

倒立摆系统数学建模与 PID 控制器实现*

杜 岗, 徐 静

(连云港职业技术学院, 江苏 连云港 222006)

摘 要: 针对多变量、非线性、强耦合性的倒立摆系统, 采用牛顿—欧拉法建立了其动力学方程, 并进行了线性化处理, 得到了状态空间模型, 从而设计出一种传统 PID 控制方案, 实现了对摆杆的稳定控制。最后在 MATLAB 环境下进行了计算机仿真, 仿真结果表明, 摆杆角度控制过程具有良好的动态性能和稳态性能, 验证了建模的正确性和控制方案的有效性。

关键词: 建模, 倒立摆, PID

中图分类号: TP273

文献标识码: A

倒立摆是进行控制理论研究的典型实验平台。由于倒立摆系统本身所具有的高阶次、不稳定、多变量、非线性和强耦合特性, 采用实验建模存在一定的困难。但可以在经过缜密的假设忽略掉一些次要的因素后, 认为倒立摆系统就是一个典型的运动的刚体系统, 可以在惯性坐标系内应用经典力学理论建立系统的动力学方程。本文将借助由固高科技开发生产的直线一级倒立摆系统, 采用牛顿—欧拉方法建立直线一级倒立摆系统的数学模型。同时, 在建立倒立摆数学模型的基础上设计 PID 控制器, 并对控制效果进行仿真。

1 数学模型的建立

1.1 微分方程的推导

在忽略了空气阻力, 各种摩擦之后, 可将直线一级倒立摆系统抽象成小车和匀质杆组成的系统, 如图 1 所示。

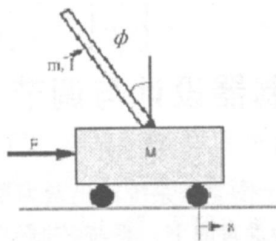


图 1 直线一级倒立摆系统

假设:

M: 小车质量; m: 摆杆质量; b: 小车摩擦系数; l: 摆杆转动轴心到杆质心的长度。

I: 摆杆惯量; F: 加在小车上的力; x: 小车位置;

φ: 摆杆与垂直向上方向的夹角。

θ: 摆杆与垂直向下方向的夹角(考虑到摆杆初始位置为竖直向下)。

图 2 是系统中小车和摆杆的受力分析图。其中, N 和 P 为小车与摆杆相互作用力的水平和垂直方向的分量。

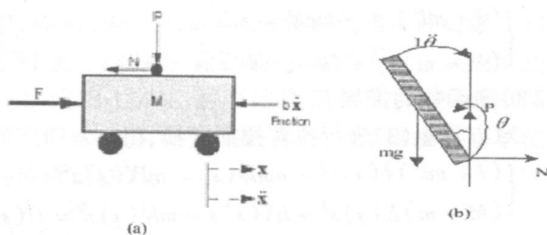


图 2(a) 小车隔离受力图

(b) 摆杆隔离受力图

在实际倒立摆系统中检测和执行装置的正负方向已经完全确定, 因而矢量方向定义如图 2 所示, 图示方向为矢量正方向。

分析小车水平方向所受的合力, 可以得到以下方程:

$$M\ddot{x} = F - bx - N$$

由摆杆水平方向的受力进行分析可以得到下面等式:

$$N = m \frac{d^2}{dt^2}(x + l \sin \theta)$$

$$\text{即: } N = m\ddot{x} + m\ddot{\theta} \cos \theta - m\dot{\theta}^2 \sin \theta$$

把这个等式代入上式中, 就得到系统的第一个运动方程:

$$(M+m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \quad (1)$$

为了推出系统的第二个运动方程, 我们对摆杆垂直方向上的合力进行分析, 可以得到下方方程:

$$P - mg = m \frac{d^2}{dt^2}(l\cos\theta)$$

$$\text{即: } P - mg = -ml\ddot{\theta}\sin\theta - ml\dot{\theta}^2\cos\theta$$

力矩平衡方程如下:

$$-Pl\sin\theta - Nl\cos\theta = I\ddot{\theta}$$

注意: 此方程中力矩的方向, 由于 $\theta = \pi + \phi$, $\cos\phi = -\cos\theta$, $\sin\phi = -\sin\theta$, 故等式前面有负号。

