

西北工业大学

博士学位论文

(学位研究生)

题目：平方根 Sigma-Point Kalman 滤波
与基于视觉的相对导航研究

作者：唐小军

学科专业：导航、制导与控制

指导教师：闫杰

2010 年 4 月

[This page intentionally left blank.]

Research on Square-Root Sigma-Point Kalman Filtering and Vision-Based Relative Navigation

by

Xiaojun Tang

*Dissertation submitted to the Faculty of
the Graduate School of Northwestern Polytechnical University
in partial fulfillment of the requirements for the degree of
Doctor of Philosophy
in
Guidance, Navigation & Control*

Supervisor: Prof. Jie Yan

Northwestern Polytechnical University

April, 2010

[This page intentionally left blank.]

摘 要

非线性滤波是指从含噪声的观测中序贯估计非线性动态系统当前状态的过程。非线性滤波的最优解为递归 Bayesian 估计,其根据最新的观测数据来递归地更新状态的后验概率密度。但是,对于非线性系统,状态的后验概率密度并不能表示成有限数量的统计分布形式,必须对其进行近似。近来,一类有效的、无需导数信息的近似非线性滤波算法被用来对非线性系统的状态进行估计,统称为 Sigma-Point Kalman 滤波。这些滤波算法的不足之处是计算量比较大,限制了其在实时系统中的进一步应用。

飞行器之间的相对运动,如航天器的编队飞行与飞机的近距离空中自动加油,自从人类进行有人空间活动以来就对其进行了研究。许多编队任务依赖精确的相对姿态和位置信息,这些相对信息需要通过专用的传感器和快速的导航算法来提供。近来提出的视觉导航系统可用来进行相对测量,其能够提供多个视线测量且具有独立于其它外部系统的优势。目前,最常用的相对导航算法为扩展 Kalman 滤波,但是,扩展 Kalman 滤波的较低性能甚至滤波发散阻碍了它的应用。

针对上述问题,本文分为两个部分进行了研究。第一部分重点研究了具有较小计算量的 Sigma-Point Kalman 滤波问题;作为 Sigma-Point Kalman 滤波在相对导航中的具体应用,论文的第二部分着重研究了基于视觉的相对导航算法。具体地讲,本文的主要工作可归纳如下:

- (1) 与尺度 Unscented 变换相比,单球 Unscented 变换具有更小的计算量和较好的行为特性,将单球 Unscented 变换与平方根 Unscented Kalman 滤波结合起来,提出了平方根单球 Unscented Kalman 滤波,它是 Sigma-Point Kalman 滤波的一种变形。由于所有协方差矩阵在滤波过程中能保持半正定,因而平方根算法具有一致的数值稳定性。为了提高该算法的性能,提出了一种不需导数信息的数值优化算法来自动确定其针对每种具体应用的合适权值。
- (2) 与通常采用矢量力学中的矢量来描述飞行器的平动与转动不同,本文应用张量来描述飞行器的运动学与动力学。为了保持张量描述的完整性,提出了几个新的运动学张量,并给出了其性质。通过将平凡时间导数用旋转时

间导数代替并应用框架的 Euler 变换, 通用六自由度相对运动方程可以表示成在任何坐标系下都成立的不变张量形式。最后, 通过选择合适的坐标系和应用坐标变换, 将张量运动方程转换成坐标形式以便于计算机编程和数值求解。

- (3) 详细推导了基于视觉的相对导航系统的扩展 Kalman 滤波与平方根 Sigma-Point Kalman 滤波方程。视线测量信号由位于跟随飞行器上的光电敏感器与领航飞行器上的可视导航标志器提供。为了在 Kalman 类型的滤波算法中维持姿态四元数的归一化约束, 在姿态更新中采用广义 Rodrigues 参数来表示无约束的姿态, 而应用四元数进行姿态传播。
- (4) 为了便于从定性与定量两种角度分析不同滤波算法的性能, 介绍了系统评估非线性滤波算法最优性的方法。大量数值仿真结果表明: 与作为行业标准的扩展 Kalman 滤波相比, 本文提出的滤波算法在估计精度、收敛速率及算法稳定性等方面都获得了较大改进。此外, 更小的计算量使得这种新的滤波算法在不降低估计精度的条件下非常适合替代其它 Sigma-Point Kalman 滤波在实时非线性估计中应用, 如本文的相对导航和其它应用领域。

关键词: 平方根 Sigma-Point Kalman 滤波, 相对导航, 视觉导航系统, 旋转四元数估计, 张量

Abstract

Nonlinear filtering refers to the process of sequentially estimating the current state of nonlinear dynamic system from noisy measurements. The optimal solution to nonlinear filtering is given by the recursive Bayesian estimation which recursively updates the posterior probability density of the system state as new observations arrive. For nonlinear systems, however, the posterior density cannot be described by a finite number of sufficient statistics, and an approximation must be made instead. Recently a family of efficient and derivative-free approximate nonlinear filtering algorithms called sigma-point Kalman filtering is proposed for the state estimation of nonlinear systems. However, the existing filtering algorithms suffer from computational complexity, thus their further applications in real-time systems are limited.

Relative motion concepts, such as the spacecraft formation flying and the autonomous aerial vehicle refueling in close proximity, have been studied since the beginning of the manned space program. Many formation missions rely on accurate relative attitude and position knowledge between individual vehicle which require special sensors and fast navigation algorithms to provide these necessary information. It may be possible to use the recently proposed vision-based navigation system as a source of relative measurements. The vision-based navigation system can provide multiple line-of-sight observations and has the advantage which is independent of any external systems. By far the most widely applied estimation algorithm for relative navigation has been the extended Kalman filtering. However, poor performance or even divergence of the extended Kalman filtering hinders its applications.

The aforementioned problems are investigated in this dissertation which can be divided into two parts. The first part of this dissertation has been focused on the development of other variants of sigma-point Kalman filtering with low computational costs. As a specific application of sigma-point Kalman filtering in relative navigation, the latter part of this dissertation has been focused on the derivation of

the vision-based relative navigation algorithms. Specifically, the main work of this dissertation can be summarized as follows:

- (1) A variant of sigma-point Kalman filtering algorithms called square-root spherical simplex unscented Kalman filtering is proposed by integrating a better behaved spherical simplex unscented transformation, which can simplify the computational complexity in comparison with the scaled unscented transformation, with the square-root unscented Kalman filtering framework. The square-root forms have a consistently increased numerical stability because all resulting covariance matrices are guaranteed to stay semi-positive definite. Suboptimality of the proposed filtering due to unsuitable weights can be compensated by using a derivative-free numerical optimization algorithm to automatically determine the proper weights for each specific application.
- (2) Instead of utilizing the vector of so-called vector mechanics to describe the translational and rotational motions of vehicles, the tensors are used to model vehicle kinematics and dynamics. Several novel kinematic tensors are proposed to maintain the integrity of the tensor descriptions and their properties are also given. By replacing the ordinary time derivative with the rotational time derivative and using the Euler transformation of frames, the general six degree-of-freedom relative equations of motion are expressed in an invariant tensor form, which are valid in any coordinate systems. Eventually the tensor equations are coordinated and linked by coordinate transformations for easily computational coding and numerical solving.
- (3) The extended Kalman filtering and square-root sigma-point Kalman filtering formulations of the vision-based relative navigation system are derived in detail. The line-of-sight measurements are provided by an electro-optical sensor installed on the follower vehicle and the visual navigation beacons, which are attached to the leader vehicle. The three-component generalized Rodrigues parameter is adopted to represent the unconstrained attitude for the update, while using the quaternion attitude representation for the state

propagation in order to maintain the quaternion normalization constraint in the Kalman type estimator.

- (4) For qualitative and quantitative performance analysis among the different filtering algorithms, systematic methods for measuring the optimality of nonlinear filtering are introduced. A variety of simulations are carried out and the numerical results indicate that the proposed filtering formulation does provide more improvement over the de facto extended Kalman filtering in terms of estimation accuracy, convergence rate, and algorithm stability. Furthermore, the lower computation costs of this novel filtering make it an attractive alternative to other sigma-point Kalman filtering for efficient real-time nonlinear estimation in not only relative navigation but also other application areas with the same or higher estimation accuracy.

Keywords: Square-Root Sigma-Point Kalman Filtering, Relative Navigation, Vision-Based Navigation System, Rotation Quaternion Estimation, Tensors

[This page intentionally left blank.]

目 录

摘 要	i
Abstract	iii
插 图	xi
表 格	xiii
术 语	xv
第 1 章 绪 论	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究现状	2
1.2.1 非线性滤波	2
1.2.2 基于 VisNav 系统的相对导航	5
1.3 研究内容	12
第 2 章 平方根 Sigma-Point Kalman 滤波	13
2.1 引言	13
2.2 递归 Bayesian 估计	13
2.3 线性 Gaussian 近似滤波	15
2.3.1 Kalman 滤波	15
2.3.2 扩展 Kalman 滤波	16
2.4 Sigma-Point Kalman 滤波	17
2.4.1 Unscented Kalman 滤波	17
2.4.2 单球 Unscented Kalman 滤波	22
2.5 平方根实现	26
2.5.1 基础知识	27

2.5.2	平方根 Unscented Kalman 滤波	28
2.5.3	平方根单球 Unscented Kalman 滤波	31
2.6	仿真比较	34
2.7	本章小结	37
第 3 章	运动方程的张量描述	39
3.1	基础知识	39
3.1.1	命名法	39
3.1.2	参考框架	40
3.1.3	张量	41
3.2	运动学	43
3.2.1	平动	44
3.2.2	转动	45
3.3	动力学	51
3.3.1	平动	51
3.3.2	转动	52
3.4	相对运动	56
3.4.1	运动学	56
3.4.2	动力学	57
3.5	本章小结	58
第 4 章	基于 VisNav 系统的相对导航	59
4.1	相对运动方程	59
4.1.1	位移	59
4.1.2	四元数	60
4.2	测量模型	61
4.2.1	加速度	62
4.2.2	角速度	62
4.2.3	LOS	62
4.3	相对状态估计	64

4.3.1 状态向量	65
4.3.2 EKF	66
4.3.3 SR-SPKF	71
4.4 本章小结	74
第 5 章 仿真结果	75
5.1 性能标准	75
5.2 仿真设置	76
5.3 导航结果	77
5.3.1 小初始误差	78
5.3.2 大初始误差	82
5.4 本章小结	87
第 6 章 总结与展望	89
6.1 总结	89
6.2 展望	90
参考文献	93
附录 A 各种姿态描述方式之间的转换	109
A.1 Euler 角 \Leftrightarrow 姿态矩阵	109
A.2 四元数 \Leftrightarrow 姿态矩阵	109
A.3 Euler 角 \Leftrightarrow 四元数	111
攻读博士学位期间发表的论文	113
致 谢	115

[This page intentionally left blank.]

插图

图 1.1	递归 Bayesian 估计	3
图 1.2	组合导航系统	7
图 1.3	VisNav 系统的组成	9
图 1.4	VisNav 系统的光电敏感器	9
图 1.5	VisNav 系统的工作原理	10
图 1.6	VisNav 系统的标志器	11
图 2.1	姿态误差及其 $\pm 3\sigma$ 界	35
图 2.2	陀螺仪偏置误差及其 $\pm 3\sigma$ 界	36
图 4.1	VisNav 系统的工作原理	63
图 5.1	航天器交会轨迹	77
图 5.2	相对姿态误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (小初始误差)	79
图 5.3	相对位置误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (小初始误差)	80
图 5.4	相对速度误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (小初始误差)	80
图 5.5	陀螺仪偏置误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (小初始误差)	81
图 5.6	加速度偏置误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (小初始误差)	81
图 5.7	最优指数 (小初始误差)	83
图 5.8	相对姿态误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (大初始误差)	84
图 5.9	相对位置误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (大初始误差)	84
图 5.10	相对速度误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (大初始误差)	85
图 5.11	陀螺仪偏置误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (大初始误差)	85
图 5.12	加速度偏置误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (大初始误差)	86
图 5.13	最优指数 (大初始误差)	87

[This page intentionally left blank.]

表 格

表 2.1	SAE 仿真参数	35
表 2.2	EKF、SR-UKF 及 SR-SSUKF 在 SAE 中的性能比较	36
表 5.1	领航飞行器 (ISS) 的初始密切轨道根数	76
表 5.2	标志器在 L 下的坐标	76
表 5.3	VisNav 系统仿真参数	78
表 5.4	EKF 与 SR-UKF 在 VisNav 系统中的性能比较 (小初始误差)	82
表 5.5	SR-UKF 与 SR-SSUKF 在 VisNav 系统中的性能比较 (大初始误差)	87

[This page intentionally left blank.]

术 语

CDF	Central Difference Filtering	中间差分滤波
CK	Chapman-Kolmogorov	
CKF	Cubature Kalman Filtering	容积 Kalman 滤波
DDF	Divided Difference Filtering	分开差分滤波
DGPS	Differential Global Positioning Systems	差分全球定位系统
DOF	Degree-Of-Freedom	自由度
DQ	Dual Quaternion	对偶四元数
DS	Downhill Simplex	下山单纯形法
DSP	Digital Signal Processor	数字信号处理器
EKF	Extended Kalman Filtering	扩展 Kalman 滤波
GKV	Generalized Kinematic Vector	广义运动矢量
GLSDC	Gaussian Least Squares Differential Correction	Gaussian 最小二乘差分校正
GN&C	Guidance, Navigation and Control	制导、导航与控制
GPS	Global Positioning Systems	全球定位系统
GRP	Generalized Rodrigues Parameter	广义 Rodrigues 参数
HOUT	Higher-Order Unscented Transformation	高阶 Unscented 变换
ILED	Infrared Light Emitting Diodes	红外发光二极管
IMU	Inertial Measurement Units	惯性测量装置
INS	Inertial Navigation Systems	惯性导航系统
ISS	International Space Station	国际空间站
JMEKF	Jth Moment Extended Kalman Filtering	J 阶矩扩展 Kalman 滤波
LOS	Line-Of-Sight	视线
MEKF	Multiplicative Extended Kalman Filtering	乘性扩展 Kalman 滤波
MEMS	Micro-Electro-Mechanical Systems	微机电系统
MSE	Mean Square Error	均方误差
PF	Particle Filtering	粒子滤波
PSD	Position Sensing Diode	位置敏感二极管
QKF	Quadrature Kalman Filtering	积分 Kalman 滤波

RT	Run Time	运行时间
SAE	Spacecraft Attitude Estimation	航天器姿态估计
SPKF	Sigma-Point Kalman Filtering	Sigma-Point Kalman 滤波
SR-	Square-Root	平方根
SSUKF	Spherical Simplex Unscented Kalman Filtering	单球 Unscented Kalman 滤波
SSUT	Spherical Simplex Unscented Transformation	单球 Unscented 变换
SUT	Scaled Unscented Transformation	尺度 Unscented 变换
TAE	Total Attitude Error	累积姿态误差
TI	Texas Instruments	德州仪器
TPE	Total Position Error	累积位置误差
UKF	Unscented Kalman Filtering	Unscented Kalman 滤波
USQUE	Unscented Quaternion Estimator	Unscented 四元数估计器
VGS	Video Guidance Sensor	视频制导传感器
VisNav	Vision-Based Navigation	视觉导航

第 1 章 绪 论

“The whole is more than the sum of the parts.”

Metaphysica

ARISTOTLE

1.1 研究背景

滤波是一种根据含噪声的观测量在线估计动态系统隐含状态的算法，迄今为止，其在很多领域都获得了广泛应用，如目标跟踪、航天器轨道/姿态确定及组合导航等。从广义上讲，常用的滤波算法都可通过递归 Bayesian 估计^[1]来统一描述，其中心思想是确定动态系统状态的后验概率密度，从而获得系统状态最完整的信息。对于线性、Gaussian 系统，递归 Bayesian 估计就变成了著名的 Kalman 滤波^[2]，这是一种线性无偏、最小方差的最优滤波算法。但是，对于非线性、非 Gaussian 系统，获得递归 Bayesian 估计的最优精确解是不可能的^[3]，因此近似非线性滤波一直是统计和工程界的研究热点之一。目前，近似非线性滤波主要有基于 Monte-Carlo 仿真的粒子滤波 (Particle Filtering, PF)^[4]和基于确定性采样的 Sigma-Point Kalman 滤波 (Sigma-Point Kalman Filtering, SPKF)^[5]两种。粒子滤波虽然精度优于其它非线性滤波算法，但是巨大的计算量使其很难在实际系统中应用。与之相反，SPKF 由于具有满足工程需要的精度和较小的计算量，在需要实时滤波的系统中获得了广泛应用。但是，对于实时性要求较高的系统，还需要进一步提高 SPKF 的实时性能。那么，**是否存在具有更小计算量、相同理论近似精度的其它 SPKF 算法？如何实现？**

飞行器之间的相对运动，如航天器的编队飞行^[6,7]与飞机的近距离空中加油^[8,9]，自从人类进行空间活动以来就得到了重视并对其进行了研究。INS/GPS (Inertial Navigation Systems/Global Positioning Systems) 组合导航系统^[10,11]可用来确定飞行器之间的相对姿态和位置^[12,13]。但是，由于 GPS 系统的一些问题，如多径、信号反射与阻塞等，增加了 INS/GPS 的应用成本和复杂性，限制了相对导航精度的提高。近来，一种新的利用视线 (Line-Of-Sight, LOS) 测量的视觉导航 (Vision-Based Navigation, VisNav) 系统^[14,15]被用来确定飞行器之间的相对姿态和位置。与其它

类型的相对导航系统 (如 NASA 的 Video Guidance Sensor, VGS^[16,17]) 相比, 该系统具有如下独特的优势:

- (1) 系统简单, 不需要复杂的信号处理硬件和视觉算法;
- (2) 传感器具有较大的视场, 且能够有效地减弱环境光线的影响;
- (3) 独立于其它外部系统, 具有较高的可靠性;
- (4) 体积小、重量轻, 配置方便。

目前, 大量的 VisNav 系统研究集中在控制方面, 如维持空间队形配置、降低编队的总飞行阻力或最小化某些性能指标等。这些控制系统的工作都有一个前提条件, 即假设飞行器的状态和相对状态信息是已知的、精确的。然而, 在实际的工作环境中, 该条件并不能很好地得到满足。因此, 有必要研究高精度、易实现的适合 VisNav 系统的相对导航算法, 以给控制系统提供实时的状态信息。由于 SPKF 的良好性能, 我们不禁要问: **能否将 SPKF 应用在基于 VisNav 系统的相对导航中, 以期提高相对导航的精度?**

本文的研究正是围绕着上述问题而展开的, 其主要目的体现在两方面。一是在不降低滤波精度的前提下, 寻求其它低计算复杂度的 SPKF 算法; 二是将 SPKF 应用于基于 VisNav 系统的相对导航中, 研究有关的相对导航算法。

1.2 研究现状

1.2.1 非线性滤波

近年来, 在递归 Bayesian 估计的框架下, 提出了众多非线性滤波算法, 取得了不少研究成果。

1.2.1.1 递归 Bayesian 估计

前已提到, 非线性滤波问题可以在 Bayesian 理论框架下来进行研究。事实上, 递归 Bayesian 估计为非线性滤波问题提供了一个最优的、精确的理论框架^[18]。上面提到的 PF 和 SPKF 都可以看作是最优递归 Bayesian 估计在特定条件下的近似。Ho^[1]首次研究了递归 Bayesian 估计问题, 论述了递归 Bayesian 估计的基本原理和过程, 指出 Kalman 滤波只是递归 Bayesian 估计的一个特例。Ito^[19]从数值积分的观点出发提出了两种 Gaussian 滤波算法, 其中之一为应用 Gauss-Hermite 乘积积

分公式的 Gauss-Hermite 滤波。Wu^[20,21] 在 Ito 的基础上提出了在递归 Bayesian 估计框架下解析非线性 Gaussian 滤波的多维数值积分观，并以此观点为平台在精度、效率及数值稳定性方面对各近似 Gaussian 滤波进行了分析和比较。数值积分观有助于工程上选择合适的近似 Gaussian 滤波，同时对今后选用更好的积分方法设计高效、稳定的滤波算法也有一定的指导意义。

递归 Bayesian 估计分为预测和更新两个过程，其结构类似于常微分方程数值解中的线性多步法^[22]，即采用预测-更新方式。在预测步中，状态的预测概率密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{k-1} \equiv \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{k-1}\})$ 由预测方程或 CK (Chapman-Kolmogorov) 方程描述；在更新步中，状态的后验概率密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k \equiv \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\})$ 通过更新方程或 Bayesian 公式来描述。这些预测方程和更新方程构成了递归 Bayesian 估计框架，如图 1.1 所示^[18]。图中，状态转移概率密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ 由过程方程描述，量

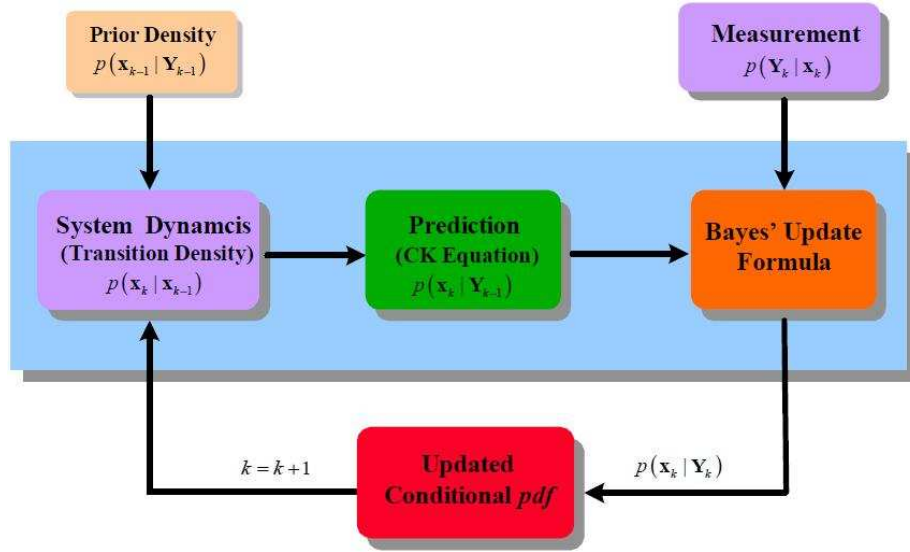


图 1.1: 递归 Bayesian 估计

测概率密度 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$ 由量测方程描述。对于工程上的实际系统而言，要获得所有这些方程的解析解几乎是不可能的，只能寻求近似解。根据中心极限定理：独立、同分布的随机变量之和服从 Gaussian 分布。工程上的随机信号，其分布绝大多数都可以近似为 Gaussian 分布。因此，研究 Gaussian 分布假设下的非线性滤波问题不但可以直接用来解决工程上的不少实际问题，而且还可以为 PF 提供次优重点密度，大大减少其计算量。

1.2.1.2 扩展 Kalman 滤波

扩展 Kalman 滤波 (Extended Kalman Filtering, EKF)^[23-25] 是一种应用最广泛的非线性滤波方法, 在工程界已盛行了近半个世纪。EKF 是一种基于局部线性化的算法, 即对非线性系统的过程和量测方程在当前状态点进行一阶 Taylor 级数展开, 并假设系统的随机部分服从 Gaussian 分布, 从而应用 Kalman 滤波来估计非线性系统的状态。

EKF 易于实现、应用广泛, 但缺少可操作的理论证明来保证 EKF 的收敛性。最近的研究成果^[26,27] 给出了一个 EKF 误差有界的充分性条件: 当模型的非线性和初始值满足给定条件时, EKF 误差有界。可惜, 该充分性条件过于保守, 缺乏可操作性, 不可能在工程上得到应用。EKF 有两个误差源^[28]: 第一个为非线性模型的线性化近似误差, 第二个为系统随机部分在线性近似下并不服从 Gaussian 分布。几十年来的工程应用经验表明: EKF 鲁棒性不强, 易于发散, 只对在更新区间内近似线性的非线性系统有效。为了克服 EKF 的以上弱点, 提出了二阶非线性滤波^[29,30], 即对非线性系统进行二阶 Taylor 级数近似。但是, 通过 van der Pol 二阶过程方程与线性量测方程证实: 二阶非线性滤波对于此系统是发散的。Psiaki^[31,32] 在迭代 EKF 的基础上, 通过求解非线性平滑问题提出了超迭代 EKF。仿真结果表明: 超迭代 EKF 的滤波精度和鲁棒性比 EKF 有了较大的提高。近来, Majji^[33] 给出了 EKF 中的随机状态高阶矩的计算方法, 提出了 JMEKF (Jth Moment Extended Kalman Filtering, JMEKF) 算法。

1.2.1.3 Sigma-Point Kalman 滤波

EKF 利用泰勒级数展开来对非线性系统进行线性化近似, 然而, 这种一阶逼近会产生较大的近似误差, 严重情况下甚至会导致滤波发散。为了克服 EKF 对非线性系统的一阶近似缺陷, 除了上述提到的基于 EKF 的改进算法之外, 近来, 提出了一类无需导数信息的滤波算法, 即 SPKF^[34-37]。SPKF 不需要计算非线性系统的 Jacobian 矩阵, 对不连续系统也适用, 如 Unscented Kalman 滤波 (Unscented Kalman Filtering, UKF)^[38-41]、中间差分滤波 (Central Difference Filtering, CDF)^[19] 及分开展差分滤波 (Divided Difference Filtering, DDF)^[19,42] 等。

UKF 利用尺度 Unscented 变换 (Scaled Unscented Transformation, SUT)^[43] 来对概率分布直接进行近似, 而不是像 EKF 那样对非线性函数进行近似, 因为“对概率分布进行近似要比对非线性函数进行近似容易的多”^[39,40]。SUT 通过选取加权 Sigma Points 来近似 Gaussian 随机向量的先验均值与协方差, 然后利用经过

非线性系统传播后的 Sigma Points 来计算随机向量的后验均值与协方差。可以证明^[40]: UKF 的理论估计精度要优于 EKF, 对非线性系统具有至少二阶近似精度。与 UKF 不同的是, CDF 与 DDF 采用了中间差分方式来对非线性函数的导数进行近似, 即将导数运算变成了函数求值运算, 获得了与 UKF 同阶的估计精度且容易实现高阶扩展。

顾名思义, SPKF 仍然继承了 Kalman 滤波的基本结构, 并假设系统的随机部分服从 Gaussian 分布, 但是取消了对系统模型的假设条件, 也就是说, 不要求系统是近似线性的。由于沿袭了大家所熟悉的 Kalman 滤波框架, SPKF 目前已在较大范围内被接受并在实际系统中得到了广泛应用^[5,44-47,36,48]。van der Merwe^[5] 使用 SPKF 研究了无人飞行器平台上 INS/GPS/高度计的松组合方式, 其姿态和位置估计精度比 EKF 提高了近 30%。同样在 INS/GPS 松组合的研究中, Crassidis^[44] 发现 SPKF 可以容许较大的初始条件误差。Crassidis^[45] 和 Sekhavat^[46,47] 分别在航天器姿态估计中也得到了相似的结论。Lee^[36,48] 将 SPKF 应用于航天器的轨道确定中, 获得了比 EKF 更优的状态估计结果。

SPKF 的计算量与采用的 Sigma Points 的数量有关。一般地, 状态向量的维数越大, 需要的 Sigma Points 的数量就越多。Julier^[49] 证明了对于 n 维状态向量, 只需要 $n+1$ 个 Sigma Points 就可以完全捕获其均值与协方差, 而 SUT 却需要 $2n+1$ 个 Sigma Points。为了减少 SUT 的计算量, Julier^[50] 提出了一种新的单球 Unscented 变换 (Spherical Simplex Unscented Transformation, SSUT)。与 SUT 相比, 在同等精度的情况下, SSUT 只需要 $n+2$ 个 Sigma Points。Tenne^[51] 提出了高阶 Unscented 变换 (Higher-Order Unscented Transformation, HOUT) 来捕获随机向量的前三阶矩。Lévesque^[52] 提出采用 $2n+3$ 个二阶 Simplex Sigma Points 来匹配随机向量的前六阶矩。

与 EKF 类似, SPKF 也有两种实现形式: 标准形式^[53] 与平方根形式 (Square-Root SPKF, SR-SPKF)^[54-56]。在 Kalman 滤波框架中, 标准算法在每次状态更新前都需要计算协方差矩阵的平方根, 而平方根算法通过直接对协方差矩阵的平方根进行更新, 从而减少了 SPKF 的计算量, 并且提高了算法的数值稳定性。

1.2.2 基于 VisNav 系统的相对导航

本文主要研究两个飞行器之间的相对导航问题, 飞行器自身的导航信息由机载组合导航系统提供, 而相对测量信息则来自 VisNav 系统。

1.2.2.1 组合导航系统

组合导航是利用多种传感器提供的互补信息来提高导航系统精度和冗余度的技术。通常采用惯性导航与其它的辅助设施(如卫星、雷达、摄像机、多普勒测速仪和高度计等)来构成组合导航系统^[10]。

惯性导航系统(INS)利用机载加速度计和陀螺仪来提供飞行器相对于参照系的姿态、位置及速度等信息,可分为平台式^[57]和捷联式惯导^[58,59]两种类型。平台式惯导系统的陀螺仪安装在平台台体上,陀螺仪敏感台体偏离导航坐标系的偏差,平台通过稳定回路消除这种偏差,其作用是隔离掉运载体的角运动,使陀螺仪的工作环境不受载体角运动的影响。同时,平台通过修正回路使陀螺仪按一定要求进动,控制平台跟踪导航坐标系的旋转运动。平台式惯导系统对加速度计和陀螺仪的要求不高,且能提供非常精确的导航信息,因而在军事和商用飞行器中获得了广泛应用。但是,平台式惯导系统也有许多缺点,如结构复杂、维护困难、可靠性低及成本昂贵。与平台式惯导系统不同的是,捷联式惯导系统的加速度计和陀螺仪直接固联在运载体上。因此,加速度计输出载体位于本体坐标系下的加速度,而速率陀螺仪测量本体坐标系相对于惯性系的角速度。通过对角速度进行积分就可以获得本体坐标系的瞬时姿态,同时,将本体坐标系下的加速度变换到惯性系或导航坐标系中,变换后的加速度通过积分可获得载体在惯性系或导航坐标系下的速度和位置。捷联式惯导系统利用姿态解算建立起数学平台来实现平台式惯导系统物理平台的功能,因此,捷联式惯导系统与平台式惯导系统在本质上是相同的,但在系统的具体实现上却存在着明显的不同。捷联式惯导系统需要有高性能的机载计算机来进行捷联解算并对惯性器件的性能(如动态范围)提出了更高的要求。尽管如此,捷联式惯导系统具有成本低、体积小、重量轻及可靠性高等优点,目前在中低精度领域已经完全取代了平台式惯导系统,并正在向高精度应用领域渗透发展。捷联式惯导系统的解算精度取决于捷联算法,对于载体做高速机动等高动态环境来说尤其如此。捷联解算主要包括姿态解算和导航解算两部分,后者表示载体速度和位置的计算。为了保证算法误差与惯性器件引入的误差相比可以忽略不计,捷联解算必须选用高精度的数值积分算法。迄今为止,大量学者进行了这方面的研究^[60-66]。Savage^[67,68]给出了捷联算法设计的总结性文献,标志着传统捷联算法的研究已告一段落。最近,Wu^[69]提出了对偶四元数(Dual Quaternion, DQ)^[70,71]捷联算法,从理论上证明了在高精度和高动态环境中,DQ算法的精度要优于传统算法,同时也指出了传统算法中姿态解算与速度解算之间对偶性^[64,66]的产生机理,为

捷联惯导算法的研究提供了另外一种视角和开辟了一个新的方向。随着微机电系统 (Micro-Electro-Mechanical Systems, MEMS) 的发展, 已经出现了将加速度计和速率陀螺仪集成在一起的惯性测量装置 (Inertial Measurement Units, IMU)。目前, 基于 MEMS 的 IMU 已经成为了捷联式惯导系统的核心模块^[72-74]。

尽管捷联式惯导系统能够为飞行器的制导、导航与控制 (Guidance, Navigation and Control, GN&C) 系统提供所需的姿态信息, 但是由于 IMU 的测量误差, 其导航精度会随着时间的增长而迅速降低。因此, 绝大多数的捷联式惯导系统都需要与其它的外部系统一起协同工作, 共同构成组合导航系统, 如图 1.2 所示^[75]。外部系

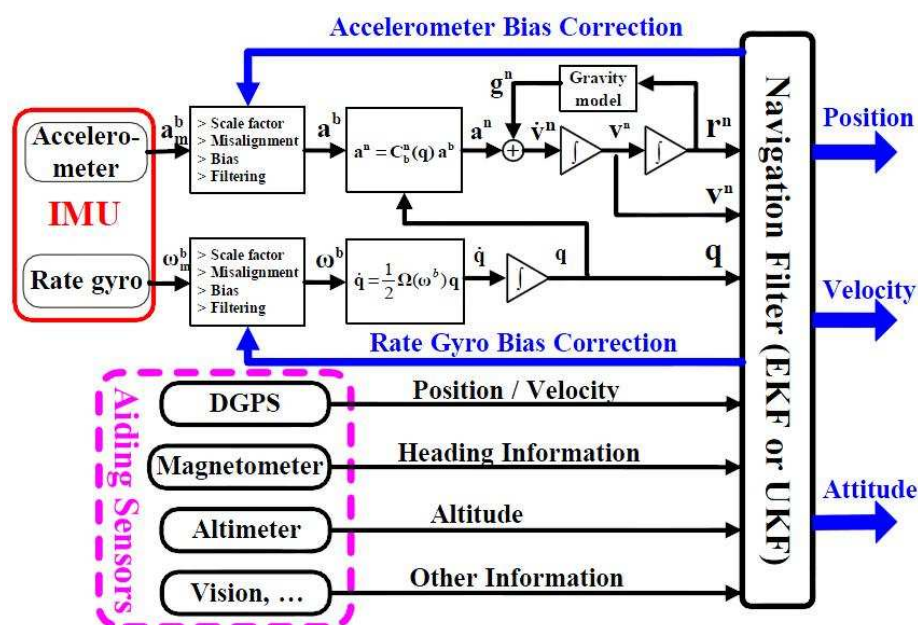


图 1.2: 组合导航系统

统向捷联式惯导系统提供辅助信息, 抑制其导航误差的漂移。对于在地球附近的飞行器来说, 常用的辅助导航装置有 GPS 接收机、磁场计、高度计及视觉处理设备等。由图 1.2 可知, 其上半部分为捷联式惯导系统, 下半部分为辅助系统, 多种传感器提供的信息通过非线性滤波来进行有效融合。因此, 非线性滤波是组合导航系统的基石, 其性能直接关系到组合导航系统的精度和性能。传感器的测量信息经过非线性滤波融合后实时输出载体的姿态、速度、位置及加速度计与陀螺仪的漂移等状态。描述姿态的方式较多^[76], 主要有姿态矩阵^[77]、欧拉角^[78]、旋转矢量^[79]及四元数^[80]。其中, 四元数是参数数量最小的全局非奇异姿态描述方式, 只有一个多余参数, 而姿态矩阵却有六个多余的参数, 因而工程实际中多采用四元数来描述载体的姿态。四

元数的各个元素不是独立的,须满足归一化约束,在用四元数进行姿态滤波的导航算法中,必须考虑该约束。不幸的是,上述所有非线性滤波算法都只能用于系统状态不受限制的场合,因而不能直接用于姿态四元数估计。Lefferts^[81]提出了乘性扩展 Kalman 滤波 (Multiplicative Extended Kalman Filtering, MEKF) 来对航天器的姿态进行估计,该姿态估计算法的特点在于采用四元数进行姿态传播,而通过误差姿态角来实现姿态更新,具有一阶近似精度。Crassidis^[45]提出了 Unscented 四元数估计器 (Unscented Quaternion Estimator, USQUE),并将其应用于航天器的姿态估计中。USQUE 算法采用广义 Rodrigues 参数 (Generalized Rodrigues Parameter, GRP) 来进行姿态更新,仍用四元数向前传播,从而有效地维持了滤波过程中的四元数归一化约束,并容许较大的初始误差。Cheng^[82,83]将 PF 应用于姿态四元数估计中,获得了比 MEKF 与 USQUE 更优的姿态估计结果。Carmi^[84,85]提出了几种变形 PF 来估计航天器的姿态,进一步提高了姿态估计的精度和 PF 的计算效率。Crassidis^[86]对多种非线性姿态估计算法进行了评述并给出了其在工程实际中的选用原则。

