加权残值法

引入加权残值法的原因:

①结构复杂很难列出泛函具体表达式

②或列出的泛函对应的欧拉方程（微分方程）很难直接从方程式求解

加权残值法求解问题的主导思想:

从微分方程及边界条件出发

将微分方程转化为积分方程，直接解积分方程

加权残值法：直接求解积分方程的近似计算方法

2.1 加权残值法的基本思想

①假设试函数和未知参数式为控制方程的近似解

②将其带入原控制方程

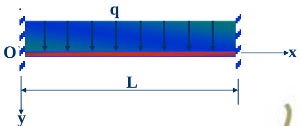
③此时不能满足原方程，必产生误差 → 残差

④通过将残差进行积分，令其在积分意义下等于零

得到一系列有关未知参数的代数方程

⑤通过求解方程求出未知参数，进而获得问题的解

举例说明



求右边所示梁的挠曲线方程

位移法

梁的微分方程式: $EI\dfrac{d^4v}{dx^4}-q=0$

边界条件: $x=0 \quad v(0)=0 \quad , \left.\dfrac{dv}{dx}\right|_{x=0}=0$

$x=l \quad v(l)=0 \quad , \left.\dfrac{dv}{dx}\right|_{x=l}=0$

设试函数:

$w(x)=Cx^2(l-x)^2$

C 待定未知参数

试函数的特点:

满足位移边界条件:

控制方程为梁的挠曲线方程: $EI\dfrac{d^4v}{dx^4}-q=0$

$w(x)=Cx^2(l-x)^2 \rightarrow EI\dfrac{d^4v}{dx^4}-q=0$

残值 $R=EI\dfrac{d^4w}{dx^4}-q \quad =24CEI-q$

在某种意义下让残值为最小:

如在最小二乘意义下残值为最小，得公式

$$\frac{\partial}{\partial C}\int_{\Omega}R^2d\Omega=0 \rightarrow \int_{\Omega}R\frac{\partial R}{\partial c}d\Omega=0 \rightarrow \int_0^l(24CEI-q)\times 24EIdx=0$$

得 $C=\dfrac{q}{24EI}$ $\qquad w(x)=\dfrac{q}{24EI}x^2(l-x)^2$

一般加权残值法的控制方程

①控制微分方程 —— 连续体的力平衡方程式

$L(u_0)-f=0$ 在Ω域内

②位移边界条件 $G(u_0)-g=0$ 在边界 S_u 上

③力边界条件 $S(u_0)-p=0$ 在边界 S_σ 上

其中: u_0 是问题的精确解

整个边界是 $S=S_u+S_\sigma$

f, g, p 为与 u_0 无关的给定的域内和边界上的量。

一般近似解的形式

$u=\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i$　　其中：a_i 是待定参数；

φ_i 试函数；　该试函数的设定，可以满足全部的边界条件、位移边界条件、或不满足任何边界条件。

一般残值的表达式

$$R_I = L(u)-f$$
$$R_u = G(u)-g$$
$$R_\sigma = S(u)-p$$

一般为了消残选取的权函数表达形式

消除结构域内部残值的权函数：W_I

消除边界残值的权函数：W_u　W_σ

一般消残公式

消除结构域内部残值的残值方程：

$$\int_\Omega W_I R_I d\Omega = 0$$

消除边界残值的残值方程：

$$\int_{S_u} W_u R_u ds + \int_{S_\sigma} W_\sigma R_\sigma ds = 0$$

构成含有待定参数 a_i 的代数方程组

2.2常用加权残值公式

1.按照试函数的选择分类：

根据试函数选取满足原问题条件的不同，上述公式可以具体写成以下形式：

①试函数满足所有边界条件但不满足域内控制方程

$$\int_\Omega (L(u)-f)\cdot W_I d\Omega = 0$$

②试函数满足域内控制方程、不满足所有边界条件

$$\int_{S_u} W_u[G(u)-g]ds + \int_{S_\sigma} W_\sigma[S(u)-p]ds = 0$$

③试函数不满足域内控制方程及位移边界条件

$$\int_\Omega (L(u)-f)\cdot W_I d\Omega + \int_{S_u} W_u[G(u)-g]ds = 0$$

④试函数不满足域内控制方程及力边界条件

$$\int_\Omega (L(u)-f)\cdot W_I d\Omega + \int_{S_\sigma} W_\sigma[S(u)-p]ds = 0$$

