

# 第三章 线性系统的时域分析与校正

# 第三章 时域分析法

脉冲响应函数

一阶系统的时间响应及动态性能

二阶系统的时间响应及动态性能

高阶系统及性能估计

线性系统的稳定性分析

线性系统的稳态误差

线性系统的时域校正

### 3.1 概述

系统分析和设计的方法包括时域法、根轨迹、频域法。时域法一般通过直接计算系统在**典型输入信号** (**单位阶跃、单位脉冲、单位斜坡信号等**) 作用下的时间响应来评价系统，具有直观、准确的特点。时间响应分为动态过程和稳态过程，分析内容相应地包含动态性能 (**指标**) 和稳态性能 (**指标**) 两方面。

## 3.2 脉冲响应函数

零初始条件下，线性系统在单位脉冲信号作用下的响应称为**脉冲响应函数**。

$$\because L[\delta(t)] = 1, \quad \therefore K(s) = G(s)L[\delta(t)] = G(s),$$

$$k(t) = L^{-1}[K(s)] = L^{-1}[G(s)]$$

**结论：系统传递函数的拉氏反变换等于该系统的脉冲响应函数。**

脉冲响应函数与传递函数一一对应，就对系统动态特性的描述来讲，两者包含的信息量相同，因此脉冲响应函数也是系统的一种数学模型。

**已知系统的脉冲响应函数为  $k(t)$ ，则它在任意输入  $f(t)$  作用下的输出为  $k(t)$  和  $f(t)$  的时域卷积：**

**时域卷积：**  $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)k(t - \tau)d\tau$ ，记作  $f(t) * k(t)$ 。

证明：根据拉氏变换的时域卷积定理：

$$\text{若 } f(t) \rightarrow F(s), \quad k(t) \rightarrow G(s) \Rightarrow L\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)k(t - \tau)d\tau\right) = F(s)G(s)$$

知  $c(t) = L^{-1}\left(L(f(t)) \cdot G(s)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)k(t - \tau)d\tau$

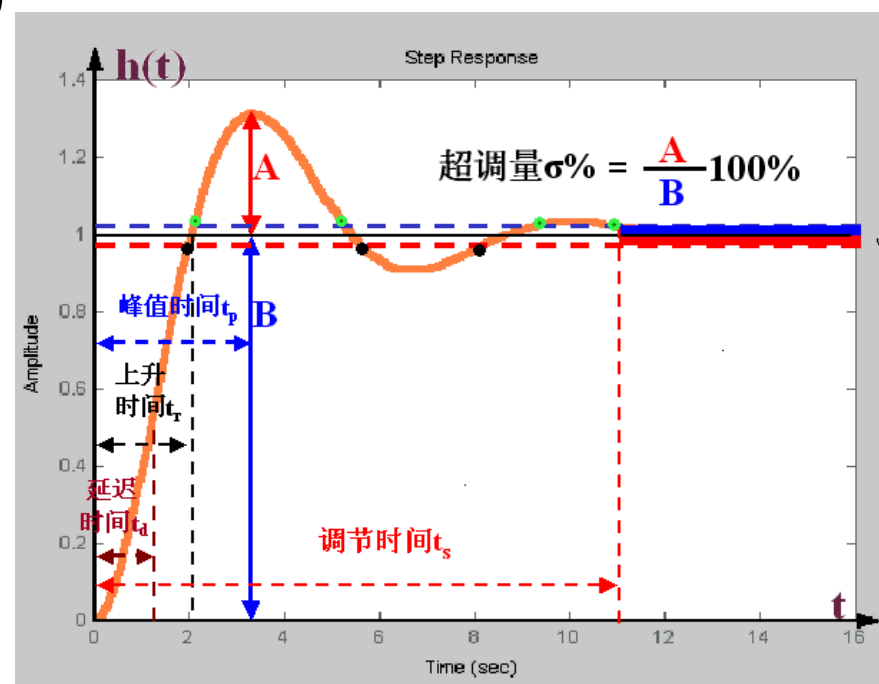
单位阶跃响应函数：零初始条件下，系统在单位阶跃信号  $1(t)$  作用下的输出。

单位阶跃信号：  $1(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}, \quad L(1(t)) = \frac{1}{s},$

系统在单位阶跃信号作用下输出的拉氏变换  $C(s) = \frac{G(s)}{s}$

单位阶跃响应函数：  $h(t) = L^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)$

根据单位阶跃响应定义的性能指标最明确，因此阶跃信号在系统分析中用的最多。



### 3.3 一阶系统的时间响应及动态性能

一阶系统是由一阶微分方程描述的系统，如 $RC$ 网络等。

微分方程：  $T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$

传递函数：  $\Phi(s) = \frac{1}{Ts + 1} \rightarrow$  特征根(闭环极点)  $\lambda = -\frac{1}{T}$

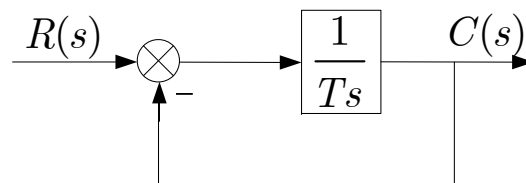
对应的单位反馈形式的结构图如右图，其中

$$G(s) = \frac{1}{Ts}$$

是开环传递函数。



$$\frac{G(s)}{1 + G(s)} = \Phi(s)$$



注：  $\Phi(s)$  中分母分子多项式的常数项均为1，称之为标准形式的

一阶系统，形如  $\frac{a}{Ts + b}$ ， $(a \neq b)$  的非标准一阶系统可以看做

是由一个比例环节和一个标准一阶环节串联构成的。

# 一、单位阶跃响应

$$C(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0$$

解的组成=稳态分量+瞬态分量

由输入的形式决定

稳定性取决于特征方程的根，系数与输入有关

在 $A \cdot 1(t)$ 作用下的响应：

$$C_1(s) = \frac{A}{s} \frac{1}{(Ts + 1)} = \frac{A}{s} - \frac{A}{s + \frac{1}{T}}, \quad h_1(t) = A - Ae^{-\frac{t}{T}}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0$$

可见：  $c(t)$  单调上升、非振荡、非周期。

1. 初始速度：  $\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{T}$

若以  $\frac{1}{T}$  等速上升到1，

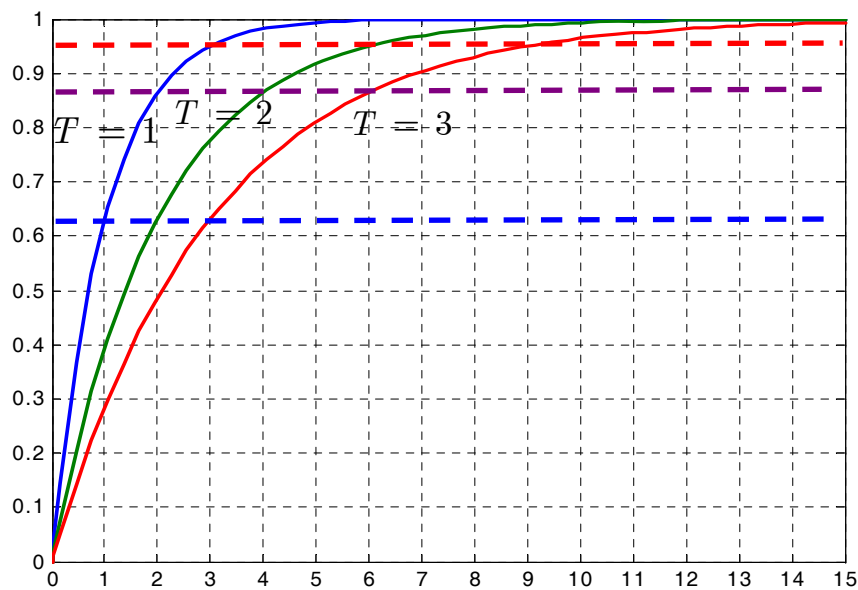
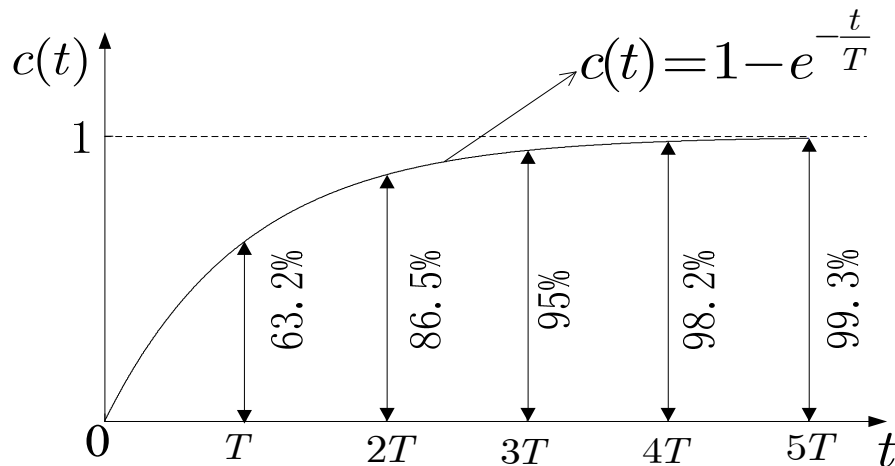
所需时间正好为  $T$ 。

2.  $T$ 是表征系统响应特征的唯一参数。

$T \downarrow \rightarrow t_s \downarrow \rightarrow$  快速性越好。

$$\begin{cases} t = T, c(T) = 0.632 \\ t = 2T, c(2T) = 0.865 \\ t = 3T, c(3T) = 0.95 \\ t = 4T, c(4T) = 0.98 \end{cases}$$

$t_s = 4T$  或  $t_s = 3T, t_p$  和  $\sigma\%$  均不存在



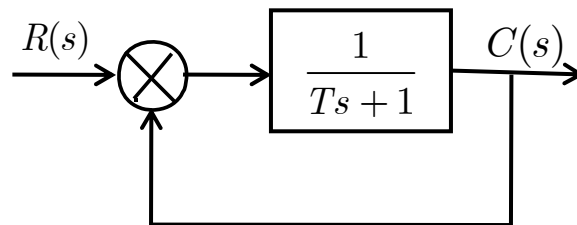


3. 稳态特性:  $e_{ss} = 1 - c(\infty) = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-\frac{t}{T}}) = 0$

这说明标准形式的一阶系统在单位阶跃信号作用下的稳态误差为零。  
然而对非标准一阶系统却并非如此。

如右图所示系统，闭环传递函数为：

$$\Phi_1(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{Ts+1}}{1 + \frac{1}{Ts+1}} = \frac{1}{Ts+2}$$



在单位阶跃信号作用下，输出的拉氏变换为：

$$C_1(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{Ts+2} = \frac{0.5}{s} - \frac{0.5T}{Ts+2} = \frac{0.5}{s} - \frac{0.5}{s + \frac{2}{T}}$$

$$c_1(t) = 0.5 - 0.5e^{-2t/T} \quad c_1(\infty) = 0.5 \neq 1$$

## 二. 单位脉冲响应:

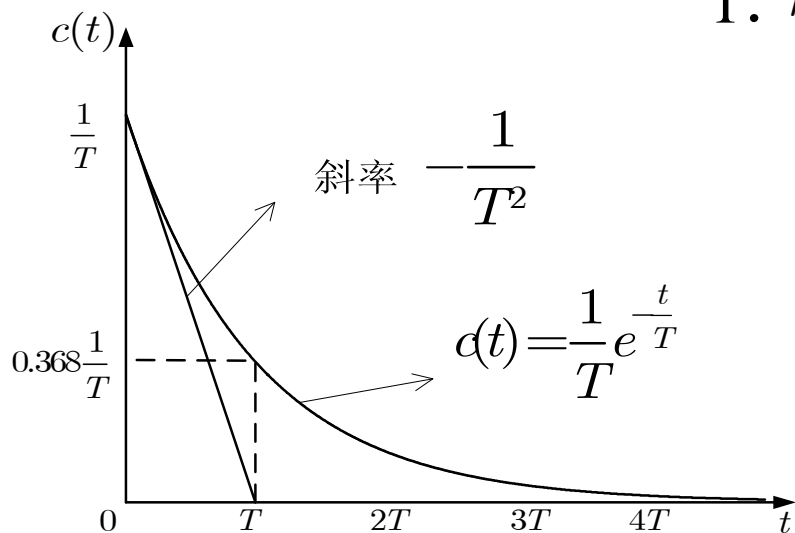
$$K(s) = \frac{1}{Ts+1} = \frac{1}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}}, \quad k(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

1.  $k(0) = \frac{1}{T}$  正好是单位阶跃响应的初始速度。

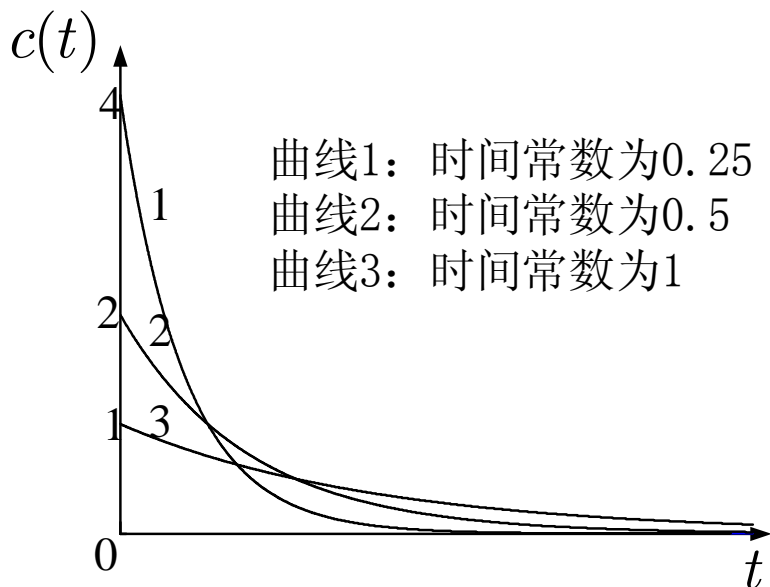
从  $c(t)$  和  $k(t)$  的表达式可以看出:

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} = k(t)$$

即单位阶跃响应的导数是单位脉冲响应。



2. 初始速度:  $\left. \frac{dk(t)}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{T^2}$



若系统保持初始速度不变,  $t = T$  时

$$k(t) = \frac{1}{T} - \frac{1}{T^2} t \Big|_{t=T} = 0$$

各条曲线和坐标轴所围成的区域的面积?

### 三. 单位斜坡响应: $r(t) = t$

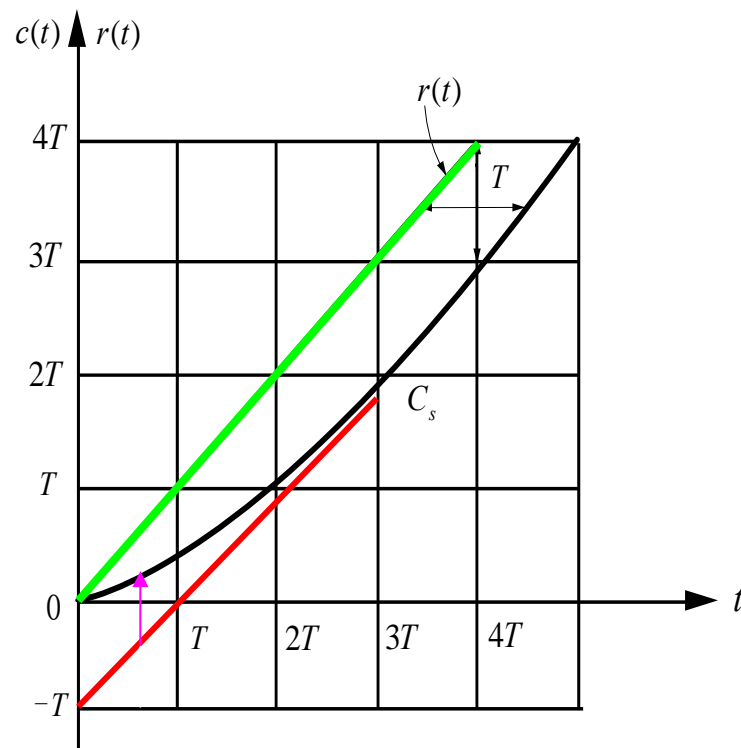
$$C(s) = \frac{1}{s^2(Ts + 1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + \frac{1}{T}}$$

$$c(t) = \underbrace{t - T}_{c_s(t)} + \underbrace{Te^{-\frac{t}{T}}}_{c_t(t)} = c_s(t) + c_t(t)$$

1.  $c_s(t)$  与  $r(t)$  同斜率但在时间上滞后一个  $T$ .

2. 初始速度:  $\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0} = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \Big|_{t=0} = 1 - 1 = 0$

3.  $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} (T - Te^{-\frac{t}{T}}) = T$



稳态输出与单位斜坡输入之间在位置上仍有误差,  $T \downarrow \rightarrow e_{ss} \downarrow$

4. 对斜坡响应求导:  $\frac{dc(t)}{dt} = 1 - e^{-\frac{t}{T}} = c_{\text{阶}}(t)$

即单位斜坡响应的导数是单位阶跃响应。

四、单位加速度响应： $r(t)=\frac{t^2}{2}$

$$C(s)=\frac{1}{s^3(Ts+1)}=\frac{1}{s^3}-\frac{T}{s^2}+\frac{T^2}{s}-\frac{T^2}{s+\frac{1}{T}}$$

$$c(t)=\frac{1}{2}t^2-Tt+T^2-T^2e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\therefore e(t)=r(t)-c(t)=Tt-T^2(1-e^{-\frac{t}{T}})$$

$$\text{故 } e_{ss}=\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)=\lim_{t \rightarrow \infty} [Tt-T^2+T^2e^{-\frac{t}{T}}]=\infty$$

1. 一阶系统不能跟踪加速度信号。

2. 对加速度响应求导：

$$\frac{dc(t)}{dt}=t-T+Te^{-\frac{t}{T}} = \text{斜坡响应。}$$

$$\Delta \therefore \delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) = \frac{d^2}{dt^2} t \cdot 1(t) = \frac{d^3}{dt^3} \frac{1}{2} t^2 \cdot 1(t)$$

$$\therefore g(t) = \frac{d}{dt} c_{\text{阶}}(t) = \frac{d^2}{dt^2} c_{\text{斜}}(t) = \frac{d^3}{dt^3} c_{\text{加}}(t)$$

★导数的响应等于响应的导数；积分的响应等于响应的积分。换句话说，信号被微/积分和信号通过线性系统两种变换可以交换顺序。这是线性定常系统的一个重要特征，适用于任何阶线性系统。

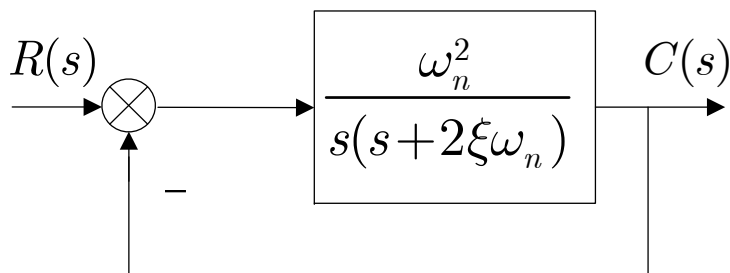
## 3.4 二阶系统的时间响应及动态性能

### 3.4.1 二阶系统传递函数标准形及分类

定义——由二阶微方描述的系统。如R-L-C网络、  
电枢控制电动机、两级RC串联等

微分方程：
$$\ddot{c}(t) + 2\xi\omega_n\dot{c}(t) + \omega_n^2c(t) = \omega_n^2r(t)$$

传函：
$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \Phi(s) = \frac{1}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$$



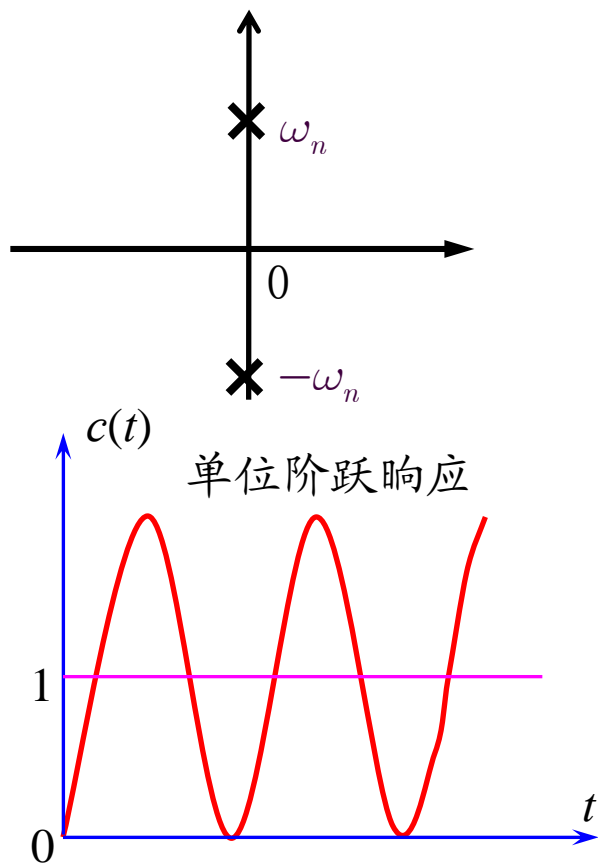
$\omega_n \rightarrow$  无阻尼自然频率

$T = \frac{1}{\omega_n} \rightarrow$  时间常数

$\xi \rightarrow$  阻尼比

特征方程:  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$  特征根:  $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$

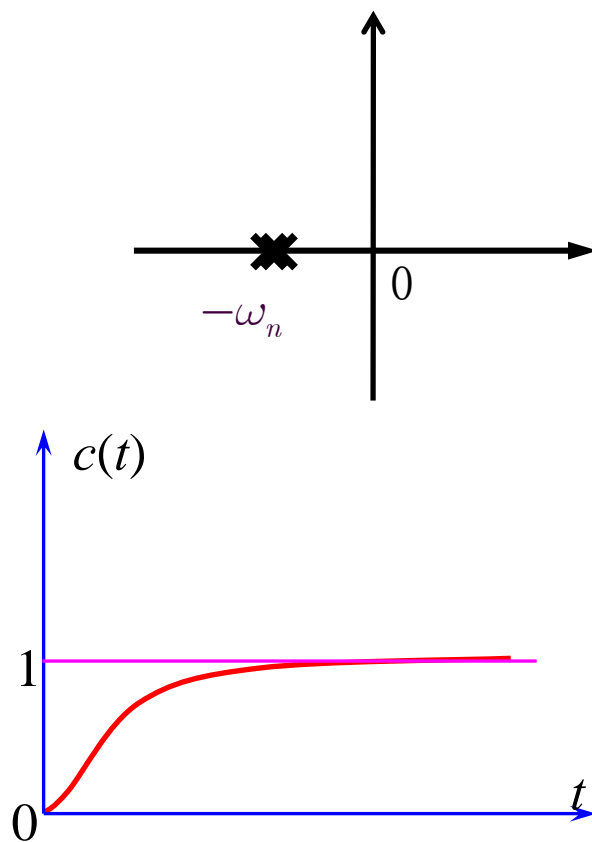
①  $\xi = 0: s_{1,2} = \pm j\omega_n$



(1) 无阻尼

无阻尼等幅震荡

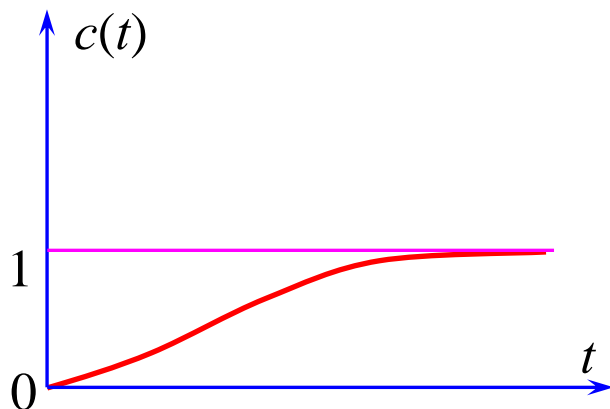
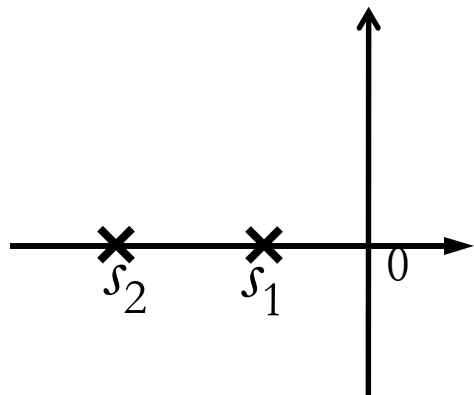
②  $\xi = 1: s_{1,2} = -\omega_n$



