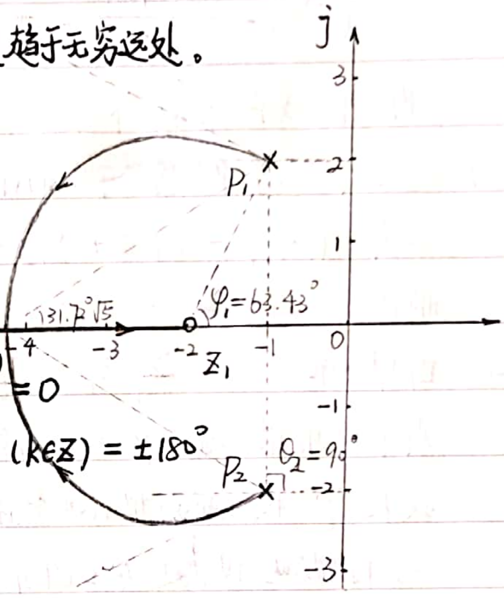
《自动控制原理》 第4章 根轨迹法　　课后习题（P139 ~ P141 New）

4-3　已知单位反馈系统的开环传递函数，试概略绘出相应的根轨迹。

(1) $G(s) = \dfrac{K^*(s+2)}{(s+1+j2)(s+1-j2)}$；



解4-3：(1) 系统有2条根轨迹分支，且有一条根轨迹趋于无穷远处。

绘制根轨迹的步骤如下：

1) 实轴上的根轨迹：$(-\infty, -2]$

2) 渐近线：

渐近线与实轴交点 $\sigma_a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$

$= \dfrac{(-1-j2)+(-1+j2)-(-2)}{2-1} = 0$

渐近线与实轴夹角 $\varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} = (2k+1)\pi \ (k\in Z) = \pm 180^\circ$

即渐近线为实轴；

3) 分离点：由 $\sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{d-p_j} = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{1}{d-z_i}$

则 $\dfrac{1}{d+1+j2} + \dfrac{1}{d+1-j2} = \dfrac{1}{d+2}$

经整理有 $d^2 + 4d - 1 = 0$

故可解得 $d = -2-\sqrt{5} \approx -4.236$ 或 $d = -2+\sqrt{5} \approx 0.236$（舍去）

4) 起始角与终止角：由根轨迹对称性，首先考虑 p_1 出射根轨迹。

① 满足 $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i - \sum_{j=1}^{n} \theta_j = (2k+1)\pi \quad (k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$

即 $(63.43^\circ) - (\theta_1 + 90^\circ) = -180^\circ$ 解得起始角为 $\theta_1 = 153.43^\circ$