2.按照权函数选择分类

一般常用权函数

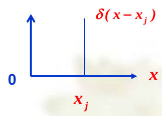
（1）狄拉克函数	配点法
（2）0-1函数	子域法
（3）最小二乘函数	最小二乘法
（4）试函数	迦辽金法
（5）幂级数	矩量法

①配点法

权函数的形式　$W_I = \underline{\underline{\delta(x-x_j)}}$　　δ 函数

δ 函数的主要性质：

1）$\delta(x-x_j) = \begin{cases} \infty & x = x_j \\ 0 & x \neq x_j \end{cases}$



2）$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_j)dx = 1$

3）$\int_a^b \delta(x-x_j)dx = \begin{cases} 1 & a < x_j < b \\ 0 & x_j > b \quad x_j < a \end{cases}$

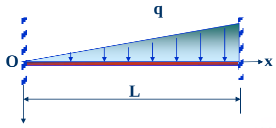
4） $\int_a^b f(x)\delta(x-x_j)dx = \begin{cases} f(x_j) & a<x_j<b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

配点法对应域内消残公式:

$$\int_\Omega R(x)W_l d\Omega = \int_\Omega R(x)\delta(x-x_j)dx = R(x_j)$$

物理意义：将力平衡条件放宽到仅在个别离散点上满足。

例题 试求左图所示梁挠曲线。



已知：边界条件为 $w(0)=w(l)=0$

$w'(0)=w'(l)=0$

设试函数 $V(x)=x^2(l-x)^2(a_1+a_2x)$

该试函数的特点：（1）满足边界条件。

（2）具有两个待定参数 a_1, a_2

梁的挠曲线方程式: $EI\dfrac{d^4W(x)}{dx^4}-\dfrac{q\,x}{l}=0$

加权残值法的公式: $\int_0^l\left[EI\dfrac{d^4V(x)}{dx^4}-\dfrac{qx}{l}\right]W_l dx=0$ ← $W_l=\delta(x-x_j)$

$$\int_0^l\left[EI\frac{d^4V(x)}{dx^4}-\frac{qx}{l}\right]\delta(x-x_j)dx=EI\frac{d^4V(x_j)}{dx^4}-\frac{qx_j}{l}=0$$

显然我们只需要在两点上满足残值公式，即可求出未知参数。

若取两点为: $x_1=0.5l$ $x_2=2/3l$ 代入方程得公式

$$12EI(2a_1+a_2l)-\frac{q}{2}=0$$
$$24EI(a_1+\frac{4}{3}a_2l)-2\frac{q}{3}=0$$
$\longrightarrow$ $a_1=\dfrac{q}{60EI}$ $a_2=\dfrac{q}{120EIl}$

梁的挠曲线方程式:

$V(x)=\dfrac{q}{60EI}x^2(x^2-2xl+l^2)\left(1+\dfrac{x}{2l}\right)$ $V\left(\dfrac{l}{2}\right)=1.305\times10^{-3}\dfrac{ql^4}{EI}$

解析法求解在中点处挠度的精确解:

$$V\left(\frac{l}{2}\right)=1.305\times10^{-3}\frac{ql^4}{EI}$$

②子域法

权函数形式: $W_l=\begin{cases}1 & \text{在域 } \Omega_i \text{ 内}\\ 0 & \text{在域 } \Omega_i \text{ 外}\end{cases}$

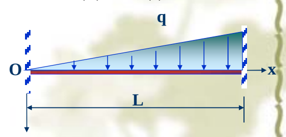
消残方程: $\int_{\Omega_i}R_l(x)\,d\Omega_i=0$ $i=1,2,3\cdots,n$

