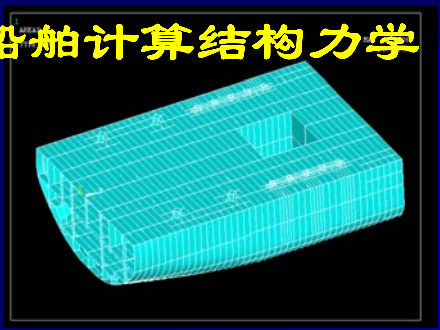
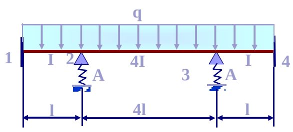
船舶计算结构力学



- 理论力学
- 材料力学
- 结构力学

求解内力分布



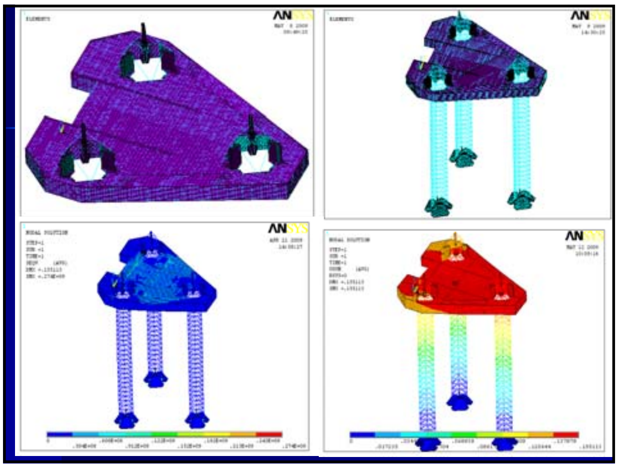
①计算基本图形

②基本未知量

③基本方程

自升式平台

- 对工程结构进行精确的受力分析是及其困难的，在现有技术条件下，通常是不可能也是不必要的。
- 目前的结构分析工作旨在以合理的经济代价保障结构体在正确的施工和使用过程中的安全性，因而它应该是准确的。



计算结构力学：

利用计算机求解结构力学问题,是现代结构分析重要的不可缺少的手段，是专业技术能适应现代化需要的组成部分。

- 为了在某种意义上对结构进行准确的分析，需要将实际的结构理想化，成为实际工程结构的力学模型。

船舶计算结构力学内容

- 变分原理；
- 加权残值法；
- 平面及空间问题有限元法；
- 边界元法；
- 等参元；
- 薄板弯曲问题；
- 二维弹性力学问题边界元法；
- 组合船体结构分析；