② 由系统有2个开环极点，1个开环零点，则实轴以外区域的根轨迹为圆弧，且圆心为 z_1 极点。

5) 由根轨迹趋势判断无与虚轴交点，系统始终稳定。

∴ 绘制概略根轨迹图如右图所示。

(2) $G(s) = \dfrac{K^*(s+20)}{s(s+10+j10)(s+10-j10)}$；

解：(2) 系统有3条根轨迹分支，且有 $n-m=2$ 条根轨迹趋于无穷远处。

绘制根轨迹的步骤如下：

1) 实轴上的根轨迹：$[-20, 0]$，则极点 p_1 的出射根轨迹为 $0 \to -20$ 实轴上线段；

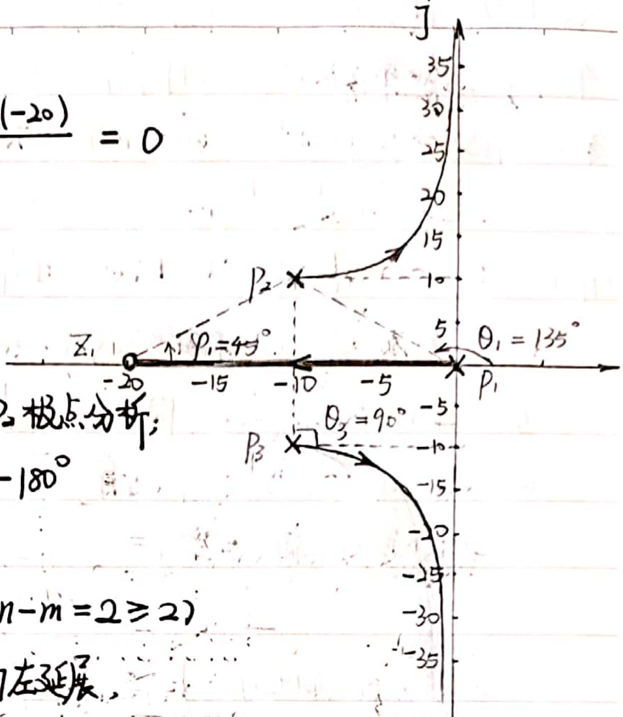
No.

Date

2) 渐近线：

$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{[0+(-10-j\cdot 10)+(-10+j\cdot 10)]-(-20)}{3-1} = 0 \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{3-1} = \pm 90^\circ \end{cases}$$

即渐近线为虚轴上下两段；



3) 起始角：由根轨迹关于实轴对称，仅对 P_2 极点分析；

故有 $(45^\circ)-(135^\circ+\theta_{p_2}+90^\circ)=-180^\circ$

解得：$\theta_{p_2}=0^\circ$

4) 由根之和：$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}p_i \quad (n-m=2\geq 2)$