数学概念：将物体的连续域分成多个子域，保证试函数在各个子域上满足控制方程式的要求。可得到n个有待定参数a_i的代数方程，最后求解之。

例题：求解挠曲线方程 已知：边界条件为 $w(0)=w(l)=0$

$w'(0)=w'(l)=0$

完全域: $[0\ \ l]$



设试函数 $V(x)=x^2(l-x)^2(a_1+a_2x)$

待定参数2个，分两个子域列方程，

$\left[0\ \ \dfrac{l}{2}\right]$、$\left[\dfrac{l}{2}\ \ l\right]$

消残方程: $\int_0^l\left[EI\dfrac{d^4V(x)}{dx^4}-\dfrac{qx}{l}\right]W_l dx=0$ $V(x)=x^2(l-x)^2(a_1+a_2x)$

$\int_0^{\frac{l}{2}}R_l(x)dx=0$ $\int_{\frac{l}{2}}^{l}R_l(x)dx=0$ $R_l(x)=EI\dfrac{d^4V}{dx^4}-\dfrac{q}{l}x$

得:
$$12a_1-9a_2l-\frac{q}{8EI}=0$$
$$12a_1+21a_2l-\frac{3q}{8EI}=0$$
$\longrightarrow$ $a_1=\dfrac{q}{60EI}$ $a_2=\dfrac{q}{120EIl}$

子域法与配点法的区别及注意事项

①配点法在指定点满足控制方程；而子域法是在各个分域内满足控制方程

②注意子域法设定试函数时可以采用

全域可设定一个连续的试函数；
或者不同子域设定不同的试函数
但必须保证在子域公共边界上满足试函数连续条件。

③最小二乘法

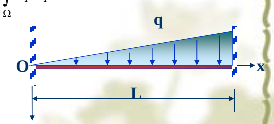
通过在域内对残值平方求积分，根据其达到平方意义下的最小条件获得权函数。

$I=\int_\Omega R_l^2 d\Omega$ $\xrightarrow{\text{极值条件}}$ $\dfrac{\partial I}{\partial C_i}=0$ $i=1,2,3\cdots,n$

C_i 为待定参数

消残方程: $\int_\Omega R_l\dfrac{\partial R_l}{\partial C_i}d\Omega=0 \longleftarrow \int_\Omega R_lW_l d\Omega=0$

权函数表达形式 $W_l=\dfrac{\partial R_l}{\partial C_i}$



例题：求解挠曲线方程

设试函数 $V(x)=x^2(l-x)^2(a_1+a_2x)$ 待定参数2个

$$R_l(x)=EI\frac{d^4v}{dx^4}-q(x)=24EI(a_1-2a_2l)+120EIa_2x-\frac{qx}{l}$$

$$W_I = \frac{\partial R_I}{\partial a_1} = 24EI$$

$$W_I = \frac{\partial R_I}{\partial a_2} = EI(120x\text{-}48l)$$

$$\int_0^l R_I \frac{\partial R_I}{\partial a_1} dx = 24a_1 + 12a_2 l - \frac{q}{2EI} = 0$$

$$\int_0^l R_I \frac{\partial R_I}{\partial a_2} dx = 18a_1 + 84a_2 l - \frac{q}{EI} = 0$$

$$\rightarrow \quad a_1 = \frac{q}{60EI} \qquad a_2 = \frac{q}{120EIl}$$

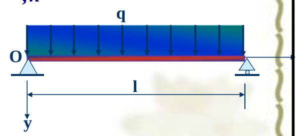
④迦辽金法

相当常用的一种方法。

近似解 $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \quad i = 1,2,\cdots,n$

权函数 $W_I = \varphi_i$

消残方程 $\int_\Omega R_I \varphi_i d\Omega = 0$



举例求挠曲线方程

设解为 $v(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin\frac{i\pi x}{l} \quad i = 1,2,\cdots,n$

$\varphi_i(x) = \sin\frac{i\pi x}{l} \quad i = 1,2,\cdots,n$　　满足力及位移边界条件

消残方程 $\int_0^l (EI\frac{d^4V}{dx^4} - q)\varphi_j = 0$

将下式代入得: $v(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin\frac{i\pi x}{l} \quad i = 1,2,\cdots,n$