组合导航系统充分利用了捷联式惯导系统的优点,同时又采取了先进的辅助技术,因而在航天器、飞机及无人机中获得了广泛应用。目前,应用最广泛的组合导航系统为 INS/GPS,组合方案通常可分为松组合、紧组合及深组合三种。

1.2.2.2 VisNav 系统

飞行器的编队飞行、飞机的自主空中加油都需要高精度、快速的传感器来敏感飞行器之间的相对姿态和位置,传统的相对测量系统难以满足这些要求。差分 GPS (Differential Global Positioning Systems, DGPS) 利用卫星间的数据链路来提供相对信息,其最快更新频率为 10 Hz,且容易出现导航信号丢失等问题。基于模式匹配的光学测量系统需要进行大量的图像处理运算,导航信息更新的频率更低,难以获得精确的相对信息。基于上述因素,美国德州农工大学 (Texas A&M University) 的研究者开发了 VisNav 系统^[87-89],其具有更高的测量精度 (在 30 m 内的测量误差仅为 1 cm 或 0.25°) 和 10 倍于 DGPS 导航速率的更新频率^[90]。VisNav 系统利用了新型的光学敏感器件和先进的数字信号处理技术,结构简单、工作可靠,具有广阔的应用前景。

VisNav 系统由一个光电敏感器 (Sensor) 与能发出特色光的多个标志器 (Beacons) 所组成,光电敏感器安装在一个飞行器上,标志器位于另一个飞行器上,如图 1.3 所示^[89]。VisNav 系统主要用于飞行器的近距离相对运动中,能够提供六自

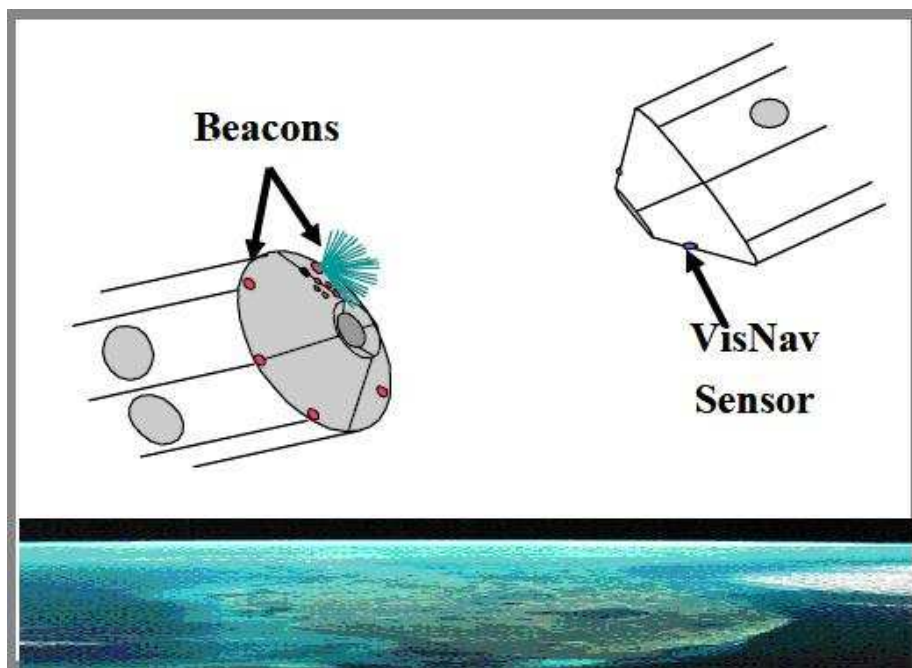


图 1.3: VisNav 系统的组成

由度 (Degree-Of-Freedom, DOF) 的相对信息。光电传感器由位置敏感二极管 (Position Sensing Diode, PSD)、广角镜及数字信号处理器 (Digital Signal Processor, DSP) 组成, 如图 1.4 所示^[90]。PSD 安装在光电传感器广角镜的焦平面上, 用来发

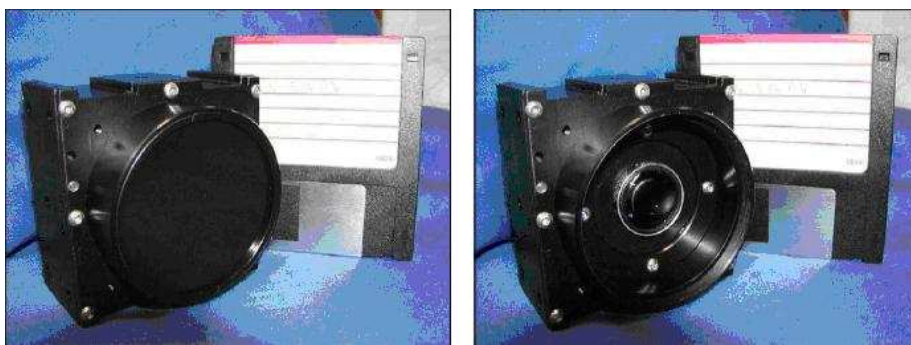


图 1.4: VisNav 系统的光电传感器

现或定位光束在其上投影的位置。当光束聚焦在 PSD 上的时候, 位于矩形 PSD 侧边的四个终端会产生电流, 电流的大小随着投影中心与 PSD 侧边距离的变化而变化, 距离越近, 与之最近的终端上产生的电流就越大, 如图 1.5 所示^[90]。通过测量四个终端上的输出电压, 应用 Gaussian 最小二乘差分校正 (Gaussian Least Squares

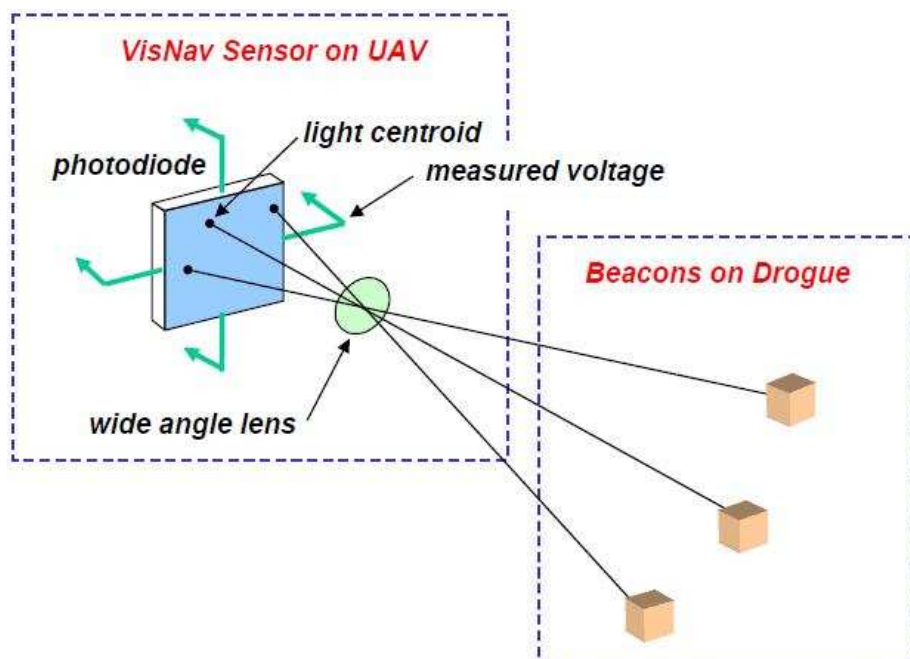


图 1.5: VisNav 系统的工作原理

Differential Correction, GLSDC) 算法^[89]就可确定目标光源 (即标志器) 发出的诱导光束经广角镜聚焦后在 PSD 上的投影中心的位置。PSD 具有约 $5 \mu\text{s}$ 的上升时间, 比高速相机还快, 因而允许对标志器光源的频率进行调制和采用类似雷达信号处理的方法将其与周围的其它光源区分开来。标志器由多个规则排列的红外发光二极管 (Infrared Light Emitting Diodes, ILED) 组成, 目前具有三种规格, 如图 1.6 所示^[90]。标志器的数量会影响系统的可观性, 一般四个标志器就可以获得唯一的 6 DOF 解, 但八个标志器的配置可得到更好的导航结果^[91]。多余标志器的 LOS 测量可提高状态估计算法的收敛性能, 并且当某个标志器位于广角镜的视场之外时能够提供一定的冗余度。多个标志器的协同工作对改善系统的可观性也具有重要的作用。因此, 标志控制器 (Beacon Controller) 控制每个标志器的工作顺序和时间, 并保持标志器光束的强度约为 PSD 饱和强度的 70%, 防止损害 PSD 和使系统在工作过程中具有良好的信噪比。标志器在飞行器上的配置也会影响 VisNav 系统的性能, 如果两个飞行器相距较远, 可使用较大规格的标志器, 反之, 对于近距离相对运动, 则可采用小规格的标志器。DSP 为 VisNav 系统的控制与处理中心, 采用德州仪器 (Texas Instruments, TI) 公司的定点 TMS320C55x。当 VisNav 系统工作时, DSP 通过无线电数据链与标志控制器进行通信, 实现对标志器的控制。此外, DSP 还要进行大量的数字信号处理运算和对有关数据进行处理, 给出标志器

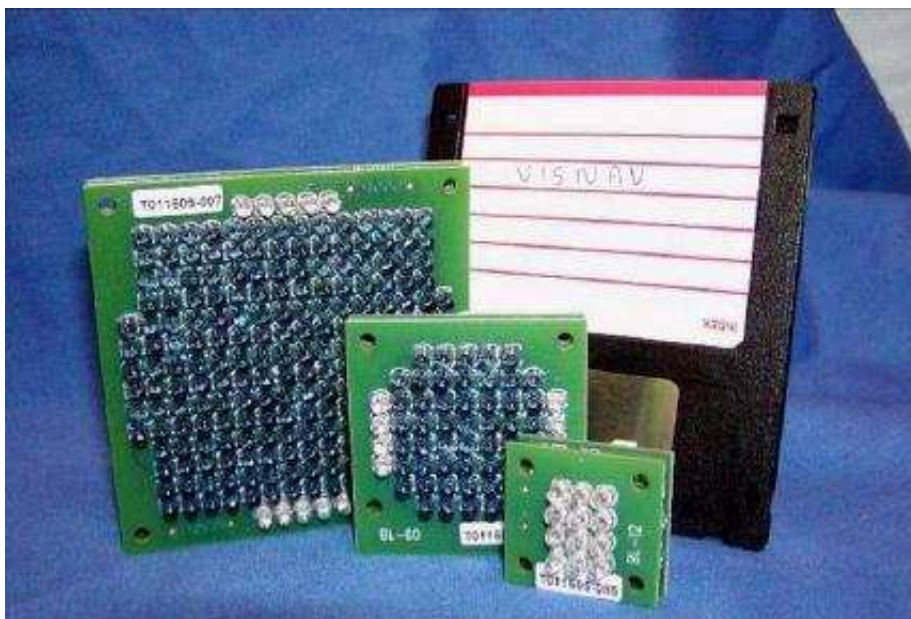


图 1.6: VisNav 系统的标志器

在焦平面上的坐标。

但是, 上述 VisNav 系统也存在一些问题, 其中, 周围环境光源对系统性能的影响最为明显。VisNav 系统的工作环境中存在着大量由太阳、大气反射与散射及各种显示仪器发出的短波长、低频率的光, 这些光的强度比较大, 会对 PSD 造成损害甚至掩盖标志器发出的有用光。为了使有用光在 PSD 上起支配作用, 所有波长小于有用光的背景光都通过一个光学滤波器来使其能量大量衰减。此外, 采用频率为 40 Hz 的正弦载波来调制每个标志器的驱动电流, 使得 PSD 终端上的电流近似以同样的频率 (实际值取决于 PSD 相对于标志器的姿态和位置) 正弦变化, 经过解调后变成符合要求的电流信号。这种调制/解调方式降低了 PSD 对背景光的灵敏度, 也是使 VisNav 系统能够在实际环境中工作的关键。

目前, VisNav 系统已在航天器的编队飞行^[92,93]和飞机的空中加油^[94,95]中获得了广泛应用。Cheng^[96]提出了 LOS 传感器在大视场条件下的测量模型, 与适用于小视场的 QUEST 测量模型^[97]相比, 其具有更优的估计性能。Kim^[98,99]研究了两个在轨航天器基于 VisNav 系统的相对导航问题, 给出了不同条件下相对姿态估计的 EKF 方程, 相对位置估计显得比较简单。Fosbury^[100-102]将 VisNav 系统用于无人机中的相对导航中, 导出了基于通用 6 DOF 相对运动方程的 EKF 导航算法, 并从最优控制的角度出发, 设计了最优相对运动轨迹来提高系统的可观性。由

此可见, 在 VisNav 系统中, EKF 是迄今为止应用最广泛的非线性滤波算法。但是, 由于 EKF 本身的固有缺陷和相对导航系统较强的非线性, 近来, 出现了初步将 SPKF 应用在 VisNav 系统中的实例^[103]。

1.3 研究内容

本文的研究内容总体上包括两个部分: 第一部分为第 2 章, 主要研究了常用的 SPKF 算法及其实现方式; 第二部分包括后三章, 重点研究了相对运动模型和相对导航方程。本文后面各章的具体研究内容如下:

第 2 章研究了 SPKF 算法及其平方根实现。介绍了递归 Bayesian 估计框架, 在此框架下引入了 Kalman 滤波和 EKF 算法。以 UKF 为对象, 重点研究了 SPKF 算法及其平方根实现。为了减少 UKF 的计算量, 提高其实时性能, 将 SSUT 与 UKF 结合起来, 提出了一种新的 SPKF 算法并给出了其最优权值的自动确定方法。以航天器姿态估计这个典型例子对本章的非线性滤波算法进行了考察比较, 结果表明: 与 SR-UKF 相比, 新算法不仅在精度上占优, 而且计算复杂度更低。

第 3 章研究了基于视觉的相对导航所涉及的一个子问题——飞行器运动方程的描述问题。为了研究的便利, 介绍了张量的有关概念及其运算法则。针对刚体的一般运动分别从运动学和动力学两个方面进行了描述, 提出了几个新的运动学张量并给出了其性质。给出了适用于一般刚体的张量形式的运动方程, 建立了飞行器的通用 6 DOF 相对运动模型。本章给出的张量形式的运动方程不仅简洁明了, 而且具有一致性, 即在任何坐标系下都成立, 因此便于理解和应用。

在第 3 章得到的张量形式的相对运动方程的基础上, 第 4 章将其在合适的坐标系下进行实例化, 给出了坐标形式的相对运动方程。介绍了有关的加速度计、陀螺仪及 LOS 的测量模型。详细导出了 EKF 与 SR-SPKF 在 VisNav 系统中的相对导航方程。

第 5 章介绍了评估非线性滤波算法最优性的系统方法。详细阐述了仿真环境和有关仿真参数的设置, 给出了小初始误差与大初始误差两种条件下的相对导航结果, 并从几个方面定量比较了有关导航算法的性能。

第 2 章 平方根 Sigma-Point Kalman 滤波

非线性滤波是指从含有噪声的测量数据中概率最优地递归估计系统隐含状态的各种算法，分为状态估计和参数估计两种类型，本文只研究状态估计，参数估计为状态估计的特殊形式。

2.1 引言

通用离散非线性系统为

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{u}_{1_{k-1}}) \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{n}_k, \mathbf{u}_{2_k}) \quad (2.1b)$$

其中 $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ 表示 $n_x \times 1$ 的状态向量， $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ 为 $n_y \times 1$ 的量测向量。 $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{n_v}$ 表示 $n_v \times 1$ 的状态噪声向量， $\mathbf{n}_k \in \mathbb{R}^{n_n}$ 为 $n_n \times 1$ 的量测噪声向量。 $\mathbf{u}_{1_k} \in \mathbb{R}^{n_{u_1}}$ 表示 $n_{u_1} \times 1$ 状态输入向量， $\mathbf{u}_{2_k} \in \mathbb{R}^{n_{u_2}}$ 为 $n_{u_2} \times 1$ 的量测输入向量。映射 $\mathbf{f} : \mathbb{R}_{n_x} \times \mathbb{R}_{n_v} \times \mathbb{R}_{n_{u_1}} \mapsto \mathbb{R}_{n_x}$ 和 $\mathbf{h} : \mathbb{R}_{n_x} \times \mathbb{R}_{n_n} \times \mathbb{R}_{n_{u_2}} \mapsto \mathbb{R}_{n_y}$ 分别代表确定的状态和量测模型。由式 (2.1) 可知，系统满足如下两个假设：

(1) 状态转移属于一阶 Markov 过程，即

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1:0}, \mathbf{y}_{1:k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \quad (2.2)$$

(2) 量测只跟当前状态有关，即

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1:0}, \mathbf{y}_{1:k-1}) = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \quad (2.3)$$

其中 $\mathbf{x}_{k-1:0} \equiv \{\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k-2}, \dots, \mathbf{x}_0\}$ ， $\mathbf{y}_{1:k-1} \equiv \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{k-1}\}$ 。

2.2 递归 Bayesian 估计

为了递归估计系统的状态，需要用到 Bayesian 推理。利用 Bayesian 公式和系

统模型，状态的后验概率密度 $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$ 可以表示成如下的递归形式

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) &=^1 \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{x}_k)p(\mathbf{y}_{1:k-1}|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k)}{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{y}_{1:k-1})} \\ &=^2 \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{x}_k)}{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{x}_k)} \\ &=^3 \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})}{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})} \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中 $\mathbf{y}_{1:k} \equiv \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\}$ ，1、2 应用了 Bayesian 公式和概率乘积公式，3 用到了前述第二个假设。先验概率密度 $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})$ 为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) &=^1 \int p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \\ &=^2 \int p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

其中 2 应用了前述第一个假设，状态转移密度 $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$ 为

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) = \int \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}))p(\mathbf{v}_{k-1}) d\mathbf{v}_{k-1} \quad (2.6)$$

其中 $\delta(\cdot)$ 为 Dirac-delta 函数。归一化因子 $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})$ 为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) &= \int p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k \\ &= \int p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中量测似然密度 $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)$ 为

$$p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k) = \int \delta(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{n}_k, \mathbf{u}_{2:k}))p(\mathbf{n}_k) d\mathbf{n}_k \quad (2.8)$$

上述所有多重积分定义如下

$$\int \mathbf{c}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \equiv \int \cdots \int \mathbf{c}(\mathbf{z}) dz_1 dz_2 \cdots dz_n \quad (2.9)$$

其中 $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$ 。

在给定初始条件的情况下，通过上述递归公式即可获得当前状态的后验概率密度，从而可以计算状态的最优估计，如

$$\hat{\mathbf{x}}_k \equiv \mathbb{E}[\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}] = \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_k \quad (2.10)$$

其中 $\mathbb{E}[\diamond]$ 表示求取 \diamond 的期望。然而, 上述多重积分只在线性、Gaussian 系统下才能求解, 此时, 上述递归过程变成了著名的 Kalman 滤波算法。对于非线性、非 Gaussian 系统, 只能计算其近似解, 目前, 主要可分为 Gaussian 近似和非 Gaussian 近似两种类型。Gaussian 近似算法采用 Kalman 滤波框架, 具有计算量低、易实现、精度满足工程要求等优点, 因而获得了广泛应用, 也是本文的研究重点。非 Gaussian 近似算法主要有 PF 及其变形等, 虽然精度比 Gaussian 近似算法高, 但可怕的计算量限制了它的实际工程应用范围, 本文对其不作研究。Gaussian 近似算法又可细分为线性 Gaussian 近似滤波和非线性 Gaussian 近似滤波, 前者主要为 EKF, 后者为 SPKF。

2.3 线性 Gaussian 近似滤波

EKF 是在 Kalman 滤波的基础上, 通过对非线性系统进行线性化近似而得到的, 具有 Kalman 滤波的基本特征。

2.3.1 Kalman 滤波

考虑如下的离散线性 Gaussian 系统

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \Upsilon_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \Psi_k\mathbf{n}_k \quad (2.11b)$$

其中 \mathbf{v}_k 、 \mathbf{n}_k 为互不相关的零均值 Gaussian 噪声, 协方差分别为 $\mathbf{P}_{\mathbf{v}_k}$ 与 $\mathbf{P}_{\mathbf{n}_k}$ 。状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 和协方差 $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}$ 可以表示为

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-) \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- - \mathbf{K}_k\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k}\mathbf{K}_k^T \quad (2.12b)$$

其中

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \Phi_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (2.13a)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (2.13b)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- = \Phi_{k-1}\mathbf{P}_{\mathbf{x}_{k-1}}\Phi_{k-1}^T + \Upsilon_{k-1}\mathbf{P}_{\mathbf{v}_{k-1}}\Upsilon_{k-1}^T \quad (2.13c)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k} = \mathbf{H}_k\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^-\mathbf{H}_k^T + \Psi_k\mathbf{P}_{\mathbf{n}_k}\Psi_k^T \quad (2.13d)$$

Kalman 增益 \mathbf{K}_k 为

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} (\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k})^{-1} \quad (2.14)$$

其中

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- \mathbf{H}_k^T \quad (2.15)$$

上述整个过程构成了 Kalman 滤波算法的框架，具有预测-更新的特点，这正是递归 Bayesian 估计所决定的。

2.3.2 扩展 Kalman 滤波

Kalman 滤波只能用于线性 Gaussian 系统中，而实际中的系统绝大多数为非线性系统，因而需要对非线性系统进行线性化近似，其中最常用的近似算法为 EKF。

EKF 是通过对非线性系统进行一阶 Taylor 级数展开，计算相应的 Jacobian 矩阵来实现的，其滤波过程如下：

(1) 初始化

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0] \quad (2.16a)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_0} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T] \quad (2.16b)$$

(2) $k = 1, 2, \dots, \infty$,

(a) 预测

$$\Phi_{k-1} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{u}_{1_{k-1}})|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}} \quad (2.17a)$$

$$\Upsilon_{k-1} = \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{1_{k-1}})|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} \quad (2.17b)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{u}_{1_{k-1}}) \quad (2.17c)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- = \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{\mathbf{x}_{k-1}} \Phi_{k-1}^T + \Upsilon_{k-1} \mathbf{P}_{\mathbf{v}_{k-1}} \Upsilon_{k-1}^T \quad (2.17d)$$

(b) 更新

$$\mathbf{H}_k = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{u}_{2_k})|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-} \quad (2.18a)$$

$$\Psi_k = \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{n}, \mathbf{u}_{2_k})|_{\mathbf{n}=\mathbf{0}} \quad (2.18b)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- \mathbf{H}_k^T \quad (2.18c)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k} = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- \mathbf{H}_k^T + \Psi_k \mathbf{P}_{\mathbf{n}_k} \Psi_k^T \quad (2.18d)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} (\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k})^{-1} \quad (2.18e)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0}, \mathbf{u}_{2k}) \quad (2.18f)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-) \quad (2.18g)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\mathbf{y}_k} \mathbf{K}_k^T \quad (2.18h)$$

其中 $\nabla_{\diamond} \bullet$ 表示计算 \bullet 相对于 \diamond 的 Jacobian 矩阵。

可以看出, EKF 具有如下特点:

- (1) 算法框架与 Kalman 滤波相同, 结构简单, 便于理解;
- (2) 为非线性系统的一阶近似。当估计值与真实值偏离较大时, 近似误差大, 严重时甚至会导致滤波发散;
- (3) 需要计算 Jacobian 矩阵, 解析推导较复杂。对于非连续系统, 不能应用 EKF 算法。

2.4 Sigma-Point Kalman 滤波

因为 SPKF 中的各种算法具有相似的特性与同等精度, 下面重点介绍 UKF, 其它算法可以类似进行分析。

2.4.1 Unscented Kalman 滤波

UKF 不像 EKF 那样直接对非线性模型进行近似, 而是将 SUT 与 Kalman 滤波结合起来, 利用 SUT 对 Gaussian 状态随机变量的分布进行逼近, 不需要计算 Jacobian 矩阵, 可以达到至少二阶近似精度。

2.4.1.1 尺度 Unscented 变换

Gaussian 随机向量经过非线性系统传播后, 其分布会发生变化, SUT 就是一种计算 Gaussian 随机向量传播后均值和协方差的方法。考虑如下非线性系统

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.19)$$

为了计算随机向量 \mathbf{y} 的均值和协方差, SUT 首先构造 \mathbf{x} 的 Sigma Points, 这些 Sigma Points 通过非线性系统 (2.19) 进行传播后得到 \mathbf{y} 的 Sigma Points, 然后计算 \mathbf{y} 的均值和协方差。整个变换过程如下^[43]:

(1) 构造 Sigma Points

$$\mathbf{S}_x = \sqrt{\mathbf{P}_x} \quad (2.20a)$$

$$\mathcal{X}(i) = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}, & i = 0 \\ \hat{\mathbf{x}} + \gamma \mathbf{S}_{x_i}, & i = 1, 2, \dots, n_x \\ \hat{\mathbf{x}} - \gamma \mathbf{S}_{x_i}, & i = n_x + 1, \dots, 2n_x \end{cases} \quad (2.20b)$$

其中 $\gamma = \sqrt{n_x + \lambda}$ 和 $\lambda = \alpha^2(n_x + \kappa) - n_x$ 。常量 α 控制 Sigma Points 分布的大小，通常取 $\alpha = 1/\sqrt{n_x}$ 或为较小的正值（如 $1 \times 10^{-4} \leq \alpha \leq 1$ ）。标量 κ 通常取 $\kappa = 3 - n_x$ 或为零。 \mathbf{S}_{x_i} 表示矩阵 \mathbf{S}_x 的第 i 列。

(2) 传播 Sigma Points

$$\mathcal{Y}(i) = \mathbf{g}(\mathcal{X}(i)), \quad i = 0, 1, \dots, 2n_x \quad (2.21)$$

(3) 计算近似均值和协方差

$$\hat{\mathbf{y}} \approx \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} \mathcal{Y}(i) \quad (2.22a)$$

$$\mathbf{P}_y \approx \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(c)} (\mathcal{Y}(i) - \hat{\mathbf{y}})(\mathcal{Y}(i) - \hat{\mathbf{y}})^T \quad (2.22b)$$

$$\mathbf{P}_{xy} \approx \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(c)} (\mathcal{X}(i) - \hat{\mathbf{x}})(\mathcal{Y}(i) - \hat{\mathbf{y}})^T \quad (2.22c)$$

其中 \mathbf{P}_{xy} 表示 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 的互协方差，权值为

$$w_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} \quad (2.23a)$$

$$w_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) \quad (2.23b)$$

$$w_i^{(m)} = w_i^{(c)} = \frac{1}{2(n_x + \lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n_x \quad (2.23c)$$

其中 β 为非负数，用来反映状态向量的先验分布信息。对于 Gaussian 分布，其最优值为 $\beta = 2$ 。

2.4.1.2 Unscented Kalman 滤波的实现

将 SUT 应用在 Kalman 滤波框架中，就构成了 UKF。对于通用非线性系统 (2.1)，采用状态增量实现方式。状态增量定义为

$$\mathbf{x}_k^a \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^x \\ \mathbf{x}_k^v \\ \mathbf{x}_k^n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{v}_k \\ \mathbf{n}_k \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

其中 $\mathbf{x}_k^a \in \mathbb{R}^{n_a}$ 表示 $n_a \times 1$ 的状态增量向量， $n_a = n_x + n_v + n_n$ 。与之相对应的状态增量协方差为

$$\mathbf{P}_k^a \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k} & \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{v}_k} & \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{n}_k} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{v}_k}^T & \mathbf{P}_{\mathbf{v}_k} & \mathbf{P}_{\mathbf{v}_k \mathbf{n}_k} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{n}_k}^T & \mathbf{P}_{\mathbf{v}_k \mathbf{n}_k}^T & \mathbf{P}_{\mathbf{n}_k} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

其中 $\mathbf{P}_{\diamond \bullet}$ 表示 \diamond 与 \bullet 的互协方差，其值通常为零。因此，式 (2.25) 变为

$$\mathbf{P}_k^a \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\mathbf{v}_k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\mathbf{n}_k} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

整个 UKF 算法如下：

(1) 初始化

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0] \quad (2.27a)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_0} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T] \quad (2.27b)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0^a = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0^a] = [\hat{\mathbf{x}}_0^T, \mathbf{0}, \mathbf{0}]^T \quad (2.27c)$$

$$\mathbf{P}_0^a = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{x}_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\mathbf{v}_0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\mathbf{n}_0} \end{bmatrix} \quad (2.27d)$$

其中式 (2.27c) 假定过程与量测噪声的均值都为零。

(2) $k = 1, 2, \dots, \infty$,

(a) 构造 Sigma Points

$$\mathbf{S}_{k-1}^a = \sqrt{\mathbf{P}_{k-1}^a} \quad (2.28a)$$

$$\mathcal{X}_{k-1}^a(i) = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a, & i = 0 \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a + \gamma \mathbf{S}_{i,k-1}^a, & i = 1, 2, \dots, n_a \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a - \gamma \mathbf{S}_{i,k-1}^a, & i = n_a + 1, \dots, 2n_a \end{cases} \quad (2.28b)$$

其中 $\mathbf{S}_{i,k-1}^a$ 表示矩阵 \mathbf{S}_{k-1}^a 的第 i 列, $\mathcal{X}_{k-1}^a(i)$ 定义为

$$\mathcal{X}_{k-1}^a(i) \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{k-1}^x(i) \\ \mathcal{X}_{k-1}^v(i) \\ \mathcal{X}_{k-1}^n(i) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

(b) 预测

$$\mathcal{X}_k^{x-}(i) = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}^x(i), \mathcal{X}_{k-1}^v(i), \mathbf{u}_{1,k-1}) \quad (2.30a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(m)} \mathcal{X}_k^{x-}(i) \quad (2.30b)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- = \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(c)} (\mathcal{X}_k^{x-}(i) - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\mathcal{X}_k^{x-}(i) - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \quad (2.30c)$$

(c) 更新

$$\mathcal{Y}_k(i) = \mathbf{h}(\mathcal{X}_k^{x-}(i), \mathcal{X}_{k-1}^n(i), \mathbf{u}_{2_k}) \quad (2.31a)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(m)} \mathcal{Y}_k(i) \quad (2.31b)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(c)} (\mathcal{X}_k^{x-}(i) - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\mathcal{Y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \quad (2.31c)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(c)} (\mathcal{Y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k^-) (\mathcal{Y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \quad (2.31d)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} (\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k})^{-1} \quad (2.31e)$$

$$\mathbf{\Lambda}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0}, \mathbf{u}_{2_k}) \quad (2.31f)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{\Lambda}_k \quad (2.31g)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\mathbf{y}_k} \mathbf{K}_k^T \quad (2.31h)$$

其中式 (2.31f) 中的新息计算采用了量测模型和状态传播值, 与通常的新息计算 $\mathbf{\Lambda}_k = \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-$ 不同, 该方式将量测模型的二阶项纳入了状态更新中^[104], 从而提高了估计精度。

上述算法为通用形式的 UKF, 对于如下纯加性噪声系统

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{1_{k-1}}) + \mathbf{v}_{k-1} \quad (2.32a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_{2_k}) + \mathbf{n}_k \quad (2.32b)$$

其中 \mathbf{v}_k 、 \mathbf{n}_k 假定为互不相关的零均值 Gaussian 噪声, 为了降低 UKF 的计算复杂度, 可采用非状态增量方式, 从而减少 Sigma Points 的数量。

加性形式的 UKF 算法如下:

(1) 初始化

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0] \quad (2.33a)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_0} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T] \quad (2.33b)$$

(2) $k = 1, 2, \dots, \infty$,

(a) 构造 Sigma Points

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_{k-1}} = \sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}_{k-1}}} \quad (2.34a)$$

$$\mathcal{X}_{k-1}(i) = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, & i = 0 \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \gamma \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{i,k-1}}, & i = 1, 2, \dots, n_x \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \gamma \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{i,k-1}}, & i = n_x + 1, \dots, 2n_x \end{cases} \quad (2.34b)$$

(b) 预测

$$\mathcal{X}_k^-(i) = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}(i), \mathbf{u}_{1_{k-1}}) \quad (2.35a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} \mathcal{X}_k^-(i) \quad (2.35b)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(c)} (\mathcal{X}_k^-(i) - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\mathcal{X}_k^-(i) - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T + \mathbf{P}_{\mathbf{v}_{k-1}} \quad (2.35c)$$

(c) 重新构造 Sigma Points

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_k}^- = \sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^-} \quad (2.36a)$$

$$\mathcal{X}_k^-(i) = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_k^-, & i = 0 \\ \hat{\mathbf{x}}_k^- + \gamma \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{i,k}}^-, & i = 1, 2, \dots, n_x \\ \hat{\mathbf{x}}_k^- - \gamma \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{i,k}}^-, & i = n_x + 1, \dots, 2n_x \end{cases} \quad (2.36b)$$

(d) 更新

$$\mathcal{Y}_k(i) = \mathbf{h}(\mathcal{X}_k^-(i), \mathbf{u}_{2k}) \quad (2.37a)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} \mathcal{Y}_k(i) \quad (2.37b)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(c)} (\mathcal{X}_k^-(i) - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\mathcal{Y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \quad (2.37c)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(c)} (\mathcal{Y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k^-) (\mathcal{Y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T + \mathbf{P}_{\mathbf{n}_k} \quad (2.37d)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} (\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k})^{-1} \quad (2.37e)$$

$$\mathbf{\Lambda}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_{2k}) \quad (2.37f)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{\Lambda}_k \quad (2.37g)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\mathbf{y}_k} \mathbf{K}_k^T \quad (2.37h)$$

需要指出的是, 加性 UKF 与通用 UKF 相比, 在某些场合会降低滤波精度^[105]。为了减少精度损失, 在上述滤波过程中重新构造了 Sigma Points。

2.4.2 单球 Unscented Kalman 滤波

2.4.2.1 单球 Unscented 变换

SSUT 采用了一种新的 Sigma Points 构造算法, 其构造的 $n + 1$ 个 Sigma Points 位于一个半径正比于 \sqrt{n} 的超球面上, 而与之相对应的权值则正比于 $1/(n + 1)$ 。

令 \mathcal{E}_i^j 表示均值为零、协方差为单位阵的 j 维状态向量的第 i 个 Sigma Point。完整的 SSUT 过程如下^[50]:

(1) 确定权值

$$w_0 \in [0, 1] \quad (2.38a)$$

$$w_i = \frac{1 - w_0}{n_x + 1}, \quad i = 1, 2, \dots, n_x + 1 \quad (2.38b)$$

其中 w_0 为自由选取的参数, 其值影响 Sigma Points 的四阶和高阶矩。

(2) 构造 \mathcal{E}_i^j ($j = 1, 2, \dots, n_x$)

$$\mathcal{E}_i^j = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_0^{j-1} \\ 0 \end{bmatrix}, & i = 0 \\ \begin{bmatrix} \mathcal{E}_i^{j-1} \\ -\frac{1}{\sqrt{j(j+1)w_1}} \end{bmatrix}, & i = 1, 2, \dots, j \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{j-1} \\ \frac{j}{\sqrt{j(j+1)w_1}} \end{bmatrix}, & i = j + 1 \end{cases} \quad (2.39)$$

其中 $\mathbf{0}^j$ 表示 j 维的零向量。

(3) 构造 Sigma Points

$$\mathcal{X}(i) = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{S}_x \mathcal{E}_i^{n_x}, \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (2.40)$$

(4) 传播 Sigma Points

$$\mathcal{Y}(i) = \mathbf{g}(\mathcal{X}(i)), \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (2.41)$$