则 P_1 出射根轨迹由 $P_1\to Z_1$ 为有限长度，向左延展，

故 P_2，P_3 极点出射根轨迹整体向右延展，且趋于虚轴延伸无穷远处。

∴ 绘制概略根轨迹如右图所示。

(3) $G(S)H(S)=\dfrac{K^*}{S(S^2+8S+20)}$；

解(3)：控制系统开环函数可写为：

$$G(S)H(S)=\frac{K^*}{S(S+4+j\cdot 2)(S+4-j\cdot 2)};$$

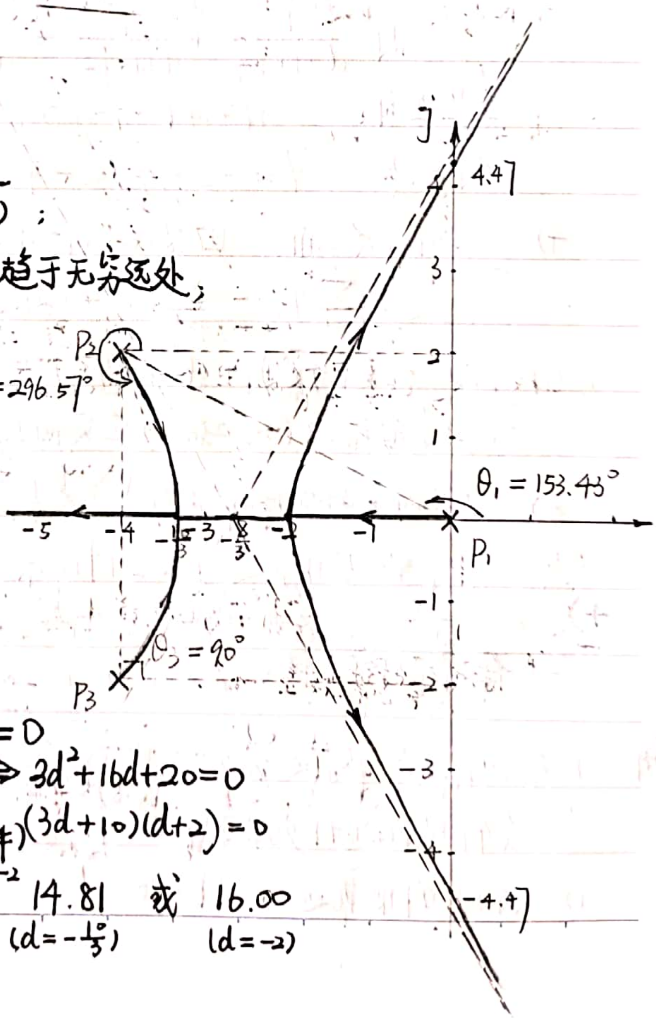
根据法则，系统有3条根轨迹分支，且均趋于无穷远处；

绘制根轨迹的步骤如下：

1) 实根上的根轨迹：$(-\infty, 0]$　　$\theta_{P_2}=296.57^\circ$

2) 渐近线：

$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{0+(-4-j\cdot 2)+(-4+j\cdot 2)}{3} = -\dfrac{8}{3} \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, \pm 180^\circ \end{cases}$$



3) 分离点：列写方程

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+4+j\cdot 2}+\frac{1}{d+4-j\cdot 2}=0 \Rightarrow 3d^2+16d+20=0$$

故解得：$d=-\dfrac{10}{3}$ 或 -2 （均满足条件）$(3d+10)(d+2)=0$

对应有 $K_d^*=|d||d^2+8d+20| \overset{d=-\frac{10}{3}或-2}{=\!=\!=} 14.81$ 或 16.00

$(d=-\frac{10}{3})$　　$(d=-2)$

4) 虚轴交点：

$$D(s)=s^3+8s^2+20s+K^*=0$$

$$\begin{cases}Re[D(j\omega)]=-8\omega^2+K^*=0\\ Im[D(j\omega)]=-\omega^3+20\omega=0\end{cases}\Rightarrow 解得\begin{cases}\omega=0\\K^*=0\end{cases} 或 \begin{cases}\omega=\pm\sqrt{20}=\pm2\sqrt{5}=\pm4.47\\K^*=8\omega^2=160\end{cases}$$

5) 出射角：由对称性，仅对极点 P_2 分析有

$$-[153.43^\circ+\theta_{p_2}+90^\circ]=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

又 $\theta_{p_2}\in[0^\circ,360^\circ)$ 则有 $\theta_{p_2}=296.57^\circ$

作出各特征点线，绘制根轨迹如上页右图所示。

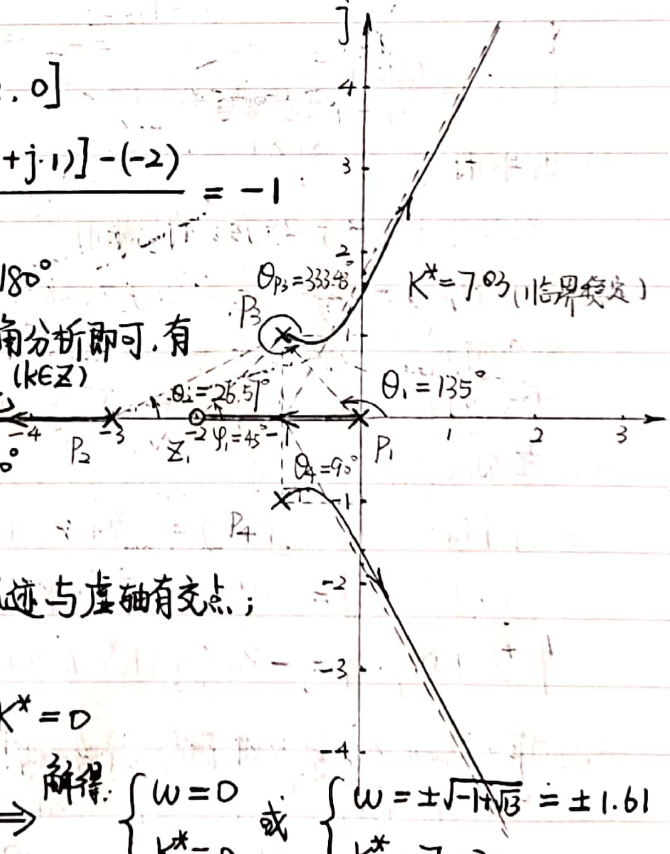
(4) $G(s)H(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$；