- 结构动力分析有限元法；
- 弹性结构稳定性分析有限元法；
- 非线性问题有限元法；
- 薄壁杆件结构有限元法；
- 有限元计算的前后处理、并行算法。

讲解内容

- 变分原理；
- 加权残值法；
- 平面及问题有限元法及程序设计；
- 空间问题有限元法；
- 薄板弯曲有限元法；

第一章 变分原理

- 变分是力学分析中的数学工具
- 变分原理主要应用于：
  有限元、能量法、加权残值法

也可以说：

变分是结构数值计算的基础，没有变分这一数学工具就没有计算结构力学。

1.1 基本概念

(1) 泛函的概念

函数论：自变量、函数

泛函：自变函数、泛函

举例1：平面上两个给定点：

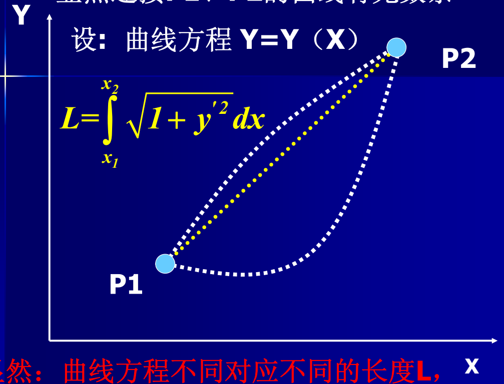
P1（X1，Y1）、P2（X2，Y2）

连接该两点的曲线的长度**L**

显然连接**P1**、**P2**的曲线有无数条

设：曲线方程 **Y=Y（X）**

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$



显然：曲线方程不同对应不同的长度**L**，

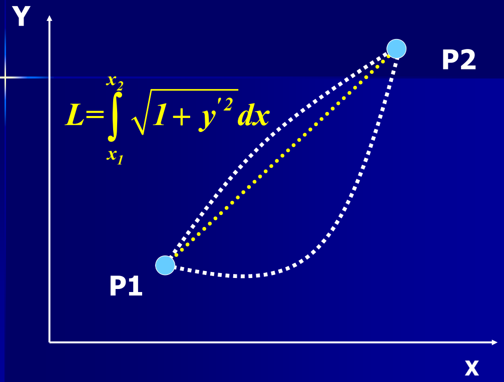
可以说：

曲线长度**L**是曲线**y= y（x）**的函数

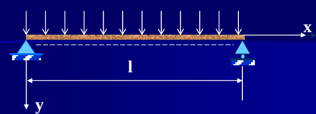
这种函数的函数就称之为泛函。

(2) 泛函极值

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$



举例**2**：弹性基础梁的位能。



$$x=0,\quad x=l:\quad v(0)=v(l)=0$$
$$v''(0)=v''(l)=0$$

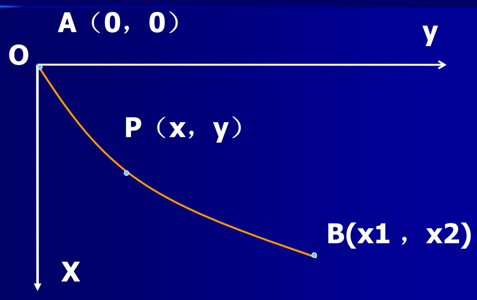
位能：Π=梁的变形能**+**弹性基础的变形能**-**力函数

(3) 变分

研究函数的极值的方法就是微分法

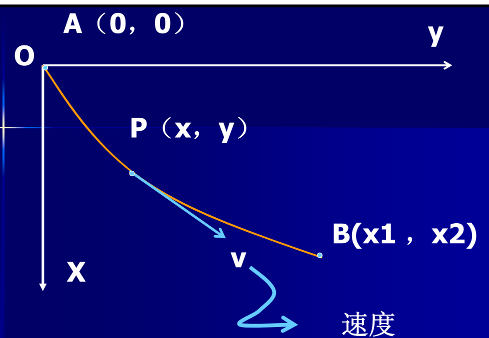
研究泛函极值的方法是变分法

举例**3**：平面两点**A**、**B**，不在同一个水平线上，也不在同一铅垂线上 。不计摩擦-求曲线的最速降线**.**



利用能量守恒定律写出该问题的数学形式： 位能= 动能

$$mgy=\frac{1}{2}mv^2 \longrightarrow v=\sqrt{2gy}$$



从A点沿曲线到任一点p走过的弧长来看

速度又可表示为： $v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}$

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$dt=\frac{ds}{\frac{ds}{dt}}=\frac{ds}{v}=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}$$

下滑所用时间： $T=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}$

显然：T是函数y（x）的函数——泛函

下滑时间最短就是求使时间T最小时的函数。

下滑时间T是函数Y的泛函

$$T[y(x)]=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}$$

变分命题为：在满足$y(0)=0$，$y(x_1)=y_1$的一切函数中，选取一个函数，使泛函T[y （x）]为最小值。

该泛函包括 ：一阶导数、一个待定函数；

含有一个自变量的固定边界的变分命题。

该问题即求解最速降线问题——求出的曲线就是最速降线。

举例4:位能驻值原理就是一个变分命题。

当结构处于平衡状态下时，结构总势能达到最小值

结构势能= 应变能-力函数

$$\Pi=V-U$$

结构势能就是位移函数的泛函，Π[δ]

1.2变分的特性

1. 函数定义与泛函定义的比较

函数**y=y (x)**

X 自变量

对于变化域中**x**都有函数值相对应

泛函Π[y (x)]

y（**x**）自变函数

对于某一类函数**y**域中的函数，都有**Π**与之对应。

称因变量**Π**是函数**Y**的泛函。

函数是因变量与自变量之间的关系

泛函是因变量与自变函数之间的关系

在泛函中：

因变量直接依赖于函数，而与函数中的自变量没有对应关系。

2. 函数的连续性与泛函的连续性

对于函数连续性：**Y=f (x)**

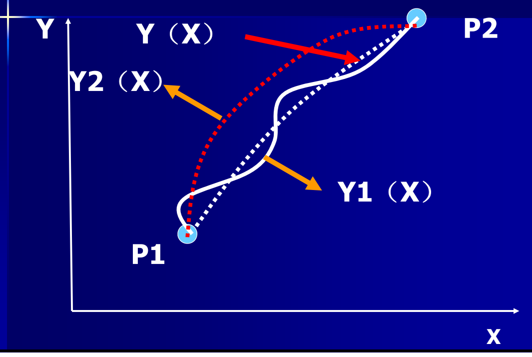
当自变量x有微小变化时，函数f (x)有微小的改变与其对应，则函数f (x)是连续的。

