

第五章 线性系统的频域分析与校正

控制系统的输入信号往往可以表示为不同频率正弦信号的合成。系统对不同频率正弦信号的输出特性不同。控制系统的频率特性是系统在正弦信号作用下的响应特性。用频率特性研究线性系统的方法称为频率响应法。应用频率响应法也能获得系统的稳定性、快速性、准确性等信息，特点如下：

- (1) 系统或元部件频率特性可用分析法和实验法获得，并可用多种形式的曲线表示，使得系统分析和控制器设计可以用图解法进行；
- (2) 频率特性物理意义明确。一阶二阶系统，频域性能指标和时域指标有确定的对应关系，高阶系统可建立近似关系；
- (3) 控制系统的频率设计法可以兼顾动态性能和噪声抑制两方面的要求；

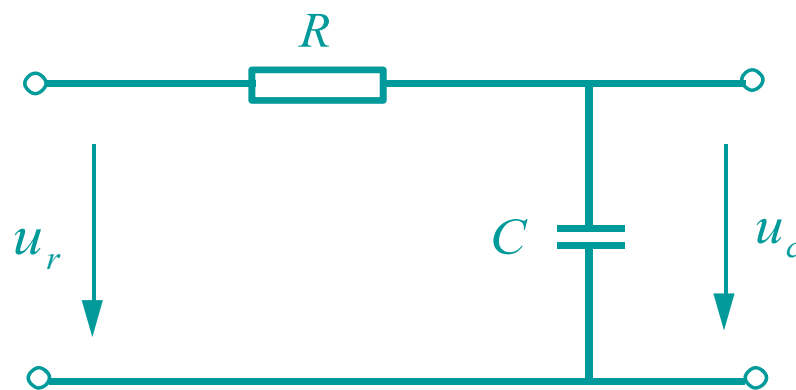
5-1 频率特性的基本概念

一、频率特性的定义：

以RC网络为例：

$$T \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$



当 $u_r = R \sin \omega t$ 初始条件 $u_c(0) = u_{c0}$ 时，利用拉氏变换，有：

$$T(sU_c(s) - u_{c0}) + U_c(s) = U_r(s)$$

$$U_c(s) = \frac{1}{Ts + 1} (Tu_{c0} + U_r(s)) = \frac{1}{Ts + 1} \left(Tu_{c0} + \frac{R\omega}{s^2 + \omega^2} \right)$$

$$= \frac{u_{c0}}{s + \frac{1}{T}} + \frac{R\omega T}{1 + T^2\omega^2} \frac{1}{s + \frac{1}{T}} + \frac{R\omega}{1 + T^2\omega^2} \frac{1 - Ts}{s^2 + \omega^2}$$

$$U_c(s) = \frac{u_{c0}}{s + \frac{1}{T}} + \frac{R\omega T}{1 + T^2\omega^2} \frac{1}{s + \frac{1}{T}} + \frac{R\omega}{1 + T^2\omega^2} \frac{1 - Ts}{s^2 + \omega^2}$$

反变换

$$u_c(t) = u_{c0}e^{\frac{-t}{T}} + \frac{R\omega T}{1 + T^2\omega^2}e^{\frac{-t}{T}} + \frac{R}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \sin \omega t - \frac{T\omega}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \cos \omega t \right]$$

$$= \underbrace{u_{c0}e^{\frac{-t}{T}} + \frac{R\omega T}{1 + T^2\omega^2}e^{\frac{-t}{T}}}_{\text{暂态分量, } \rightarrow 0} + \underbrace{\frac{R}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \sin(\omega t - \arctg \omega T)}_{\text{稳态分量}}$$

$$u_{cs}(t) = R \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}}_{\substack{\text{幅值比 } A(\omega) \\ \text{幅频特性}}} \sin \left(\omega t - \underbrace{\arctg \omega T}_{\substack{\text{相位差 } \varphi(\omega) \\ \text{相频特性}}} \right)$$