解(4)：控制系统开环函数可写为：

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s+2)}{s(s+3)(s+1+j\cdot1)(s+1-j\cdot1)}$$

根据法则，系统有4条根轨迹分支，其中 $n-m=3$ 条趋于无穷远处；

绘制根轨迹的步骤如下：



1) 实轴上的根轨迹：$(-\infty,-3]$，$[-2,0]$

2) 渐近线：

$$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{[0+(-3)+(-1-j\cdot1)+(-1+j\cdot1)]-(-2)}{4-1}=-1\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{4-1}=\pm60^\circ,\pm180^\circ\end{cases}$$

3) 出射角：由根轨迹对称性，仅对 P_3 出射角分析即可，有

$$\varphi_1-(\theta_1+\theta_2+\theta_{p_3}+\theta_4)=(2k+1)\pi \quad (k\in Z)$$

即 $45^\circ-(135^\circ+26.57^\circ+\theta_{p_3}+90^\circ)=-540^\circ$

解得，$\theta_{p_3}=333.43^\circ$

4) 虚轴交点：由趋势可得 P_3、P_4 出射根轨迹与虚轴有交点；

有闭环特征方程，

$$D(s)=s^4+5s^3+8s^2+(K^*+6)s+2K^*=0$$

令 $\begin{cases}Re[D(j\omega)]=\omega^4-8\omega^2+2K^*=0\\ Im[D(j\omega)]=-5\omega^3+(K^*+6)\omega=0\end{cases}\Rightarrow 解得\begin{cases}\omega=0\\K^*=0\end{cases} 或 \begin{cases}\omega=\pm\sqrt{-1+\sqrt{13}}=\pm1.61\\K^*=7.03\end{cases}$

作出各特征点线，绘制根轨迹如右图所示。

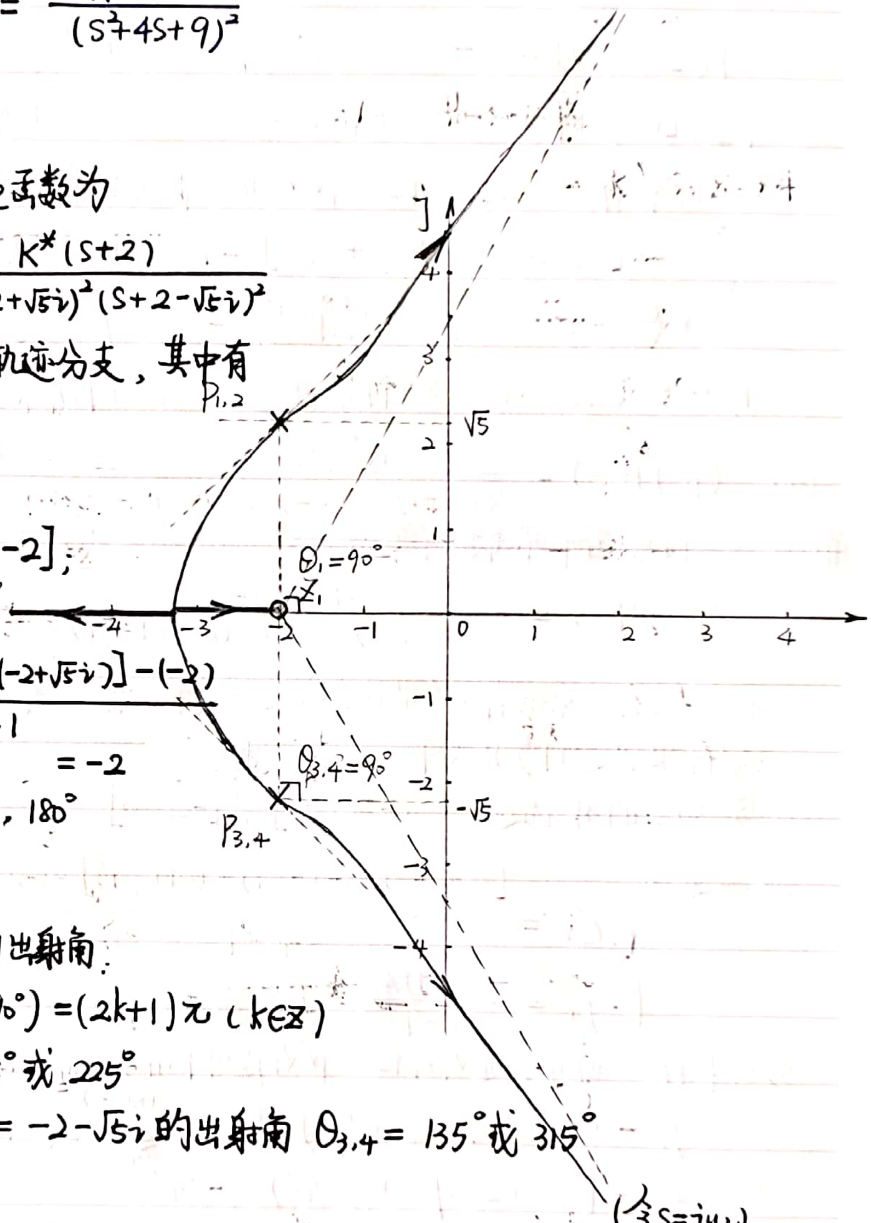
No.