(2) 临界阻尼

震荡不震荡的临界点, 临界阻尼

③  $\xi > 1$ : 两个不相等负实根

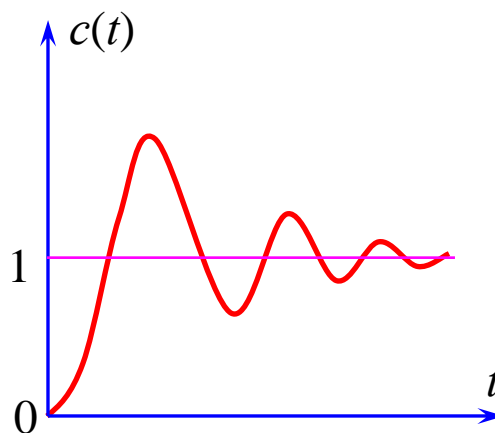
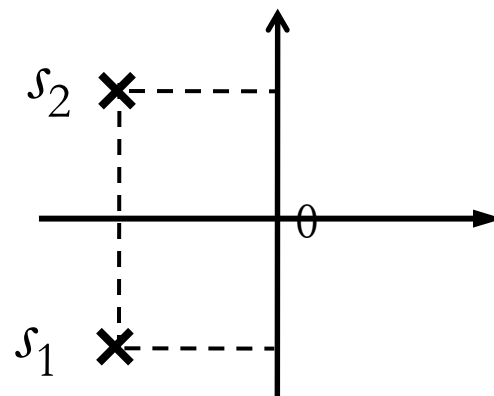


(c) 过阻尼

系统响应不震荡，过阻尼

④  $0 < \xi < 1$ :

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$



(d) 欠阻尼

系统响应震荡，欠阻尼



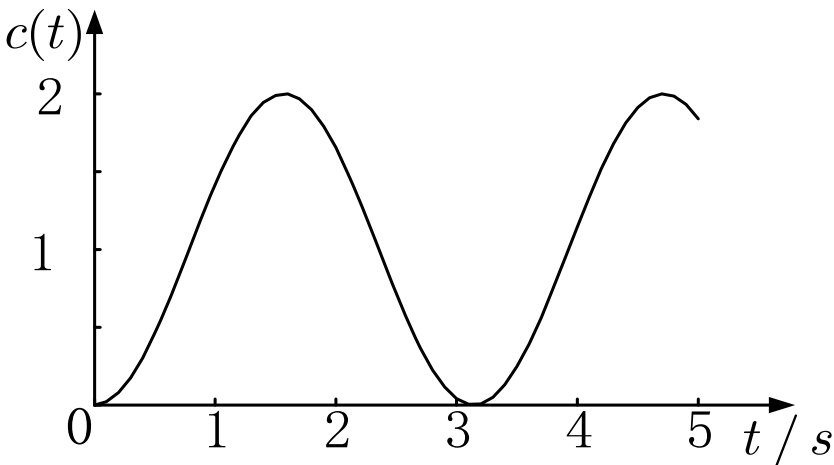
### 3. 4. 2 二阶系统的单位阶跃响应

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$$

(一)  $\xi=0$  :

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+\omega_n^2)}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$$

$$c(t)=1-\cos\omega_n t$$



可见：系统处于无阻尼状态，响应为等幅振荡的周期函数，频率为 $\omega_n$ ，故称 $\omega_n$ 为无阻尼自然频率。

$$\sigma\% = 100\%, \quad t_s = \infty, \quad e_{ss} = ? \quad ? \quad ?$$

(二)  $\xi > 1$ : 过阻尼

系统特征方程有两个不相等的负实根

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1/(T_1 T_2)}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$T_1 = \frac{1}{\omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}, T_2 = \frac{1}{\omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}, \text{显然 } T_1 > T_2$$

过阻尼二阶系统可以看成是两个时间常数不同的惯性环节串联。

计算单位阶跃响应

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1/(T_1 T_2)}{s\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)} + \frac{A_2}{\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}$$

$$A_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = 1$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T_1}} \frac{1/(T_1 T_2)}{s(s + \frac{1}{T_2})} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T_2}} \frac{1/(T_1 T_2)}{s(s + \frac{1}{T_1})} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

$$\therefore c(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}$$


---

稳态分量

瞬态分量

无差系统

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{T_1}{T_1 - T_2} \frac{1}{T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \frac{1}{T_2} = 0$$

曲线单调上升，存在拐点，

不存在 $\sigma\%$ 和 $t_p$

## 过阻尼二阶系统的调节时间计算

$$c(t) = 1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}$$

$$c(t_s) = 1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t_s} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t_s} = 0.95$$

$$1 - \frac{T_1/T_2}{1 - T_1/T_2} e^{-\frac{t_s}{T_1}} + \frac{1}{T_1/T_2 - 1} e^{-\frac{t_s}{T_2}} = 0.95$$

$$1 - \frac{X}{1 - X} e^{-\frac{t_s}{T_1}} + \frac{1}{X - 1} e^{-X \frac{t_s}{T_1}} = 0.95$$

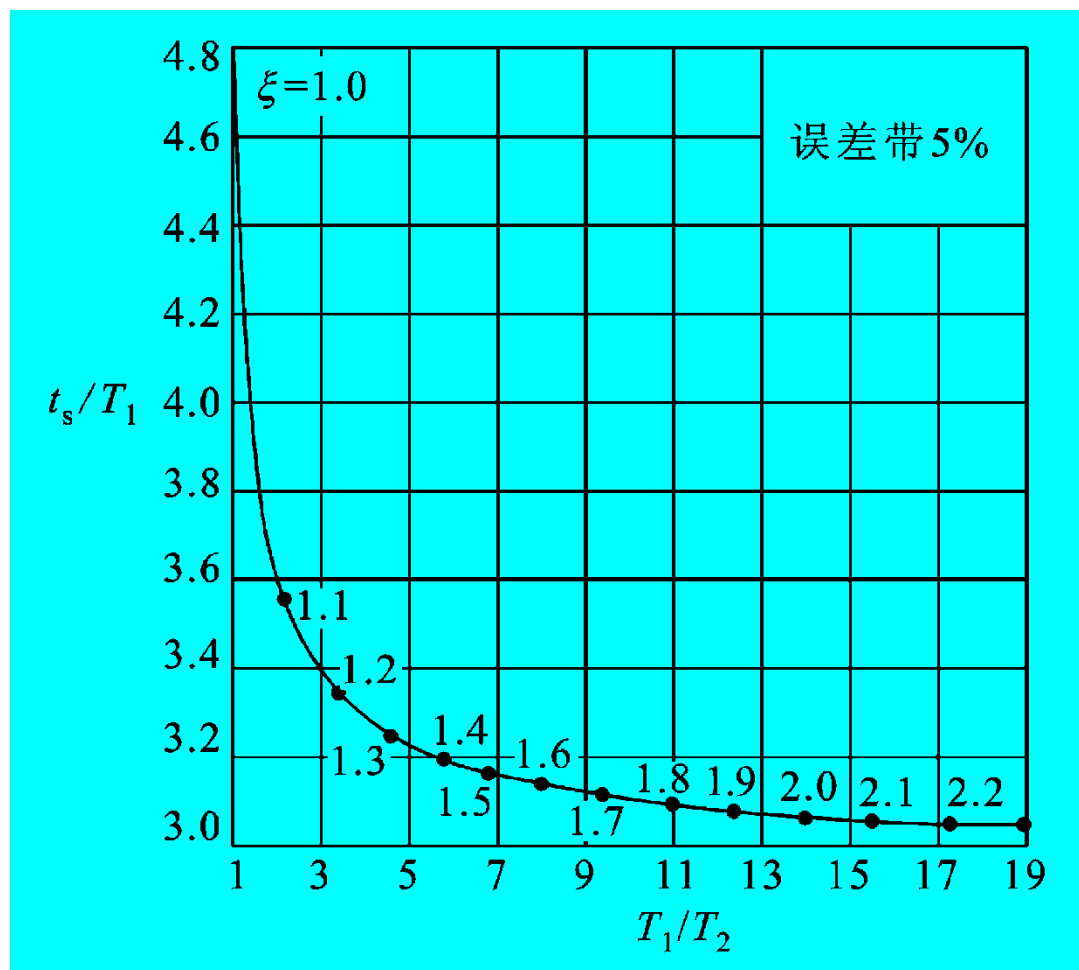
$$\text{令 } X = T_1 / T_2$$

$$1 - \frac{X}{1 - X} e^{-Y} + \frac{1}{X - 1} e^{-XY} = 0.95$$

$$\text{令 } Y = \frac{t_s}{T_1}$$

给定一系列 $X$ 值，计算相应的 $Y$ 值，画出 $Y$ - $X$ 的曲线

$$1 - \frac{X}{1-X} e^{-Y} + \frac{1}{X-1} e^{-XY} = 0.95$$



当  $T_1=T_2$  ( $\xi=1$  的临界阻尼情况):

调节时间  $t_s=4.75T_1$ ;

当  $T_1=4T_2$  ( $\xi=1.25$ ) 时:

$t_s \approx 3.3T_1$ ;

当  $T_1 > 4T_2$  ( $\xi > 1.25$ ) 时:

$t_s \approx 3T_1$ 。

注意:  $T_1$  是极点离虚轴较近的惯性环节对应的时间常数

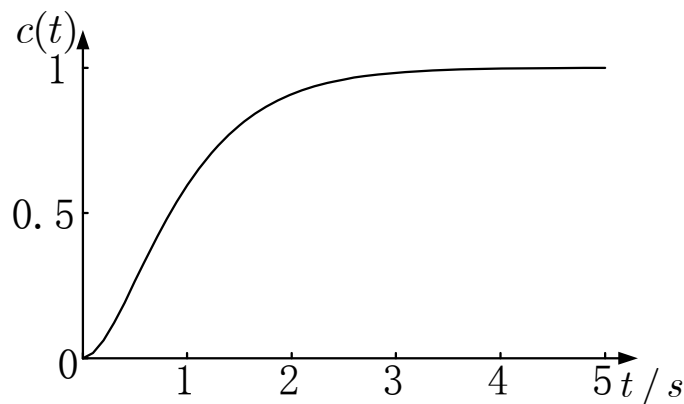
$$T_1 = \frac{1}{\omega_n (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}, T_2 = \frac{1}{\omega_n (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}, \frac{T_1}{T_2} = \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}{(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} = (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^2 \Rightarrow \xi \uparrow \text{ 则 } \frac{T_1}{T_2} \uparrow$$

## 说明:

- 系统两个负实根绝对值之比大于4时（即两个惯性环节时间常数相差4倍以上，系统阻尼比大于1.25），二阶过阻尼系统可以用时间常数较大的一阶系统近似代替, 此时的调节时间为 $3T_1$ .
- 从系统响应表达式看，若两个时间常数相差4倍以上，则时间常数较小者相对于时间常数较大者来讲，很快衰减到0，对系统不再有影响，因此系统响应主要取决于时间常数较大的一阶系统
- 过阻尼二阶系统两个极点到虚轴的距离相差4倍以上时，离虚轴较远的模态可以忽略。
- 系统阻尼比大于等于1，小于等于1.25时，查图计算调节时间。

(三)  $\xi=1$  :

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2)}$$
$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2}$$



$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$$

临界阻尼的单位阶跃响应为非周期单调上升过程。

$$\frac{dc(t)}{dt} = \omega_n e^{-\omega_n t} - \omega_n e^{-\omega_n t} + \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$

$t=0$  时, 变化率为0,  $t > 0$  后变化率为正 ;

$t \rightarrow \infty$  变化率趋于0 , 曲线存在拐点。

注: 一阶系统的单位阶跃响应不存在拐点且斜率由 $\frac{1}{T}$ 单调减小。

调节时间 $t_s$ 可按照 $T_1 = T_2$ 时的过阻尼情况来处理, 于是有

$$t_s = 4.75 T_1$$

(四)  $0 < \xi < 1$ :

$$\phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

一对共轭复数根  $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

定义有阻尼振荡角频率  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} < \omega_n$

则  $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$

在初始条件为零，输入信号为单位阶跃信号  $r(t)=1(t)$  时，系统输出的拉氏变换为：



$$\begin{aligned}
 C(s) &= \phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \\
 &= \frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \\
 &= \frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi\omega_n}{\omega_d} \frac{\omega_d}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c(t) &= 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t \right) \\
 &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\sqrt{1-\xi^2} \cos \omega_d t + \xi \sin \omega_d t) \quad (t \geq 0)
 \end{aligned}$$

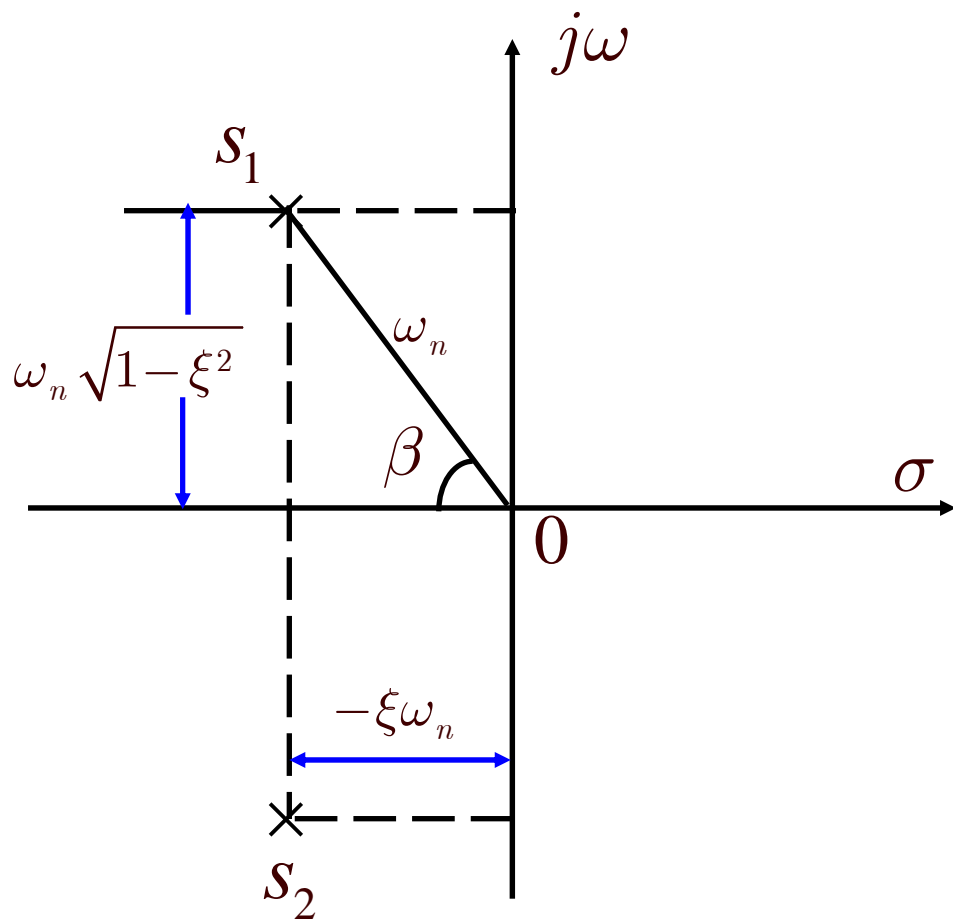
$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \beta) \qquad \beta = \cos^{-1} \xi = \arg \tan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$$c(t) = 1 + \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \beta),$$

稳态分量

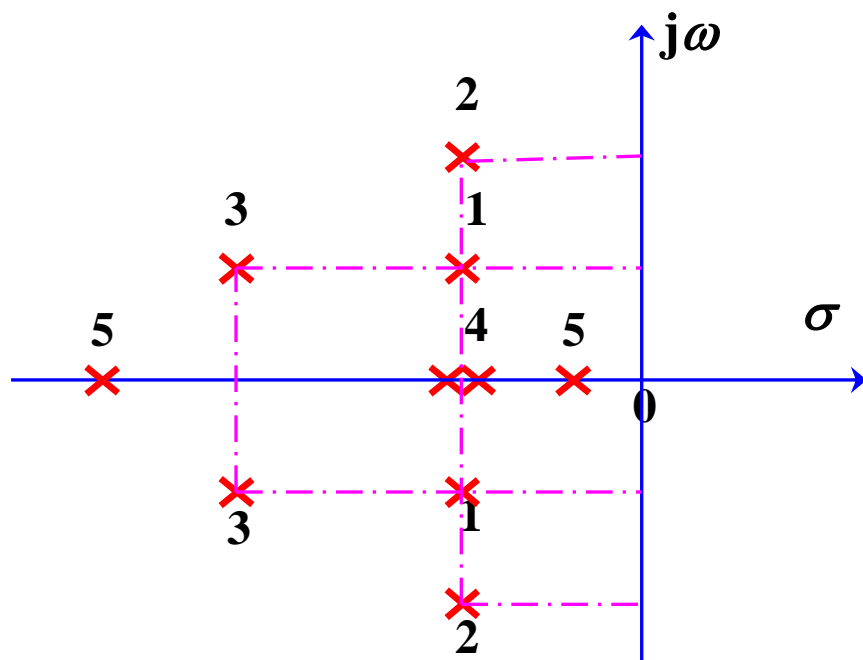
瞬态分量

$$\beta = \cos^{-1} \xi = \arg \tan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

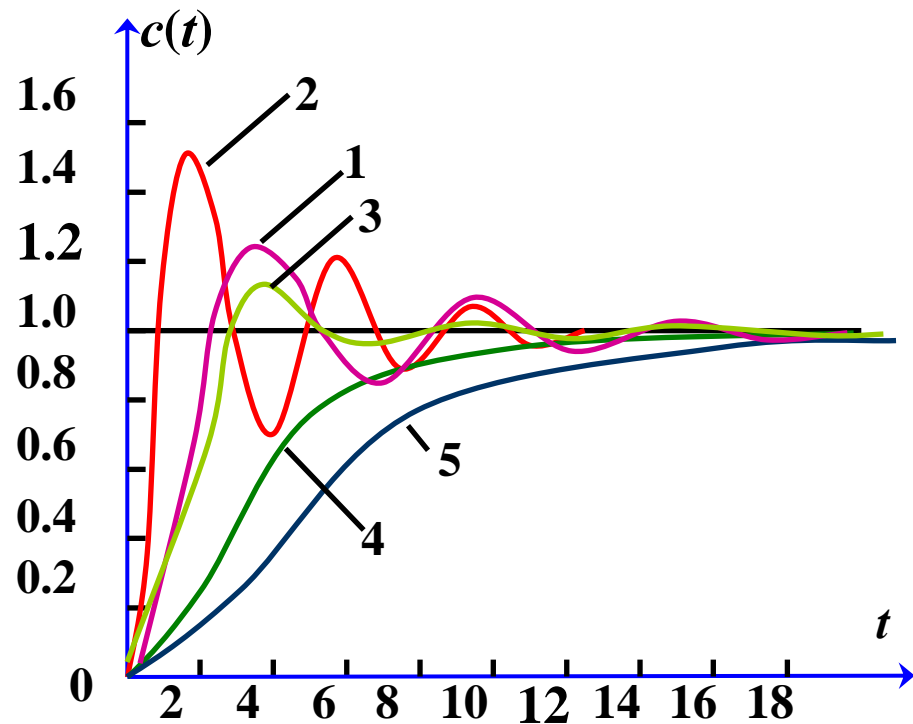


$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

- 系统稳定否：极点在虚轴左侧则稳定；
- 系统动态分量的衰减速度由谁决定：极点离虚轴的距离越远衰减越快；
- 响应振荡频率由谁决定：极点到实轴的距离越大振荡频率越高；
- 阻尼不变，增大无阻尼自然频率：衰减加快，振荡频率增大；
- 阻尼角越大，阻尼越小；
- 无阻尼自然频率不变，阻尼增大：极点向实轴靠拢，衰减加快，振荡频率变小；

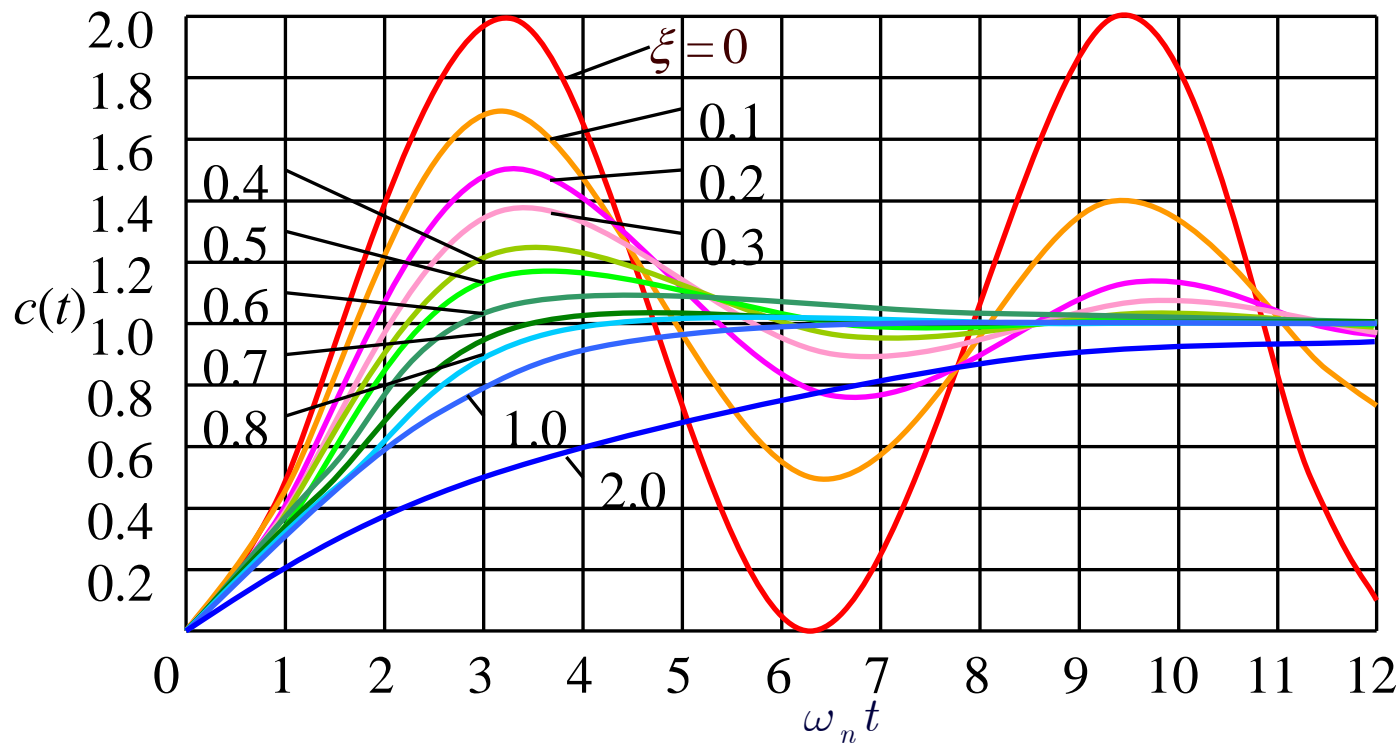


(a) 闭环极点分布



(b) 单位阶跃 响应曲线

稳定二阶系统特征根的分布和响应的关系



- 当阻尼比大于等于1时，系统阶跃响应不出现峰值，无超调；
- 当阻尼比大于0且小于1时，系统震荡衰减，有超调，阻尼比越大，超调量越小，震荡越弱；
- 当阻尼比为0时，系统以无阻尼自然频率等幅震荡，系统实际上不稳定。
- 稳态时  $c(\infty) = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \beta) = 1$

# 欠阻尼二阶系统性能指标的计算

## ● 计算延迟时间 $t_d$

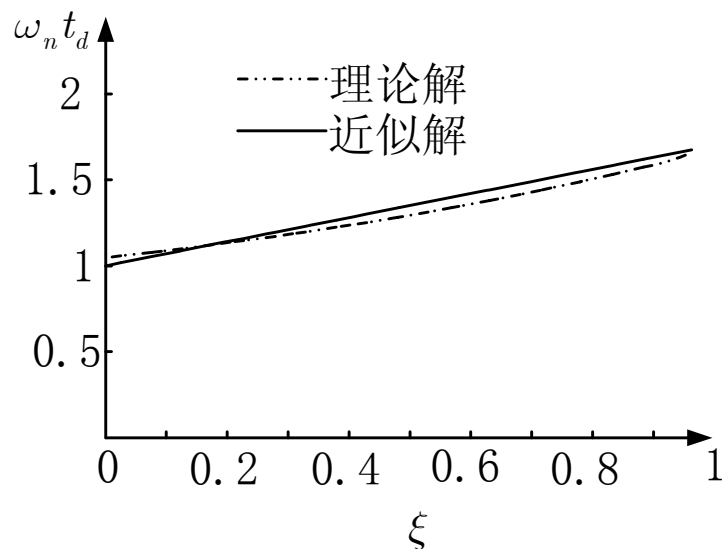
$$h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta), \quad t \geq 0$$

令  $h(t_d) = 0.5$  ,  $\beta = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \arccos \xi$  代入上式

$$\omega_n t_d = \frac{1}{\xi} \ln \frac{2 \sin(\sqrt{1-\xi^2} \omega_n t_d + \arccos \xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

直接求解  $t_d$  需要反复迭代，不方便。可画出  $\omega_n t_d$  和  $\xi$  之间的关系曲线图，再用曲线拟合的方法得出经验公式：

$$t_d = \frac{1+0.7\xi}{\omega_n} \quad 0 < \xi < 1$$



$$t_d = \frac{1 + 0.7\xi}{\omega_n} \quad 0 < \xi < 1$$

结论：

- 减小阻尼（增大阻尼角）可以减小延迟时间；
- 增大无阻尼自然频率可以减小延迟时间，或者说共轭复数极点距离原点越远，延迟时间越小。

## ● 计算上升时间 $t_r$

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta), t \geq 0$$

令  $h(t_r) = 1$  , 代入上式

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\sqrt{1-\xi^2} \cos \omega_d t_r + \xi \sin \omega_d t_r) = 0$$

$$\text{因为 } e^{-\xi\omega_n t_r} \neq 0, \quad \cos \omega_d t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t_r = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \Rightarrow t_r = \frac{1}{\omega_d} \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$$\because \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \pi - \beta, \quad \therefore t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

