《粘性流体力学》第一次作业

西北工业大学　航空学院　2017级本科生　冯锛浩　学号：2017300281

Question 1：

推导连续性方程，并给出不可压缩流动的连续性方程。

解，方法① —— 通过对微控制体分析推导连续性方程：

根据质量守恒定律：

设 A 为在单位时间内从无穷小流体微团流出的质量流量；

B 为无穷小流体微团内部的质量时间变化率（减小率）；

故有 $A = B$ 成立

取一个固定于空间的无穷小六面体流体微元，如图1所示，并分析进出该微控制体的质量流量。

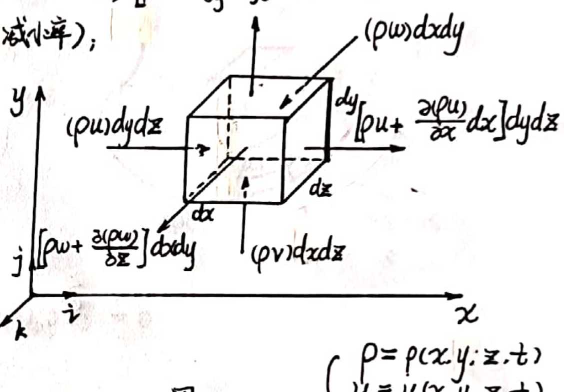


图1

$$\begin{cases} \rho=\rho(x,y,z,t) \\ u=u(x,y,z,t) \\ v=v(x,y,z,t) \\ w=w(x,y,z,t) \end{cases}$$

则有：

$$\Delta \dot{m}_{out,x} = \dot{m}_{right} - \dot{m}_{left} = \left[\rho u+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right]dydz-(\rho u)dydz = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dxdydz$$

同理有：$\Delta \dot{m}_{out,y} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dxdydz$；$\Delta \dot{m}_{out,z} = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dxdydz$

故 $A = \Delta\dot{m}_{out} = \Delta\dot{m}_{out,x}+\Delta\dot{m}_{out,y}+\Delta\dot{m}_{out,z} = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]dxdydz$

又 $B = -\Delta\dot{m} = -\frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}dxdydz$

由 $A=B$ 可得：

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]dxdydz = -\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydz$$

整理后可得：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]=0 \quad (1)$$

或写成矢量形式：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V})=0 \quad (2)$$

展开上式(2)有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V}) = \frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho(\nabla\cdot\vec{V})+(\vec{V}\cdot\nabla)\rho = \frac{D\rho}{Dt}+\rho(\nabla\cdot\vec{V})$$

故连续性方程可写成实质导数形式：

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\cdot(\nabla\cdot\vec{V})=0 \quad (3)$$

对于不可压缩流动，$\rho=const$，$\frac{D\rho}{Dt}=0$，代入上式(3)可得：

$$\nabla\cdot\vec{V}=0 \quad (4)$$

或写成分量形式：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad (5)$$

∴ 推导完毕。

对于牛顿流体，剪切应力与应变速率成正比。

方法② —— 利用张量运算严格数学推导连续性方程：

推导引理1) [Leibniz定理]

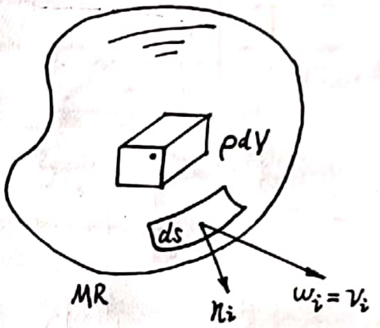
$$\frac{d}{dt}\int_{R(t)} T_{ij\ldots}(x_i,t)\,dV = \int_R \frac{\partial T_{ij\ldots}}{\partial t}dV + \int_S n_k w_k T_{ij\ldots}\,dS$$

其中：$T_{ij\ldots}$ 可以为任一标量、向量或张量。

推导引理2) [Gauss定理]

$$\int_R \partial_i(T_{jk\ldots})\,dV = \int_S n_i T_{jk\ldots}\,dS$$

其中：$T_{ij\ldots}$ 可以为任一标量、向量或张量。



前提：流体介质满足连续性假设；

物理原理：流体运动满足质量守恒定律，即

$$\frac{dM_{MR}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{MR}\rho\,dV = 0$$

由Leibniz定理：

$$\frac{d}{dt}\int_{MR}\rho\,dV = \int_{MR}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV + \int_{MR} n_i v_i \rho\,dS = 0$$

又由Gauss定理

$$\int_{MR} n_i v_i \rho\,dS = \int_{MR}\partial_i(\rho v_i)\,dV$$

由上两式可得：

$$\int_{MR}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV + \int_{MR}\partial_i(\rho v_i)\,dV = 0$$

因MR的任意性可知：

张量形式连续性方程为：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \partial_i(\rho v_i) = 0 \tag{6}$$