Date

4-5 已知控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s^2+4s+9)^2}$$

试概略绘制系统根轨迹。



解4-5：由控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s+2+\sqrt{5}i)^2(s+2-\sqrt{5}i)^2}$$

根据法则，系统有4条根轨迹分支，其中有 $n-m=3$ 条趋向于无穷远处；

绘制根轨迹步骤如下：

1) 实轴上的根轨迹：$(-\infty, -2]$；

2) 渐近线：

$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{[2\times(-2-\sqrt{5}i) + 2\times(-2+\sqrt{5}i)] - (-2)}{4-1} = -2 \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{4-1} = \pm 60°, 180° \quad (k \in Z) \end{cases}$$

3) 出射角：

对应于 $P_{1,2} = -2+\sqrt{5}i$ 的出射角：

$$(90°) - (2\theta_{1,2} + 2\times 90°) = (2k+1)\pi \quad (k \in Z)$$

则可解得：$\theta_{1,2} = 45°$ 或 $225°$

由对称性，对应于 $P_{3,4} = -2-\sqrt{5}i$ 的出射角 $\theta_{3,4} = 135°$ 或 $315°$

4) 虚轴交点：(令 $s = j\omega$)

由闭环特征方程：$D(s) = s^4 + 8s^3 + 34s^2 + (K^*+72)s + (2K^*+81) = 0$

令 $\begin{cases} Re[D(j\omega)] = \omega^4 - 34\omega^2 + (2K^*+81) = 0 \\ Im[D(j\omega)] = -8\omega^3 + (K^*+72)\omega = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 解得 $\begin{cases} \omega = 0 \\ K^* = -40.5 \end{cases}$ (舍去) 或 $\begin{cases} \omega = \pm\sqrt{21} \approx \pm 4.58 \\ K^* = 96 \end{cases}$

5) 分离点：

由 $\dfrac{2}{d+2+\sqrt{5}i} + \dfrac{2}{d+2-\sqrt{5}i} = \dfrac{1}{d+2} \Rightarrow$ 解得 $d = -0.71$ (舍去) 或 $d = -3.29$

