - G_3 G_4 H_4$$



只有 II、III 两个回路不接触：

$$\sum L_i L_j = \sum L_2 L_3 = (-G_2 G_3 H_2)(-G_4 G_5 H_3) = G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 H_3, \quad \sum L_i L_j L_k = 0$$

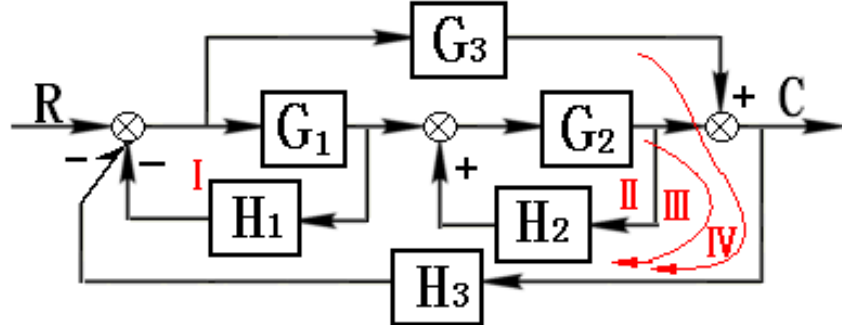
$$\therefore \Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j = 1 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_4 G_5 H_3 + G_3 G_4 H_4 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 H_3$$

只有一条前向通路 $p_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6$

所有回路均与之接触 $\Delta_1 = 1$

$$\therefore \Phi(s) = \frac{p_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6}{1 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_4 G_5 H_3 + G_3 G_4 H_4 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 H_3}$$

例



回路 4 个: $\sum L_i = -G_1H_1 + G_2H_2 - G_1G_2H_3 - G_3H_3$

两两不接触回路两个: I - II, II - IV

$$\sum L_i L_j = (-G_1H_1)(G_2H_2) + (G_2H_2)(-G_3H_3)$$

$$\sum L_i L_j L_k = 0$$

$$\therefore \Delta = 1 + G_1H_1 - G_2H_2 + G_1G_2H_3 + G_3H_3 - G_1G_2H_1H_2 - G_2G_3H_2H_3$$

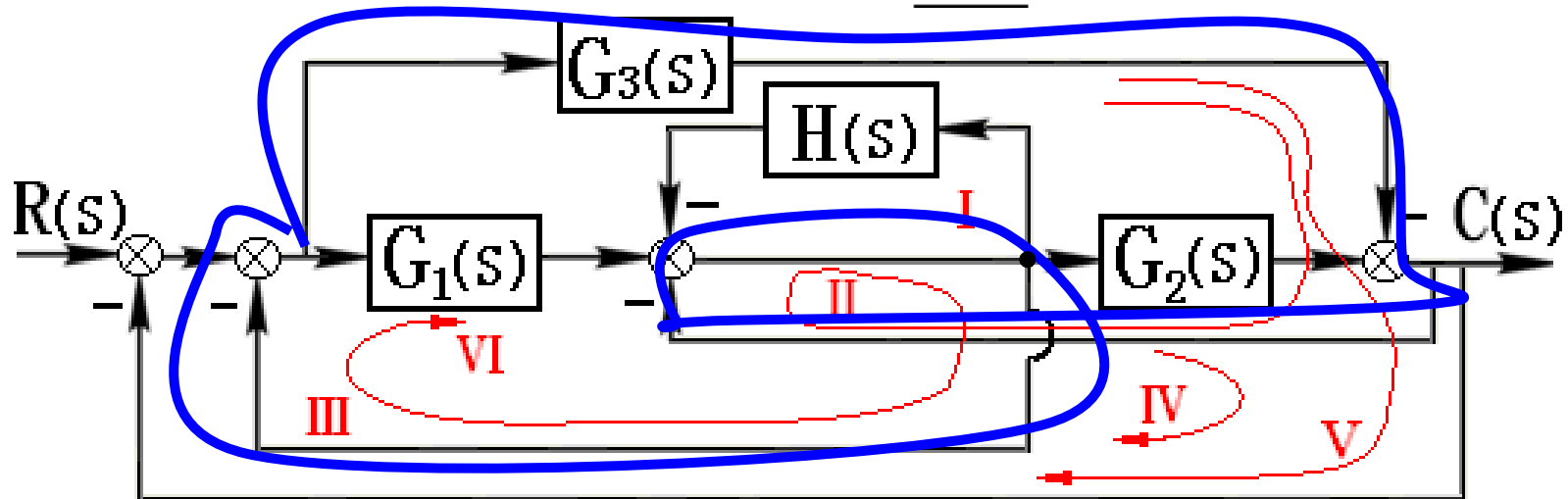
前向通道两条:

$$p_1 = G_1G_2; \quad \Delta_1 = 1$$

$$p_2 = G_3; \quad \Delta_2 = 1 - G_2H_2$$

$$\therefore \Phi(s) = \frac{p_1\Delta_1 + p_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1G_2 + G_3(1 - G_2H_2)}{1 + G_1H_1 - G_2H_2 + G_1G_2H_3 + G_3H_3 - G_1G_2H_1H_2 - G_2G_3H_2H_3}$$

例



解：本结构图有 2 条前向通道，6 个回路（其中 I，V 两回路不相交）

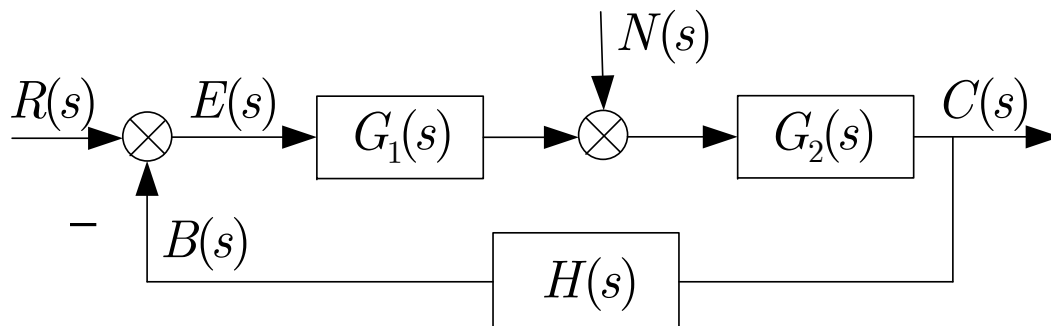
$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - \{-H - G_2 - G_1 - G_1G_2 - (-G_3) - [-(-G_3)]\} + [-(-G_3)].(-H) \\ &= 1 + H + G_2 + G_1 + G_1G_2 - G_3H\end{aligned}$$

$$p_1 = G_1G_2 \quad ; \Delta_1 = 1$$

$$p_2 = -G_3 \quad ; \Delta_2 = 1 + H$$

$$\therefore \Phi(s) = \frac{G_1G_2 - G_3(1+H)}{1+H+G_2+G_1+G_1G_2-G_3H}$$

2.7 反馈控制系统的传递函数



一、闭环系统对应的开环传递函数

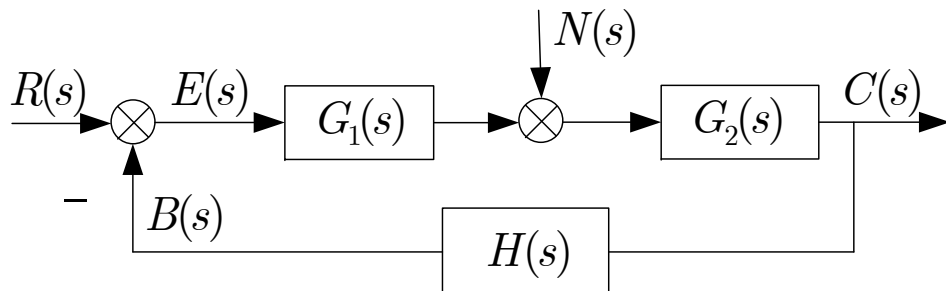
打开主反馈回路， $R(s)$ 到 $B(s)$ 的传递函数

$$G(s) = \frac{B(s)}{R(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot H(s)$$