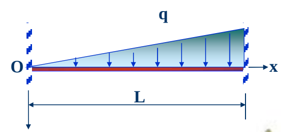
得: $\int_0^l \left[EI \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{i\pi}{l}\right)^4 \sin\frac{i\pi x}{l} - q \right] \sin\frac{j\pi x}{l} dx = 0$

$$a_j = \frac{4ql^4}{(j\pi)^5 EI}, \quad j = 1,3,5,\cdots$$

$$a_j = 0, \quad j = 2,4,6\cdots$$

$$v(x) = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^5} \sin\frac{j\pi x}{l}, \quad j = 1,3,5,\cdots$$

⑤　矩量法



权函数形式为幂指数。

一维: $W_I = x^0, x^1 \cdots x^{n\text{-}1}$

二维: $W_I = x^0, y^0, x^1, y^1 \cdots x^{n\text{-}1}, y^{n\text{-}1}$

一维指数的消残方程 $\int_\Omega R_I x^i d\Omega = 0 \quad i\text{=}0,1,\cdots,n\text{-}1$

例题: 求解挠曲线方程

设试函数 $V(x) = x^2(l-x)^2(a_1 + a_2 x)$　待定参数2个

$$R_I(x) = EI\frac{d^4v}{dx^4} - q(x) = 24EI(a_1 - 2a_2 l) + 120EIa_2 x - \frac{qx}{l}$$

此时需要两个求解参数方程，需要用一维中前2阶指数

$$R_I(x) = EI\frac{d^4v}{dx^4} - q(x) = 24EI(a_1 - 2a_2 l) + 120EIa_2 x - \frac{qx}{l}$$

$W_I = 1 \qquad W_I = x$

消残方程式 $\int_0^l R_I dx = 0$

$\int_0^l R_I x dx = 0$

$$\int_0^l \left[EI\frac{d^4v}{dx^4} - q(x) \right] dx = \int_0^l \left[24EI(a_1 - 2a_2 l) + 120EIa_2 x - \frac{qx}{l} \right] dx = 0$$

$$\int_0^l \left[24EI(a_1 - 2a_2 l)x + 120EIa_2 x^2 - \frac{qx^2}{l} \right] dx = 0$$

$$a_1 = \frac{q}{60EI} \qquad a_2 = \frac{q}{120EIl}$$

显然设定的试函数对计算会产生很大影响

①影响精度

②积分计算的难易程度

2.4一般常用试函数

(1) 多项式。以幂级数形式表示的单重或双重的幂级数;

(2) 正交多项式。切贝雪夫多项式，勒让德多项式等。

(3) 三角级数;

(4) 样条函数;

(5) 梁函数; 直梁自由振动的振型

(6) 柱稳定函数;
(7) 贝塞尔函数;
(8) 克雷诺夫函数。

1、梁振动函数

$$\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\overline{m}}{EJ}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

设梁做简谐振动，其位移方程为：$w = X(x)\sin\omega t$

ω 为梁振动 频率，X 为梁振动的阵型函数

对于第k个振型，有

$$X_k(x) = C_{1k}\sin\lambda_k x + C_{2k}\cos\lambda_k x + C_{3k}sh\lambda_k x + C_{4k}ch\lambda_k x$$

对于简支梁：

$$\lambda_k = k\pi / l \quad (k = 0,1,\ldots\infty)$$

用梁函数做试函数的优点是，它能满足两端支撑的各种情况，如两端固定、两端铰支等边界条件。

2.5加权残值法在薄板问题上的应用

薄板弯曲的基本方程及边界条件:

力的平衡条件:

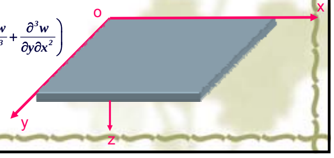
$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = q(x,y) \qquad D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$D\nabla^2\nabla^2 w = q(x,y) \qquad \nabla^2\nabla^2(\ ) = \frac{\partial^4(\ )}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4(\ )}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4(\ )}{\partial y^4}$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{xy} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$N_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) \quad N_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right)$$