对于泛函的连续性：**Π=Π[y (x)]**

当自变函数y (x)有微小变化时，泛函**Π[y (x)]**有微小的改变与其对应，则泛函**Π[y (x)]**是连续的。

如何理解函数的微小变化？

对有定义的一切**x**值，**y (x)**和**y 1(x)**之间差的模很小，即两条曲线纵坐标之间很接近。



0阶接近

$|y(x) - y_1(x)|$ 很小时，我们称其为零阶接近。

1阶接近

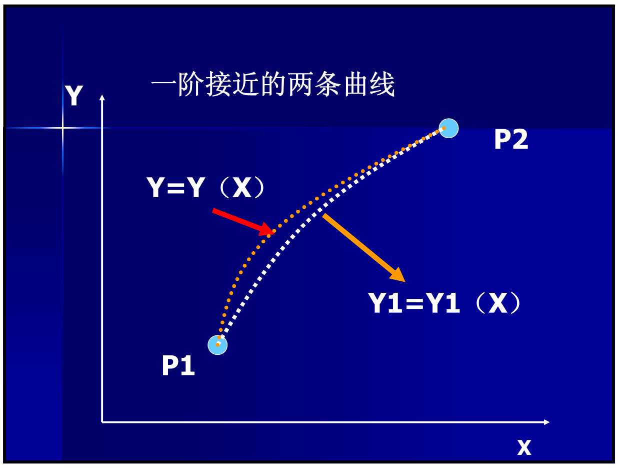
$|y(x) - y_1(x)|$

与 $|y'(x) - y_1'(x)|$ 都很小

称其为一阶接近。

K阶接近

依次类推，**k**阶接近要求零阶至第**k**阶导数之差的模都很小。



3. 函数的微分与泛函的变分

函数的微分定义

函数增量：$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$

可以展开为线性项和非线性项

$$\boxed{\Delta y = A(x)\Delta x + o(\Delta x)}$$

线性项 $A(x)$ 与 Δx 无关；$o(\Delta x)$ 是Δx的高阶无穷小项，函数y（x）可微。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A(x)$$

泛函的变分定义与函数的微分定义很相似

自变函数y (x) 的变分 ⟶ δy (x)

引起泛函的增量

$$\Delta \Pi = \Pi[y(x)+\delta y(x)] - \Pi[y(x)]$$

可以展开为线性项和非线性项

$$\boxed{\Delta \Pi = L[y(x),\delta y(x)] + \beta[y(x),\delta y(x)]}$$

L → 对 δy 的线性泛函项；

β → 对 δy 的非线性泛函项，是δy 的高阶无穷小；

当 $\delta y \longrightarrow 0$ 时，β 趋近于零。

⟶ $L[y(x),\delta y(x)]$ 称为泛函的变分

泛函变分用符号 $\delta \Pi$

$$\begin{aligned}\delta \Pi &= \Delta \Pi_{\delta y \to 0} \\ &= \Pi[y(x)+\delta y(x)] - \Pi[y(x)] \\ &= L[y(x),\delta y(x)]\end{aligned}$$

可以说泛函的变分是泛函增量的主部，而且该主部对 δy 是线性的。

4. 变分运算规则

变分 δ 和导数 $\frac{d}{dx}$ 运算具有互换性

即变分的导数=导数的变分

$$\frac{d}{dx}[\delta y(x)] = \delta\left[\frac{dy(x)}{dx}\right]$$

利用变分运算规律可知：

梁结构的应变能：

$$V[v(x)]=\int_0^l EIv''^2 dx$$

$$\delta V[v(x)]=\delta\left(\int_0^l EIv''^2 dx\right) \qquad \delta\int_{x1}^{x2}\Pi\,dx=\int_{x1}^{x2}\delta\Pi\,dx$$