合并这两个方程, 得到第二个运动方程:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = -m\ddot{x}\cos\theta \quad (2)$$

设 $\theta = \pi + \phi$ (是摆杆与垂直向上方向之间的夹角), 假设 ϕ 与 1 (单位是弧度) 相比很小, 即 $\phi \ll 1$, $\cos\theta = -1$, $\sin\theta = -\phi$, $(\frac{d\theta}{dt})^2 = 0$

则可以进行近似处理:

用 u 来代表被控对象的输入力, 线性化后两个运动方程如下:

$$\begin{cases} (I + ml^2)\ddot{\phi} - mgl\phi = m\ddot{x} \\ (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\phi} = u \end{cases} \quad (3)$$

1.2 传递函数的推导

对方程组(3)进行拉普拉斯变换, 得到:

$$\begin{cases} (I + ml^2)\phi(s)s^2 - mgl\phi(s) = mX(s)s^2 \\ (M + m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\phi(s)s^2 = U(s) \end{cases} \quad (4)$$

注意: 推导传递函数时假设初始条件为 0。

由于输出为角度 ϕ , 求解方程组(4)的第一个方程, 可以得到:

$$X(s) = [\frac{(I + ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2}] \Phi(s) \quad (5)$$

把上式代入方程组(4)的第二个方程, 得到:

$$(M + m) = [\frac{(I + ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2}] \Phi(s)s^2 + b[\frac{(I + ml^2)}{ml} + \frac{g}{s^2}] \Phi(s)s - ml\Phi(s)s^2 = U(s) \quad (6)$$

整理后得到传递函数:

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{mls^2}{q}}{s^4 + \frac{b(I + ml^2)}{q}s^3 - \frac{(M + m)mgl}{q}s^2 - \frac{bmgl}{q}s} \quad (7)$$

其中:

$$q = [(M + m)(I + ml^2) - (ml^2)] \quad (8)$$

1.3 状态空间方程的推导

系统状态空间方程为:

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$y = CX + Du$$

方程组(3)对 \ddot{x} $\ddot{\phi}$ 解代数方程, 得到解如下:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{-(I + ml^2)b}{I(M + m) + Mml^2}\dot{x} + \frac{m^2gl^2}{I(M + m) + Mml^2}\dot{\phi} + \frac{I + ml^2}{I(M + m) + Mml^2}u \\ \ddot{\phi} = \frac{-mlb}{I(M + m) + Mml^2}\dot{x} + \frac{mgl(M + m)}{I(M + m) + Mml^2}\dot{\phi} + \frac{ml}{I(M + m) + Mml^2}u \end{cases}$$

整理后得到系统状态空间方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I + ml^2)b}{I(M + m) + Mml^2} & \frac{m^2gl^2}{I(M + m) + Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{I(M + m) + Mml^2} & \frac{mgl(M + m)}{I(M + m) + Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I + ml^2}{I(M + m) + Mml^2} \\ 0 \\ \frac{ml}{I(M + m) + Mml^2} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

