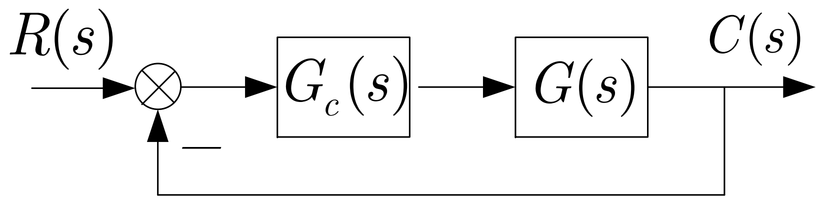
频率法串联校正

5.7　频率法串联校正

性能不满足设计要求的系统，在时域上通常表现为稳定性存在问题/平稳性差/调节时间太长/控制精度不够等形式。由于时域指标和频域指标(通常指相角裕度、截止频率)之间存在明确的关系，系统达不到时域指标必然会以频域指标不达标的形式反映出来，即它的开环频率特性曲线的形状没有达到指标所要求的形式。此时可以考虑在前向通路中串联一个具有特定传递函数的装置，使得新的开环频率特性曲线的形状符合性能指标的要求。这就是频率法串联校正。



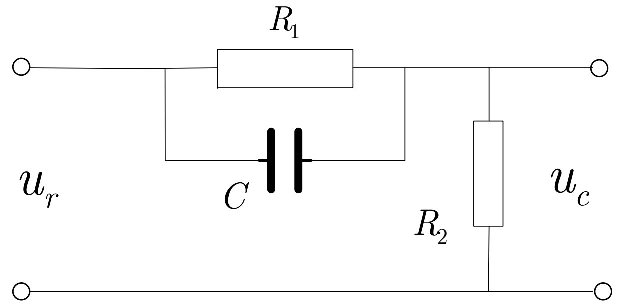
串联校正包括：超前校正、滞后校正、滞后-超前校正, PID 校正。

核心步骤是为校正装置设计合适的传递函数结构及参数。

5.7.1 超前校正

超前网络的传递函数 $$\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{a}\frac{aTs+1}{Ts+1}$$

其中 $T=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}C$ $\qquad a=\dfrac{R_1+R_2}{R_2}>1$

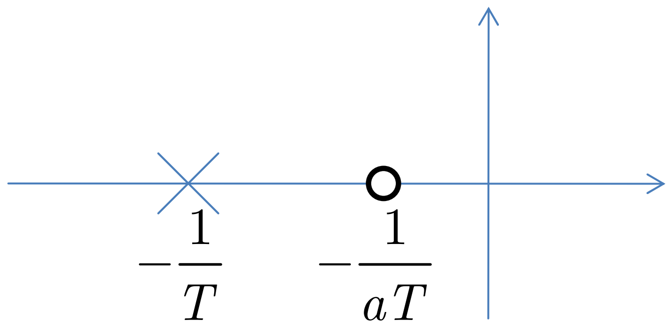


RC超前网络

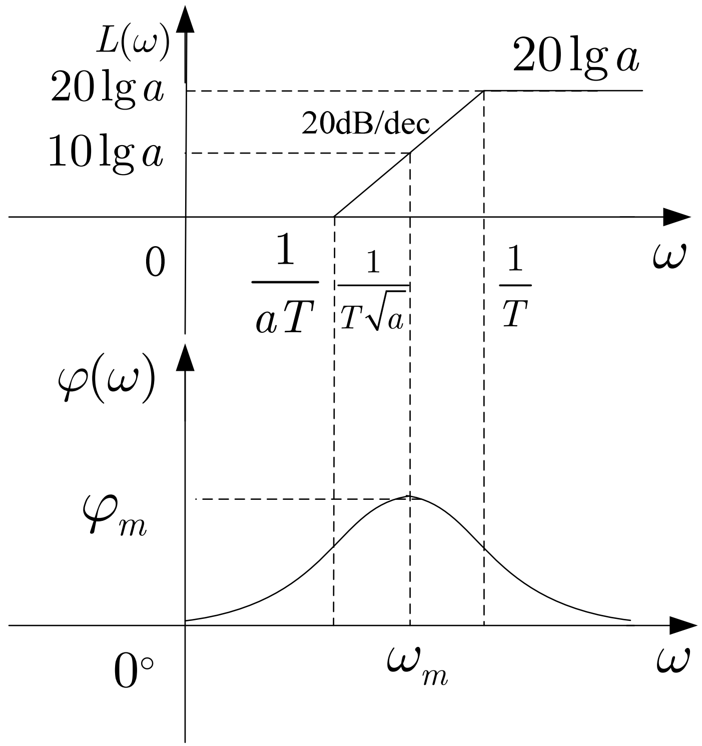
超前校正网络传递函数的一般形式

$$G_c(s)=a\cdot\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{aTs+1}{Ts+1}$$

由放大器提供



超前校正网络的零极点分布图



超前校正网络的伯德图

超前网络伯德图的特点：

(1) $\omega=\dfrac{1}{T}$时的分贝值为$20\lg a$

（计算方法）

$$G_c(j\omega)=\frac{jaT\omega+1}{jT\omega+1}=\frac{\dfrac{j\omega}{\frac{1}{aT}}+1}{\dfrac{j\omega}{\frac{1}{T}}+1}$$

(2) 输出信号的相角超前于输入信号的相角,最大超前角发生在两个转折频率$1/(aT)$和$1/T$的几何中心

$$\omega_m=\frac{1}{T\sqrt{a}}$$

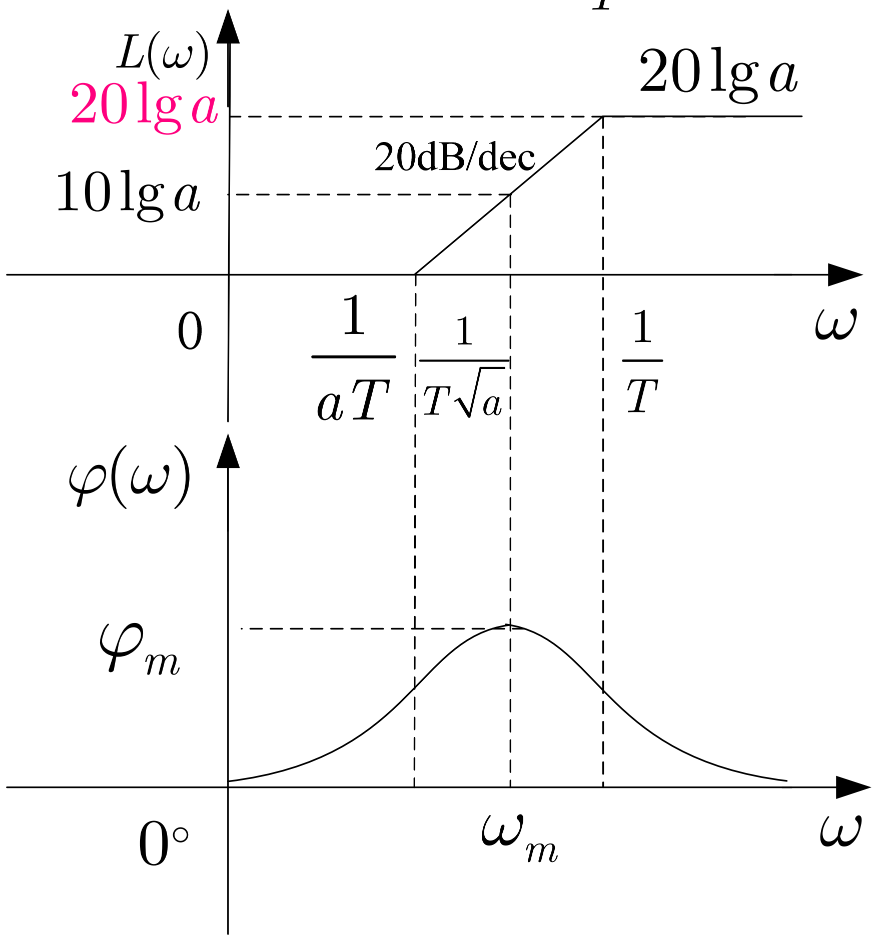
处，最大超前角为

$$\varphi_m=\arcsin\frac{a-1}{a+1}=\arctan\frac{a-1}{2\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow a=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$$

最大超前角处的分贝值为

$$L(\omega_m)=10\lg a$$



超前校正网络的伯德图

(2) 输出信号的相角超前于输入信号的相角,最大超前角发生在两个转折频率

$1/(aT)$和$1/T$的几何中心$\omega_m=\dfrac{1}{T\sqrt{a}}$处，最大超前角为$\varphi_m=\arcsin\dfrac{a-1}{a+1}$

$=\arctan\dfrac{a-1}{2\sqrt{a}}$，最大超前角处的分贝值为$L(\omega_m)=10\lg a$。

证明：超前网路$G_c(s)$的相频特性为：$\varphi_c(\omega)=\arctan aT\omega-\arctan T\omega$

$$\text{令}\ \frac{d\varphi_c(\omega)}{d\omega}=\frac{aT}{1+\left(aT\omega\right)^2}-\frac{T}{1+\left(T\omega\right)^2}=0,\quad \text{解得：}\omega_m=\frac{1}{T\sqrt{a}}$$

代入$\varphi_c(\omega_m)=\arctan\left(aT\dfrac{1}{T\sqrt{a}}\right)-\arctan\left(T\dfrac{1}{T\sqrt{a}}\right)=\arctan\left(\sqrt{a}\right)-\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$

$$=\arctan\frac{\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}}{1+\sqrt{a}\dfrac{1}{\sqrt{a}}}=\arctan\frac{a-1}{2\sqrt{a}}=\arcsin\frac{a-1}{a+1}$$

最大超前角仅与a有关，a越大超前角越大，同时高频段也抬的越高。考虑到抑制噪声的要求，a一般不超过20，即超前角不超过60°。

超前校正的基本原理

利用超前校正装置的相角超前特性，可将最大超前角配置在截止频率处，从而增加相角裕度；另一方面超前网络叠加到原系统开环对数幅频曲线上后，可使截止频率ω_c右移，从而能提高响应的快速性。

（1）可用于对相角裕度和截止频率均有要求的系统，但对相角的提升幅度不超过60°;

（2）ω_c右移对相角裕度有负面影响，设计时应予以补偿；

(3) 不会改变系统的型别，因而不能提高系统的无差度；

（4）使高频段抬高，系统抗高频干扰能力会有所下降；

超前校正的基本步骤

假设未校正系统的开环传递函数为$G_0(s)$，给定指标e_{ss}^*、ω_c^* 、γ^* 和h^*。用频率特性法设计超前校正装置的步骤：

（1）根据稳态误差要求，确定开环增益K。

（2）根据K，绘制未校正系统的对数幅频特性曲线$L_0(\omega)$，求出开环截止频率ω_{c0}和相角裕度γ_0。当$\omega_{c0} \le \omega_c^*$、$\gamma_0 < \gamma^*$时可以考虑用超前校正。