- 增大阻尼角，即减小阻尼比，可以减小上升时间；
- 增大有阻尼角频率可以减小上升时间，共轭复数极点距离实轴越远，上升时间越小。

●计算峰值时间  $t_p$

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta), t \geq 0$$

$$\text{令 } \left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = 0$$

$$-\frac{e^{-\xi\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\xi^2}} \omega_d \cos(\omega_d t_p + \beta) + \frac{\xi\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \beta) = 0$$

$$\text{即 } \xi\omega_n \sin(\omega_d t_p + \beta) = \omega_d \cos(\omega_d t_p + \beta)$$

$$\therefore \text{有 } \tan(\omega_d t_p + \beta) = \frac{\omega_d}{\xi\omega_n} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \tan \beta$$

$$\therefore \omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

$$\text{应取 } \omega_d t_p = \pi. \quad \therefore t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$



$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

结论：

- 峰值时间等于有阻尼震荡周期的一半
- 峰值时间和共轭复数极点 to 实轴的距离成反比。
- 共轭复数极点 to 实轴的距离和无阻尼自然频率及阻尼比均有关。阻尼比不变时，无阻尼自然频率和峰值时间成反比。无阻尼自然频率不变时，阻尼比越大，峰值时间越大。

$$\begin{cases} \xi \text{一定时}, \omega_n \uparrow \rightarrow t_p \downarrow \\ \omega_n \text{一定时}, \xi \uparrow \rightarrow t_p \uparrow \end{cases}$$

## 超调量计算 $\sigma\%$

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta), \quad t \geq 0$$

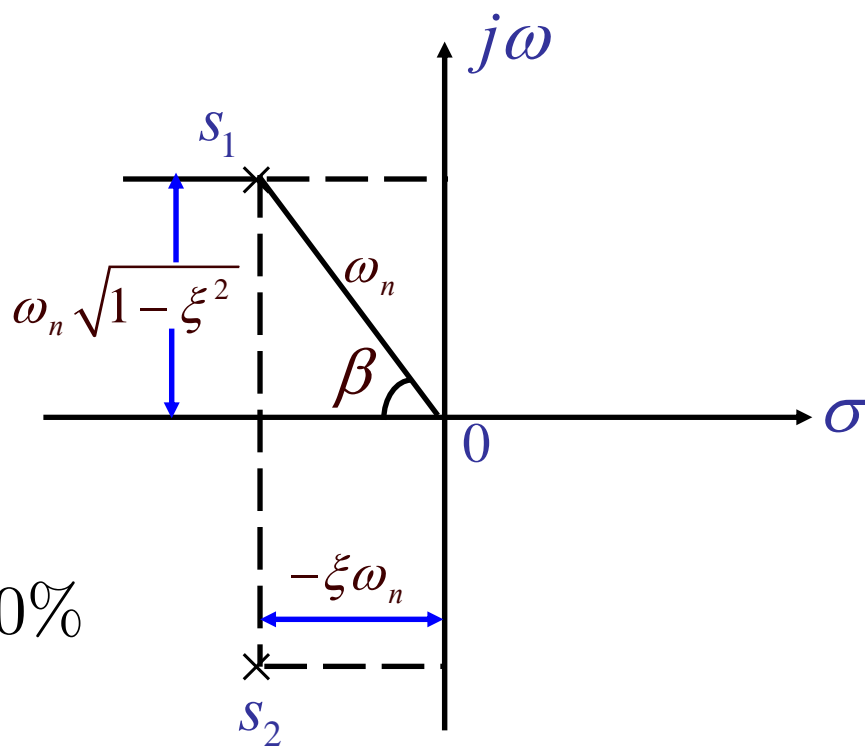
$$\text{令 } t_p = \frac{\pi}{\omega_d}, \text{ 代入 } c(t) \text{ 中有: } c(t_p) = 1 - \frac{e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\pi + \beta)$$

$$\sin \beta = \sqrt{1-\xi^2},$$

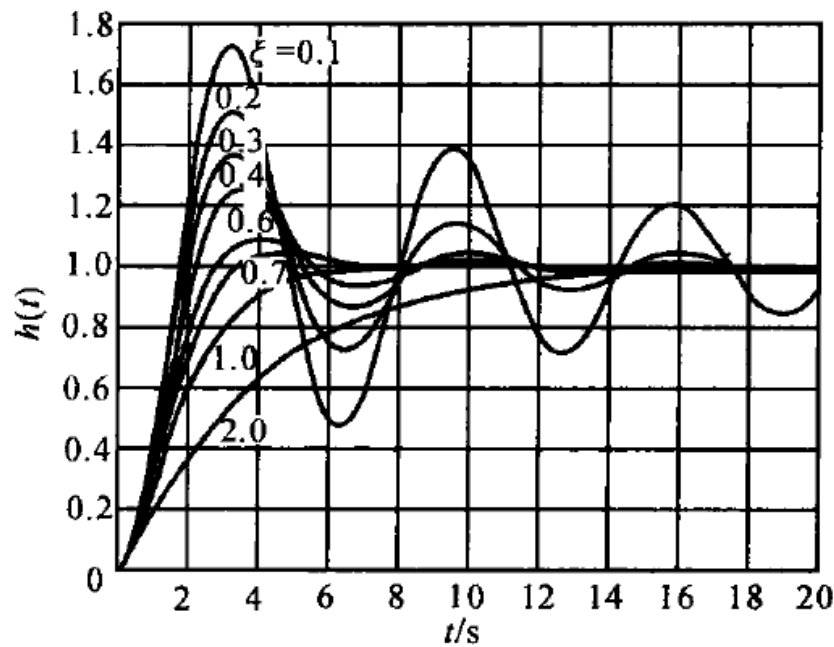
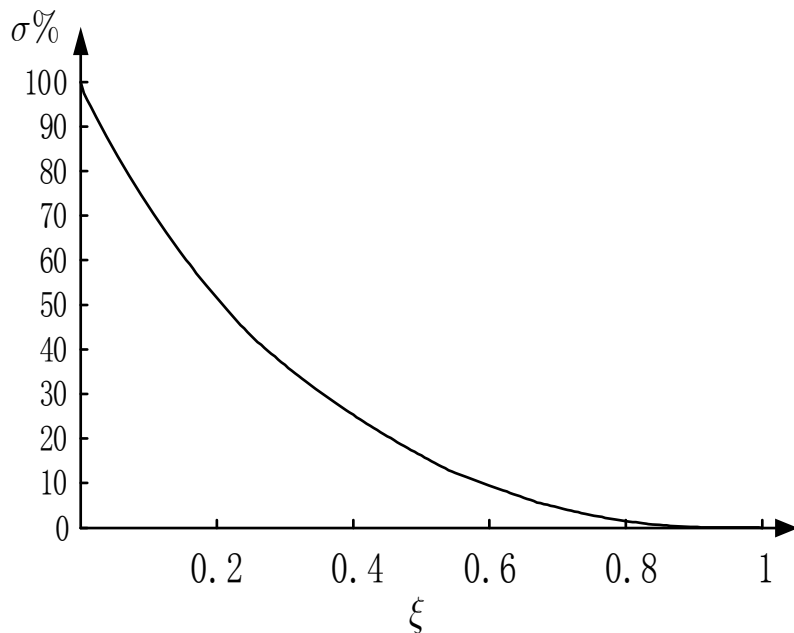
$$\therefore \sin(\pi + \beta) = -\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\text{则 } c(t_p) = 1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\text{则 } \sigma\% = c(t_p) - 1 = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\%$$



$$\sigma\% = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\%$$



$\omega_n=1$ ,  $\xi$ 变化时的响应曲线

结论:

- $\sigma\%$ 只与 $\xi$ 有关, 与 $\omega_n$ 无关, 且 $\xi \uparrow \rightarrow \sigma\% \downarrow$
- $\omega_n$ 变化, 只要极点落在等阻尼线上,  $\sigma\%$ 就保持不变。
- $\omega_n$ 不变, 极点越靠近实轴,  $\sigma\%$ 越小。
- 设计时按照所要求 $\sigma\%$ , 先确定 $\xi$ , 再确定 $\omega_n$ 。

## 🌐调节时间计算

单位阶跃响应进入 $\pm \Delta$ 误差带的最小时间。

根据定义  $|c(t) - c(\infty)| \leq \Delta \times c(\infty) \quad (t \geq t_s)$

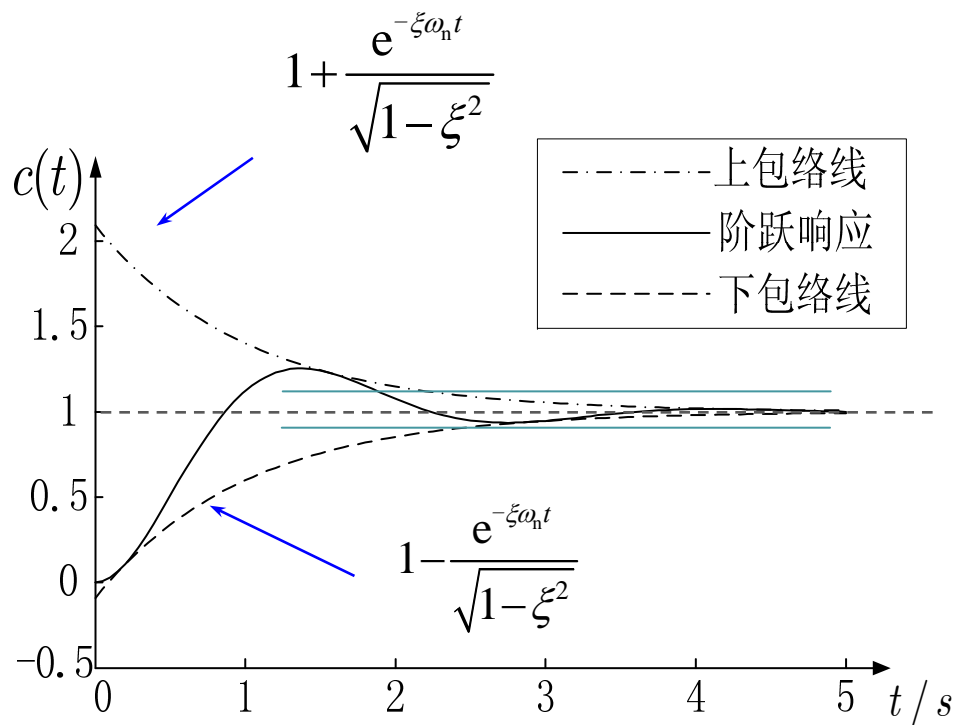
有  $\left| \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \beta) \right| \leq \Delta \quad (t \geq t_s) \quad \text{不好计算}$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \beta)$$

因  $|\sin(\omega_d t + \beta)| \leq 1$

则曲线的包络线为:  $1 \pm \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}$

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \leq \Delta \quad (t \geq t_s)$$



设当  $t=t_s$  时包络线与误差带的边线相交

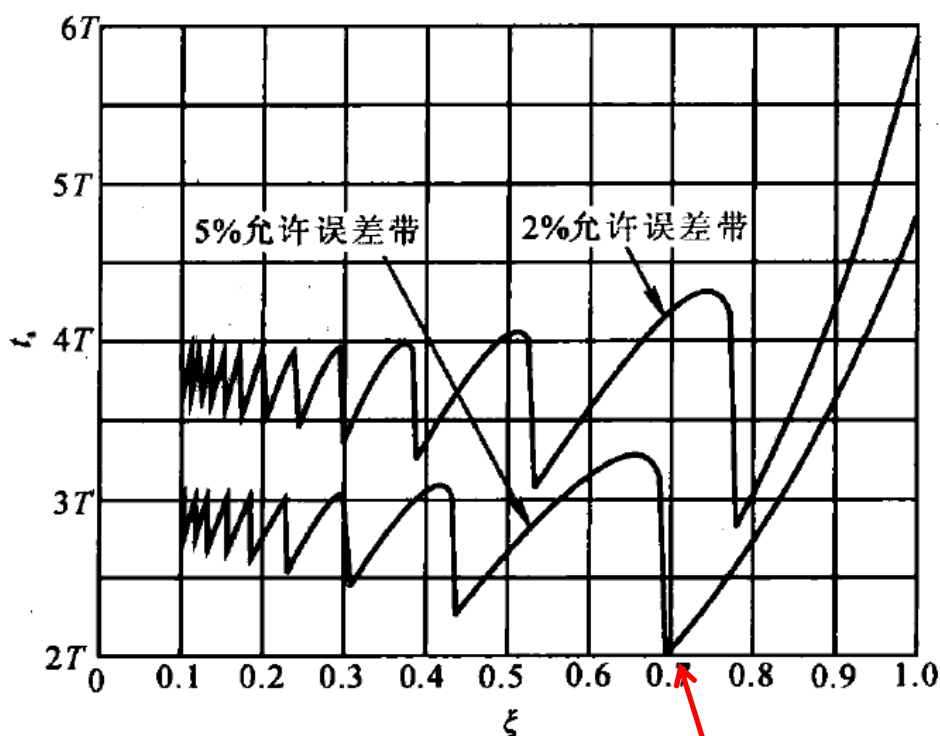
$$\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} = \Delta \quad \rightarrow \quad t_s = \frac{1}{\xi\omega_n} \ln \frac{1}{\Delta\sqrt{1-\xi^2}}$$

当  $0.3 < \xi < 0.8$  时，在上式对数项中令  $\xi = 0.8$  (使计算结果再次偏保守)  
并取  $\Delta = 0.05$  时，得

$$t_s \approx \frac{3.5}{\xi\omega_n}$$

取  $\Delta = 0.02$  时，

$$t_s \approx \frac{4.5}{\xi\omega_n}$$



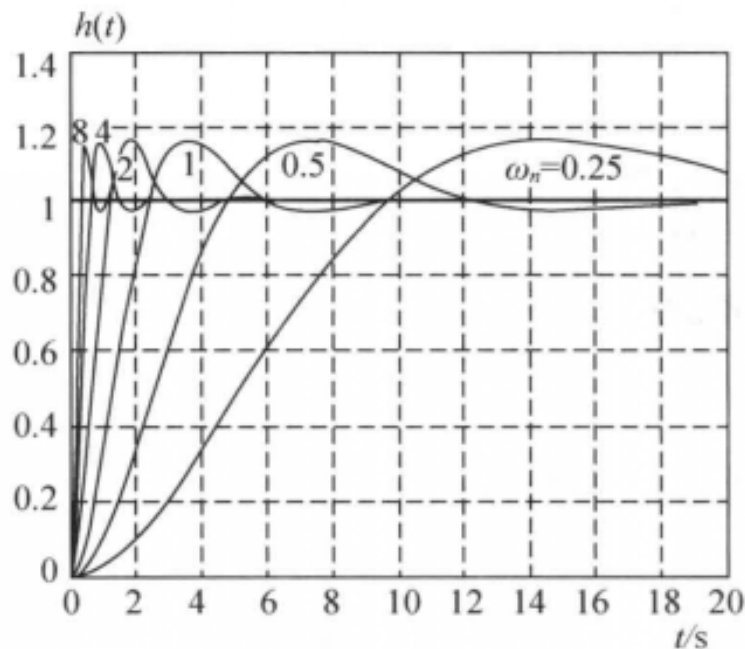
最佳阻尼比  $\xi = 0.707$

结论:

- $0.3 < \xi < 0.8$ 时, 系统调节时间与闭环极点 to 虚轴的距离近似成反比。
- 阻尼比不变, 无阻尼自然频率增大, 则调节时间缩短
- 增大无阻尼自然频率可使所有的时间指标缩短。

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \beta)$$

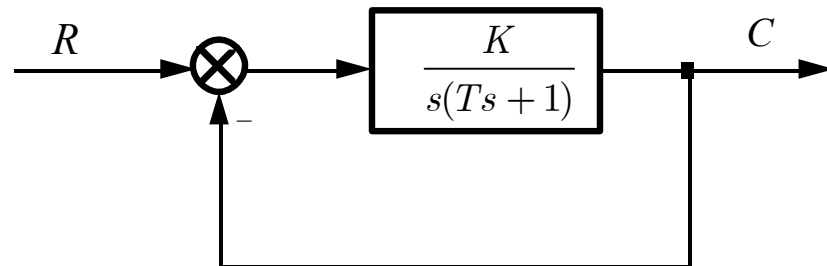
$$c(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}$$



$\xi=0.5$ ,  $\omega_n$ 改变时的阶跃响应

- 不同指标对参数的要求不同, 甚至有些是相互矛盾的, 如上升时间和超调量对阻尼比的要求正好相反。

例. 已知如图所示系统。  $K = 16, T = 0.25$



(1) 求 $\xi$ 与 $\omega_n$

(2) 计算 $\sigma\%$ 与 $t_s$

(3) 若要求 $\sigma\%=16\%$ , 当 $T$ 不变时,  $K$ 取何值?

解: (1)  $\Phi(s) = \frac{K}{Ts^2 + s + K} = \frac{\frac{K}{T}}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T}} \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}} = \sqrt{\frac{16}{0.25}} = 8$

$$\xi = \frac{1}{2T\omega_n} = \frac{1}{2 * 0.25 * 8} = 0.25$$

$$(2) \quad \sigma\% = e^{-\frac{0.25\pi}{\sqrt{1-0.25^2}}} \times 100\% = 44\%, \quad t_s \approx \frac{4.5}{0.25 * 8} = 2.25$$

$$(3) \quad \text{为使} \sigma\% = 16\%, \text{ 则 } -\xi\pi = \sqrt{1-\xi^2} \ln 0.16 = -1.83\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\text{故} \xi = \sqrt{\frac{3.35}{\pi^2 + 3.35}} \approx 0.5$$

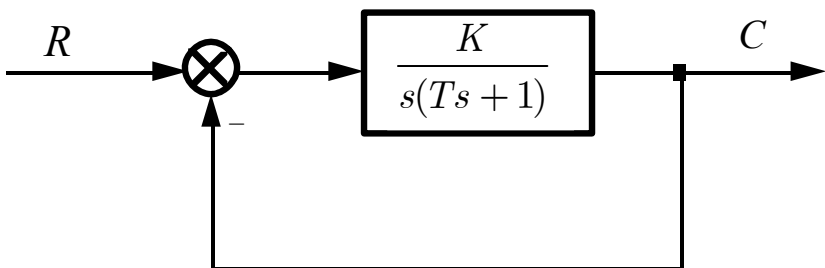
当 $T$ 不变时:

$$\because \frac{1}{T} = 2\xi\omega_n \quad \therefore \omega_n = \frac{1}{2\xi T} = \frac{1}{2 * 0.5 * 0.25} = 4$$

则 $K = \omega_n^2 T = 4^2 \times 0.25 = 4$ , 即 $K$ 从16下降到4



## 开环增益对二阶系统性能的影响



(1) 闭环特征方程

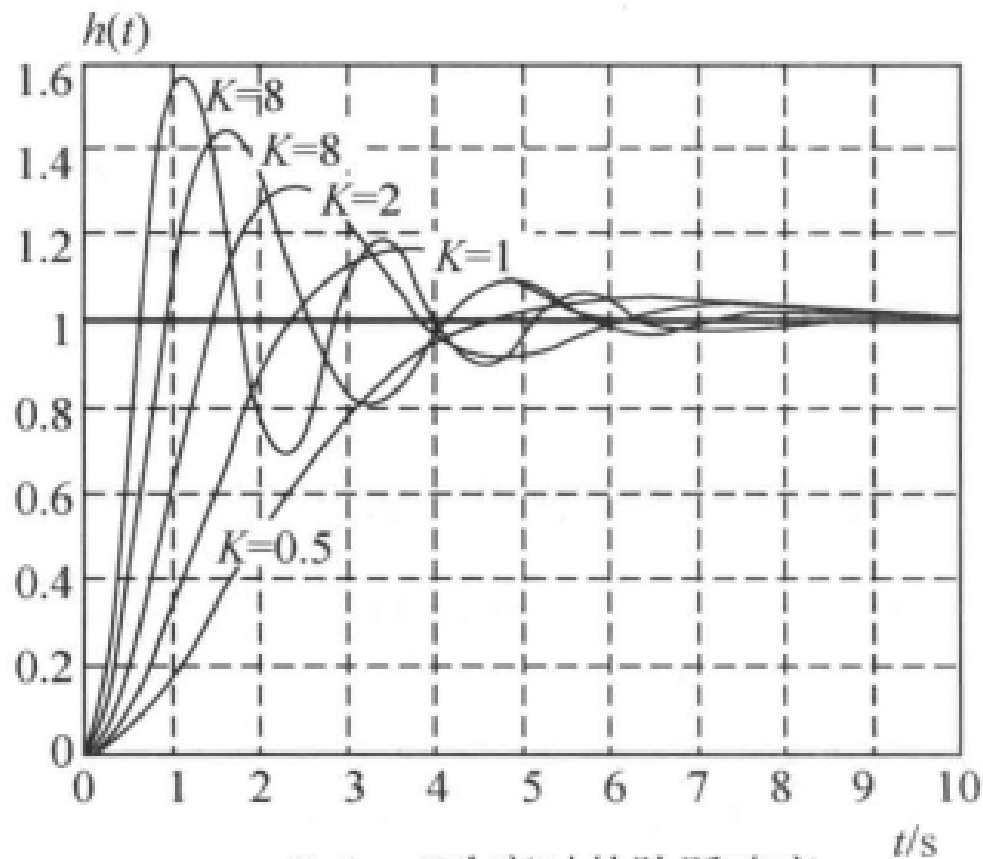
$$Ts^2 + s + K = 0$$

的根为：

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2T} \pm j \frac{\sqrt{4TK - 1}}{2T}$$

当  $K$  增大时，闭环极点实部不变，虚部增大，故极点沿着平行于虚轴的直线向远离实轴的方向移动。

(2)  $K$  增大，无阻尼自然频率增大，阻尼比减小，超调量增大，调节时间基本不变。



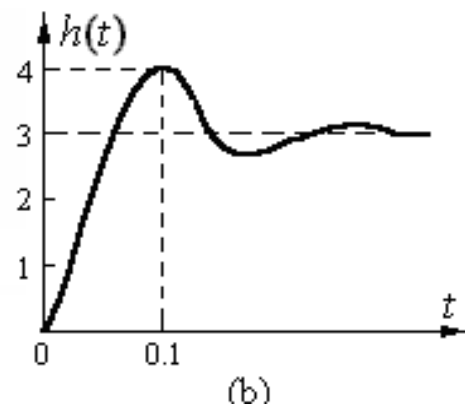
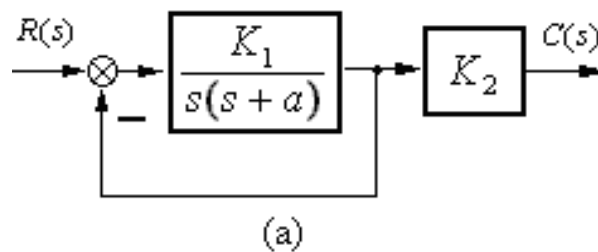
$T=1$ ， $K$ 改变时的阶跃响应

例:

已知如图所示系统的单位阶跃响应曲线为图(b), 试确定  $K_1, K_2, a$  的值。

由系统阶跃响应曲线有

$$\begin{cases} h(\infty) = 3 \\ t_p = 0.1 \\ \sigma \% = (4 - 3) / 3 = 33.3 \% \end{cases}$$



系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{K_1 K_2}{s^2 + as + K_1} = \frac{K_2 \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

$$\text{由} \begin{cases} t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2} \omega_n} = 0.1 \\ \sigma \% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 33.3 \% \end{cases}$$

联立求解得

$$\begin{cases} \xi = 0.33 \\ \omega_n = 33.28 \end{cases}$$

$$\text{由式 (1) 有} \begin{cases} K_1 = \omega_n^2 = 1108 \\ a = 2\xi \omega_n = 22 \end{cases}$$

$$\text{另外 } h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1 K_2}{s^2 + as + K_1} = 3$$

$$\text{所以 } K_2 = 3$$

例：某典型欠阻尼二阶系统

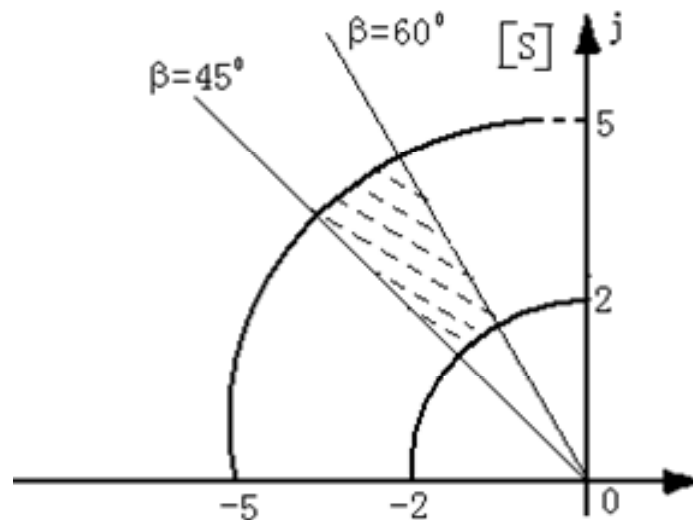
$$\text{要求} \begin{cases} 5\% < \sigma\% < 16.3\% \\ 2 < \omega_n < 5 \end{cases}$$