∴ 作特征点线，绘制根轨迹如右图所示。

4-14 已知系统结构图如图4-26所示，试绘制时间常数T变化时系统的根轨迹，并分析参数T的变化对系统动态性能的影响。

解4-14：① 由原始系统结构图可得简化成单位反馈系统情况下的开环传递函数为

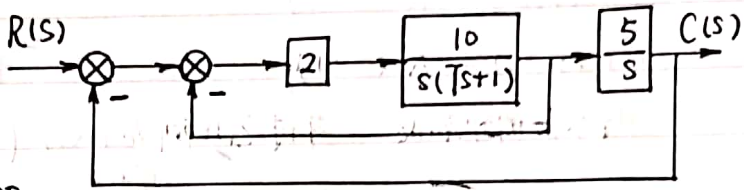


图4-26　题4-14图

$$G(s)=\frac{\frac{20}{s(Ts+1)}}{1+\frac{20}{s(Ts+1)}}\cdot\frac{5}{s}=\frac{100}{Ts^3+s^2+20s}$$

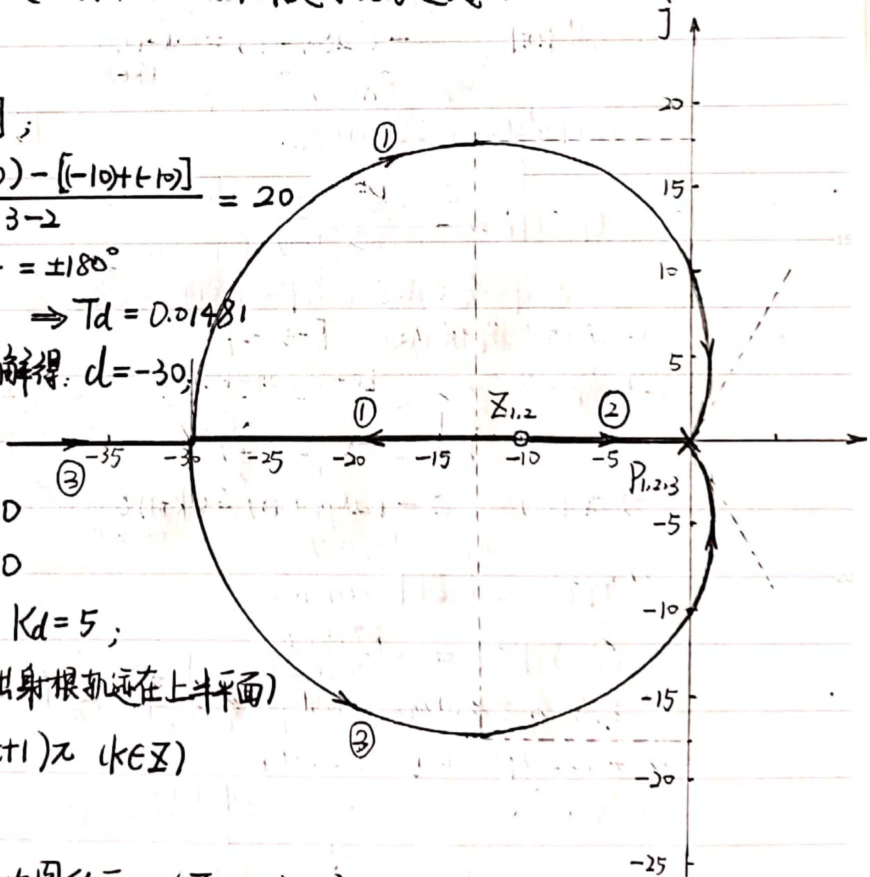
则系统闭环传递特征方程为

$$D(s)=Ts^3+s^2+20s+100=0$$

故设 $G^*(s)=\dfrac{\frac{1}{T}(s^2+20s+100)}{s^3}=\dfrac{\frac{1}{T}(s+10)^2}{s^3}$，令 $K_d=\frac{1}{T}$，则当 $T=0\to\infty$，$K_d=\infty\to 0$

∴根据法则，系统共有3条根轨迹，其中 $n-m=1$ 条趋于无穷远处；

绘制根轨迹如右图所示：



1) 实根上的根轨迹：$(-\infty, 0]$；

2) 渐近线：
$$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{(0+0+0)-[(-10)+(-10)]}{3-2}=20\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3-2}=\pm180^\circ\end{cases}$$