（3）根据指标γ^*，计算校正装置所应提供的最大相角超前量φ_m，即

$$\varphi_m = \gamma^* - \gamma_0 + (5^\circ \sim 15^\circ)$$

其中$(5^\circ \sim 15^\circ)$是用于补偿引入超前校正装置开环截止频率增大所导致的相角裕度损失。

（4）根据所确定的最大超前相角φ_m，求出a值，即

$$a = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$$

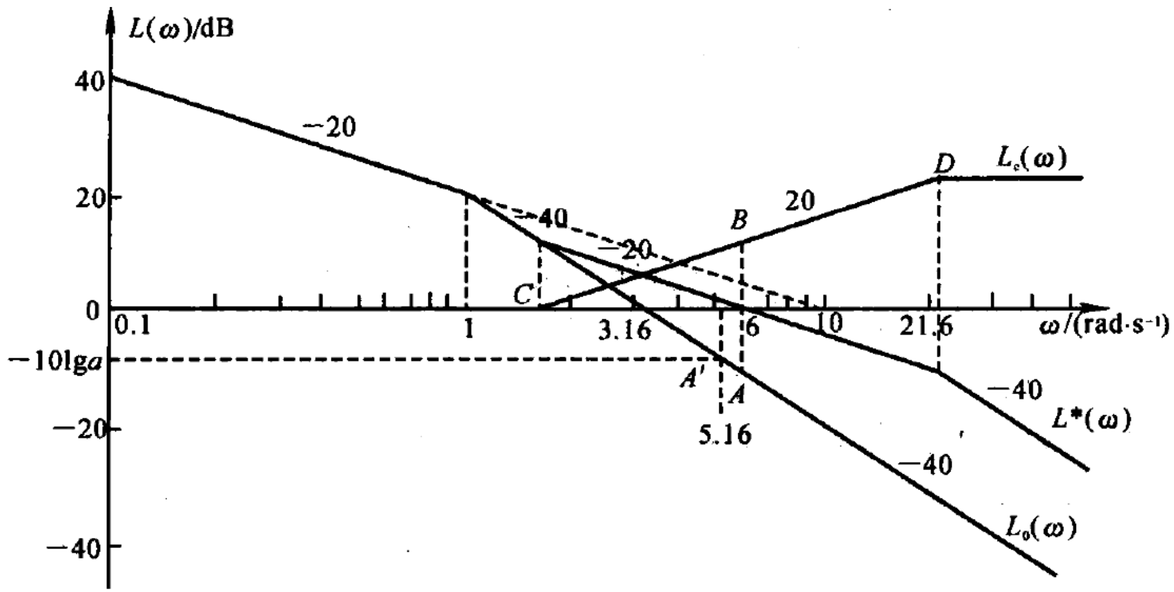
（5）确定校正后系统的截止频率ω_c。在$-10\lg a$处作水平线，与$L_0(\omega)$交于A'点，交点频率设为$\omega_{A'}$，取校正后系统的截止频率$\omega_c=\max\{\omega_{A'},\omega_c^*\}$。

（6）确定校正网络的转折频率ω_C和ω_D。在选好的ω_c处作垂直线，与$L_0(\omega)$交于A点；确定A点关于0分贝线的对称点B，过B作斜率为20dB/dec的直线，与0分贝线交于C点，计算出C点的频率ω_C；在CB的延长线上确定D点，使$\omega_D=\omega_c^2/\omega_C$

则$G_c(\mathrm{s})=\dfrac{\dfrac{s}{\omega_C}+1}{\dfrac{s}{\omega_D}+1}$

（7）校验。$G(s)=G_c(s)G_0(s)$

检验已校正系统的性能指标是否满足设计要求。若不满足，返回步骤（3）。



例 设单位反馈系统的开环传递函数 $G_0(s)=\dfrac{K}{s(s+1)}$

试设计校正装置 $G_C(s)$，使校正后系统满足如下指标：

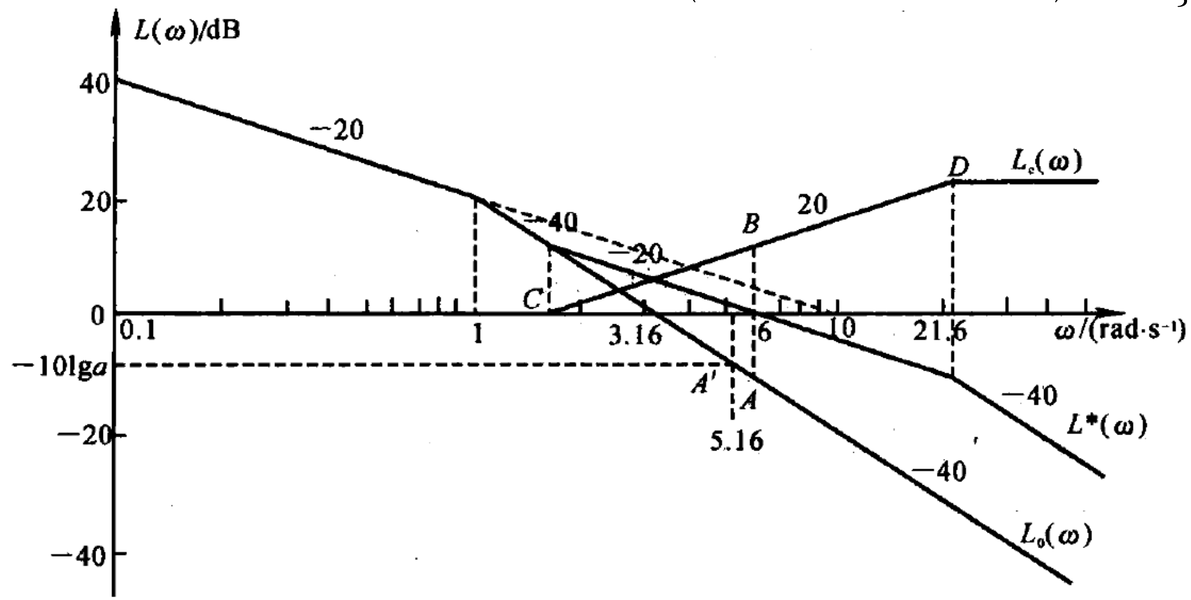
（1）当 $r=t$ 时，稳态误差 $e_{ss}^* \leqslant 0.1$；（2）开环系统截止频率 $\omega_c^* \geqslant 6$ rad/s；

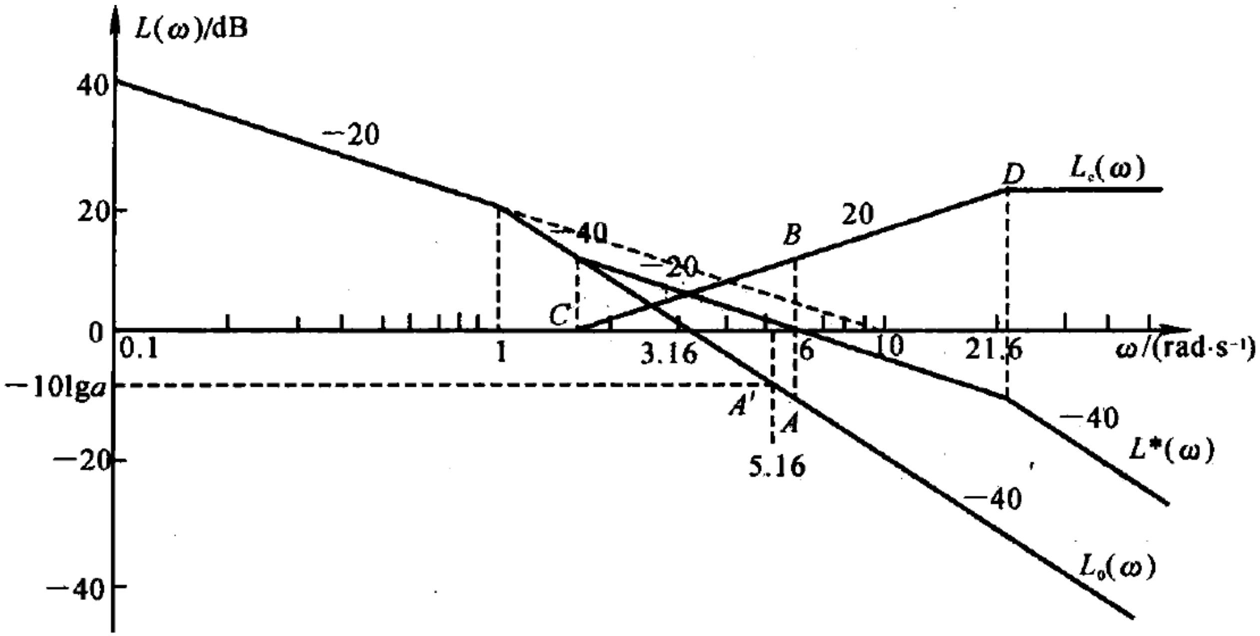
（3）相角裕度 $\gamma^* \geqslant 60°$；（4）幅值裕度 $h^* \geqslant 10$ dB。

解：(1)单位斜坡信号作用下的 $e_{ss}^* \le 0.1$，故有 $1/K \le 0.1 \Rightarrow K \ge 10$，取 $K=10$；

(2)绘制未校正系统的对数幅频特性曲线 $L_0(\omega)$，计算 ω_{c0} 和 γ_0

$$\left.\begin{array}{l}\text{由}\left|\dfrac{10}{j\omega_{c0}\times j\omega_{c0}}\right|=1\Rightarrow\omega_{c0}=3.16\quad\text{（为何？）}\ \omega_{c0}\le\omega_c^*\left(\text{截止频率需要提高}\right)\\ \gamma_0=180°-90°-\arctan\omega_{c0}=17.5°<\gamma^*=60°\left(\text{相角裕度需要提高}\right)\end{array}\right\}\text{宜采用超前校正}$$





(3)超前网络需要提供的超前角：$\varphi_m = \gamma^* - \gamma_0 + 5^\circ = 60^\circ - 17.5^\circ + 5^\circ = 47.5^\circ$

(4)超前网络参数：$a = \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} = 7,$　　　$10\lg a$=8.5dB;

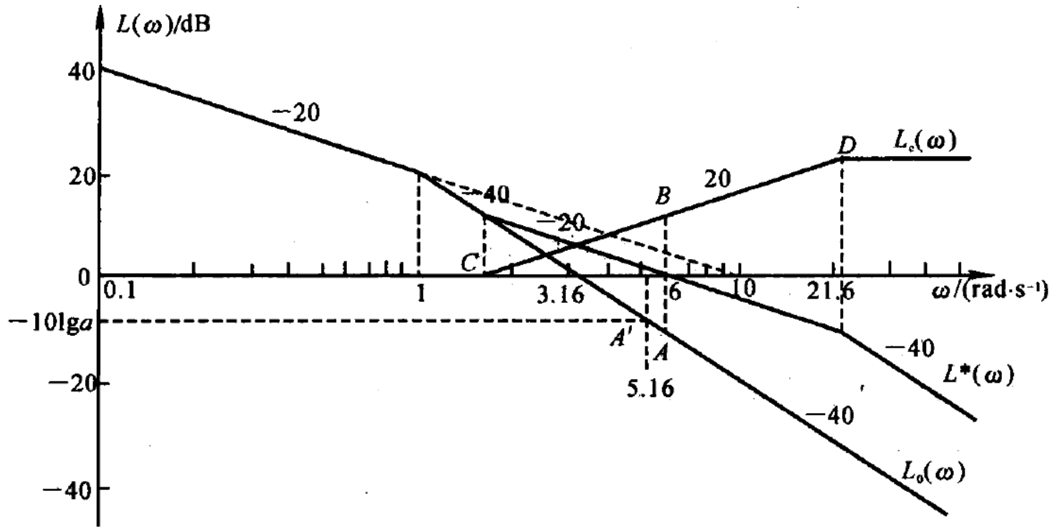
注：a不一定是最终设计值，因为ω_c^*对a也有要求。a的值依γ^*和ω_c^*中较苛刻者而定。

(5)作图确定ω_c。分贝值为 -$10\lg a$的水平线与$L_0(\omega)$的交点A′处

$$20\lg\left|\frac{10}{j\omega_{A'}\times j\omega_{A'}}\right| = -8.5 \quad\Rightarrow\quad \omega_{A'} = \sqrt{10\times 10^{\frac{8.5}{20}}} = 5.16$$

或　$$-40\left(\lg\omega_{A'} - \lg\omega_{c0}\right) = -8.5 - 0 \quad\Rightarrow\quad \omega_{A'} = \omega_{c0}10^{\frac{8.5}{40}} = 5.16$$

$$\therefore \omega_c = \max\{\omega_{A'}, \omega_c^*\} = \omega_c^* = 6$$　(同时满足了γ^*和ω_c^*的要求)