$$=\int_0^l EI\delta\left(v''^2\right)dx=\int_0^l EIv''\delta v''dx$$

$$\delta\Pi^n=n\;\Pi^{n-1}\delta\Pi$$

5. 泛函的极值问题

对函数 $y=f(x)$ 来说，一点 x_0

$f(x_0)>f(x)$[或 $f(x_0)<f(x)$]，

则 $f(x_0)$ 就是函数 $f(x)$ 的极大值(或极小值)，而函数的极大值和极小值统称为函数的极值。

泛函极值的概念

$$\Pi[y_0(x)]>\Pi[y(x)]$$

或

$$\Pi[y_0(x)]<\Pi[y(x)]$$

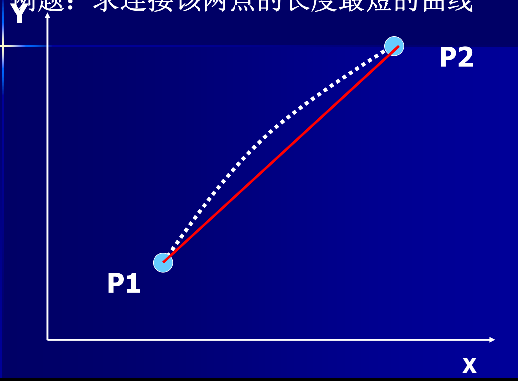
则称：

泛函在曲线 $y_0(x)$上达到极大或极小值。

称该极大值或极小值为泛函的极值。

泛函极值求解的数学含义

例题：求连接该两点的长度最短的曲线



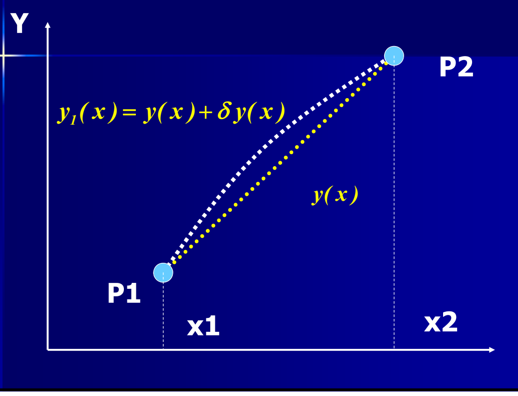
该问题可表示为求泛函

$$\Pi=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

在边界条件：$y(x_1)=y_1$

$y(x_2)=y_2$

下为极值的函数y



泛函实现极值的条件：$\delta\Pi = 0$ $\delta^2\Pi > o$ or $< o$

$$\delta\Pi = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' dx \qquad \int u dv = uv - \int v du$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}d(\delta y) = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\delta y\, d\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

已知：$d(\frac{\partial F}{\partial y'}) = \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})dx$

$$\delta\Pi = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

$$\delta\Pi = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

该项为边界条件式

当给定边界条件时

在x=x1，x=x2 $\delta y=0$

称此边界条件为基本边界条件

在x=x1，x=x2 δy 不等于零

要求在边界处必须 $\frac{\delta F}{\partial y'} = 0$

这一边界条件称之为自然边界条件

通过上述分析：若要求解泛函达到极值的函数实际上就是求解

$$\delta\Pi = \int_{x_1}^{x_2}[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)]\delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

$= 0$ 欧拉方程

即通过求解该微分方程，就可得到使泛函达到极值的函数y=y（x）

$\Pi = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$ 的极值问题可转化为求解欧拉方程

总结：

$$\Pi = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$$

在边界条件：$y(x_1) = y_1$; $y(x_2) = y_2$ 的极值

一阶变分 $\delta\Pi = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx$

泛函求极值的条件 $\delta\Pi = 0$

转化为：$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ 欧拉方程

进一步求解使泛函达到极值的函数：

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

（1）设F不依赖y仅是y'的泛函 $F(x,y')$ $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \longrightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = C$

以连接两点的最短曲线为例：$L = \int_{x1}^{x2}\sqrt{1+y'^2}dx$

$F = \sqrt{1+y'^2}$ 仅含有y'

此时，$\Pi = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$ $F = \sqrt{1+y'^2}$

$$\delta^2\Pi = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\delta y)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(\delta y')^2\right)dx$$

$$\delta^2\Pi = \int_{x1}^{x2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y'}\delta y'^2\right]dx$$

$F = \sqrt{1+y'^2}$

$$=\int_{x1}^{x2}\left[\frac{d}{dy'}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\delta y'^2\right]dx=\int_{x1}^{x2}\frac{\sqrt{1+y'^2}-y'^2/\sqrt{1+y'^2}}{1+y'^2}\delta y'^2dx$$

$$=\int_{x1}^{x2}\frac{1}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\delta y'^2dx \quad >0$$