(5) 计算近似均值和协方差

$$\hat{\mathbf{y}} \approx \sum_{i=0}^{n_x+1} w_i \mathcal{Y}(i) \quad (2.42a)$$

$$\mathbf{P}_y \approx \sum_{i=0}^{n_x+1} w_i (\mathcal{Y}(i) - \hat{\mathbf{y}})(\mathcal{Y}(i) - \hat{\mathbf{y}})^T \quad (2.42b)$$

$$\mathbf{P}_{xy} \approx \sum_{i=0}^{n_x+1} w_i (\mathcal{X}(i) - \hat{\mathbf{x}})(\mathcal{Y}(i) - \hat{\mathbf{y}})^T \quad (2.42c)$$

2.4.2.2 单球 Unscented Kalman 滤波的实现

与 UKF 类似, 将 SSUT 应用在 Kalman 滤波框架中, 就构成了单球 Unscented Kalman 滤波 (Spherical Simplex Unscented Kalman Filtering, SSUKF), 其通用形式如下:

(1) 初始化

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0] \quad (2.43a)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_0} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T] \quad (2.43b)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0^a = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0^a] = [\hat{\mathbf{x}}_0^T, \mathbf{0}, \mathbf{0}]^T \quad (2.43c)$$

$$\mathbf{P}_0^a = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{x}_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\mathbf{v}_0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\mathbf{n}_0} \end{bmatrix} \quad (2.43d)$$

(2) $k = 1, 2, \dots, \infty$,

(a) 构造 Sigma Points

$$\mathbf{S}_{k-1}^a = \sqrt{\mathbf{P}_{k-1}^a} \quad (2.44a)$$

$$\mathcal{X}_{k-1}^a(i) = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a + \mathbf{S}_{k-1}^a \mathcal{E}_i^{n_a}, \quad i = 0, 1, \dots, n_a + 1 \quad (2.44b)$$

(b) 预测

$$\mathcal{X}_k^{x-}(i) = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}^x(i), \mathcal{X}_{k-1}^v(i), \mathbf{u}_{1_{k-1}}) \quad (2.45a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{n_a+1} w_i \mathcal{X}_k^{x-}(i) \quad (2.45b)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- = \sum_{i=0}^{n_a+1} w_i (\mathcal{X}_k^{x-}(i) - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\mathcal{X}_k^{x-}(i) - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \quad (2.45c)$$

(c) 更新

$$\mathcal{Y}_k(i) = \mathbf{h}(\mathcal{X}_k^{x-}(i), \mathcal{X}_{k-1}^n(i), \mathbf{u}_{2_k}) \quad (2.46a)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{n_a+1} w_i \mathcal{Y}_k(i) \quad (2.46b)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{n_a+1} w_i (\mathcal{X}_k^{x-}(i) - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\mathcal{Y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \quad (2.46c)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{n_a+1} w_i (\mathcal{Y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k^-) (\mathcal{Y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \quad (2.46d)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} (\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k})^{-1} \quad (2.46e)$$

$$\mathbf{\Lambda}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0}, \mathbf{u}_{2_k}) \quad (2.46f)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{\Lambda}_k \quad (2.46g)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\mathbf{y}_k} \mathbf{K}_k^T \quad (2.46h)$$

对于纯加性噪声系统 (2.32)，加性形式的 SSUKF 算法如下：

(1) 初始化

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0] \quad (2.47a)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_0} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T] \quad (2.47b)$$

(2) $k = 1, 2, \dots, \infty$,

(a) 构造 Sigma Points

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_{k-1}} = \sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}_{k-1}}} \quad (2.48a)$$

$$\mathcal{X}_{k-1}(i) = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{k-1}} \mathcal{E}_i^{n_x}, \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (2.48b)$$

(b) 预测

$$\mathcal{X}_k^-(i) = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}(i), \mathbf{u}_{1_{k-1}}) \quad (2.49a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{n_x+1} w_i \mathcal{X}_k^-(i) \quad (2.49b)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- = \sum_{i=0}^{n_x+1} w_i (\mathcal{X}_k^-(i) - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\mathcal{X}_k^-(i) - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T + \mathbf{P}_{\mathbf{v}_{k-1}} \quad (2.49c)$$

(c) 重新构造 Sigma Points

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_k}^- = \sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^-} \quad (2.50a)$$

$$\mathcal{X}_k^-(i) = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{S}_{\mathbf{x}_k}^- \mathcal{E}_i^{n_x}, \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (2.50b)$$

(d) 更新

$$\mathcal{Y}_k(i) = \mathbf{h}(\mathcal{X}_k^-(i), \mathbf{u}_{2_k}) \quad (2.51a)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{n_x+1} w_i \mathcal{Y}_k(i) \quad (2.51b)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{n_x+1} w_i (\mathcal{X}_k^-(i) - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\mathcal{Y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \quad (2.51c)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{n_x+1} w_i (\mathcal{Y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k^-) (\mathcal{Y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T + \mathbf{P}_{\mathbf{n}_k} \quad (2.51d)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} (\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k})^{-1} \quad (2.51e)$$

$$\mathbf{\Lambda}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_{2k}) \quad (2.51f)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{\Lambda}_k \quad (2.51g)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\mathbf{y}_k} \mathbf{K}_k^T \quad (2.51h)$$

2.4.2.3 w_0 的自动确定

SSUKF 的性能跟多个因素有关, 如系统的非线性程度、SSUT 的权值及噪声的统计特性等, 其中权值参数对滤波性能影响较大。遗憾的是, 与 SUT 相比, Julier 并没有给出选择 SSUT 权值的一般方法。由式 (2.38) 可知, SSUT 的权值取决于自由参数 w_0 , w_0 一旦确定, 其余权值就相应确定了。

传统确定 w_0 的方式为试凑法, 其需要采用大量的试验-误差操作来获取 w_0 的近似最优值。与繁琐的试凑法相比, 数值优化算法可实现 w_0 的自动确定。数值优化算法可分为两大类, 一类是利用相关导数信息来获取最优值, 如共轭梯度法^[106]、序贯二次规划法^[107]等; 另一类则不需要导数信息, 如遗传算法^[108]、粒子群算法^[109]及下山单纯形法 (Downhill Simplex, DS)^[110]等。Powell^[111]应用 DS 算法来调节 EKF 的过程噪声参数, 实现了 EKF 的自动整定。与此类似, 本文采用 DS 算法来自动确定 w_0 的值。

为了应用 DS 方法来确定 w_0 的值, 需要构造一个标量目标函数。在 Monte-Carlo 仿真中, 常用总的性能指数 J 作为优化目标函数, 其定义为

$$J \equiv \left(\frac{1}{L_{mc}} \sum_{i=1}^{L_{mc}} J_{k,i}^2(w_0) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.52)$$

其中 L_{mc} 表示 Monte-Carlo 仿真的次数, i 表示第 i 次 Monte-Carlo 仿真, $J_{k,i}(w_0)$ 定义为

$$J_{k,i}(w_0) \equiv \left(\frac{1}{L_{os}} \sum_{k=1}^{L_{os}} \|\mathbf{\Lambda}_{k,i}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.53)$$

其中 L_{os} 表示观测序列的长度。

2.5 平方根实现

由式 (2.28a) 与 (2.44a) 可知, 在 SPKF 中, 每一步都需要计算状态协方差矩阵的平方根来构造 Sigma Points。SR-SPKF 通过有关的线性代数方法直接对协方差矩阵的平方根进行更新, 与 SPKF 相比, 具有更低的计算复杂度、更好的数值稳定性和相同甚至更高的估计精度。

2.5.1 基础知识

SR-SPKF 通过 Cholesky 分解来初始化状态协方差矩阵的平方根, 然后在滤波过程中对 Cholesky 因子进行传播和更新来直接构造 Sigma Points。

2.5.1.1 QR 分解

为了计算状态协方差矩阵 \mathbf{P} 的平方根 \mathbf{S} (即 $\mathbf{S} \equiv \sqrt{\mathbf{P}}$ 或 $\mathbf{S}\mathbf{S}^T \equiv \mathbf{P}$), 可以采用 Cholesky 分解。但是直接进行 Cholesky 分解计算量较大, 一种更好的方法是采用 QR 分解。矩阵 $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 的 QR 分解为

$$\mathbf{M}^T = \mathbf{M}_q \mathbf{M}_r \quad (2.54)$$

其中 $\mathbf{M}_q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为正交矩阵, $\mathbf{M}_r \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为上三角矩阵且 $m \geq n$ 。

假设

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{M}\mathbf{M}^T \\ &= \mathbf{M}_r^T \mathbf{M}_q^T \mathbf{M}_q \mathbf{M}_r \\ &= \mathbf{M}_r^T \mathbf{M}_r \end{aligned} \quad (2.55)$$

因而 \mathbf{P} 的平方根为

$$\mathbf{S} = \mathbf{M}_r^T \quad (2.56)$$

本文采用 MATLAB[®] 函数 `qr` 来进行 QR 分解。注意

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{M}\mathbf{M}^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \cdots & \mathbf{M}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^T \\ \mathbf{M}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{M}_m^T \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbf{M}(i)\mathbf{M}(i)^T \end{aligned} \quad (2.57)$$

其中 $\mathbf{M}(i)$ 表示矩阵 \mathbf{M} 的第 i 列。

2.5.1.2 Cholesky 因子更新

假设矩阵 $\dot{\mathbf{P}}$ 可表示为

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + \ell \mathbf{t} \mathbf{t}^T \quad (2.58)$$

其中 \mathbf{t} 为向量, 那么 $\dot{\mathbf{P}}$ 的平方根 $\dot{\mathbf{S}}$ 可如下计算

$$\dot{\mathbf{S}} = \text{cholupdate}\{\mathbf{S}, \mathbf{t}, \ell\} \quad (2.59)$$

其中 cholupdate 也为 MATLAB[®] 函数。对于 \mathbf{t} 为矩阵的情况, 可以通过对 \mathbf{t} 的各列进行 cholupdate 计算。

2.5.1.3 有效的最小二乘算法

Kalman 增益 \mathbf{K}_k 可如下计算

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} (\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k})^{-1} \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} (\mathbf{S}_{\mathbf{y}_k} \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k}^T)^{-1} \\ &= (\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} / \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k}^T) / \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k} \end{aligned} \quad (2.60)$$

其中 $/$ 表示 MATLAB[®] 的矩阵右除运算, 其有效地应用了最小二乘算法。

2.5.2 平方根 Unscented Kalman 滤波

根据前面有关内容, 可得通用形式的平方根 UKF (Square-Root UKF, SR-UKF) 算法如下:

(1) 初始化

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0] \quad (2.61a)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_0} = \text{chol} \left\{ \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T] \right\} \quad (2.61b)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{v}_0} = \text{chol} \{\mathbf{P}_{\mathbf{v}_0}\} \quad \mathbf{S}_{\mathbf{n}_0} = \text{chol} \{\mathbf{P}_{\mathbf{n}_0}\} \quad (2.61c)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0^a = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0^a] = [\hat{\mathbf{x}}_0^T, \mathbf{0}, \mathbf{0}]^T \quad (2.61d)$$

$$\mathbf{S}_0^a = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\mathbf{x}_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{\mathbf{v}_0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{\mathbf{n}_0} \end{bmatrix} \quad (2.61e)$$

其中 chol 为 MATLAB[®] 函数。

(2) $k = 1, 2, \dots, \infty$,

(a) 构造 Sigma Points

$$\mathcal{X}_{k-1}^a(i) = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a, & i = 0 \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a + \gamma \mathbf{S}_{i,k-1}^a, & i = 1, 2, \dots, n_a \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a - \gamma \mathbf{S}_{i,k-1}^a, & i = n_a + 1, \dots, 2n_a \end{cases} \quad (2.62)$$

(b) 预测

$$\mathcal{X}_k^{x-}(i) = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}^x(i), \mathcal{X}_{k-1}^v(i), \mathbf{u}_{1_{k-1}}) \quad (2.63a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(m)} \mathcal{X}_k^{x-}(i) \quad (2.63b)$$

$$\mathbf{\Pi}_k = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1^{(c)}} (\mathcal{X}_k^{x-}(1) - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \\ \sqrt{w_2^{(c)}} (\mathcal{X}_k^{x-}(2) - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \\ \vdots \\ \sqrt{w_{2n_a}^{(c)}} (\mathcal{X}_k^{x-}(2n_a) - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \end{bmatrix}^T \quad (2.63c)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_k}^- = \text{qr} \{ \mathbf{\Pi}_k \} \quad (2.63d)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_k}^- = \text{cholupdate} \{ \mathbf{S}_{\mathbf{x}_k}^-, \mathcal{X}_k^{x-}(0) - \hat{\mathbf{x}}_k^-, w_0^{(c)} \} \quad (2.63e)$$

(c) 更新

$$\mathcal{Y}_k(i) = \mathbf{h}(\mathcal{X}_k^{x-}(i), \mathcal{X}_{k-1}^n(i), \mathbf{u}_{2_k}) \quad (2.64a)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(m)} \mathcal{Y}_k(i) \quad (2.64b)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(c)} (\mathcal{X}_k^{x-}(i) - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\mathcal{Y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \quad (2.64c)$$

$$\mathbf{\Pi}'_k = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1^{(c)}} (\mathcal{Y}_k(1) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \\ \sqrt{w_2^{(c)}} (\mathcal{Y}_k(2) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \\ \vdots \\ \sqrt{w_{2n_a}^{(c)}} (\mathcal{Y}_k(2n_a) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \end{bmatrix}^T \quad (2.64d)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{y}_k} = \text{qr} \{ \mathbf{\Pi}'_k \} \quad (2.64e)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{y}_k} = \text{cholupdate} \{ \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k}, \mathcal{Y}_k(0) - \hat{\mathbf{y}}_k^-, w_0^{(c)} \} \quad (2.64f)$$

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} / \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k}^T) / \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k} \quad (2.64g)$$

$$\mathbf{\Lambda}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0}, \mathbf{u}_{2k}) \quad (2.64h)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{\Lambda}_k \quad (2.64i)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_k} = \text{cholupdate} \{ \mathbf{S}_{\mathbf{x}_k}^-, \mathbf{K}_k \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k}, -1 \} \quad (2.64j)$$

加性形式的 SR-UKF 算法如下：

(1) 初始化

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0] \quad (2.65a)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_0} = \text{chol} \left\{ \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T] \right\} \quad (2.65b)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{v}_0} = \text{chol} \{ \mathbf{P}_{\mathbf{v}_0} \} \quad (2.65c)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{n}_0} = \text{chol} \{ \mathbf{P}_{\mathbf{n}_0} \} \quad (2.65d)$$

(2) $k = 1, 2, \dots, \infty$,

(a) 构造 Sigma Points

$$\mathcal{X}_{k-1}(i) = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, & i = 0 \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \gamma \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{i,k-1}}, & i = 1, 2, \dots, n_x \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \gamma \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{i,k-1}}, & i = n_x + 1, \dots, 2n_x \end{cases} \quad (2.66)$$

(b) 预测

$$\mathcal{X}_k^-(i) = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}(i), \mathbf{u}_{1k-1}) \quad (2.67a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} \mathcal{X}_k^-(i) \quad (2.67b)$$

$$\mathbf{\Pi}_k = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1^{(c)}} (\mathcal{X}_k^-(1) - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \\ \sqrt{w_2^{(c)}} (\mathcal{X}_k^-(2) - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \\ \vdots \\ \sqrt{w_{2n_x}^{(c)}} (\mathcal{X}_k^-(2n_x) - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \\ \mathbf{S}_{\mathbf{v}_{k-1}}^T \end{bmatrix}^T \quad (2.67c)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_k}^- = \text{qr} \{ \mathbf{\Pi}_k \} \quad (2.67d)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_k}^- = \text{cholupdate} \left\{ \mathbf{S}_{\mathbf{x}_k}^-, \mathcal{X}_k^-(0) - \hat{\mathbf{x}}_k^-, w_0^{(c)} \right\} \quad (2.67e)$$

(c) 重新构造 Sigma Points

$$\mathcal{X}_k^-(i) = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_k^-, & i = 0 \\ \hat{\mathbf{x}}_k^- + \gamma \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{i,k}}^-, & i = 1, 2, \dots, n_x \\ \hat{\mathbf{x}}_k^- - \gamma \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{i,k}}^-, & i = n_x + 1, \dots, 2n_x \end{cases} \quad (2.68)$$

(d) 更新

$$\mathcal{Y}_k(i) = \mathbf{h}(\mathcal{X}_k^-(i), \mathbf{u}_{2k}) \quad (2.69a)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} \mathcal{Y}_k(i) \quad (2.69b)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(c)} (\mathcal{X}_k^-(i) - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\mathcal{Y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \quad (2.69c)$$

$$\mathbf{\Pi}'_k = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1^{(c)}} (\mathcal{Y}_k(1) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \\ \sqrt{w_2^{(c)}} (\mathcal{Y}_k(2) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \\ \vdots \\ \sqrt{w_{2n_x}^{(c)}} (\mathcal{Y}_k(2n_x) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \\ \mathbf{S}_{\mathbf{n}_k}^T \end{bmatrix}^T \quad (2.69d)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{y}_k} = \text{qr} \{ \mathbf{\Pi}'_k \} \quad (2.69e)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{y}_k} = \text{cholupdate} \{ \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k}, \mathcal{Y}_k(0) - \hat{\mathbf{y}}_k^-, w_0^{(c)} \} \quad (2.69f)$$

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} / \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k}^T) / \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k} \quad (2.69g)$$

$$\mathbf{\Lambda}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_{2k}) \quad (2.69h)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{\Lambda}_k \quad (2.69i)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_k} = \text{cholupdate} \{ \mathbf{S}_{\mathbf{x}_k}^-, \mathbf{K}_k \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k}, -1 \} \quad (2.69j)$$

2.5.3 平方根单球 Unscented Kalman 滤波

通用形式的平方根 SSUKF (Square-Root SSUKF, SR-SSUKF) 算法如下:

(1) 初始化

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0] \quad (2.70a)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_0} = \text{chol} \left\{ \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T] \right\} \quad (2.70b)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{v}_0} = \text{chol} \{ \mathbf{P}_{\mathbf{v}_0} \} \quad \mathbf{S}_{\mathbf{n}_0} = \text{chol} \{ \mathbf{P}_{\mathbf{n}_0} \} \quad (2.70c)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0^a = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0^a] = [\hat{\mathbf{x}}_0^T, \mathbf{0}, \mathbf{0}]^T \quad (2.70d)$$

$$\mathbf{S}_0^a = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\mathbf{x}_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{\mathbf{v}_0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{\mathbf{n}_0} \end{bmatrix} \quad (2.70e)$$

(2) $k = 1, 2, \dots, \infty$,

(a) 构造 Sigma Points

$$\mathcal{X}_{k-1}^a(i) = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a + \mathbf{S}_{k-1}^a \mathcal{E}_i^{n_a}, \quad i = 0, 1, \dots, n_a + 1 \quad (2.71)$$

(b) 预测

$$\mathcal{X}_k^{x-}(i) = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}^x(i), \mathcal{X}_{k-1}^v(i), \mathbf{u}_{1_{k-1}}) \quad (2.72a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{n_a+1} w_i \mathcal{X}_k^{x-}(i) \quad (2.72b)$$

$$\mathbf{\Pi}_k = \begin{bmatrix} \sqrt{w_0} (\mathcal{X}_k^{x-}(0) - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \\ \sqrt{w_1} (\mathcal{X}_k^{x-}(1) - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \\ \vdots \\ \sqrt{w_{n_a+1}} (\mathcal{X}_k^{x-}(n_a + 1) - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \end{bmatrix}^T \quad (2.72c)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_k}^- = \text{qr} \{ \mathbf{\Pi}_k \} \quad (2.72d)$$

(c) 更新

$$\mathcal{Y}_k(i) = \mathbf{h}(\mathcal{X}_k^{x-}(i), \mathcal{X}_{k-1}^n(i), \mathbf{u}_{2_k}) \quad (2.73a)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{n_a+1} w_i \mathcal{Y}_k(i) \quad (2.73b)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{n_a+1} w_i (\mathcal{X}_k^{x-}(i) - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\mathcal{Y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \quad (2.73c)$$

$$\mathbf{\Pi}'_k = \begin{bmatrix} \sqrt{w_0} (\mathcal{Y}_k(0) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \\ \sqrt{w_1} (\mathcal{Y}_k(1) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \\ \vdots \\ \sqrt{w_{n_a+1}} (\mathcal{Y}_k(n_a + 1) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \end{bmatrix}^T \quad (2.73d)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{y}_k} = \text{qr} \{ \mathbf{\Pi}'_k \} \quad (2.73\text{e})$$

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} / \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k}^T) / \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k} \quad (2.73\text{f})$$

$$\mathbf{\Lambda}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0}, \mathbf{u}_{2_k}) \quad (2.73\text{g})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{\Lambda}_k \quad (2.73\text{h})$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_k} = \text{cholupdate} \{ \mathbf{S}_{\mathbf{x}_k}^-, \mathbf{K}_k \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k}, -1 \} \quad (2.73\text{i})$$

加性形式的 SR-SSUKF 算法如下:

(1) 初始化

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0] \quad (2.74\text{a})$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_0} = \text{chol} \left\{ \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T] \right\} \quad (2.74\text{b})$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{v}_0} = \text{chol} \{ \mathbf{P}_{\mathbf{v}_0} \} \quad (2.74\text{c})$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{n}_0} = \text{chol} \{ \mathbf{P}_{\mathbf{n}_0} \} \quad (2.74\text{d})$$

(2) $k = 1, 2, \dots, \infty$,

(a) 构造 Sigma Points

$$\mathcal{X}_{k-1}(i) = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{k-1}} \mathcal{E}_i^{n_x}, \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (2.75)$$

(b) 预测

$$\mathcal{X}_k^-(i) = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}(i), \mathbf{u}_{1_{k-1}}) \quad (2.76\text{a})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{n_x+1} w_i \mathcal{X}_k^-(i) \quad (2.76\text{b})$$

$$\mathbf{\Pi}_k = \begin{bmatrix} \sqrt{w_0} (\mathcal{X}_k^-(0) - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \\ \sqrt{w_1} (\mathcal{X}_k^-(1) - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \\ \vdots \\ \sqrt{w_{n_x+1}} (\mathcal{X}_k^-(n_x+1) - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \\ \mathbf{S}_{\mathbf{v}_{k-1}}^T \end{bmatrix}^T \quad (2.76\text{c})$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_k}^- = \text{qr} \{ \mathbf{\Pi}_k \} \quad (2.76\text{d})$$

(c) 重新构造 Sigma Points

$$\mathcal{X}_k^-(i) = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{S}_{\mathbf{x}_k}^- \mathcal{E}_i^{n_x}, \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (2.77)$$

(d) 更新

$$\mathcal{Y}_k(i) = \mathbf{h}(\mathcal{X}_k^-(i), \mathbf{u}_{2k}) \quad (2.78a)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{n_x+1} w_i \mathcal{Y}_k(i) \quad (2.78b)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{n_x+1} w_i (\mathcal{X}_k^-(i) - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\mathcal{Y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \quad (2.78c)$$

$$\mathbf{\Pi}'_k = \begin{bmatrix} \sqrt{w_0} (\mathcal{Y}_k(0) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \\ \sqrt{w_1} (\mathcal{Y}_k(1) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \\ \vdots \\ \sqrt{w_{n_x+1}} (\mathcal{Y}_k(n_x + 1) - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \\ \mathbf{S}_{\mathbf{n}_k}^T \end{bmatrix}^T \quad (2.78d)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{y}_k} = \text{qr} \{ \mathbf{\Pi}'_k \} \quad (2.78e)$$

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} / \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k}^T) / \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k} \quad (2.78f)$$

$$\mathbf{\Lambda}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_{2k}) \quad (2.78g)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{\Lambda}_k \quad (2.78h)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_k} = \text{cholupdate} \{ \mathbf{S}_{\mathbf{x}_k}^-, \mathbf{K}_k \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k}, -1 \} \quad (2.78i)$$

2.6 仿真比较

为了全面比较本章有关滤波算法的性能,下面通过航天器姿态估计 (Spacecraft Attitude Estimation, SAE) 这个具有代表性的例子来进行评估。SAE 具有较强的非线性,且已经出现在很多文献^[112–116]中。

所有测试都是在内存为 1 Gb 的 Intel® Core™2 Duo T7200 便携式计算机上完成,操作系统为 Windows XP®, 编程语言为 MATLAB®。SR-UKF 的参数 α, β 及 κ 分别设为 $\alpha = 1, \beta = 2, \kappa = 0$, 通过 DS 算法优化的 SR-SSUKF 自由权值参数为 $w_0 = 0.58$, GRP 相关的参数 h 与 l 分别为 $h = 1, l = 4$ 。在本例中,给出了 EKF、SR-UKF 及 SR-SSUKF 进行姿态估计的性能比较,所有结果曲线均表示相关变量 100 次 Monte-Carlo 仿真的平均值。

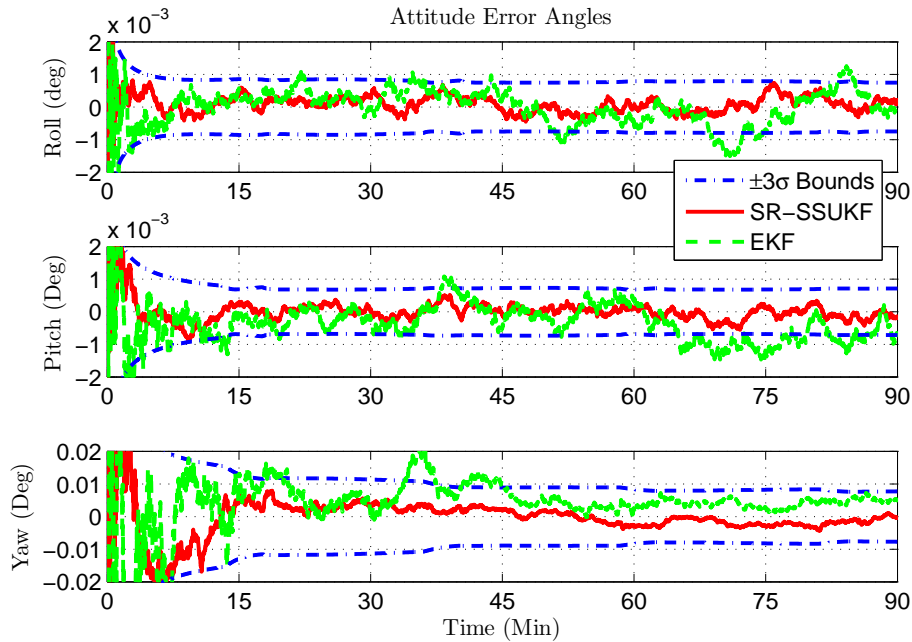
所有传感器测量的采样时间均为 1 s，仿真时间为 90 min，其它有关的仿真参数如表 2.1 所示。航天器姿态-矢量模型为 QUEST 测量模型^[97]，陀螺仪的

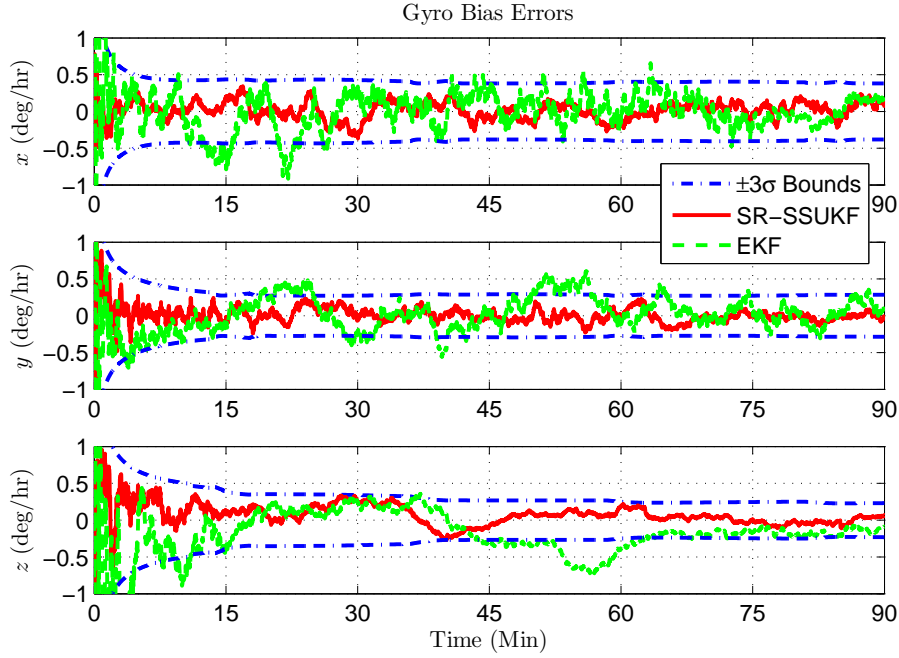
表 2.1: SAE 仿真参数

仿真参数	值	单位
陀螺仪噪声	$\sigma_v = 2.6875 \times 10^{-7}$	rad/s ^{1/2}
	$\sigma_u = 8.9289 \times 10^{-10}$	rad/s ^{3/2}
QUEST 模型	$\sigma_{av} = 0.02 \times \frac{\pi}{180}$	rad
初始偏置	$\beta_0 = 0.6 \times [1, 1, 1]^T$	deg/hr

测量数据由表 2.1 中的相关参数通过递归方程产生。初始姿态误差为 3 deg，陀螺仪偏置为零。初始协方差矩阵为对角型，其中三个误差姿态部分的 3σ 界均设为 5 deg，即 $((5/3) \times (\pi/180))^2 \text{ rad}^2$ ；陀螺仪偏置部分的 3σ 界均设为 2 deg/hr，即 $((2/3) \times (\pi/(180 \times 3600)))^2 (\text{rad/s})^2$ 。

SR-SSUKF 状态估计误差及其协方差的 $\pm 3\sigma$ 界如图 2.1-2.2 所示，为了便于比较，图中还给出了 EKF 的状态估计结果。很明显，SR-SSUKF 的状态估计误差


 图 2.1: 姿态误差及其 $\pm 3\sigma$ 界

图 2.2: 陀螺仪偏置误差及其 $\pm 3\sigma$ 界

在整个滤波过程中均位于相应的 $\pm 3\sigma$ 界内, 表明 SR-SSUKF 工作在正常状态。同时还可看出, 与 EKF 相比, SR-SSUKF 具有较低的估计误差及较快的收敛速率。

为了进行定量比较, 表 2.2 给出了 EKF、SR-UKF 及 SR-SSUKF 三种滤波算法在 100 次 Monte-Carlo 仿真中有关变量的统计特性。其中 TAE (Total Attitude Error) 表示 SAE 过程中的累积姿态误差, 定义为

$$J_{ae} \equiv \int_0^{90} \|\mathbf{ae}(t)\| dt \quad (2.79)$$

其中 $\mathbf{ae}(t)$ 表示姿态估计误差矢量。每次 Monte-Carlo 运行, 过程与量测噪声信号

表 2.2: EKF、SR-UKF 及 SR-SSUKF 在 SAE 中的性能比较

统计类型	EKF	SR-UKF	SR-SSUKF	单位
TAE (平均值)	40.0520	21.6972	20.3816	deg
TAE (方差)	3.1721	1.4055	1.1069	deg ²
RT (平均值)	2.0903	2.4628	2.3256	s

都重新产生, 以提高 Monte-Carlo 仿真的置信度。由此表可看出, SR-UKF 与 SR-SSUKF 的误差性能相当, 且都优于 EKF。更令人鼓舞的是, SS-SSUKF 的误差性

能最好, 这是因为 SR-SSUKF 的权值经过了优化的缘故。同时, 由表 2.2 中最后一行的运行时间 (Run Time, RT) 可知, SR-SSUKF 的计算量要小于 SR-UKF, 约减少 6%, 但要大于 EKF。

2.7 本章小结

本章在递归 Bayesian 估计的框架下对常用的滤波算法进行了描述, 重点研究了 Gaussian 分布假设下的 SPKF 算法及其平方根实现。在 UKF 的基础上, 将 SSUT 与 UKF 结合起来, 提出了 SSUKF 算法。此外, 提出了一种自动确定 SSUKF 权值的数值优化方法。与 SR-UKF 相比, 权值经过优化的 SR-SSUKF 具有更高的精度和更小的计算量, 而且对于状态向量维数越大的系统, 其计算量减少的就越多, 因而非常适合替代其它 SPKF 算法在实时滤波中应用。

[This page intentionally left blank.]