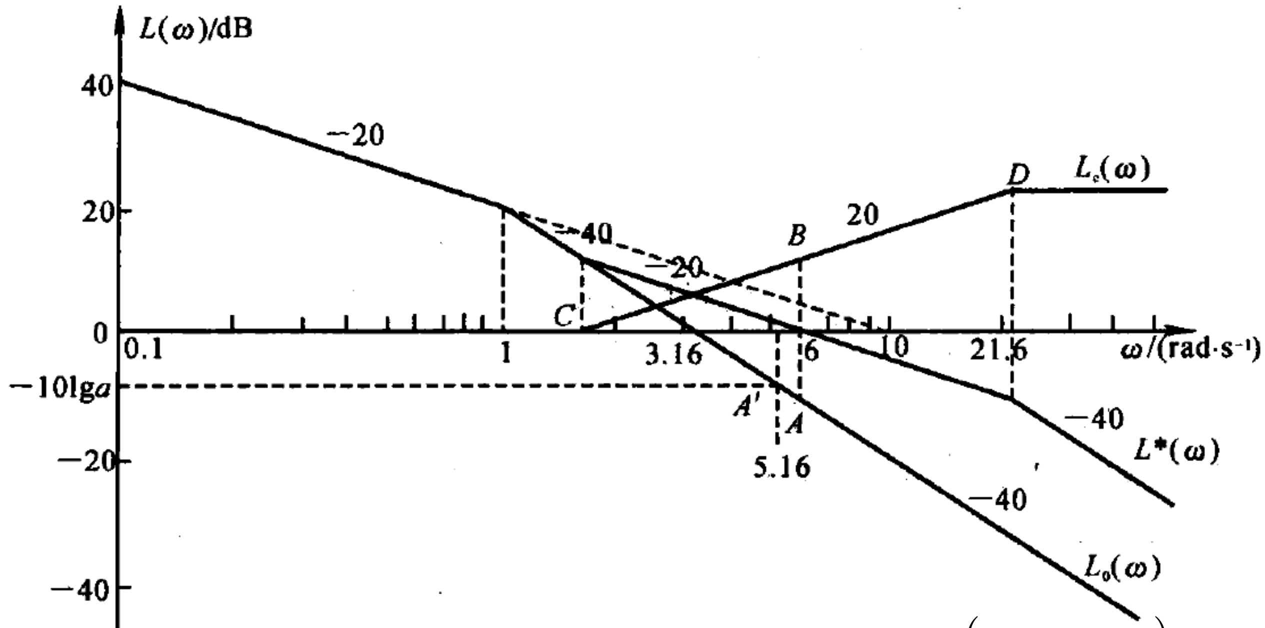
(6)作$\omega=\omega_c$的垂线，交$L_0(\omega)$于A，作A点关于0dB线的对称点B, 过B作斜率为+20的线，

交0dB线于C, 欲求ω_C，需先求B点的分贝值: $-20\lg(\frac{10}{6*6})=20\lg 3.6$,

$20(\lg\omega_C-\lg 6)=0-20\lg 3.6 \Rightarrow \omega_C=1.667$

$$\omega_D=\frac{\omega_c\times\omega_c}{\omega_C}=\frac{36}{1.667}=21.6$$

(7)超前网络传递函数：$G_c(\mathrm{s})=\dfrac{\dfrac{s}{\omega_C}+1}{\dfrac{s}{\omega_D}+1}=\dfrac{\dfrac{s}{1.667}+1}{\dfrac{s}{21.6}+1}$



(7)校验。校正后的开环传递函数：$G_c(\mathrm{s})G(\mathrm{s})=\dfrac{10\left(\dfrac{s}{1.667}+1\right)}{s(s+1)\left(\dfrac{s}{21.6}+1\right)}$

截止频率：ω_c=6;

相角裕度：$\gamma=180^\circ+\arctan\dfrac{6}{1.667}-90^\circ-\arctan 6-\arctan\dfrac{6}{21.6}=68.5^\circ>60^\circ$

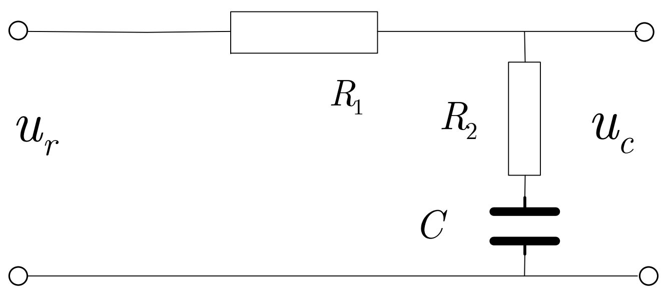
（为什么比希望值更大？）

幅值裕度：$h=\infty>10\mathrm{dB}$

满足要求。

5.7.1 滞后校正

滞后网络的传递函数 $G_c(s)=\dfrac{bTs+1}{Ts+1}$

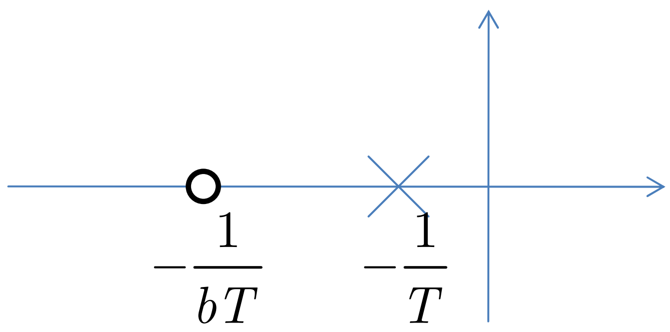


RC滞后网络

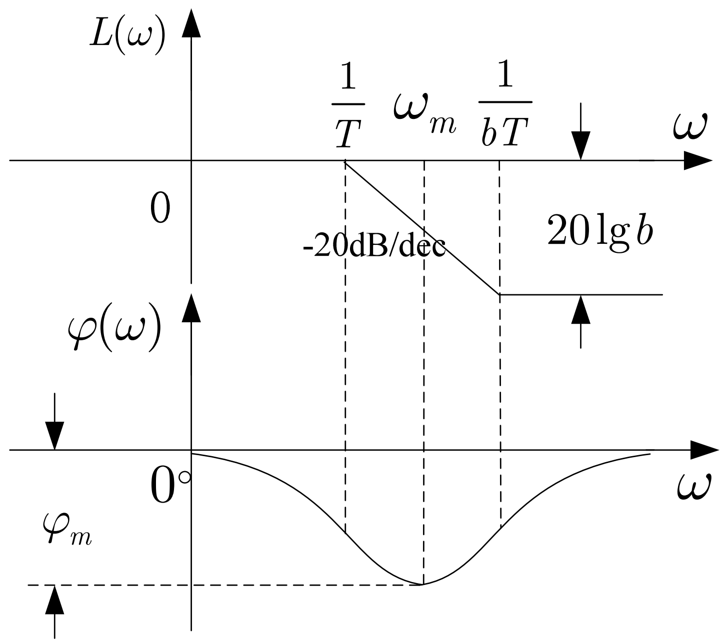
滞后网络的频率特性

$$G_c(j\omega)=\frac{jbT\omega+1}{jT\omega+1}$$

其中 $T=(R_1+R_2)C \quad b=\dfrac{R_2}{R_1+R_2}<1$



滞后校正网络的零极点分布图



滞后校正网络的伯德图

滞后网络伯德图的特点：

(1) $\omega=\dfrac{1}{bT}$时的分贝值为$20\lg b$

（三种计算方法）

$$G_c(j\omega)=\frac{\dfrac{j\omega}{\frac{1}{bT}}+1}{\dfrac{j\omega}{\frac{1}{T}}+1}$$

(2) 输出信号的相角滞后于输入信号的相角,最大滞后角发生在两个转折频率$1/T$和$1/(bT)$的几何中心$\omega_m=\dfrac{1}{T\sqrt{b}}$处，最大滞后角为$\varphi_m=\arcsin\dfrac{1-b}{1+b}$

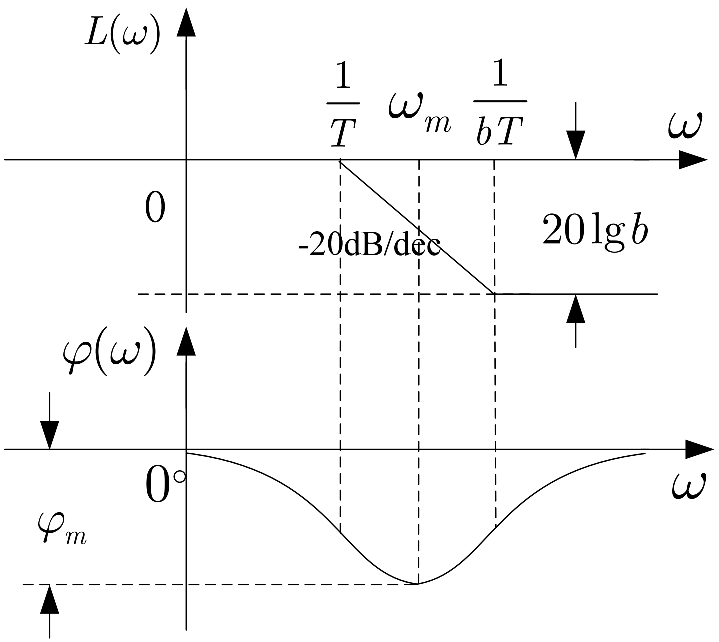
证明：$\varphi_c(\omega)=\arg\tan(bT\omega)-\arg\tan(T\omega)$

$$\frac{d\varphi_c(\omega)}{d\omega}=\frac{bT}{1+\left(bT\omega\right)^2}-\frac{T}{1+\left(T\omega\right)^2}=0,$$

解得：$\omega_m=\dfrac{1}{T\sqrt{b}}$

$$\varphi_c(\omega)\Big|_{\omega=\frac{1}{T\sqrt{b}}}=\arg\tan(\sqrt{b})-\arg\tan(\frac{1}{\sqrt{b}})=\arg\tan\frac{b-1}{2\sqrt{b}}$$

$$\varphi_m=\left|\varphi_c(\omega_m)\right|=\arg\tan\frac{1-b}{2\sqrt{b}}=\arcsin\frac{1-b}{1+b}$$



滞后校正网络的伯德图

滞后网络的加入对相角裕度的负面影响

滞后网络的加入必然会在补偿后系统的截止频率处叠加负的相角，从而对相角裕度产生不利影响。为了减小这种影响，通常令$\frac{1}{bT}$远小于校正后系统的截止频率，一般取：$\frac{1}{bT}=\frac{\omega_c}{10}$

$$\varphi_c(\omega_c)=\left[\arg\tan(bT\omega)-\arg\tan(T\omega)\right]\Big|_{\omega_c=\frac{10}{bT}}=\left[\arg\tan\frac{bT\omega-T\omega}{1+b(T\omega)^2}\right]\Bigg|_{\omega=\frac{10}{bT}}$$

$$=\arg\tan\frac{10b-10}{b+100}\overset{b<1}{\approx}\arg\tan\left[0.1(b-1)\right]$$

当$b\to 0$时，$\left|\varphi_c(\omega_c)\right|$的最大值$5.71^\circ<6^\circ$

若选$\frac{1}{bT}=\frac{\omega_c}{10}$，则滞后网络对相角裕度的负面影响不会超过$6^\circ$，设计时通常先进行补偿.

