大气压强与高度的精密公式

陈竞余

在许多热力学书上都有大气压与高度关系的玻尔兹曼公式，

$$P = P_0 e^{-\mu g z / RT}$$

式中 P 是高度为 Z 处的大气压强，P_0 为海平面上的大气压强，μ 为空气的摩尔质量，R 为普适气体常数，T 为气体的温度。

但上式是在假定大气温度为常数的情况下推导出来的。而实际情况是大气的温度与高度有关，从表一可以看出，大气温度随高度增加而降低。因此，用玻尔兹曼公式计算出的压强与实测值比较，误差较大，例如在 $10Km$ 处误差可达 17%。

在热力学书中的另外一个公式是考虑到大气高低各层间不断发生空气交换，由于高处压强小，气体发生膨胀，因而气体的温度随高度而降低，并且把这个过程看为是绝热过程。由此可以得出大气压强与高的公式为

$$P = P_{\circ}\left(1 - \frac{r-1}{r}\frac{\mu q z}{RT_{\circ}}\right)^{\frac{r}{r-1}}$$

式中 $r=1.4$(把空气近似的看为由双原子气体组成)。$T_{\circ}$ 为海平面的温度。

用上式计算出来的压强与实测值比较，误差仍然大，例如在 $10Km$ 处，误差达 10%，即便在近地处，例如在 $2Km$ 处，误差为 2.5%。

尤其是由绝热过程计算出来的温度梯度与实测的温度梯度比较，误差达 50%，与实际相差太远。

本文采用多方过程来考虑大气过程，可得到一个精密的大气压强与高度的公式，即便在 $10Km$ 高处，最大误差为 0.2%。而在高度较低时，与实测值十分吻合，见表二。

地球的大气层温度随高度的变化比较复杂，大体可分为三层，从 0 到 $11Km$ 处为对流层，从 $11Km$ 到 $20Km$ 为同温层，在 $20Km$ 以上为电离层，本文只讨论对流层的情况。

在对流层中，大气温度随高度 Z 降低的主要原因是，低处的空气与高处的空气各层间不断发生对流交换，而空气的气压随高度降底，空气上升时膨胀，下降时压缩。由于空气的导热率很小，这个膨胀与压缩过程在一般热力学书中均看为是绝热过程。笔者认为由于大气在对流过程中有一定的热交换，以及太阳及地面对大气有热量供给，所以这个过程不应是绝热过程，而是介于绝热与等温过程之间的一个多方过程，因而多方指数 n 应是在 1 与 1.4 之间的某一个值，这个值可由实测的温度梯度来确定。

现在以多方过程来讨论大气压与高度的关系，而且我们认为大气过程是一个准静态过程。

设气体的密度为 ρ 及压强为 P，它们均为高度 Z 及温度 T 的函数。

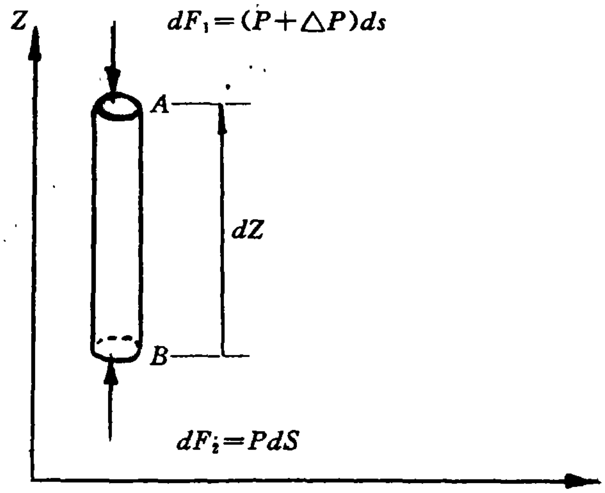

图 一

考虑在大气中高度为 Z 处有一小段气体 AB、截面积为 ds，(见图一)。

由流体力学可知该气体上下压力之差等于它自身的重量，即可得方程：

$dP(z.T)dS = \rho(z.T)g\ dz\ dS$

上式可写为

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \cdots\cdots(1)$$

把空气看为理想气体，大气过程看为是多方过程，设多方指数为 n。

对(1)式用复合函数求导可得：

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_n\left(\frac{dT}{dZ}\right) = -\rho g \cdots\cdots(2)$$