试确定系统极点的允许范围

$$\sigma\% = 5\% \rightarrow \xi = 0.707 \rightarrow \beta = 45^\circ$$

$$\sigma\% = 16.3\% \rightarrow \xi = 0.5 \rightarrow \beta = 60^\circ$$

$$\therefore \text{要求等价为:} \begin{cases} 45^\circ < \beta < 60^\circ \\ 2 < \omega_n < 5 \end{cases}$$



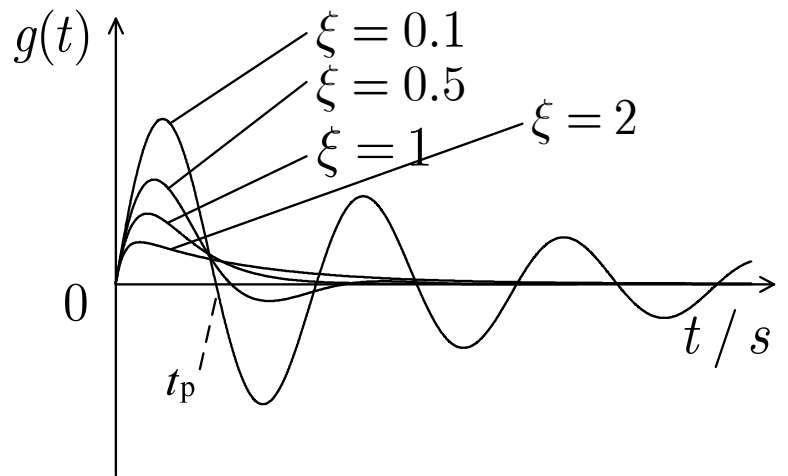
3.4.3 二阶系统在其它典型输入作用下的响应

(一) 单位脉冲响应

$\because g(t) = \frac{d}{dt} c_{\text{阶}}(t).$

$$\therefore \begin{cases} \xi = 0: g(t) = \omega_n \sin \omega_n t \\ \xi = 1: g(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \\ \xi > 1: g(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} [e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} - e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}] \\ 0 < \xi < 1: g(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) \end{cases}$$

$(c_{\text{阶}}(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t})$



可见：(1)  $\xi \geq 1$  时  $g(t)$  不改变符号[ $\because h(t)$  单调上升]

(2) 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $c(\infty) = 1, \therefore \int_0^\infty g(t) dt = 1$

## (二) 单位斜坡响应

(1)  $0 \leq \xi < 1$

输出的拉氏变换:  $C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s^2}$

时域响应:  $c(t) = t - \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \varphi)$ , 其中  $\varphi = 2\arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = 2\beta$

稳态分量:  $c_{ss} = t - \frac{2\xi}{\omega_n}$       瞬态分量:  $c_{tt} = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \varphi)$

稳态差  $e_{ss} = \frac{2\xi}{\omega_n}$ ,

增大无阻尼自然频率或减小阻尼比可减小系统在斜坡输入下的稳态误差。

对典型二阶系统, 增大开环增益可以减小该稳态误差。(为什么?)

$$e_{ss} = \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{2\xi\omega_n}{\omega_n \cdot \omega_n} = \frac{\text{不依赖于 } K}{K}$$

## 二阶系统的单位斜坡响应

(2)  $\xi > 1$

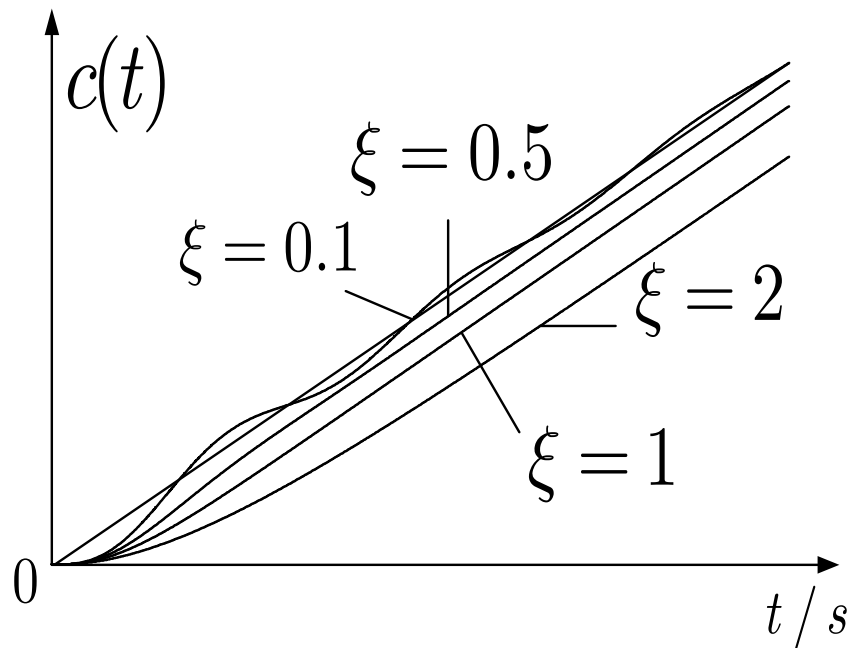
$c(t) =$

$$t - \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{2\xi^2 - 1 + 2\xi\sqrt{\xi^2 - 1}}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} - \frac{2\xi^2 - 1 - 2\xi\sqrt{\xi^2 - 1}}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}$$

(3)  $\xi = 1$

$$c(t) = t - \frac{2}{\omega_n} + \frac{2}{\omega_n}\left(1 + \frac{1}{2}\omega_n t\right)e^{-\omega_n t}$$

稳态误差:  $e_{ss} = \frac{2\xi}{\omega_n}$



### 3. 4. 4 零点对二阶系统响应的影响

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

在典型二阶系统的基础上增加一个零点  $z=-\frac{1}{\tau}$

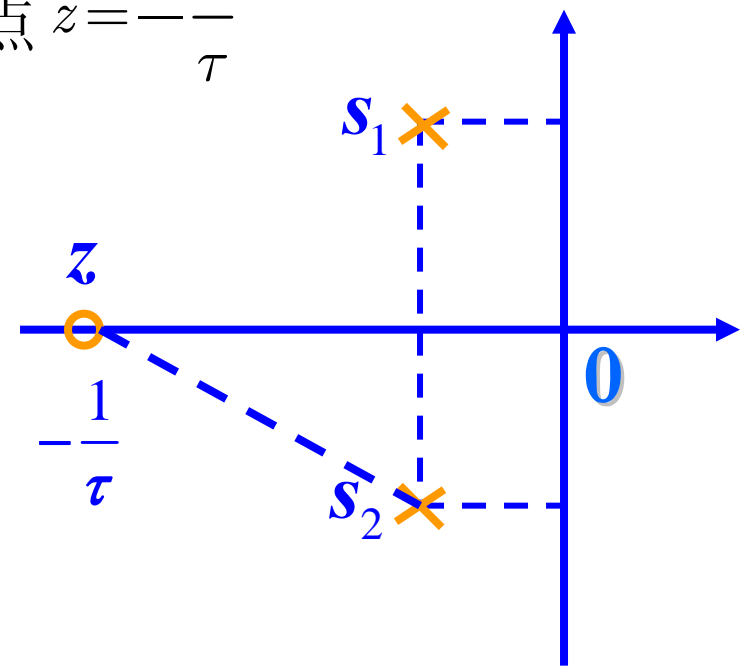
#### 1. 定性分析:

欠阻尼系统的阶跃响应为:

$$C(s)=\Phi(s)R(s)$$

$$=\frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$$

$$=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}+\frac{\tau\cdot\omega_n^2\cdot s}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}=C_1(s)+C_2(s)$$



$$\therefore c(t) = c_1(t) + c_2(t)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \beta) + \frac{\tau\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t)$$

$$\because C_2(s) = \tau s \cdot C_1(s) \quad \therefore c_2(t) = \tau \frac{dc_1(t)}{dt} = \frac{1}{|z|} g_1(t)$$

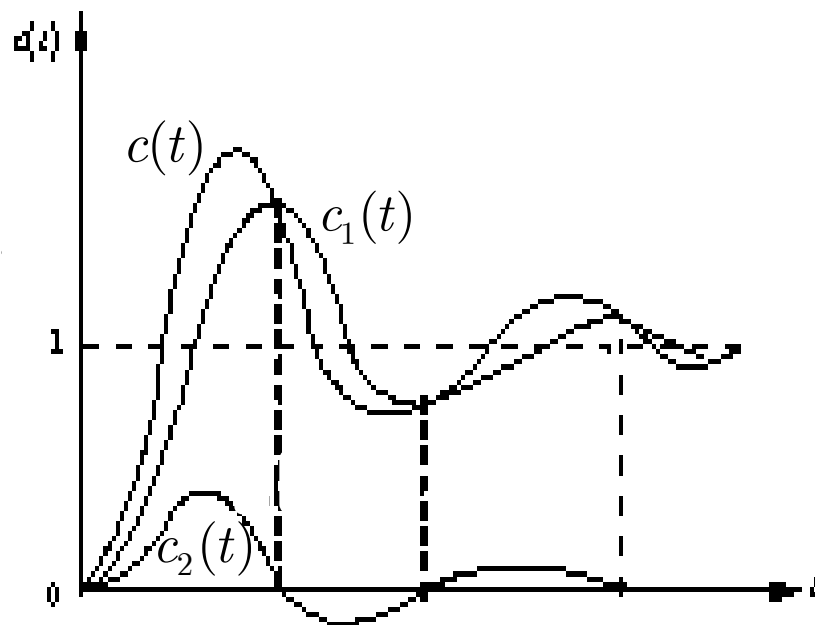
$$\text{故 } c(t) = c_1(t) + \frac{1}{|z|} g_1(t)$$

可见： $c_2(t)$ 使 $c(t)$ 比 $c_1(t)$ 响应快且超调量大

2. 定量计算：取  $\alpha = \frac{|z|}{\xi\omega_n} = \frac{1}{\tau\xi\omega_n}$

(零点与极点的实部之比)，则有

$$\therefore c(t) = c_1(t) + c_2(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \beta) + \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\alpha\xi\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t)$$



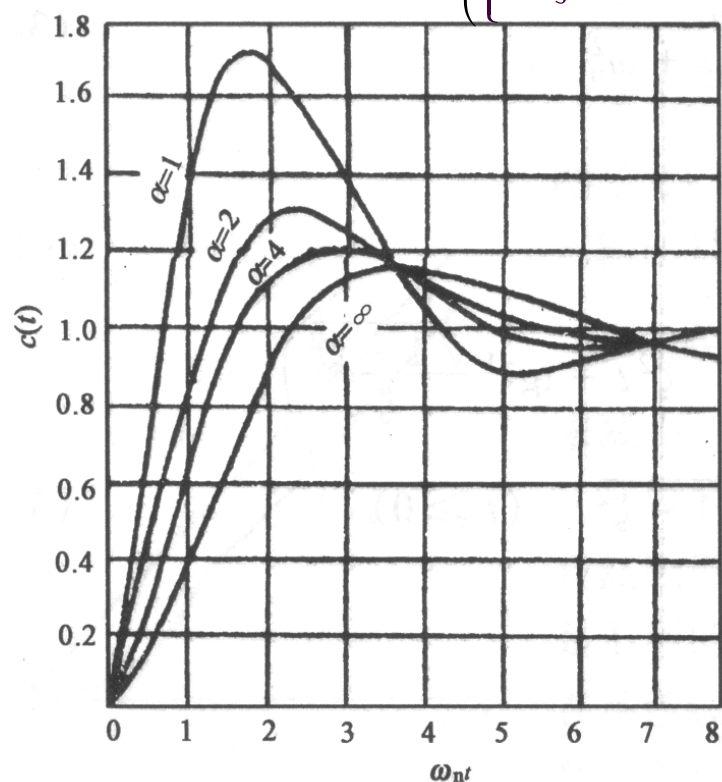


有零点二阶系统的响应与 $\xi$ 、 $\omega_n$ 及 $\alpha$ 均有关。 $\alpha=\infty$ 即为典型二阶系统响应。 $\alpha\downarrow\rightarrow\sigma\%\uparrow\rightarrow$ 影响 $\uparrow$ 。

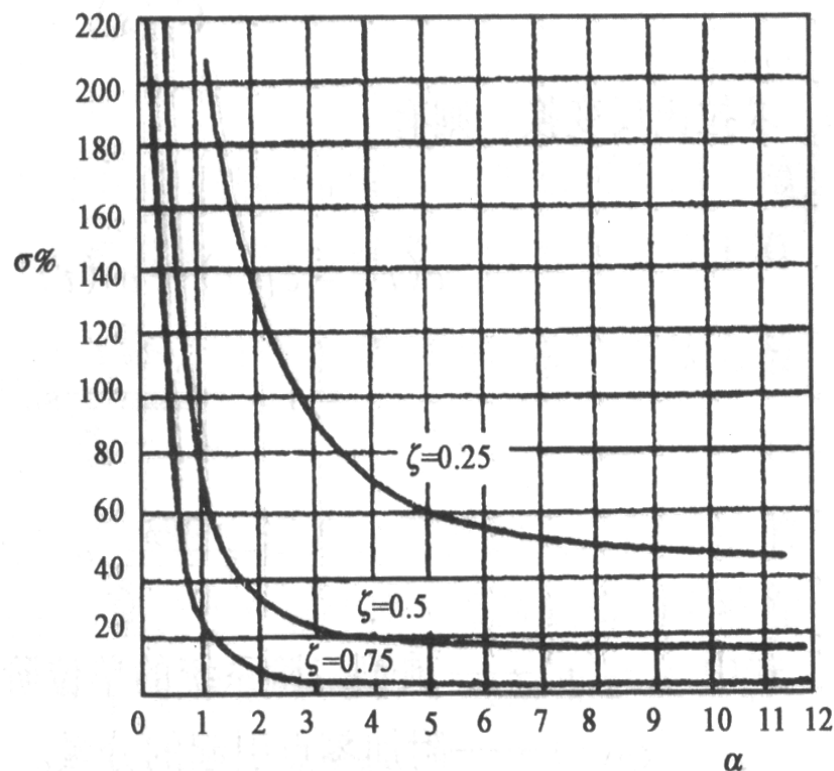
下图是 $\xi=0.5$ 时，以 $\alpha$ 为参变量， $\omega_n t$ 为横坐标的响应曲线。

当 $\alpha$ 大到一定程度

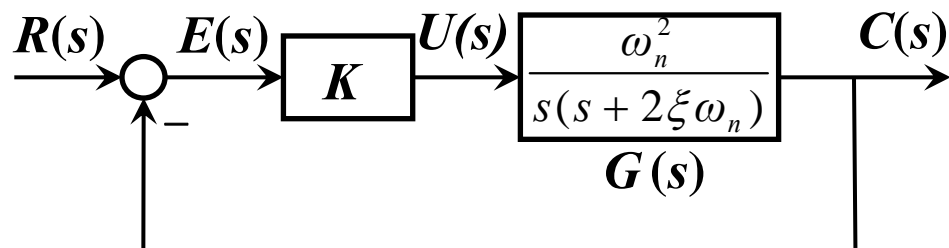
{	当 $\xi=0.25$ , $\alpha\geq 8$ 时	时，零点的影响可以忽略。
	当 $\xi=0.5$ , $\alpha\geq 4$ 时	
	当 $\xi=0.75$ , $\alpha\geq 2.5$ 时	



图为 $\xi=0.5$ 时的曲线



### 3.4.5 改善二阶系统性能的措施

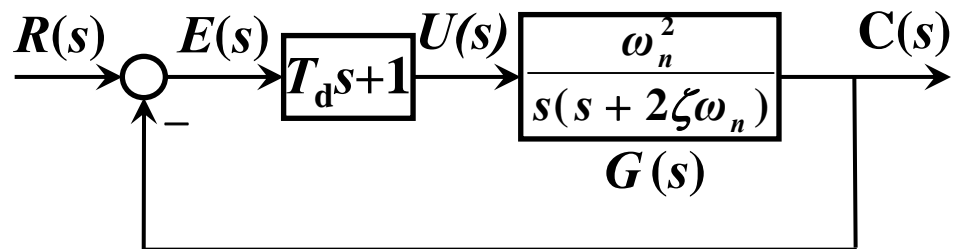
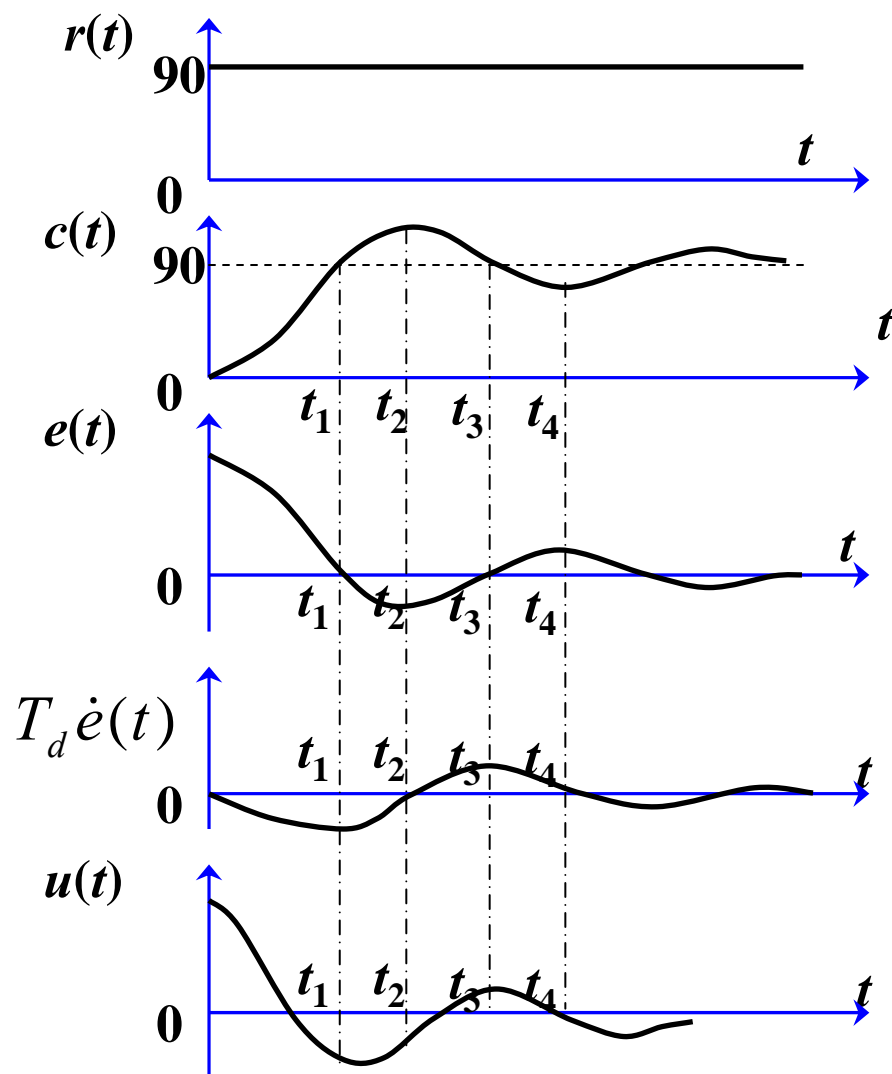


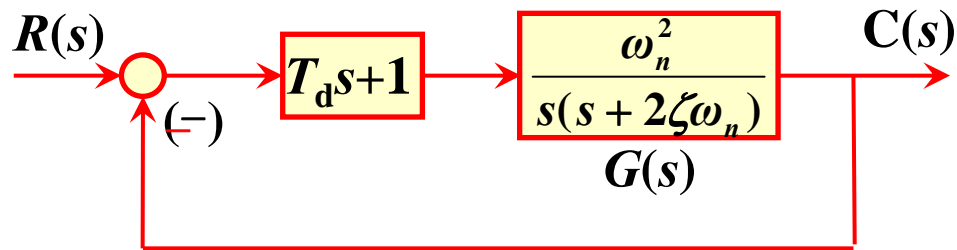
系统结构如上图所示，其中只有增益 $K$ 可调(比例控制器)。

1) 若给定某 $K$ 值，发现性能指标中超调量偏大，此时减小 $K$ 值，则超调量会降低，但会明显增大斜坡输入下的稳态误差。即动态性能变好，而稳态性能变差。阶跃响应超调量和斜坡输入的稳态误差对 $K$ 的要求正好相反，只通过调整增益很难同时满足稳态和动态两方面的性能要求。

2) 在高精度控制中,需要采用高增益来减小死区、摩擦等非线性因素的影响,因此不能随意降低开环增益以换取较小的超调量。因此需要设计新的控制器结构。

# 1. 比例—微分控制





开环传递函数

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{\omega_n^2 (T_d s + 1)}{s(s + 2\xi\omega_n)} = \frac{K(T_d s + 1)}{s(s / 2\xi\omega_n + 1)},$$

开环增益  $K = \frac{\omega_n^2}{2\xi}$

闭环传递函数:

$$\Phi(s) = \frac{\frac{\omega_n^2 (T_d s + 1)}{s(s + 2\xi\omega_n)}}{1 + \frac{\omega_n^2 (T_d s + 1)}{s(s + 2\xi\omega_n)}} = \frac{\omega_n^2 T_d (s + \frac{1}{T_d})}{s^2 + (2\xi\omega_n + \omega_n^2 T_d)s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2 T_d (s + \frac{1}{T_d})}{s^2 + 2\xi_d \omega_n s + \omega_n^2}$$

无阻尼自然频率不变；阻尼比变大  $\xi_d > \xi$

$$2\xi\omega_n + \omega_n^2 T_d = 2\xi_d \omega_n \Rightarrow \xi_d = \xi + \omega_n T_d / 2$$

新系统增添了闭环零点——有零点二阶系统。

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} = \frac{\frac{\omega_n^2}{2\xi}}{s(s / 2\xi\omega_n + 1)}$$

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

阻尼增大对系统的影响：

使系统响应变缓，超调量减小，平稳性变好

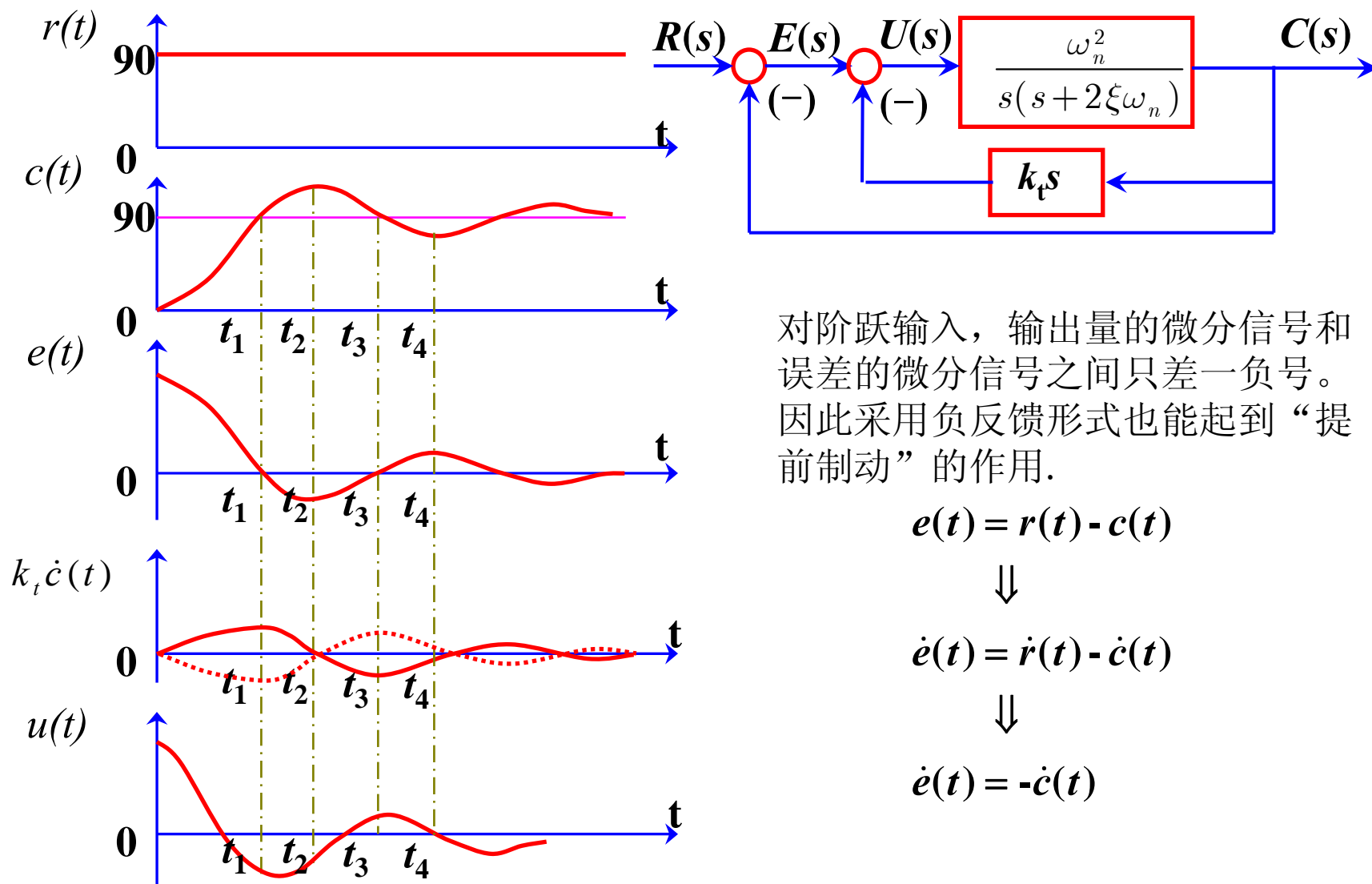
零点对系统的影响：

上升时间和峰值时间均减小，响应加快，超调量增加，又削弱了“阻尼”作用。

总结：

- 1) 比例微分（PD）控制器的控制信号由偏差和偏差的微分信号综合而成。偏差的微分信号所占比重由微分时间常数 $T_d$ 决定，该值越大微分作用越明显。
- 2) 偏差微分信号的引入使控制过程具有一定预见性，能有效减小输出量达到稳态值的瞬时，系统能量的积累，因此可抑制振荡，使超调减小，改善系统平稳性。
- 3) 若系统本身具有好的动态性能，可在增大开环增益的同时引入PD控制，可使阻尼比基本维持不变，而稳态误差减小。
- 4) 引入误差微分信号，不影响自然频率，不影响稳态精度。
- 5) 微分环节对噪声有放大作用，强噪声环境不宜采用比例微分控制

