

高超声速可压缩层流边界层自相似解

强希文 刘 峰 张建泉 陈雨生

(西北核技术研究所, 西安 710024)

摘 要 当气体为量热完全气体或热完全气体, 粘性系数是温度幂指数函数时, 本文给出了一种推导可压缩层流边界层方程的新方法。对于没有外部压力梯度的光滑平板, 引进修正的 Levy-Mangle 变换和 Dorodnitsyn-Howarth 变换来求解薄层流边界层内的流动。这些变换描述了根据密度指数给出的相似性参数, 其中密度指数考虑了粘性系数随温度幂指数变化的定标关系。从而给出了用封闭耦合的系统中非线性常微分方程组描述的温度场与流函数之间的显式关系式。对于普朗特数、壁温与自由流温度比以及粘性系数与温度幂指数关系中的指数的影响, 该方法也为比较根据粘性-温度关系各种假设所得的结果提供了一种较为简单的方法。

关键词 可压缩层流 边界层 自相似解

1 引言

当飞行器在空气中作高超声速飞行时, 高马赫数和高驻点温度流将会产生如下的特征, 即分子的振动和离解、原子和分子的电离。对高超声速流的研究表明存在两种截然不同的情况: 低焓条件和高焓条件。低焓条件时的情况可用量热完全气体或热完全气体来建模, 而热动力学平衡时的混合气体模型则被用来研究高焓时的情况。

对于量热完全气体, 比热 C_p 和 C_v 可认为是常数, 对热完全气体, 可认为其中比热仅是温度的函数。这是在气体分子内的振动能的激发或与分子或原子内的电子运动相关的电子能的激发所造成的。在这两种情况中, 均可使用理想气体状态方程。

对更一般的热动力学平衡态的完全可压缩气体的情况, 比热是两个热力学性质的函数, 例如压力和温度。此时应用到真实气体的状态方程, 这种情况应被用到高焓流的情况, 其中出现离解与电离。

平板的高超声速流可以被划分为如图 1 所示的四个不同的区域^[1], 在靠近平板前沿的区域 I, 存在一个延迟形成的激波层, 而且边界层是该区域存在滑移现象的结果。靠近前沿处, 利用滑移条件来描述, 且流是不连续的, 因而纳维尔-斯托克斯方程在此不适用, 此时应利用一阶动力学流理论。

在不连续区域之后, 存在一个强相互作用连续区域 II, 在此区域激波层和边界层融合, 平板表面存在无滑移条件。在此区域, y 方向的压力梯度可予以忽略, 即 $\partial p / \partial y = 0$, 但在 x 方向的压力梯度不能够忽略, 这是由于粘性层中存在激波的缘故。

在区域 II 之后, 存在一个弱相互作用区域 III, 在此区域激波层和边界层分离, 平板表面存在滑移条件。在此区域, y 方向的压力梯度可予以忽略, 但在 x 方向的压力梯度不能够忽略, 这是由于粘性层中存在激波的缘故。

Li 和 Nagamatsu^[2]发展了一种理论来描述在激波层和边界层之间的高超声速流的强相互作用, 并假定平板是尖劈前沿, 流体为连续的理想气体。传统理论给出马赫数增加时表面摩擦系数稳定衰减, 而 Li 等的理论结果显示, 随高超声速流中马赫数的增加, 表面摩擦系数实际是增加的。后来, Li 和 Nagamatsu^[3]通过不引入坐标变换的直接近似方法, 给出了强相互作用区域的自相似解。其结果表明在加热的表面, 只要合适的压力梯度存在, 边界层内的当地速度可以超过自由流的值。另外也表明, 对各种表面温度, 热传输系数的变化也能够给出。此外, 也表明热传输系数对层流分离现象的效应能够定量化的进行研究。

在远离平板前沿的区域是弱相互作用区域 III 和 IV。在区域 III, 它接近强相互作用, x 方向与 y 方向的压力梯度在边界层内是非常小的, 可以忽略。但是, 在边界层外激波和边界层