二、控制作用 $r(t)$ 下的系统闭环传递函数

$$1. \quad \phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot H(s)} = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G(s)}$$

$$2. \quad \phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$$



三、干扰 $n(t)$ 作用下的系统闭环传递函数

$$1. \phi_N(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G(s)}$$

$$2. \phi_{EN}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G(s)}$$

四、系统的总输出及总偏差（由叠加原理）

$$1. C(s) = \phi(s) \cdot R(s) + \phi_N(s) \cdot N(s)$$

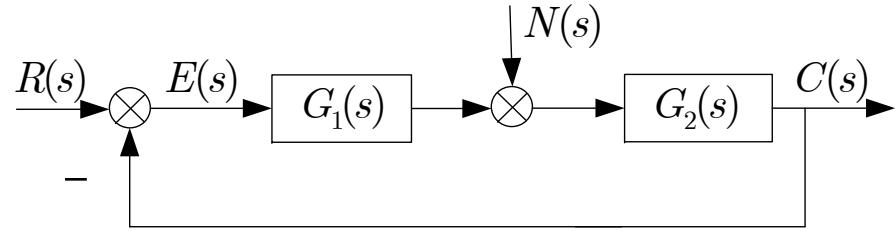
$$= \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot H(s)} \cdot R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s)$$

$$2. E(s) = \phi_E(s) \cdot R(s) + \phi_{EN}(s) \cdot N(s)$$

$$= \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s) + \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

例：如图所示系统中， $G_1(s) = \frac{2}{s}$, $G_2(s) = \frac{1}{s+3}$, 假设系统的初始条件为零，求其在 $r(t) = 1(t)$, $n(t) = \delta(t)$ 同时作用下系统的总输出 $c(t)$ 和总偏差 $e(t)$ 。

解：



$$C(s) = \phi(s) \cdot R(s) + \phi_N(s) \cdot N(s)$$

$$= \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot H(s)} \cdot R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s)$$

$$= \frac{\frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s+3}}{1 + \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s+3}} \cdot \frac{1}{s} + \frac{\frac{1}{s+3}}{1 + \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s+3}} \cdot 1 = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \frac{1}{s} + \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

$$c(t) = L^{-1}(C(s)) = 1 - 3e^{-t} + 3e^{-2t}$$

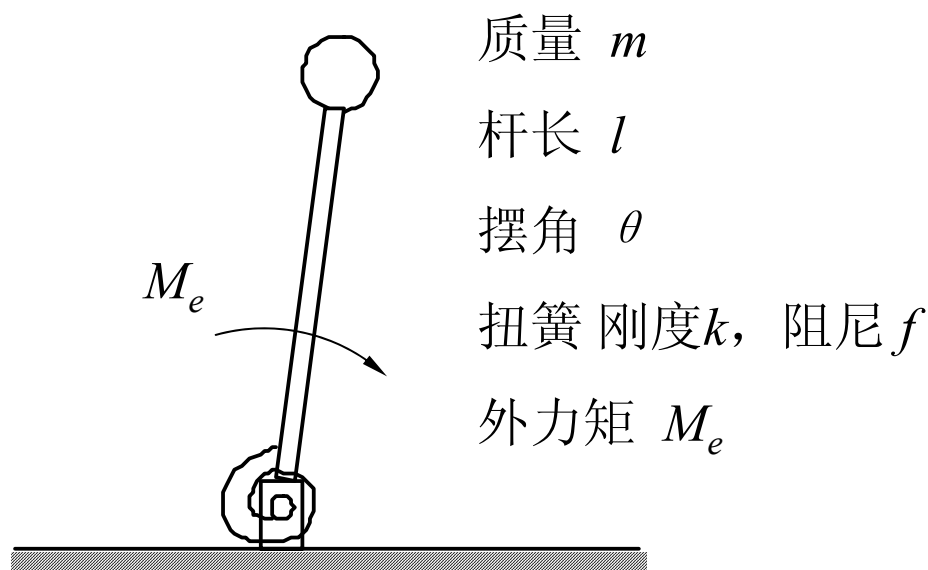
$$e(t) = 1 - c(t) = 3e^{-t} - 3e^{-2t}$$

或利用 $e(t) = L^{-1}(E(s)) = L^{-1}(\phi_E(s) \cdot R(s) + \phi_{EN}(s) \cdot N(s))$ 计算

习题

课后习题2 P44

2.1 2.4 2.6 2.6A (建模)



2.6A. 建立此倒立摆系统微分方程并线性化。

习题

课后习题2 P46

2.8 2.9 2.10 (传递函数)

2.13 2.16 2.17 (结构图变换)

2.19 2.22 (梅森公式)

谢谢！