边界条件:

①板自由支持在刚性周界上（简支边）

$$x=0, x=a \quad w=0, \quad -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$y=0, y=b \quad w=0, \quad -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0$$

②固定边:

$$x=0, x=a \quad w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$y=0, y=b \quad w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

单位长度上等效合力

$$r_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + N_y$$

$$r_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + N_x$$

③自由边:

$$M_x = 0 \quad r_x = 0 \qquad M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad r_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) = 0,$$

$$M_y = 0 \quad r_y = 0 \qquad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad r_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right) = 0,$$

最小二乘配点法解薄板弯曲问题

①无量纲化

对结构的长度量纲进行无量纲操作

对力的量纲进行无量纲操作

无量纲化后的物理量:

挠度 $\overline{w} = \frac{w}{a_0}$ 坐标 $\overline{x} = \frac{x}{a_0}$; $\overline{y} = \frac{y}{a_0}$

分布载荷: $\overline{q} = \frac{q}{q_0}$

②选取试函数 → 无量纲的试函数

$$\overline{w} = \sum_{m=0}^{r}\sum_{n=0}^{s} C_{mn}\overline{x}^m\overline{y}^n$$

试函数的特点：不满足内部里的平衡条件、也不满足边界条件.

无量纲参量下的内部力的平衡条件

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) - q = 0 \qquad \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) - \frac{q}{D} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \overline{w}'}{\partial \overline{x}}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{w}'}{\partial \overline{x}}\right) = \frac{\partial}{a_0 \partial \overline{x}}\left(\frac{\partial \overline{w}'}{\partial \overline{x}}\right) = \frac{1}{a_0}\left(\frac{\partial^2 \overline{w}'}{\partial \overline{x}^2}\right)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 \overline{w}'}{a_0^3 \partial \overline{x}^4}; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 \overline{w}'}{a_0^3 \partial \overline{y}^4}; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 \overline{w}'}{a_0^3 \partial \overline{x}^2 \partial \overline{y}^2}; \qquad q = \overline{q}q_0$$

$$\left(\frac{\partial^4 \overline{w}'}{\partial \overline{x}^4} + 2\frac{\partial^4 \overline{w}'}{\partial \overline{x}^2 \partial \overline{y}^2} + \frac{\partial^4 \overline{w}'}{\partial \overline{y}^4}\right) - \overline{q}q_0\frac{a_0^3}{D} = 0$$

$$\overline{w}' = \overline{w} = \sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{s} C_{mn}\overline{x}^m\overline{y}^n$$

内部残值

$$R_I = \left(\frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \overline{x}^4} + 2\frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \overline{x}^2 \partial \overline{y}^2} + \frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \overline{y}^4}\right) - \overline{q}q_0\frac{a_0^3}{D}$$

边界残值:

①简支边

$$x=0, x=a \quad w=0, \quad -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$y=0, y=b \quad w=0, \quad -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0$$

⇨ 无量纲形式

$$\overline{w}' = 0; \quad 0 = \overline{M}_x = -\left(\frac{\partial^2 \overline{w}'}{\partial \overline{x}^2} + \mu\frac{\partial^2 \overline{w}'}{\partial \overline{y}^2}\right)$$

$$0 = \overline{M}_y = -\left(\frac{\partial^2 \overline{w}'}{\partial \overline{y}^2} + \mu\frac{\partial^2 \overline{w}'}{\partial \overline{x}^2}\right)$$

边界残值

$$R_{B1} = \overline{w}; \quad R_{B2} = \overline{M}_x = -\left(\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{x}^2} + \mu\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{y}^2}\right)$$

$$R_{B3} = \overline{M}_y = -\left(\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{y}^2} + \mu\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{x}^2}\right)$$

②固定边:

$$w=0,\quad \frac{\partial w}{\partial x}=0$$

$$w=0,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=0$$

边界残值:

$$R_{B1}=\overline{w};\quad R_{B4}=\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{x}};\quad R_{B5}=\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{y}}$$