$$u_r = R \sin \omega t$$

上述稳定的一阶线性定常系统，在正弦信号的作用下，其输出的稳态分量也是同角频率的正弦信号，但振幅和相位一般不同于输入信号，振幅的放大倍数和相位的偏移量是输入信号角频率 ω 的函数，这两个函数仅和系统结构及参数有关。本结论可推广到任意阶线性定常系统。

$$C(s) = R(s)\Phi(s)$$

假设系统稳定，特征根为 $-s_1, -s_2, \dots, -s_n$ 且互不相等

$$C(s) = R(s)\Phi(s) = \frac{R\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \frac{M(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_n)}$$

$$= \frac{B}{(s+j\omega)} + \frac{\bar{B}}{(s-j\omega)} + \frac{A_1}{(s+s_1)} + \frac{A_2}{(s+s_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(s+s_n)}$$

拉氏变换

$$c(t) = \underbrace{Be^{-j\omega t} + \bar{B}e^{j\omega t}}_{\text{稳态分量}} + \underbrace{A_1e^{-s_1t} + A_2e^{-s_2t} + \cdots + A_ne^{-s_nt}}_{\text{暂态分量}}$$

$$B = \Phi(s) \frac{R\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} (s+j\omega) \bigg|_{s=-j\omega} = -\frac{R}{2j} \Phi(-j\omega)$$

$$= -\frac{R}{2j} |\Phi(j\omega)| e^{-j\angle\Phi(j\omega)} \quad \text{这里有 } |\Phi(-j\omega)| = |\Phi(j\omega)|$$

$$\text{同理 } \bar{B} = \frac{R}{2j} |\Phi(j\omega)| e^{j\angle\Phi(j\omega)}$$

$$B = -\frac{R}{2j} |\Phi(j\omega)| e^{-j\angle\Phi(j\omega)}, \quad B = \frac{R}{2j} |\Phi(j\omega)| e^{j\angle\Phi(j\omega)}$$

$$\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \sin \theta$$

$$c_{\text{稳态}}(t) = -\frac{R}{2j} |\Phi(j\omega)| e^{-j\angle\Phi(j\omega)} e^{-j\omega t} + \frac{R}{2j} |\Phi(j\omega)| e^{j\angle\Phi(j\omega)} e^{j\omega t}$$

$$= R |\Phi(j\omega)| \left\{ \frac{1}{2j} e^{j[\omega t + \angle\Phi(j\omega)]} - \frac{1}{2j} e^{-j[\omega t + \angle\Phi(j\omega)]} \right\} = R \underbrace{|\Phi(j\omega)|}_{\substack{\text{幅值比 } A(\omega) \\ \text{幅频特性}}} \sin \left(\omega t + \underbrace{\angle\Phi(j\omega)}_{\substack{\text{相位差 } \varphi(\omega) \\ \text{相频特性}}} \right)$$

$$\Phi(j\omega) = |\Phi(j\omega)| e^{j\angle\Phi(j\omega)}$$

线性定常系统，在正弦信号的作用下：

- (1) 输出的稳态分量是与输入同角频率的正弦信号；
- (2) 输出的稳态分量的振幅和输入量的振幅相差一个系数，该系数是角频率的函数，其值等于在闭环传递函数中令 $s = j\omega$ 时得到的复数的模，该函数只和系统的结构及参数有关；（幅频特性）
- (3) 输出的稳态分量相对于输入量一般有相位移动，移动量是角频率的函数，其值等于在闭环传递函数中令 $s = j\omega$ 时得到的复数的相角，该函数只和系统的结构及参数有关。（相频特性）

频率特性定义一：当输入是正弦信号时，线性定常系统**稳态**输出与输入信号的幅值比、相位差。

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \\ \phi(\omega) = \phi_c - \phi_r = -\arctg \omega T \end{cases}$$