也可写成矢量形式：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}) = 0 \tag{7}$$

同方法①变形，可得到实质导数表达形式

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\cdot(\nabla\cdot\vec{V}) = 0 \tag{8}$$

又对于不可压缩流动，$\rho = const$，$\frac{D\rho}{Dt} = 0$，代入上式可得：

$$\nabla\cdot\vec{V} = 0 \tag{9}$$

或写成分量形式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{10}$$

∴ 推导完毕。

Question 2：

推导动量方程，并给出不可压缩流动的动量方程。

解：方法① —— 通过对微控制体分析推导动量方程：

根据牛顿第二定律：

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

首先考虑在 x 方向上的动量方程，有

$$F_x = m a_x$$

取一个固定于空间的无穷小六面体流体微团，一方面，如图2所示，考虑该流体微团在 x 方向上受力。

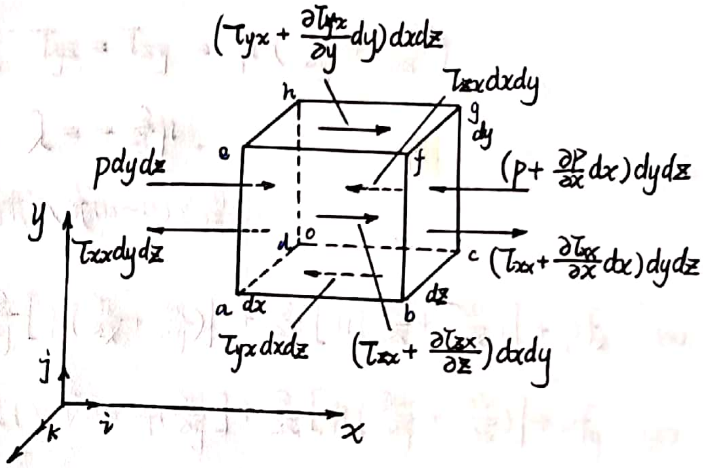


图2 流体微团 x 方向受力分析图(表面力)

由两部分构成： $F_x = F_{x,surface} + F_{x,body}$

第一部分为流体微团所受表面力：(x方向)

$$F_{x,surface} = [pdydz - (p+\frac{\partial p}{\partial x}dx)dydz] + [(\tau_{xx}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}dx)dydz - \tau_{xx}dydz] + [(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy)dxdz - \tau_{yx}dxdz] + [(\tau_{zx}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz)dxdy - \tau_{zx}dxdy] = \left(-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz$$

设 ρ 为流体密度，f_x 是作用在流体微团 x 方向上的单位质量体积力。

则第二部分为流体微团所受体积力：(x方向)

$$F_{x,body} = \rho f_x dxdydz$$

故流体微团在 x 方向上所受合外力为：

$$F_x = F_{x,surface} + F_{x,body} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz + \rho f_x dxdydz$$

另一方面，由流体微团质量 $m = \rho dxdydz$，$a_x = \frac{Du}{Dt}$

故可得到对于粘性流体的 x 方向动量方程：

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\rho f_x \quad (1)$$

类似地，可得到 y, z 方向的动量方程

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+\rho f_y \quad (2)$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}+\rho f_z \quad (3)$$

引入有关应力与应变率之间的关系，即本构关系如下：

对于二维牛顿流体，满足

$$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y}$$

其中 μ 为分子粘性系数。

对于牛顿流体，剪切应力与应变速率成正比。

对于牛顿流体，在三维情况下，有本构关系（Stokes，1845）

$$\begin{cases} \tau_{xx} = \lambda(\nabla\cdot\vec{V}) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yy} = \lambda(\nabla\cdot\vec{V}) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{zz} = \lambda(\nabla\cdot\vec{V}) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \end{cases}$$

其中，λ 为第二粘性系数，Stokes 假设有 $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$.

若流动可压缩且为牛顿流体，则将本构关系式代入式(1)~(3)可得：

$$\begin{cases} \rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(\nabla\cdot\vec{V}) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \rho f_x & (4) \\ \rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(\nabla\cdot\vec{V}) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] + \rho f_y & (5) \\ \rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(\nabla\cdot\vec{V}) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right] + \rho f_z & (6) \end{cases}$$

代入关系式 $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$，可简化为矢量形式 Navier-Stokes 方程.