第 3 章 运动方程的张量描述

飞行器的运动方程分为运动学和动力学两部分，通常采用矢量 (Vectors) 来描述。矢量运动方程与坐标系的选取有关，对于不同的坐标系，具有不同的形式，不便于编程实现。Zipfel^[17] 采用张量 (Tensors) 来描述飞行器的运动方程并给出了张量的常用运算法则。张量运动方程具有一致性，在任何坐标系下都是成立的，便于理解和实现，本章采用张量来描述飞行器的运动方程。

3.1 基础知识

为了描述飞行器的运动，需要具备一些基础知识。本文采用两种基本的数学模型：点 (Points) 和框架 (Frames)。点是理想化的物理对象，代表三维空间中的某个位置。点不具有质量和体积，含有质量而无体积的点称为质点 (Particles)，它们之间是不同的，点通常用在运动学描述中，而质点则用在动力学描述中。框架是由三维空间中无限个连续点组成的点集，其具有由至少三个非共线点组成的子集，框架中各点之间的距离是不变的。框架不同于刚体 (Rigid Bodies)，但可以用来表示刚体的位置，刚体是由有限个相互静止的质点构成的质点集。框架有无数个，其中最著名的为参考框架 (Frames Of Reference)。点和框架都是理想化的物理对象，独立于观测者和坐标系，它们用来对飞行器的运动进行建模。坐标系 (Coordinate Systems) 是一纯数学概念，用来对张量运动方程进行数值求解，不要将其与参考框架等同起来，框架对物理对象进行建模，而坐标系仅包含坐标 (Coordinates)。一个框架有无数个坐标系与之相对应，统称为该框架的相关坐标系 (Associated Coordinate Systems)，多个框架的相关坐标系组成的集合称为容许坐标系 (Allowable Coordinate Systems)。

3.1.1 命名法

本文的命名法与 Zipfel^[17] 是一致的，易于理解和表达。标量用斜体小写字母表示，矢量用粗斜体小写字母，而二阶张量则用粗斜体大写字母表示。点和框架都用斜体大写字母表示，根据位置进行区分，位于下标的为点，位于上标的为框架 (有时也表示刚体)。若有两个下标或上标，阅读时都是从左往右读，用“相对于”连起来。坐标系用右方括号与上标的斜体大写字母表示，张量在坐标系下的坐标用方括号与上标的斜体大写字母来表示。保留字母 A 和 T 用于表示坐标变换矩阵和转置

操作。例如：点 U 相对于点 V 的位移矢量 (由 V 指向 U) 为 s_{UV} ；点 U 相对于框架 V 的速度矢量为 v_U^V ，加速度矢量为 a_U^V ；框架 U 相对于框架 V 的角速度矢量为 ω^{UV} ；刚体 (框架) U 相对于参考点 V 的转动惯量 (二阶张量) 为 I_V^U ； $[\diamond]^\bullet$ 表示张量 \diamond 在坐标系 $]^\bullet$ 下的坐标。

3.1.2 参考框架

框架是由相互正交的三个基向量及其交点 (即基点) 构成的，基点用来表示框架的位置，基向量表示框架的面向，符合右手定则。基向量在与框架相关的无数个坐标系下的坐标最简单的坐标系称为该框架的优先 (Preferred) 坐标系。

任何框架都可以作为参考框架，常用的参考框架有惯性框架、地球框架和体框架等，采用基点与基向量的方式来定义。

3.1.2.1 日心框架

日心框架的基点为太阳的质心，第一个基向量指向 2000 年前白羊座的位置，第三个基向量指向黄道面的法向，第二个基向量根据右手定则确定。日心框架在太阳系内为惯性框架，主要用来描述太阳系内飞行器星际间的运动，其基点和框架都用 H 表示。

3.1.2.2 地心惯性框架

地心惯性框架的基点为地球的质心，第一个基向量指向春分点，第三个基向量指向地球的地理北极，第二个基向量根据右手定则确定。地心惯性框架在地球引力作用范围内为惯性框架，主要用来描述近地飞行器的运动，其基点和框架都用 I 表示。

3.1.2.3 地心地固框架

地心地固框架的基点为地球的质心，第一个基向量指向本初子午线与地球赤道面的交点，第三个基向量指向地球的地理北极，第二个基向量根据右手定则确定。地心地固框架为非惯性框架，主要用来描述地表飞行器的运动，其基点和框架都用 E 表示。

3.1.2.4 体固框架

体固框架的基点为刚体的质心，三个基向量分别指向刚体的惯性主轴。体固框架为非惯性框架，主要用来描述刚体相对于惯性系的运动，其基点和框架都用 B 表示。

3.1.3 张量

张量有多种类型，本文仅考虑 Euclidean 三维空间的 Cartesian 张量，其在 Cartesian 度量下满足 Euclidean 空间的有限正交性。

3.1.3.1 定义

零阶张量就是标量，为没有方向的物理量，其坐标在任何坐标系下都相等，即跟坐标系无关。

一阶张量其实就是通常的矢量，为三个有序元素的聚集，其不同坐标系下的坐标满足

$$[\mathbf{x}]^U = A^{UV}[\mathbf{x}]^V \quad (3.1)$$

其中 A^{UV} 表示坐标系 $]^U$ 相对于坐标系 $]^V$ 的坐标变换矩阵 (也称为姿态矩阵或方向余弦矩阵)， $]^U$ 和 $]^V$ 为任何容许坐标系。一阶张量的坐标为 3×1 的列向量。为了方便起见，以后常用矢量来指代一阶张量。

二阶张量为九个有序元素的聚集，其不同坐标系下的坐标满足

$$[\mathbf{X}]^U = A^{UV}[\mathbf{X}]^V A^{VU} \quad (3.2)$$

其中 A^{UV} 表示坐标系 $]^U$ 相对于坐标系 $]^V$ 的坐标变换矩阵， $]^U$ 和 $]^V$ 为任何容许坐标系。二阶张量的坐标为 3×3 的矩阵。

3.1.3.2 标量积

矢量 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 的标量积为标量，定义为

$$\begin{aligned} \text{scalar} &\equiv \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.3)$$

矢量 \mathbf{x} 的模， $\|\mathbf{x}\|$ ，定义为

$$\|\mathbf{x}\| \equiv \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.4)$$

3.1.3.3 矢量积

矢量 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 的矢量积为矢量 \mathbf{z} , 定义为

$$\begin{aligned}\mathbf{z} &\equiv \mathbf{x} \times \mathbf{y} \\ &= \mathbf{X}\mathbf{y}\end{aligned}\tag{3.5}$$

其中 \mathbf{X} 为矢量 \mathbf{x} 的斜对称 (二阶) 张量, 对于任何容许坐标系 $]^U$, 有

$$[\mathbf{x}]^U = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [\mathbf{X}]^U = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}^U \tag{3.6}$$

矢量积具有如下性质:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \times \mathbf{y} \times \mathbf{z} &= \mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) \\ &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z} \\ &= \mathbf{X}\mathbf{Y}\mathbf{z}\end{aligned}\tag{3.7a}$$

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X})\mathbf{z} \tag{3.7b}$$

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \tag{3.7c}$$

其中 \mathbf{Y} 为矢量 \mathbf{y} 的斜对称 (二阶) 张量。

3.1.3.4 并矢

矢量 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 的并矢为 (二阶) 张量 \mathbf{Z} , 定义为

$$\mathbf{Z} \equiv \mathbf{x}\mathbf{y}^T \tag{3.8}$$

3.1.3.5 旋转时间导数

矢量 \mathbf{x} 相对于任何框架 U 的旋转时间导数 (Rotational Time Derivative), $\mathbf{D}^U\mathbf{x}$, 在任何容许坐标系 $]^V$ 下的坐标定义为

$$\begin{aligned}[\mathbf{D}^U\mathbf{x}]^V &\equiv \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}([\mathbf{x}]^V) + A^{VU} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}(A^{UV})[\mathbf{x}]^V \\ &\equiv [\dot{\mathbf{x}}]^V + A^{VU} \dot{A}^{UV}[\mathbf{x}]^V\end{aligned}\tag{3.9}$$

其中右边 A^{VU} 中的坐标系 $]^U$ 必须与框架 U 相关。矢量的旋转时间导数仍为矢量。

(二阶) 张量 \mathbf{X} 相对于任何框架 U 的旋转时间导数, $D^U \mathbf{X}$, 在任何容许坐标系 $]^V$ 下的坐标定义为

$$\begin{aligned} [D^U \mathbf{X}]^V &\equiv \frac{d}{dt}([X]^V) + A^{VU} \frac{d}{dt}(A^{UV})[X]^V + [X]^V \frac{d}{dt}(A^{VU}) A^{UV} \\ &\equiv [\dot{\mathbf{X}}]^V + A^{VU} \dot{A}^{UV} [X]^V + [X]^V \dot{A}^{VU} A^{UV} \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中右边 A^{VU} 中的坐标系 $]^U$ 必须与框架 U 相关。(二阶) 张量的旋转时间导数仍为 (二阶) 张量。

若矢量 \mathbf{x} 的斜对称 (二阶) 张量为 \mathbf{X} , 则 \mathbf{x} 相对于任何框架 U 的旋转时间导数, $D^U \mathbf{x}$, 的斜对称 (二阶) 张量为 $D^U \mathbf{X}$ 。

旋转时间导数具有如下性质:

$$D^U(\ell \mathbf{x}) = \dot{\ell} \mathbf{x} + \ell D^U \mathbf{x} \quad (3.11a)$$

$$D^U(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = D^U \mathbf{x} + D^U \mathbf{y} \quad (3.11b)$$

$$\begin{aligned} D^U(\mathbf{X} \mathbf{y}) &= (D^U \mathbf{X}) \mathbf{y} + \mathbf{X} D^U \mathbf{y} \\ &= D^U \mathbf{X} \mathbf{y} + \mathbf{X} D^U \mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.11c)$$

$$D^V \mathbf{x} = D^U \mathbf{x} + \boldsymbol{\Omega}^{UV} \mathbf{x} \quad (3.11d)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot D^V \mathbf{x} &= \mathbf{x} \cdot (D^U \mathbf{x} + \boldsymbol{\Omega}^{UV} \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x} \cdot D^U \mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\Omega}^{UV} \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x} \cdot D^U \mathbf{x} \\ &= \|\mathbf{x}\| \|\dot{\mathbf{x}}\| \end{aligned} \quad (3.11e)$$

$$\begin{aligned} D^V \mathbf{X} &= D^U \mathbf{X} + \boldsymbol{\Omega}^{UV} \mathbf{X} + \mathbf{X} \boldsymbol{\Omega}^{VU} \\ &= D^U \mathbf{X} + \boldsymbol{\Omega}^{UV} \mathbf{X} - \mathbf{X} \boldsymbol{\Omega}^{UV} \end{aligned} \quad (3.11f)$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}^{UV}$ 表示框架 U 相对于框架 V 的角速度, ω^{UV} , 的斜对称 (二阶) 张量。框架的 Euler 变换即为式 (3.11d) 与 (3.11f)。由式 (3.7b)、(3.11d) 及 (3.11f) 可知, $D^V \mathbf{X}$ 为 $D^V \mathbf{x}$ 的斜对称 (二阶) 张量。

3.2 运动学

运动学主要包括平动和转动两个部分。位移、速度等属于平动, 而姿态、角速度等则属于转动。

3.2.1 平动

3.2.1.1 位移

位移为矢量，用来描述空间两点之间的位置关系，点 U 相对于点 V 的位移用 s_{UV} 表示。

s_{UV} 具有如下性质：

$$s_{UV} = -s_{VU} \quad (3.12a)$$

$$\begin{aligned} s_{UV} &= s_{UW} + s_{WV} \\ &= s_{WV} + s_{UW} \end{aligned} \quad (3.12b)$$

3.2.1.2 速度

点 U 相对于框架 V 的速度， v_U^V ，定义为

$$v_U^V \equiv D^V s_{UV} \quad (3.13)$$

其中 s_{UV} 中的 V 表示框架 V 内的任何一点。

v_U^V 具有如下性质：

$$\begin{aligned} v_U^V &= D^V(s_{UW} + s_{WV}) \\ &= D^V s_{UW} + D^V s_{WV} \\ &= D^W s_{UW} + \Omega^{WV} s_{UW} + v_W^V \\ &= v_U^W + \Omega^{WV} s_{UW} + v_W^V \end{aligned} \quad (3.14)$$

其中 s_{UW} 中的 W 表示框架 W 内的任何一点。

3.2.1.3 加速度

点 U 相对于框架 V 的加速度， a_U^V ，定义为

$$\begin{aligned} a_U^V &\equiv D^V v_U^V \\ &= D^V D^V s_{UV} \end{aligned} \quad (3.15)$$

其中 s_{UV} 中的 V 表示框架 V 内的任何一点。

\mathbf{a}_U^V 具有如下性质:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_U^V &= \mathbf{D}^V(\mathbf{D}^V \mathbf{s}_{UW} + \mathbf{D}^V \mathbf{s}_{WV}) \\
 &= \mathbf{D}^V \mathbf{D}^V \mathbf{s}_{UW} + \mathbf{D}^V \mathbf{D}^V \mathbf{s}_{WV} \\
 &= \mathbf{D}^W \mathbf{D}^V \mathbf{s}_{UW} + \Omega^{WV} \mathbf{D}^V \mathbf{s}_{UW} + \mathbf{a}_W^V \\
 &= \mathbf{D}^W(\mathbf{D}^W \mathbf{s}_{UW} + \Omega^{WV} \mathbf{s}_{UW}) + \Omega^{WV}(\mathbf{D}^W \mathbf{s}_{UW} + \Omega^{WV} \mathbf{s}_{UW}) + \mathbf{a}_W^V \\
 &= \mathbf{D}^W \mathbf{D}^W \mathbf{s}_{UW} + \mathbf{D}^W \Omega^{WV} \mathbf{s}_{UW} + 2\Omega^{WV} \mathbf{D}^W \mathbf{s}_{UW} + \Omega^{WV} \Omega^{WV} \mathbf{s}_{UW} + \mathbf{a}_W^V \\
 &= \mathbf{a}_U^W + \mathbf{D}^W \Omega^{WV} \mathbf{s}_{UW} + 2\Omega^{WV} \mathbf{v}_U^W + (\Omega^{WV})^2 \mathbf{s}_{UW} + \mathbf{a}_W^V
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

其中 \mathbf{s}_{UW} 中的 W 表示框架 W 内的任何一点。

3.2.2 转动

3.2.2.1 旋转张量

框架 U 相对于框架 V 的旋转张量 (Rotation Tensor), \mathbf{R}^{UV} , 表示两个框架之间的面向关系, 用来将 V 的基向量转换成 U 的基向量。

\mathbf{R}^{UV} 为 3×3 的 (二阶) 正交张量, 具有如下性质:

$$\mathbf{R}^{UV} = (\mathbf{R}^{VU})^T \tag{3.17a}$$

$$\mathbf{R}^{UV} = \mathbf{R}^{UW} \mathbf{R}^{WV} \tag{3.17b}$$

$$[\mathbf{R}^{UV}]^U = [\mathbf{R}^{UV}]^V = \mathbf{A}^{VU} \tag{3.17c}$$

其中 \mathbf{A}^{VU} 中的 $]^V$ 和 $]^U$ 分别表示框架 V 和 U 的优先坐标系。

根据 Euler 定理^[118], 框架 U 与 V 之间的任意转动都可以通过绕旋转轴单位矢量, \mathbf{e}^{UV} , 转过角度 ϑ 来实现, 即

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}^{UV} &= \cos \vartheta \mathbf{I}_{3 \times 3} + (1 - \cos \vartheta) \mathbf{e}^{UV} (\mathbf{e}^{UV})^T + \sin \vartheta \mathbf{E}^{UV} \\
 &= \mathbf{I}_{3 \times 3} + (1 - \cos \vartheta) (\mathbf{E}^{UV})^2 + \sin \vartheta \mathbf{E}^{UV}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

其中 $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 表示 3×3 的 (二阶) 单位张量, \mathbf{E}^{UV} 为 \mathbf{e}^{UV} 的斜对称 (二阶) 张量。

ϑ 、 \mathbf{e}^{UV} 和 $\boldsymbol{\omega}^{UV}$ 满足

$$\vartheta = \mathbf{e}^{UV} \cdot \boldsymbol{\omega}^{UV} \tag{3.19a}$$

$$\mathbf{D}^U \mathbf{e}^{UV} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^{UV} \boldsymbol{\omega}^{UV} - \frac{1}{2} \cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right) (\mathbf{E}^{UV})^2 \boldsymbol{\omega}^{UV} \tag{3.19b}$$

$$\omega^{UV} = \dot{\vartheta} e^{UV} + \sin \vartheta D^U e^{UV} - (1 - \cos \vartheta) E^{UV} D^U e^{UV} \quad (3.19c)$$

$$[e^{UV}]^U = [e^{UV}]^V \quad (3.19d)$$

其中坐标系 $]^U$ 和 $]^V$ 分别为框架 U 和 V 的优先坐标系。

3.2.2.2 角速度

框架 U 相对于 V 的角速度 (二阶) 张量, Ω^{UV} , 定义为

$$\begin{aligned} \Omega^{UV} &\equiv D^V(R^{UV})R^{VU} \\ &= R^{VU}D^U(R^{UV}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

ω^{UV} 和 Ω^{UV} 具有如下性质:

$$\omega^{UV} = -\omega^{VU} \quad (3.21a)$$

$$\begin{aligned} \Omega^{UV} &= -\Omega^{VU} \\ &= (\Omega^{VU})^T \end{aligned} \quad (3.21b)$$

$$\omega^{UV} = \omega^{UW} + \omega^{WV} \quad (3.21c)$$

$$\Omega^{UV} = \Omega^{UW} + \Omega^{WV} \quad (3.21d)$$

$$D^U \omega^{UV} = D^V \omega^{UV} \quad (3.21e)$$

$$D^U \Omega^{UV} = D^V \Omega^{UV} \quad (3.21f)$$

3.2.2.3 坐标变换矩阵

坐标系 $]^U$ 相对于 $]^V$ 的坐标变换矩阵, A^{UV} , 用来表示张量在不同坐标系下的坐标关系。

A^{UV} 为单位正交矩阵, 具有如下性质:

$$A^{UV} = (A^{VU})^T \quad (3.22a)$$

$$A^{UV} = A^{UW}A^{WV} \quad (3.22b)$$

A^{UV} 的微分方程为

$$\begin{aligned} \dot{A}^{UV} &= -[\Omega^{UV}]^U A^{UV} \\ &= A^{UV} [\Omega^{VU}]^V \end{aligned} \quad (3.23)$$

其中 A^{UV} 中的坐标系 $]^U$ 和 $]^V$ 分别与框架 U 和 V 相关。

3.2.2.4 Euler 角

坐标系 $]^U$ 与 $]^V$ 之间的坐标变换矩阵, A^{UV} , 也可以通过将 $]^V$ 绕其轴按 3-2-1 的顺序连续转动三个 Euler 角 (ψ 、 θ 和 ϕ) 来表示, 即

$$\begin{aligned}
 A^{UV} &= A_1^{UW}(\phi) A_2^{WW}(\theta) A_3^{WV}(\psi) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

其中 ψ 、 θ 和 ϕ 分别为偏航角、俯仰角和滚转角, $A_3^{WV}(\psi)$ 表示绕 $]^V$ 的第三个轴转动 ψ 而得到的坐标变换矩阵, 其余依此类推。

Euler 角微分方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

其中 $[p, q, r]^T = [\boldsymbol{\omega}^{UV}]^U$ 。由式 (3.25) 可知, Euler 角微分方程存在奇异性。

3.2.2.5 广义运动矢量

框架 U 相对于 V 的广义运动矢量 (Generalized Kinematic Vector, GKV), \boldsymbol{g}^{UV} , 定义为^[119]

$$\boldsymbol{g}^{UV} \equiv f(\vartheta) \boldsymbol{e}^{UV} \tag{3.26}$$

其中 $f(\vartheta)$ 表示 ϑ 的函数。

\boldsymbol{g}^{UV} 相对于框架 U 的旋转时间导数, $\boldsymbol{D}^U \boldsymbol{g}^{UV}$, 为

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{D}^U \boldsymbol{g}^{UV} &= f'_{\vartheta}(\vartheta) \dot{\vartheta} \boldsymbol{e}^{UV} + f(\vartheta) \boldsymbol{D}^U \boldsymbol{e}^{UV} \\
 &= f'_{\vartheta}(\vartheta) \boldsymbol{\omega}^{UV} + \frac{1}{2} \boldsymbol{G}^{UV} \boldsymbol{\omega}^{UV} + \frac{1}{f^2(\vartheta)} \left(f'_{\vartheta}(\vartheta) - \frac{1}{2} f(\vartheta) \cot \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \right) (\boldsymbol{G}^{UV})^2 \boldsymbol{\omega}^{UV}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

其中 \mathbf{G}^{UV} 为 \mathbf{g}^{UV} 的斜对称 (二阶) 张量, 上述推导应用了式 (3.19)。

根据式 (3.19) 与 (3.26), ω^{UV} 满足

$$\begin{aligned}\omega^{UV} &= \left(\frac{\dot{\vartheta}}{f(\vartheta)} - \frac{f'_{\vartheta}(\vartheta)\dot{\vartheta} \sin \vartheta}{f^2(\vartheta)} \right) \mathbf{g}^{UV} + \left(\frac{\sin \vartheta}{f(\vartheta)} \right) \mathbf{D}^U \mathbf{g}^{UV} - \left(\frac{1 - \cos \vartheta}{f^2(\vartheta)} \right) \mathbf{G}^{UV} \mathbf{D}^U \mathbf{g}^{UV} \\ &= \left(\frac{1}{f'_{\vartheta}(\vartheta)} \right) \mathbf{D}^U \mathbf{g}^{UV} - \left(\frac{1 - \cos \vartheta}{f^2(\vartheta)} \right) \mathbf{G}^{UV} \mathbf{D}^U \mathbf{g}^{UV} + \left(\frac{1}{f^2(\vartheta)} \left(\frac{1}{f'_{\vartheta}(\vartheta)} - \frac{\sin \vartheta}{f(\vartheta)} \right) \right) (\mathbf{G}^{UV})^2 \mathbf{D}^U \mathbf{g}^{UV}\end{aligned}\quad (3.28)$$

框架 U 相对于 V 的旋转矢量 (Rotation Vector), ϕ^{UV} , 定义为

$$\phi^{UV} \equiv \vartheta \mathbf{e}^{UV} \quad (3.29)$$

由此可见, 旋转矢量是一种特殊的广义运动矢量 (即 $f(\vartheta) = \vartheta$)。

3.2.2.6 旋转四元数

框架 U 相对于 V 的旋转四元数 (Rotation Quaternion, 简称四元数), \mathbf{q}_q^{UV} , 定义为

$$\mathbf{q}_q^{UV} \equiv \begin{bmatrix} \psi^{UV} \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

其中

$$\psi^{UV} = \sin(\vartheta/2) \mathbf{e}^{UV} \quad (3.31a)$$

$$q_4 = \cos(\vartheta/2) \quad (3.31b)$$

\mathbf{q}_q^{UV} 的共轭四元数, $(\mathbf{q}_q^{UV})^*$, 定义为

$$(\mathbf{q}_q^{UV})^* \equiv \begin{bmatrix} -\psi^{UV} \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

旋转四元数的乘积运算定义如下

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_q^{UV} \otimes \mathbf{q}_q^{\check{}} &\equiv \begin{bmatrix} q_4 \psi^{\check{}} + q_4^{\check{}} \psi^{UV} - \psi^{UV} \times \psi^{\check{}} \\ q_4 q_4^{\check{}} - \psi^{UV} \cdot \psi^{\check{}} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Q}_q^{UV} \mathbf{q}_q^{\check{}}\end{aligned}\quad (3.33)$$

其中四元数乘积张量, Q_q^{UV} , 为 4×4 的 (二阶) 正交张量, 定义为

$$Q_q^{UV} \equiv Q_q(q_q^{UV}) \equiv \begin{bmatrix} q_4 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \Psi^{UV} & \psi^{UV} \\ -(\psi^{UV})^T & q_4 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

其中 Ψ^{UV} 为 ψ^{UV} 的斜对称 (二阶) 张量。

由式 (3.18) 可得

$$\mathbf{R}^{UV} \equiv \mathbf{R}(q_q^{UV}) = (q_4^2 - \|\psi^{UV}\|^2) \mathbf{I}_{3 \times 3} + 2\psi^{UV}(\psi^{UV})^T + 2q_4 \Psi^{UV} \quad (3.35)$$

q_q^{UV} 相对于框架 U 的旋转时间导数, $D^U q_q^{UV}$, 为

$$D^U q_q^{UV} = \frac{1}{2} \omega_q^{UV} \otimes q_q^{UV} \quad (3.36)$$

其中框架 U 相对于 V 的角速度四元数, ω_q^{UV} , 定义为

$$\omega_q^{UV} \equiv \begin{bmatrix} \omega^{UV} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

q_q^{UV} 具有如下性质:

$$\|q_q^{UV}\| = 1 \quad (3.38a)$$

$$q_q^{UV} \otimes (q_q^{UV})^* = (q_q^{UV})^* \otimes q_q^{UV} = \mathbf{1}_q \quad (3.38b)$$

$$q_q^{UV} = (q_q^{VU})^* \quad (3.38c)$$

$$q_q^{UV} = q_q^{UW} \otimes q_q^{WV} \quad (3.38d)$$

$$[q_q^{UV}]^U = [q_q^{UV}]^V \quad (3.38e)$$

$$[x_q]^U = [q_q^{UV}]^U \otimes [x_q]^V \otimes [(q_q^{UV})^*]^U \quad (3.38f)$$

其中 $\mathbf{1}_q$ 为单位四元数, 坐标系 $]^U$ 和 $]^V$ 分别为框架 U 和 V 的优先坐标系, 矢量 x 的增量四元数, x_q , 定义为

$$x_q \equiv \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

3.2.2.7 旋转张量四元数

与 R^{UV} 类似, 框架 U 相对于 V 的旋转张量四元数 (Rotation Tensor Quaternion), R_q^{UV} , 用来将 V 的基四元数转换成 U 的基四元数, 可以表示为

$$R_q^{UV} \equiv R_q(q_q^{UV}) = \begin{bmatrix} q_4 \mathbf{I}_{3 \times 3} + \boldsymbol{\Psi}^{UV} & \boldsymbol{\psi}^{UV} \\ -(\boldsymbol{\psi}^{UV})^T & q_4 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

R_q^{UV} 为 4×4 的 (二阶) 正交张量, 具有如下性质:

$$R_q^{UV} = (R_q^{VU})^T \quad (3.41a)$$

$$R_q^{UV} = R_q^{UW} R_q^{WV} \quad (3.41b)$$

$$[R_q^{UV}]^U = [R_q^{UV}]^V = A_q^{VU} \quad (3.41c)$$

其中四元数坐标变换矩阵, A_q^{VU} , 中的 $]^V$ 和 $]^U$ 分别表示框架 V 和 U 的优先坐标系。

3.2.2.8 角速度四元数张量

与 Ω^{UV} 的定义类似, 框架 U 相对于 V 的角速度四元数张量 (Angular Velocity Quaternion Tensor), Ω_q^{UV} , 定义为

$$\begin{aligned} \Omega_q^{UV} &\equiv 2D^V(R_q^{UV})R_q^{VU} \\ &= 2R_q^{VU}D^U(R_q^{UV}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

且具有如下性质:

$$\begin{aligned} \Omega_q^{UV} &\equiv \Omega_q^{UV}(\omega_q^{UV}) \\ &= \begin{bmatrix} -\Omega_q^{UV} & \omega_q^{UV} \\ -(\omega_q^{UV})^T & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.43a)$$

$$\omega_q^{UV} \otimes \check{q}_q = \Omega_q^{UV} \check{q}_q \quad (3.43b)$$

$$\begin{aligned} \Omega_q^{UV} &= -\Omega_q^{VU} \\ &= (\Omega_q^{VU})^T \end{aligned} \quad (3.43c)$$

$$D^U \omega_q^{UV} = D^V \omega_q^{UV} \quad (3.43d)$$

$$D^U \Omega_q^{UV} = D^V \Omega_q^{UV} \quad (3.43e)$$

与 Ω_q^{UV} 相对应, 还可定义

$$\Xi_q^{UV} \equiv \Xi_q^{UV}(\omega_q^{UV}) \equiv \begin{bmatrix} \Omega_q^{UV} & \omega_q^{UV} \\ -(\omega_q^{UV})^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

满足

$$\check{q}_q \otimes \omega_q^{UV} = \Xi_q^{UV} \check{q}_q \quad (3.45)$$

由式 (3.33) 与 (3.43b) 可知, Ω_q^{UV} 为角速度四元数 ω_q^{UV} 的乘积张量, 因此式 (3.36) 变为

$$\begin{aligned} D^U q_q^{UV} &= \frac{1}{2} \omega_q^{UV} \otimes q_q^{UV} \\ &= \frac{1}{2} \Omega_q^{UV} q_q^{UV} \end{aligned} \quad (3.46)$$

3.3 动力学

与运动学类似, 动力学也可分为平动和转动来描述。

3.3.1 平动

平动考虑的是质心在外力作用下的变化。

3.3.1.1 动量

质点 \mathbf{m}_i 相对于框架 U 的动量, \mathbf{p}_i^U , 为矢量, 定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i^U &\equiv m_i \mathbf{v}_i^U \\ &= m_i D^U \mathbf{s}_{iU} \end{aligned} \quad (3.47)$$

其中 m_i 表示质点 \mathbf{m}_i 的质量。

多个质点组成的质点系 B 相对于框架 U 的动量为所有质点的动量和, 可用其质心的动量, \mathbf{p}_B^U , 来表示, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_B^U &\equiv \sum_i \mathbf{p}_i^U \\ &= \sum_i m_i D^U \mathbf{s}_{iU} \\ &= \sum_i m_i D^U \mathbf{s}_{iB} + \sum_i m_i D^U \mathbf{s}_{BU} \\ &= D^U \left(\sum_i m_i \mathbf{s}_{iB} \right) + m^B \mathbf{v}_B^U \\ &= m^B \mathbf{v}_B^U \end{aligned} \quad (3.48)$$

其中点 B 为质点系的质心, m^B 表示质点系的总质量。

同理, 多个质量体 B_k 组成的质体系 C 相对于框架 U 的动量, 也可用其质心的动量, \mathbf{p}_C^U , 来表示, 即

$$\mathbf{p}_C^U = m^C \mathbf{v}_C^U \quad (3.49)$$

其中 $m^C = \sum_k m^{B_k}$, 点 C 为质体系的质心。

3.3.1.2 Newton 第二定律

质点 \mathbf{m}_i 相对于惯性框架 I 的动量 \mathbf{p}_i^I 对于惯性框架的旋转时间导数, $D^I \mathbf{p}_i^I$, 等于作用在质点上的力 \mathbf{f}_i , 即

$$D^I \mathbf{p}_i^I = \mathbf{f}_i \quad (3.50)$$

对于质点系 B , 有

$$\begin{aligned} \sum_i D^I \mathbf{p}_i^I &= \sum_i \mathbf{f}_i \Leftrightarrow \\ D^I \left(\sum_i \mathbf{p}_i^I \right) &= \mathbf{f}_B \Leftrightarrow \\ D^I \left(m^B \mathbf{v}_B^I \right) &= \mathbf{f}_B \Leftrightarrow \\ m^B \mathbf{a}_B^I &= \mathbf{f}_B \end{aligned} \quad (3.51)$$

其中 \mathbf{f}_B 表示作用在质点系 B 上的合外力, 其作用点为质心 B 。

3.3.2 转动

转动考虑刚体在外力矩作用下的角速度变化。

3.3.2.1 转动惯量

质点系 B 相对于任意点 V 的转动惯量, \mathbf{I}_V^B , 为实对称 (二阶) 张量, 定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_V^B &\equiv \sum_i m_i \left((\mathbf{s}_{iV})^T \mathbf{s}_{iV} \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{s}_{iV} (\mathbf{s}_{iV})^T \right) \\ &\equiv \sum_i m_i (\mathbf{S}_{iV})^T \mathbf{S}_{iV} \end{aligned} \quad (3.52)$$

其中 \mathbf{S}_{iV} 为 \mathbf{s}_{iV} 的斜对称 (二阶) 张量。

转动惯量 \mathbf{I}_V^B 对于单位矢量 \mathbf{x} 的轴惯量, I_{Vx}^B , 为标量, 定义为

$$I_{Vx}^B \equiv \mathbf{x}^T \mathbf{I}_V^B \mathbf{x} \quad (3.53)$$

转动惯量的点位移公式为

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_V^B &= \mathbf{I}_B^B + m^B \left((\mathbf{s}_{BV})^T \mathbf{s}_{BV} \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{s}_{BV} (\mathbf{s}_{BV})^T \right) \\ &= \mathbf{I}_B^B + m^B (\mathbf{S}_{BV})^T \mathbf{S}_{BV}\end{aligned}\quad (3.54)$$

其中点 B 表示质点系 B 的质心。

多个质量体 B_k 组成的质体系 C 相对于点 V 的转动惯量, \mathbf{I}_V^C , 为所有质量体的转动惯量之和, 即

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_V^C &= \sum_k \mathbf{I}_V^{B_k} \\ &= \sum_k \left(\mathbf{I}_{B_k}^{B_k} + m^{B_k} \left((\mathbf{s}_{B_k V})^T \mathbf{s}_{B_k V} \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{s}_{B_k V} (\mathbf{s}_{B_k V})^T \right) \right) \\ &= \sum_k \left(\mathbf{I}_{B_k}^{B_k} + m^{B_k} (\mathbf{S}_{B_k V})^T \mathbf{S}_{B_k V} \right)\end{aligned}\quad (3.55)$$

3.3.2.2 角动量

质点 \mathbf{m}_i 相对于框架 U 及点 V 的角动量, \mathbf{l}_{iV}^U , 为矢量, 定义为

$$\mathbf{l}_{iV}^U \equiv m_i \mathbf{S}_{iV} \mathbf{v}_i^U \quad (3.56)$$

质点系 B 相对于框架 U 及点 V 的角动量, \mathbf{l}_V^{BU} , 为所有质点的角动量之和, 即

$$\begin{aligned}\mathbf{l}_V^{BU} &= \sum_i \mathbf{l}_{iV}^U \\ &= \sum_i m_i \mathbf{S}_{iV} \mathbf{v}_i^U \\ &= \sum_i m_i (\mathbf{S}_{iB} + \mathbf{S}_{BV}) (\mathbf{D}^U \mathbf{s}_{iB} + \mathbf{D}^U \mathbf{s}_{BU}) \\ &= \sum_i m_i \mathbf{S}_{iB} \mathbf{D}^U \mathbf{s}_{iB} + m^B \mathbf{S}_{BV} \mathbf{v}_B^U\end{aligned}\quad (3.57)$$

对于质点系 B 为刚体的情况, 式 (3.57) 变为

$$\begin{aligned}\mathbf{l}_V^{BU} &= \sum_i m_i \mathbf{S}_{iB} (\mathbf{D}^B \mathbf{s}_{iB} + \boldsymbol{\Omega}^{BU} \mathbf{s}_{iB}) + m^B \mathbf{S}_{BV} \mathbf{v}_B^U \\ &= \sum_i m_i \mathbf{S}_{iB} \boldsymbol{\Omega}^{BU} \mathbf{s}_{iB} + m^B \mathbf{S}_{BV} \mathbf{v}_B^U \\ &= \mathbf{I}_B^B \boldsymbol{\omega}^{BU} + m^B \mathbf{S}_{BV} \mathbf{v}_B^U\end{aligned}\quad (3.58)$$

多个刚体 B_k 组成的刚体系 C 相对于框架 U 及点 V 的角动量, l_V^{CU} , 为所有刚体的角动量之和, 即

$$\begin{aligned} l_V^{CU} &= \sum_k l_V^{B_k U} \\ &= \sum_k \left(I_{B_k}^{B_k} \omega^{B_k U} \right) + \sum_k m^{B_k} (\mathbf{S}_{B_k C} + \mathbf{S}_{CV}) (\mathbf{D}^U \mathbf{s}_{B_k C} + \mathbf{D}^U \mathbf{s}_{CU}) \\ &= \sum_k \left(I_{B_k}^{B_k} \omega^{B_k U} \right) + \sum_k m^{B_k} \mathbf{S}_{B_k C} \mathbf{D}^U \mathbf{s}_{B_k C} + m^C \mathbf{S}_{CV} \mathbf{v}_C^U \end{aligned} \quad (3.59)$$

对于质心 B_k 相互固定的情况, 式 (3.59) 变为

$$\begin{aligned} l_V^{CU} &= \sum_k \left(I_{B_k}^{B_k} \omega^{B_k U} \right) + \sum_k m^{B_k} \mathbf{S}_{B_k C} (\mathbf{D}^C \mathbf{s}_{B_k C} + \boldsymbol{\Omega}^{CU} \mathbf{s}_{B_k C}) + m^C \mathbf{S}_{CV} \mathbf{v}_C^U \\ &= \sum_k \left(I_{B_k}^{B_k} \omega^{B_k C} \right) + \left(\sum_k \left(I_{B_k}^{B_k} + m^{B_k} (\mathbf{S}_{B_k C})^T \mathbf{S}_{B_k C} \right) \right) \omega^{CU} + m^C \mathbf{S}_{CV} \mathbf{v}_C^U \\ &= \sum_k \left(I_{B_k}^{B_k} \omega^{B_k C} \right) + \mathbf{I}_C^C \omega^{CU} + m^C \mathbf{S}_{CV} \mathbf{v}_C^U \end{aligned} \quad (3.60)$$

3.3.2.3 Euler 定律

质点 \mathbf{m}_i 相对于惯性框架 I 及点 V 的角动量 l_{iV}^I 对于惯性框架的旋转时间导数, $D^I l_{iV}^I$, 等于作用在质点上的力矩 \mathbf{m}_{iV} , 即

$$\begin{aligned} D^I l_{iV}^I &= \mathbf{m}_{iV} \\ &= \mathbf{S}_{iV} \mathbf{f}_i \end{aligned} \quad (3.61)$$

其中 \mathbf{f}_i 表示作用在质点上的力。

对于质点系 B , 有

$$\sum_i D^I l_{iV}^I = \sum_i \mathbf{m}_{iV} \quad (3.62)$$

式 (3.62) 的左边可化简为

$$\begin{aligned} \sum_i D^I l_{iV}^I &= D^I \left(\sum_i m_i \mathbf{S}_{iV} D^I \mathbf{s}_{iI} \right) \\ &= D^I \left(\sum_i m_i \mathbf{S}_{iB} D^I \mathbf{s}_{iB} \right) + D^I \left(m^B \mathbf{S}_{BV} \mathbf{v}_B^I \right) \\ &= D^I \left(\sum_i m_i \mathbf{S}_{iB} D^I \mathbf{s}_{iB} \right) + m^B D^I \mathbf{S}_{BV} \mathbf{v}_B^I + \mathbf{S}_{BV} \mathbf{f}_B \end{aligned} \quad (3.63)$$

式 (3.62) 的右边可化简为

$$\begin{aligned}
 \sum_i \mathbf{m}_{iV} &= \sum_i \mathbf{S}_{iV} \mathbf{f}_i \\
 &= \sum_i \mathbf{S}_{iB} \mathbf{f}_i + \mathbf{S}_{BV} \left(\sum_i \mathbf{f}_i \right) \\
 &= \mathbf{m}_B + \mathbf{S}_{BV} \mathbf{f}_B
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

其中 \mathbf{m}_B 表示质点系 B 所受相对于其质心 B 的合外力矩。所以, 式 (3.62) 变为

$$\mathbf{D}^I \left(\sum_i m_i \mathbf{S}_{iB} \mathbf{D}^I \mathbf{s}_{iB} \right) + m^B \mathbf{D}^I \mathbf{S}_{BV} \mathbf{v}_B^I = \mathbf{m}_B \tag{3.65}$$

