粘性流体力学基础
第二章: 粘性流体力学方程介绍

Ao Xu, Ph.D.

Associate Professor
Department of Fluid Mechanics, School of Aeronautics
Northwestern Polytechnical University

axu@nwpu.edu.cn

February 26, 2020

学习内容 (5学时)

1. 张量运算(1学时)
2. 连续方程(0.5学时)
3. 动量方程(2学时)
4. 能量方程(1.5学时)

2.1 张量运算：两种表示方法

- 张量理论是向量理论的直接延伸
- 向量两种表示方法：符号表示方法、指标表示方法

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i\mathbf{e}_i$$

求和约定：在以指标表示的向量或张量表达式中，某一指标在一项中出现两次，则表示该指标取遍$i = 1, 2, 3$的所有值，然后再对不同指标值的结果求和。

$$\mathbf{A} = A_i e_i$$

重复出现的指标称为哑标，单独出现的指标称为自由标。改变哑标的字母并不改变表达式的内容。

在n维空间中，任一向量可以用n个线性无关的基向量的线性组合来表示。

例：三维空间的笛卡尔坐标系x, y, z中，选择一组正交标准化基$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$分别为沿$x$, y, z轴的单位矢量，则

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

求和

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \quad \rightarrow \quad w_i = u_i + v_i$$

点乘

$$b = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \rightarrow \quad b = u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

2.1 张量运算：符号约定

Kronecker delta δ_{ij}:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{if } r \neq j. \end{cases}$$

满足

$$A_i\delta_{ij} = A_j, \qquad \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$$
$$\delta_{ii} = 3, \qquad \delta_{ij}\delta_{ij} = 3$$

例1：

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

例2：

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_i\mathbf{e}_i) \cdot (B_j\mathbf{e}_j) = A_iB_j(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = A_iB_j\delta_{ij} = A_iB_i$$

置换符号 ε_{ijk}:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{if } ijk = 123, 231, 312, \\ 0 & \text{if any two indexes are alike,} \\ -1 & \text{if } ijk = 321, 213, 132. \end{cases}$$

满足

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}, \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj}$$

例1:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rightarrow w_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k$$

例2:

$$\varepsilon_{ijk}\delta_{ij} = 0$$

张量$\mathbf{T}$的分量写成矩阵形式

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

对称张量 $Q_{ij} = Q_{ji}$， 反对称张量 $R_{ij} = -R_{ji}$

张量分解：任意张量T_{ij}可以分解为对称张量和反对称张量之和。

$$T_{ij} = \frac{1}{2}T_{ij} + \frac{1}{2}T_{ji} + \frac{1}{2}T_{ij} - \frac{1}{2}T_{ji}$$

其中，$\frac{1}{2}T_{ij} + \frac{1}{2}T_{ji}$为对称张量；$\frac{1}{2}T_{ij} - \frac{1}{2}T_{ji}$为反对称张量。

2.1 张量运算：梯度

标量的梯度为向量

$$\nabla \phi \quad \rightarrow \quad \partial_i \phi$$

向量的梯度为张量

$$\nabla \mathbf{v} \quad \rightarrow \quad \partial_i v_j$$

2.1 张量运算：散度

向量的散度为标量

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \quad \rightarrow \quad \partial_i v_i = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3$$

张量的散度为向量

$$\nabla \cdot \mathbf{T} \quad \rightarrow \quad \partial_i T_{ij}$$

例1：标量梯度的散度

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi \quad \rightarrow \quad \partial_i \partial_i \phi$$

例2：向量梯度的散度

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) = \nabla^2 \mathbf{v} \quad \rightarrow \partial_i \partial_i v_j$$

2.1 张量运算：张量代数

一个张量和一个向量的点积

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{T}=\mathbf{u} \quad\rightarrow\quad v_iT_{ij}=T_{ij}v_i=u_j$$

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{w} \quad\rightarrow\quad T_{ij}v_j=v_jT_{ij}=w_i$$