③自由边:

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0 \qquad r_x=-D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)=0,$$

$$M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0 \qquad r_y=-D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right)=0,$$

边界残值:

$$R_{B2}=\overline{M}_x=-\left(\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{x}^2}+\mu\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{y}^2}\right) \qquad R_{B6}=\overline{r}_x=-\left(\frac{\partial^3 \overline{w}}{\partial \overline{x}^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 \overline{w}}{\partial \overline{x}\partial \overline{y}^2}\right)$$

$$R_{B3}=\overline{M}_y=-\left(\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{y}^2}+\mu\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{x}^2}\right) \qquad R_{B7}=\overline{r}_y=-\left(\frac{\partial^3 \overline{w}}{\partial \overline{y}^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 \overline{w}}{\partial \overline{y}\partial \overline{x}^2}\right)$$

内部残值

$$R_I=\left(\frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \overline{x}^4}+2\frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \overline{x}^2\partial \overline{y}^2}+\frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \overline{y}^4}\right)-\overline{q}q_0\frac{a^3_0}{D}$$

边界残值:

$$R_{B1}=\overline{w};\quad R_{B2}=\overline{M}_x=\frac{a_0M_x}{D}=-\left(\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{x}^2}+\mu\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{y}^2}\right)$$

$$R_{B3}=\overline{M}_y=\frac{a_0M_y}{D}=-\left(\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{y}^2}+\mu\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{x}^2}\right)$$

$$R_{B4}=\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{x}};\quad R_{B5}=\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{y}}$$

$$R_{B6}=\overline{r}_x=\frac{a^2{}_0r_x}{D}=-\left(\frac{\partial^3 \overline{w}}{\partial \overline{x}^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 \overline{w}}{\partial \overline{x}\partial \overline{y}^2}\right)$$

$$R_{B7}=\overline{r}_y=\frac{a^2{}_0r_y}{D}=-\left(\frac{\partial^3 \overline{w}}{\partial \overline{y}^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 \overline{w}}{\partial \overline{y}\partial \overline{x}^2}\right)$$

最小二乘配点法板的弯曲问题

①配点的个数

配点个数与选定的试函数含有的待定参数的个数相等

②配点的位置

在板的内部选择一定数目的配点，将其坐标代入内部残值式;

在板的边上也选一定的点，将其坐标代入边界残值式;

③对残值式进行整理形成矩阵表达的残值公式

$$[R]=[A][C]-[b]$$

④求残值R平方和的最小值，得求解待定参数的矩阵方程:

极值条件 $\dfrac{\partial I_d}{\partial C_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$

最小二乘法：通过对残值平方求积分，根据其达到平方意义下的最小条件获得权函数。

最小二乘配点法求解时需要进行以下工作:

（1）计算中的无量纲化问题

（2）试函数的选取问题，试函数满足微分方程及边界条件的情况

（3）控制方程的确定

（4）配点的选取

（5）控制方程的矩阵表达形式

（6）具体求解计算

当选择的试函数满足力的平衡条件或边界条件时，矩阵阶数可降低减少计算的工作量。

2.6 最小二乘混合配点法的应用

在求解板的弯曲问题时，往往很难获得解析解. 近年来，由于电子计算机的发展，数值计算（如最小二乘法、配点法等）广为采用. 但在计算中常被选取合适的试函数所困扰.

最小二乘混合配点法，该法在选择板挠度的试函数时，既不要求试函数完全满足板挠曲面的控制微分方程，也不要求满足全部边界条件，而是通过在域内及边界面上的配点的残值方程组，按照最小二乘法的极值原理得出确定待定参数的方程组，求解这些方程组，从而得出既满足域内基本方程又满足边界条件的解.