2 PID 控制器设计与调节

2.1 理论分析

首先, 对于倒立摆系统输出量为摆杆的角度, 它的平衡位置为垂直向上。系统控制结构框图如图 3 所示。

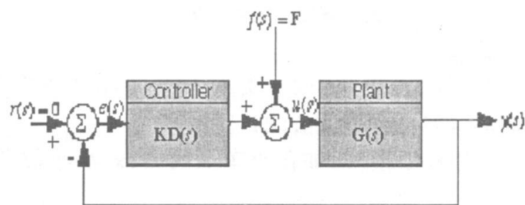


图 3 系统控制结构框图

图中 $KD(s)$ 是控制器传递函数, $G(s)$ 是被控对象传递函数。考虑到输入 $r(s) = 0$, 结构图可以很容易变换成图 4。

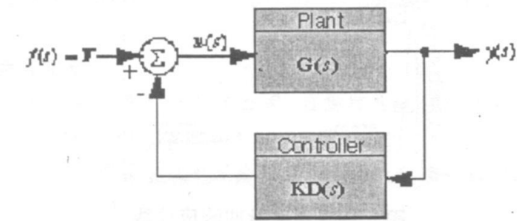


图 4 改变后的系统控制结构框图

该系统的输出为:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{G(s)}{1 + KD(s)G(s)} F(s) \\ &= \frac{\text{num}}{\text{den} + (\text{numPID})(\text{num})} F(s) \\ &= \frac{NUM(\text{denPID})}{(\text{denPID})(\text{den}) + (\text{numPID})(\text{num})} F(s) \quad (9) \end{aligned}$$

其中, num —— 被控对象传递函数的分子项
den —— 被控对象传递函数的分母项
numPID —— PID 控制器传递函数的分子项
denPID —— PID 控制器传递函数的分母项
由式(7)知被控对象的传递函数是:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(s)}{U(s)} &= \frac{\frac{ml}{q}s^2}{s^4 + \frac{b(I+ml^2)}{q}s^3 - \frac{(M+m)mgl}{q}s^2 - \frac{bmgl}{q}s} \\ &= \frac{\text{num}}{\text{den}} \quad (10) \end{aligned}$$

其中 $q = [(M+m)(I+ml^2) - (ml)^2]$
PID 控制器的传递函数为:
$$KD(S) = K_D s + K_p + \frac{K_1}{s} = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_1}{s} = \frac{\text{numPID}}{\text{denPID}} \quad (11)$$

需仔细调节 PID 控制器的参数, 以得到满意的控制效果。前面的讨论只考虑了摆杆角度, 在我们施加控制的过程中, 考虑小车位置, 得到改进的系统框图如图 5 所示。

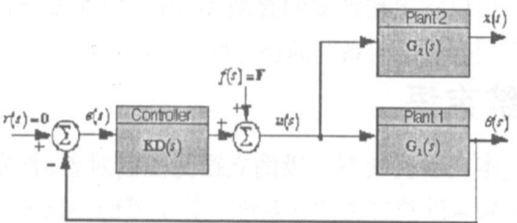


图 5 改进的系统框图

其中, $G_1(s)$ 是摆杆传递函数, $G_2(s)$ 是小车传递函数。由于输入信号 $r(s) = 0$, 所以可以把结构图转换成图 6。

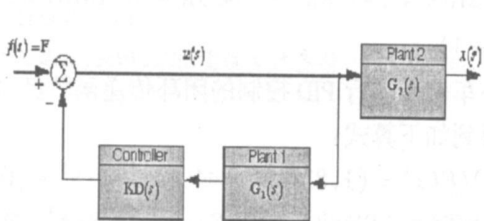


图 6 转换后的结构图

其中, 反馈环代表我们前面设计的控制器。小车位置输出为:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{G_2(s)}{1 + KD(s)G_1(s)} F(s) \\ &= \frac{\text{num}_2}{\text{den}_2 + (\text{numPID})(\text{num}_1)} F(s) \\ &= \frac{(\text{num}_2)(\text{denPID})(\text{den}_1)}{(\text{denPID})(\text{den}_1)(\text{den}_2) + (\text{numPID})(\text{num}_1)(\text{den}_2)} F(s) \quad (12) \end{aligned}$$