该泛函有极小值

（2）F 不依赖与 x，即 $F = F(y, y')$

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)= \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\frac{dy'}{dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\frac{dy'}{dx}=0}$$

$$\frac{d}{dx}\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\frac{dy'}{dx}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{dy}{dx}=C_1$$

其它几种情况下泛函求极值问题的欧拉方程

① 泛函含有两阶导数的一维函数

$$\Pi=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y',y'')dx$$

边界条件：

$$y_1=y(x_1);\quad y'_1=y'(x_1);$$
$$y_2=y(x_2);\quad y'_2=y'(x_2)$$

一阶变分：

$$\Pi=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y',y'')dx$$

$$\delta\Pi[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\underline{\frac{\partial F}{\partial y'}}\delta y'+\underline{\frac{\partial F}{\partial y''}}\delta y''\right]dx$$

对第二项进行一次分部积分

对第三项进行二次分部积分　　考虑边界条件

得欧拉方程：

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)=0$$

$$\Pi=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$$

比较：多一个全微分项

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

②一般形式的泛函极值对应的微分方程

$$\Pi=\int_{x_1}^{x_2}F\left(x,y,y',y''\cdots\cdots y^n\right)dx$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{d^2x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)+\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{d\ x^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)=0$$

称之为：欧拉—泊桑公式。

（a）$\Pi=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

（b）$\Pi=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y',y'')dx$

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)=0$$

（c）$\Pi=\int_{x_1}^{x_2}F\left(x,y,y',y''\cdots\cdots y^n\right)dx$

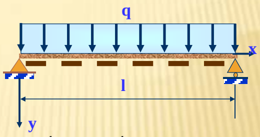
$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{d^2x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)+\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{d^nx}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)=0$$

例：利用变分求极值的转换关系，求解弹性基础梁位能泛函式的欧拉方程。

边界条件

$v(0)=v''(0)=0;$

$v(l)=v''(l)=0$



位能：$\Pi=\frac{1}{2}\int_0^l EIv''^2dx+\frac{1}{2}\int_0^l kv^2dx-\int_0^l qvdx$

n=2 $\quad \frac{\partial F}{\partial v}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial v'}\right)+\frac{d^2}{d^2x}\left(\frac{\partial F}{\partial v''}\right)=0$

$\frac{\partial F}{\partial v}=kv(x)-q;\quad \frac{\partial F}{\partial v'}=0\quad \frac{\partial F}{\partial v''}=EIv(x)''$

$\longrightarrow \quad EIv(x)''''+kv=q$

③含一阶导数的二维泛函的欧拉方程

$$\Pi[w(x,y)]=\int_s F\left(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}\right)dxdy$$

自变函数：$w(x,y)$

边界c上：$w(x,y)$ 已知，$\longrightarrow \delta w(x,y)=0$

一阶变分：

$$\delta\Pi[w(x,y)]=\int_s\left(\frac{\partial F}{\partial w}\delta w+\frac{\partial F}{\partial w_{,x}}\delta w_{,x}+\frac{\partial F}{\partial w_{,y}}\delta w_{,y}\right)dxdy$$

$$\delta\Pi[w(x,y)]=\int_s\left(\frac{\partial F}{\partial w}\delta w+\frac{\partial F}{\partial w_{,x}}\delta w_{,x}+\frac{\partial F}{\partial w_{,y}}\delta w_{,y}\right)dxdy$$

利用格林公式 进行分部积分

$$\delta\Pi[w(x,y)]=\int_s\left(\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{,x}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{,y}}\right)\right)\delta w dxdy$$

欧拉方程：$\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{,x}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{,y}}\right)=0$

$$\Pi[w(x,y)]=\int_s F\left(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}\right)dxdy$$

例：求出泛函 $\Pi=\frac{1}{2}\int_s\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$ 的欧拉方程。

$$\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{,x}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{,y}}\right)=0$$

流场或电磁场常用的拉普拉斯方程

④两阶导数二维函数的泛函的欧拉方程

$$\Pi[w(x,y)]=\int_s F\left(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)ds$$

自变函数：$w(x,y)$

边界c上：$w(x,y)$ 已知，$\longrightarrow \delta w(x,y)=0$

一阶变分：

$$\delta\Pi[w(x,y)]=\int_s\left(\frac{\partial F}{\partial w}\delta w+\frac{\partial F}{\partial w_{,x}}\delta w_{,x}+\frac{\partial F}{\partial w_{,y}}\delta w_{,y}+\frac{\partial F}{\partial w_{,xx}}\delta w_{,xx}+\frac{\partial F}{\partial w_{,xy}}\delta w_{,xy}+\frac{\partial F}{\partial w_{,yy}}\delta w_{,yy}\right)ds$$