滞后校正的基本原理

　　利用滞后校正装置的幅值衰减特性，压低中频段，减小截止频率，以挖掘原系统自身的相角储备量，提高相角裕度，改善系统平稳性。

（1）滞后校正可用于原系统相角裕度不足，而截止频率有富余的系统。允许牺牲截止频率以换取相角裕度的增加。

（2）滞后校正不会改变系统的型别，不能提高系统的无差度；

(3) 滞后校正会压低高频段，能增强系统抗高频干扰的能力；

（4）滞后网络在ω_c处的-6°的相角需要补偿。

滞后校正的基本步骤

假设未校正系统的开环传递函数为$G_0(s)$，设计指标为e_{ss}^*、ω_c^*、γ^* 和h^*。

（1）根据稳态误差要求，确定开环增益K。

（2）根据K，绘制未校正系统的对数幅频特性曲线$L_0(\omega)$，求出开环截止频率ω_{c0}和相角裕度γ_0。

（3）判断是否适合采用滞后校正。可采用滞后校正的条件：

$\omega_{c0} > \omega_c^*$、$\gamma_0 < \gamma^*$并且$\gamma_0(\omega_c^*) = 180^\circ + \angle(G_0(j\omega_c^*)) \geq \gamma^* + 6^\circ$

（4）确定校正后系统的截止频率。在原系统的伯德图上找ω_{c1}，使

$\gamma_0(\omega_{c1}) = \gamma^* + 6^\circ$，则$\omega_c^* \leq \omega_c \leq \omega_{c1}$，一般取$\omega_c = \omega_{c1}$。

（5）在ω_c处作垂直线，交$L_0(\omega)$于 A 点，作 A 点关于 0dB 线的对称点 B. 过 B 作水平线，在$\omega_C = 0.1\omega_c$处确定 C 点, 过 C 作斜率-20 的直线交 0dB 线于 D 点。求出转折点频率ω_C和ω_D，则

$$G_c(\mathrm{s}) = \frac{\dfrac{s}{\omega_C} + 1}{\dfrac{s}{\omega_D} + 1}$$

（6）校验。

例 设单位反馈系统的开环传递函数 $G_0(s)=\dfrac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$

试设计校正装置 $G_C(s)$，使校正后系统满足如下指标：

(1) 速度误差系数 $K_v^*=30$； (3) 相角裕度 $\gamma^*\geqslant 40^\circ$；

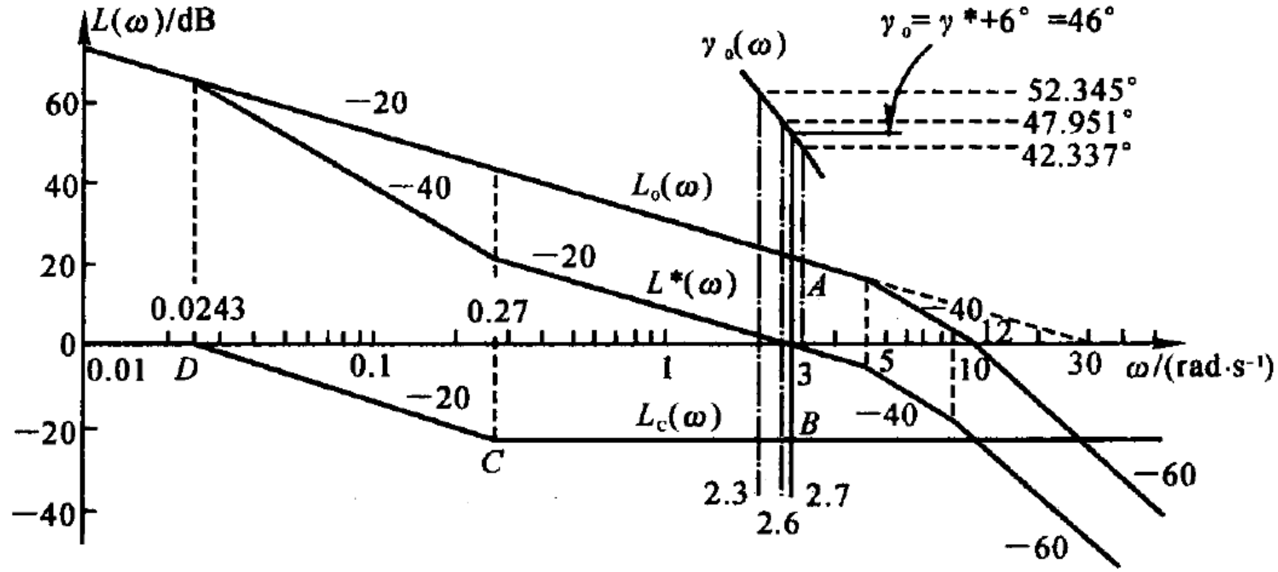
(2) 开环系统截止频率 $\omega_c^*\geqslant 2.3$ rad/s； (4) 幅值裕度 $h^*\geqslant 10$ dB。

解：(1)速度误差系数$K_v^*=\lim\limits_{s\to 0} s\dfrac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}=K$，故$K=30$；

(2)绘制未校正系统的对数幅频特性曲线$L_0(\omega)$，计算ω_{c0}和γ_0

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{30}{j\omega_{c0}\times j0.1\omega_{c0}\times 0.2j\omega_{c0}}\right|=1 \;\Rightarrow\quad \omega_{c0}=11.45>\omega_c^*=2.3\text{(截止频率有富余)}\\ \gamma_0=180^\circ-90^\circ-\arctan 0.1\omega_{c0}-\arctan 0.2\omega_{c0}=-25.28^\circ\ll\gamma^*=40^\circ\text{(相角裕度需要提高)}\\ \gamma_0(\omega_c^*)=180^\circ+\angle(G_0(j\omega_c^*))=52.345^\circ\geq\gamma^*+6^\circ=46^\circ\text{(相角储备量足够)}\end{array}\right\}$$

宜采用滞后校正.



(3) 确定截止频率

用试探法找满足$\gamma_0(\omega_{c1})=46^\circ$的频点$\omega_{c1}$.

$$\frac{K}{j\omega(\frac{j\omega}{10}+1)(\frac{j\omega}{5}+1)}$$

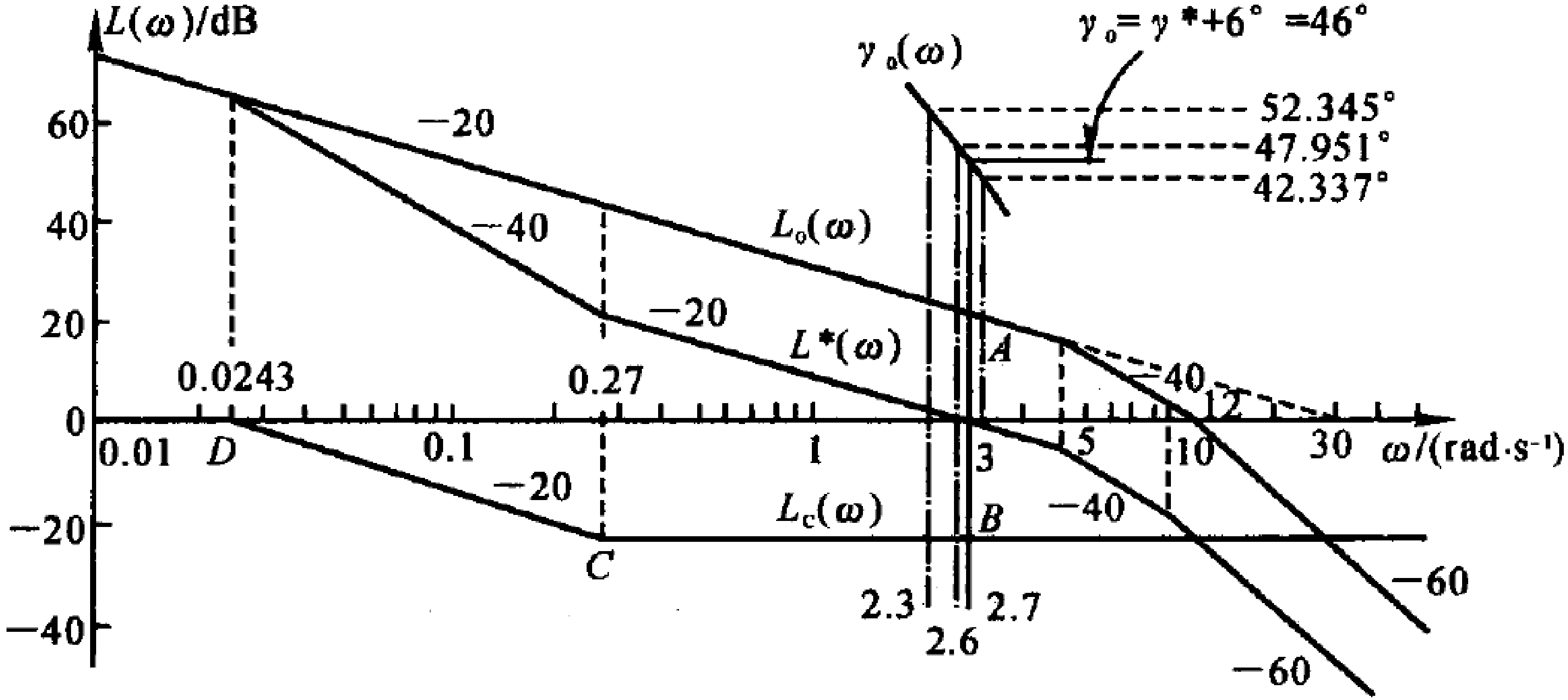
当$\omega=3$时，$\gamma_0(3)=180^\circ+\angle(G_0(j3))=42.337^\circ$；

当$\omega=2.6$时，$\gamma_0(2.6)=180^\circ+\angle(G_0(j2.6))=47.951^\circ$；

线性插值，逐步确定出$\omega_{c1}=2.7$时，$\gamma_0(\omega_{c1})=180^\circ+\angle(G_0(j2.7))=46^\circ$.

截止频率的允许范围为：$2.3=\omega_c^*\le\omega_c\le\omega_{c1}=2.7$

取$\omega_c=2.7$



(4)在ω_c=2.7处作垂线，交$L_0(\omega)$于点A,作A点关于0dB线的对称点B. 过B作水平线，在$\omega_C=0.1\omega_c$处确定C点,过C作斜率-20的直线交0dB线于D点。

$$\omega_C=0.1\omega_c=0.27$$

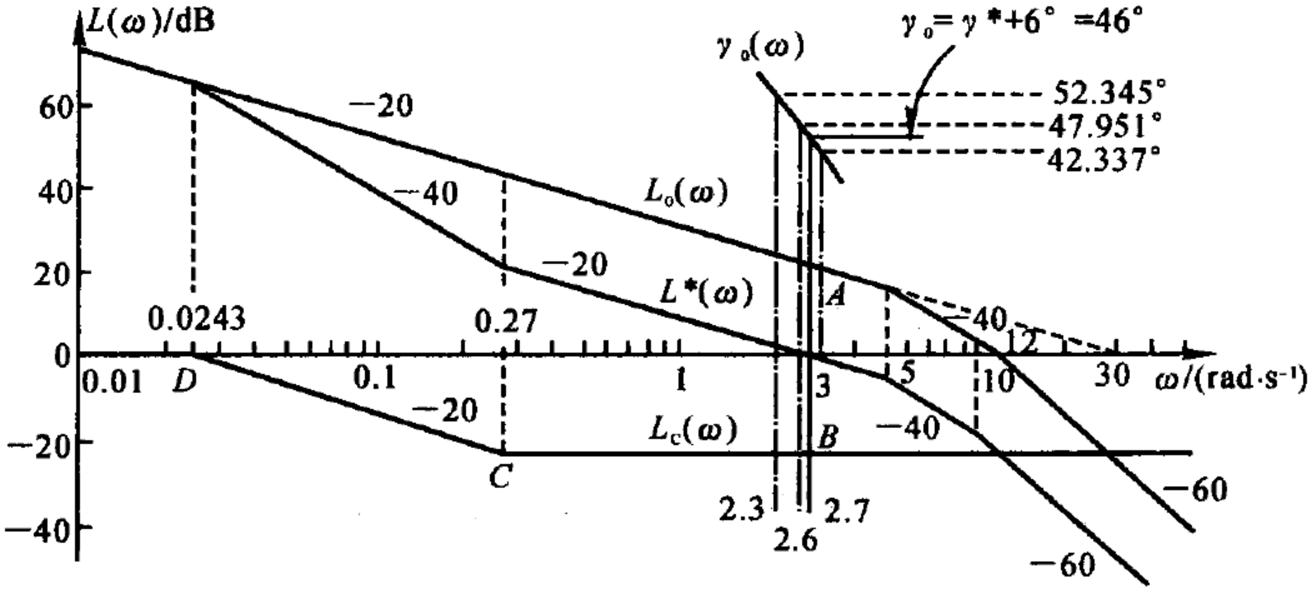
欲求ω_D,先求B点分贝值：$-20\lg(\frac{30}{2.7})$

$$-20(\lg 0.27-\lg\omega_D)=-20\lg(\frac{30}{2.7})-0 \Rightarrow \omega_D=\frac{0.27\times 2.7}{30}=0.0243$$

$$\frac{K}{j\omega(\frac{j\omega}{10}+1)(\frac{j\omega}{5}+1)}$$

校正装置的传递函数为：

$$G_c(s)=\frac{\frac{s}{\omega_C}+1}{\frac{s}{\omega_D}+1}=\frac{\frac{s}{0.27}+1}{\frac{s}{0.0243}+1}$$