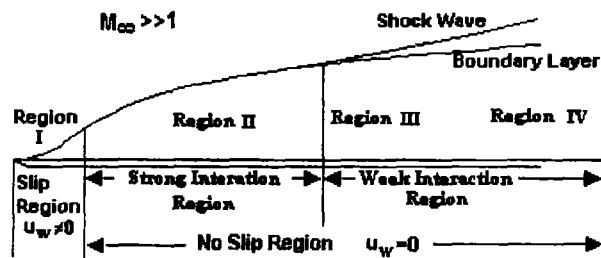


图 1. 平板高超声速流示意图

之间的无粘层, y 方向的压力梯度不能忽略。在远离强相互作用的区域IV, 普朗特不可压缩边界层理论的经典近似可用于可压缩边界层。在该区域, 边界层内及边界层外的 x 方向与 y 方向的压力梯度均可忽略。

Van Driest^[4]利用 Crocco 方法推导出一系列常微分方程组来描述可压缩层流边界层。他假定平板上的理想气体服从 Sutherland 定律, 所研究的流速直至 25 马赫。其主要结果是表面摩擦系数和热传输系数是雷诺数、马赫数以及壁温与自由流温度之比的函数。

Cohen 和 Reshotko^[5]研究了具有热传输和压力梯度的二维稳态可压缩层流边界层的自相似解。他们利用了理想气体假设、单位普朗特数以及线形粘性系数-温度关系。Cohen^[5]以及 Bae 和 Emanuel^[6]对壁焓与外边界层焓之比在绝热壁情况时的各种值进行了列表。

本工作的基本目的是给出一种在低焓条件时推导可压缩层流边界层自相似解的新方法。其中假定没有离解出现, 且粘性是温度的幂函数。

以前对这种边界层的分析大多采用 $\eta \approx \int_0^y (\rho/\rho_w) dy'$ 作为相似性变量, 这在粘性系数与温度之间存在线形关系, 即 $\mu/\mu_w = T/T_w$ 时是一种有用的求解方法。但是当考虑更为接近实际的情况时, 诸如幂指数定律 $\mu/\mu_w = (T/T_w)^\alpha$, 这种近似将导致一个更为复杂的且是非显式的方程组。对于幂指数关系的这种情况, 本文引入了一种新的修正了的 Levy-Mangle 变换和 Dorodnitsyn-Howarth 变换, 它利用 $\eta \approx \int_0^y (\rho/\rho_w)^\alpha dy'$ 作为相似性变量。这样, 流体力学方程组可

化简为流函数和温度场之间的一个显式的关系式, 并用封闭的耦合非线性常微分方程组来描述。我们给出了外流马赫数直至 4 时边界层流动的解。其中对普朗特数、壁温与自由流温度之比以及幂指数 α 都进行了考虑。

这些解可被用来对远离平板前沿的弱相互作用区域III和IV的高超声速边界层进行数值求解。这些解可提供流动特征的重要数据以及热传输重要数据, 以便为将来高超声速飞行器的设计需要提供重要数据。

2 数学模型

假定所考虑的流动是粘性、具有热传导的稳态牛顿流体, 在高雷诺数的极限情况下的纳维尔-斯托克斯方程可简化为经典的普朗特层流边界层。根据 Driest 的理论^[4], 沿光滑平板在 $x > 0$ 范围流动, 且在 x 、 y 方向具有零压力梯度的二维流, 其稳态粘性可压缩的薄边界层可用如下方程组来描述

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (4)$$

$$p = \rho R T \quad (5)$$

注意压力 p 在整个场中保持为常数。

对于量热完全气体或热完全气体的极限情况, 在常压下比热仅是温度的函数。此时, 焓由下式给出

$$di = c_p dT \quad (6)$$

此时能量方程就变成

$$\rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{Pr} \mu \frac{\partial i}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (7)$$

其中普朗特数 P_r 由下式给出

$$P_r = \frac{\mu c_p}{k} \quad (8)$$

该问题的边界条件为壁面无滑移条件和壁面($y=0$)为常温, 远离壁面($y \rightarrow \infty$)的自由流条件

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad i(x,0) = i_w \\ u(x,\infty) = u_\infty, \quad i(x,\infty) = i_\infty \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

另外, 粘度-温度关系的一个较好的近似是假定粘度是温度的幂函数, 可用下式表示

$$\frac{\mu}{\mu_r} = \left(\frac{T}{T_r}\right)^\alpha \quad (10)$$

这里 μ_r 和 T_r 分别是参考粘度和参考温度。在较低温度下空气的典型幂指数值 $\alpha=0.76$; 考虑真实气体效应时, 在直到 6000K 的较大范围内, 方程(10)在 $\alpha=0.69$ 时和动力论的结果符合得相当好。