控制微分方程及边界条件分别为

$$Fu-f=0 \qquad (\text{区域}\ V\ \text{内}) \qquad (1)$$

$$G_tu-g_t=0 \qquad (\text{边界面}\ S\ \text{上}) \qquad (2)$$

式中, u 是待求函数, F 及 G_t 为微分算子, t 是边界

将配点坐标代入区域 V 及边界面 S 上, 所形成的残值平方之和式为

$$I_d(c,x,y)=\sum_{i=1}^{k}R_{\mathrm{I}i}^2(c,x,y)+\sum_{t=k+1}^{m}W_t^2R_{\mathrm{B}t}^2(c,x,y)$$

式中, $R_{\mathrm{I}i}(c,x,y)$ 为内部区域 V 中的残值, $R_{\mathrm{B}}(c,x,y)$ 为边界面 S 上的残值, W_t 为权函数, 一般取为 1. 为使残值平方之和 I_d 为最小, 先列出经配点法后得出的残值方程组:

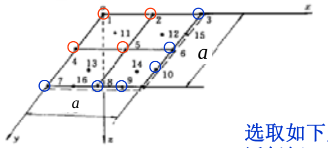
$$\begin{Bmatrix} R_I(c,x_1,y_1) \\ \vdots \\ R_I(c,x_k,y_k) \\ \vdots \\ WR_B(c,x_{k+1},y_{k+1}) \\ \vdots \\ WR_B(c,x_m,y_m) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F\tilde{u}(c,x_1,y_1) - f(x_1,y_1) \\ \vdots \\ F\tilde{u}(c,x_k,y_k) - f(x_k,y_k) \\ \vdots \\ W[G\tilde{u}(c,x_{k+1},y_{k+1}) - g(x_{k+1},y_{k+1})] \\ \vdots \\ W[G\tilde{u}(c,x_m,y_m) - g(x_m,y_m)] \end{Bmatrix} \quad (4)$$

如用矩阵表示(4)式，则可写为

$$R = AC - B \quad (5)$$

算例：简支矩形薄板的弯曲问题

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = q(x,y) \qquad D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$$



四边简支，受均布载荷

选取如下形式的试函数作为板挠度的近似解：

$$\tilde{w} = \sum_{m=0}^{r} A_m x^m + \sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{s} C_{mn} x^m y^n + \sum_{n=0}^{s} B_n y^n \quad (12)$$

由边界上的6 个配点及边界面上的边界条件可得12 个边界残值，由区域内部的4个配点可得4个内部残值，故取试函数为16 项，即

$$R_{16\times1} = A_{16\times16} C_{16\times1} - B$$

$$\tilde{w} = \sum_{m=0}^{r} A_m x^m + \sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{s} C_{mn} x^m y^n + \sum_{n=0}^{s} B_n y^n \quad (12)$$

$r = 3, s = 3$

$$\tilde{w} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 xy + C_5 xy^2 + C_6 xy^3 + C_7 x^2 y + C_8 x^2 y^2 + C_9 x^2 y^3 + C_{10} x^3 y + C_{11} x^3 y^2 + C_{12} x^3 y^3 + C_{13} y + C_{14} y^2 + C_{15} y^3 \quad (13)$$

板内部区域及边界面上的无量纲化残值分别为：

内部：$R_I = 8C_8 + 24\bar{y}C_9 + 24\bar{x}C_{11} + 72\bar{x}\bar{y}C_{12} - \frac{qa^3}{D}$ （14）

位移边界：$R_{B1} = \bar{w}$ (15)

力边界

$$R_{B2} = 2C_2 + 6\bar{x}C_3 + 2\bar{y}C_7 + 2C_8\bar{y}^2 + 2C_9\bar{y}^3 + 6C_{10}\bar{x}\bar{y} + 6C_{11}\bar{x}\bar{y}^2 + 6C_{12}\bar{x}\bar{y}^3 \quad (16)$$

$$R_{B3} = 2C_5\bar{x} + 6C_6\bar{x}\bar{y} + 2C_8\bar{x}^2 + 6C_9\bar{x}^2\bar{y} + 2C_{11}\bar{x}^3 + 6C_{12}\bar{x}^3\bar{y} + 2C_{14} + 6C_{15}\bar{y} \quad (17)$$