(5)校验

校正后开环传递函数： $$G_c(s)G_0(s)=\frac{30\left(\frac{s}{0.27}+1\right)}{s(\frac{s}{10}+1)(\frac{s}{5}+1)\left(\frac{s}{0.0243}+1\right)}$$

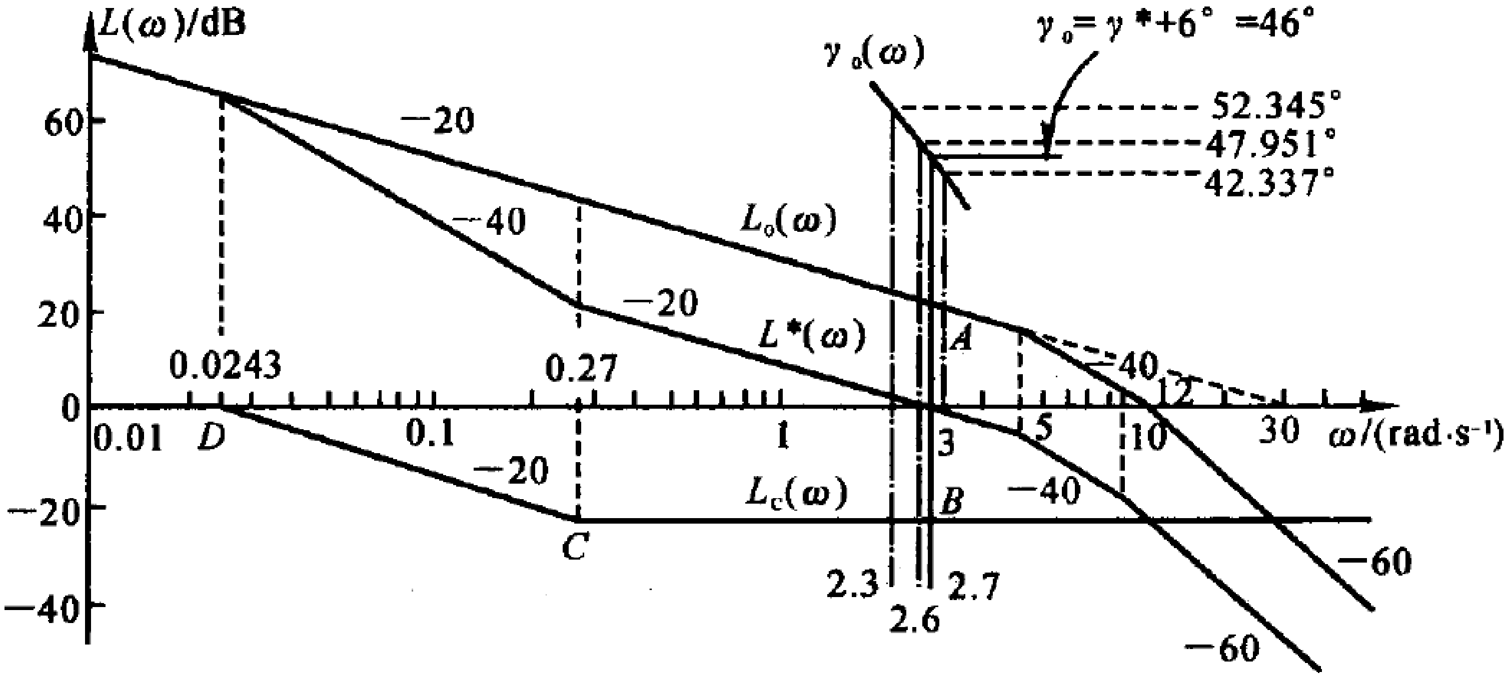
校正后指标： $K_v^*=30;$

$$\omega_c=2.7>\omega_c^*=2.3;$$

$$\gamma_c^*=180^\circ+\angle\left(G_c(j\omega_c)G_0(j\omega_c)\right)$$

$$=180^\circ+\arctan\frac{2.7}{0.27}-90^\circ-\arctan\frac{2.7}{10}-\arctan\frac{2.7}{5}-\arctan\frac{2.7}{0.0243}=41.3^\circ>40^\circ$$

计算穿越频率ω_g=6.8，幅值裕度h=20lg$\frac{1}{\left|G_c(j\omega_g)G_0(j\omega_g)\right|}$=10.5dB>10dB



5.7.3 滞后-超前校正

滞后－超前网络的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}$$

若使

$$aT_1 = R_1C_1,\ bT_2 = R_2C_2,\ ab = 1,$$

$$R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2 = T_1 + T_2,\quad T_1 < T_2$$

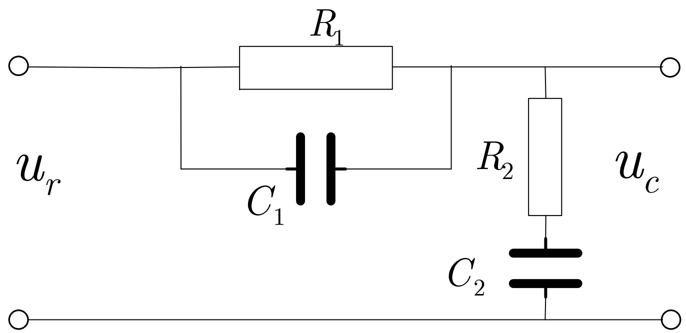
则有

$$T_1T_2 = R_1R_2C_1C_2$$

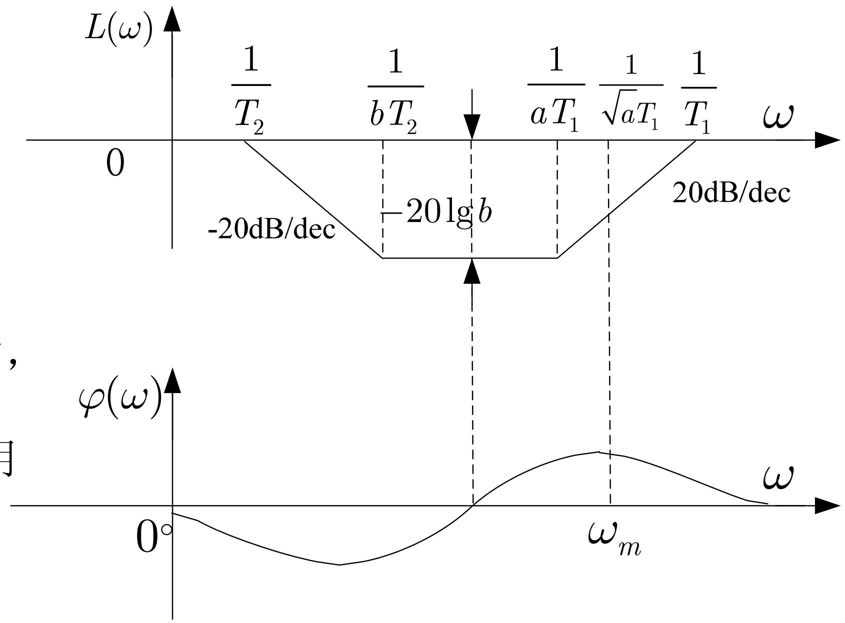
当$a > 1$，$b < 1$时

$$G_c(s) = \underbrace{\frac{bT_2s+1}{T_2s+1}}_{\text{滞后作用}}\underbrace{\frac{aT_1s+1}{T_1s+1}}_{\text{超前作用}}$$

该网络在$\omega_m = \dfrac{1}{\sqrt{a}T_1}$处，相角是超前的，幅值是衰减的，若将$\omega_m$设置在校正后系统的截止频率处，则同时可利用最大超前角和原系统本身的相角储备来增大相角裕度。从而达到单级超前网络无法达到的相角裕度指标。



滞后-超前网络的RC电路实现



滞后-超前网络的伯德图

滞后-超前校正的基本步骤

假设未校正系统的开环传递函数为 $G_0(s)$，设计指标为 e_{ss}^* 、 ω_c^* 、 γ^* 和 h^* 。

（1）根据稳态误差要求，确定开环增益 K 。

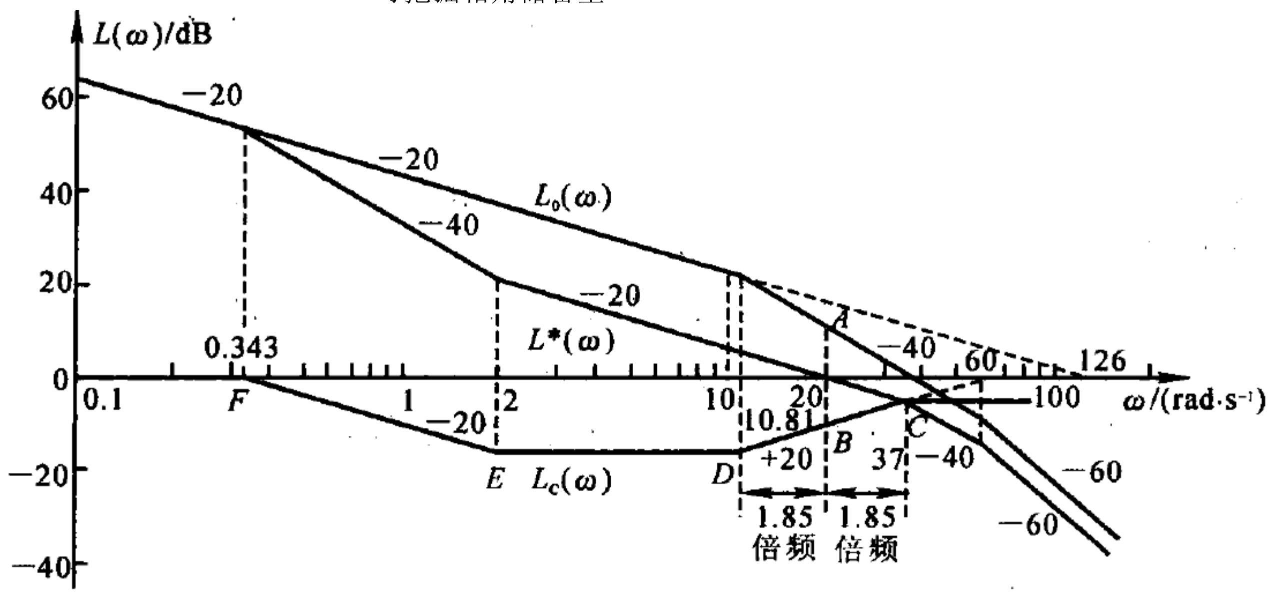
（2）根据 K ，绘制未校正系统的对数幅频特性曲线 $L_0(\omega)$ ，求出开环截止频率 ω_{c0} 和相角裕度 γ_0 。若用超前校正则所需最大超前角 $\varphi_m > 60^\circ$ ，而在 ω_c^* 处，滞后校正有没有足够的相角储备量，即 $\gamma_0(\omega_c^*) = 180^\circ + \angle(G_0(j\omega_c^*)) < \gamma^* + 6^\circ$ ，则需要考虑采用滞后-超前校正。

（3）选择校正后系统的截止频率 $\omega_c = \omega_c^*$ ，计算 ω_c 处所需的最大超前角

$$\varphi_m(\omega_c) = \gamma^* - \underbrace{\gamma_0(\omega_c)}_{\text{可挖掘相角储备量}} + 6^\circ$$

计算超前网络参数

$$a = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$$



滞后-超前校正的基本步骤

（4）在ω_c处作垂线，交$L_0(\omega)$于 A 点，确定 A 关于 0dB 线的对称点 B.