## 2. 测速反馈控制



对阶跃输入，输出量的微分信号和误差的微分信号之间只差一负号。因此采用负反馈形式也能起到“提前制动”的作用。

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

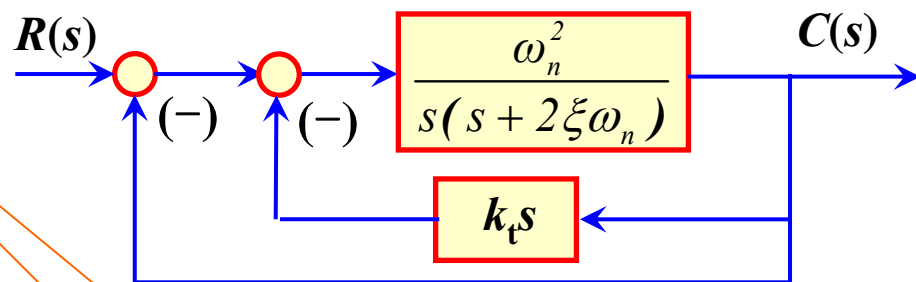
$\Downarrow$

$$\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - \dot{c}(t)$$

$\Downarrow$

$$\dot{e}(t) = -\dot{c}(t)$$

使开环增益降低



开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n + k_t\omega_n^2)} = \underbrace{\frac{\omega_n}{2\xi + k_t\omega_n}}_{\text{使开环增益降低}} \times \frac{1}{s \left[ s / (2\xi\omega_n + k_t\omega_n^2) + 1 \right]}$$

闭环传递函数：

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\xi\omega_n + k_t\omega_n^2)s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi_t\omega_n s + \omega_n^2}$$

由上可知：

$$\xi_t = \xi + \frac{1}{2} k_t \omega_n$$

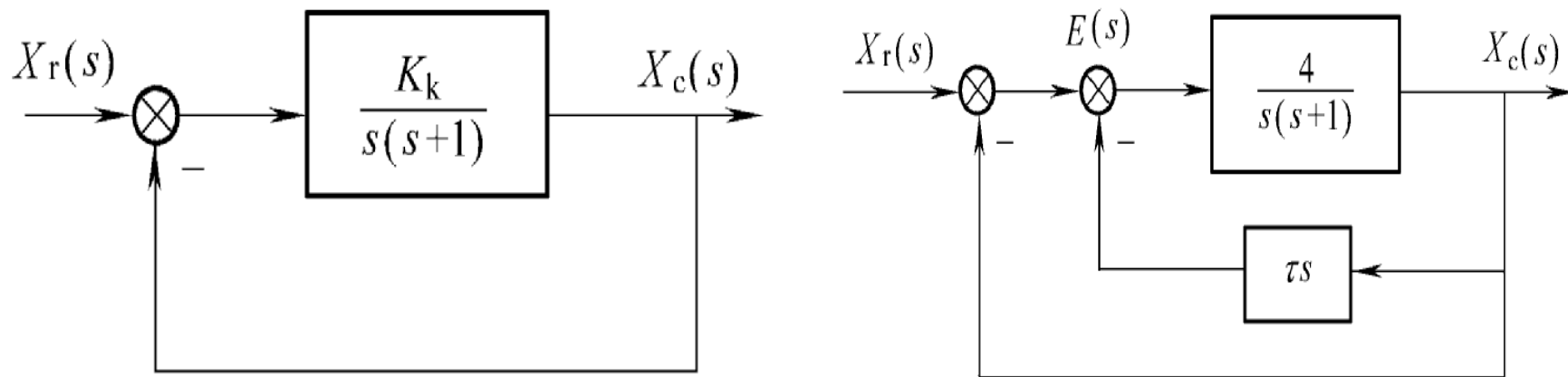
- 1) 测速反馈使阻尼比增大，振荡和超调减小，改善了系统平稳性；
- 2) 测速反馈控制的闭环传递函数无零点，其输出平稳性优于比例微分控制；
- 3) 使开环增益降低，系统跟踪斜坡输入时稳态误差会加大，因此应适当提高系统的开环增益。

## 比例微分控制和测速反馈控制比较

- 两者均能改善系统性能，增加系统阻尼比，降低超调量，在相同的阻尼比和自然频率条件下，测速反馈控制因不增添闭环零点，超调量更小，反应速度更慢一些。测速反馈控制会使系统在斜坡输入下的稳态误差增大。
- 比例微分控制结构简单，成本低，重量轻
- 微分控制对噪声有放大作用，系统输入端噪声较大时，不宜采用，微分器输入信号是偏差信号，电平低，放大时容易使信号被噪声淹没；测速反馈控制抗噪性强。



例 有一位置随动系统，其结构图如图(a)所示，其中 $K_k = 4$ 。求该系统的：1) 无阻尼自然频率 $\omega_n$ ；2) 系统的阻尼比 $\xi$ ；3) 超调量和调节时间；4) 如果要求 $\xi$ 为最佳阻尼比，则参数 $K_k$ 值取何值；5) 比较 $K_k$ 改变前后的超调量变化；6) 计算并比较 $K_k$ 改变前后的系统在单位斜坡输入作用下的稳态误差；7) 为了改善系统的暂态响应性能，满足单位阶跃输入下系统超调量 $\sigma\% = 4.3\%$ 的要求，在保持 $K_k = 4$ 的前提下加入测速反馈回路，如图(b)所示，求测速反馈系数 $\tau$ 以及相应的开环放大系数 $K_{\text{测}}$ ；8) 比较加入测速反馈回路前后系统的超调量以及单位斜坡输入下的稳态误差。



解 1) 求无阻尼自然频率  
系统的闭环传递函数为

$$\Phi_{\text{前}}(s) = \frac{K_K}{s^2 + s + K_K}, \quad K_K = 4$$

写成标准形式

$$\Phi_{\text{前}}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

由此得无阻尼自然频率  $\omega_n = \sqrt{K_K} = 2$

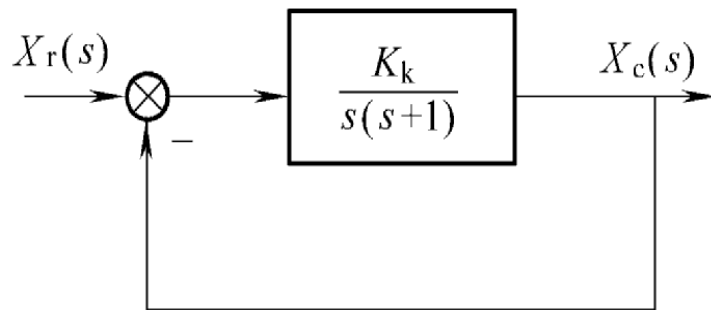
2) 求阻尼比  $\xi = \frac{1}{2\omega_n} = 0.25$

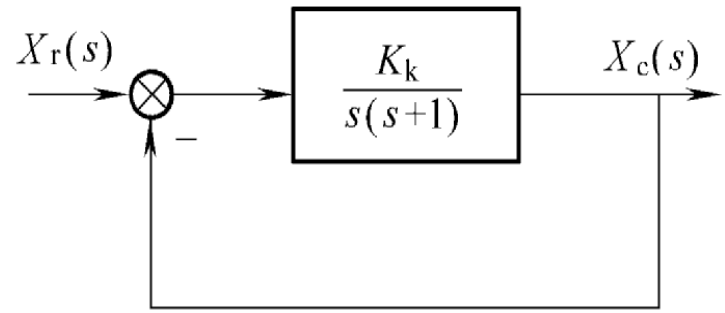
3) 超调量  $\delta\%_{\text{前}} = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 44\%$

调节时间 (5%误差带)

$$t_s(5\%) \approx \frac{3.5}{\xi\omega_n} = 7 \text{ s}$$

$$\text{或 } t_s = \frac{1}{\xi\omega_n} \ln \frac{1}{0.05\sqrt{1-\xi^2}} = 6.05$$





4) 若要求 $\xi=0.707=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $K_K$ 取何值?

$$\omega_n = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \therefore K_{K后} = \omega_n^2 = 0.5$$

5) 比较 $K_k$ 改变前后的超调量变化

$$\sigma\%_{后} = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = e^{-\pi} \times 100\% = 4.3\% < \sigma\%_{前} = 44\%, \quad K_K \downarrow \Rightarrow \sigma\% \downarrow$$

6) 计算并比较 $K_k$ 改变前后系统在单位斜坡输入下的稳态误差

$$e_{ss前} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \cdot \Phi_e(s) \cdot \frac{1}{s^2} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 + \frac{K_K}{s(s+1)}} \cdot \frac{1}{s} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s(s+1)}{s^2 + s + K_K} \cdot \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{K_K} = \frac{1}{4}$$

$$\text{另解: } e_{ss前} = \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{2 \times 0.25}{2} = \frac{1}{4}, \quad \left( \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{2\xi\omega_n}{\omega_n^2} = \frac{1}{K_K} \right)$$

$$e_{ss后} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \bullet \Phi_{e后}(s) \bullet \frac{1}{s^2} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 + \frac{K_K}{s(s+1)}} \bullet \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{K_{K后}} = 2$$

$$\text{另解: } e_{ss后} = \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{2 \times \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 2$$

a)  $K_K \downarrow$ , 则  $\omega_n \downarrow$ , 特征方程一次项系数不受  $K_K$  影响, 即  $2\xi\omega_n$  为常数, 所以  $\xi \uparrow \rightarrow \sigma\% \downarrow$ 。

b)  $K_K \downarrow$ , 则  $\omega_n \downarrow$ ,  $\xi \uparrow$ , 所以  $e_{ss} \uparrow$ 。

c) 系统超调量和斜坡输入下的稳态误差差对  $K_K$  的要求正好相反。

7) 计算测速反馈系数 $\tau$

系统的开环传递函数:

$$G_{\text{开}}(s) = \frac{\frac{4}{s(s+1)}}{1 + \tau s \cdot \frac{4}{s(s+1)}} = \frac{4}{s(s+1+4\tau)} = \frac{4}{1+4\tau} \times \frac{1}{s(\frac{1}{1+4\tau}s+1)}$$

系统的闭环传递函数:  $\Phi_{\text{闭}}(s) = \frac{\frac{4}{s(s+1+4\tau)}}{1 + \frac{4}{s(s+1+4\tau)}} = \frac{4}{s^2 + (1+4\tau)s + 4}$

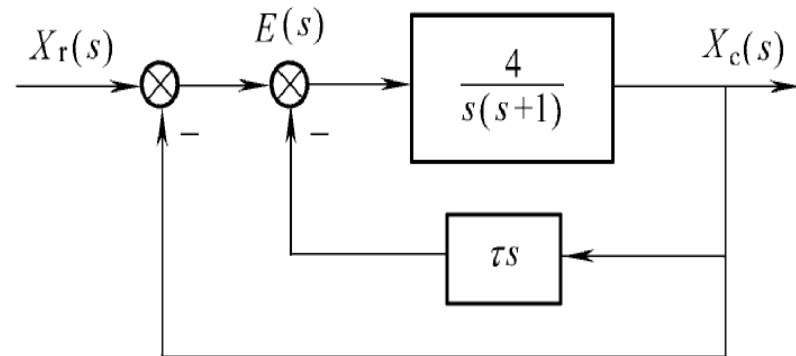
$$\omega_{n\text{测}} = \sqrt{4} = 2 (\text{测速反馈不改变 } \omega_n),$$

$$\sigma\%_{\text{测}} = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 4.3\% \Rightarrow \xi = 0.707$$

$$\text{又} \because 2\xi\omega_n = 1+4\tau$$

$$\tau = \frac{2\xi\omega_n - 1}{4} = \frac{2 \times 0.707 \times 2 - 1}{4} = 0.457$$

$$\text{测速反馈后的放大系数 } K_{\text{测}} = \frac{4}{1+4\tau} = 1.41$$



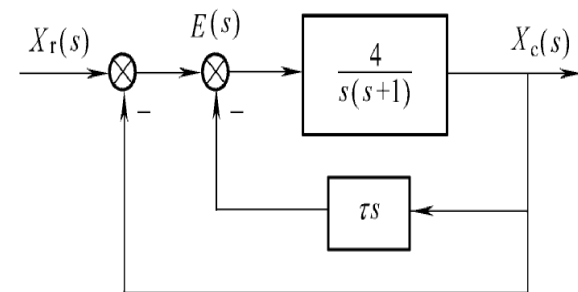
# 8) 加入测速反馈后的性能指标

超调量：根据已知条件  $\sigma\%_{\text{测}} = 4.3\% < \sigma\%_{\text{前}} = 44\%$

单位斜坡输入下的稳态误差：

$$e_{ss\text{测}} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \cdot \Phi_{e\text{测}}(s) \cdot \frac{1}{s^2} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 + \frac{4}{s(s+1+4\tau)}} \cdot \frac{1}{s} \right)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s(s+1+4\tau)}{s^2 + (1+4\tau)s + 4} \cdot \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{4} = \frac{1}{K_{\text{测}}} = 0.7$$



	比例控制(K=4)	比例控制(K=0.5)	测速反馈控制 $\tau = 0.457 \quad K=4$
阻尼比	0.25	0.707	0.707
无阻尼自然频率	2	0.707	2
超调量	44%	4.3%	4.3%
斜坡信号作用下的稳态误差	0.25	2	0.7

$$\Phi_{\text{测}}(s) = \frac{4}{s^2 + (1+4\tau)s + 4}$$

- 1) 采用测速反馈控制后，在欠阻尼范围内，即 $((1+4\tau) / 2\omega_n < 1 \Rightarrow \tau < 0.75)$ ，随着 $\tau$ 从0逐渐增大，闭环极点沿着等 $\omega_n$ 弧线向实轴靠拢，因此上升时间增大、峰值时间增大。系统振荡频率变小（极点虚部绝对值减小），收敛加快（实部绝对值变大）。
- 2) 由于测速反馈控制降低了开环增益，相对于原系统, 斜坡输入下的稳态误差有所增大。若超调量指标可以放宽，则可先适当放大开环增益，以抵消测速反馈带来的增益降低。

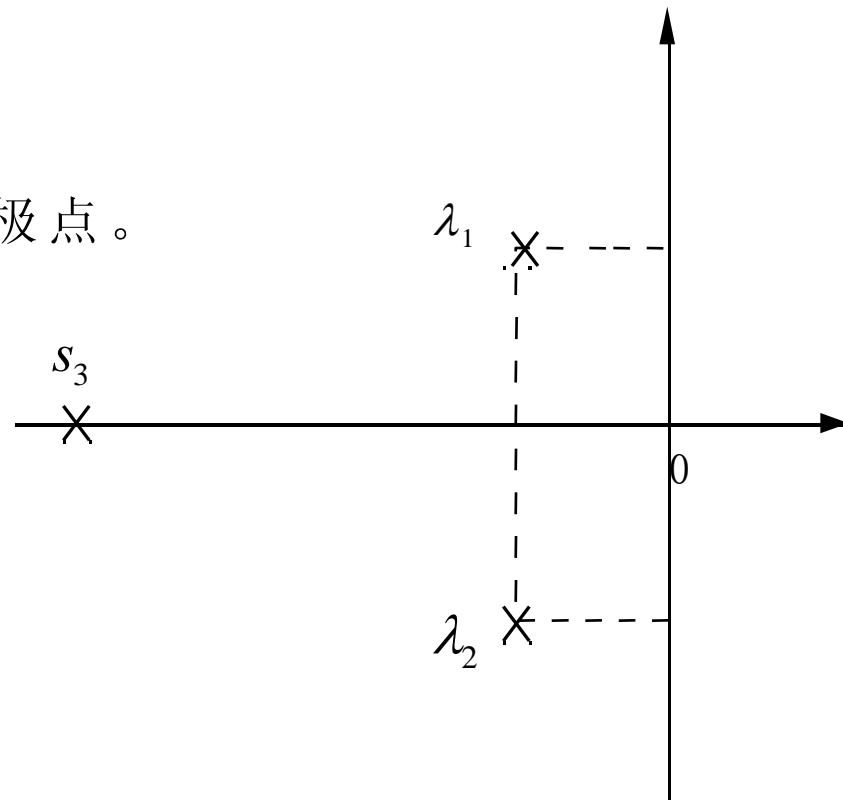
### 3.5 高阶系统及性能估计

#### 一、典型三阶系统的单位阶跃响应：

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2 \lambda}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + \lambda)},$$

当  $0 < \xi < 1$  时， $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  是共轭复数极点。

$$s_3 = -\lambda$$



$$C(s) = \frac{\lambda \omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + \lambda)}$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\beta\xi^2(\beta-2)+1} *$$

$$\left\{ \beta\xi^2(\beta-2) \cos \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \frac{\beta\xi[\xi^2(\beta-2)+1]}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t \right\} - \frac{e^{-\lambda t}}{\beta\xi^2(\beta-2)+1}$$



$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\beta\xi^2(\beta-2)+1} * \left\{ \beta\xi^2(\beta-2) \cos \sqrt{1-\xi^2} \omega_n t + \frac{\beta\xi[\xi^2(\beta-2)+1]}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \sqrt{1-\xi^2} \omega_n t \right\} - \frac{e^{-\lambda t}}{\beta\xi^2(\beta-2)+1}$$

其中  $\beta = \frac{\lambda}{\xi\omega_n}$  (实部绝对值之比)

由于欠阻尼,  $\beta\xi^2(\beta-2)+1 = \xi^2(\beta-1)^2 + (1-\xi^2) > 0$

$\therefore e^{-\lambda t}$  项指数的系数总是小于零

$c(t)$  与  $\xi$ 、 $\omega_n$ 、 $\beta$  有关, 绘制出当  $\xi=0.5$  时,  
 $\beta$  分别取  $\infty$ 、4、2、1 时的响应曲线

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\beta\xi^2(\beta-2)+1}.$$

$$\left\{ \beta\xi^2(\beta-2)\cos\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \frac{\beta\xi[\xi^2(\beta-2)+1]}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t \right\} - \frac{e^{-\lambda t}}{\beta\xi^2(\beta-2)+1}$$

(1) 增加闭环极点

$\rightarrow \sigma\% \downarrow$

(2)  $s_3$  离虚轴越远

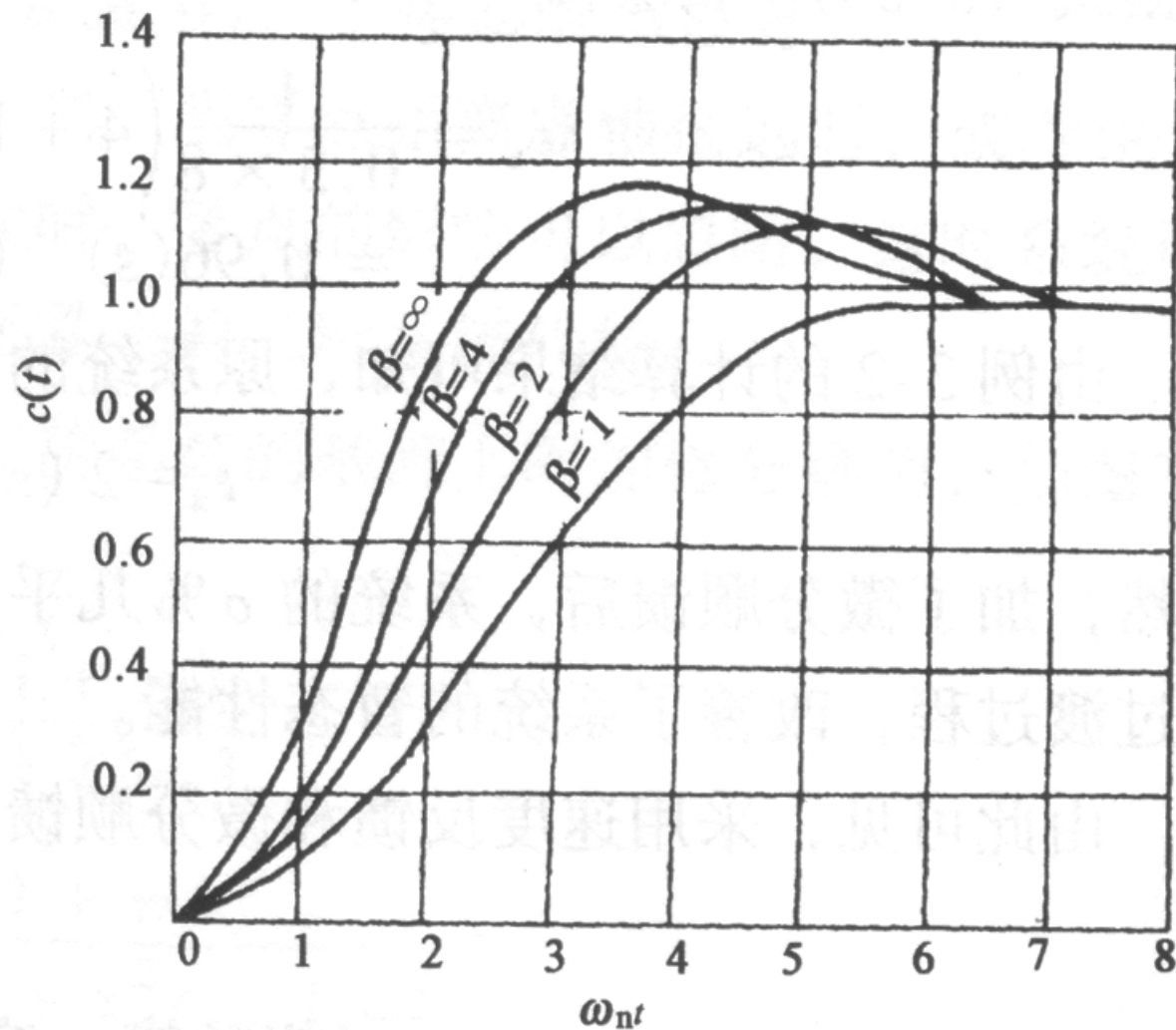
$\rightarrow$  影响  $\downarrow$ .