3 自相似解

现在来寻找方程(1)~(10)的自相似解。在一定的条件下, 利用从物理空间(x, y)到变换空间(ξ, η)的适当的变换, 沿平板表面在远离平板前沿处的流场特征具有自相似的形状。

通过对 Levy-Mangle 变换和 Dorodnitsyn-Howarth 变换的变量进行修正与复合, 利用幂指数 α 来考虑粘性随温度的变化, 则边界层方程具有自相似解。令

$$\xi(x) = \int_0^x \rho_w \mu_w u_\infty d\xi' \quad (11)$$

$$\eta(x, y) = \frac{\rho_w u_\infty y}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^\alpha dy' \quad (12)$$

上式在 $y=0$ 时 $\eta=0$, $y \rightarrow \infty$ 时 $\eta \rightarrow \infty$ 。当 $\alpha=1$ 时以上变换又恢复为 Dorodnitsyn-Howarth 变换。

由于在壁面上的密度、粘性系数及自由流速度均为常数, 故 ξ 仅是 x 的函数, $\xi = \xi(x) = \rho_w \mu_w u_\infty x$ 。令

$$\eta(x, y) = \frac{\rho_w u_\infty}{\sqrt{2\xi}} \bar{y} \quad (13)$$

这里

$$\bar{y}(x, y) = \int_0^y \left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^\alpha dy' \quad (14)$$

当 $\alpha=1$ 时可得到 Dorodnitsyn-Howarth 变换。边界层方程中所出现的导数分别为

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \quad (16)$$

这里我们用到

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = \left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^\alpha \quad (17)$$

由于在方程(1), (2)及(7)中所有与导数 $\partial \bar{y} / \partial y$ 相关的项都可去掉, 故在我们的分析中可以不需去计算该项。流函数 $\psi(x, y)$ 可用下式来定义

$$\rho u = \rho_w \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\rho_w \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (18)$$

利用(15), (16)以及(18)可以得到

$$\left. \begin{aligned} u &= \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^{a-1} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \\ v &= -\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

这样连续性方程(1)自动满足。经过一些代数变换后, x 方向的动量方程(2)和能量方程(7)可重写为如下形式

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\alpha-1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \right)^2 - \frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \right] = \frac{\mu}{\rho_*} \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^a \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\alpha-1}{\rho} \left[2 \frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\alpha-2}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right) \right] \right\} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial i}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial i}{\partial \bar{y}} = \frac{\mu}{\rho_*} \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^a \left\{ \left[\left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{a-1} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\alpha-1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}} \right) \right]^2 + \frac{1}{P_r} \frac{\partial^2 i}{\partial \bar{y}^2} \right\} \quad (21)$$

这里我们假定流体为热完全气体, $\mu \rho^a$ 的值为

$$\mu \rho^a = \mu_r \left(\frac{p}{RT_r} \right)^a = C \quad (22)$$

假定在(22)式中在参考温度的压力、气体常数 R 以及粘度都是已知的, 这样 $\mu \rho^a$ 的值就是一个给定常数。而且热完全气体的状态方程由下式给出

$$\rho = \frac{p \gamma}{\gamma-1} \frac{1}{i} \quad \text{或} \quad i = \frac{\gamma p / \rho}{\gamma-1} = \frac{a^2}{\gamma-1} \quad (23)$$

其中 a 是声速。所以, 对给定的压力 p 有

$$\frac{\rho}{\rho_*} = \frac{i_*}{i} \quad (24)$$

密度在 x 和 \bar{y} 方向的导数变成

$$\frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} = -\frac{p \gamma}{\gamma-1} \frac{1}{i^2} \frac{\partial i}{\partial \bar{x}} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}} = -\frac{p \gamma}{\gamma-1} \frac{1}{i^2} \frac{\partial i}{\partial \bar{y}} \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{y}^2} = -\frac{p \gamma}{\gamma-1} \frac{1}{i^2} \left[\frac{\partial^2 i}{\partial \bar{y}^2} - \frac{2}{i} \left(\frac{\partial i}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] \quad (27)$$