若点 V 取质心 B 或惯性框架内的任意点 I , 则式 (3.65) 变为

$$\mathbf{D}^I \left(\sum_i m_i \mathbf{S}_{iB} \mathbf{D}^I \mathbf{s}_{iB} \right) = \mathbf{m}_B \tag{3.66}$$

对于质点系 B 为刚体的情况, 式 (3.65) 与 (3.66) 变为

$$\mathbf{D}^I \left(\mathbf{I}_B^B \boldsymbol{\omega}^{BI} \right) + m^B \mathbf{D}^I \mathbf{S}_{BV} \mathbf{v}_B^I = \mathbf{m}_B \tag{3.67a}$$

$$\mathbf{D}^I \left(\mathbf{I}_B^B \boldsymbol{\omega}^{BI} \right) = \mathbf{m}_B \tag{3.67b}$$

对于由多个刚体 B_k 组成的刚体系 C , 有

$$\mathbf{D}^I \mathbf{h}_V^{CI} = \mathbf{m}_V \tag{3.68}$$

式 (3.68) 的左边可化简为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}^I \mathbf{h}_V^{CI} &= \mathbf{D}^I \left(\sum_k \left(\mathbf{I}_{B_k}^{B_k} \boldsymbol{\omega}^{B_k I} \right) + \sum_k m^{B_k} \mathbf{S}_{B_k C} \mathbf{D}^I \mathbf{s}_{B_k C} + m^C \mathbf{S}_{CV} \mathbf{v}_C^I \right) \\
 &= \sum_k \mathbf{D}^I \left(\mathbf{I}_{B_k}^{B_k} \boldsymbol{\omega}^{B_k I} \right) + \sum_k m^{B_k} \mathbf{S}_{B_k C} \mathbf{D}^I \mathbf{D}^I \mathbf{s}_{B_k C} + m^C \mathbf{D}^I \mathbf{S}_{CV} \mathbf{v}_C^I + \mathbf{S}_{CV} \mathbf{D}^I \left(m^C \mathbf{v}_C^I \right) \\
 &= \sum_k \mathbf{D}^I \left(\mathbf{I}_{B_k}^{B_k} \boldsymbol{\omega}^{B_k I} \right) + \sum_k m^{B_k} \mathbf{S}_{B_k C} \mathbf{D}^I \mathbf{D}^I \mathbf{s}_{B_k C} + m^C \mathbf{D}^I \mathbf{S}_{CV} \mathbf{v}_C^I + \mathbf{S}_{CV} \mathbf{f}_C
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

对于质心 B_k 相互固定的情况, 式 (3.69) 变为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}^I \mathbf{h}_V^{CI} &= \mathbf{D}^I \left(\sum_k \left(\mathbf{I}_{B_k}^{B_k} \boldsymbol{\omega}^{B_k C} \right) + \mathbf{I}_C^C \boldsymbol{\omega}^{CI} + m^C \mathbf{S}_{CV} \mathbf{v}_C^I \right) \\
 &= \sum_k \mathbf{D}^I \left(\mathbf{I}_{B_k}^{B_k} \boldsymbol{\omega}^{B_k C} \right) + \mathbf{D}^I \left(\mathbf{I}_C^C \boldsymbol{\omega}^{CI} \right) + m^C \mathbf{D}^I \mathbf{S}_{CV} \mathbf{v}_C^I + \mathbf{S}_{CV} \mathbf{f}_C
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

式 (3.68) 的右边可化简为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}_V &= \sum_k \mathbf{m}_{B_k} + \sum_k \mathbf{S}_{B_k V} \mathbf{f}_{B_k} \\
 &= \sum_k \mathbf{m}_{B_k} + \sum_k \mathbf{S}_{B_k C} \mathbf{f}_{B_k} + \mathbf{S}_{CV} \left(\sum_k \mathbf{f}_{B_k} \right) \\
 &= \mathbf{m}_C + \mathbf{S}_{CV} \mathbf{f}_C
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

其中 \mathbf{m}_C 表示刚体系 C 所受相对于其质心 C 的合外力矩, \mathbf{f}_C 表示作用在刚体系 C 上的合外力。所以, 式 (3.68) 变为

$$\sum_k \mathbf{D}^I \left(\mathbf{I}_{B_k}^{B_k} \boldsymbol{\omega}^{B_k I} \right) + \sum_k m^{B_k} \mathbf{S}_{B_k C} \mathbf{D}^I \mathbf{D}^I \mathbf{s}_{B_k C} + m^C \mathbf{D}^I \mathbf{S}_{CV} \mathbf{v}_C^I = \mathbf{m}_C \tag{3.72a}$$

$$\sum_k \mathbf{D}^I \left(\mathbf{I}_{B_k}^{B_k} \boldsymbol{\omega}^{B_k C} \right) + \mathbf{D}^I \left(\mathbf{I}_C^C \boldsymbol{\omega}^{CI} \right) + m^C \mathbf{D}^I \mathbf{S}_{CV} \mathbf{v}_C^I = \mathbf{m}_C \tag{3.72b}$$

若点 V 取质心 C 或惯性框架内的任意点 I , 则式 (3.72) 变为

$$\sum_k \mathbf{D}^I \left(\mathbf{I}_{B_k}^{B_k} \boldsymbol{\omega}^{B_k I} \right) + \sum_k m^{B_k} \mathbf{S}_{B_k C} \mathbf{D}^I \mathbf{D}^I \mathbf{s}_{B_k C} = \mathbf{m}_C \tag{3.73a}$$

$$\sum_k \mathbf{D}^I \left(\mathbf{I}_{B_k}^{B_k} \boldsymbol{\omega}^{B_k C} \right) + \mathbf{D}^I \left(\mathbf{I}_C^C \boldsymbol{\omega}^{CI} \right) = \mathbf{m}_C \tag{3.73b}$$

3.4 相对运动

本文研究的是两个飞行器, 领航飞行器 (Leader) 与跟随飞行器 (Follower), 之间的相对运动, 分别用 L 与 F 来表示这两个飞行器及与之相对应的体固框架, 框架间的转动关系用旋转四元数来描述。

3.4.1 运动学

3.4.1.1 平动

在式 (3.16) 中, 将 U 、 V 及 W 分别用 F 、 I 及 L 代替, 得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_F^I &= \mathbf{a}_F^L + \mathbf{D}^L \boldsymbol{\Omega}^{LI} \mathbf{s}_{FL} + 2\boldsymbol{\Omega}^{LI} \mathbf{v}_F^L + (\boldsymbol{\Omega}^{LI})^2 \mathbf{s}_{FL} + \mathbf{a}_L^I \\
 &= \mathbf{D}^L \mathbf{D}^L \mathbf{s}_{FL} + \mathbf{D}^L \boldsymbol{\Omega}^{LI} \mathbf{s}_{FL} + 2\boldsymbol{\Omega}^{LI} \mathbf{D}^L \mathbf{s}_{FL} + (\boldsymbol{\Omega}^{LI})^2 \mathbf{s}_{FL} + \mathbf{a}_L^I
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

移项并合并同类项, 得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}^L \mathbf{D}^L \mathbf{s}_{FL} &= - \left(\mathbf{D}^L \boldsymbol{\Omega}^{LI} + (\boldsymbol{\Omega}^{LI})^2 \right) \mathbf{s}_{FL} - 2\boldsymbol{\Omega}^{LI} \mathbf{D}^L \mathbf{s}_{FL} + \mathbf{a}_F^I - \mathbf{a}_L^I \\
 &= - \left(\mathbf{D}^L \boldsymbol{\Omega}^{LI} + (\boldsymbol{\Omega}^{LI})^2 \right) \mathbf{s}_{FL} - 2\boldsymbol{\Omega}^{LI} \mathbf{D}^L \mathbf{s}_{FL} + \mathbf{a}_{F_b}^I + \mathbf{a}_{F_g}^I - \mathbf{a}_L^I
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

其中下下标 b 与 g 分别表示飞行器的体加速度与引力加速度分量，体加速度由加速度传感器测量得到，而引力加速度则根据飞行器的位置通过计算获得。

3.4.1.2 转动

在式 (3.38) 中，将 U 、 V 及 W 分别用 F 、 L 及 I 代替，得到框架 F 相对于 L 的四元数， \mathbf{q}_q^{FL} ，为

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_q^{FL} &= \mathbf{q}_q^{FI} \otimes \mathbf{q}_q^{IL} \\ &= \mathbf{q}_q^{FI} \otimes (\mathbf{q}_q^{LI})^*\end{aligned}\quad (3.76)$$

与之对应的旋转张量， \mathbf{R}^{FL} ，为

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{FL} &= \mathbf{R}^{FI} \mathbf{R}^{IL} \\ &= \mathbf{R}^{FI} (\mathbf{R}^{LI})^T\end{aligned}\quad (3.77)$$

同理，在式 (3.46) 中，将 U 、 V 分别用 F 、 L 代替，得到 \mathbf{q}_q^{FL} 相对于框架 F 的旋转时间导数， $\mathbf{D}^F \mathbf{q}_q^{FL}$ ，为

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^F \mathbf{q}_q^{FL} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_q^{FL} \otimes \mathbf{q}_q^{FL} \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_q^{FL} \mathbf{q}_q^{FL}\end{aligned}\quad (3.78)$$

其中框架 F 相对于 L 的角速度， $\boldsymbol{\omega}^{FL}$ ，为

$$\boldsymbol{\omega}^{FL} = \boldsymbol{\omega}^{FI} - \boldsymbol{\omega}^{LI} \quad (3.79)$$

3.4.2 动力学

3.4.2.1 平动

跟随飞行器的引力加速度， $\mathbf{a}_{F_g}^I$ ，为^[120]

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{F_g}^I &= -\mu \frac{\mathbf{s}_{FI}}{\|\mathbf{s}_{FI}\|^3} \\ &= -\mu \frac{\mathbf{s}_{LI} + \mathbf{s}_{FL}}{\|\mathbf{s}_{LI} + \mathbf{s}_{FL}\|^3}\end{aligned}\quad (3.80)$$

其中 μ 为天体的引力常数，对于地球 $\mu = 3.986008 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ 。

3.4.2.2 转动

由式 (3.79) 可得

$$\begin{aligned}
 D^F \omega^{FL} &= D^F \omega^{FI} - D^F \omega^{LI} \\
 &= D^F \omega^{FI} - (D^L \omega^{LI} + \Omega^{LF} \omega^{LI}) \\
 &= D^F \omega^{FI} - D^L \omega^{LI} + \Omega^{FL} \omega^{LI}
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

在式 (3.67b) 中, 将 B 用 F 代替, 得

$$\begin{aligned}
 D^I(I_F^F \omega^{FI}) &= m_F \Leftrightarrow \\
 D^F(I_F^F \omega^{FI}) + \Omega^{FI}(I_F^F \omega^{FI}) &= m_F \Leftrightarrow \\
 I_F^F D^F \omega^{FI} + \Omega^{FI}(I_F^F \omega^{FI}) &= m_F \Leftrightarrow \\
 D^F \omega^{FI} &= (I_F^F)^{-1} \left(m_F - \Omega^{FI}(I_F^F \omega^{FI}) \right) \\
 &= (I_F^F)^{-1} \left(m_F - (\Omega^{FL} + \Omega^{LI}) I_F^F (\omega^{FL} + \omega^{LI}) \right)
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

将式 (3.82) 代入式 (3.81), 可得

$$D^F \omega^{FL} = (I_F^F)^{-1} \left(m_F - (\Omega^{FL} + \Omega^{LI}) I_F^F (\omega^{FL} + \omega^{LI}) \right) - D^L \omega^{LI} + \Omega^{FL} \omega^{LI} \tag{3.83}$$

3.5 本章小结

本章研究了飞行器运动方程的张量描述。介绍了张量的有关概念及其运算法则, 给出了张量旋转时间导数的定义及其性质。从运动学和动力学两方面对一般刚体的运动方程进行了描述, 提出了几个新的运动学张量并给出了其性质。推导了张量形式的 6 DOF 运动方程, 重点阐述了姿态的描述方式及其运动学方程, 在此基础上建立了两个飞行器的通用 6 DOF 相对运动模型。

第 4 章 基于 VisNav 系统的相对导航

飞行器之间的相对导航主要包括两个部分，相对位置估计和相对姿态估计。在本章相对导航方程的推导中，假定领航飞行器的状态量是已知的，这可由其机载组合导航系统提供。

4.1 相对运动方程

第 3.4 节的相对运动方程为张量形式，不便于数值计算，因此需要将其表示成坐标形式。原则上，各种坐标系下的运动方程理论上是等价的，但在实际应用中应尽量使采用张量描述的运动方程所对应的坐标形式结构简单，便于实现。

4.1.1 位移

与 Fosbury^[102]不同的是，飞行器之间的相对位移用坐标系 $]^L$ 下的坐标来表示。当然，也可以采用类似的方法获得坐标系 $]^F$ 下的相对位移方程。

将式 (3.75) 表示成 $]^L$ 下的坐标形式，可得

$$\begin{aligned}
 [\ddot{\mathbf{s}}_{FL}]^L &= - \left([\dot{\boldsymbol{\Omega}}^L]^L + ([\boldsymbol{\Omega}^L]^L)^2 \right) [\mathbf{s}_{FL}]^L - 2[\boldsymbol{\Omega}^L]^L [\dot{\mathbf{s}}_{FL}]^L \\
 &\quad + [\mathbf{a}_{F_b}^I]^L + [\mathbf{a}_{F_g}^I]^L - [\mathbf{a}_L^I]^L \\
 &= - \left([\dot{\boldsymbol{\Omega}}^L]^L + ([\boldsymbol{\Omega}^L]^L)^2 \right) [\mathbf{s}_{FL}]^L - 2[\boldsymbol{\Omega}^L]^L [\dot{\mathbf{s}}_{FL}]^L \\
 &\quad + (A^{FL})^T [\mathbf{a}_{F_b}^I]^F + A^{LL} ([\mathbf{a}_{F_g}^I]^I - [\mathbf{a}_L^I]^I)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 $[\mathbf{a}_{F_g}^I]^I$ 可通过式 (3.80) 计算得

$$[\mathbf{a}_{F_g}^I]^I = -\mu \frac{[\mathbf{s}_{LL}]^I + (A^{LL})^T [\mathbf{s}_{FL}]^L}{\left\| [\mathbf{s}_{LL}]^I + (A^{LL})^T [\mathbf{s}_{FL}]^L \right\|^3} \tag{4.2}$$

4.1.2 四元数

将式 (3.78) 表示成 $]^F$ 下的坐标形式并利用式 (3.79) 与 (3.45), 可得

$$\begin{aligned}
 [\dot{\mathbf{q}}_q^{FL}]^F &= \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}_q^{FL}]^F \otimes [\mathbf{q}_q^{FL}]^F \\
 &= \frac{1}{2} \left([\boldsymbol{\omega}_q^{FI}]^F - [\mathbf{q}_q^{FL}]^F \otimes [\boldsymbol{\omega}_q^{LI}]^L \otimes [(\mathbf{q}_q^{FL})^*]^F \right) \otimes [\mathbf{q}_q^{FL}]^F \\
 &= \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}_q^{FI}]^F \otimes [\mathbf{q}_q^{FL}]^F - \frac{1}{2} [\mathbf{q}_q^{FL}]^F \otimes [\boldsymbol{\omega}_q^{LI}]^L \\
 &= \left(\frac{1}{2} [\boldsymbol{\Omega}_q^{FI}]^F - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\Xi}_q^{LI}]^L \right) [\mathbf{q}_q^{FL}]^F
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

式 (4.3) 的解析解为

$$[\mathbf{q}_q^{FL}]^F(t) = e^{\Gamma_q(t)} e^{\Gamma_q'(t)} [\mathbf{q}_q^{FL}]^F(t_0) \tag{4.4}$$

其中

$$\Gamma_q(t) \equiv \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [\boldsymbol{\Omega}_q^{FI}]^F(\tau) d\tau \tag{4.5a}$$

$$\Gamma_q'(t) \equiv -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t [\boldsymbol{\Xi}_q^{LI}]^L(\tau) d\tau \tag{4.5b}$$

将 $\Gamma_q(t)$ 自乘, 可得

$$\Gamma_q^2(t) = -\left(\frac{\|\boldsymbol{\epsilon}(t)\|}{2}\right)^2 I_{4 \times 4} \tag{4.6}$$

其中

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) \equiv \int_{t_0}^t [\boldsymbol{\omega}_q^{FI}]^F(\tau) d\tau \tag{4.7}$$

将 $e^{\Gamma_q(t)}$ 进行级数展开, 得^[121]

$$\begin{aligned}
 e^{\Gamma_q(t)} &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\Gamma_q^\ell(t)}{\ell!} \\
 &= I_{4 \times 4} + \Gamma_q(t) + \frac{\Gamma_q^2(t)}{2} + \frac{\Gamma_q^3(t)}{3} + \dots \\
 &= \left(I_{4 \times 4} + \frac{\Gamma_q^2(t)}{2!} + \frac{(\Gamma_q^2(t))^2}{4!} + \dots \right) + \Gamma_q(t) \left(I_{4 \times 4} + \frac{\Gamma_q^2(t)}{3!} + \frac{(\Gamma_q^2(t))^2}{5!} + \dots \right) \\
 &= \cos\left(\frac{\|\boldsymbol{\epsilon}(t)\|}{2}\right) I_{4 \times 4} + \frac{2}{\|\boldsymbol{\epsilon}(t)\|} \sin\left(\frac{\|\boldsymbol{\epsilon}(t)\|}{2}\right) \Gamma_q(t)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

同理可得

$$e^{\Gamma_q'(t)} = \cos\left(\frac{\|\boldsymbol{\epsilon}'(t)\|}{2}\right) I_{4 \times 4} + \frac{2}{\|\boldsymbol{\epsilon}'(t)\|} \sin\left(\frac{\|\boldsymbol{\epsilon}'(t)\|}{2}\right) \Gamma_q'(t) \tag{4.9}$$

其中

$$\epsilon'(t) \equiv \int_{t_0}^t [\omega^{LI}]^L(\tau) d\tau \quad (4.10)$$

式 (4.4) 的一阶近似为

$$\begin{aligned} [\mathbf{q}_q^{FL}]_{k+1}^F &= e^{\Gamma_q(\Delta t)} e^{\Gamma'_q(\Delta t)} [\mathbf{q}_q^{FL}]_k^F \\ &= \Theta_q([\omega^{FI}]_k^F) \Theta'_q([\omega^{LI}]_k^L) [\mathbf{q}_q^{FL}]_k^F \end{aligned} \quad (4.11)$$

其中

$$\Gamma_q(\Delta t) \equiv \frac{1}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\Omega_q^{FI}]^F(\tau) d\tau \quad (4.12a)$$

$$\Theta_q([\omega^{FI}]_k^F) \equiv \begin{bmatrix} \Upsilon_k & \zeta_k \\ -\zeta_k^T & \cos\left(\frac{1}{2} \|\omega^{FI}\|_k \Delta t\right) \end{bmatrix} \quad (4.12b)$$

$$\zeta_k \equiv \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2} \|\omega^{FI}\|_k \Delta t\right)}{\|\omega^{FI}\|_k} \right) [\omega^{FI}]_k^F \quad (4.12c)$$

$$\Upsilon_k \equiv \cos\left(\frac{1}{2} \|\omega^{FI}\|_k \Delta t\right) I_{3 \times 3} - [\zeta_k \times] \quad (4.12d)$$

且

$$\Gamma'_q(\Delta t) \equiv -\frac{1}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\Xi_q^{LI}]^L(\tau) d\tau \quad (4.13a)$$

$$\Theta'_q([\omega^{LI}]_k^L) \equiv \begin{bmatrix} \Upsilon'_k & -\zeta'_k \\ \zeta'^T_k & \cos\left(\frac{1}{2} \|\omega^{LI}\|_k \Delta t\right) \end{bmatrix} \quad (4.13b)$$

$$\zeta'_k \equiv \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2} \|\omega^{LI}\|_k \Delta t\right)}{\|\omega^{LI}\|_k} \right) [\omega^{LI}]_k^L \quad (4.13c)$$

$$\Upsilon'_k \equiv \cos\left(\frac{1}{2} \|\omega^{LI}\|_k \Delta t\right) I_{3 \times 3} - [\zeta'_k \times] \quad (4.13d)$$

其中 $\Delta t \equiv t_{k+1} - t_k$ 为采样区间, $[\diamond \times]$ 表示 \diamond 的斜对称矩阵。

4.2 测量模型

本节讨论有关的测量模型, 主要包括加速度、角速度及 LOS 的测量建模。

4.2.1 加速度

跟随飞行器 F 的体加速度测量模型为

$$[\tilde{\mathbf{a}}_{F_b}^I]^F = [\mathbf{a}_{F_b}^I]^F + [\boldsymbol{\beta}_{F_b}]^F + [\boldsymbol{\eta}_{F_b v}]^F \quad (4.14a)$$

$$[\dot{\boldsymbol{\beta}}_{F_b}]^F = [\boldsymbol{\eta}_{F_b u}]^F \quad (4.14b)$$

其中 $[\boldsymbol{\beta}_{F_b}]^F$ 为加速度计的偏置, $[\boldsymbol{\eta}_{F_b v}]^F$ 与 $[\boldsymbol{\eta}_{F_b u}]^F$ 为独立的零均值 Gaussian 白噪声过程, 其谱密度分别为 $(\sigma_{F_b v})^2 I_{3 \times 3}$ 与 $(\sigma_{F_b u})^2 I_{3 \times 3}$ 。

4.2.2 角速度

与体加速度的测量模型类似, 跟随飞行器的角速度测量模型为

$$[\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{FI}]^F = [\boldsymbol{\omega}^{FI}]^F + [\boldsymbol{\beta}^{FI}]^F + [\boldsymbol{\eta}_v^{FI}]^F \quad (4.15a)$$

$$[\dot{\boldsymbol{\beta}}^{FI}]^F = [\boldsymbol{\eta}_u^{FI}]^F \quad (4.15b)$$

其中 $[\boldsymbol{\beta}^{FI}]^F$ 为陀螺仪的偏置, $[\boldsymbol{\eta}_v^{FI}]^F$ 与 $[\boldsymbol{\eta}_u^{FI}]^F$ 为独立的零均值 Gaussian 白噪声过程, 其谱密度分别为 $(\sigma_v^{FI})^2 I_{3 \times 3}$ 与 $(\sigma_u^{FI})^2 I_{3 \times 3}$ 。

由于连续信号不能用数字计算机产生, 因而陀螺仪与加速度计的离散信号建模比较困难。为了便于仿真, 离散的陀螺仪测量信号可用如下的递归方程产生^[122]:

$$[\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{FI}]_{k+1}^F = [\boldsymbol{\omega}^{FI}]_{k+1}^F + \frac{1}{2}([\boldsymbol{\beta}^{FI}]_{k+1}^F + [\boldsymbol{\beta}^{FI}]_k^F) + \left(\frac{(\sigma_v^{FI})^2}{\Delta t} + \frac{1}{12} (\sigma_u^{FI})^2 \Delta t \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{N}_v \quad (4.16a)$$

$$[\boldsymbol{\beta}^{FI}]_{k+1}^F = [\boldsymbol{\beta}^{FI}]_k^F + \sigma_u^{FI} \Delta t^{\frac{1}{2}} \mathbf{N}_u \quad (4.16b)$$

其中下标 k 表示第 k 个时间步, \mathbf{N}_v 与 \mathbf{N}_u 为独立的零均值 Gaussian 白噪声过程, 其协方差均为单位矩阵。加速度计的仿真测量数据也可同样产生。

4.2.3 LOS

不失一般性, 本文假定 VisNav 系统的光电敏感器安装在跟随飞行器上并认为其框架与 F 框架重合, 敏感器框架的原点位于相机的焦点, z 轴的正向往外指向视线的方向。标志器位于领航飞行器上, 其位置可用 L 下的坐标表示。图 4.1 为 VisNav 系统的示意图, 其中 B_i 表示第 i 个标志器的质心, F 为相机的焦点, L 表示领航飞行器的质心。标志器质心相对于相机焦点的位移, $\mathbf{s}_{B_i F}$, 为

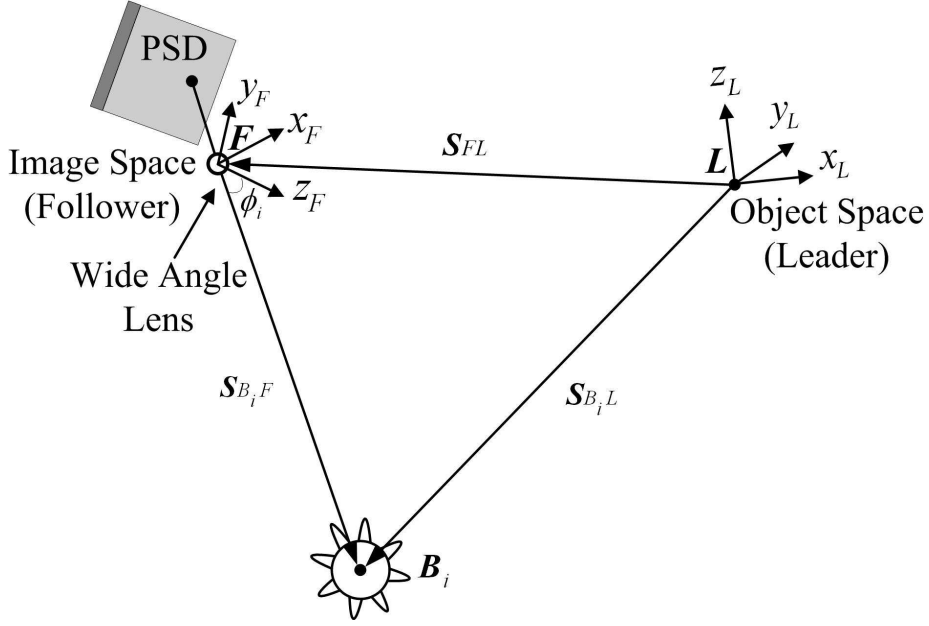


图 4.1: VisNav 系统的工作原理

$$\mathbf{s}_{B_iF} = \mathbf{s}_{B_iL} - \mathbf{s}_{FL} \quad (4.17)$$

其实 \mathbf{s}_{B_iF} 也是第 i 个标志器的 LOS 矢量。

根据针孔相机模型，对于第 i 个单位 LOS 矢量，物体空间 (L) 向图像空间 (F) 的理想投影变换为

$$[\mathbf{s}_i]^F = A^{FL}[\mathbf{o}_i]^L \quad (4.18)$$

其中

$$[\mathbf{s}_i]^F \equiv \frac{1}{\sqrt{f^2 + \chi_i^2 + \xi_i^2}} \begin{bmatrix} -\chi_i \\ -\xi_i \\ f \end{bmatrix} \quad (4.19a)$$

$$[\mathbf{o}_i]^L \equiv \frac{[\mathbf{s}_{B_iF}]^L}{\|[\mathbf{s}_{B_iF}]^L\|} = \frac{[\mathbf{s}_{B_iL}]^L - [\mathbf{s}_{FL}]^L}{\|[\mathbf{s}_{B_iL}]^L - [\mathbf{s}_{FL}]^L\|} \quad (4.19b)$$

其中 (χ_i, ξ_i) 为第 i 个标志器的图像空间测量值， f 为相机焦距。测量值也可以表示为 $(\chi_i/f, \xi_i/f)$ ，因此在本节下面的讨论中假定相机焦距 $f = 1$ 。

当存在测量噪声时，上述理想测量模型变为

$$[\tilde{\mathbf{s}}_i]^F = A^{FL}[\mathbf{o}_i]^L + \boldsymbol{\nu}_i \quad (4.20)$$

其中 $[\tilde{\varsigma}_i]^F$ 表示第 i 个标志器的测量, 对于大视场光电敏感器, 传感器误差 $\boldsymbol{\nu}_i$ 服从 Gaussian 分布, 即^[96]

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\nu}_i] = \mathbf{0} \quad (4.21a)$$

$$\mathbf{R}_i \equiv \mathbb{E}[\boldsymbol{\nu}_i \boldsymbol{\nu}_i^T] = J_i \mathbf{R}_i^{\text{FOCAL}} J_i^T \quad (4.21b)$$

其中

$$J_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \chi_i^2 + \xi_i^2}} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{1 + \chi_i^2 + \xi_i^2} [\boldsymbol{\varsigma}_i]^F [\chi_i, \xi_i] \quad (4.22a)$$

$$\mathbf{R}_i^{\text{FOCAL}} = \frac{\sigma_i^2}{1 + d(\chi_i^2 + \xi_i^2)} \begin{bmatrix} (1 + d\chi_i^2)^2 & (d\chi_i\xi_i)^2 \\ (d\chi_i\xi_i)^2 & (1 + d\xi_i^2)^2 \end{bmatrix} \quad (4.22b)$$

其中 $d = 1$, σ_i^2 为 χ_i 、 ξ_i 的测量误差的方差^[123]。不幸的是, 协方差矩阵 \mathbf{R}_i 是奇异的, 直接在 EKF 中应用会引起 EKF 奇异, 这可通过对 \mathbf{R}_i 进行秩一更新来克服, 即^[96]

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i + \frac{1}{2} \text{trace}\{\mathbf{R}_i\} \left([\boldsymbol{\varsigma}_i]^F\right) \left([\boldsymbol{\varsigma}_i]^F\right)^T \quad (4.23)$$

其中 $\text{trace}\{\diamond\}$ 表示计算矩阵 \diamond 的迹。

t_k 时刻的多个 LOS 的测量模型为

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} [\tilde{\varsigma}_1]^F \\ [\tilde{\varsigma}_2]^F \\ \vdots \\ [\tilde{\varsigma}_N]^F \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} A^{FL}[\mathbf{o}_1]^L \\ A^{FL}[\mathbf{o}_2]^L \\ \vdots \\ A^{FL}[\mathbf{o}_N]^L \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_1 \\ \boldsymbol{\nu}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\nu}_N \end{bmatrix}_k \quad (4.24)$$

其中 N 为 t_k 时刻 LOS 测量的总数, 与之相对应的量测噪声协方差为

$$\mathbf{P}_{\mathbf{n}_k} = \text{diag}\{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N\} \quad (4.25)$$

其中 $\text{diag}\{\diamond\}$ 表示构造 \diamond 的对角矩阵。

4.3 相对状态估计

本节导出 EKF 与 SR-SPKF 进行相对状态估计的方程, 在姿态更新中采用无约束的姿态参数来维持四元数的归一化约束。

4.3.1 状态向量

滤波状态向量由相对姿态、相对位置、相对速度及跟随飞行器的陀螺仪与加速度计偏置构成, 即

$$\mathbf{x} \equiv \left[\left([\mathbf{q}_q^{FL}]^F \right)^T, \left([\mathbf{s}_{FL}]^L \right)^T, \left([\dot{\mathbf{s}}_{FL}]^L \right)^T, \left([\boldsymbol{\beta}^{FI}]^F \right)^T, \left([\boldsymbol{\beta}_{F_b}]^F \right)^T \right]^T \quad (4.26)$$

误差状态向量, $\Delta \mathbf{x}$, 定义为

$$\Delta \mathbf{x} \equiv \left[\left(\delta \mathbf{q}_q^{FL} \right)^T, \left(\Delta [\mathbf{s}_{FL}]^L \right)^T, \left(\Delta [\dot{\mathbf{s}}_{FL}]^L \right)^T, \left(\Delta [\boldsymbol{\beta}^{FI}]^F \right)^T, \left(\Delta [\boldsymbol{\beta}_{F_b}]^F \right)^T \right]^T \quad (4.27)$$

其中误差四元数, $\delta \mathbf{q}_q^{FL}$, 定义为

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}_q^{FL} &\equiv [\mathbf{q}_q^{FL}]^F \otimes \left([\hat{\mathbf{q}}_q^{FL}]^F \right)^* \\ &\equiv \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varrho}^{FL} \\ \delta q_4^{FL} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.28)$$

其它误差状态项 $\Delta \diamond$ 统一定义为 $\Delta \diamond \equiv \diamond - \hat{\diamond}$ 。

为了维持四元数的归一化约束, 在 SPKF 中通常采用 GRP 来表示无约束的姿态参数, 即^[124]

$$\delta \mathbf{p}^{FL} \equiv l \frac{\delta \boldsymbol{\varrho}^{FL}}{h + \delta q_4^{FL}} \quad (4.29)$$

其中 $h \in [0, 1]$, l 为标量。对于小角度转动, 一般选取 $l = 2(h+1)$, 以使 $\|\delta \mathbf{p}^{FL}\| = \vartheta$ 。从 $\delta \mathbf{p}^{FL}$ 到 $\delta \mathbf{q}_q^{FL}$ 的逆变换为^[45]

$$\delta q_4^{FL} = \frac{-h \|\delta \mathbf{p}^{FL}\|^2 + l \sqrt{l^2 + (1-h^2) \|\delta \mathbf{p}^{FL}\|^2}}{l^2 + \|\delta \mathbf{p}^{FL}\|^2} \quad (4.30a)$$

$$\delta \boldsymbol{\varrho}^{FL} = l^{-1} (h + \delta q_4^{FL}) \delta \mathbf{p}^{FL} \quad (4.30b)$$

在 EKF 姿态估计中, 常采用误差姿态角矢量, $\delta \boldsymbol{\alpha}^{FL}$, 来表示无约束的姿态参数^[81], 定义为

$$\delta \boldsymbol{\alpha}^{FL} \equiv \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

其中 ϕ 、 θ 和 ψ 分别为框架 F 与 L 之间小角度转动下的滚转、俯仰和偏航角。对于小角度转动, 误差四元数的向量部分约为误差姿态角矢量的一半, 即^[76]

$$\delta \boldsymbol{\varrho}^{FL} \approx \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\alpha}^{FL} \quad (4.32)$$

由式 (4.28) 可得

$$A^{FL} = A(\delta \mathbf{q}_q^{FL}) \hat{A}^{FL} \quad (4.33)$$

其中误差姿态矩阵, $A(\delta \mathbf{q}_q^{FL})$, 在小转动情况下可近似为^[125]

$$A(\delta \mathbf{q}_q^{FL}) \approx \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{bmatrix} = I_{3 \times 3} - [(\delta \boldsymbol{\alpha}^{FL}) \times] \quad (4.34)$$

由上可知, 为了在滤波过程中维持四元数的归一化约束, 对于 EKF 与 SPKF, 误差状态向量分别定义为

$$\Delta \mathbf{x}_{\text{EKF}} \equiv \left[(\delta \boldsymbol{\alpha}^{FL})^T, (\Delta[\mathbf{s}_{FL}]^L)^T, (\Delta[\dot{\mathbf{s}}_{FL}]^L)^T, (\Delta[\boldsymbol{\beta}^{FI}]^F)^T, (\Delta[\boldsymbol{\beta}_{F_b}]^F)^T \right]^T \quad (4.35a)$$

$$\Delta \mathbf{x}_{\text{SPKF}} \equiv \left[(\delta \mathbf{p}^{FL})^T, (\Delta[\mathbf{s}_{FL}]^L)^T, (\Delta[\dot{\mathbf{s}}_{FL}]^L)^T, (\Delta[\boldsymbol{\beta}^{FI}]^F)^T, (\Delta[\boldsymbol{\beta}_{F_b}]^F)^T \right]^T \quad (4.35b)$$

4.3.2 EKF

与式 (4.26) 相对应的状态估计方程为

$$[\dot{\mathbf{q}}_q^{FL}]^F = \frac{1}{2} [\dot{\boldsymbol{\omega}}_q^{FL}]^F \otimes [\mathbf{q}_q^{FL}]^F \quad (4.36a)$$

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}}^{FL}]^F = [\dot{\boldsymbol{\omega}}^{FI}]^F - \hat{A}^{FL} [\boldsymbol{\omega}^{LI}]^L \quad (4.36b)$$