再将各配点坐标代入相应的残值方程，便得如下残值形式：

$$R_{I1} = 8C_8 - \frac{qa^3}{D}$$

$$R_{I2} = 8C_8 + 12C_{11} - \frac{qa^3}{D}$$

$$R_{I4} = 8C_8 + 12C_9 - \frac{qa^3}{D}$$

$$R_{I5} = 8C_8 + 12C_9 + 12C_{11} + 18C_{12} - \frac{qa^3}{D}$$

内部力平衡

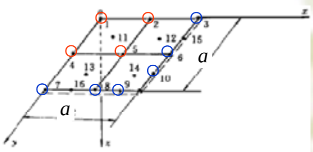
（4项 $R_{I1} - R_{I4}$）

边界弯矩

（6项 $R_{B5} - R_{B10}$ ）

（3，6，10）

（7，8，9）



$$\bar{w}_3 = C_0 + C_1 + C_2 + C_3$$

$$\bar{w}_6 = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + 0.5C_4 + 0.25C_5 + 0.125C_6 + 0.5C_7 + 0.25C_8 + 0.125C_9 + 0.5C_{10} + 0.25C_{11} + 0.125C_{12} + 0.5C_{13} + 0.25C_{14} + 0.125C_{15}$$

$$\bar{w}_{10} = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + 0.75C_4 + 0.5625C_5 + 0.4219C_6 + 0.75C_7 + 0.5625C_8 + 0.4219C_9 + 0.75C_{10} + 0.5625C_{11} + 0.4219C_{12} + 0.75C_{13} + 0.5625C_{14} + 0.4219C_{15}$$

$$\bar{w}_7 = C_0 + C_{13} + C_{14} + C_{15}$$

$$\bar{w}_8 = C_0 + 0.5C_1 + 0.25C_2 + 0.125C_3 + 0.5C_4 + 0.5C_5 + 0.5C_6 + 0.25C_7 + 0.25C_8 + 0.25C_9 + 0.125C_{10} + 0.125C_{11} + 0.125C_{12} + C_{13} + C_{14} + C_{15}$$

$$\bar{w}_9 = C_0 + 0.75C_1 + 0.5625C_2 + 0.4219C_3 + 0.75C_4 + 0.75C_5 + 0.75C_6 + 0.5625C_7 + 0.5625C_8 + 0.5625C_9 + 0.4219C_{10} + 0.4219C_{11} + 0.4219C_{12} + C_{13} + C_{14} + C_{15}$$

边界位移

（6项 $R_{B11} - R_{B16}$ ）

$$R_{16\times1} = A_{16\times16}C_{16\times1} - B$$

$$A^{T}AC = A^{T}B \tag{9}$$

经编程微机计算得出板的挠度与弯矩值，如表1 .

表 1 经典解与本文解的挠度值和弯矩值(配点数未增加前)

点号	$w/(qa^4/D)$		M_x/qa^2		M_y/qa^2	
	本文解	经典解	本文解	经典解	本文解	经典解
1	0.004939	0.00406	0.04634	0.0479	0.04634	0.0479
2	0.002843	0.00287	0.03329	0.0338	0.03527	0.0369
4	0.002843	0.00287	0.03327	0.0338	0.03229	0.0338
5	0.002027	0.00204	0.02593	0.0261	0.02593	0.0321

表 2 经典解与本文解的挠度值和弯矩值(配点数增加一倍)

点号	$w/(qa^4/D)$		M_x/qa^2		M_y/qa^2	
	本文解	经典解	本文解	经典解	本文解	经典解
1	0.004057	0.00406	0.04783	0.0479	0.04783	0.0479
2	0.002871	0.00287	0.03383	0.0338	0.03681	0.0369
4	0.002871	0.00287	0.03679	0.0369	0.03387	0.0338
5	0.002031	0.00204	0.03193	0.0321	0.03193	0.0321
11	0.003465	0.00347	0.04082	0.0416	0.04038	0.0416
12	0.001436	0.00146	0.01691	0.0171	0.01235	0.0124
13	0.001435	0.00146	0.02089	0.0209	0.02745	0.0275
14	0.000594	0.00060	0.00694	0.0071	0.00694	0.0071