将以上各式代入 x 方向的动量方程以及能量方程可得

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\alpha-1}{i} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \right)^2 - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \right] = \frac{\mu}{\rho_*} \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^a \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\alpha-1}{i} \left[2 \frac{\partial i}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial^2 i}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\alpha}{i} \left(\frac{\partial i}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right) \right] \right\} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial i}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial i}{\partial \bar{y}} = \frac{\mu}{\rho_*} \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^a \left\{ \frac{1}{P_r} \frac{\partial^2 i}{\partial \bar{y}^2} + \left[\left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{a-1} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\alpha-1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial i}{\partial \bar{y}} \right) \right]^2 \right\} \quad (29)$$

假定无量纲焓 i/i_* 仅是 η 的函数, 则

$$\frac{i(x, \bar{y})}{i_*} = \theta(\eta) \quad (30)$$

流函数 $\psi(x, \eta)$ 可由自相似解给出

$$\psi(x, \eta) = \sqrt{2u_* v_*} x f(\eta) \quad (31)$$

从(19)和(31)有

$$\left. \begin{aligned} u &= u_* f'(\eta) \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{a-1} \\ v &= -\left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{-1} \left[\sqrt{\frac{u_* \mu_*}{2x \rho_*}} (f - \eta f') + u_* f' \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right] \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

对于给定压力 p , 有

$$\frac{\rho}{\rho_w} = \frac{\theta_w}{\theta} \quad (33)$$

将 $\theta(\eta)$ 及 $\psi(x, \eta)$ 代入动量方程(28)、能量方程(29)式, 得

$$f''' + ff'' = \frac{\alpha-1}{\theta} [f'\theta'' + 2\theta f'' + ff'\theta' - \alpha \frac{f'(\theta')^2}{\theta}] \quad (34)$$

$$\theta'' + P_r f\theta' = -\frac{u_\infty^2}{i_\infty} P_r \left[\left(\frac{\theta_w}{\theta} \right)^{\alpha-1} \right]^2 \left[f'' - (\alpha-1) \frac{f'\theta'}{\theta} \right]^2 \quad (35)$$

另外, 从(23)式有

$$\frac{u_\infty^2}{i_\infty} = \frac{(\gamma-1)u_\infty^2}{a_\infty^2} = (\gamma-1)M_\infty^2 \quad (36)$$

其中 $M_\infty = u_\infty/a_\infty$ 是外部流的马赫数, 这样能量方程(35)式将变为

$$\theta'' + P_r f\theta' = -(\gamma-1)M_\infty^2 P_r \left[\left(\frac{\theta_w}{\theta} \right)^{\alpha-1} \right]^2 \left[f'' - (\alpha-1) \frac{f'\theta'}{\theta} \right]^2 \quad (37)$$

根据(9)、(32)及(33)式, 边界条件可写为

$$\left. \begin{aligned} f'(0) &= 0, \quad f(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_w \\ f'(\infty) &= \theta_w^{-(\alpha-1)}, \quad \theta(\infty) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

这里 $\theta_w = i_w/i_\infty = T_w/T_\infty$ 是壁温与自由流温度之比, 它对边界层流性质产生强烈的影响, 当 $\theta_w < 1$ 时壁面是冷壁, 当 $\theta_w > 1$ 时壁面是热壁。

方程组(34)、(37)以及(38)是一组显式描述流函数与温度场之间关系的非线性常微分方程组。由于可压缩效应, 在此将密度看作参变量。x 方向的动量方程和能量方程通过焓来耦合, 这和设想的相一致。

对于粘度随温度的变化为线形函数的特殊情况(即 $\alpha = 1$), 将得到可压缩层流边界层的 Blasius-Pohlhausen 方程组, 即

$$f''' + ff'' = 0 \quad (34)$$

$$\theta'' + P_r f\theta' = -(\gamma-1)M_\infty^2 P_r (f'')^2 \quad (35)$$

此时边界条件为

$$\left. \begin{aligned} f'(0) &= 0, \quad f(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_w \\ f'(\infty) &= 1, \quad \theta(\infty) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