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}}^{FI}]^F = [\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{FI}]^F - [\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FI}]^F \quad (4.36c)$$

$$\begin{aligned} [\ddot{\mathbf{s}}_{FL}]^L = & - \left([\dot{\boldsymbol{\Omega}}^{LI}]^L + ([\boldsymbol{\Omega}^{LI}]^L)^2 \right) [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]^L - 2 [\boldsymbol{\Omega}^{LI}]^L [\dot{\mathbf{s}}_{FL}]^L \\ & + (\hat{A}^{FL})^T [\hat{\mathbf{a}}_{F_b}^I]^F + A^{LI} \left([\hat{\mathbf{a}}_{F_g}^I]^I - [\mathbf{a}_L^I]^I \right) \end{aligned} \quad (4.36d)$$

$$[\hat{\mathbf{a}}_{F_b}^I]^F = [\tilde{\mathbf{a}}_{F_b}^I]^F - [\hat{\boldsymbol{\beta}}_{F_b}]^F \quad (4.36e)$$

$$[\hat{\mathbf{a}}_{F_g}^I]^I = -\mu \frac{[\mathbf{s}_{LI}]^I + (A^{LI})^T [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]^L}{\left\| [\mathbf{s}_{LI}]^I + (A^{LI})^T [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]^L \right\|^3} \quad (4.36f)$$

$$[\dot{\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FI}}]^F = \mathbf{0} \quad (4.36g)$$

$$[\dot{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{F_b}}]^F = \mathbf{0} \quad (4.36h)$$

4.3.2.1 误差状态微分方程

误差姿态角矢量的导数, $\delta \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{FL}$, 为^[99]

$$\delta \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{FL} = -[\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{FI}]^F \delta \boldsymbol{\alpha}^{FL} - \Delta[\boldsymbol{\beta}^{FI}]^F - [\boldsymbol{\eta}_v^{FI}]^F \quad (4.37)$$

$\Delta[\ddot{\mathbf{s}}_{FL}]^L$ 为

$$\begin{aligned}\Delta[\ddot{\mathbf{s}}_{FL}]^L &\equiv [\ddot{\mathbf{s}}_{FL}]^L - [\ddot{\hat{\mathbf{s}}}_{FL}]^L \\ &= - \left([\dot{\boldsymbol{\Omega}}^L]^L + ([\boldsymbol{\Omega}^L]^L)^2 \right) \Delta[\mathbf{s}_{FL}]^L - 2[\boldsymbol{\Omega}^L]^L \Delta[\dot{\mathbf{s}}_{FL}]^L \\ &\quad + (A^{FL})^T [\mathbf{a}_{F_b}^I]^F - (\hat{A}^{FL})^T [\hat{\mathbf{a}}_{F_b}^I]^F + A^{LL} \left([\mathbf{a}_{F_g}^I]^I - [\hat{\mathbf{a}}_{F_g}^I]^I \right)\end{aligned}\quad (4.38)$$

由式 (4.14a)、(4.36e) 及 (4.34) 并忽略二阶和高阶误差, 式 (4.38) 第三行可化简为

$$\begin{aligned}(\hat{A}^{FL})^T [\mathbf{a}_{F_b}^I]^F - (\hat{A}^{FL})^T [\hat{\mathbf{a}}_{F_b}^I]^F &= (\hat{A}^{FL})^T (I_{3 \times 3} + [(\boldsymbol{\delta\alpha}^{FL}) \times]) \left([\hat{\mathbf{a}}_{F_b}^I]^F - \Delta[\boldsymbol{\beta}_{F_b}]^F - [\boldsymbol{\eta}_{F_b v}]^F \right) \\ &\quad - (\hat{A}^{FL})^T [\hat{\mathbf{a}}_{F_b}^I]^F \\ &= (\hat{A}^{FL})^T [(\boldsymbol{\delta\alpha}^{FL}) \times] \left(-\Delta[\boldsymbol{\beta}_{F_b}]^F - [\boldsymbol{\eta}_{F_b v}]^F \right) \\ &\quad + (\hat{A}^{FL})^T \left(-\Delta[\boldsymbol{\beta}_{F_b}]^F - [\boldsymbol{\eta}_{F_b v}]^F \right) \\ &= (\hat{A}^{FL})^T \left(-\Delta[\boldsymbol{\beta}_{F_b}]^F - [\boldsymbol{\eta}_{F_b v}]^F \right)\end{aligned}\quad (4.39a)$$

$$A^{LL} \left([\mathbf{a}_{F_g}^I]^I - [\hat{\mathbf{a}}_{F_g}^I]^I \right) = A^{LL} \frac{\partial [\mathbf{a}_{F_g}^I]^I}{\partial [\mathbf{s}_{FL}]^L} \Delta[\mathbf{s}_{FL}]^L \quad (4.39b)$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{\partial [\mathbf{a}_{F_g}^I]^I}{\partial [\mathbf{s}_{FL}]^L} &= 3\mu \left\| [\mathbf{s}_{LL}]^I + (A^{LL})^T [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]^L \right\|^{-5} \left([\mathbf{s}_{LL}]^I + (A^{LL})^T [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]^L \right) \\ &\quad \times \left([\mathbf{s}_{LL}]^I + (A^{LL})^T [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]^L \right)^T (A^{LL})^T - \mu \left\| [\mathbf{s}_{LL}]^I + (A^{LL})^T [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]^L \right\|^{-3} (A^{LL})^T\end{aligned}\quad (4.40)$$

陀螺仪与加速度计的误差偏置的导数为

$$\begin{aligned}\Delta[\dot{\boldsymbol{\beta}}^{FI}]^F &\equiv [\dot{\boldsymbol{\beta}}^{FI}]^F - [\dot{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{FI}]^F \\ &= [\boldsymbol{\eta}_u^{FI}]^F\end{aligned}\quad (4.41a)$$

$$\begin{aligned}\Delta[\dot{\boldsymbol{\beta}}_{F_b}]^F &\equiv [\dot{\boldsymbol{\beta}}_{F_b}]^F - [\dot{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{F_b}]^F \\ &= [\boldsymbol{\eta}_{F_b u}]^F\end{aligned}\quad (4.41b)$$

误差状态向量的微分方程为

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_{\text{EKF}} = \mathbf{F} \Delta \mathbf{x}_{\text{EKF}} + \mathbf{G} \mathbf{w} \quad (4.42)$$

其中

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{FI}]^F & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{F}_{33} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{F}_{35} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.43a)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{G}_{33} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.43b)$$

$$\mathbf{w} \equiv \left[\left([\boldsymbol{\eta}_v^{FI}]^F \right)^T, \left([\boldsymbol{\eta}_u^{FI}]^F \right)^T, \left([\boldsymbol{\eta}_{Fbv}]^F \right)^T, \left([\boldsymbol{\eta}_{Fbu}]^F \right)^T \right]^T \quad (4.43c)$$

且

$$\mathbf{F}_{32} = - \left([\dot{\boldsymbol{\Omega}}^L]^L + \left([\boldsymbol{\Omega}^L]^L \right)^2 \right) + A^L \frac{\partial [\mathbf{a}_{Fg}^I]^I}{\partial [\mathbf{s}_{FL}]^L} \quad (4.44a)$$

$$\mathbf{F}_{33} = -2[\boldsymbol{\Omega}^L]^L \quad (4.44b)$$

$$\mathbf{F}_{35} = \mathbf{G}_{33} = -(\hat{A}^{FL})^T \quad (4.44c)$$

连续过程噪声 \mathbf{w} 的谱密度矩阵为

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} (\sigma_v^{FI})^2 I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & (\sigma_u^{FI})^2 I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & (\sigma_{Fbv})^2 I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & (\sigma_{Fbu})^2 I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

4.3.2.2 过程协方差矩阵

离散过程协方差的传播方程为

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_{k+1}}^- = \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k} \boldsymbol{\Phi}_k^T + \mathbf{P}_{\mathbf{v}_k} \quad (4.46)$$

可采用数值方法^[126]来计算矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_k$ 与 $\mathbf{P}_{\mathbf{v}_k}$ 。首先定义矩阵

$$\mathcal{A} \equiv \begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T \\ \mathbf{0}_{15 \times 15} & \mathbf{F}^T \end{bmatrix} \Delta t \quad (4.47)$$

然后计算其矩阵指数

$$\mathcal{B} = e^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{12} \\ \mathbf{0}_{15 \times 15} & \mathcal{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11} & \Phi_k^{-1} \mathbf{P}_{\mathbf{v}_k} \\ \mathbf{0}_{15 \times 15} & \Phi_k^T \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

最后可得

$$\Phi_k = \mathcal{B}_{22}^T \quad (4.49a)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{v}_k} = \Phi_k \mathcal{B}_{12} = \mathcal{B}_{22}^T \mathcal{B}_{12} \quad (4.49b)$$

4.3.2.3 量测敏感矩阵

式 (4.18) 的一阶近似为

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\varsigma}_i]^F &= (I_{3 \times 3} - [(\boldsymbol{\delta\alpha}^{FL}) \times]) \hat{A}^{FL} [\boldsymbol{o}_i]^L \\ &= \hat{A}^{FL} [\boldsymbol{o}_i]^L + \left[(\hat{A}^{FL} [\boldsymbol{o}_i]^L) \times \right] \boldsymbol{\delta\alpha}^{FL} \end{aligned} \quad (4.50)$$

由式 (4.50) 可知, 第 i 个 LOS 的量测敏感矩阵为

$$\mathbf{H}'_i = \left[\frac{\partial [\boldsymbol{\varsigma}_i]^F}{\partial \boldsymbol{\delta\alpha}^{FL}}, \frac{\partial [\boldsymbol{\varsigma}_i]^F}{\partial [\mathbf{s}_{FL}]^L}, \mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{0}_{3 \times 3} \right], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.51)$$

其中

$$\frac{\partial [\boldsymbol{\varsigma}_i]^F}{\partial \boldsymbol{\delta\alpha}^{FL}} = \left[(\hat{A}^{FL} [\hat{\boldsymbol{o}}_i]^L) \times \right] \quad (4.52a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\boldsymbol{\varsigma}_i]^F}{\partial [\mathbf{s}_{FL}]^L} &= \hat{A}^{FL} \frac{\partial [\boldsymbol{o}_i]^F}{\partial [\mathbf{s}_{FL}]^L} = -\hat{A}^{FL} \frac{1}{\|[\mathbf{s}_{B_iL}]^L - [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]^L\|} \\ &\quad \times \left(I_{3 \times 3} - \frac{([\mathbf{s}_{B_iL}]^L - [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]^L)([\mathbf{s}_{B_iL}]^L - [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]^L)^T}{\|[\mathbf{s}_{B_iL}]^L - [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]^L\|^2} \right) \end{aligned} \quad (4.52b)$$

时刻 t_k 的总量测敏感矩阵为

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{H}'_1 \\ \mathbf{H}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{H}'_N \end{bmatrix}_k \quad (4.53)$$

4.3.2.4 导航方程

根据上面有关内容, 可归纳出 EKF 进行相对导航的算法如下:

(1) 初始化

$$[\hat{\mathbf{q}}_q^{FL}]_0^F = [\mathbf{q}_q^{FL}]_0^F \quad (4.54a)$$

$$[\hat{\mathbf{s}}_{FL}]_0^L = [\mathbf{s}_{FL}]_0^L \quad (4.54b)$$

$$[\hat{\dot{\mathbf{s}}}_{FL}]_0^L = [\dot{\mathbf{s}}_{FL}]_0^L = [\mathbf{v}_F^L]_0^L \quad (4.54c)$$

$$[\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FI}]_0^F = [\boldsymbol{\beta}^{FI}]_0^F \quad (4.54d)$$

$$[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{Fb}^F]_0^F = [\boldsymbol{\beta}_{Fb}^F]_0^F \quad (4.54e)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_0} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T] \quad (4.54f)$$

(2) $k = 1, 2, \dots, \infty$,

(a) 预测

$$[\hat{\boldsymbol{\omega}}^{FI}]_{k-1}^F = [\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{FI}]_{k-1}^F - [\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FI}]_{k-1}^F \quad (4.55a)$$

$$[\hat{\mathbf{a}}_{Fb}^I]_{k-1}^F = [\tilde{\mathbf{a}}_{Fb}^I]_{k-1}^F - [\hat{\boldsymbol{\beta}}_{Fb}^F]_{k-1}^F \quad (4.55b)$$

$$[\hat{\mathbf{a}}_{Fg}^I]_{k-1}^I = -\mu \frac{[\mathbf{s}_{LI}]^I + (A^{LI})^T [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]_{k-1}^L}{\left\| [\mathbf{s}_{LI}]^I + (A^{LI})^T [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]_{k-1}^L \right\|^3} \quad (4.55c)$$

$$[\hat{\mathbf{q}}_q^{FL}]_k^F = \Theta_q \left([\hat{\boldsymbol{\omega}}^{FI}]_{k-1}^F \right) \Theta_q' \left([\boldsymbol{\omega}^{LI}]_{k-1}^L \right) [\hat{\mathbf{q}}_q^{FL}]_{k-1}^F \quad (4.55d)$$

$$\begin{aligned} [\ddot{\mathbf{s}}_{FL}]^L = & - \left([\dot{\boldsymbol{\Omega}}^{LI}]^L + ([\boldsymbol{\Omega}^{LI}]^L)^2 \right) [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]^L - 2[\boldsymbol{\Omega}^{LI}]^L [\dot{\mathbf{s}}_{FL}]^L \\ & + (\hat{A}^{FL})^T [\hat{\mathbf{a}}_{Fb}^I]^F + A^{LI} \left([\hat{\mathbf{a}}_{Fg}^I]^I - [\mathbf{a}_L^I]^I \right) \end{aligned} \quad (4.55e)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- = \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \mathbf{P}_{\mathbf{x}_{k-1}} \boldsymbol{\Phi}_{k-1}^T + \mathbf{P}_{\mathbf{v}_{k-1}} \quad (4.55f)$$

(b) 更新

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- \mathbf{H}_k^T \quad (4.56a)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k} = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{P}_{\mathbf{n}_k} \quad (4.56b)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} (\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k})^{-1} \quad (4.56c)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0}, \mathbf{u}_{2k}) \quad (4.56d)$$

$$\begin{aligned}\Delta' \hat{\mathbf{x}}_k &\equiv \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-) \\ &\equiv \left[(\delta \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k^{FL})^T, (\Delta'[\hat{\mathbf{s}}_{FL}]_k^L)^T, (\Delta'[\hat{\mathbf{s}}_{FL}]_k^L)^T, (\Delta'[\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FI}]_k^F)^T, (\Delta'[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{F_b}]_k^F)^T \right]^T\end{aligned}\quad (4.56e)$$

$$[\hat{\mathbf{q}}_q^{FL}]_k^F = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \delta \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k^{FL} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes [\hat{\mathbf{q}}_q^{FL-}]_k^F \quad (4.56f)$$

$$[\hat{\mathbf{q}}_q^{FL}]_k^F = \frac{[\hat{\mathbf{q}}_q^{FL}]_k^F}{\|[\hat{\mathbf{q}}_q^{FL}]_k^F\|} \quad (4.56g)$$

$$[\hat{\mathbf{s}}_{FL}]_k^L = [\hat{\mathbf{s}}_{FL}^-]_k^L + \Delta'[\hat{\mathbf{s}}_{FL}]_k^L \quad (4.56h)$$

$$[\hat{\mathbf{s}}_{FL}]_k^L = [\hat{\mathbf{s}}_{FL}^-]_k^L + \Delta'[\hat{\mathbf{s}}_{FL}]_k^L \quad (4.56i)$$

$$[\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FI}]_k^F = [\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FI-}]_k^F + \Delta'[\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FI}]_k^F \quad (4.56j)$$

$$[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{F_b}]_k^F = [\hat{\boldsymbol{\beta}}_{F_b}^-]_k^F + \Delta'[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{F_b}]_k^F \quad (4.56k)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\mathbf{y}_k} \mathbf{K}_k^T \quad (4.56l)$$

4.3.3 SR-SPKF

本文介绍的 SR-SPKF 算法有 SR-UKF 与 SR-SSUKF 两类，其中每类算法又有通用形式与加性形式两种实现方式。为了描述方便，本节以加性形式的 SR-SSUKF 为例来导出 SR-SPKF 进行相对状态估计的方程，其它相对导航算法可类似导出。

定义 Sigma-Point 状态向量如下：

$$\mathcal{X}_k(i) \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{X}_k^{\delta p}(i) \\ \mathcal{X}_k^s(i) \\ \mathcal{X}_k^s(i) \\ \mathcal{X}_k^{\beta_g}(i) \\ \mathcal{X}_k^{\beta_b}(i) \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (4.57)$$

且

$$\mathcal{X}_k(0) = \hat{\mathbf{x}}_k \equiv \begin{bmatrix} \delta \hat{\mathbf{p}}_k^{FL} \\ [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]_k^L \\ [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]_k^L \\ [\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FI}]_k^F \\ [\hat{\boldsymbol{\beta}}_{F_b}]_k^F \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

其中 $\delta\hat{\mathbf{p}}_k^{FL}$ 表示估计的误差姿态矢量, $\mathcal{X}_k^{\delta p}$ 表示 Sigma-Point 状态向量的误差姿态部分, 与之类似, \mathcal{X}_k^s 与 $\mathcal{X}_k^{\dot{s}}$ 分别表示相对位置与相对速度部分, $\mathcal{X}_k^{\beta_g}$ 与 $\mathcal{X}_k^{\beta_a}$ 分别为陀螺仪与加速度计的偏置。根据 Sigma Points 的构造方法及误差四元数的定义, 假设 Sigma-Point 四元数估计, $[\hat{\mathbf{q}}_q^{FL}]_k^F(i)$, 为

$$[\hat{\mathbf{q}}_q^{FL}]_k^F(0) = [\hat{\mathbf{q}}_q^{FL}]_k^F \quad (4.59a)$$

$$[\hat{\mathbf{q}}_q^{FL}]_k^F(i) = \delta\hat{\mathbf{q}}_{q_k}^{FL}(i) \otimes [\hat{\mathbf{q}}_q^{FL}]_k^F, \quad i = 1, 2, \dots, n_x + 1 \quad (4.59b)$$

其中 Sigma-Point 误差四元数估计, $\delta\hat{\mathbf{q}}_{q_k}^{FL}(i)$, 可通过式 (4.30) 由 $\delta\hat{\mathbf{p}}_k^{FL}(i) = \mathcal{X}_k^{\delta p}(i)$ 转换而来, 即

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mathbf{q}}_{4_k}^{FL}(i) &= \frac{-h\|\delta\hat{\mathbf{p}}_k^{FL}(i)\|^2 + l\sqrt{l^2 + (1-h^2)\|\delta\hat{\mathbf{p}}_k^{FL}(i)\|^2}}{l^2 + \|\delta\hat{\mathbf{p}}_k^{FL}(i)\|^2} \\ &= \frac{-h\|\mathcal{X}_k^{\delta p}(i)\|^2 + l\sqrt{l^2 + (1-h^2)\|\mathcal{X}_k^{\delta p}(i)\|^2}}{l^2 + \|\mathcal{X}_k^{\delta p}(i)\|^2}, \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \end{aligned} \quad (4.60a)$$

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mathbf{q}}_k^{FL}(i) &= l^{-1}(h + \delta\hat{\mathbf{q}}_{4_k}^{FL}(i))\delta\hat{\mathbf{p}}_k^{FL}(i) \\ &= l^{-1}(h + \delta\hat{\mathbf{q}}_{4_k}^{FL}(i))\mathcal{X}_k^{\delta p}(i), \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \end{aligned} \quad (4.60b)$$

式 (4.59a) 要求 $\delta\hat{\mathbf{p}}_k^{FL}(0) = \mathcal{X}_k^{\delta p}(0) = \delta\hat{\mathbf{p}}_k^{FL} = \mathbf{0}$, 即需要在四元数传播前重置误差姿态矢量为零, 用来将姿态估计的信息从姿态表示的一部分转移到另一部分当中去^[127]。Sigma-Point 四元数估计通过式 (4.11) 向前传播, 即

$$[\hat{\mathbf{q}}_q^{FL-}]_{k+1}^F(i) = \Theta_q([\hat{\omega}^{FI}]_k^F(i))\Theta'_q([\omega^L]_k^L)[\hat{\mathbf{q}}_q^{FL}]_k^F(i), \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (4.61)$$

其中

$$[\hat{\omega}^{FI}]_k^F(i) = [\tilde{\omega}^{FI}]_k^F - \mathcal{X}_k^{\beta_g}(i), \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (4.62)$$

传播后的 Sigma-Point 误差四元数估计为

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mathbf{q}}_{q_{k+1}}^{FL-}(i) &= [\hat{\mathbf{q}}_q^{FL-}]_{k+1}^F(i) \otimes ([\hat{\mathbf{q}}_q^{FL-}]_{k+1}^F(0))^* \\ &= \begin{bmatrix} \delta\hat{\mathbf{q}}_{k+1}^{FL-}(i) \\ \delta\hat{\mathbf{q}}_{4_{k+1}}^{FL-}(i) \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \end{aligned} \quad (4.63)$$

由式 (4.29) 可计算传播后的 $\mathcal{X}_{k+1}^{\delta p-}(i)$, 即

$$\mathcal{X}_{k+1}^{\delta p-}(i) = \delta\hat{\mathbf{p}}_{k+1}^{FL-}(i) = l \frac{\delta\hat{\mathbf{q}}_{k+1}^{FL-}(i)}{h + \delta\hat{\mathbf{q}}_{4_{k+1}}^{FL-}(i)}, \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (4.64)$$

$\mathcal{X}_{k+1}^{s-}(i)$ 与 $\mathcal{X}_{k+1}^{s-}(i)$ 可由 $\mathcal{X}_k^s(i)$ 及 $\mathcal{X}_k^s(i)$ 通过式 (4.36d) 进行计算, 即

$$\begin{aligned} [\ddot{\mathbf{s}}_{FL}]^L(i) = & - \left([\dot{\boldsymbol{\Omega}}^L]^L + ([\boldsymbol{\Omega}^L]^L)^2 \right) [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]^L(i) - 2[\boldsymbol{\Omega}^L]^L [\dot{\mathbf{s}}_{FL}]^L(i) \\ & + \left(\hat{A}^{FL}(i) \right)^T [\hat{\mathbf{a}}_{F_b}^I]^F(i) + A^L \left([\hat{\mathbf{a}}_{F_g}^I]^I(i) - [\mathbf{a}_L^I]^I \right), \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \end{aligned} \quad (4.65)$$

其中

$$\hat{A}^{FL}(i) = A \left([\hat{\mathbf{q}}_q^{FL}]_k^F(i) \right), \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (4.66a)$$

$$[\hat{\mathbf{a}}_{F_b}^I]^F(i) = [\hat{\mathbf{a}}_{F_b}^I]_k^F - [\hat{\boldsymbol{\beta}}_{F_b}]_k^F(i), \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (4.66b)$$

$$[\hat{\mathbf{a}}_{F_g}^I]^I(i) = -\mu \frac{[\mathbf{s}_L]_k^I + (A_k^L)^T [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]_k^L(i)}{\left\| [\mathbf{s}_L]_k^I + (A_k^L)^T [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]_k^L(i) \right\|^3}, \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (4.66c)$$

由式 (4.36g) 与 (4.36h) 可知, $\mathcal{X}_{k+1}^{\beta_g-}(i)$ 与 $\mathcal{X}_{k+1}^{\beta_b-}(i)$ 为

$$\mathcal{X}_{k+1}^{\beta_g-}(i) = \mathcal{X}_k^{\beta_g}(i), \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (4.67a)$$

$$\mathcal{X}_{k+1}^{\beta_b-}(i) = \mathcal{X}_k^{\beta_b}(i), \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (4.67b)$$

预估均值与协方差分别由式 (2.76b) 与 (2.76d) 计算, 其中过程噪声协方差 $\mathbf{P}_{\mathbf{v}_k}$ 由式 (4.49b) 给出。重新构造的 Sigma Points 用来计算 Sigma-Point 量测 $\mathcal{Y}_{k+1}(i)$, 即

$$\mathcal{Y}_{k+1}(i) = \begin{bmatrix} A \left(\hat{\mathbf{q}}_{q_{k+1}}^{FL-}(i) \right) [\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1]_{k+1}^{L-}(i) \\ A \left(\hat{\mathbf{q}}_{q_{k+1}}^{FL-}(i) \right) [\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2]_{k+1}^{L-}(i) \\ \vdots \\ A \left(\hat{\mathbf{q}}_{q_{k+1}}^{FL-}(i) \right) [\hat{\boldsymbol{\sigma}}_N]_{k+1}^{L-}(i) \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (4.68)$$

其中

$$\begin{aligned} [\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j]_{k+1}^{L-}(i) &= \frac{[\mathbf{s}_{B_j L}]^L - [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]_{k+1}^{L-}(i)}{\left\| [\mathbf{s}_{B_j L}]^L - [\hat{\mathbf{s}}_{FL}]_{k+1}^{L-}(i) \right\|}, \quad j = 1, 2, \dots, N \\ &= \frac{[\mathbf{s}_{B_j L}]^L - \mathcal{X}_{k+1}^{s-}(i)}{\left\| [\mathbf{s}_{B_j L}]^L - \mathcal{X}_{k+1}^{s-}(i) \right\|} \end{aligned} \quad (4.69)$$

量测均值与协方差分别由式 (2.78b) 与 (2.78e) 计算, 其中量测噪声协方差 $\mathbf{P}_{\mathbf{n}_k}$ 由式 (4.25) 给出。在状态估计和协方差分别由式 (2.78h) 与 (2.78i) 更新后, 四元数

估计也需要进行更新，即

$$[\hat{\mathbf{q}}_q^{FL}]_{k+1}^F = \delta \hat{\mathbf{q}}_{q_{k+1}}^{FL} \otimes [\hat{\mathbf{q}}_q^{FL-}]_{k+1}^F(0) \quad (4.70)$$

其中 $\delta \hat{\mathbf{q}}_{q_{k+1}}^{FL} = [(\delta \hat{\boldsymbol{\rho}}_{k+1}^{FL})^T, \delta \hat{q}_{4_{k+1}}^{FL}]^T$ 通过式 (4.30) 由更新后的 GRP 估计, $\delta \hat{\boldsymbol{\rho}}_{k+1}^{FL}$, 转换而来, 即

$$\delta \hat{q}_{4_{k+1}}^{FL} = \frac{-h \|\delta \hat{\boldsymbol{\rho}}_{k+1}^{FL}\|^2 + l \sqrt{l^2 + (1-h^2) \|\delta \hat{\boldsymbol{\rho}}_{k+1}^{FL}\|^2}}{l^2 + \|\delta \hat{\boldsymbol{\rho}}_{k+1}^{FL}\|^2}, \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (4.71a)$$

$$\delta \hat{\boldsymbol{\rho}}_{k+1}^{FL} = l^{-1} \left(h + \delta \hat{q}_{4_{k+1}}^{FL} \right) \delta \hat{\boldsymbol{\rho}}_{k+1}^{FL}, \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 1 \quad (4.71b)$$

综上所述, 在 SPKF 姿态估计中, 采用四元数进行姿态传播, 而用 GRP 进行姿态更新可有效地在滤波过程中维持四元数归一化约束。

4.4 本章小结

本章给出了坐标形式的相对运动方程, 建立了加速度计、陀螺仪及 LOS 的测量模型。详细推导了基于 VisNav 系统的 EKF 与 SR-SPKF 相对导航算法。为了在滤波过程中维持姿态四元数的归一化约束, 在 SPKF 中, 采用了 GRP 来进行姿态更新。

第 5 章 仿真结果

本章给出 EKF 与 SR-SPKF 利用 VisNav 系统进行相对导航的仿真结果, 比较有关导航算法的性能。首先描述评判滤波算法性能优劣的标准, 接着详细介绍仿真环境及参数的设置, 最后给出不同仿真场景下的相对导航结果并进行分析。

5.1 性能标准

评判非线性滤波算法性能好坏的标准为估计误差的大小及其统计特性。最常用的方法是给出状态估计误差及其 3σ 界, 若估计误差位于 3σ 界内, 则认为滤波结果是可信的且具备一致性。但是, 采用该方法还不能评判滤波算法的最优性。

非线性滤波算法的最优性保证状态估计误差较小且残差与预测的统计特性一致^[29], 下面介绍一种判断滤波算法最优性的方法。首先, 误差状态 $\Delta \mathbf{x}_k$ 的均方误差 (Mean Square Error, MSE) 定义为^[28]

$$\begin{aligned} \text{MSE} \langle \Delta \mathbf{x}_k \rangle &\equiv \mathbb{E}[(\Delta \mathbf{x}_k - \mathbb{E}[\Delta \mathbf{x}_k])(\Delta \mathbf{x}_k - \mathbb{E}[\Delta \mathbf{x}_k])^T] \\ &= \mathbb{E}[(\Delta \mathbf{x}_k)(\Delta \mathbf{x}_k)^T] + (\mathbb{E}[\Delta \mathbf{x}_k])(\mathbb{E}[\Delta \mathbf{x}_k])^T \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k} + (\mathbb{E}[\Delta \mathbf{x}_k])(\mathbb{E}[\Delta \mathbf{x}_k])^T \end{aligned} \quad (5.1)$$

对于无偏估计, MSE 就变成了一致性检验标准^[28]。根据无偏估计假设, 误差状态的二次型的期望为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\Delta \mathbf{x}_k)^T \mathbf{\Gamma}_k (\Delta \mathbf{x}_k)] &= \text{trace} \left\{ \mathbf{\Gamma}_k \mathbb{E}[(\Delta \mathbf{x}_k)(\Delta \mathbf{x}_k)^T] \right\} \\ &= \text{trace} \{ \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k} \} \end{aligned} \quad (5.2)$$

若取 $\mathbf{\Gamma}_k = (\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k})^{-1}$, 则式 (5.2) 变为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\Delta \mathbf{x}_k)^T \mathbf{\Gamma}_k (\Delta \mathbf{x}_k)] &= \text{trace} \left\{ (\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k})^{-1} \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k} \right\} \\ &= \text{trace} \{ I_{n_x \times n_x} \} \\ &= n_x \end{aligned} \quad (5.3)$$

由式 (5.3) 可知, 归一化平方误差的期望应等于状态向量的维数, 该结论可用来检验非线性滤波算法的最优性。基于 MSE 的最优指数定义为^[48]

$$\rho_k \equiv \frac{1}{\sqrt{n_x}} \left((\Delta \mathbf{x}_k)^T \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^{-1} (\Delta \mathbf{x}_k) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.4)$$

若最优指数 ρ_k 的值远大于 1，则表明系统由近似造成的非线性效果较大；反之，若其值接近于 1，则可认为系统逼近造成的非线性效果较小。换言之，如果非线性滤波的结果为无偏估计且具有一致的协方差，那么最优指数应接近于 1。

5.2 仿真设置

相对运动场景为两个航天器交会中的终段逼近运动，跟随飞行器以 R-bar 方式逼近领航飞行器。目前，航天飞机与国际空间站 (International Space Station, ISS) 的终段逼近采用的就是这种方式^[128]。本文将 ISS 作为领航飞行器，其初始密切轨道根数如表 5.1 所示。标志器的数量与位置会影响 VisNav 系统的可观性^[129]，

表 5.1: 领航飞行器 (ISS) 的初始密切轨道根数

轨道根数	值	单位
半长轴	6.778×10^6	m
偏心率	0.0001	-
轨道倾角	56.1	deg
升交点赤经	0	deg
近地点角距	0	deg
真近角	0	deg

本文采用八个对称分布的标志器，其在领航飞行器 L 下的坐标如表 5.2 所示。领航

表 5.2: 标志器在 L 下的坐标

编号	坐标 (m)
1	$[1.5, -3.5, 7.0]^T$
2	$[-3.75, 2.25, 5.5]^T$
3	$[3.25, -1.5, 6.5]^T$
4	$[-2.5, 4.5, 4.5]^T$
5	$[-1.5, 3.5, -7.0]^T$
6	$[3.75, -2.25, 5.5]^T$
7	$[-3.25, 1.5, -6.5]^T$
8	$[2.5, -4.5, 4.5]^T$

飞行器在其椭圆形轨道上自由运行, 跟随飞行器在其后方 150 m 处以约 2.5 m/s 的相对速度向领航飞行器逼近, 直至运行到距离领航飞行器的对接装置 2 m 处逼近过程结束, 交会轨迹如图 5.1 所示。所有传感器测量的采样时间均为 1 s, 整个逼近

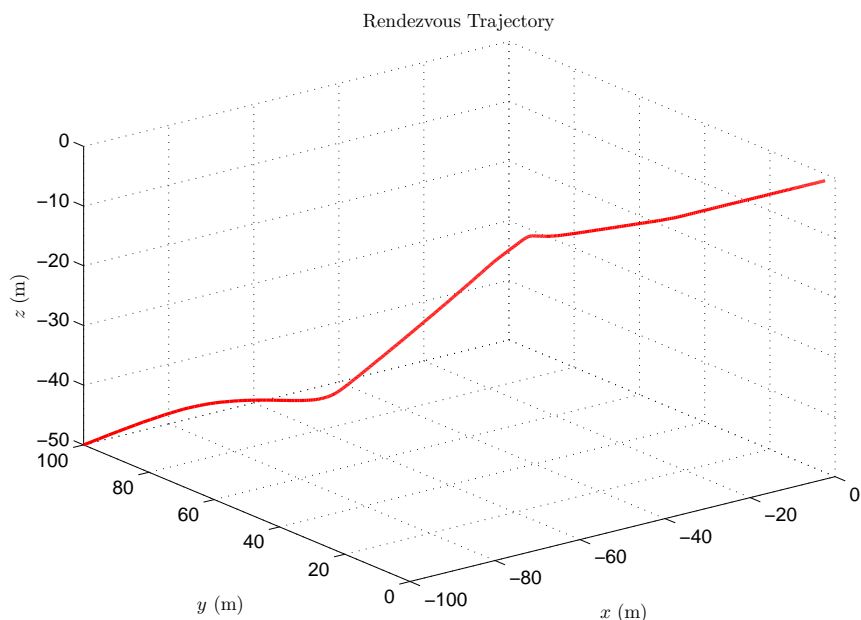


图 5.1: 航天器交会轨迹

交会过程持续时间为 550 s, 其它有关的仿真参数如表 5.3 所示。陀螺仪的测量数据由式 (4.16) 并根据表 5.3 中的相关参数产生, 加速度计的测量数据也由该方程产生。光敏传感器的测量数据由式 (4.20) 产生, 并将其归一化成如式 (4.19a) 所示的单位矢量形式。

所有测试都是在内存为 1 Gb 的 Intel® Core™2 Duo T7200 便携式计算机上完成, 操作系统为 Windows XP®, 编程语言为 MATLAB®。SR-UKF 的参数 α, β 及 κ 分别设为 $\alpha = 1, \beta = 2, \kappa = 0$, GRP 相关的参数 h 与 l 分别为 $h = 1, l = 4$ 。

5.3 导航结果

EKF 与 SPKF 都是对非线性系统的近似, 因此其导航性能跟初始滤波参数的设置有关, 本节给出两种初始条件下的相对导航结果。为了分析方便, 所有结果曲线均表示相关变量 100 次 Monte-Carlo 仿真的平均值。

表 5.3: VisNav 系统仿真参数

仿真参数	值	单位
陀螺仪噪声	$\sigma_v^{FI} = 2.4617 \times 10^{-7}$	rad/s ^{1/2}
	$\sigma_u^{FI} = 8.6325 \times 10^{-10}$	rad/s ^{3/2}
加速度计噪声	$\sigma_{F_b v} = 6.1056 \times 10^{-5}$	m/s ^{3/2}
	$\sigma_{F_b u} = 5.8743 \times 10^{-5}$	m/s ^{5/2}
VisNav 噪声	$\sigma_{vn} = 0.02 \times \frac{\pi}{180}$	rad
初始偏置	$[\beta^{FI}]_0^F = 0.6 \times [1, 1, 1]^T$	deg/hr
	$[\beta_{F_b}]_0^F = 0.004 \times [1, 1, 1]^T$	m/s ²
角速度	$[\omega^L]^L = [0, 0.0011, 0]^T$	rad/s
	$[\omega^{FI}]^F = [0.002, -0.004, 0.0011]^T$	rad/s
初始相对位置	$[\mathbf{s}_{FL}]_0^L = [-100, 100, -50]^T$	m
初始相对速度	$[\dot{\mathbf{s}}_{FL}]_0^L = [1, -2, 1]^T$	m/s