3) 分离点：由方程 $\dfrac{3}{d}=\dfrac{2}{d+10}$ ⇒解得 $d=-30$， ⇒ $T_d=0.01481$

4) 虚轴交点：令 $D(j\omega)=0$

即有
$$\begin{cases}Re[D(j\omega)]=-\omega^2+100=0\\ Im[D(j\omega)]=-T\omega^3+20\omega=0\end{cases}$$

则解得，$\omega=\pm10$，$T=\frac{1}{5}$，$K_d=5$；

5) 出射点：选择 P_1 极点（设为出射根轨迹在上半平面）

有 $(0+0)-(3\theta_{p_1})=(2k+1)\pi\ (k\in Z)$

故解得：$\theta_{p_1}=60^\circ$

∴作特征点线，绘制根轨迹如右图所示。$(T=0\to\infty)$

② 由根轨迹图可知：
- 当 $0<T\le0.01481$ 时，阶跃响应为单调收敛过程；
- 当 $0.01481<T\le0.2$ 时，阶跃响应为振荡收敛过程；
- 当 $T>0.2$ 时，系统不稳定，两条根轨迹在右半平面。

B、讨论零点$-z_c$的取值对系统稳定性的影响：（PD控制器效果）

满足
$$\begin{cases} 当\ -z_c<-2，即\ z_c>2\ 时，系统不稳定； \\ 当\ -z_c=-2，即\ z_c=2\ 时，系统临界稳定； \\ 当\ -2<-z_c\leq 0，即\ 0\leq z_c<2\ 时，系统稳定； \\ 当\ -z_c>0，即\ z_c<0\ 时，系统不稳定。 \end{cases}$$

4-16. 某单位反馈系统结构图如图4-27所示。试分别绘出控制器传递函数$G_c(s)$为

(1) $G_{c1}(s)=K^*$

(2) $G_{c2}(s)=K^*(s+3)$

(3) $G_{c3}(s)=K^*(s+1)$

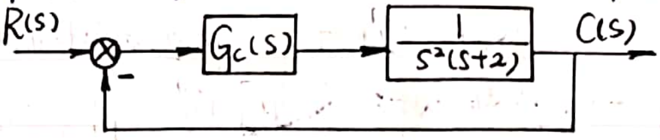
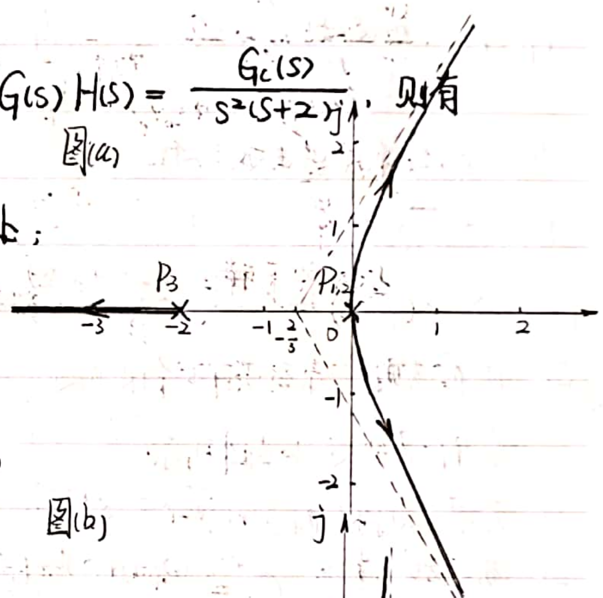