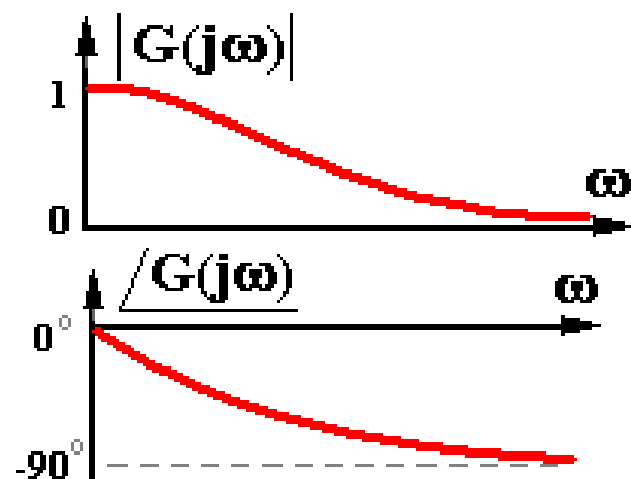
统称频率特性。

幅频特性

RC网络幅频特性

相频特性

RC网络相频特性



频率特性图

频率特性是以 $j\omega$ 为自变量的复变函数。

$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ —— 频率特性（复数形式）

$P(\omega) = A(\omega) \cos \phi(\omega)$ **实频特性** $Q(\omega) = A(\omega) \sin \phi(\omega)$ **虚频特性**

$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$ **幅频形式** $\phi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$ **相频形式**

RC网络传递函数 $\Phi(s) = \frac{1}{Ts+1}$, 令 $s = j\omega$, 则

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{jT\omega+1} = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} - j \frac{T\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \right)$$

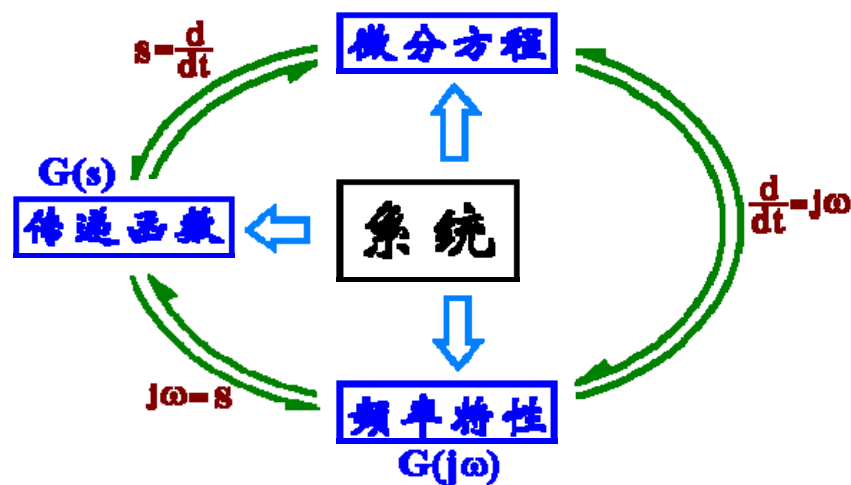
$$= \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{-j\arctg\omega T} = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

传递函数与频率特性的关系:

频率特性定义二: 在**闭环**传递函数中令 $s=j\omega$, 即得系统的频率特性, 频率特性是复变量在虚轴上取值的特殊传递函数。

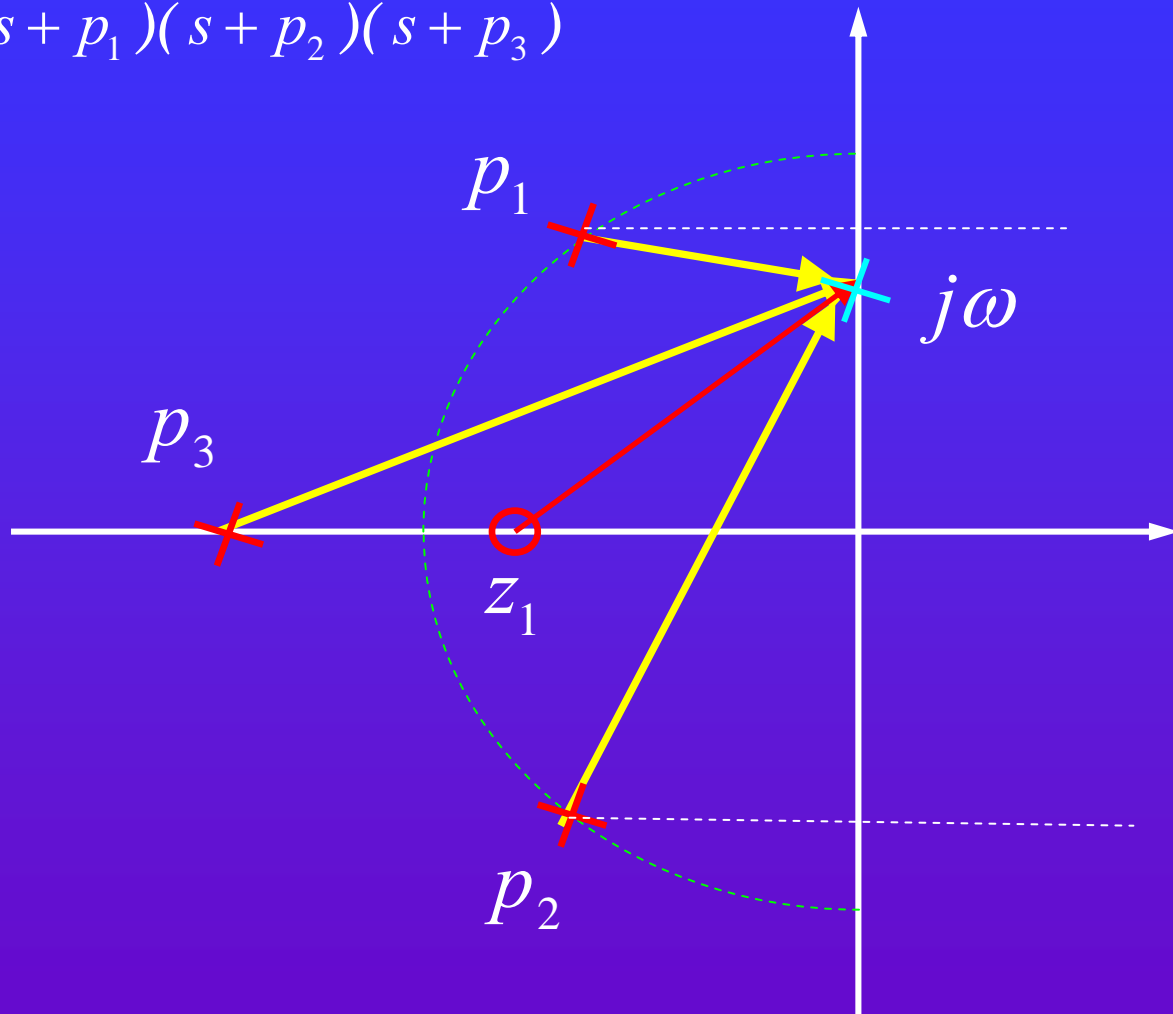
$$\underbrace{\Phi(s)}_{\text{传递函数}} \xRightarrow{s=j\omega} \underbrace{\Phi(j\omega)}_{\text{频率特性}}$$