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{V} + \frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\nabla(\nabla\cdot\vec{V}) \qquad (7)$$

若流动不可压缩且为牛顿流体，由连续方程可知

$$\nabla\cdot\vec{V} = 0$$

则 x 方向的动量方程变为：

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \rho f_x \qquad (8)$$

整理可化为矢量形式（x 方向上）：

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 u + \rho f_x \qquad (9)$$

在 x, y, z 三个方向上，有

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{V} \qquad (10)$$

展开实质导数项，亦可得到：

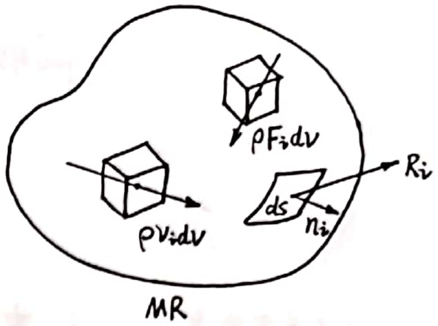
$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{V} \qquad (11)$$

∴ 推导完毕。

方法② —— 利用张量运算严格数学推导动量方程，

类比于牛顿第二定理，

考虑流体微团受体积力（F_i）和表面力（R_i）的作用，



一方面，净受力为

$$\int_{MR}\rho F_i dV+\int_{MR}R_i dS$$

另一方面，动量变化率为

$$\frac{d}{dt}\int_{MR}\rho V_i dV$$

则有，

$$\frac{d}{dt}\int_{MR}\rho V_i dV=\int_{MR}\rho F_i dV+\int_{MR}R_i dS$$

类似前面连续性方程中的推导，利用 Leibnitz 定理和 Gauss 定理，有

$$\int\left[\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t}+\partial_j(\rho V_i V_j)\right]dV=\int\rho F_i dV+\int R_i dS \quad \text{（略去积分域MR）}$$

表面力 R_i 与应力张量 T_{ij}（垂直于 i 轴平面的应力施加在 j 方向）有关系：

$$R_j=n_i T_{ij}=n_j T_{ji}$$

由高斯（Gauss）定理，有

$$\int R_i dS=\int n_j T_{ji}dS=\int\partial_j T_{ji}dV$$

则

$$\int\left[\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t}+\partial_j(\rho V_i V_j)-\rho F_i-\partial_j T_{ji}\right]dV=0$$

由 V 的任意性 $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial(\rho V_i)}{\partial t}+\partial_j(\rho V_i V_j)=\rho F_i+\partial_j T_{ji}$

考虑静止流体的应力张量 $T_{ij}=-P_t\delta_{ij}$，其中热力学压强 $P_t=f(e,\rho)$。

运动的流体表面元上则承受法向应力和切向应力（内摩擦力）。

故可定义粘性应力张量 τ_{ij}，满足运动流体 $T_{ij}=-P_t\delta_{ij}+\tau_{ij}$

由动力学压强：$P_m=-\frac{1}{3}T_{ii}$，满足

$$P_m-P_t=\xi\nabla\cdot\vec{V}$$

其中体积粘性系数 $\xi=\lambda+\frac{2}{3}\mu$。Stokes 假设：$P_m=P_t$。

∴ 故可得动量方程（不封闭，未知 τ）如下：

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t}+\partial_j(\rho V_i V_j)=-\partial_i p+\partial_i\tau_{ij}+\rho F_i \quad \text{（张量形式）} \tag{12}$$

或

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V}\cdot\vec{V})=-\nabla p+\nabla\cdot\vec{\tau}+\rho\vec{F} \quad \text{（矢量形式）} \tag{13}$$

由牛顿流体粘性定律（本构方程）

$$T_{ij}=-p\delta_{ij}+\lambda S_{kk}\delta_{ij}+2\mu S_{ij}$$

其中，应变速率张量

$$S_{ij}=\frac{1}{2}(\partial_i v_j+\partial_j v_i)$$

式中，μ与λ分别为第一、第二粘性系数。在流体力学中，应力与应变速率成正比。

比较上面几式，可得应力—应变速率本构关系式

$$T_{ij}=\lambda S_{kk}\delta_{ij}+2\mu S_{ij} \quad \text{（张量形式）}$$

或 $$\vec{T}=\lambda\delta\nabla\cdot\vec{V}+2\mu\vec{S} \quad \text{（矢量形式）}$$

代入(12).(13)两式，可得

动量方程（封闭，含应力—应变速率本构关系式）

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}+\partial_j(\rho v_i v_j)=-\partial_i p+\lambda\partial_i S_{kk}+2\mu\partial_i S_{ij}+\rho F_i \quad \text{（张量形式）} \quad (14)$$

或 $$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V}\cdot\vec{V})=-\nabla p+\lambda\nabla(\nabla\cdot\vec{V})+2\mu\nabla\cdot\vec{S}+\rho\vec{F} \quad \text{（矢量形式）} \quad (15)$$

易证 $2\nabla\cdot\vec{S}=2\partial_i S_{ij}=\partial_i(\partial_i v_j+\partial_j v_i)=\partial_i\partial_i v_j+\partial_i\partial_j v_i=\nabla^2\vec{V}$

对于不可压缩流动，由连续性方程 $\nabla\cdot\vec{V}=0$，令 $\nu=\frac{\mu}{\rho}$（运动粘性系数），

则有动量方程

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{V} \quad \text{（矢量形式）} \quad (16)$$

∴ 推导完毕。