两个张量的双点积

$$\mathbf{T}:\mathbf{S}=a \quad\rightarrow\quad T_{ij}S_{ji}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}T_{ij}S_{ji}=a$$

两个向量的并矢积(dyadic product)

$$\mathbf{uv}=\mathbf{T} \quad\rightarrow\quad u_iv_j=T_{ij}$$

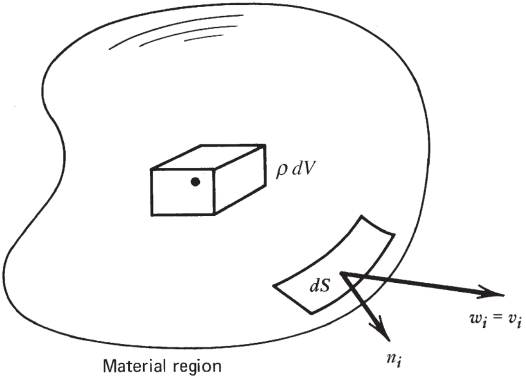
学习内容：第2.2节 连续方程(0.5学时)

1. 张量运算(1学时)
2. 连续方程(0.5学时)
3. 动量方程(2学时)
4. 能量方程(1.5学时)

2.2 连续方程：基本原理

- 前提：连续性假设
- 物理原理：质量守恒

$$\frac{dM_{MR}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{MR} \rho dV = 0$$



2.2 连续方程

Leibnitz定理

$$\frac{d}{dt}\int_{R(t)} T_{ij\ldots}(x_i,t)dV = \int_R \frac{\partial T_{ij\ldots}}{\partial t}dV + \int_S n_k w_k T_{ij\ldots}dS$$

$T_{ij\ldots}$可以为任一标量、向量、张量，则

$$\frac{d}{dt}\int_{MR} \rho dV = \int_{MR} \frac{\partial \rho}{\partial t}dV + \int_{MR} n_i v_i \rho dS = 0$$

Gauss定理

$$\int_R \partial_i (T_{jk}\cdots)dV = \int_S n_i T_{jk}\cdots dS$$

$T_{ij\ldots}$可以为任一标量、向量、张量， 则

$$\int_{MR} n_i v_i \rho dS = \int_{MR} \partial_i(\rho v_i)dV = 0$$

2.2 连续方程

$$\int_{MR} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{MR} \partial_i(\rho v_i) dV = 0$$

连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i(\rho v_i) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

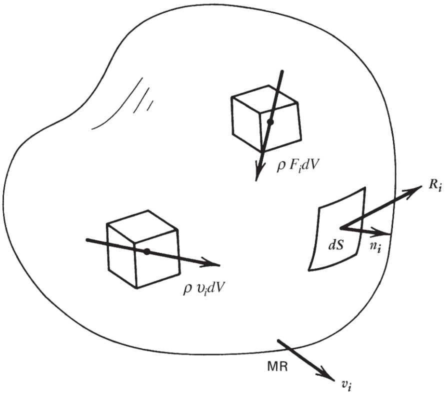
连续方程（不可压缩流动）

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

学习内容：第2.3节 动量方程(2学时)

1. 张量运算(1学时)
2. 连续方程(0.5学时)
3. 动量方程(2学时)
4. 能量方程(1.5学时)

- 类比于牛顿第二定律
- 考虑流体微团受体积力(F_i)和表面力(R_i)的作用



- 净受力

$$\int_{MR} \rho F_i dV + \int_{MR} R_i dS$$

- 动量变化率

$$\frac{d}{dt}\int_{MR} \rho v_i dV$$

则

$$\frac{d}{dt}\int_{MR} \rho v_i dV = \int_{MR} \rho F_i dV + \int_{MR} R_i dS$$

类似连续性方程中的推导，利用Leibnitz定理和Gauss定理

$$\int \left[\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \partial_j(\rho v_i v_j)\right] dV = \int \rho F_i dV + \int R_i dS$$