5.3.1 小初始误差

在这种情况下, EKF 与 SPKF 对非线性系统都具有较好的近似效果, 下面主要比较 EKF 与 SR-UKF 的相对导航系统性能。

初始误差四元数为

$$\delta \mathbf{q}_{q_0}^{FL} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \delta \alpha_0^{FL} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

其中

$$\delta \alpha_0^{FL} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{\pi}{180} \text{ (rad)} \quad (5.6)$$

初始陀螺仪偏置与加速度计偏置均设为零, 所有其它状态的初始值均设为均值为真值、协方差为初始协方差的 Gaussian 分布的样本值。对角型初始协方差的三个误差姿态部分的 3σ 界均设为 5 deg, 即 $((5/3) \times (\pi/180))^2 \text{ rad}^2$; 相对位置部分的 3σ 界均设为 10 m, 即 $(10/3)^2 \text{ m}^2$; 相对速率部分的 3σ 界均设为 0.5 m/s, 即 $(0.5/3)^2 \text{ (m/s)}^2$; 陀螺仪偏置部分的 3σ 界均设为 2 deg/hr, 即 $((2/3) \times (\pi/(180 \times 3600)))^2 \text{ (rad/s)}^2$; 加速度偏置部分的 3σ 界均设为 0.03 m/s², 即 $(0.03/3)^2 \text{ (m/s}^2\text{)}^2$ 。相对位置估计采用 7-8 阶变步长 Runge-Kutta-Fehlberg 数值积分算法^[22] 向前传播。

SR-UKF 状态估计误差及其协方差的 $\pm 3\sigma$ 界如图 5.2-5.6 所示, 为了便于比较, 图中还给出了 EKF 的状态估计结果。图 5.2 为相对姿态误差曲线, 由图可

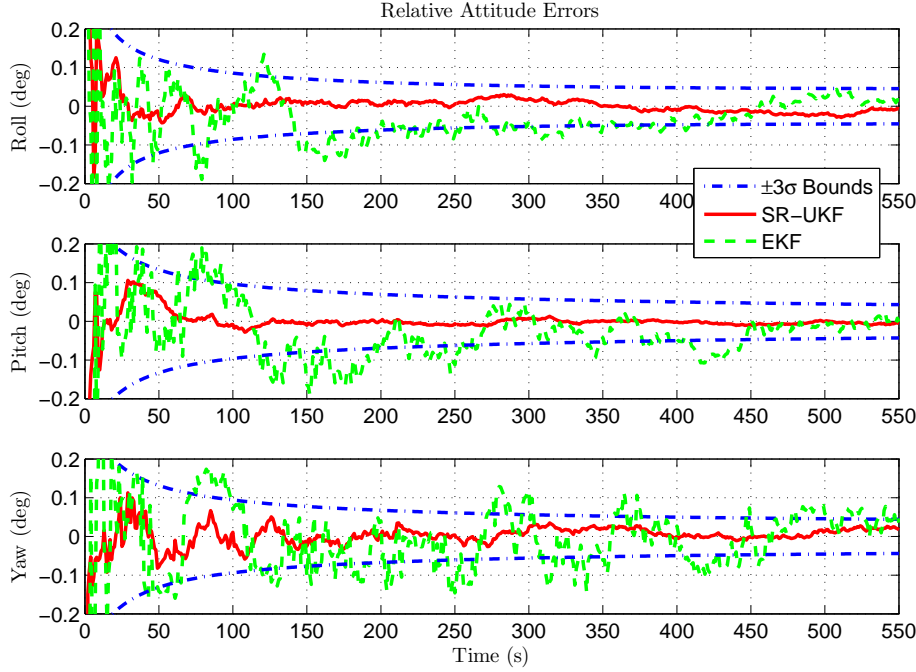
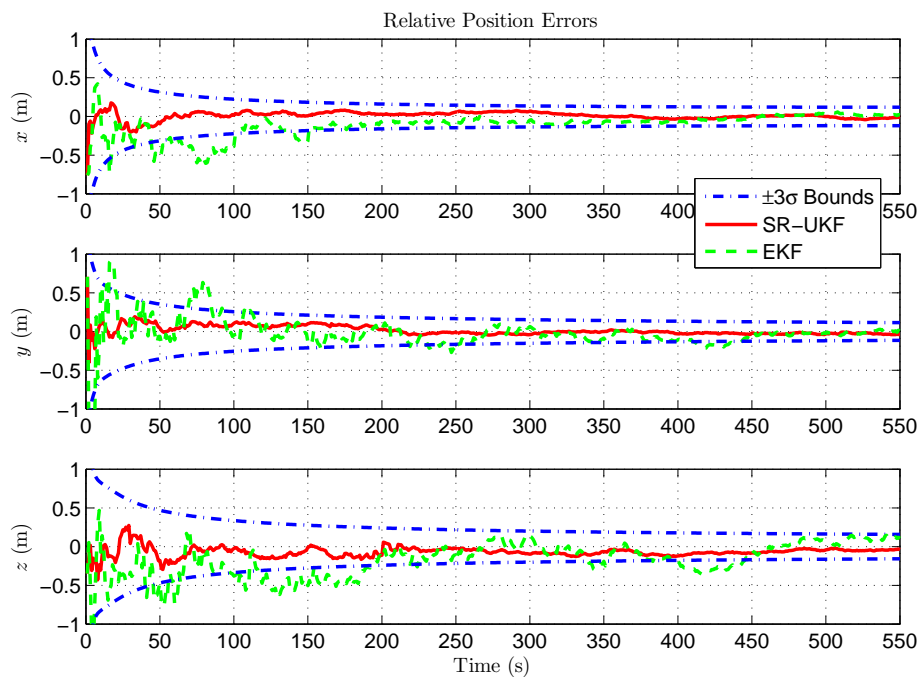
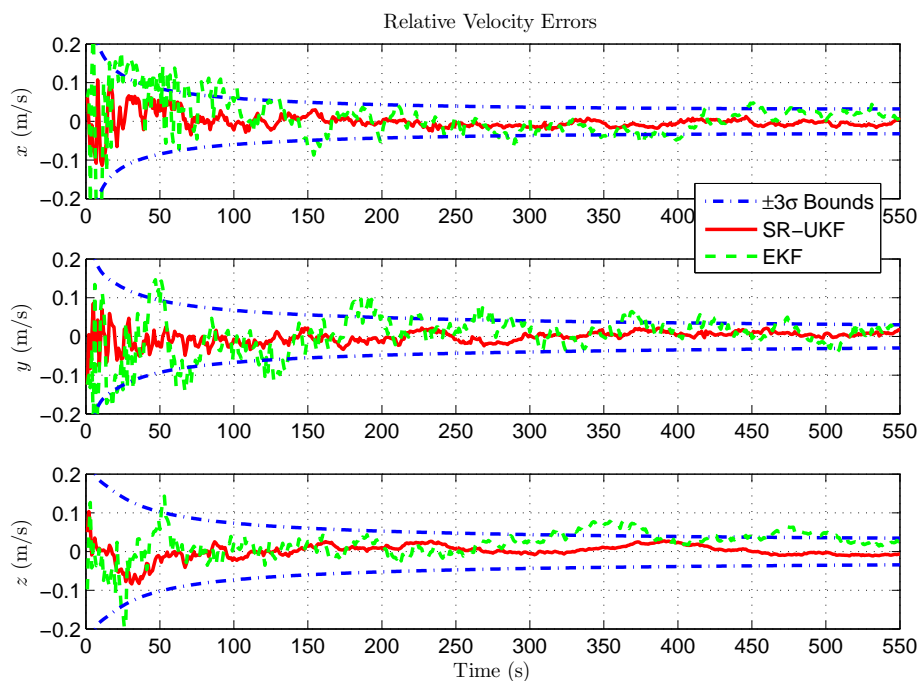


图 5.2: 相对姿态误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (小初始误差)

知, EKF 姿态估计误差在滤波过程的早期阶段波动较大且收敛缓慢, 而 SR-UKF 姿态估计误差不仅收敛快而且具有更小的误差值, 说明相对姿态估计过程中的固有非线性较大, EKF 对该系统的近似精度较低。图 5.3 与 5.4 分别表示相对位置与相对速度误差, 与相对姿态误差曲线相比, EKF 估计误差虽然收敛且波动较小, 但还是比 SR-UKF 具有更大的误差值。图 5.5 与 5.6 分别表示陀螺仪与加速度计的偏置误差, 其具有与相对位置及相对速度误差曲线相类似的变化趋势, 同样, EKF 也具有比 SR-UKF 更大的偏置估计误差。从上述所有这些图中还可看出, SR-UKF 的状态估计误差均位于相应的 $\pm 3\sigma$ 界内, 表明 SR-UKF 工作在正常状态。进一步还可得出, SR-UKF 姿态估计误差的终值位于 $3\sigma = 0.04 \text{ deg}$ 之内, 相对位置与相对速度估计误差的终值分别位于 $3\sigma = 0.08 \text{ m}$ 与 $3\sigma = 0.03 \text{ m/s}$ 之内, 陀螺仪与加速度计偏置的终值分别位于 $3\sigma = 0.2 \text{ deg/hr}$ 与 $3\sigma = 0.002 \text{ m/s}^2$ 之内。

为了量化状态估计结果, 采用 TAE 与累积位置误差 (Total Position Error,

图 5.3: 相对位置误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (小初始误差)图 5.4: 相对速度误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (小初始误差)

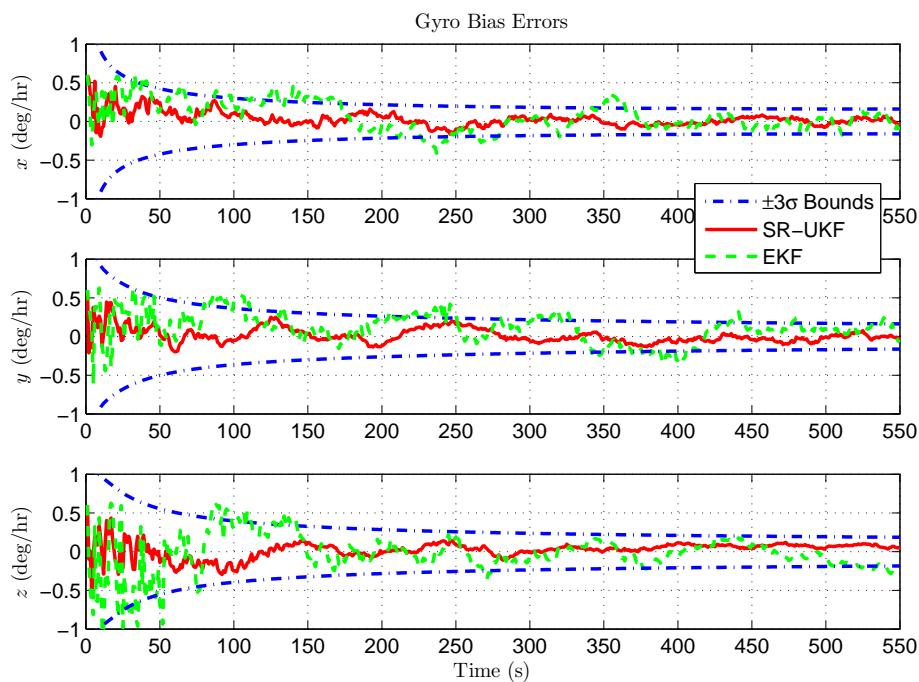


图 5.5: 陀螺仪偏置误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (小初始误差)

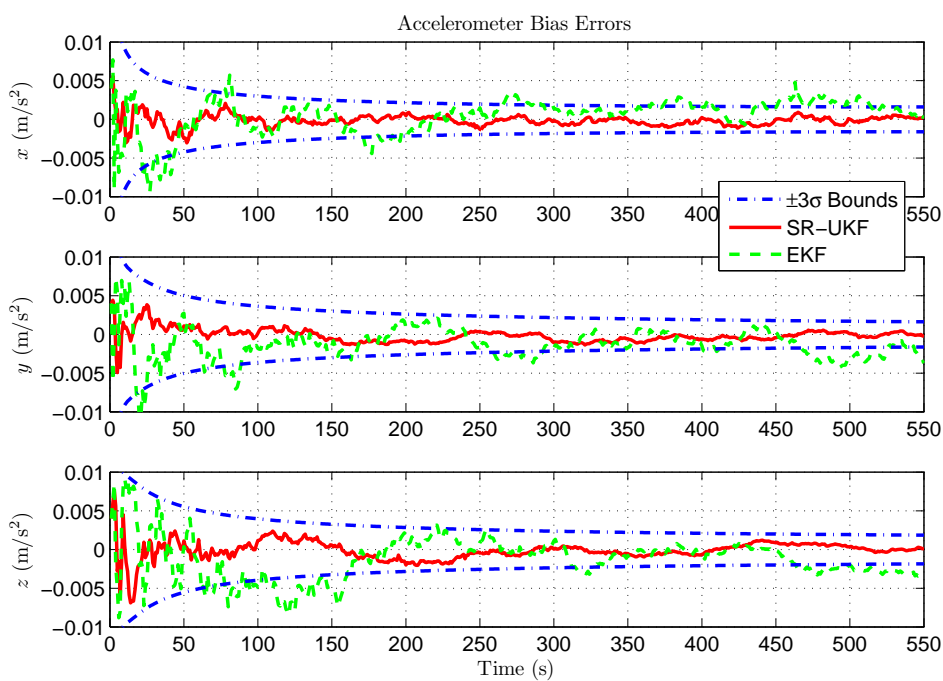


图 5.6: 加速度偏置误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (小初始误差)

TPE) 来比较有关算法的导航性能。与 TAE 类似, TPE 定义为

$$J_{pe} \equiv \int_0^{550} \|\mathbf{pe}(t)\| dt \quad (5.7)$$

其中 $\mathbf{pe}(t)$ 表示位置估计误差矢量。表 5.4 给出了 EKF 与 SR-UKF 在 100 次 Monte-Carlo 仿真中有关变量的统计特性。由此表可以看出, SR-UKF 的状态估计误差性

表 5.4: EKF 与 SR-UKF 在 VisNav 系统中的性能比较 (小初始误差)

统计类型	EKF	SR-UKF	单位
TAE (平均值)	68.4932	20.1367	deg
TAE (方差)	1.2061	0.3024	deg ²
TPE (平均值)	169.2503	60.3850	m
TPE (方差)	2.5487	1.0273	m ²
RT (平均值)	0.5412	0.6835	s

能要优于 EKF (以累积姿态误差为例提高至少 50% 以上), 与我们的期望相吻合, 这是因为 SR-UKF 对非线性系统的近似精度为二阶, 而 EKF 仅为一阶近似精度。由于算法稳定性为线性化误差的直接函数^[26], 进而表明 SR-UKF 比 EKF 除了平方根稳定性增量之外还拥有更多的稳定性优势。

图 5.7 给出了 EKF 与 SR-UKF 的状态估计最优指数曲线。很明显, SR-UKF 的最优指数接近并且快速地收敛于 1, 而 EKF 的最优指数与期望值偏离较大且收敛缓慢, 其收敛值大于 1, 该结果与前面的状态估计误差结果是一致的。

综合上面的状态估计误差、算法稳定性分析与最优指数可知, SR-UKF 在相对导航精度及算法稳定性方面确实比 EKF 有了较大的提高。另外, SR-UKF 不需要计算非线性系统的 Jacobian 矩阵, 从而更容易实现。但是, SR-UKF 比 EKF 具有更高的计算复杂度, 这可由表 5.4 中最后一行的运行时间看出来, 为了减少 SR-UKF 的计算量, 可以采用 SR-SSUKF。

5.3.2 大初始误差

在这种情况下, EKF 具有较大的估计误差, 甚至会出现滤波发散的结果, 因此下面主要比较 SR-UKF 与 SR-SSUKF 的相对导航性能。

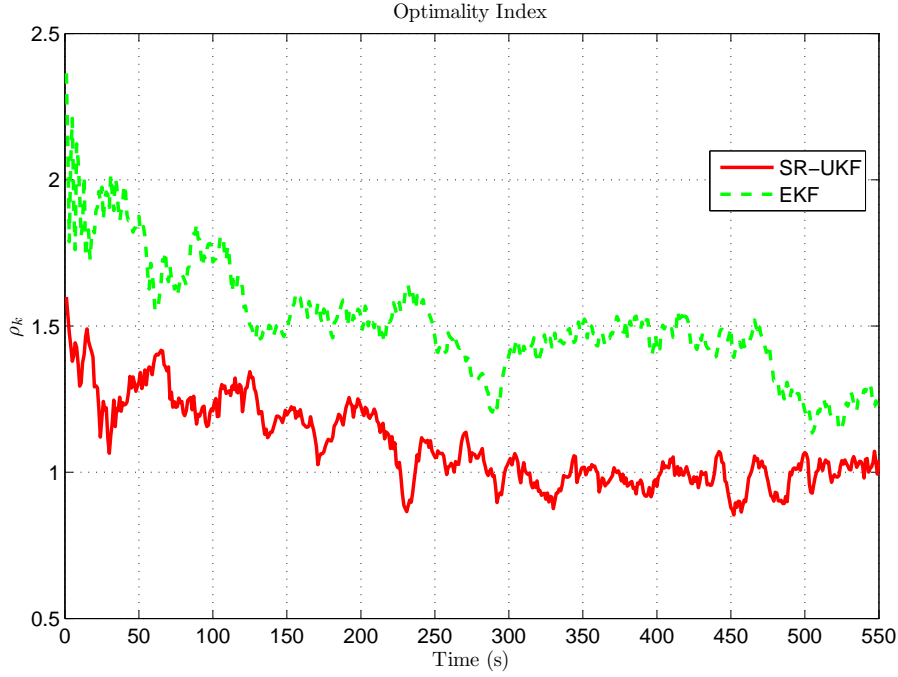


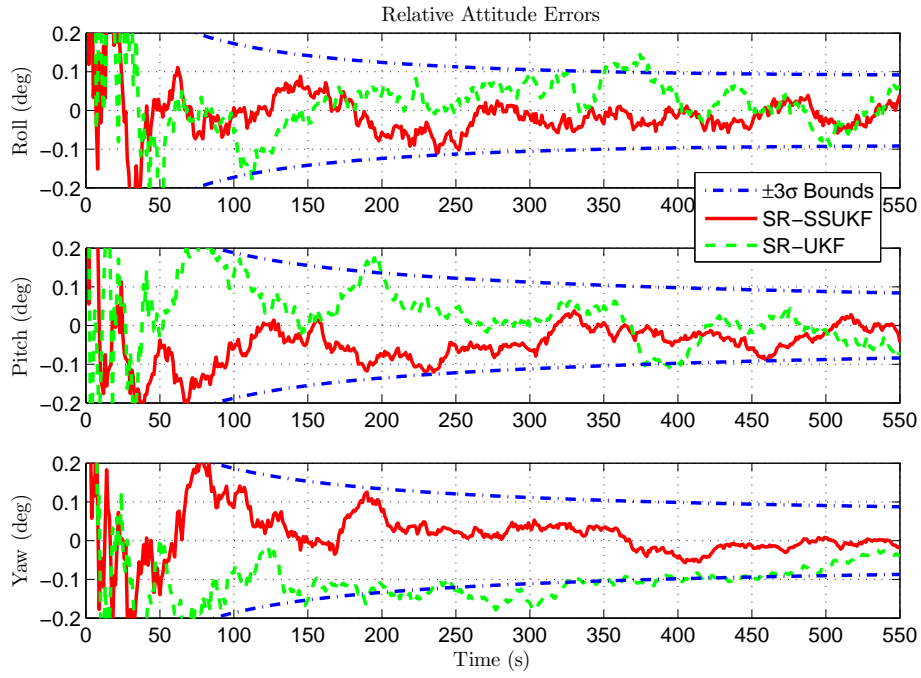
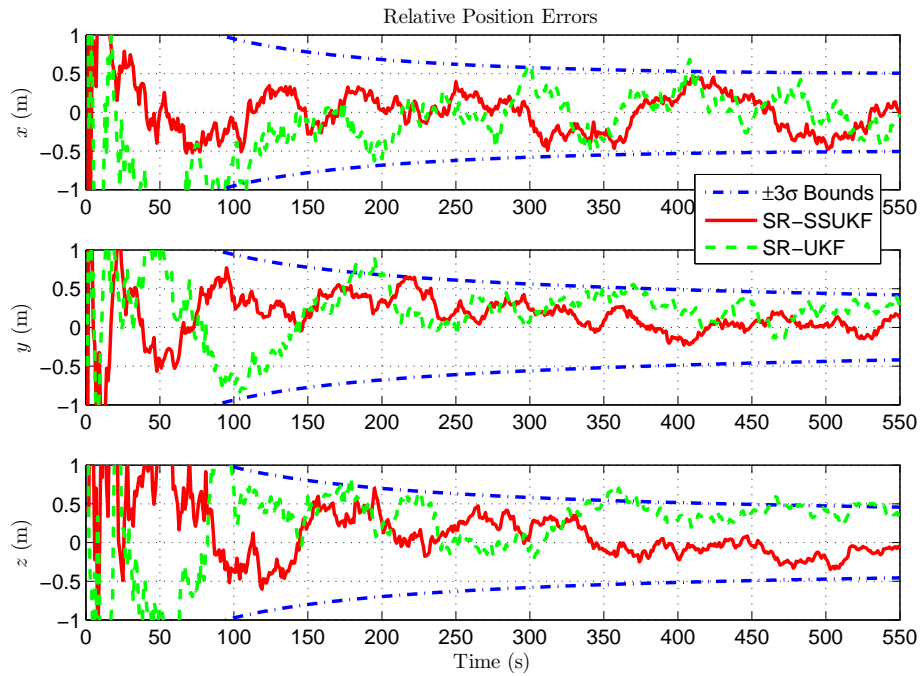
图 5.7: 最优指数 (小初始误差)

初始误差四元数不能再由式 (5.5) 给出, 而要通过式 (A.10) 将初始误差姿态角转换成四元数。初始误差姿态角为

$$\delta\alpha_0^{FL} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \frac{\pi}{180} \text{ (rad)} \quad (5.8)$$

其它状态的初值设置如前所述。初始协方差仍为对角型矩阵, 其中误差姿态部分的 3σ 界均设为 20 deg , 即 $((20/3) \times (\pi/180))^2 \text{ rad}^2$; 相对位置部分的 3σ 界均设为 15 m , 即 $(15/3)^2 \text{ m}^2$; 相对速率部分的 3σ 界均设为 5 m/s , 即 $(5/3)^2 (\text{m/s})^2$; 陀螺仪偏置部分的 3σ 界均设为 10 deg/hr , 即 $((10/3) \times (\pi/(180 \times 3600)))^2 (\text{rad/s})^2$; 加速度偏置部分的 3σ 界均设为 0.5 m/s^2 , 即 $(0.5/3)^2 (\text{m/s}^2)^2$ 。通过 DS 优化算法获得的 SR-SSUKF 自由权值为 $w_0 = 0.74$ 。

SR-SSUKF 状态估计误差及其协方差的 $\pm 3\sigma$ 界如图 5.8-5.12 所示, 为了便于比较, 图中还给出了 SR-UKF 的状态估计结果。从这些图中可看出, 在大的初始误差情况下, SR-UKF 与 SR-SSUKF 的相对导航过程均收敛, 表明两者具有较强的鲁棒性, 这与它们对非线性系统的二阶近似精度是分不开的。同时, 由

图 5.8: 相对姿态误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (大初始误差)图 5.9: 相对位置误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (大初始误差)

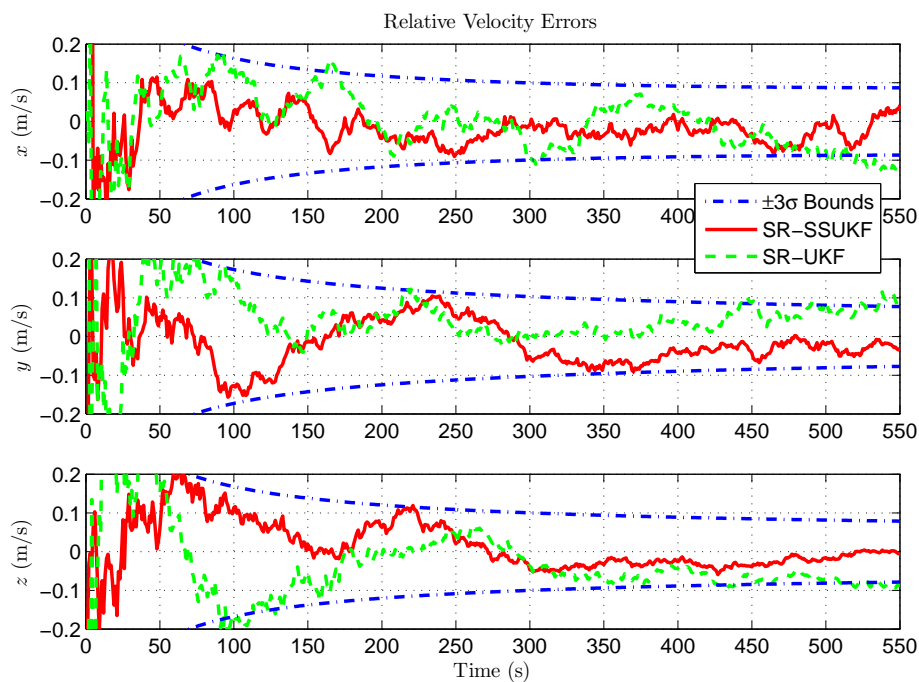


图 5.10: 相对速度误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (大初始误差)

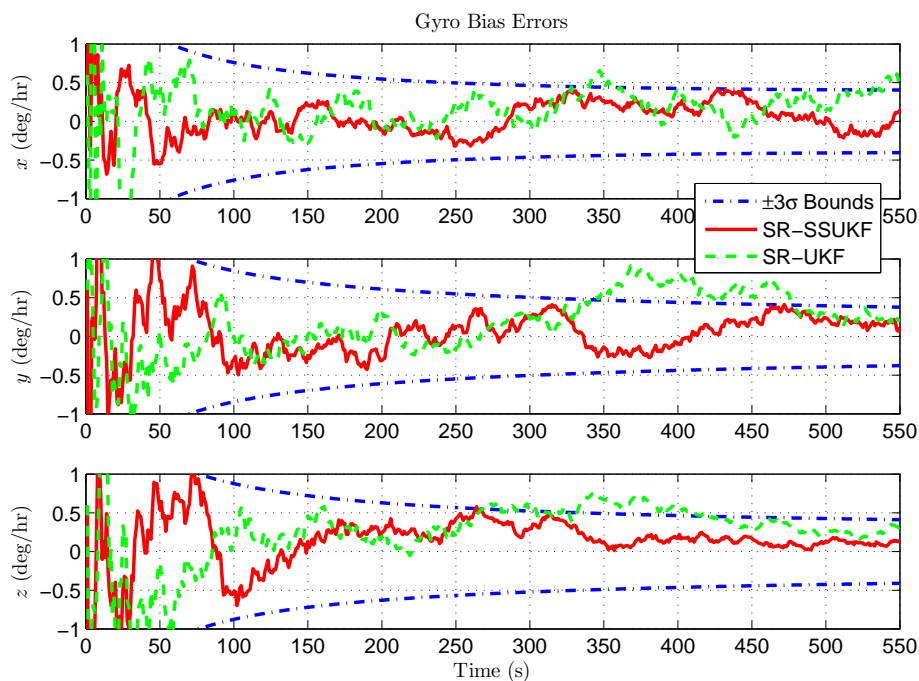


图 5.11: 陀螺仪偏置误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (大初始误差)

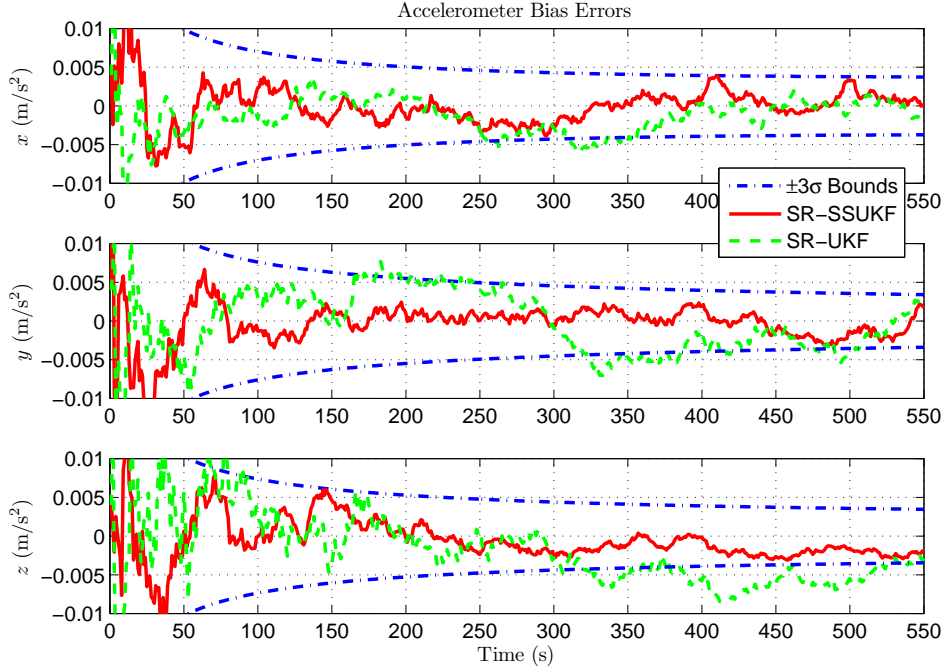


图 5.12: 加速度偏置误差及其 $\pm 3\sigma$ 界 (大初始误差)

于 SR-SSUKF 的权值经过了优化, 其状态估计误差比 SR-UKF 更小且均位于相应的 $\pm 3\sigma$ 界内, 表明 SR-SSUKF 工作在正常状态。进一步还可得出, SR-SSUKF 姿态估计误差的终值位于 $3\sigma = 0.08 \text{ deg}$ 之内, 相对位置与相对速度估计误差的终值分别位于 $3\sigma = 0.30 \text{ m}$ 与 $3\sigma = 0.06 \text{ m/s}$ 之内, 陀螺仪与加速度计偏置的终值分别位于 $3\sigma = 0.40 \text{ deg/hr}$ 与 $3\sigma = 0.006 \text{ m/s}^2$ 之内。

为了便于进行定量比较, 表 5.5 给出了 SR-UKF 与 SR-SSUKF 在 100 次 Monte-Carlo 仿真中有关变量的统计特性。由此表也可以看出, SR-SSUKF 的状态估计误差性能要优于 SR-UKF, 而且由表中最后一行的运行时间还可看出, SR-SSUKF 具有比 SR-UKF 更小的计算量, 约减少 10%。

图 5.13 给出了 SR-UKF 与 SR-SSUKF 的状态估计最优指数曲线。同前述分析, SR-SSUKF 的最优指数接近并且快速地收敛于 1, 而 SR-UKF 的最优指数与期望值偏离稍大且收敛较缓慢, 该结果与期望值相吻合。

综合上面有关内容可知, 与 SR-UKF 相比, SR-SSUKF 具有更小的计算量且其权值经过优化后具有更高的相对导航精度, 因此将其应用于基于 VisNav 系统的相对导航中是合适的。

表 5.5: SR-UKF 与 SR-SSUKF 在 VisNav 系统中的性能比较 (大初始误差)

统计类型	SR-UKF	SR-SSUKF	单位
TAE (平均值)	91.3564	86.8319	deg
TAE (方差)	2.6876	1.0462	deg ²
TPE (平均值)	419.9341	401.7172	m
TPE (方差)	8.4615	4.8253	m ²
RT (平均值)	0.6842	0.6147	s

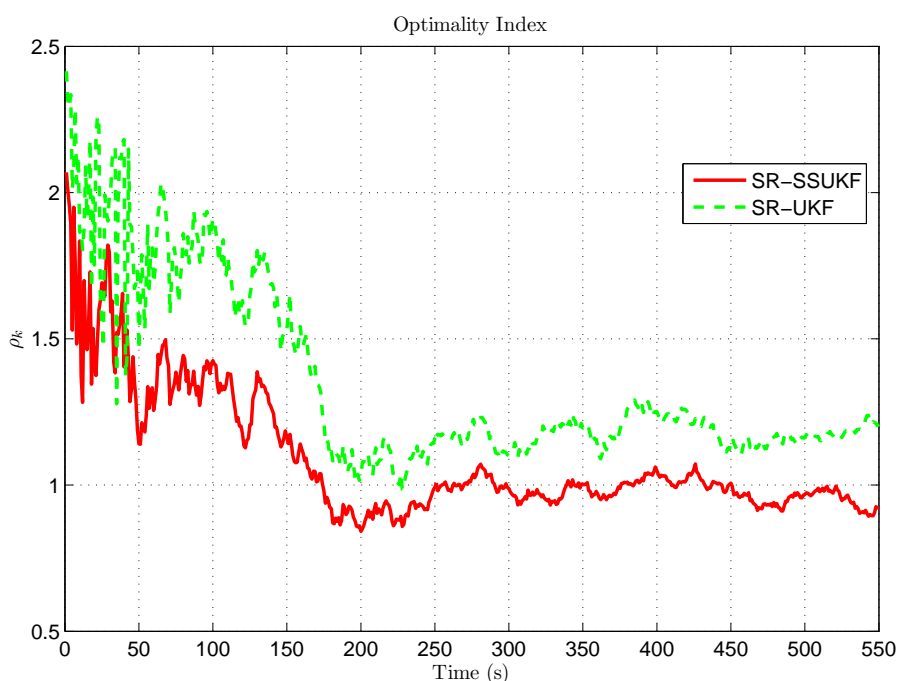


图 5.13: 最优指数 (大初始误差)

5.4 本章小结

本章在介绍仿真环境及仿真参数设置的基础上, 给出了 EKF 与 SR-SPKF 在基于 VisNav 系统的航天器相对导航中的仿真结果, 从状态估计最优指数和误差特性等方面比较了它们在两种初始条件下的性能。有关仿真结果表明: SR-SPKF 的导航精度要优于 EKF, 以累积姿态误差为例提高了至少 50% 以上。与 SR-UKF 相比, 权值经过优化的 SR-SSUKF 不仅具有更高的导航精度, 而且还具有更低的计

算复杂度 (平均运行时间比 SR-UKF 约减少 10%), 非常适合在基于 VisNav 系统的相对导航中应用。

第 6 章 总结与展望

6.1 总结

正如第 1.1 节研究背景所陈述, 本文的研究目的主要体现在两方面, 即探讨基于 VisNav 系统的相对导航所涉及的两个问题。研究内容从根本上可归结为寻求低计算复杂度的 SPKF 算法和将其应用于 VisNav 系统的相对导航问题。本节将对第 1.1 节所提出的问题做出回答, 并对本文的主要工作进行总结。

- (1) 众所周知, SPKF 的计算量与采用的 Sigma Points 的数量有关。Julier^[49] 证明了对于 n 维状态向量, 只需要 $n + 1$ 个 Sigma Points 就可以完全捕获其均值与协方差, 而 UKF 中的 SUT 却需要 $2n + 1$ 个 Sigma Points。因此, 可以通过选择其它类型的 Sigma Points 来减少 SPKF 的计算量, 近来提出的 SSUT 就可达到此目的, 其只需要 $n + 2$ 个 Sigma Points 就可获得与 SUT 相同的理论近似精度。

在 UKF 的基础上, 本文将 SSUT 与 UKF 结合起来, 提出了两种形式的 SSUKF 算法并给出了其平方根实现。SSUKF 算法虽然具有至少二阶的理论近似精度, 但其具体应用性能还受到 SSUT 权值的影响。为了进一步提高 SSUKF 算法的适用性, 本文还提出了一种针对每种具体应用的自动优化 SSUT (或 SSUKF) 权值的算法。通过具有代表性的非线性实例对有关滤波算法进行了仿真比较, 结果表明: 经过权值优化的 SR-SSUKF 在精度和计算量两方面都优于 SR-UKF, 对于状态向量维数较大的系统, 在降低计算复杂度方面尤其明显。其中, 在 SAE 中, SR-SSUKF 的计算量比 SR-UKF 约减少 6%, 在基于 VisNav 系统的相对导航中约减少 10%。因此, SR-SSUKF 非常适合替代其它 SPKF 算法在实时滤波中应用。

- (2) 作为相对导航研究的子问题, 本文还给出了一般刚体运动方程的张量描述。介绍了张量的概念及其运算, 提出了几个新的运动学张量并给出了其性质。从运动学和动力学两个方面导出了刚体张量形式的 6 DOF 运动方程, 建立了两个飞行器的通用相对运动模型。张量形式的运动方程具有一致性, 与坐标系的选择无关, 便于理解和实现。

- (3) 在 Crassidis^[44,122] 的启发下, 本文将 SPKF 应用在基于 VisNav 系统的相对导航中。详细导出了基于 VisNav 系统的 EKF 与 SR-SPKF 相对导航方程。其中, 在 SPKF 姿态四元数估计中, 通过四元数进行姿态传播, 而采用 GRP 进行姿态更新, 从而有效地维持了滤波过程中的四元数归一化约束。以两个航天器交会中的终段逼近为相对运动场景, 从状态估计最优指数和误差特性等方面全面、定量地比较了 EKF、SR-UKF 及权值经过优化的 SR-SSUKF 的性能。仿真结果显示: 对于基于 VisNav 系统的相对导航而言, SR-SPKF 在导航精度、收敛速率及算法的数值稳定性方面都优于 EKF, 以累积姿态误差为例提高至少 50% 以上。但不可否认的是, SR-SPKF 的计算量还是要大于 EKF, 因此进一步降低 SR-SPKF 的计算复杂度, 提高其实时性能就显得尤为必要。本文提出的 SR-SSUKF 算法兼有较高的理论逼近精度和较小的计算量等优点, 因而具有广阔的应用前景。

6.2 展望

本文从减少计算量的角度出发对目前的 SPKF 算法进行了改进, 并将其应用于基于 VisNav 系统的相对导航中。从非线性滤波与相对导航的角度出发, 本文还可从如下几个方向继续进行研究:

- (1) 寻求计算量更小的 SPKF 算法, 进一步提高算法的实时性能。其中, 一种可行的方式是选择新的 Sigma Points, 如采用 Schmidt 正交的 Sigma Points^[130] 可获得比 SSUKF 计算量更小的 SPKF 算法。
- (2) 在 Bayesian 推理框架的基础上, 对多维 Gaussian 积分进行数值近似可得到其它新的 Kalman 类型算法。如采用 Gauss-Hermite 积分规则的积分 Kalman 滤波 (Quadrature Kalman Filtering, QKF)^[131] 与最近提出的采用三阶 Spherical-Radial 容积积分规则的容积 Kalman 滤波 (Cubature Kalman Filtering, CKF)^[132]。
- (3) 旋转四元数估计实际上是一个在状态具有非线性等式约束的条件下进行滤波的问题^[133,134]。Simon^[135] 给出了 Kalman 滤波对具有线性等式约束的状态进行估计的算法, 并证明了约束状态估计为无偏估计。Yang^[136] 利用与 Simon 相似的投影方法给出了对具有二次型等式约束的状态进行估计的 Kalman 滤波算法, 尽管仿真结果表明该方法是可行的, 但缺乏约束状

态估计为无偏估计的理论证明。由于四元数归一化约束实际上属于二次型等式约束，因此利用上述投影算法进行四元数估计将有助于提高姿态估计的精度。

- (4) 飞行器之间的相对运动属于一般性刚体运动，其运动学方程完全可以利用 DQ 来统一描述^[137]。Wu^[69,138]首次将 DQ 应用于 INS 中并给出了两种用于组合导航系统的 DQ 误差模型。研究基于 DQ 的相对导航算法，是对现有相对导航算法的有益补充。

[This page intentionally left blank.]