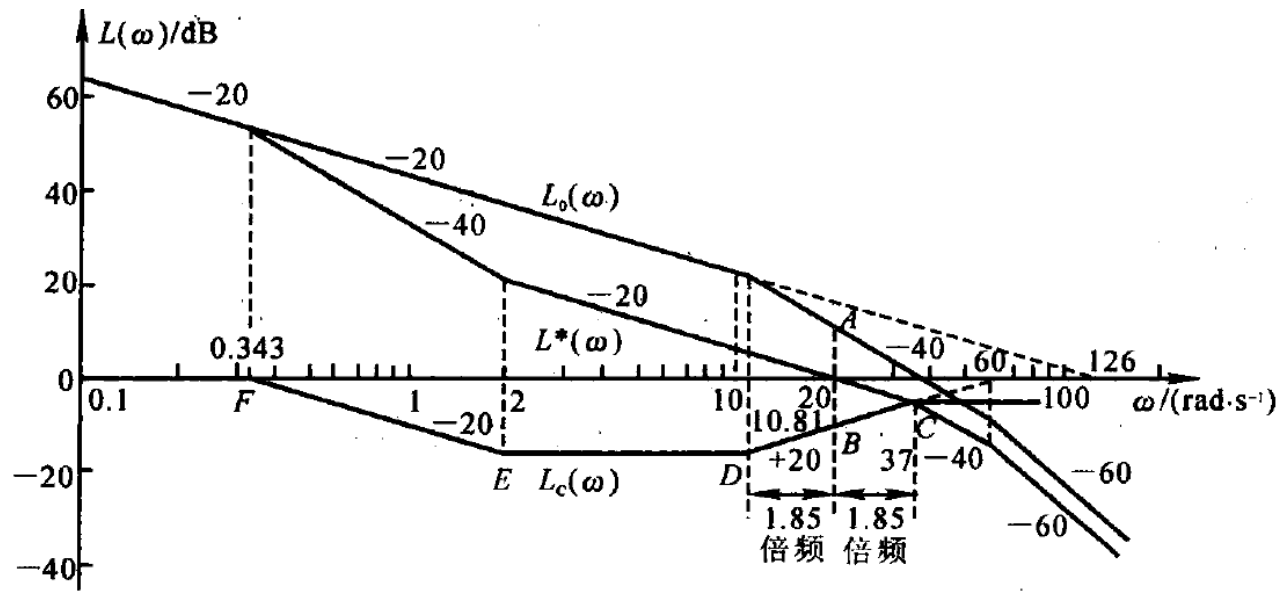
（5）过 B 点以 B 为中心的斜率为+20 的直线和过$\omega=\sqrt{a}\omega_c$和$\omega=\omega_c/\sqrt{a}$的两条垂直线交于 C 和 D 点。则$\omega_C=\sqrt{a}\omega_c$，$\omega_D=\omega_c/\sqrt{a}$.

（6）从 C 点向右作水平线，从 D 点向左作水平线。

（7）在过 D 点的水平线上取 E 点，使$\omega_E=0.1\omega_c$。过 E 点作斜率为-20 的直线交 0dB 线于 F 点，计算ω_F后得到滞后超前网络的传递函数为

$$G_c(\mathrm{s})=\frac{\dfrac{s}{\omega_D}+1}{\dfrac{s}{\omega_C}+1}\cdot\frac{\dfrac{s}{\omega_E}+1}{\dfrac{s}{\omega_F}+1}$$

（6）校验。



例. 设单位反馈系统的开环传递函数为$G(s)=\dfrac{K}{s(\dfrac{s}{10}+1)(\dfrac{1}{60}+1)}$

设计校正装置，使校正后系统满足如下指标：

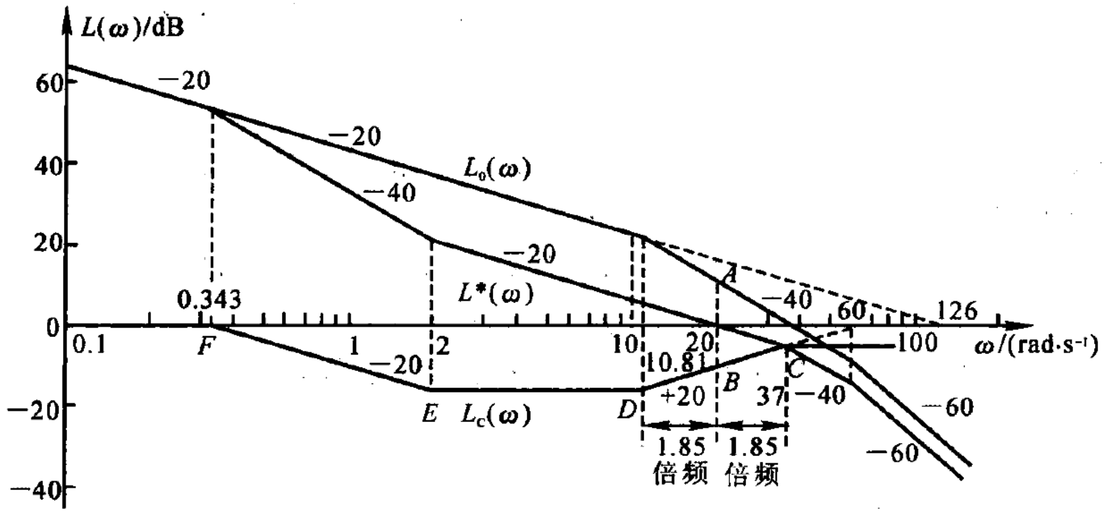
(1)当$r(t)=t, e_{ss}^{*}\le 1/126$;　　(2)开环系统截止频率$\omega_c \ge 20\,\mathrm{rad/s}$;

(3)相角裕度$\gamma^{*}\ge 35^{\circ}$。

解：(1) $\because e_{ss}^{*}=\lim\limits_{s\to 0} s\dfrac{K}{s(\dfrac{s}{10}+1)(\dfrac{1}{60}+1)}\le \dfrac{1}{126}, \therefore K\ge 126$,取$K$=126

(2) 绘制$L_0(\omega)$.

$$\left|\frac{126}{\omega_{c0}\times\dfrac{\omega_{c0}}{10}}\right|=1\Rightarrow \omega_{c0}=35.5$$



$$\gamma_0=180^{\circ}-90^{\circ}-\arctan\frac{35.5}{10}-\arctan\frac{35.5}{60}=-14.9^{\circ}$$

原系统不稳定，且在$\omega_c^{*}=20$处相角储备量为

$$\gamma_c(\omega_c^{*})=180^{\circ}-90^{\circ}-\arctan\frac{20}{10}-\arctan\frac{20}{60}=8.13^{\circ}$$

(3)选择截止频率$\omega_c=\omega_c^*=20$,则超前网络应提供的超前角为

$$\varphi_m=\gamma^*-\gamma_c(\omega_c^*)+6^\circ=35^\circ-8.13^\circ+6^\circ=32.87^\circ \qquad 则\ a=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}=3.4$$

在$\omega_c=20$处作垂线，交$L_0(\omega)$于A,过A关于0dB线的对称点B作斜率为+20的直线

在直线上找C和D点，使$\omega_C=\sqrt{a}\omega_c=37$, $\qquad \omega_D=\omega_c/\sqrt{a}=10.81$.

确定E点和F点，$\omega_E=0.1\omega_c^*=2$

欲确定ω_F，先确定B点的分贝值为：

$$-20\lg\left(\frac{126}{20\times\frac{20}{10}}\right)=-20\lg\left(\frac{126}{40}\right)$$

再确定E(D)点的分贝值:

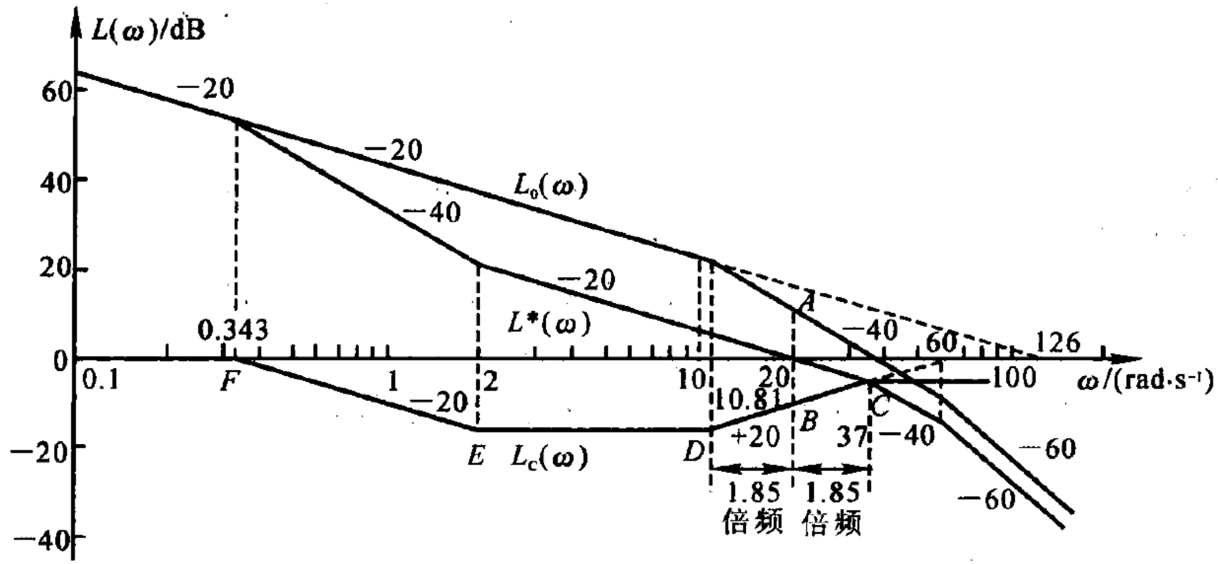
$$20(\lg10.81-\lg20)=X-\left(-20\lg\left(\frac{126}{40}\right)\right)$$

$$\Rightarrow X=20\lg0.1716$$

确定ω_F:

$$-20(\lg2-\lg\omega_F)=20\lg0.1716-0$$

$$\Rightarrow \omega_F=0.343$$

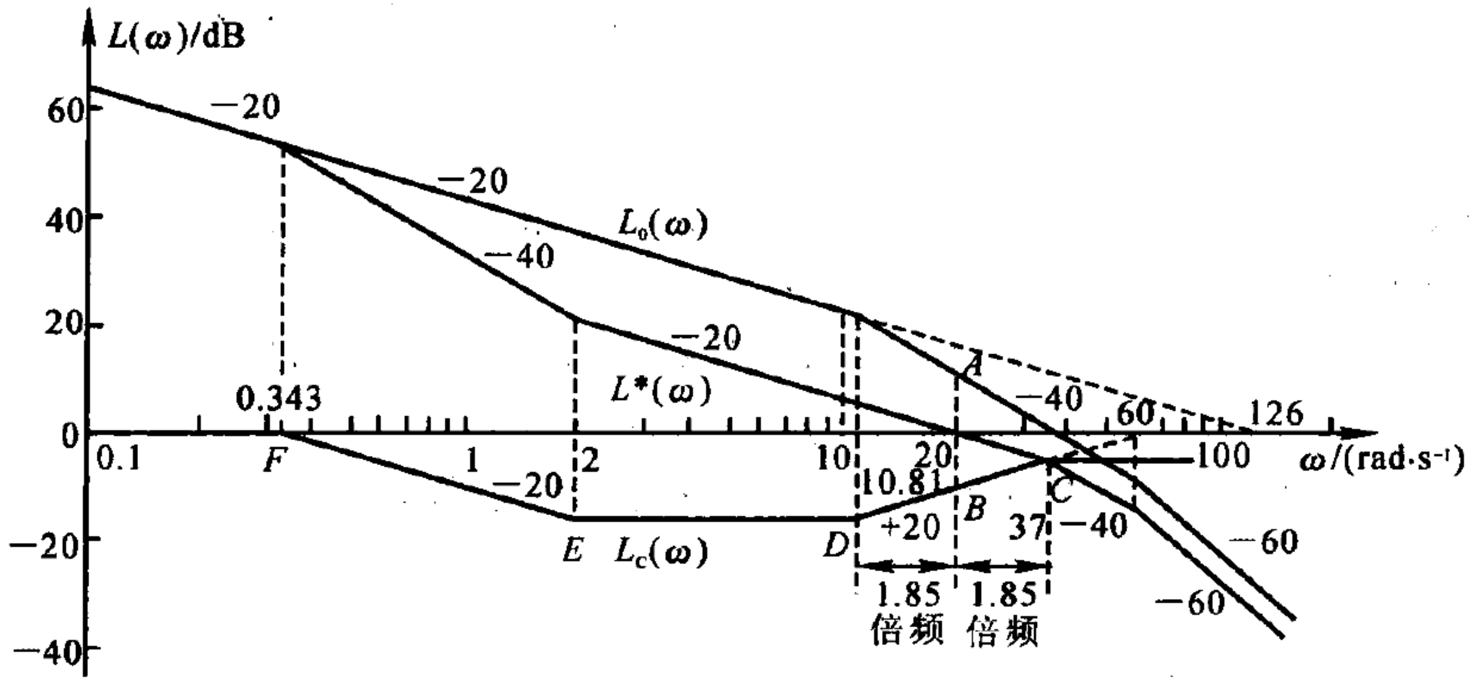


$\omega_C = 37 \qquad \omega_D = 10.81 \qquad \omega_E = 2 \qquad \omega_F = 0.343$

$$G_c(\mathrm{s}) = \frac{\dfrac{s}{10.81}+1}{\dfrac{s}{37}+1} \cdot \frac{\dfrac{s}{2}+1}{\dfrac{s}{0.343}+1}$$

（4）校验。 校正后系统的开环传函：$G(s)=G_c(s)G_0(s)=\dfrac{126\left(\dfrac{s}{10.81}+1\right)\left(\dfrac{s}{2}+1\right)}{s(\dfrac{s}{10}+1)(\dfrac{1}{60}+1)\left(\dfrac{s}{37}+1\right)\left(\dfrac{s}{0.343}+1\right)}$

校正后：$\omega_c = 20rad/s = \omega_c^* \qquad \gamma = 180^\circ + \angle G(\mathrm{j}\omega_c) = 36.6^\circ > 35^\circ = \gamma^*$



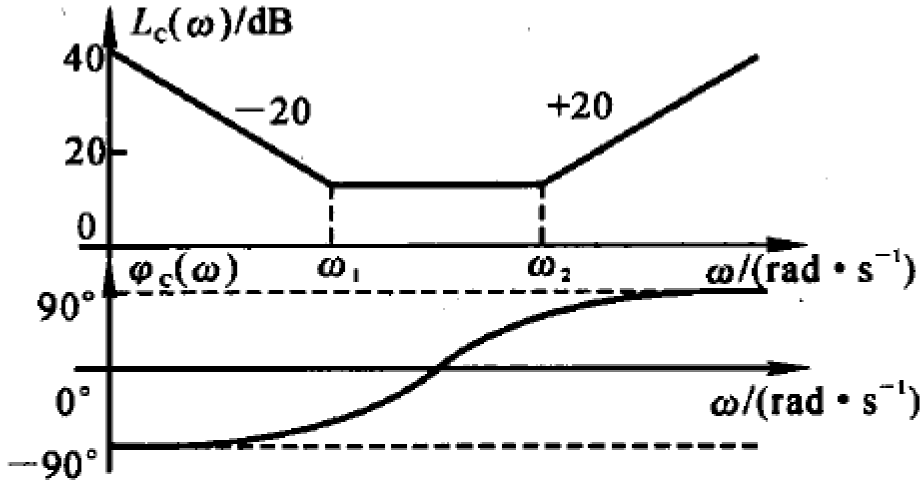
5.7.4 串联PID校正

- PID控制器的传递函数可写为

$$G_c(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

$$\Rightarrow G_c(s) = \frac{k_1(s+z_1)(s+z_2)}{s}$$

$$\Rightarrow G_c(s) = \frac{k_2(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{s}$$



特点：

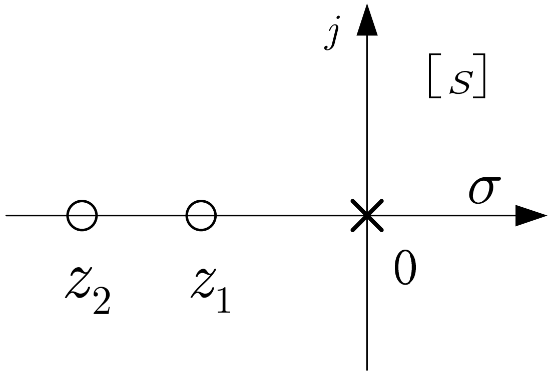
(1) 系统型别增加1，在低频段具有积分作用，能提高控制精度，但对增加相角裕度不利；

$$\int \sin\omega t dt = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t - 90^\circ)$$

(2)在高频段具有微分作用，相角超前，可改善动态性能，但不利于抑制高频输入噪声；

$$(\sin\omega t)' = \omega\sin(\omega t + 90^\circ)$$

如何扬长避短？

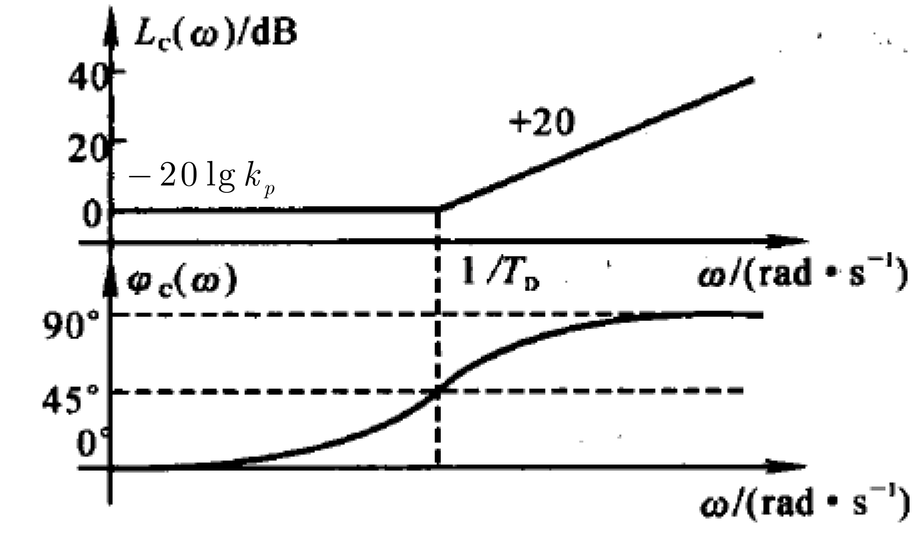


当$k_p, k_i, k_d > 0$且$k_p^2 > 4k_i k_d$时的零极点分布图

- PD控制器的传递函数

$$G_c(s)=k_p+k_d s=k_p(T_2 s+1)$$

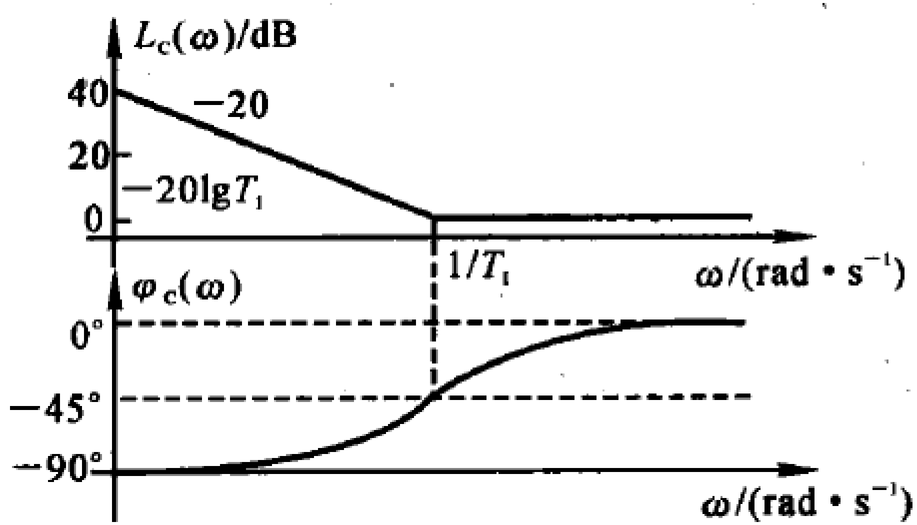
$$=k_p\times\underbrace{\frac{T_2 s+1}{\frac{1}{\infty}s+1}}_{\text{具有超前校正传递函数的结构}}$$



PD控制是第二转折频率为∞，且对数幅频特性被整体抬升$20\lg k_p$的特殊超前校正。

- PI控制器的传递函数

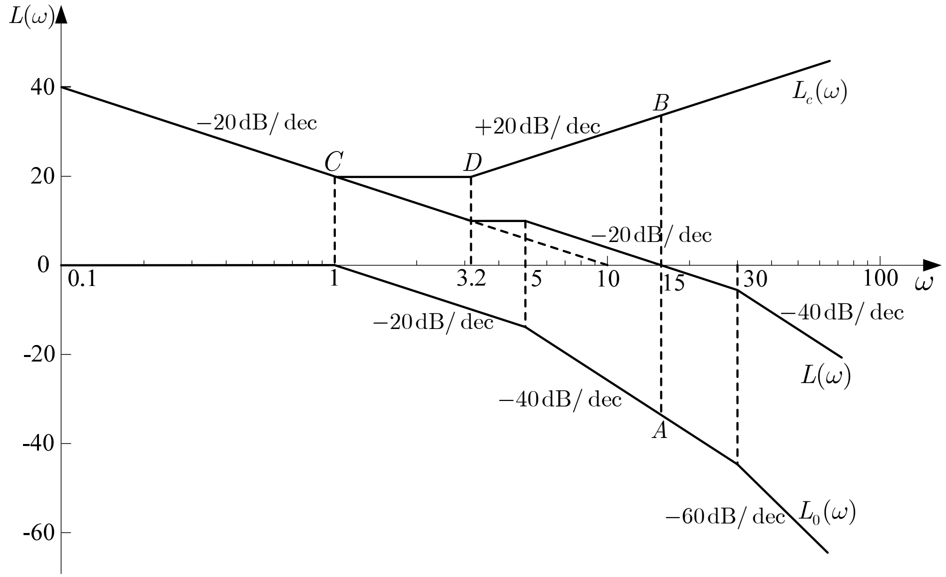
$$G_c(s)=k_p+\frac{k_i}{s}=\frac{k_i(T_1 s+1)}{s}$$



例 某单位反馈系统的开环传递函数

$$G_0(s)=\frac{K}{(s+1)(\frac{s}{5}+1)(\frac{s}{30}+1)}$$

试设计 PID 控制器，使系统的速度稳态误差 $e_{ssv}\le 0.1$，超调量 $\sigma\%\le 20\%$，调节时间 $t_s\le 0.5\mathrm{s}$。