2.3 动量方程：表面力和应力张量

- 表面力R_i和应力张量T_{ij}：

$$R_j = n_i T_{ij}$$

垂直于i轴平面的应力施加在j方向

Gauss定理：

$$\int R_i dS = \int n_j T_{ji} = \int \partial_j T_{ji}$$

则

$$\int \left[\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \partial_j(\rho v_i v_j) - \rho F_i - \partial_j T_{ji} \right] dV = 0$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \partial_j(\rho v_i v_j) = \rho F_i + \partial_j T_{ji}$$

2.3 动量方程：应力张量

静止流体的应力张量$T_{ij} = -p_t\delta_{ij}$，其中热力学压强$p_t = f(e, \rho)$。

运动的流体表面元上承受法向应力和切向应力（内摩擦力）。

定义粘性应力张量τ_{ij}满足: $T_{ij} = -p_t\delta_{ij} + \tau_{ij}$

- 动力学压强$p_m = -1/3T_{ii}$

$$p_m - p_t = \xi \nabla \cdot \mathbf{V}$$

- 体积黏性系数 $\xi = \lambda + 2/3\mu$
- Stokes假设：$p_m = p_t$.

动量方程（不封闭，未知τ）

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \partial_j(\rho v_i v_j) = -\partial_i p + \partial_i \tau_{ij} + \rho F_i$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho \mathbf{F}$$

牛顿流体粘性定律（本构方程）

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda S_{kk}\delta_{ij} + 2\mu S_{ij}$$

其中，应变速率张量

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i v_j + \partial_j v_i\right)$$

μ为第一粘性系数，λ为第二粘性系数。

- 在固体力学中，应力与应变成正比。
- 在流体力学中，应力与应变速率成正比。

应力-应变速率本构关系

$$\tau_{ij} = \lambda S_{kk}\delta_{ij} + 2\mu S_{ij}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda\boldsymbol{\delta}\nabla\cdot\mathbf{v} + 2\mu\mathbf{S}$$

动量方程（封闭，含应力-应变速率本构关系）

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}+\partial_j(\rho v_i v_j)=-\partial_i p+\lambda\partial_i S_{kk}+2\mu\partial_i S_{ij}+\rho F_i$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\mathbf{v})=-\nabla p+\lambda\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})+2\mu\nabla\cdot\mathbf{S}+\rho\mathbf{F}$$

易证 $2\nabla\cdot\mathbf{S}=\partial_i S_{ij}=2\partial_i\left(\partial_i v_j+\partial_j v_i\right)=\partial_i\partial_i v_j+\partial_i\partial_j v_j=\nabla^2\mathbf{v}$

动量方程(不可压缩流动)

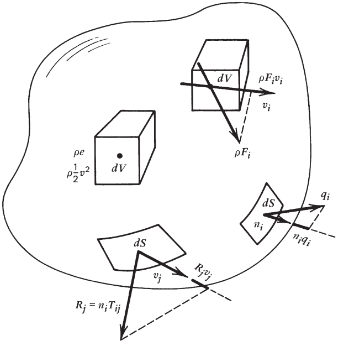
$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\mathbf{v}+\mathbf{F}$$

学习内容：第2.4节 能量方程(1.5学时)

1. 张量运算(1学时)
2. 连续方程(0.5学时)
3. 动量方程(2学时)
4. 能量方程(1.5学时)

- 能量变化速率等于热和功的传递
- 总能：内能（分子微观运动）和动能（宏观运动）之和

$$\rho(e+\frac{1}{2}v^2)dV$$



2.4 能量方程：做功和热传递

1. 体积力功率

$$(F_i \rho dV) v_i$$

表面力功率

$$(R_i dS) v_i = n_j T_{ji} v_i dS$$

2. 热量传递速率

$$-q_i n_i dS$$

其中$\mathbf{q}$为热通量（定义从表面内部传至外部为正）

2.4 能量方程：总能形式

能量变化速率等于热和功的传递速率

$$\frac{d}{dt}\int_{MR}\rho\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)dV=-\int_{MR}n_iq_idS+\int_{MR}\rho F_iv_idV+\int_{MR}n_iT_{ij}v_jdS$$