参考文献

- [1] Ho, Y. C. and Lee, R. C. K., “A Bayesian Approach to Problems in Stochastic Estimation and Control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-9, October 1964, pp. 333–339.
- [2] Kalman, R. E., “A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems,” *Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME*, Vol. 82, March 1960, pp. 35–45.
- [3] Tanizaki, H., *Nonlinear Filters: Estimation and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2nd ed., August 1996.
- [4] Doucet, A., de Freitas, N., and Gordon, N., *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer-Verlag, New York, NY, June 2001.
- [5] van der Merwe, R. and Wan, E. A., “Sigma-Point Kalman Filters for Nonlinear Estimation and Sensor-Fusion – Applications to Integrated Navigation,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Providence, RI, August 2004, AIAA-2004-5120.
- [6] Carpenter, J., Leitner, J., Folta, D., and Burns, R., “Benchmark Problems for Spacecraft Formation Flying Missions,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Austin, TX, August 2003, AIAA-2003-5364.
- [7] Gill, E., D’Amico, S., and Montenbruck, O., “Autonomous Formation Flying for the PRISMA Mission,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 44, No. 3, May-June 2007, pp. 671–681.
- [8] Dogan, A., Sato, S., and Blake, W., “Flight Control and Simulation for Aerial Refueling,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, San Francisco, CA, August 2005, AIAA-2005-6264.
- [9] Dogan, A., Kim, E., and Blake, W., “Control and Simulation of Relative Motion for Aerial Refueling in Racetrack Maneuvers,” *Journal of Guidance*,

- Control, and Dynamics*, Vol. 30, No. 5, September-October 2007, pp. 1551–1557.
- [10] Grewal, M. S., Weill, L. R., and Andrews, A. P., *Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration*, John Wiley & Sons, New York, NY, 2nd ed., January 2007.
- [11] Farrell, J., *Aided Navigation: GPS with High Rate Sensors*, McGraw-Hill, New York, NY, March 2008.
- [12] Gaylor, D. E. and Lightsey, E. G., “GPS/INS Kalman Filter Design for Spacecraft Operating in the Proximity of the International Space Station,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Austin, TX, August 2003, AIAA-2003-5445.
- [13] Um, J., *Relative Navigation and Attitude Determination Using a GPS/INS Integrated System Near the International Space Station*, Ph.D. thesis, The University of Texas at Austin, December 2001.
- [14] Junkins, J. L., Hughes, D., Wazni, K., and Parriyapong, V., “Vision Based Navigation for Rendezvous, Docking and Proximity Operations,” *22nd Annual AAS Guidance and Control Conference*, American Astronautical Society, Breckenridge, CO, February 1999, AAS-99-021.
- [15] Wazni, K. P., *Vision Based Navigation Using Novel Optical Sensors*, Master’s thesis, Texas A&M University, December 1999.
- [16] Howard, R. T., Bryan, T. C., Book, M. L., and Dabney, R. W., “The Video Guidance Sensor – A Flight Proven Technology,” *22nd Annual AAS Guidance and Control Conference*, American Astronautical Society, Breckenridge, CO, February 1999, AAS-99-025.
- [17] Keller, B. S., Tadikonda, S. S. K., and Mapar, J., “Autonomous Acquisition, Rendezvous, & Docking Using a Video Guidance Sensor: Experimental Testbed Results,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Monterey, CA, August 2002, AIAA-2002-4846.

-
- [18] Lee, D.-J., *Nonlinear Bayesian Filtering with Applications to Estimation and Navigation*, Ph.D. thesis, Texas A&M University, May 2005.
- [19] Ito, K. and Xiong, K. Q., “Gaussian Filters for Nonlinear Filtering Problems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 5, May 2000, pp. 910–927.
- [20] Wu, Y., Hu, X., Hu, D., and Wu, M., “Comments on “Gaussian Particle Filtering”,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 53, No. 8, August 2005, pp. 3350–3351.
- [21] Wu, Y., Hu, D., Wu, M., and Hu, X., “A Numerical-Integration Perspective on Gaussian Filters,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 54, No. 8, August 2006, pp. 2910–2921.
- [22] Hairer, E., Nørsett, S. P., and Wanner, G., *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 3rd ed., January 2010.
- [23] Grewal, M. S. and Andrews, A. P., *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*, John Wiley & Sons, New York, NY, 3rd ed., September 2008.
- [24] Chui, C. K. and Chen, G., *Kalman Filtering: with Real-Time Applications*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 4th ed., December 2008.
- [25] Zarchan, P. and Musoff, H., *Fundamentals of Kalman Filtering: A Practical Approach*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, VA, 3rd ed., January 2009.
- [26] Reif, K., Guenther, S., Yaz, E., and Unbehauen, R., “Stochastic Stability of the Discrete-Time Extended Kalman Filter,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 4, April 1999, pp. 714–728.
- [27] Reif, K., Guenther, S., Yaz, E., and Unbehauen, R., “Stochastic Stability of the Continuous-Time Extended Kalman Filter,” *IEEE Proceedings, Control Theory Applications*, Vol. 147, No. 1, January 2000, pp. 45–52.
- [28] Bar-Shalom, Y., Li, X.-R., and Kirubarajan, T., *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*, John Wiley & Sons, New York, NY, June 2001.

- [29] Jazwinski, A. H., *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York, NY, June 1970.
- [30] Athans, M., Wishner, R. P., and Bertolini, A., “Suboptimal State Estimation for Continuous-Time Nonlinear Systems from Discrete Noisy Measurements,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-13, No. 5, October 1968, pp. 504–514.
- [31] Psiaki, M. L., “The Super-Iterated Extended Kalman Filter,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Providence, RI, August 2004, AIAA-2004-5418.
- [32] Psiaki, M. L., “Backward-Smoothing Extended Kalman Filter,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No. 5, September-October 2005, pp. 885–894.
- [33] Majji, M., “Jth Moment Extended Kalman Filtering for Estimation of Nonlinear Dynamic Systems,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Honolulu, HI, August 2008, AIAA-2008-7386.
- [34] Metzger, J., Wisotzky, K., Wendel, J., and Trommer, G. F., “Sigma-Point Filter for Terrain Referenced Navigation,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, San Francisco, CA, August 2005, AIAA-2005-6068.
- [35] Wendel, J., Maier, A., Metzger, J., and Trommer, G. F., “Comparison of Extended and Sigma-Point Kalman Filters for Tightly Coupled GPS/INS Integration,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, San Francisco, CA, August 2005, AIAA-2005-6055.
- [36] Lee, D.-J. and Alfried, K. T., “Sigma Point Kalman Filters for Efficient Orbit Estimation,” *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, American Astronautical Society, Big Sky, MT, August 2003, AAS-03-525.
- [37] Lee, D.-J. and Alfried, K. T., “Adaptive Sigma Point Filtering for State and Parameter Estimation,” *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Confer-*

- ence, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Providence, RI, August 2004, AIAA-2004-5101.
- [38] Julier, S. J., Uhlmann, J. K., and Durrant-Whyte, H. F., “A New Approach for Filtering Nonlinear Systems,” *Proceedings of the American Control Conference*, American Automatic Control Council, Seattle, WA, June 1995, pp. 1628–1632.
- [39] Julier, S. J. and Uhlmann, J. K., “A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems,” *The 11th International Symposium on Aerospace / Defence Sensing, Simulation and Controls*, SPIE, Orlando, FL, April 1997, pp. 182–193.
- [40] Julier, S. J., Uhlmann, J. K., and Durrant-Whyte, H. F., “A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 3, March 2000, pp. 477–482.
- [41] Julier, S. J. and Uhlmann, J. K., “Unscented Filtering and Nonlinear Estimation,” *Proceedings of the IEEE*, Vol. 92, No. 3, March 2004, pp. 401–422.
- [42] Nørgaard, M., Poulsen, N. K., and Ravn, O., “New Developments in State Estimation for Nonlinear Systems,” *Automatica*, Vol. 36, No. 11, November 2000, pp. 1627–1638.
- [43] Julier, S. J., “The Scaled Unscented Transformation,” *Proceedings of the American Control Conference*, American Automatic Control Council, Anchorage, AK, May 2002, pp. 4555–4559.
- [44] Crassidis, J. L., “Sigma-Point Kalman Filtering for Integrated GPS and Inertial Navigation,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 42, No. 2, April 2006, pp. 750–756.
- [45] Crassidis, J. L. and Markley, F. L., “Unscented Filtering for Spacecraft Attitude Estimation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 4, July-August 2003, pp. 536–542.
- [46] Sekhavat, P., Gong, Q., and Ross, I. M., “Unscented Kalman Filtering: NPSAT1 Ground Test Results,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control*

- Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Keystone, CO, August 2006, AIAA-2006-6352.
- [47] Sekhavat, P., Gong, Q., and Ross, I. M., “NPSAT1 Parameter Estimation Using Unscented Kalman Filtering,” *Proceedings of the American Control Conference*, American Automatic Control Council, New York, NY, July 2007, pp. 4445–4451.
- [48] Lee, D.-J. and Alfriend, K. T., “Sigma Point Filtering for Sequential Orbit Estimation and Prediction,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 44, No. 2, March-April 2007, pp. 388–398.
- [49] Julier, S. J. and Uhlmann, J. K., “Reduced Sigma Point Filters for the Propagation of Means and Covariances Through Nonlinear Transformations,” *Proceedings of the American Control Conference*, American Automatic Control Council, Anchorage, AK, May 2002, pp. 887–892.
- [50] Julier, S. J., “The Spherical Simplex Unscented Transformation,” *Proceedings of the American Control Conference*, American Automatic Control Council, Denver, CO, June 2003, pp. 2430–2434.
- [51] Tenne, D. and Singh, T., “The Higher Order Unscented Filter,” *Proceedings of the American Control Conference*, American Automatic Control Council, Denver, CO, June 2003, pp. 2441–2446.
- [52] Lévesque, J.-F., “Second-Order Simplex Sigma Points for Nonlinear Estimation,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Keystone, CO, August 2006, AIAA-2006-6093.
- [53] Wan, E. A. and van der Merwe, R., *Kalman Filtering and Neural Networks*, John Wiley & Sons, New York, NY, September 2001, Chap. 7.
- [54] van der Merwe, R. and Wan, E. A., “Efficient Derivative-Free Kalman Filters for Online Learning,” *European Symposium on Artificial Neural Networks (ESANN)*, D-Facto Public., Bruges, Belgium, April 2001, pp. 205–210.
- [55] van der Merwe, R. and Wan, E. A., “The Square-Root Unscented Kalman Filter for State and Parameter Estimation,” *Proceedings of the IEEE Inter-*

- national Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Salt Lake City, UT, May 2001, pp. 3461–3464.
- [56] Brunke, S. and Campbell, M. E., “Square Root Sigma Point Filtering for Real-Time, Nonlinear Estimation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No. 2, March-April 2004, pp. 314–317.
- [57] Kayton, M. and Fried, W. R., *Avionics Navigation Systems*, John Wiley & Sons, New York, NY, 2nd ed., April 1997.
- [58] Titterton, D. H. and Weston, J. L., *Strapdown Inertial Navigation Technology*, Institution of Electrical Engineers and Technology, London, UK, 2nd ed., 2004.
- [59] Chatfield, A. B., *Fundamentals of High Accuracy Inertial Navigation*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, VA, September 1997.
- [60] Bortz, J. E., “A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-7, No. 1, January 1971, pp. 61–66.
- [61] Miller, R. B., “A New Strapdown Attitude Algorithm,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 6, No. 4, July-August 1983, pp. 287–291.
- [62] Ignagni, M. B., “Optimal Strapdown Attitude Integration Algorithms,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 13, No. 2, March-April 1990, pp. 363–369.
- [63] Ignagni, M. B., “Efficient Class of Optimized Coning Compensation Algorithms,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 19, No. 2, March-April 1996, pp. 424–429.
- [64] Ignagni, M. B., “Duality of Optimal Strapdown Sculling and Coning Compensation Algorithms,” *Navigation, Journal of the Institute of Navigation*, Vol. 45, No. 2, Summer 1998, pp. 85–95.
- [65] Litmanovich, Y. A., Lesyuchevsky, V. M., and Gusinsky, V. Z., “Two New Classes of Strapdown Navigation Algorithms,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 23, No. 1, January-February 2000, pp. 34–44.

- [66] Roscoe, K. M., “Equivalency Between Strapdown Inertial Navigation Coning and Sculling Integrals/Algorithms,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 24, No. 2, March-April 2001, pp. 201–205.
- [67] Savage, P. G., “Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 1: Attitude Algorithms,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 1, January-February 1998, pp. 19–28.
- [68] Savage, P. G., “Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 2: Velocity and Position Algorithms,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 2, March-April 1998, pp. 208–221.
- [69] Wu, Y., Hu, X., Hu, D., Li, T., and Lian, J., “Strapdown Inertial Navigation System Algorithms Based on Dual Quaternions,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 41, No. 1, January 2005, pp. 110–132.
- [70] McCarthy, J. M., *Geometric Design of Linkages*, Springer-Verlag, New York, NY, April 2000.
- [71] Perez, A. and McCarthy, J. M., “Dual Quaternion Synthesis of Constrained Robotic Systems,” *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, Vol. 126, No. 3, May 2004, pp. 425–435.
- [72] Cho, S. Y. and Park, C. G., “Calibration of a Redundant IMU,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Providence, RI, August 2004, AIAA-2004-5123.
- [73] Pittelkau, M. E., “Calibration and Attitude Determination with Redundant Inertial Measurement Units,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No. 4, July-August 2005, pp. 743–752.
- [74] Winkler, S., Buschmann, M., Krüger, L., Schulz, H.-W., and Vörsmann, P., “State Estimation by Multi-Sensor Fusion for Autonomous Mini and Micro Aerial Vehicles,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, San Francisco, CA, August 2005, AIAA-2005-5840.
- [75] Oh, S.-M., *Nonlinear Estimation for Vision-Based Air-to-Air Tracking*, Ph.D. thesis, Georgia Institute of Technology, December 2007.

-
- [76] Shuster, M. D., “A Survey of Attitude Representations,” *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 41, No. 4, October-December 1993, pp. 439–517.
- [77] Oshman, Y. and Markley, F. L., “Minimal-Parameter Attitude Matrix Estimation from Vector Observations,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 4, July-August 1998, pp. 595–602.
- [78] Farrell, J. L., “Attitude Determination by Kalman Filter,” *Automatica*, Vol. 6, No. 3, May 1970, pp. 419–430.
- [79] Pittelkau, M. E., “Rotation Vector in Attitude Estimation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 6, November-December 2003, pp. 855–860.
- [80] Hamilton, W. R., *Elements of Quaternions*, Longmans, Green and Co., London, England, 1866.
- [81] Lefferts, E. J., Markley, F. L., and Shuster, M. D., “Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 5, No. 5, September-October 1982, pp. 417–429.
- [82] Cheng, Y. and Crassidis, J. L., “Particle Filtering for Sequential Spacecraft Attitude Estimation,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Providence, RI, August 2004, AIAA-2004-5337.
- [83] Cheng, Y. and Crassidis, J. L., “Particle Filtering for Attitude Estimation Using a Minimal Local-Error Representation,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Chicago, IL, August 2009, AIAA-2009-6309.
- [84] Carmi, A. and Oshman, Y., “Fast Particle Filtering for Attitude and Angular-Rate Estimation from Vector Observations,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 1, January-February 2009, pp. 70–78.
- [85] Carmi, A. and Oshman, Y., “Adaptive Particle Filtering for Spacecraft Attitude Estimation from Vector Observations,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 1, January-February 2009, pp. 232–241.

- [86] Crassidis, J. L., Markley, F. L., and Cheng, Y., “Survey of Nonlinear Attitude Estimation Methods,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 30, No. 1, January-February 2007, pp. 12–28.
- [87] Gunnam, K. K., Hughes, D. C., Junkins, J. L., and Kehtarnavaz, N., “A Vision-Based DSP Embedded Navigation Sensor,” *IEEE Sensor Journal*, Vol. 2, No. 5, October 2002, pp. 428–442.
- [88] Gunnam, K. K., *A DSP Embedded Optical Navigation System*, Master’s thesis, Texas A&M University, May 2003.
- [89] Du, J.-Y., *Vision Based Navigation System for Autonomous Proximity Operations: An Experimental and Analytical Study*, Ph.D. thesis, Texas A&M University, December 2004.
- [90] Bowers, R. E., *Estimation Algorithm for Autonomous Aerial Refueling Using a Vision Based Relative Navigation System*, Master’s thesis, Texas A&M University, August 2005.
- [91] Kimmett, J., *Autonomous Aerial Refueling of UAVs Utilizing a Vision Based Navigation System*, Master’s thesis, Texas A&M University, August 2002.
- [92] Alonso, R., Crassidis, J. L., and Junkins, J. L., “Vision-Based Relative Navigation for Formation Flying of Spacecraft,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Denver, CO, August 2000, AIAA-2000-4439.
- [93] Crassidis, J. L., Alonso, R., and Junkins, J. L., “Optimal Attitude and Position Determination from Line-of-Sight Measurements,” *The Richard H. Battin Astrodynamics Conference*, American Astronautical Society, College Station, TX, March 2000, AAS-00-268.
- [94] Kimmett, J., Valasek, J., and Junkins, J. L., “Autonomous Aerial Refueling Utilizing a Vision Based Navigation System,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Monterey, CA, August 2002, AIAA-2002-4469.
- [95] Valasek, J., Gunnam, K., Kimmett, J., Tandale, M. D., Junkins, J. L., and Hughes, D., “Vision-Based Sensor and Navigation System for Autonomous

- Air Refueling,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No. 5, September-October 2005, pp. 979–989.
- [96] Cheng, Y., Crassidis, J. L., and Markley, F. L., “Attitude Estimation for Large Field-of-View Sensors,” *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 54, No. 3–4, July-December 2006, pp. 433–448.
- [97] Shuster, M. D. and Oh, S. D., “Three-Axis Attitude Determination from Vector Observations,” *Journal of Guidance and Control*, Vol. 4, No. 1, January-February 1981, pp. 70–77.
- [98] Kim, S.-G., *Kalman Filtering for Relative Spacecraft Attitude and Position Estimation*, Master’s thesis, The State University of New York at Buffalo, May 2005.
- [99] Kim, S.-G., Crassidis, J. L., Cheng, Y., and Fosbury, A. M., “Kalman Filtering for Relative Spacecraft Attitude and Position Estimation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 30, No. 1, January-February 2007, pp. 133–143.
- [100] Fosbury, A. M. and Crassidis, J. L., “Kalman Filtering for Relative Inertial Navigation of Uninhabited Air Vehicles,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Keystone, CO, August 2006, AIAA-2006-6544.
- [101] Fosbury, A. M., *Control and Kalman Filtering for Relative Dynamics of a Formation of Uninhabited Autonomous Vehicles*, Ph.D. thesis, The State University of New York at Buffalo, August 2006.
- [102] Fosbury, A. M. and Crassidis, J. L., “Relative Navigation of Air Vehicles,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 4, July-August 2008, pp. 824–834.
- [103] Banas, W. D., *Micro-Arcsecond Line-of-Sight Filtered Performance for Spacecraft Formation Flying*, Master’s thesis, The State University of New York at Buffalo, May 2008.

-
- [104] Perea, L. and Elosegui, P., “New State Update Equation for the Unscented Kalman Filter,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 5, September-October 2008, pp. 1500–1503.
- [105] Wu, Y., Hu, D., Wu, M., and Hu, X., “Unscented Kalman Filtering for Additive Noise Case: Augmented versus Nonaugmented,” *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 12, No. 5, May 2005, pp. 357–360.
- [106] Hager, W. W. and Zhang, H. C., “A Survey of Nonlinear Conjugate Gradient Methods,” *Pacific Journal of Optimization*, Vol. 2, No. 1, January 2006, pp. 35–58.
- [107] Gill, P. E., Murray, W., and Saunders, M. A., “SNOPT: An SOP Algorithm for Large-Scale Constrained Optimaization,” *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 12, No. 4, 2002, pp. 979–1006.
- [108] Venkatraman, S. and Yen, G. G., “A Generic Framework for Constrained Optimization Using Genetic Algorithms,” *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 9, No. 4, August 2005, pp. 424–435.
- [109] Kennedy, J. and Eberhart, R. C., “Particle Swarm Optimization,” *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, IEEE Service Center, Perth, Australia, 1995, pp. 1942–1948.
- [110] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 3rd ed., September 2007.
- [111] Powell, T. D., “Automated Tuning of an Extended Kalman Filter Using the Downhill Simplex Algorithm,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 5, September-October 2002, pp. 901–908.
- [112] VanDyke, M. C., Schwartz, J. L., and Hall, C. D., “Unscented Kalman Filtering for Spacecraft Attitude State and Parameter Estimation,” *14th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, American Astronautical Society, Maui, HI, February 2004, AAS-04-115.
- [113] Leung, W. S. W. and Damaren, C. J., “A Comparison of the Pseudo-Linear and Extended Kalman Filters for Spacecraft Attitude Estimation,” *AIAA*

- Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Providence, RI, August 2004, AIAA-2004-5341.
- [114] Karlgaard, C. D. and Schaub, H., “Adaptive Huber-Based Filtering Using Projection Statistics: Application to Spacecraft Attitude Estimation,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Honolulu, HI, August 2008, AIAA-2008-7389.
- [115] Marschke, J. M. and Crassidis, J. L., “Attitude Estimation Without Rate Gyros Using Generalized Multiple Model Adaptive Estimation,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Chicago, IL, August 2009, AIAA-2009-5946.
- [116] Oshman, Y. and Carmi, A., “Attitude Estimation from Vector Observations Using Genetic-Algorithm-Embedded Quaternion Particle Filter,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 4, July-August 2006, pp. 879–891.
- [117] Zipfel, P. H., *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, VA, 2nd ed., April 2007.
- [118] Schaub, H. and Junkins, J. L., *Analytical Mechanics of Space Systems*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, VA, 2nd ed., September 2009.
- [119] Wu, Y., “A Framework of Strapdown Attitude Algorithms Using Generalized Kinematic Vector,” May 2009, Private Communication.
- [120] Curtis, H. D., *Orbital Mechanics for Engineering Students*, Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 2nd ed., November 2009.
- [121] Farrell, J. and Barth, M., *The Global Positioning System and Inertial Navigation*, McGraw-Hill, New York, NY, December 1998.
- [122] Crassidis, J. L., “Sigma-Point Kalman Filtering for Integrated GPS and Inertial Navigation,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, San Francisco, CA, August 2005, AIAA-2005-6052.

- [123] Shuster, M. D., “Kalman Filtering of Spacecraft Attitude and the QUEST Model,” *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 38, No. 3, July-September 1990, pp. 377–393.
- [124] Schaub, H. and Junkins, J. L., “Stereographic Orientation Parameters for Attitude Dynamics: A Generalization of the Rodrigues Parameters,” *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 44, No. 1, January-March 1996, pp. 1–20.
- [125] Crassidis, J. L. and Junkins, J. L., *Optimal Estimation of Dynamic Systems*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, April 2004.
- [126] van Loan, C. F., “Computing Integrals Involving the Matrix Exponential,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-23, No. 3, June 1978, pp. 396–404.
- [127] Markley, F. L., “Attitude Error Representations for Kalman Filtering,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 2, March-April 2003, pp. 311–317.
- [128] Fehse, W., *Automated Rendezvous and Docking of Spacecraft*, Cambridge University Press, New York, NY, December 2003.
- [129] Haas, B. M., *Sensitivity Study: The Effects of Beacon Location Errors on a Vehicle’s Position and Attitude Estimation for a Vision-Based Navigation System*, Master’s thesis, The State University of New York at Buffalo, May 2005.
- [130] Li, W.-C., Wei, P., and Xiao, X.-C., “A Novel Simplex Unscented Transform and Filter,” *Proceedings of the International Symposium on Communications and Information Technologies (ISCIT)*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Sydney, Australia, October 2007, pp. 926–931.
- [131] Arasaratnam, I., Haykin, S., and Elliott, R. J., “Discrete-Time Nonlinear Filtering Algorithms Using Gauss-Hermite Quadrature,” *Proceedings of the IEEE*, Vol. 95, No. 5, May 2007, pp. 953–977.
- [132] Arasaratnam, I. and Haykin, S., “Cubature Kalman Filters,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 54, No. 6, June 2009, pp. 1254–1269.

-
- [133] De Geeter, J., Van Brussel, H., De Schutter, J., and Decréton, M., “A Smoothly Constrained Kalman Filter,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 19, No. 10, October 1997, pp. 1171–1177.
- [134] Julier, S. J. and LaViola, J. J., “On Kalman Filtering With Nonlinear Equality Constraints,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 55, No. 6, June 2007, pp. 2774–2784.
- [135] Simon, D. and Chia, T. L., “Kalman Filtering with State Equality Constraints,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 38, No. 1, January 2002, pp. 128–136.
- [136] Yang, C. and Blasch, E., “Kalman Filtering with Nonlinear State Constraints,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 45, No. 1, January 2009, pp. 70–84.
- [137] Funda, J., Taylor, R. H., and Paul, R. P., “On Homogeneous Transforms, Quaternions, and Computational Efficiency,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 3, June 1990, pp. 382–388.
- [138] Wu, Y., Hu, X., Wu, M., and Hu, D., “Strapdown Inertial Navigation using Dual Quaternion Algebra: Error Analysis,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 42, No. 1, January 2006, pp. 259–266.
- [139] Phillips, W. F., Hailey, C. E., and Gebert, G. A., “Review of Attitude Representations Used for Aircraft Kinematics,” *Journal of Aircraft*, Vol. 38, No. 4, July-August 2001, pp. 718–737.

[This page intentionally left blank.]

附录 A 各种姿态描述方式之间的转换

姿态的描述方式较多，在很多场合需要在各种姿态描述方式之间进行转换，下面进行介绍。

A.1 Euler 角 \Leftrightarrow 姿态矩阵

Euler 角转换成姿态矩阵的方程由式 (3.24) 给出，即

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

由式 (A.1) 可得姿态矩阵转换成 Euler 角的公式为

$$\psi = \arctan\left(\frac{A_{12}}{A_{11}}\right) \quad (\text{A.2a})$$

$$\theta = -\arcsin(A_{13}) \quad (\text{A.2b})$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{A_{23}}{A_{33}}\right) \quad (\text{A.2c})$$

A.2 四元数 \Leftrightarrow 姿态矩阵

四元数转换成姿态矩阵的公式为

$$A = \begin{bmatrix} q_4^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & q_4^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

由式 (A.3) 及四元数归一化条件可得

$$\begin{bmatrix} q_1^2 \\ q_2^2 \\ q_3^2 \\ q_4^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + A_{11} - A_{22} - A_{33} \\ 1 - A_{11} + A_{22} - A_{33} \\ 1 - A_{11} - A_{22} + A_{33} \\ 1 + A_{11} + A_{22} + A_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4a})$$

$$\begin{bmatrix} q_1 q_4 \\ q_2 q_4 \\ q_3 q_4 \\ q_1 q_2 \\ q_1 q_3 \\ q_2 q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} A_{23} - A_{32} \\ A_{31} - A_{13} \\ A_{12} - A_{21} \\ A_{12} + A_{21} \\ A_{31} + A_{13} \\ A_{23} + A_{32} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4b})$$

由式 (A.4) 可得姿态矩阵转换成四元数的算法为^[139]

(1) 判断

$$q_m^2 = \max \{q_1^2, q_2^2, q_3^2, q_4^2\} \quad (\text{A.5})$$

(2) 若 $q_1^2 = q_m^2$

$$q_1 = \frac{\sqrt{1 + A_{11} - A_{22} - A_{33}}}{2} \quad (\text{A.6a})$$

$$q_2 = \frac{A_{12} + A_{21}}{4q_m} \quad (\text{A.6b})$$

$$q_3 = \frac{A_{31} + A_{13}}{4q_m} \quad (\text{A.6c})$$

$$q_4 = \frac{A_{23} - A_{32}}{4q_m} \quad (\text{A.6d})$$

(3) 若 $q_2^2 = q_m^2$

$$q_2 = \frac{\sqrt{1 - A_{11} + A_{22} - A_{33}}}{2} \quad (\text{A.7a})$$

$$q_1 = \frac{A_{12} + A_{21}}{4q_m} \quad (\text{A.7b})$$

$$q_3 = \frac{A_{23} + A_{32}}{4q_m} \quad (\text{A.7c})$$

$$q_4 = \frac{A_{31} - A_{13}}{4q_m} \quad (\text{A.7d})$$

(4) 若 $q_3^2 = q_m^2$

$$q_3 = \frac{\sqrt{1 - A_{11} - A_{22} + A_{33}}}{2} \quad (\text{A.8a})$$

$$q_1 = \frac{A_{31} + A_{13}}{4q_m} \quad (\text{A.8b})$$

$$q_2 = \frac{A_{23} + A_{32}}{4q_m} \quad (\text{A.8c})$$

$$q_4 = \frac{A_{12} - A_{21}}{4q_m} \quad (\text{A.8d})$$

(5) 若 $q_4^2 = q_m^2$

$$q_4 = \frac{\sqrt{1 + A_{11} + A_{22} + A_{33}}}{2} \quad (\text{A.9a})$$

$$q_1 = \frac{A_{23} - A_{32}}{4q_m} \quad (\text{A.9b})$$

$$q_2 = \frac{A_{31} - A_{13}}{4q_m} \quad (\text{A.9c})$$

$$q_3 = \frac{A_{12} - A_{21}}{4q_m} \quad (\text{A.9d})$$

A.3 Euler 角 \Leftrightarrow 四元数

Euler 角转换成四元数的公式为

$$q_1 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (\text{A.10a})$$

$$q_2 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (\text{A.10b})$$

$$q_3 = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (\text{A.10c})$$

$$q_4 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (\text{A.10d})$$

四元数转换成 Euler 角的公式为

$$\psi = \arctan\left(\frac{2(q_1q_2 + q_3q_4)}{q_4^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\right) \quad (\text{A.11a})$$

$$\theta = \arcsin(2(q_2q_4 - q_1q_3)) \quad (\text{A.11b})$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{2(q_1q_4 + q_2q_3)}{q_4^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2}\right) \quad (\text{A.11c})$$

[This page intentionally left blank.]

攻读博士学位期间发表的论文

- [1] **Tang, X.**, Yan, J., and Zhong D., “Square-Root Sigma-Point Kalman Filtering for Spacecraft Relative Navigation,” *Acta Astronautica*, Vol. 66, No. 5-6, March-April 2010, pp. 704-713. (**SCI: 000273916300010, EI: 20095212577456**)
- [2] **Tang, X.**, Zhao, X., and Zhang X., “The Square-Root Spherical Simplex Unscented Kalman Filter for State and Parameter Estimation,” *International Conference on Signal Processing Proceedings (ICSP)*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Beijing, China, October 2008, pp. 260-263. (**EI: 20092612145003**)
- [3] **唐小军**, 闫杰, 张绪斌, “单球无味卡尔曼滤波在飞船姿态估计中的应用,” 计算机测量与控制, Vol. 17, No. 9, September 2009, pp. 1822-1825。
- [4] **唐小军**, 闫杰, 尉建利, “平方根 Spherical Simplex UKF 在飞船姿态估计中的应用,” 火力与指挥控制, Vol. 35, No. 2, February 2010, pp. 57-60。

[This page intentionally left blank.]

致 谢

衷心感谢我的导师闫杰教授。闫老师给我提供了格外宽松的科研环境，使我可以在自己感兴趣的研究方向进行深入研究。我所做的每项工作，所发表的每篇论文都浸润着闫老师的辛勤汗水。闫老师开阔的视野、敏捷的思维、严谨的学风和宽容的胸怀使我在博士阶段的学习和生活中受益匪浅，并将激励我在学术道路上不断前进。

感谢飞行控制与仿真技术研究所的老师和同学们。王民钢教授扎实的理论功底和专业知识对我帮助甚大。陈凯副教授经常与我探讨有关导航问题，并提供了许多帮助。钟都都帮我绘制了有关示意图。

感谢赵晓蓓副教授及其研究生张绪斌，后者帮我完成了很多排版工作。

.....

感谢所有支持、帮助和关心过我的人。

[This page intentionally left blank.]