$$\Phi(j\omega) = |\Phi(j\omega)| e^{j\angle\Phi(j\omega)}$$

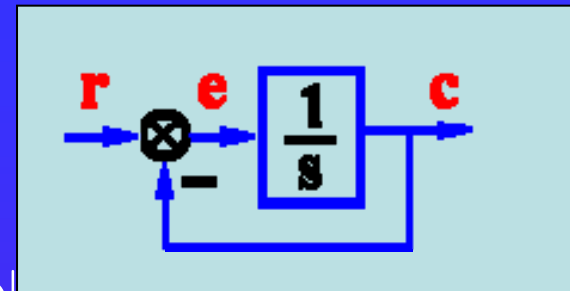


复平面内频率特性的几何意义

$$\Phi(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)}$$



例 系统结构图如图所示, $r(t)=3\sin(2t+30^\circ)$, 求 $c_s(t)$, $e_s(t)$ 。



$$\text{解. } \Phi(s) = \frac{1}{s+1} \begin{cases} |\Phi(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+j\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \stackrel{\omega=2}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|c_s(t)|}{3} \\ \angle\Phi(j\omega) = -\arctan \omega \stackrel{\omega=2}{=} -63.4^\circ = \angle c_s(t) - \angle r(t) = \angle c_s(t) - 30^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} |c_s(t)| = 3/\sqrt{5} \\ \angle c_s(t) = -63.4^\circ + 30^\circ = -33.4^\circ \end{cases} \quad c_s(t) = \frac{3}{\sqrt{5}} \sin(2t - 33.4^\circ)$$

$$\Phi_e(s) = \frac{s}{s+1} \begin{cases} |\Phi_e(j\omega)| = \left| \frac{j\omega}{1+j\omega} \right| = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} \stackrel{\omega=2}{=} \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{|e_s(t)|}{3} \\ \angle\Phi_e(j\omega) = 90^\circ - \arctan \omega \stackrel{\omega=2}{=} 90^\circ - 63.4^\circ = \angle e_s(t) - 30^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} |e_s(t)| = 6/\sqrt{5} \\ \angle e_s(t) = 26.6^\circ + 30^\circ = 56.6^\circ \end{cases} \quad e_s(t) = \frac{6}{\sqrt{5}} \sin(2t + 56.6^\circ)$$

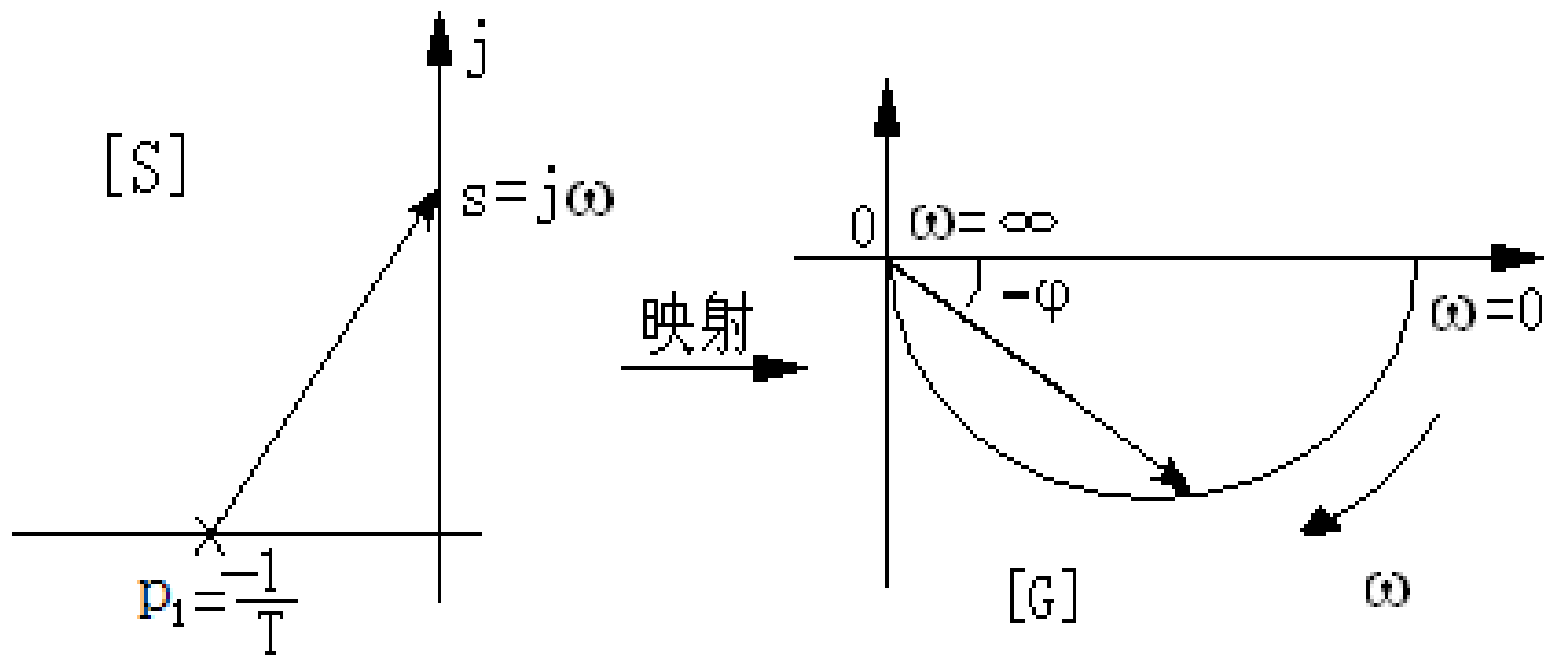
二 频率特性的图形表示法:

(一) 幅相频率特性曲线 (奈奎斯特曲线)

对于给定的 ω 值, 可得到具有复数值的频率特性。若将频率特性表示成实部、虚部的形式, 则可得到复平面上一个点。若将频率特性表示成幅值和相角的形式, 则可得到复平面上一个向量, 向量的长度即为该 ω 值下的幅频特性, 向量和实轴正方向的夹角为该 ω 值下的相频特性。当 $\omega:0 \rightarrow \infty$ 变化时, 该点或者向量末端点在复平面上的运动轨迹称为Nyquist图;

例如: RC网络 $G(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$ $G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} e^{-j \tan^{-1} \omega T}$

$$\omega = 0 \begin{cases} A(0) = 1 \\ \phi(0) = 0^\circ \end{cases} \quad \omega = \frac{1}{T} \begin{cases} A(1/T) = \sqrt{2}/2 \\ \phi(1/T) = -45^\circ \end{cases} \quad \omega \rightarrow \infty \begin{cases} A(\infty) = 0 \\ \phi(\infty) = -90^\circ \end{cases}$$



一阶惯性环节的Nyquist图是半圆弧

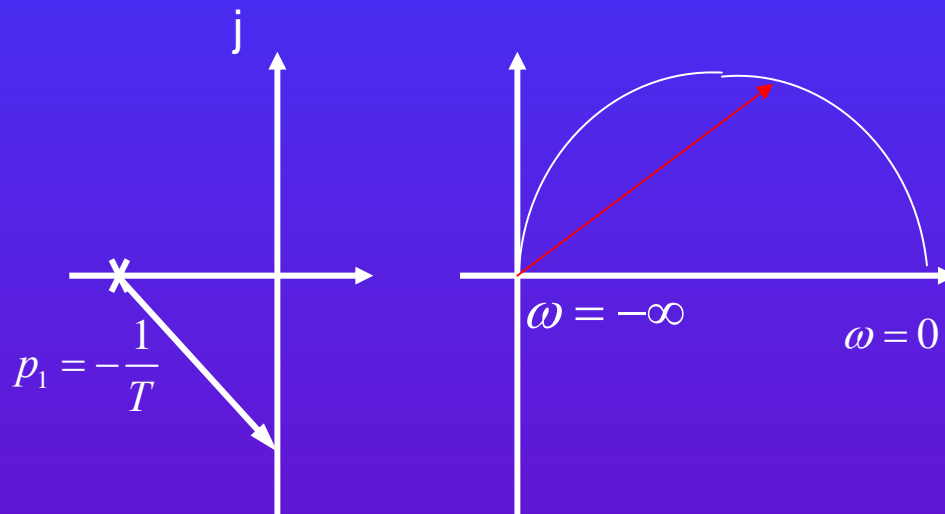
$$\therefore \Phi(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1-j\omega T}{1+(\omega T)^2}, \mathbf{Re} = \frac{1}{1+(\omega T)^2}, \mathbf{Im} = \frac{-\omega T}{1+(\omega T)^2}$$