其中, num₁, den₁, num₂, den₂ 分别代表被控对象 1 和被控对象 2 传递函数的分子和分母。numPID 和 denPID 代表 PID 控制器传递函数的分子和分母。下面我们来求 $G_2(s)$, 根据方程(5)可以推出小车位置的传递函数为:

$$\begin{aligned} G_2(s) &= \frac{X(s)}{U(s)} \\ &= \frac{\frac{(1+ml^2)}{q}s^2 - \frac{mgl}{q}}{s^4 + \frac{b(I+ml^2)}{q}s^3 - \frac{(M+m)mgl}{q}s^2 - \frac{bmgl}{q}s} \quad (13) \end{aligned}$$

其中 $q = [(M+m)(I+ml^2) - (ml)^2]$, 可以看出, $\text{den}_1 = \text{den}_2 = \text{den}$, 小车的传递函数可以简化成:

$$X(s) = \frac{(\text{num}_2)(\text{denPID})}{(\text{denPID})(\text{den}) + k(\text{numPID})(\text{num}_1)} F(s) \quad (14)$$

2.2 仿真实验及分析

2.2.1 仿真实验

经过上述理论分析, 可知在 PID 控制器作用下摆杆角度和小车位置的闭环传递函数。小车对摆杆角度进行 PID 控制的闭环传递函数经计算可得到以下传递函数:

$$Y(s)/F(s) = \frac{4.5455S^3/S^5 + (0.1818 + 4.5455K_D)S^4 + (4.5455K - 31.1818)S^3 + 4.5455(K_I - 1)S^2}{S^5 + (4.5455K - 31.1818)S^3 + 4.5455(K_I - 1)S^2} \quad (15)$$

从上面的传递函数, 利用劳斯判据可以得到摆杆角度稳定条件如下:

$$K > 1; \quad K > 6.86;$$

$$(0.1818 + 4.5455K_D)(4.5455K - 31.1818) > 4.5455(K_I - 1)$$

对小车位置进行 PID 控制的闭环传递函数经过计算后得到如下算式:

$$X(s)/F(s) = (1.8182S^2 - 44.5455)S / S^5 + (0.1818 + 4.5455K_D)S^4 + (4.5455K - 31.1818)S^3 + 4.5455(K_I - 1)S^2 \quad (16)$$

可以看出特征多项式缺项, 所以小车位置在 PID 控制器作用下将不会稳定。所以在用 PID 算法进行控制的时候, 有实际意义的就是对摆杆角度进行控制。

在上面的程序中: $K_d = 20$; $K = 100$; $K_i = 1$, 根据以上分析可知摆杆角度在这组参数下的脉冲响应最后能自行稳定, 但小车位置不能稳定, 通过仿真实验可以证实上面的结论, 仿真后得到的曲线如图 7 图 8 所示。