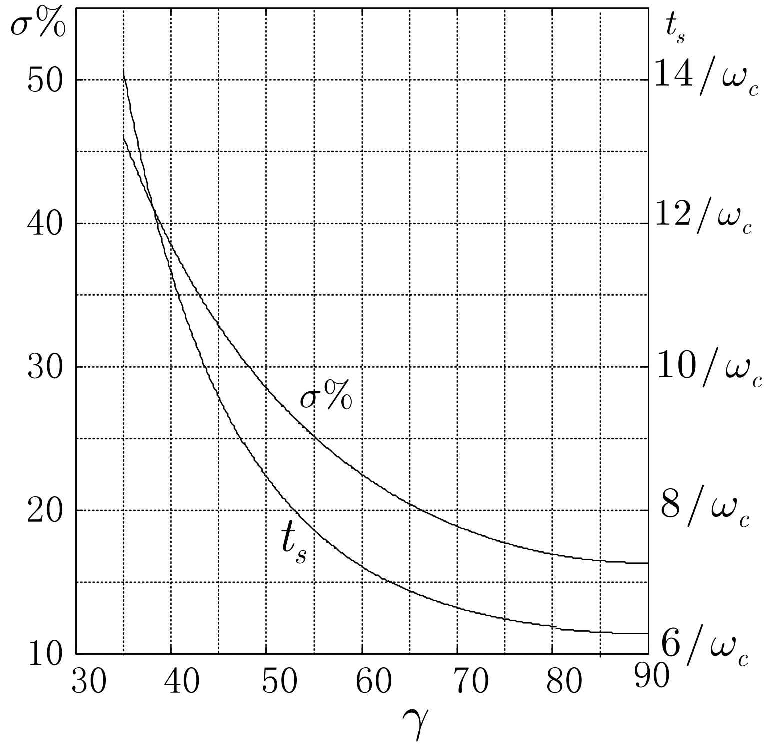


解：（1） $e_{ssv}=\frac{1}{K}\le\frac{1}{10}$,

$\therefore K\ge 10$, 取 $K=10$。

必须通过校正将系统的型别从 0 型提高到 1 型。将时域指标化为频域指标, 查图知

$$\begin{cases}\sigma\%\le 20\%\\ t_s\le 0.5\mathrm{s}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma^*\ge 67^\circ\\ \omega_c^*=6.8/t_s=6.8/0.5=13.6\end{cases}$$



（2）将 $K=10$ 放在校正装置中考虑. 绘制未校正系统开环增益为 1 时的伯德图 $L_0(\omega)$。

（3）取 $\omega_c=15$，在 ω_c 处作垂直线与 $L_0(\omega)$ 交于点 A，找其对称点 B，过点 B 作斜率为+20的直线。微分部分应提供的超前角应为

$$\begin{aligned}\varphi_m &= \gamma^* - \gamma(\omega_c) + 6^\circ \\ &= \gamma^* - \left(180^\circ - \arctan(15) - \arctan(\frac{15}{5}) - \arctan(\frac{15}{30})\right) + 6^\circ \\ &= 67^\circ + 4.3^\circ + 6^\circ = 77.3^\circ \approx 78^\circ\end{aligned}$$

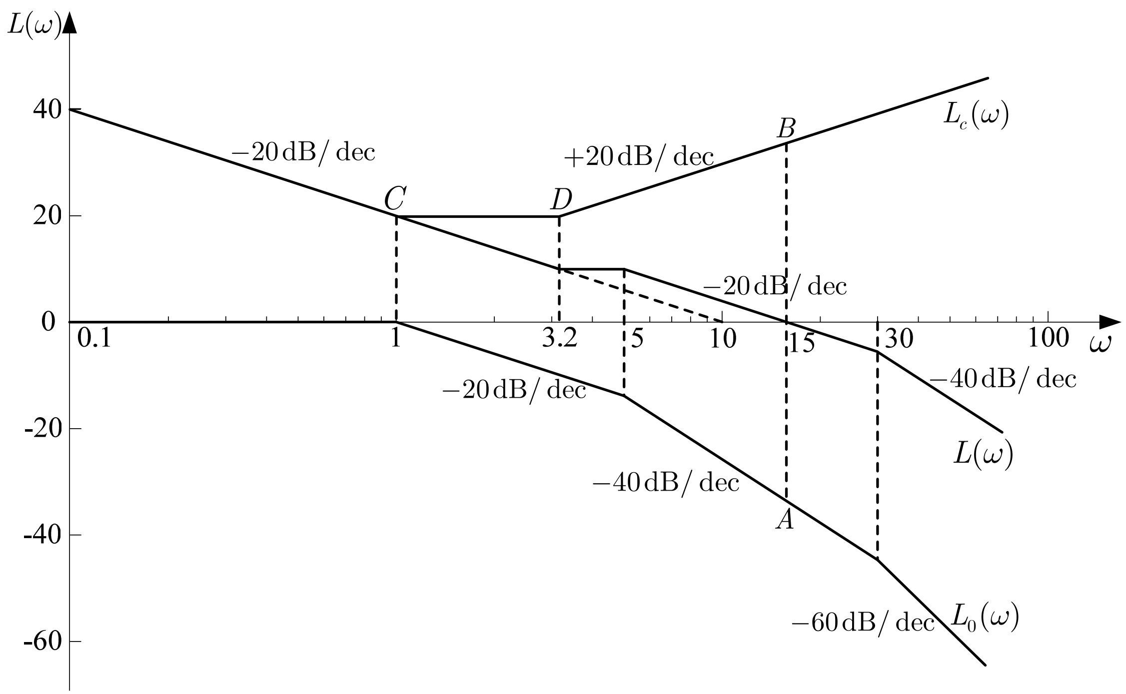
为什么要加6°

在斜率为 $+20\,\text{dB/dec}$ 的直线上确定点 D（对应频率 ω_D），使 $\arctan(\omega_c/\omega_D)=78^\circ$，得

$$\omega_D = \omega_c / \tan 78^\circ = 3.2$$

$$G_c(s) = \frac{k_2(\frac{j\omega}{\omega_c}+1)(\frac{j\omega}{\omega_D}+1)}{j\omega}$$

从点 D 向左引水平线。



绘制低频段渐近线（过点$(\omega=1,20\lg 10)$，斜率为-20），与经点D的水平线相交于点C，计算ω_C：

B 点的分贝值：$B_{dB}=-20\lg\left|\dfrac{1}{15\times\dfrac{15}{5}}\right|=20\lg 45$

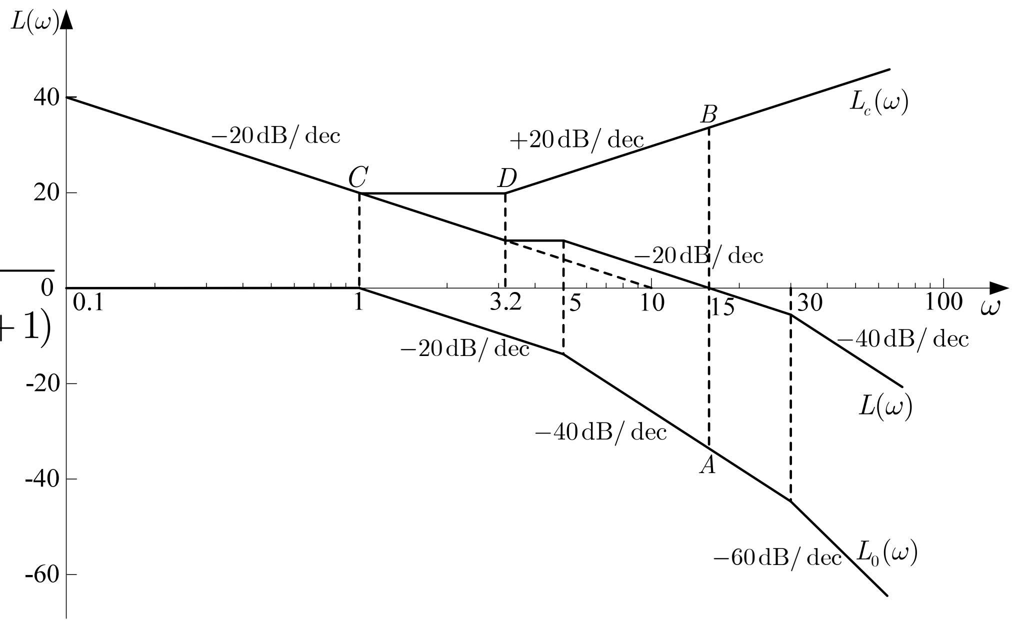
C 和 D 的分贝值：$20(\lg 3.2-\lg 15)=C_{dB}-20\lg 45 \quad\Rightarrow C_{dB}=20\lg\dfrac{3.2\times 45}{15}=20\lg 9.6$

ω_C：$20\lg\dfrac{K}{\omega_C}=20\lg\dfrac{10}{\omega_C}=20\lg 9.6\Rightarrow\omega_C=1.04$

$$G_c(s)=\frac{10(\frac{1}{1.04}s+1)(\frac{s}{3.2}+1)}{s}$$

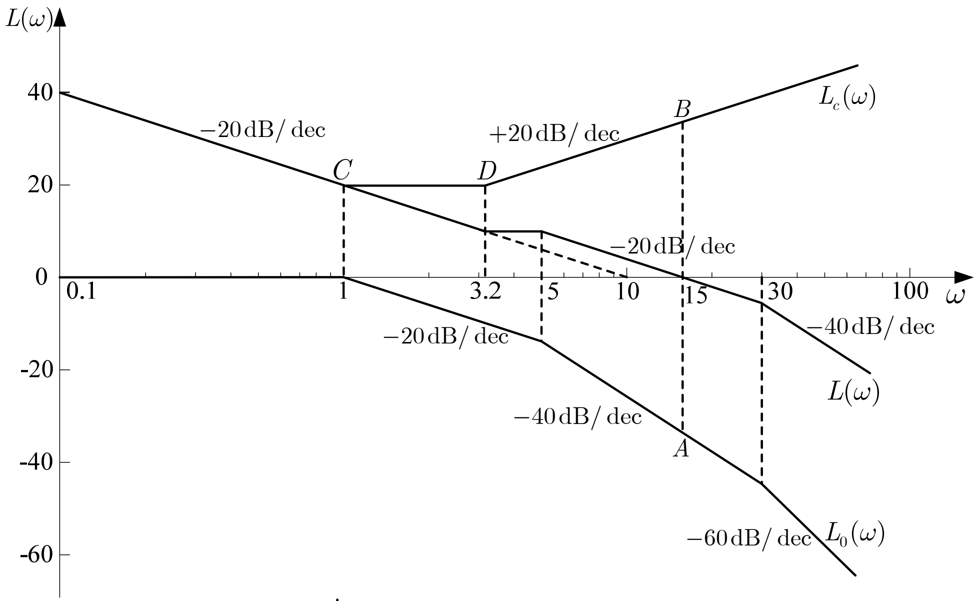
$$G(s)=\frac{10(\frac{1}{1.04}s+1)(\frac{s}{3.2}+1)}{s}\cdot\frac{1}{(s+1)(\frac{s}{5}+1)(\frac{s}{30}+1)}$$

$$\approx\frac{10(\frac{s}{3.2}+1)}{s(\frac{s}{5}+1)(\frac{s}{30}+1)}$$ （偶极子，零极对消）



校验

$$G(s)=\frac{10(\frac{s}{3.2}+1)}{s(\frac{s}{5}+1)(\frac{s}{30}+1)}$$



$$\omega_c=15$$

$$\gamma=180^\circ+\left[\arctan(\frac{\omega_c}{3.2})-90^\circ-\arctan(\frac{\omega_c}{5})-\arctan(\frac{\omega_c}{30})\right]\Bigg|_{\omega_c=15}$$

$$=69.8^\circ>67^\circ=\gamma^\circ$$

查图转化为时域指标：

$$\sigma\%=19\%<20\%$$

$$t_s=6.7/\omega_c=0.45<0.5s$$

满足要求。

频率法串联校正设计：一般只能用于最小相位系统；所要求的指标不能保证能达到；对能达到指标要求的系统，设计结果不唯一；指标如何提？抓住最关心的主要指标，适当放松次要的指标，给设计过程以折中的空间。

作业

5.14　5.17　（稳定判据）

5.27　5.31（稳定裕度）

5.36　5.42　5.45（校正）