$$\frac{\mathbf{Im}}{\mathbf{Re}} = -\omega T \Rightarrow \left(\frac{\mathbf{Im}}{\mathbf{Re}} \right)^2 = (\omega T)^2$$

$$\mathbf{Re} = \frac{1}{1+(\omega T)^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{\mathbf{Im}}{\mathbf{Re}} \right)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\mathbf{Re} - \frac{1}{2} \right)^2 + \mathbf{Im}^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

幅频特性是 ω 的偶函数，相频特性是 ω 的奇函数，因此当 $\omega:0 \rightarrow -\infty$ 时的Nyquist曲线和 $\omega:0 \rightarrow \infty$ 时的曲线对称于实轴。一般只画 $\omega:0 \rightarrow \infty$ 段



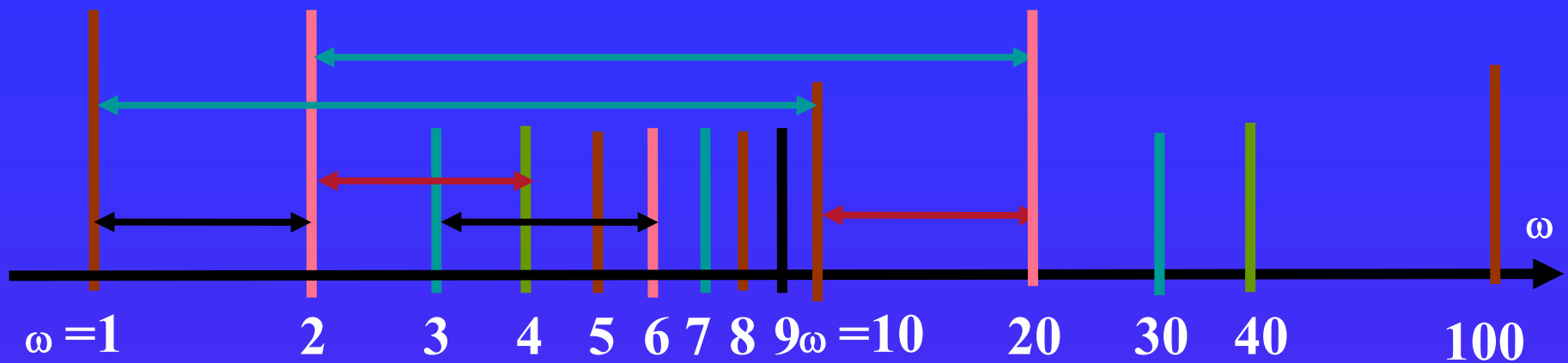
(二) 对数频率特性曲线(伯德图)