4 结果与讨论

以上通过分析给出了描述高超声速可压缩层流边界层的一组常微分方程组(34)、(37)及(38), 对其进行求解, 即可得到可压缩层流边界层的解。

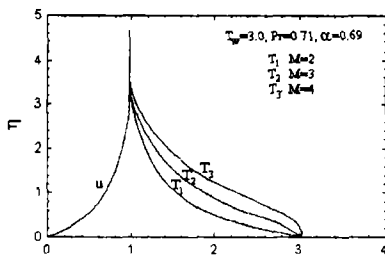


图 2. 物面速度及温度分布

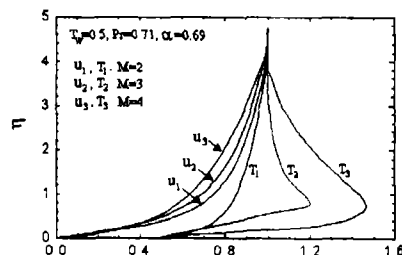


图 3. 物面速度及温度分布

图 2 给出了不同马赫数时沿热壁的速度和温度分布。从图中可以看出, 速度分布受马赫数

的影响不大,但是当 η 一定时,温度随马赫数的增加而增加,且当马赫数大于3.5时,由

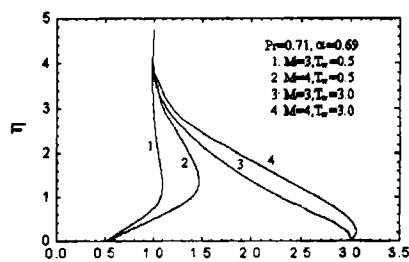


图 4. 物面温度分布

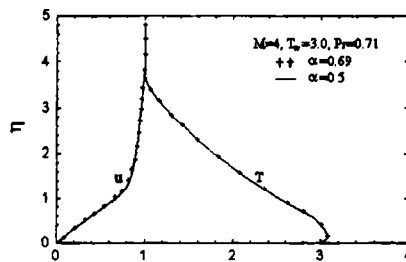


图 5. 物面速度及温度分布

于粘性耗散效应,出现流向壁面的热流。

图 3 是不同马赫数时沿冷壁流向的速度和温度分布。此时,随马赫数的增加,沿流向的速度分布发生变化,此时,流向壁面的热流不仅与粘性耗散有关,更重要的是与壁面对边界层的温度比有关,马赫数越大,粘性耗散效应越明显。

图 4 给出了马赫数为 3 和 4 时温度比所产生的影响。可以看出,粘性耗散效应对冷壁的影响要比热壁强烈得多。对热壁条件,粘性耗散只有在马赫数大于 3 时才变得相对重要,而冷壁条件时,马赫数大于 2 时粘性耗散就很明显。

图 5 给出了不同指数时沿壁面流向的速度分布以及温度分布。可以看出,在马赫数较大时,边界层内的温度以及边界层厚度随 α 的增加稍为增大。

参 考 文 献

1. Anderson, D. A.; et al. Computational fluid mechanics and heat transfer. MacGrawhill, 1984.
2. Li, T. Y.; et al. Shock wave effects on the laminar skin friction of an insulated flat plate at hypersonic speeds. J. Aeronautical Sci., 1953, 20(5):345~355.
3. Li, T. Y.; et al. Similar solutions of compressible boundary layer equations. J. Aeronautical Sci., 1955, 22(9):607~616.
4. Van Driest, E. R. Investigations of laminar boundary in compressible fluid using the Crocco method. NACA TN-2597, 1952.
5. Cohen, C. B.; et al. Similar solutions for the compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient. NACA Report 1293, 1957.
6. Bae, Y. Y.; et al. Boundary layer Tables for similar Compressible flow. AIAA J., 1989, 27(9):1163~1164.

Hypersonic Self-Similar Compressible Laminar Boundary Layer

Qiang Xiwen, Liu Feng, Zhang Jiangquan, Chen Yusheng

Northwest Institute of Nuclear Technology Xi'an, Shaanxi 710024, P. R. China

Abstract The self-similar solution of hypersonic compressible laminar boundary layer equations is obtained for air as calorically or thermally perfect gas, and where the viscosity is a power function of the temperature. Modified Levy-Mangle and Dorodnitsyn-Howarth transformations are introduced to solve the flow in the thin laminar boundary layer with no external pressure gradient on the smooth flat plate. These transformations describe the similarity variable in terms of a power of the density that take into account the viscosity-temperature power law relation. This results in an explicit relation between the stream function and the temperature fields described by a closed coupled system of nonlinear ordinary differential equations. The influence of the flow Prandtl number, wall to free-stream temperature ratio, and the power of the viscosity-temperature law are investigated.

Keywords Compressible laminar flow, Boundary layer, Self-Similarity