(3) 若  $s_3$  在  $\lambda_{1,2}$  右侧,

$\beta < 1$ , 系统响应趋

于减缓, 类似于

过阻尼的二阶系统。



## 二、高阶系统性能估算

若高阶系统所有闭环极点都具有负的实部，随着时间的增长，响应函数中的指数项和阻尼正弦项都将趋于零，系统稳定。

闭环极点的负实部的绝对值越大（即闭环极点离虚轴越远）其对应的响应分量减小越快，快速减小的分量仅对响应曲线的初始阶段有影响。

系统的闭环零点不影响系统响应的类型和稳定性，但却影响其形状。因为闭环零点会影响模态系数的大小和正负，曲线形状既取决于指数项和阻尼正弦项的指数，又取决于这些项的系数。

问：一个模态是否可被忽略 取决于什么？

模态的系数和闭环零极点分布有关，具体为：

- ①若某极点接近于一零点，而远离其它零、极点，则对应模态的系数较小；
- ②某极点远离零点又接近原点或其它极点，则对应模态的系数较大；

例：已知  $F(s) = \frac{s+3+\varepsilon}{(s+1)(s+3)}$ ，求  $f(t)$

解. 
$$F(s) = \frac{s+3+\varepsilon}{(s+1)(s+3)} = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+3}$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{s+3+\varepsilon}{(s+1)(s+3)} = \frac{2+\varepsilon}{2} \quad C_2 = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) \frac{s+3+\varepsilon}{(s+1)(s+3)} = -\frac{\varepsilon}{2}$$

$$f(t) = \frac{2+\varepsilon}{2} e^{-t} - \frac{\varepsilon}{2} e^{-3t}, \text{ 当 } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ 时, 模态 } e^{-3t} \text{ 可忽略}$$

如果某极点靠近一个闭环零点，且远离原点及其它极点，则对应模态的系数比较小，该瞬态分量的影响也就越小。如果极点和零点靠得很近（称为**偶极子**），则该极点对瞬态响应几乎没有影响。

如果某极点远离闭环零点，但与原点相距较近，则对应项的系数将比较大。因此离原点很近并且附近没有闭环零点的极点，其瞬态分量不仅幅值大，而且衰减慢，对系统瞬态响应的影响很大。

**主导极点**：如果高阶系统中距离虚轴最近的极点，其实部绝对值远小于其它极点的实部绝对值，并且附近不存在零点，那么可以认为系统的瞬态响应主要由这一、两个极点决定，这样的极点称为主导极点。如果找到一对共轭复数主导极点，那么，高阶系统就可以近似地当作二阶系统来分析。

例 已知系统的闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{0.24s + 1}{(0.25s + 1)(0.04s^2 + 0.24s + 1)(0.0625s + 1)}$$

试估算系统的动态性能指标。

解 先将闭环传递函数表示为零、极点形式,即

$$\Phi(s) = \frac{383.693(s + 4.17)}{(s + 4)(s^2 + 6s + 25)(s + 16)}$$

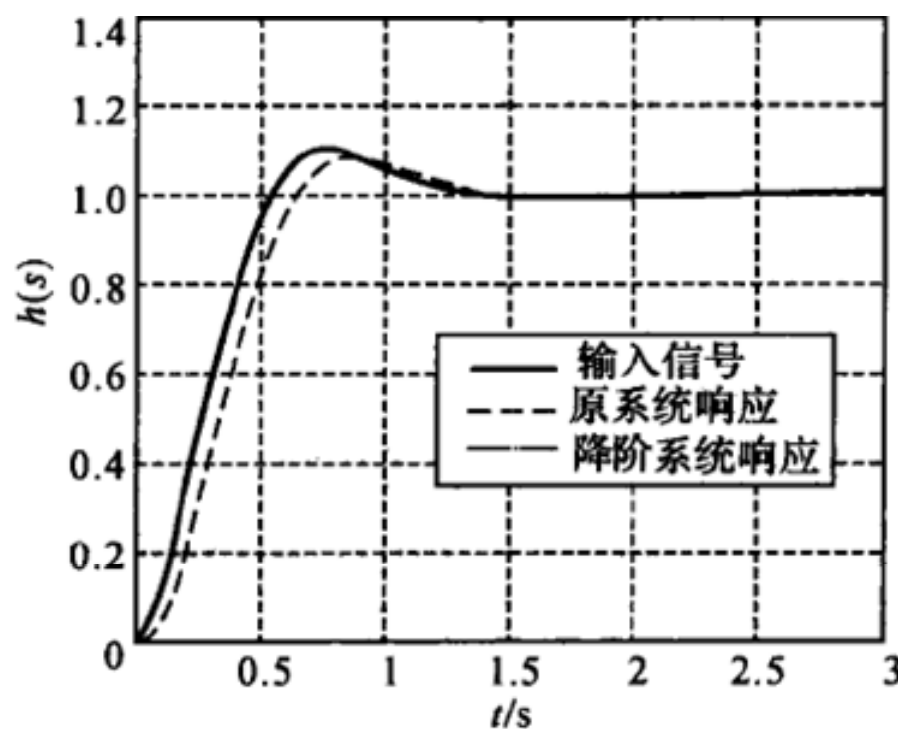
可见,系统的主导极点为  $\lambda_{1,2} = -3 \pm j4$ , 忽略非主导极点  $\lambda_4 = -16$  和一对偶极子 ( $\lambda_3 = -4$ ,  $z_1 = -4.17$ )。注意原系统闭环增益为 1, 降阶处理后的系统闭环传递函数

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{383.693 \times 4.17}{4 \times 16} \frac{1}{s^2 + 6s + 25} \\ &= \frac{25}{s^2 + 6s + 25}\end{aligned}$$

$$\omega_n = 5, \xi = 0.6$$

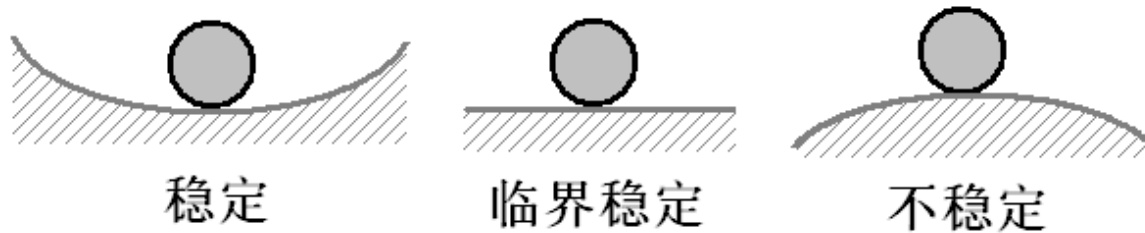
$$\sigma\% = e^{-\xi\pi / \sqrt{1-\xi^2}} = 9.5\%$$

$$t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n} = 1.17$$



### 3.6 线性系统的稳定性分析

系统的稳定性 — 如果在扰动作用下系统偏离了原来的平衡状态，当扰动消失后，系统能够以足够的准确度恢复到原来的平衡状态，则系统是稳定的；否则，系统不稳定。



稳定性是系统的固有属性，与初始条件和外作用无关。

稳定的系统才能正常工作，分析稳定性并找出使系统稳定的条件，是系统设计的关键问题之一。

## 二、线性系统稳定的充要条件：

$$\begin{aligned}\text{设: } & a_0 c^{(n)}(t) + a_1 c^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} \dot{c}(t) + a_n c(t) \\ & = b_0 r^{(m)}(t) + b_1 r^{(m-1)}(t) + \cdots + b_{m-1} \dot{r}(t) + b_m r(t)\end{aligned}$$

拉氏变换有：

$$\begin{aligned}& (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n) C(s) \\ & = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m) R(s) + M_0(s)\end{aligned}$$

其中  $M_0(s)$  是与初始状态有关的 $s$ 多项式

$$\text{设 } D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

$$M(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m$$

$$\text{则有 } D(s)C(s) = M(s)R(s) + M_0(s)$$



$$D(s)C(s) = M(s)R(s) + M_0(s) \quad \therefore C(s) = \frac{M(s)}{D(s)} \cdot R(s) + \frac{M_0(s)}{D(s)}$$

设  $R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ , 假设  $D(s) = 0$  具有  $n$  个互异实根;

$R(s)$  具有  $q$  个互异极点  $s_{r_j}$ .

$$\therefore C(s) = \frac{M(s)}{D(s)} \cdot \frac{P(s)}{Q(s)} + \frac{M_0(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - s_i} + \sum_{j=1}^q \frac{B_j}{s - s_{r_j}} + \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{s - s_i}$$

$$\therefore c(t) = \sum_{i=1}^n (A_i + C_i) e^{s_i t} + \sum_{j=1}^q B_j e^{s_{r_j} t}$$

取消扰动后, 系统的恢复能力应由瞬态分量决定, 与输入无关。

只要有:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (A_i + C_i) e^{s_i t} = 0$  系统一定稳定。

可见各模态必须全部趋于零, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (A_i + C_i) e^{s_i t} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{s_i t} = 0.$$

◆若出现共轭复数根，则有：

$$C(s) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{A_i}{s - s_i} + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{C_i}{s - s_i} + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{D_k(s + \xi_k \omega_{nk}) + F_k \omega_{nk} \sqrt{1 - \xi_k^2}}{(s + \xi_k \omega_{nk})^2 + (\omega_{nk} \sqrt{1 - \xi_k^2})^2} + \sum_{j=1}^q \frac{B_j}{s - s_{r_j}}$$

$$\therefore c(t) = \sum_{i=1}^{n_1} (A_i + C_i) e^{s_i t} + \sum_{k=1}^{n_2} D_k e^{-\xi_k \omega_{nk} t} \cos \omega_{nk} \sqrt{1 - \xi_k^2} t + \sum_{k=1}^{n_2} F_k e^{-\xi_k \omega_{nk} t} \sin \omega_{nk} \sqrt{1 - \xi_k^2} t + \sum_{j=1}^q B_j e^{s_{r_j} t}$$

若要系统稳定，必须前三项在  $t \rightarrow \infty$  时均趋于零。

故仍有： $\lim_{t \rightarrow \infty} (A_i + C_i) e^{s_i t} = 0$

及  $\lim_{t \rightarrow \infty} D_k e^{-\xi_k \omega_{nk} t} \cos \omega_{nk} \sqrt{1 - \xi_k^2} t = 0$

以及  $\lim_{t \rightarrow \infty} F_k e^{-\xi_k \omega_{nk} t} \sin \omega_{nk} \sqrt{1 - \xi_k^2} t = 0$

所以需  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{s_i t} = 0$  及  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\xi_k \omega_{nk} t} = 0$ 。

◆ 若有重根，如有  $\alpha$  重实根  $s_i$  和  $\beta$  重共轭复根  $\sigma_h \pm j\omega_h$ ，  
则瞬时分量中相应出现：

$$A_{i1} e^{s_i t}, A_{i2} t e^{s_i t}, \dots, A_{i\alpha} t^{\alpha-1} e^{s_i t}$$

$$\text{及 } D_{h1} e^{\sigma_h t} \sin \omega_h \sqrt{1 - \xi_h^2} t, \quad F_{h1} e^{\sigma_h t} \cos \omega_h \sqrt{1 - \xi_h^2} t,$$

$$D_{h2} t e^{\sigma_h t} \sin \omega_h \sqrt{1 - \xi_h^2} t, \quad F_{h2} t e^{\sigma_h t} \cos \omega_h \sqrt{1 - \xi_h^2} t,$$

$$\dots D_{h\beta} t^{\beta-1} e^{\sigma_h t} \sin \omega_h \sqrt{1 - \xi_h^2} t, \quad F_{h\beta} t^{\beta-1} e^{\sigma_h t} \cos \omega_h \sqrt{1 - \xi_h^2} t$$

★系统稳定的充要条件为：

系统特征方程的根（即闭环极点）都为负实数或具有负的实部。特征根都严格位于 $s$ 平面的左半平面。

劳斯判据就是这样一种稳定性判别方法——它利用特征方程的各项系数进行代数运算，得到全部极点具有负实部的条件。

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (a_n > 0)$$

$$(1) \text{ 必要条件 } a_i > 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\begin{aligned} \text{说明: } D(s) &= (s+1)(s+2)(s+3) & (s^2 + 3s + 2)(s+3) \\ &= (s^2 + 3s + 2)(s+3) & = s^3 + 3s^2 + 2s \\ &= s^3 + 6s^2 + 11s + 6 & \quad 3s^2 + 9s + 6 \\ & & = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \end{aligned}$$

$$\text{例1 } \left\{ \begin{array}{ll} D(s) = s^5 + 6s^4 + 9s^3 - 2s^2 + 8s + 12 = 0 & \text{不稳定} \\ D(s) = s^5 + 4s^4 + 6s^2 + 9s + 8 = 0 & \text{不稳定} \\ D(s) = -s^4 - 5s^3 - 7s^2 - 2s - 10 = 0 & \text{可能稳定} \end{array} \right.$$

劳斯判据:  $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$

劳斯表

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	.....
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	.....
$s^{n-2}$	$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$b_3$	.....
$s^{n-3}$	$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$	$c_3$	
$s^{n-4}$	$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$	$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$s^2$	$e_1$	$e_2$		
$s^1$	$f_1$			
$s^0$	$a_0$			

★系统稳定的充要条件: 所有 $a_i>0$ 且劳斯表中第一列元素值均大于零; 否则系统不稳。第一列各元素符号的改变次数等于特征方程正实部根的数目。

★系统稳定的充要条件：所有的 $a_i > 0$ 且劳斯表中第一列元素值均大于零，否则系统不稳。第一列各元素符号的改变次数等于特征方程正实部根的数目；若第一列中存在0元素，其余元素均大于零，则系统临界稳定。

例.  $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$       系数全大于零

解：

$s^4$	1	3	5
$s^3$	2	4	0
$s^2$	$\frac{6 - 4}{2} = 1$	5	
$s^1$	$\frac{4 - 10}{1} = -6$		
$s^0$	5		

系统不稳，且有  
两个正实部根。

## ●两种特殊情况的处理：

1、劳斯表中的某一行中第一个元素为零，而其余各元素不为零或部分不为零：

处理方法：可用一个有限小的正数  $\varepsilon$  代替为零的那一项，然后继续计算，结果若是为零的上一项和下一项符号相反，则记作一次符号改变。也可用因子  $(s+a)$  ( $a>0$ ) 乘以原特征多项式,再对新特征方程用劳斯判据判断



例.  $s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 1 = 0$

解:

$s^4$	1	1	1
$s^3$	2	2	0
$s^2$	0 $\approx \varepsilon$	1	
$s^1$	2 - $\frac{2}{\varepsilon} < 0$	0	
$s^0$	1		

显然系统不稳，且有两个正实部根。

例:  $D(s)=s^3-3s+2=0$  判定在右半平面的极点数。

解. 列劳斯表

$s^3$	1	-3
$s^2$	$\varepsilon$	2
$s^1$	$\frac{-3\varepsilon-2}{\varepsilon}$	0
$s^0$	2	

某行第一列元素为0，  
而该行元素不全为0时：  
将此0改为 $\varepsilon$ ，  
继续运算。

劳斯表第一列元素变号 2次，有2个正实部根，系统不稳定。

解二：

$$D(s) = s^3 - 3s + 2 = 0$$

$$D_1(s) = (s^3 - 3s + 2)(s + 3) = s^4 + 3s^3 - 3s^2 - 7s + 6 = 0$$

$$s^4 \quad 1 \quad -3 \quad 6$$

$$s^3 \quad 3 \quad -7 \quad 0$$

$$s^2 \quad -2/3 \quad 6 \quad 0$$

$$s^1 \quad 20$$

$$s^0 \quad 6$$

劳斯表第一列元素变号 2 次，有 2 个正实部根，系统不稳定。

**2、** 劳斯表的某一行各元素均为零，说明特征方程有关于原点对称的根：

处理方法：可用全为零一行的上一行的各项构成一个辅助方程，再对辅助方程求导得到一个新方程，取此新方程的各系数代替全为零的一行，继续计算。对称于原点的根可用辅助方程求得。

例·  $s^5 + s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + 2 = 0$ 。

解：

$s^5$	1	3	2
$s^4$	1	3	2
$s^3$	0	0	0
	4	6	
$s^2$	3/2	2	
	3	4	
$s^1$	$\frac{18-16}{3} = \frac{2}{3}$		
$s^0$	4		

← 辅方：  $s^4 + 3s^2 + 2 = 0$ . 求导：  $4s^3 + 6s = 0$ .

所以系统虽不稳，但无正实部根。求对称根：

$s^4 + 3s^2 + 2 = (s^2 + 1)(s^2 + 2) = 0$ , 故  $s_{1,2} = \pm j$  及  $s_{3,4} = \pm j\sqrt{2}$

例  $D(s)=s^5+2s^4-s-2=0$   $= (s+2)(s+1)(s-1)(s+j)(s-j)$

解. 列劳斯表

$s^5$	1	0	-1
$s^4$	2	0	-2
$s^3$	8	0	
$s^2$	$\varepsilon$	-2	
$s^1$	$16/\varepsilon$	0	
$s^0$	-2		

列辅助方程:  $2s^4 - 2 = 0$

$$\frac{d}{ds}(2s^4 - 2) = 8s^3 = 0$$

第一列元素变号一次, 有一个正根, 系统不稳定

解  $2s^4 - 2 = 0$ , 可得对称根  $s_1=1, s_2=-1, s_3=-j, s_4=+j$

# 稳定判据的应用:

1、判断系统稳定性

2、可确定个别参数变化对系统稳定性的影响，从而给出使系统稳定的参数取值范围。

例.单位负反馈的开环传函为  $G_k(s) = \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)}$ ，确定使

系统稳定的 $K_1$ 的取值范围

解:

$$\Phi(s) = \frac{K_1}{s^3 + 3s^2 + 2s + K_1}$$

$$\text{则 } D(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K_1 = 0$$

$a_i > 0$ ，则要求 $K_1 > 0$ ;

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K_1 \\ s^1 & \frac{6-K_1}{3} & 0 \\ & K_1 & \end{array}$$

故有 $0 < K_1 < 6$

例 系统结构图如右，

(1) 确定使系统稳定的参数  $(K, \xi)$  的范围；

(2) 当  $\xi=2$  时，确定使全部极点均位于  $s=-1$  之左的  $K$  值范围。

解.

$$(1) \quad G(s) = \frac{K_a}{s(s^2 + 20\xi s + 100)} \quad K = \frac{K_a}{100}$$

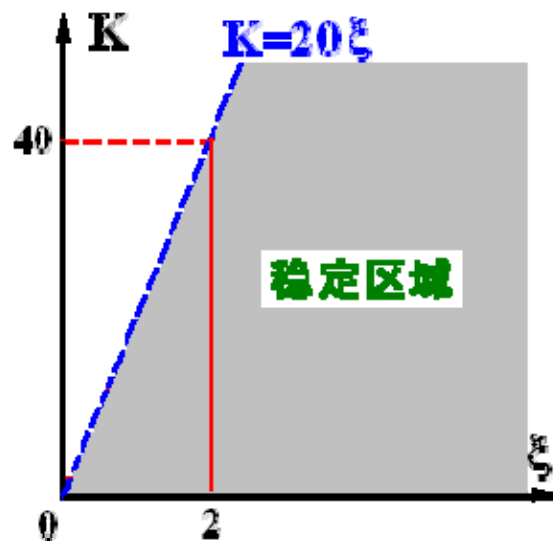
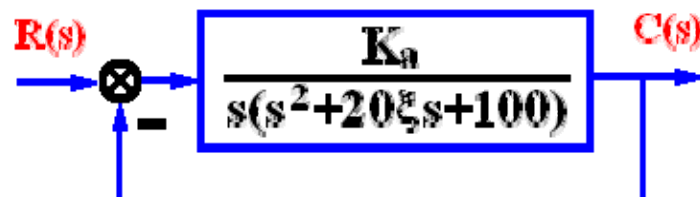
$$D(s) = s^3 + 20\xi s^2 + 100s + 100K = 0$$

$$s^3 \quad \quad 1 \quad \quad 100$$

$$s^2 \quad \quad 20\xi \quad \quad 100K \quad \Rightarrow \quad \xi > 0$$

$$s^1 \quad \frac{2000\xi - 100K}{20\xi} \quad \quad 0 \quad \Rightarrow \quad K < 20\xi$$

$$s^0 \quad \quad 100K \quad \Rightarrow \quad K > 0$$





(2) 当  $\xi=2$  时, 确定使全部极点均位于 $s=-1$ 之左的 $K$ 值范围。

当  $\xi=2$  时, 进行平移变换:  $s = \hat{s} - 1$

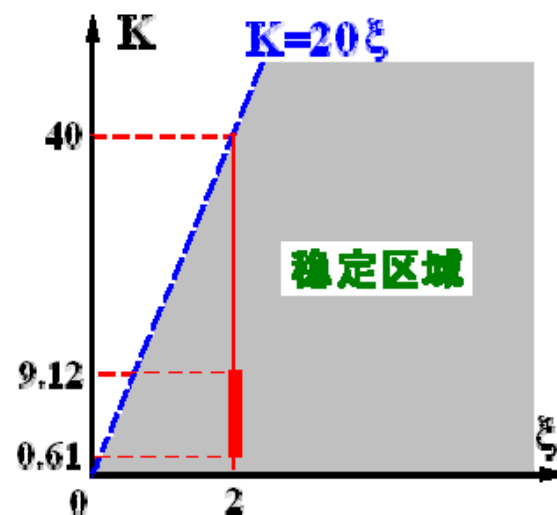
$$D(s) = s^3 + 20 \times 2 s^2 + 100 s + 100 K = 0$$

$$\downarrow s = \hat{s} - 1$$

$$D(\hat{s}) = (\hat{s} - 1)^3 + 40 (\hat{s} - 1)^2 + 100 (\hat{s} - 1) + 100 K = 0$$

$$= \hat{s}^3 + 37 \hat{s}^2 + 23 \hat{s} + (100 K - 61) = 0$$

$s^3$	1	23	
$s^2$	37	$100K - 61$	
$s^1$	$\frac{912 - 100K}{37}$	0	$\Rightarrow K < 9.12$
$s^0$	$100K - 61$		$\Rightarrow K > 0.61$



## 3.7 线性系统的稳态误差

### 系统输出=稳态分量+瞬态分量

稳态误差是系统的稳态性能指标，是对系统控制精度的度量。反映系统跟踪输入信号或抑制扰动的能力。

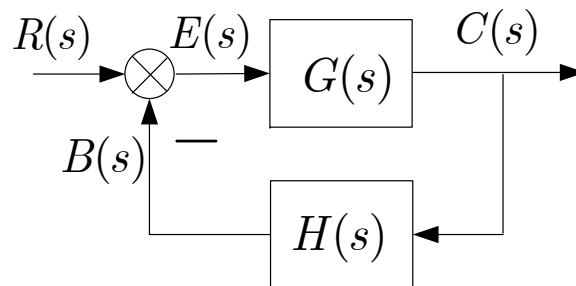
对稳定的系统研究稳态误差才有意义，计算稳态误差应以系统稳定为前提。

本节只讨论系统的原理性误差，即只讨论由于结构、输入形式和类型产生的误差。而不考虑由于非线性等因素引起的误差。通常把在阶跃输入作用下没有原理性稳态误差的系统称为无差系统；而把有原理性稳态误差的系统称为有差系统。

### 3.7.1 误差与稳态误差

误差的定义一：从系统输入端定义的误差

偏差：
$$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$$



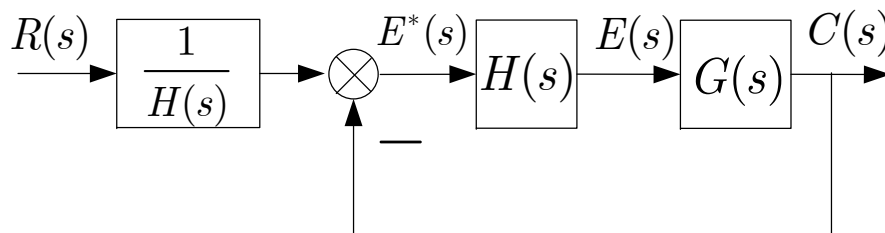
误差的定义二：从系统输出端定义的误差：输出量的希望值与实际值之差

输出量的希望值：偏差  
为零时的输出

$$E(s) = R(s) - H(s)C_r(s) = 0$$

$$\Rightarrow C_r(s) = \frac{R(s)}{H(s)}$$

$$E'(s) = \frac{R(s)}{H(s)} - C(s) = C_r(s) - C(s)$$



两种误差之间的关系：
$$E'(s) = \frac{E(s)}{H(s)}$$

**本课程讨论的误差是指从输入端定义的误差。**

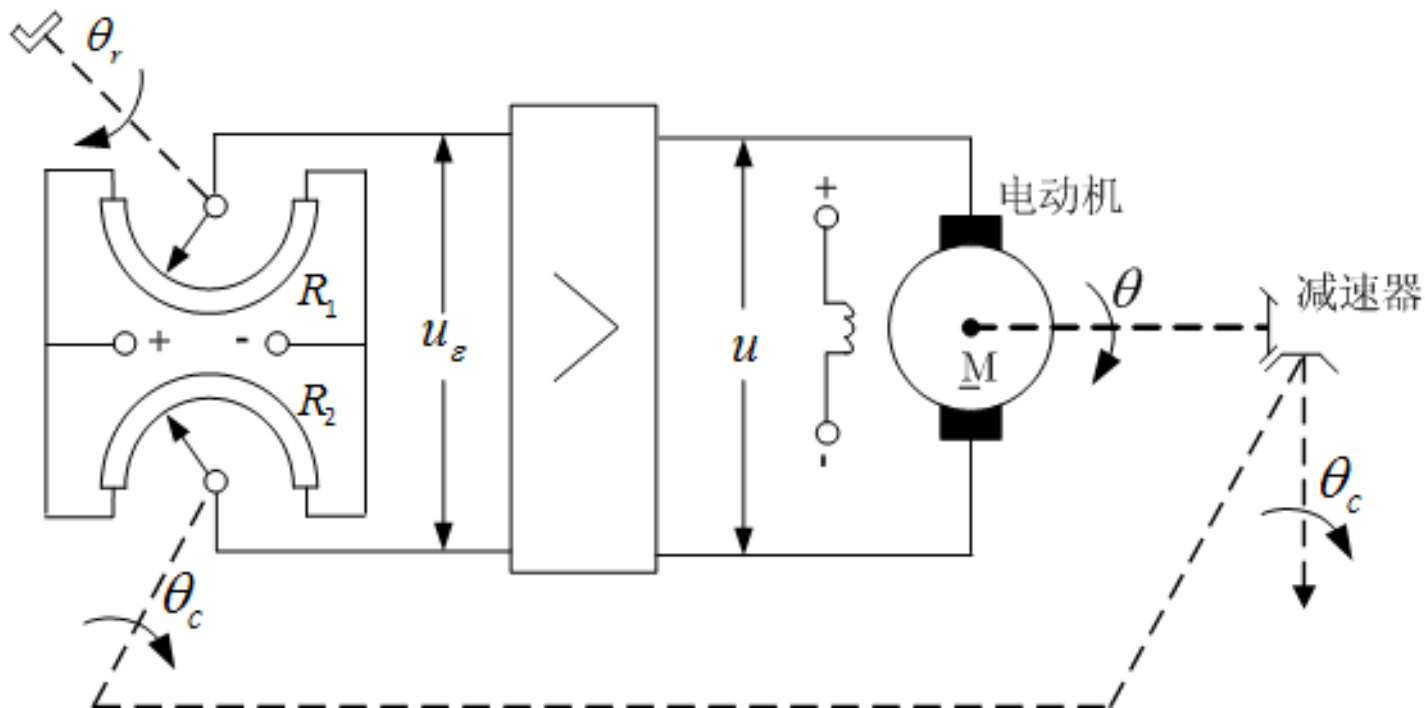
稳态误差的两种含义：

① 静态误差：时间趋于无穷大时的值，即  $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$

② 动态误差：误差信号中的稳态分量，通常是时间的函数。

# 影响稳态误差的因素

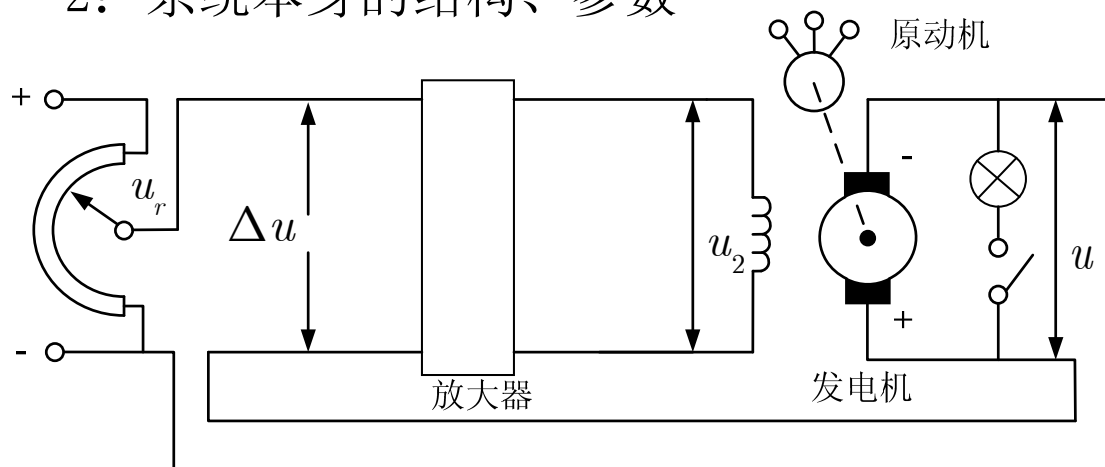
## 1: 输入信号的形式和幅值



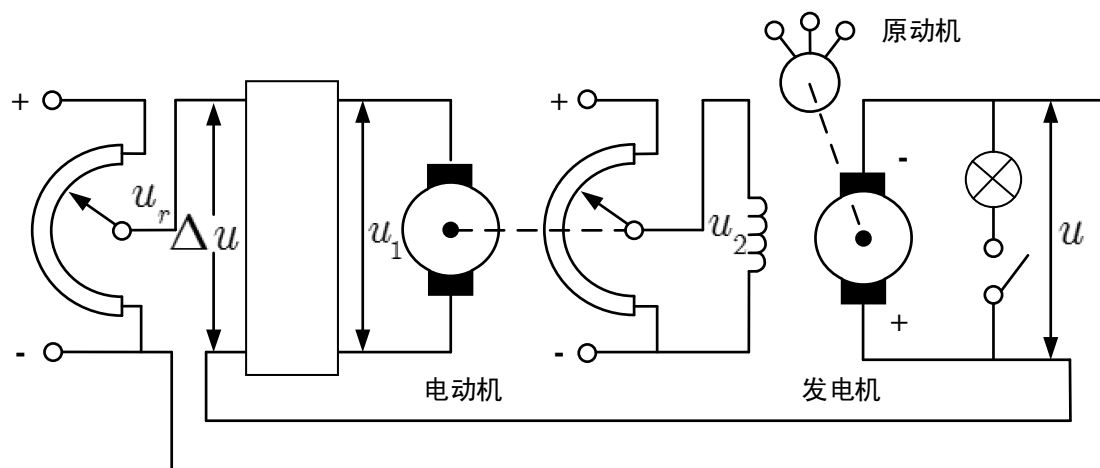
如图所示位置随动系统对阶跃输入无差，对斜坡输入有差，且稳态误差与斜坡输入的大小成正比，与放大系数成反比。