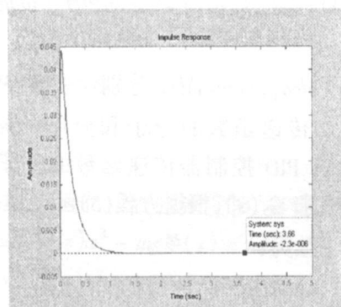


图 7 摆杆角度脉冲响应曲线图

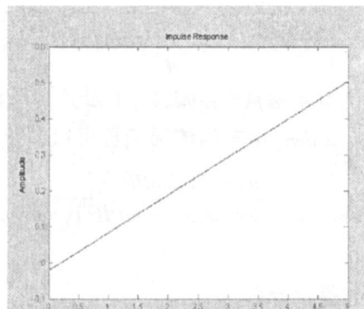


图 8 小车位置脉冲响应曲线

可以看出, 摆杆角度经过一定时间后稳定了, 但小车位置一直没能稳定下来。

2.2.2 PID 调节各参数作用分析

在 PID 控制中, 增加 K (加大比例环节的作用), 可以减少系统的超调量、调节时间、稳态误差, 提高控制精度, 但它同时也使系统振荡加剧。在这个系

统中 K 的稳定条件是 $K > 6.86$ 。当参数 $K = 1000$, 其他参数不变时, 可得响应曲线如图 9 所示。

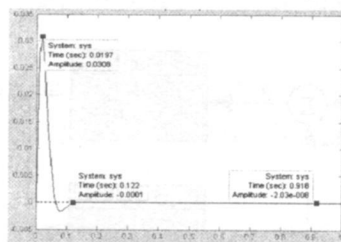


图 9 摆杆角度脉冲响应曲线

与图 7 相比较, 明显可以看出超调量、调节时间、稳态误差减小, 但系统的振荡有所加剧。

增加 K_i 对系统影响最明显的地方就是会增加调节时间, 使动态性能下降, 但同时会减小稳态误差, 提高了系统的稳态性能, 此系统 K_i 的稳定条件是 $K_i > 1$ 。当参数 $K_i = 100$, 其他参数不变, 可得响应曲线如图 10。

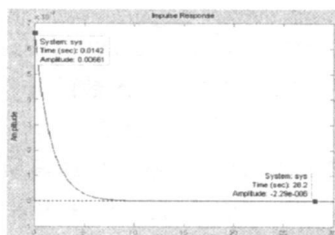


图 10 摆杆角度脉冲响应曲线

可得出结论: 调节时间加大、稳态误差减小, 所以加大积分环节的作用会使系统的动态性能下降, 稳态性能提高。增加 K_d 会大大抑制超调量, 有助于系统的稳定性, 可取 $K_d = 150$, $t = 0: 0.01: 30$ 说明问题, 这时的到的响应曲线如图 11 所示。

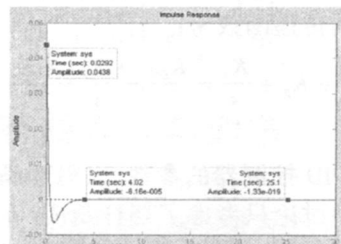


图 11 摆杆角度脉冲响应曲线

可以看出超调量明显减小, 所以增加微分环节的作用会有助于系统的稳定性。

3 结束语

本文以直线型一级倒立摆为控制对象, 首先采用牛顿—欧拉方法建立系统的数学模型, 然后以“摆杆不倒”为控制目标, 设计了传统的 PID 控制方案。

通过仿真, 我们可以看出, PID 控制器能够实现对摆杆的稳定控制。同时, 通过对比比例、积分、微分三大参数的调节, 借助直观的摆杆运动变化, 可以加深对超调量、调节时间、稳态误差等控制量的理解。

参考文献:

[1] 深圳固高科技技术有限公司. 固高摆系统与自动控制实验 [M] . 合肥: 中国科学技术大学, 2002.

[2] 深圳固高科技技术有限公司. GT 系列运动控制器用户手册 [S] . 2002.

[3] 高国 , 余文 . 自动控制原理 [M] . 广州: 华南理工大

学出版社, 2003.

[4] 黄忠霖. 控制系统的 MATLAB 计算与仿真 [M] . 北京: 国防工业出版社, 2001.

[5] 欧阳黎明. MATLAB 控制系统设计 [M] . 北京: 国防工业出版社, 2001.

[6] 王沫然. SIMULINK 建模与仿真与仿真 [M] . 北京: 电子工业出版社, 2002.

作者简介: 杜 岗 (1981—), 男, 山东日照人, 博士研究生, 连云港职业技术学院教师, 主要从事计算机监控研究。

Mathematical Modeling of Inverted Pendulum System and Complementation of PID Controller

DU Gang, XU Jing

(Lianyungang Technical College, Lianyungang 222006, China)

Abstract: For the inverted pendulum system with multi—variable, nonlinear and strong coupling, Newton—Euler method was used to establish its dynamics equation with linear processing and the state space model formed. Therefore a traditional PID control plan was designed and achieved stability control of the pendulum rod. Finally a computer simulation was carried out in the MATLAB environment and the findings show that control process of the swing angle has good dynamic performance and steady—state performance, verifying correctness and effectiveness of modeling.

Key words: modeling; inverted pendulum; PID