图4-27 题4-16图

时系统的根轨迹，并讨论比例加微分（PD）控制器$G_c(s)=K^*(s+z_c)$中，零点$-z_c$的取值对系统稳定性的影响。

解4-16：A. 绘制三种情况下系统的根轨迹。由$G(s)H(s)=\frac{G_c(s)}{s^2(s+2)}$，则有

(1) $G(s)H(s)=\frac{K^*}{s^2(s+2)}$；



∵ 系统有3条根轨迹，其中3条趋于无穷远处；

1) 实轴上的根轨迹：$(-\infty,-2]$；

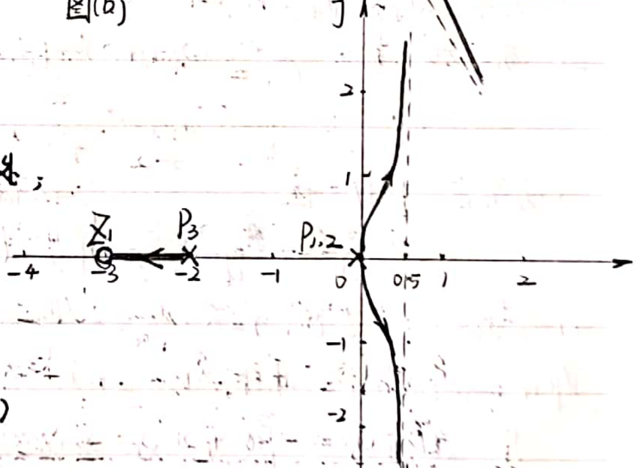
2) 渐近线：
$$\begin{cases}\sigma_a=\frac{[0+0+(-2)]-0}{3-0}=-\frac{2}{3} \\ \varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{3}=\pm60^\circ,180^\circ\end{cases}$$

3) 出射角：$0-(2\theta_{p_1}+0)=(2k+1)\pi$ $(k\in Z)$

则：$\theta_{p_1}=90^\circ$

∴ 绘制根轨迹如右图(a)所示。

(2) $G(s)H(s)=\frac{K^*(s+3)}{s^2(s+2)}$；



∵ 系统有3条根轨迹，其中2条趋于无穷远处；

1) 实轴上的根轨迹：$[-3,-2]$；

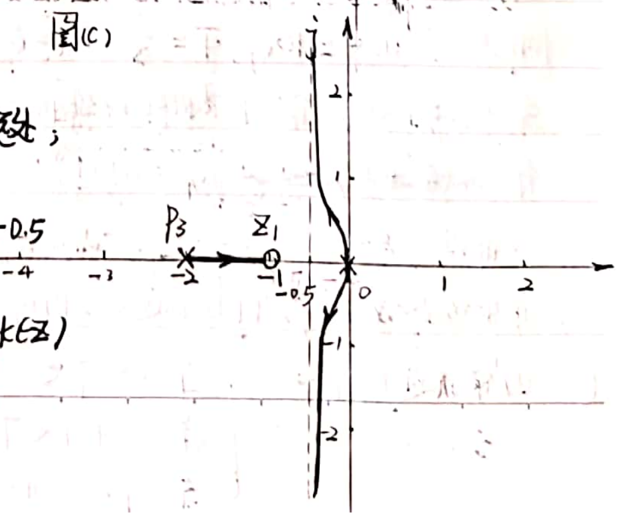
2) 渐近线：
$$\begin{cases}\sigma_a=\frac{[0+0+(-2)]-(-3)}{3-1}=0.5 \\ \varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{3-1}=\pm90^\circ\end{cases}$$

3) 出射角：$0-(2\theta_{p_1}+0)=(2k+1)\pi$ $(k\in Z)$

则：$\theta_{p_1}=90^\circ$

∴ 绘制根轨迹如右图(b)所示。

(3) $G(s)H(s)=\frac{K^*(s+1)}{s^2(s+2)}$；



∵ 系统有3条根轨迹，其中2条趋于无穷远处；

1) 实轴上的根轨迹：$[-2,-1]$；

2) 渐近线：
$$\begin{cases}\sigma_a=\frac{[0+0+(-2)]-(-1)}{3-1}=-0.5 \\ \varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{3-1}=\pm90^\circ\end{cases}$$

3) 出射角：$0-(2\theta_{p_1}+0)=(2k+1)\pi$ $(k\in Z)$

则：$\theta_{p_1}=90^\circ$

∴ 绘制根轨迹如右图(c)所示。