# 影响稳态误差的因素

## 2: 系统本身的结构、参数



对恒值输入有差



对恒值输入无差  
(增加了积分环节)

## 3.7.2 稳态误差的计算

利用终值定理计算稳态误差的步骤：

① 判断系统的稳定性。

只有当系统是稳定的，才有稳态误差的概念。另外利用终值定理计算静态误差还要求  $E(s) = \frac{sR(s)}{1+H(s)G(s)}$  在除原点以外的虚轴以及右半复平面上解析，或者说  $E(s)$  的全部极点都必须分布在平面的左半平面或原点上。

② 求误差传递函数；

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+H(s)G(s)}$$

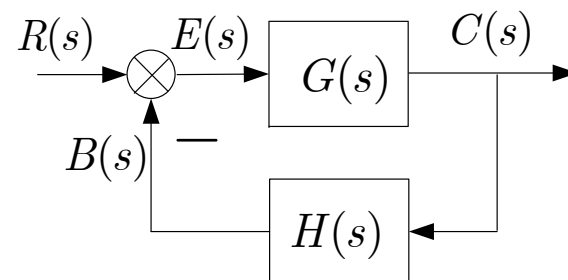
③ 用终值定理求稳态误差：

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1+H(s)G(s)}$$

例：如图所示的非单位反馈系统中，前向通路和反馈通路传递函数分别为  $G(s)$  和  $H(s)=0.1$ ，试计算：(1) 当  $G(s)=\frac{10}{s+1}$  时，系统分别在  $r(t)=1(t)$  和  $r(t)=t$  作用下的稳态误差；(2) 当  $G(s)=\frac{10}{s(s+1)}$  时，系统分别在  $r(t)=1(t)$  和  $r(t)=t$  作用下的稳态误差。

解：(1) 当  $G(s)=\frac{10}{s+1}$  时，计算闭环特征方程，并通过列劳斯表可知系统是稳定的。计算从输入到误差的传递函数  $\Phi_e(s)=\frac{1}{1+H(s)G(s)}=\frac{s+1}{s+2}$

当  $r(t)=1(t)$  时， $E^*(s)=\frac{R(s)}{1+H(s)G(s)}=\frac{(s+1)}{s(s+2)}$ ，该式满足终值定理的使用条件。稳态误差为  $e_{ss}^*=\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(s+1)}{s(s+2)}=0.5$ 。



当  $r(t)=t$  时,  $R(s)=\frac{1}{s^2}$ ,  $E(s)=\frac{s+1}{s^2(s+2)}$ , 稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s+1}{s^2(s+2)} = \infty$$

(2) 根据劳斯判据知, 当  $G(s)=\frac{10}{s(s+1)}$  时, 系统仍是稳定的。

当  $r(t)=1(t)$  时,  $E(s)=\frac{1}{1+H(s)G(s)} \cdot R(s)=\frac{s+1}{s^2+s+1}$ , 符合终值定理使用的

的条件, 故

$$e_{ss}^* = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s+1}{s^2+s+1} = 0$$

当  $r(t)=t$  时,  $E(s)=\frac{s+1}{s(s^2+s+1)}$ , 稳态误差为

$$e_{ss}^* = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s+1}{s(s^2+s+1)} = 1$$

思考: 若  $r(t)=\sin \omega t$ , 使用终值定理会出现什么情况?

可见: 稳态误差不仅和系统的结构及参数有关还和输入信号的形式有关。



### 3.7.3 静态误差系数法

目标：① 利用静态误差系数计算系统在典型输入作用下的稳态误差；

②借助于静态误差系数的概念研究稳态误差和系统传递函数结构、参数以及输入形式的关系，找出其中的规律，为系统分析设计提供指导。

设系统开环传递函数具有如下结构

$$H(s)G(s) = \frac{K}{s^v} G_0(s)$$

其中  $G_0(s)$  是一阶、二阶典型环节，即

$$G_0(s) = \frac{\prod_{k=1}^{m_1} (\tau_k s + 1) \prod_{l=1}^{m_2} (\tau_l^2 s^2 + 2\xi\tau_l s + 1)}{\prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1) \prod_{j=1}^{n_2} (T_j^2 s^2 + 2\xi T_j s + 1)}, \text{ 满足 } \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = 1$$

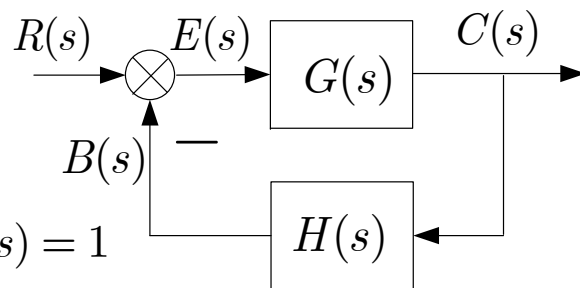
$K$ ——开环增益

$v$ ——开环传递函数中纯积分环节的个数，称为系统的型别或系统的无差度。

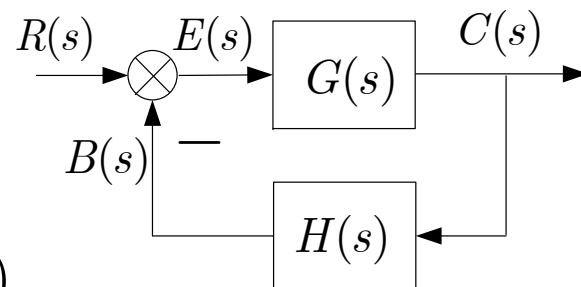
当  $v=0$  时，称相应的闭环系统为0型系统，或“有差系统”；

当  $v=1$  时，称相应的闭环系统为1型系统，或“一阶无差系统”

当  $v=2$  时，称相应的闭环系统为2型系统，或“二阶无差系统”。。。。。。



根据稳态误差的计算原理



$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{R(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

(1) 阶跃输入时的稳态误差

$$r(t) = A \cdot 1(t), \quad R(s) = \frac{A}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + H(s)G(s)} R(s) = \frac{A}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} H(s)G(s)}$$

定义静态位置误差系数:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^v} G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^v}$$

$$\text{则: } e_{ssp} = \frac{A}{1 + K_p}$$

## (2) 斜坡输入时的稳态误差

$$r(t) = At, \quad R(s) = \frac{A}{s^2}$$

$$e_{ssv} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+H(s)G(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+H(s)G(s)} \frac{A}{s^2} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} sH(s)G(s)}$$

定义静态速度误差系数:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s^v} G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{v-1}} \quad \text{则: } e_{ssv} = \frac{A}{K_v}$$

## (3) 加速度输入时的稳态误差

$$r(t) = \frac{A}{2} t^2, \quad R(s) = \frac{A}{s^3}$$

$$e_{ssa} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+H(s)G(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+H(s)G(s)} \frac{A}{s^3} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 H(s)G(s)}$$

定义静态加速度误差系数:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 H(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K}{s^v} G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{v-2}} \quad \text{则: } e_{ssa} = \frac{A}{K_a}$$

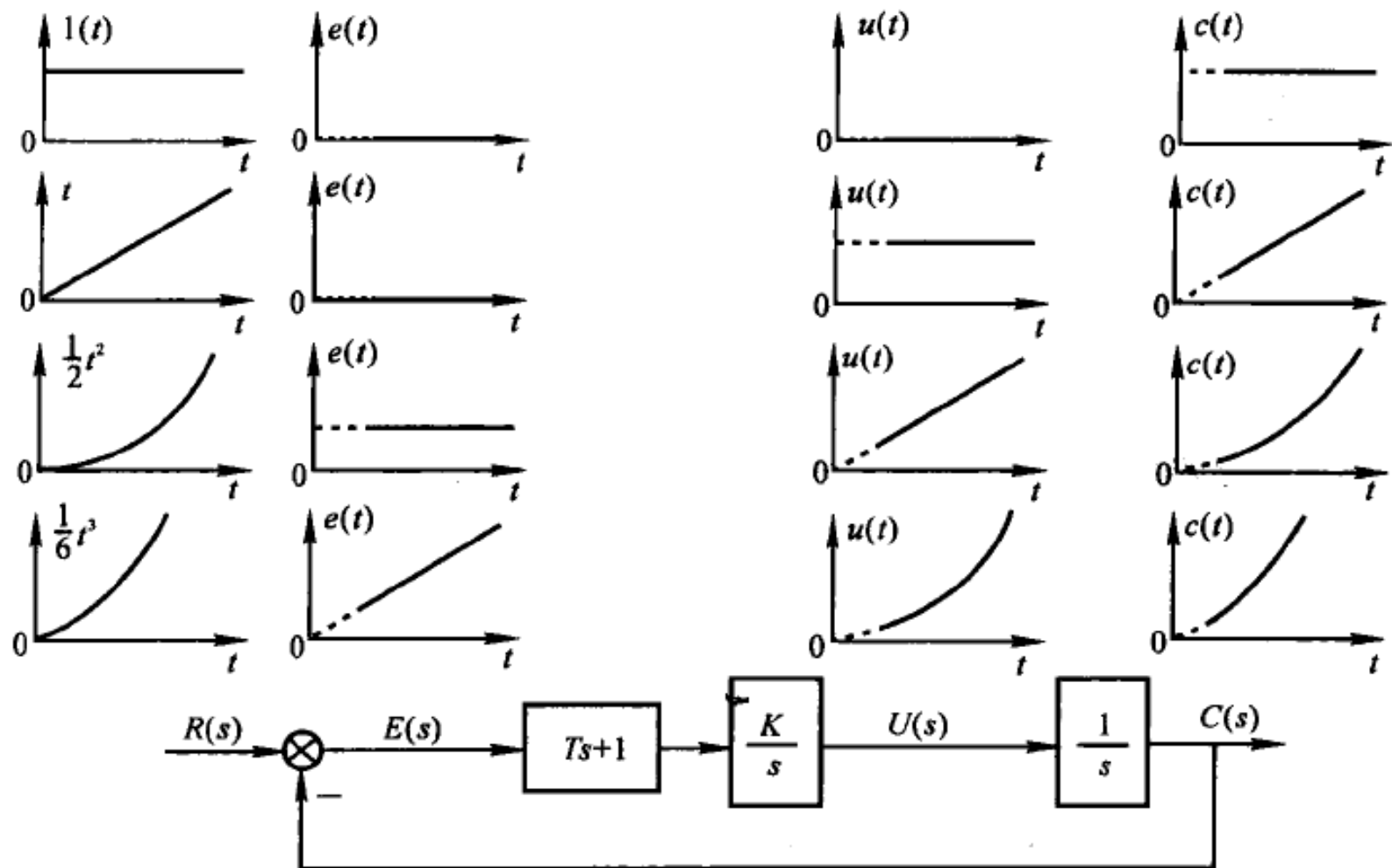
典型输入信号作用下的稳态误差和静态误差系数

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
	$r(t)=A\cdot 1(t)$	$r(t)=At$	$r(t)=\frac{At^2}{2}$	$r(t)=A\cdot 1(t)$	$r(t)=At$	$r(t)=\frac{At^2}{2}$
	$K_p$ $=\lim_{s\rightarrow 0}H(s)G(s)$ $=\lim_{s\rightarrow 0}\frac{K}{s^v}$	$K_v$ $=\lim_{s\rightarrow 0}sH(s)G(s)$ $=\lim_{s\rightarrow 0}\frac{K}{s^{v-1}}$	$K_a$ $=\lim_{s\rightarrow 0}s^2H(s)G(s)$ $=\lim_{s\rightarrow 0}\frac{K}{s^{v-2}}$	$e_{ssp}=\frac{A}{1+K_p}$	$e_{ssv}=\frac{A}{K_v}$	$e_{ssa}=\frac{A}{K_a}$
	$K$	$0$	$0$	$\frac{A}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
$v=0$	$K$	$0$	$0$	$\frac{A}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
$v=1$	$\infty$	$K$	$0$	$0$	$\frac{A}{K}$	$\infty$
$v=2$	$\infty$	$\infty$	$K$	$0$	$0$	$\frac{A}{K}$

## 结论:

- ① 静态误差系数越大静态误差越小，控制精度越高，当其值为无穷大时静态误差为零；
- ② 静态误差系数和系统的型别有关。提高型别倾向于使静态误差系数为无穷大(能不能成为无穷大还取决于输入信号的形式)或者说提高系统的无差度，从而倾向于消除稳态误差；
- ③ 静态误差系数和开环增益有关。当静态误差系数是非零有限值时，该值必和开环增益成正比，因而增大开环增益有利于减小稳态误差；
- ④ 静态误差系数和输入信号的形式有关。输入信号表达式中关于时间 $t$ 的次数越高，系统越难保持无差跟踪；
- ⑤ 当稳态误差为非零有限值时，它必然和输入信号的幅值成正比；
- ⑥ 从减小稳态误差上讲，似乎开环积分环节个数越多越好、开环增益越大越好，但这可能会导致系统不稳定。故不能随意地提高系统的型别(一般不超过2)和开环增益。

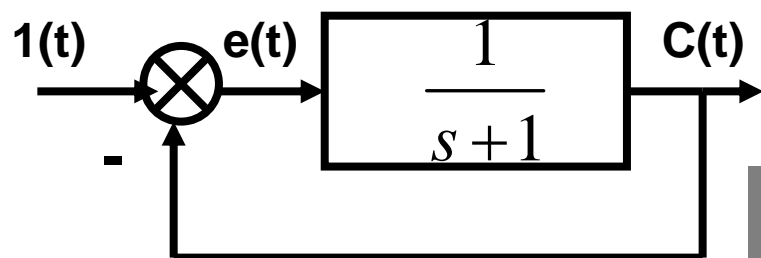
## 稳态误差随典型输入变化的规律



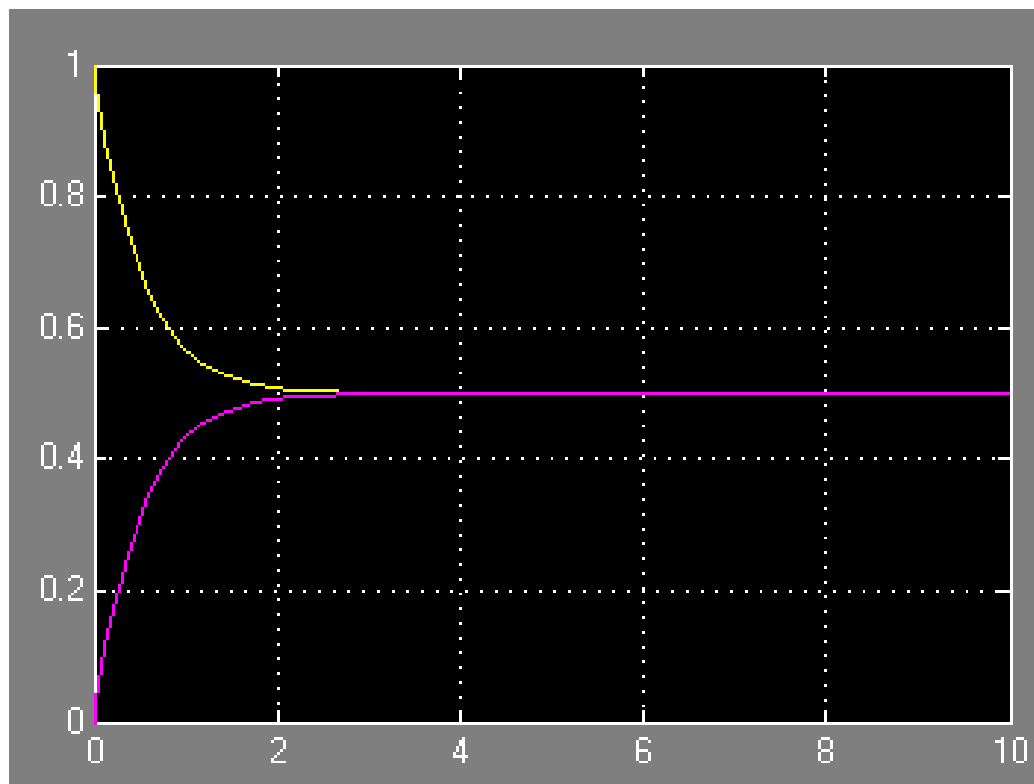
系统稳态输出中  $t$  的最高次数必定与输入的最高次数相同

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{零型系统（依赖偏差维持恒定的输出）}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{s+1} \quad \text{一型系统（依赖偏差的积分维持恒定的输出）}$$

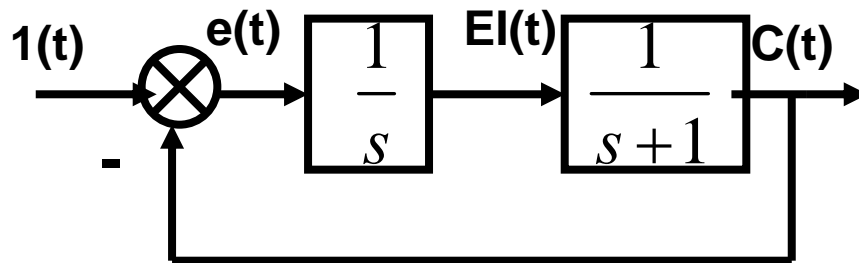


以上系统稳态时，  
必有  $C(t)=e(t)$ ，  
又  $e(t)=1- C(t)$ 。  
所以  $C(t)=e(t)=0.5$



## 二阶一型系统

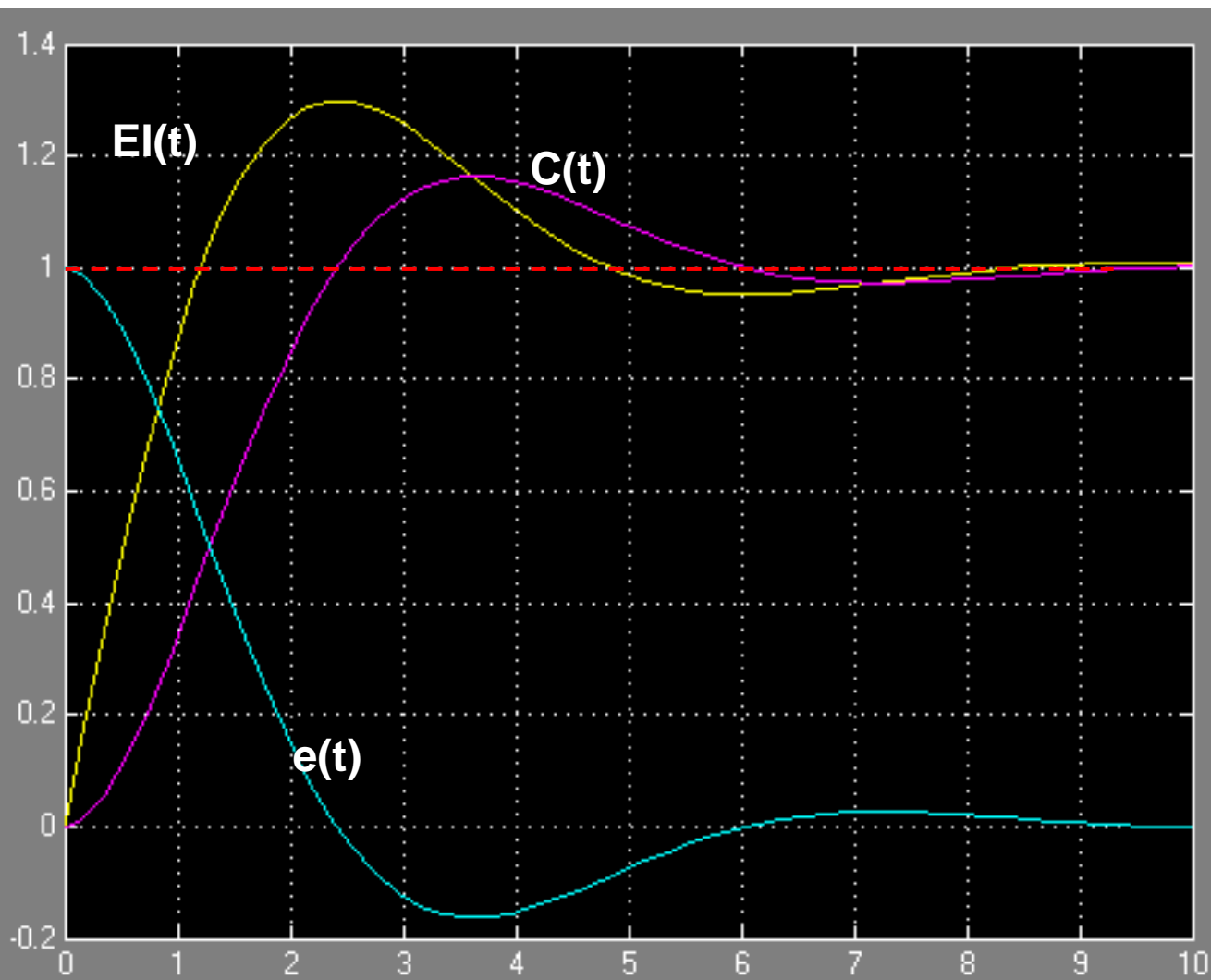
依赖误差的积分维持常值输出，误差的积分在系统达到稳态时仍会保持一定值。



$EI(\infty)$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s} \frac{1}{s+1}} \frac{1}{s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+1}{s^2 + s + 1} = 1$$





例：

计算闭环传递函数分别为 $\phi_1(s) = \frac{1}{s+2}$ 和 $\phi_2(s) = \frac{2}{s+2}$ 的单位反馈系统，在单位阶跃信号作用下的稳态误差。

$$\text{稳态输出: } c_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s+2} \frac{1}{s} = 0.5, \quad e_1(\infty) = 1(t) - 0.5 = 0.5$$

$$\text{稳态输出: } c_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2}{s+2} \frac{1}{s} = 1, \quad e_1(\infty) = 1(t) - 1 = 0$$