欧拉方程：

$$\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{,x}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{,y}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{,xx}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{,xy}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{,yy}}\right)=0$$

$$\Pi[w(x,y)]=\int_s F\left(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)ds$$

例试求：

$$\Pi = \frac{D}{2}\int_s \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - q(x,y)w\right] dxdy$$

的欧拉方程。

$F(w_{,xx}, w_{,xy}, w_{,yy})$

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{,x}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{,y}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{,xx}}\right)$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{,xy}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{,yy}}\right) = 0$$

结构常用变分原理

（1）虚位移原理

结构在外力作用下处于平衡状态，如果给结构一个可能发生的虚位移，则外力对虚位移的功等于结构因虚应变获得的虚应变能。

$$\delta W = \delta V$$

虚位移原理是结构力平衡的充分必要条件
该结论可用变分运算证明

以梁为例进行证明。

必要条件：结构力平衡必有 $\delta W = \delta V$

梁平衡条件 $EIv'''' = q$

静力边界条件 $EIv''(0) = 0, \quad EIv''(l) = 0$

给梁一变分 $\delta v(x)$ $\quad \delta v(0) = 0 \quad \delta v(l) = 0$

在整个梁的长度上 $\delta v(x)$ 保持连续，则有下式成立：

$$\int_0^l (EIv'''' - q)\delta v dx + EIv''\delta v'\Big|_0^l = 0$$

分步积分 $\int_0^l (EIv'''' \quad)\delta v dx = EIv'''\delta v\Big|_0^l - EIv''\delta v'\Big|_0^l + \int_0^l EIv''\delta v'' dx$

$$\underline{\int_0^l EIv''\delta v'' dx} - \int_0^l \underline{q\delta v dx} + EIv'''\delta v\Big|_0^l = 0$$

弯曲应变能的变分　外力虚功　　得 $\delta W = \delta V$

充分条件：已知 $\delta W = \delta V$ 必有 $EIv'''' = q$

证明：

$\delta W = \delta V \Rightarrow \int_0^l (EIv''\delta v'' - q\delta v)dx = 0$

分部积分

$$\int_0^l (EIv'''' - q)\delta v dx \qquad = 0$$

静力边界条件 $EIv''(0) = 0, \quad EIv''(l) = 0$

$\delta v(0) = 0 \quad \delta v(l) = 0$

有：$\int_0^l (EIv'''' - q)\delta v dx = 0$

$\longrightarrow EIv'''' - q = 0$ 梁平衡条件

（2）最小势能原理

Π＝V−U

对于空间弹性体位移（**u, v, w**）＝$\{u\}$

力函数：**U**（**u, v, w**）；

应变能：V（**u, v, w**）；

推导一般线弹性体的最小势能表达式

设：任意一点的位移（u，v，w）＝{u}

外力列阵：体积力 $\{F\} = \{F_x \ F_y \ F_z\}^T$

面积力 $\{P\} = \{P_x \ P_y \ P_z\}^T$

几何方程：$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}$

应力与应变方程：$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ ➡ 物理方程

应变能：$V = \frac{1}{2}\int_\Omega \{\varepsilon\}^T\{\sigma\} d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega \{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\} d\Omega$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \{u\}^T [B]^T [D][B]\{u\} d\Omega$$

$$[D]=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对称} & & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[B]=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

力函数:

$$U=\int_{\Omega}\left(F_x u+F_y v+F_z w\right)d\Omega+\int_{s}\left(P_x u+P_y v+P_z w\right)ds$$

$$=\int_{\Omega}\{F\}^T\{u\}\,d\Omega+\int_{s}\{P\}^T\{u\}ds$$

结构总势能:

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\}\,d\Omega-\int_{\Omega}\{F\}^T\{u\}\,d\Omega-\int_{s}\{P\}^T\{u\}ds$$

可见最小势能原理:

$$\delta\Pi\left(u,v,w\right)=\underbrace{\delta V\left(u,v,w\right)}_{\text{应变能变分}}-\underbrace{\delta U\left(u,v,w\right)}_{\text{力函数变分}}=0$$

在有限元法中采用最小势能原理时，先假定单元位移函数，然后再利用此原理导出单元刚度方程。