由热力学可知，多方过程方程为

$$PV^n = C$$

$$\text{或 } P^{\frac{1}{n}-1} \cdot T = C \cdots\cdots(3)$$

对(3)式求偏导数可得：

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_n = \frac{n}{n-1}\frac{P}{T} \cdots\cdots\cdots(4)$$

将(4)式代入(2)式可得：

$$\frac{dT}{dz} = -\rho g\frac{n-1}{n}\frac{T}{P} \cdots\cdots(5)$$

利用理想气体气态方程

$$P = \frac{\rho}{\mu}RT \cdots\cdots(6)$$

将(6)式代入(5)式得：

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{n-1}{n}\frac{ug}{R} \cdots\cdots(7)$$

上式说明在多方过程中，大气的温度梯度与高度无关，为一个常数。从表一可以看出，温度梯度近似为一常数。在 0 到 $10Km$ 之间，温度梯度的平均值为 $6.489K/km$。将这个值代入(7)式，及 $u=28.96\times10^{-3}Kg/mol$，$g=9.8m/s^2$。

$R=8.314\ J.mol^{-1}.K^{-1}$，代入(7)式可求出

$n=1.235$。

我们知道 $n=1$ 为等温过程，$n=1.4$ 为绝热过程。我们求出的 $n=1.235$，表示大气过程是一个介于等温和绝热过程之间的多方过程。

现在求大气压强与高的关系。

对(7)式积分

$$\int dT=-\int\frac{n-1}{n}\frac{\mu g}{R}dZ$$

$$得\ T=-\frac{n-1}{n}\frac{\mu g}{R}Z+C$$

在海平面，$Z=0.T=T_{。}$则可求出

$C=T_{。}$ 上式可以写为

$$T=T_{。}-\frac{n-1}{n}\frac{\mu gz}{R}\cdots\cdots(8)$$

又由(1)式

$$\frac{dP}{dz}=-\rho g\cdots\cdots(1)$$

及(6)式

$$P=\frac{\rho}{\mu}RT$$

消去 ρ，并将(8)式代入后可得：

$$\frac{dP}{P}=-\frac{\mu gdz}{R(T_{。}-\frac{n-1}{n}\frac{\mu gz}{R}}$$

对上式积分后可得；

$$LnP=\frac{n}{n-1}Ln(T_{。}-\frac{n-1}{n}\frac{\mu gz}{R})+C$$

设在海平面，$Z=0$ 处，大气压强 $P=P_{。}$，则可以确定积分常量

$$C=lnP_{。}-\frac{n}{n-n}lnT_{。}$$

代入上式后可得大气压强与高的关系式；

$$P=P_{。}(1-\frac{n-1}{n}\frac{\mu gz}{RT_{。}})^{\frac{n}{n-1}}\cdots\cdots(9)$$

将 $n=1.235$，$\mu=28.96\times10^{-3}Kg/mol$

$T_{。}=288.1K^{0}$，　$P_{。}=10.1325\times10^{4}n/m^{2}$

$R=8.314Jmol^{-1}\cdot K^{-1}$，及 $g=9.800m.s^{-2}$

代入(8)式可得

$P=10.1325\times10^4(1-2.252\times10^{-5}Z)^{5.264}$……(10)

利用(10)式，将 Z 分别代入 1 千米，2 千米等值，可以计算出各高度时的气压，见表二。从表二中我们看到，利用(10)式计算的结果与实测值十分吻合。尤其是在 4 千米以下高度，计算值与实测值误差小于 0.04%。已是十分精确了。

由于大气的过程是复杂的，而我们只作了一个简单的模型，就可以很好的描写自然界的大气过程，得出的结论是何等的精确，这又一次说明物理学是何等的美妙。

表一、高度与温度的关系

高度 Km	温度 K(实测值)
0	
1	281.651
2	275.154
3	268.659
4	262.166
5	255.676
6	249.187
7	242.700
8	236.215
9	229.733
10	223.252

表二、高度与气压的关系

高度 (Km)	测量值 ($\times10^4Nm^{-2}$)	计算值 $\times10^4Nm^{-2}$	误差
0	10.1325	10.1325	0
1	8.9872	8.9876	+0.005%
2	7.9501	7.9494	−0.008%
3	7.0121	7.0096	−0.04%
4	6.1660	6.1631	−0.04%
5	5.4084	5.4014	−0.12%
6	4.7217	4.7178	−0.08%
8	3.5651	3.5602	−0.14%
10	2.6499	2.6442	−0.2%

注：：测量值来源于：地学基本数据手册，海洋出版社，86 年版，P212，表 1.6.3.