考察各自开环传递函数的型别

$$\phi_1(s) = \frac{1}{s+2} = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)} \Rightarrow G_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{零型系统}$$

$$\phi_2(s) = \frac{2}{s+2} = \frac{G_2(s)}{1+G_2(s)} \Rightarrow G_2(s) = \frac{2}{s} \quad \text{一型系统}$$

例 系统结构图如图所示, 已知输入  $r(t) = 2t + 4t^2$ , 求系统的稳态误差。

解.  $G(s) = \frac{K_1(Ts+1)}{s^2(s+a)} \quad \begin{cases} K = K_1/a \\ v = 2 \end{cases}$

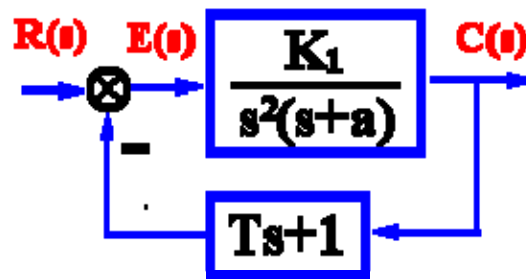
$$\Phi(s) = \frac{K_1}{s^2(s+a) + K_1(Ts+1)}$$

$$D(s) = s^3 + as^2 + K_1Ts + K_1 = 0$$

$s^3$	1	$K_1T$	
$s^2$	$a$	$K_1$	$\Rightarrow a > 0$
$s^1$	$\frac{(aT-1)K_1}{a}$	0	$\Rightarrow aT > 1$
$s^0$	$K_1$		$\Rightarrow K_1 > 0$

$$r_1(t) = 2t$$

$$r_2(t) = 4t^2 = 8 \cdot \frac{1}{2} t^2$$



$$\begin{aligned}
 e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{(1 + H(s)G(s))} R(s) \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + (Ts+1) \frac{K_1}{s^2(s+a)}} \left( \frac{2}{s^2} + \frac{8}{s^3} \right) \\
 &= \frac{8a}{K_1}
 \end{aligned}$$

也可使用静态误差系数法查表求取

$v = 2$ , 系统是二型系统, 故:

当  $r_1(t) = 2t$  时,  $e_{ss1} = 0$ ;

当  $r_2(t) = 4t^2 = 8 \times \frac{1}{2}t^2$  时,  $e_{ss2} = \frac{8}{K} = \frac{8a}{K_1}$ ;

叠加:  $e_{ss} = e_{ss1} + e_{ss2} = \frac{8a}{K_1}$

用静态误差系数法求取稳态误差要求系统满足:

- ① 系统必须是稳定的;
- ② 只能计算从输入端定义的的误差的稳态值;
- ③ 只能计算典型控制输入作用时误差的稳态值;
- ④ 结构图是典型的反馈结构, 不能有其他前馈通道。

### 3.7.4 干扰作用下的稳态误差

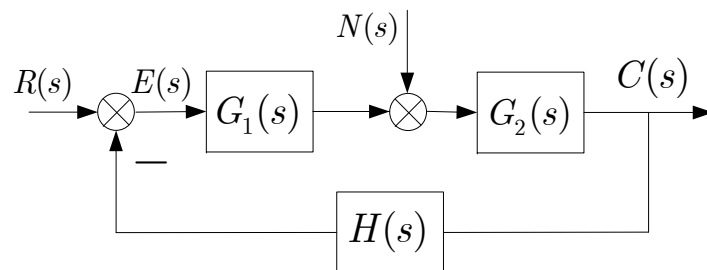
干扰是广泛存在的，讨论干扰引起的稳态误差与系统结构、参数的关系，可以为人们合理设计控制系统结构及参数，进而提高系统抗干扰能力提供依据。

忽略 $R(s)$ ,从 $N(s)$ 到误差 $E(s)$ 的传递函数为

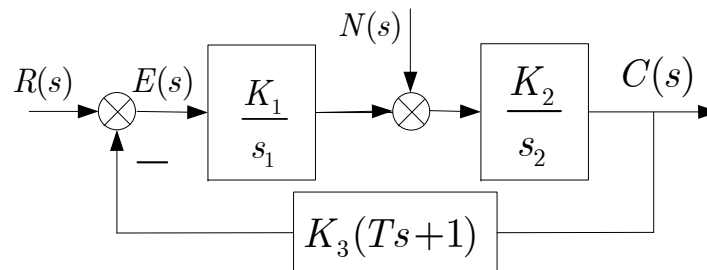
$$\Phi_{en}(s) = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$N(s)$ 引起的稳态误差为

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$



例：如右图所示系统。将开环增益和积分环节分布在不同位置，讨论它们分别对控制输入 $r(t)=0.5t^2$ 和干扰 $n(t)=At$ 作用下的稳态误差的作用。



解：系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_1 K_2 K_3 (Ts + 1)}{s_1 s_2} \quad K \triangleq K_1 K_2 K_3, v = 2$$

(1)  $r(t)$ 作用下系统的误差传递函数

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s_1 s_2}{s_1 s_2 + K_1 K_2 K_3 (Ts + 1)}$$

特征多项式  $D(s) = s_1 s_2 + K_1 K_2 K_3 Ts + K_1 K_2 K_3$ ；故当  $K_1 K_2 K_3 > 0$  且  $T > 0$  时系统稳定。

当  $r(t) = 0.5t^2$  时，稳态误差为

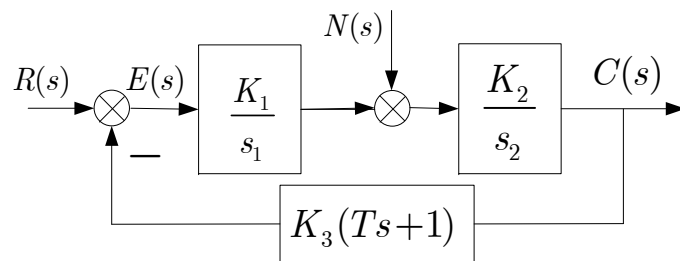
$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Phi_e(s) \cdot \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s_1 s_2}{s_1 s_2 + K_1 K_2 K_3 Ts + K_1 K_2 K_3} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{K_1 K_2 K_3}$$

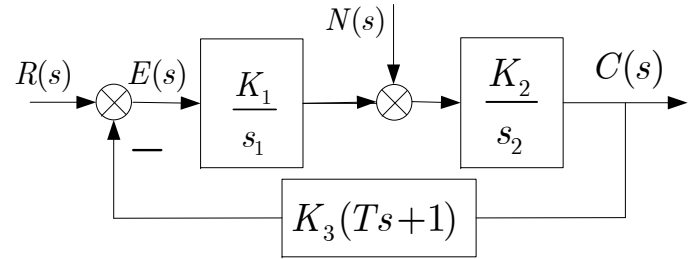
可见，无论开环增益和积分环节分布在回路的任何位置，对减小或消除  $r(t)$  作用下的稳态误差均有作用。

(2)  $n(t) = At$  作用时的误差传递函数： 
$$\Phi_{en}(s) = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{-K_2 K_3 s_1 (Ts + 1)}{s_1 s_2 + K_1 K_2 K_3 Ts + K_1 K_2 K_3}$$

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Phi_{en}(s) \cdot \frac{A}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-K_2 K_3 s_1 (Ts + 1)}{s_1 s_2 + K_1 K_2 K_3 Ts + K_1 K_2 K_3} \cdot \frac{A}{s} = -\frac{A}{K_1}$$

可见，只有分布在前向通道的主反馈口到干扰作用点之间的增益和积分环节才对减小或者消除干扰作用下的稳态误差有效。



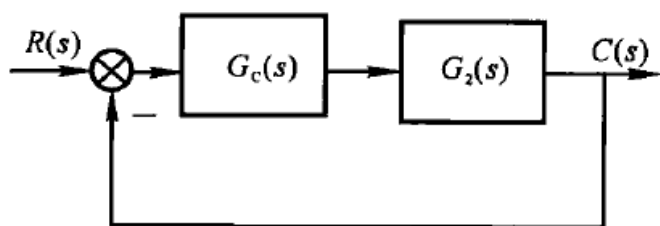


- 欲提高系统在扰动作用下的无差度，则需要增加扰动作用点之前的积分环节的个数。
- 欲使系统在阶跃扰动下的稳态误差为零，则至少应在扰动作用点前串入1个积分环节。欲使系统在斜坡扰动下的稳态误差为零，则至少应在扰动作用点串入2个积分环节。
- 若干扰信号可测量，则也可采用顺馈校正的方法减小干扰作用下的稳态误差。
- 系统在输入信号和扰动信号共同作用下的稳态误差等于系统在两种信号分别作用下的稳态误差的代数和。

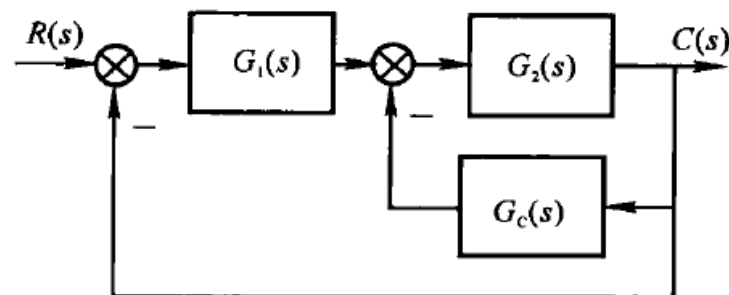
## 3.8 线性系统的时域校正

为了使系统的性能满足指标要求，往往要对系统进行调整，这个调整的过程就称为校正。最简单的校正方法是调整系统的开环增益值，但是在很多情况下，仅仅改变增益仍无法满足给定的性能指标，因此需要采用其它校正方法。

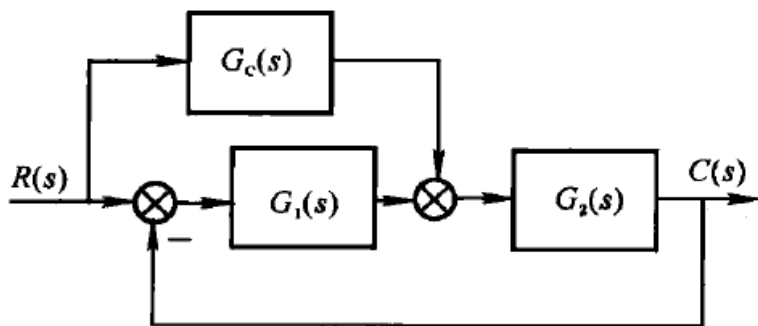
常用校正方法有串联校正、反馈校正和复合校正。本节介绍反馈校正和复合校正。



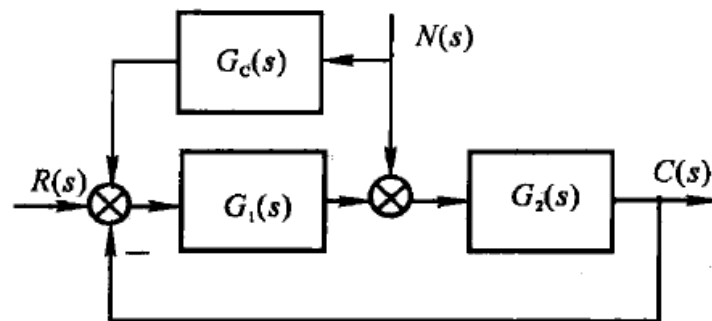
串联校正



反馈校正



按输入补偿的复合校正



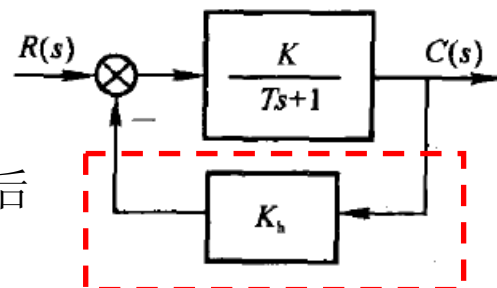
按干扰补偿的复合校正

### 3.8.1 反馈校正

1、比例负反馈校正可以减小被包围环节的时间常数，削弱被包围环节的惯性，提高响应的快速性。

原系统  $G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$  的时间常数为  $T$ ，采用比例负反馈后

时间常数减小到  $\frac{T}{1 + KK_h}$



$$\therefore G'(s) = \frac{\frac{K}{Ts + 1}}{1 + \frac{KK_h}{Ts + 1}} = \frac{K}{Ts + 1 + KK_h} = \frac{\frac{K}{1 + KK_h}}{\frac{T}{1 + KK_h}s + 1} = \frac{K'}{T's + 1}$$

$$\therefore T' = \frac{T}{1 + KK_h} \text{ (下降, 对提高快速性有利),}$$

$$K' = \frac{K}{1 + KK_h} \text{ (下降, 对稳态精度不利, 需补偿)}$$



2、负反馈可以降低参数变化或者系统中不希望有的特性(非线性特性等)对系统的影响。

假设  $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$  中的参数  $K$  发生摄动, 摄动量为  $\Delta K$ 。则:

①对原系统, 参数摄动带来的增益相对增量为  $\alpha = \frac{\Delta K}{K}$ ;

②对加入比例负反馈的系统

摄动前的增益为:  $K'_{\text{前}} = \frac{K}{1 + KK_h}$

根据泰勒公式, 摄动后的增益增量为:  $\Delta K' = \frac{1 + KK_h - KK_h}{(1 + KK_h)^2} \Delta K = \frac{1}{(1 + KK_h)^2} \Delta K$

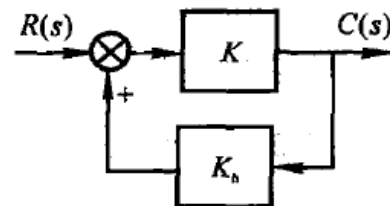
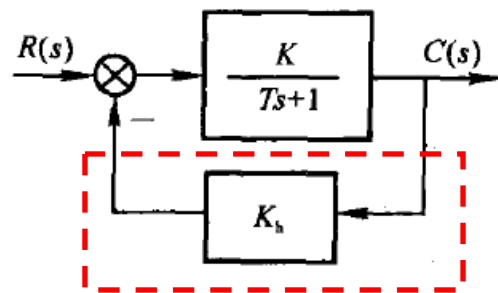
故加入比例负反馈后的增益相对增量为:

$$\beta = \frac{\Delta K'}{K'_{\text{前}}} = \frac{\frac{1}{(1 + KK_h)^2} \Delta K}{\frac{K}{1 + KK_h}} = \frac{1}{1 + KK_h} \cdot \frac{\Delta K}{K}$$

显然  $\beta$  是  $\alpha$  的  $\frac{1}{1 + KK_h}$ 。

3、合理利用正反馈可以提高放大倍数。

如右图所示系统, 当  $K_h \approx \frac{1}{K}$  且小于  $\frac{1}{K}$  时, 采用正反馈后的放大系数  $\frac{K}{1 - KK_h}$  可远远大于原增益  $K$ 。



### 3.8.1 复合校正

复合校正分为按输入补偿和按干扰补偿两种方式。

#### (1) 按干扰补偿的复合校正

按干扰补偿的复合校正就是将干扰信号通过前馈通道引入闭环回路，同时合理设计前馈通道的传递函数，达到减小干扰作用下的稳态误差的目的。

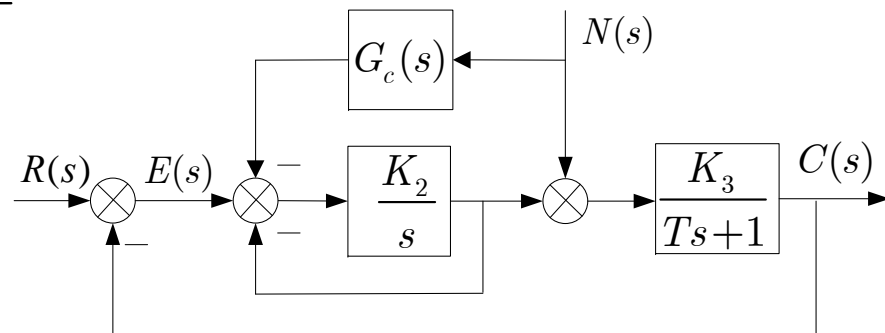
**例** 系统结构图如图所示，若要使干扰信号  $n(t) = 1(t)$  作用下系统的稳态误差为零，试设计满足要求的  $G_c(s)$ 。

**解：**在干扰信号  $n(t) = 1(t)$  的作用下，系统的误差传递函数为

$$\Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-K_3(s + K_2) + K_2K_3G_c(s)}{s(Ts + 1) + K_2(Ts + 1) + K_1K_2K_3},$$

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_{en}(s)N(s) = \frac{-K_3K_2 + K_2K_3G_c(s)}{K_2 + K_1K_2K_3}$$

令  $e_{ssn} = 0$  得， $G_c(s) = 1$ 。



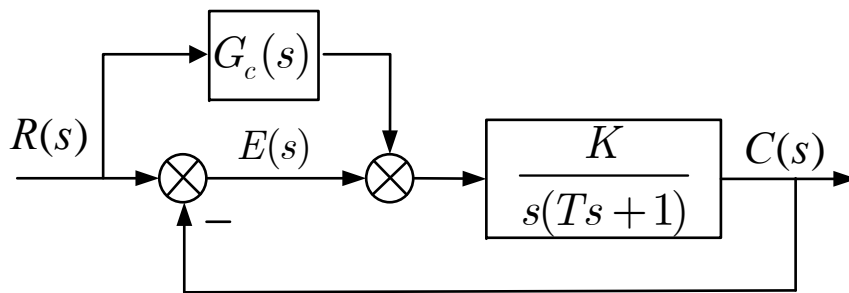
## (2) 按输入补偿的复合校正

主要用于减小输入  $r(t)$  作用下的稳态误差

例 系统结构图如图所示，① 试设计满足要求的  $G_c(s)$ ，使系统在输入  $r(t) = At$  作用下的稳态误差为零；② 分析  $G_c(s)$  中的参数不准确时对补偿效果的影响；③ 在第①问确定的  $G_c(s)$  的基础上，若被控对象开环增益增加了  $\Delta K$ ，试说明相应的稳态误差是否还能为零。

解：①系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$



前馈补偿前，系统在斜坡输入下的稳态误差为  $\frac{A}{K}$ 。闭环特征多项式为

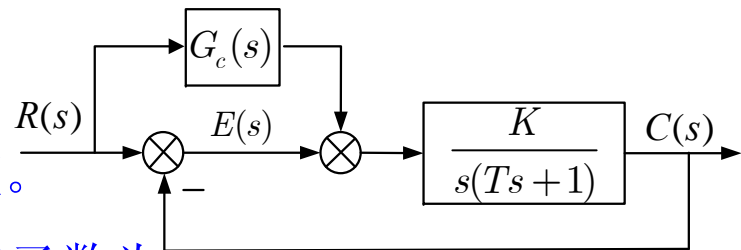
$D(s) = Ts^2 + s + K = 0$ 。当  $T > 0, K > 0$  时稳定。系统的误差传递函数为

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(Ts + 1) - KG_c(s)}{s(Ts + 1) + K}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_e(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{ATs^2 + As - AKG_c(s)}{Ts^3 + s^2 + Ks} = 0$$

欲使上式成立，必须有  $As - AKG_c(s) = 0$ ，即  $G_c(s) = \frac{s}{K}$ 。

引入前馈校正装置  $G_c(s) = \frac{s}{K}$  前后，系统的闭环特征方程未发生变化，因而稳定性保持不变。



校正前系统的型别为1，校正后系统的闭环传递函数为：

$$\Phi_{\text{校}}(s) = \frac{Ks + K^2}{TKs^2 + Ks + K^2}$$

设等效的单位负反馈系统的开环传递函数为  $G_{\text{校}}(s)$ 。

$$\text{则 } \frac{G_{\text{校}}(s)}{1 + G_{\text{校}}(s)} = \frac{Ks + K^2}{TKs^2 + Ks + K^2} \Rightarrow G_{\text{校}}(s) = \frac{Ks + K^2}{TKs^2} \quad (2\text{型系统})$$

② 若补偿装置中的参数出现偏差  $\varepsilon$ ，即  $G_c(s) = (\frac{1}{K} + \varepsilon)s$ ，则

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{ATs^2 + As - AK(\frac{1}{K} + \varepsilon)s}{Ts^3 + s^2 + Ks} = -A\varepsilon$$

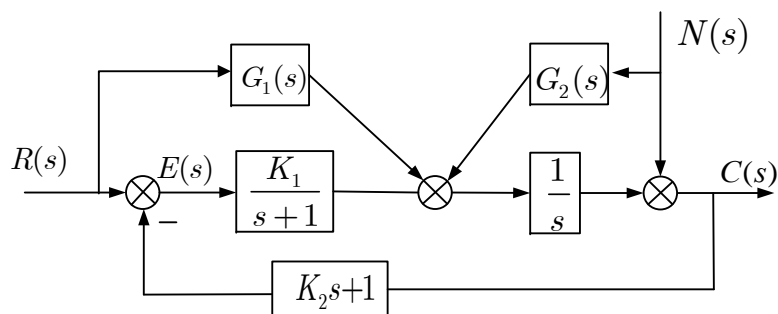
③ 开环增益为  $K + \Delta K$  时，系统的误差传递函数为

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(Ts + 1) - (K + \Delta K)G_c(s)}{s(Ts + 1) + (K + \Delta K)}$$

$$\text{若仍选择 } G_c(s) = \frac{s}{K}, \text{ 则 } e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) R(s) = \frac{-A\Delta K}{K(K + \Delta K)}$$

参数不准确时，补偿就被破坏(不能成为2型系统)，使稳态误差不为0。故通过补偿使稳态误差为0的方法不是鲁棒的。这是上述改造后系统同真正二型系统的本质区别。

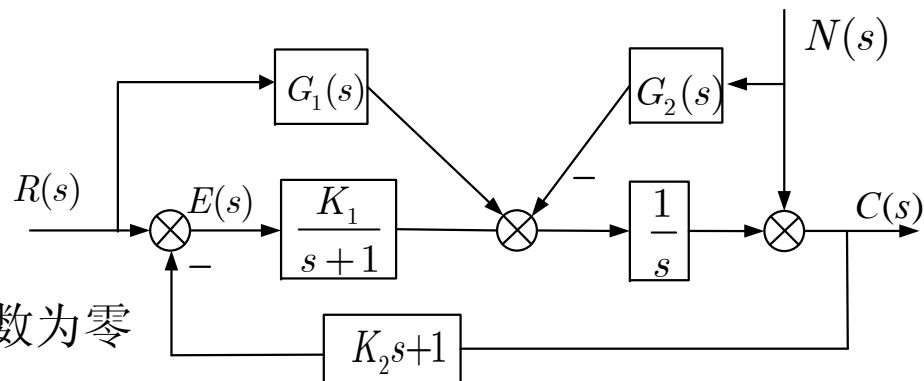
例：控制系统结构图如图。①试确定参数  $K_1$  和  $K_2$ ，使系统极点配置在  $\lambda_{1,2} = -5 \pm j5$ ；② 设计  $G_1(s)$ ，使  $r(t)$  作用下的稳态误差恒为零；③设计  $G_2(s)$ ，使  $n(t)$  作用下的稳态误差恒为零。



解：① 系统的特征方程为  $D(s) = s^2 + (1 + K_1 K_2)s + K_1 = 0$

令  $s^2 + (1 + K_1 K_2)s + K_1 = (s + 5 - j5)(s + 5 + j5) = s^2 + 10s + 50$

比较系数可解得  $K_1 = 50$ ,  $K_2 = 0.18$



② 当  $r(t)$  作用时，令系统的误差传递函数为零

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 - \frac{K_2s+1}{s}G_1(s)}{1 + \frac{K_1(K_2s+1)}{s(s+1)}} = \frac{(s+1)[s - (K_2s+1)G_1(s)]}{s(s+1) + K_1(K_2s+1)} = 0$$

取  $G_1(s) = \frac{s}{K_2s+1}$ ，可使  $r(t)$  作用时的稳态误差恒为零。

③ 当  $n(t)$  作用时，令  $n(t)$  作用时的误差传递函数为零

$$\Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-(K_2s+1) + \frac{K_2s+1}{s}G_2(s)}{1 + \frac{K_1(K_2s+1)}{s(s+1)}} = 0$$

取  $G_2(s) = s$ ，可使  $n(t)$  作用时的稳态误差恒为零。

# 习题1

**3.1 3.3 3.7 3.8** （典型环节，性能）

**3.10 3.11 2.6B** （设计）

# 习题2

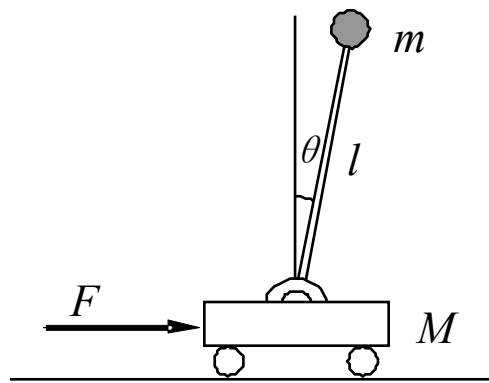
**3.16** （劳斯判据）

**3.24 3.28** （误差分析）

**3.33 3.36 2.6C** （校正）

**2.6B.** 建立此倒立摆系统微分方程并线性化，给出由输入力  $F$  到输出摆角  $\theta$  的传递函数。

**2.6C.** 分析系统稳定性，设计反馈控制使系统稳定。



球质量  $m$

车质量  $M$

杆长  $l$

摆角  $\theta$

外力  $F$

谢谢