能量方程（总能形式，不封闭，未知$\mathbf{q}$）

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(e+\frac{1}{2}v^2)\right]+\partial_i\left[\rho v_i(e+\frac{1}{2})\right]=-\partial_iq_i+\partial_i(T_{ij}v_j)+\rho v_iF_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(e+\frac{1}{2}v^2)\right]+\nabla\cdot\left[\rho\mathbf{v}(e+\frac{1}{2}v^2)\right]=-\nabla\cdot\mathbf{q}+\nabla\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{v})+\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}$$

2.4 能量方程：内能形式

动量方程各项点乘v_i，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{1}{2}v^2\right)+\partial_i\left(\frac{1}{2}\rho v^2 v_i\right)=-v_i\partial_i p+v_i\partial_i\tau_{ij}+\rho v_i F_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)+\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{v}\frac{1}{2}v^2\right)=-\mathbf{v}\cdot\nabla p+\mathbf{v}\cdot(\nabla\cdot\tau)+\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}$$

总能形式的能量方程减去上式，同时结合关系式

$$\partial_i(T_{ij}v_j)+v_i\partial_i p-v_i\partial_i\tau_{ij}=\partial_i\left[(-p\delta_{ij}+\tau_{ij})v_j\right]+v_i\partial_i p-v_i\partial_i\tau_{ij}$$
$$=\partial_i(-pv_i)+\partial_j(\tau_{ij}v_i)+v_i\partial_i p-v_i\partial_i\tau_{ij}=-p\partial_i v_i+\tau_{ij}\partial_j v_i$$

能量方程（内能形式，不封闭，未知$\mathbf{q}$）

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e)+\partial_i(\rho v_i e)=-\partial_i q_i-p\partial_i v_i+\tau_{ij}\partial_j v_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e)+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}e)=-\nabla\cdot\mathbf{q}-p\nabla\cdot\mathbf{v}+\tau:\nabla\mathbf{v}$$

$$\frac{De}{Dt}=c_p\frac{DT}{Dt}-\rho^{-1}\beta T\frac{Dp}{Dt}+\rho^{-2}p\frac{D\rho}{Dt}$$

$$\frac{D(\rho e)}{Dt}=\rho c_p\frac{DT}{Dt}-\beta T\frac{Dp}{Dt}+\frac{p}{\rho}(-\rho\partial_i v_i)$$

2.4 能量方程：温度形式

能量方程（温度形式，不封闭，未知$\mathbf{q}$）

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\partial_i q_i + \tau_{ij}\partial_j v_i + \beta T \frac{Dp}{Dt}$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \tau : \nabla \mathbf{v} + \beta T \frac{Dp}{Dt}$$

Fourier 热传导定律

$$q_i = -\kappa \partial_i T$$

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$$

Newton 应力应变速率：

$$\tau_{ij} = \lambda S_{kk}\delta_{ij} + 2\mu S_{ij}$$

2.4 能量方程：温度形式

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \partial_i T \right) = \partial_i(\kappa \partial_i T) + (\lambda S_{kk}\delta_{ij} + 2\mu S_{ij})\partial_j v_i + \beta T \frac{Dp}{Dt}$$

能量方程（温度形式，封闭）

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \partial_i T \right) = \partial_i(\kappa \partial_i T) + \lambda S_{kk} S_{ii} + 2\mu S_{ij}\partial_j v_i + \beta T \frac{Dp}{Dt}$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + 2\mu \mathbf{S} : \mathbf{S} + \beta T \frac{Dp}{Dt}$$

The End