Bode图包括画在半对数坐标系中的两幅曲线图

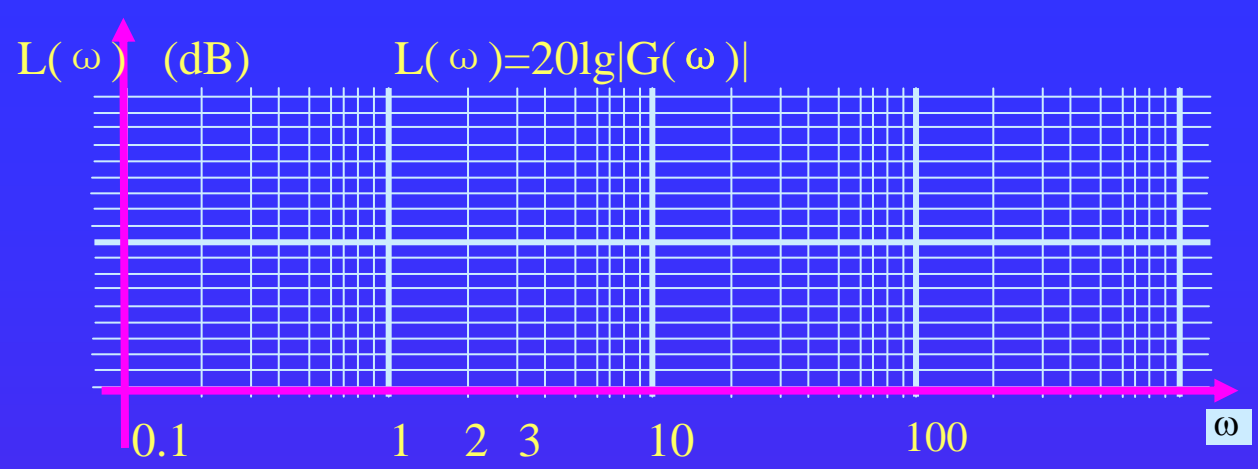
$\left\{ \begin{array}{l} \text{对数幅频曲线, 纵轴: } L(\omega) = 20\lg|G(j\omega)|, \text{分贝dB, 线性刻度} \\ \text{对数相频曲线, 纵轴: } \varphi(\omega) = \angle G(j\omega), \text{度, 线性刻度} \\ \text{横轴: } \omega(\text{rad/s}), \text{对数刻度} \lg \omega \end{array} \right.$

线性刻度: 当变量增大或者减小单位1, 坐标间的距离改变一个单位长度

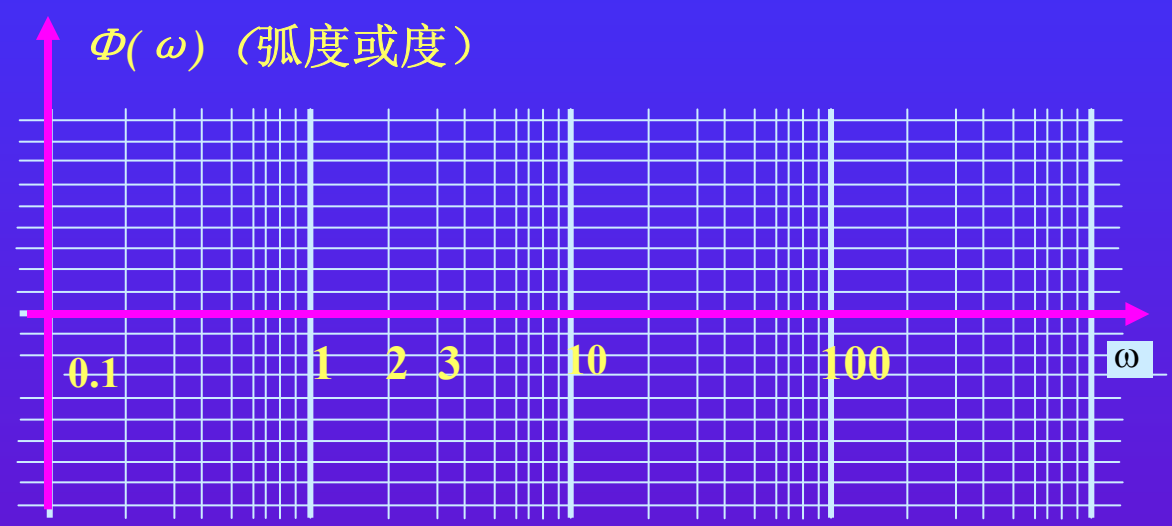
对数刻度: 变量增大到原来的10倍, 或者减小到原来的十分之一, 坐标间距离变化一个单位长度。



幅频特性(坐标系)



相频特性(坐标系)



- $$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)\dots G_n(j\omega)$$
$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \dots + L_n(\omega)$$
$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \dots + \phi_n(\omega)$$
- ✓ 将幅频特性的环节的相乘运算转化为相加运算
 - ✓ 可简单地用分段直线近似表示对数幅频特性,且精度较高。

RC网络的对数频率特性

$$\text{幅频特性: } |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

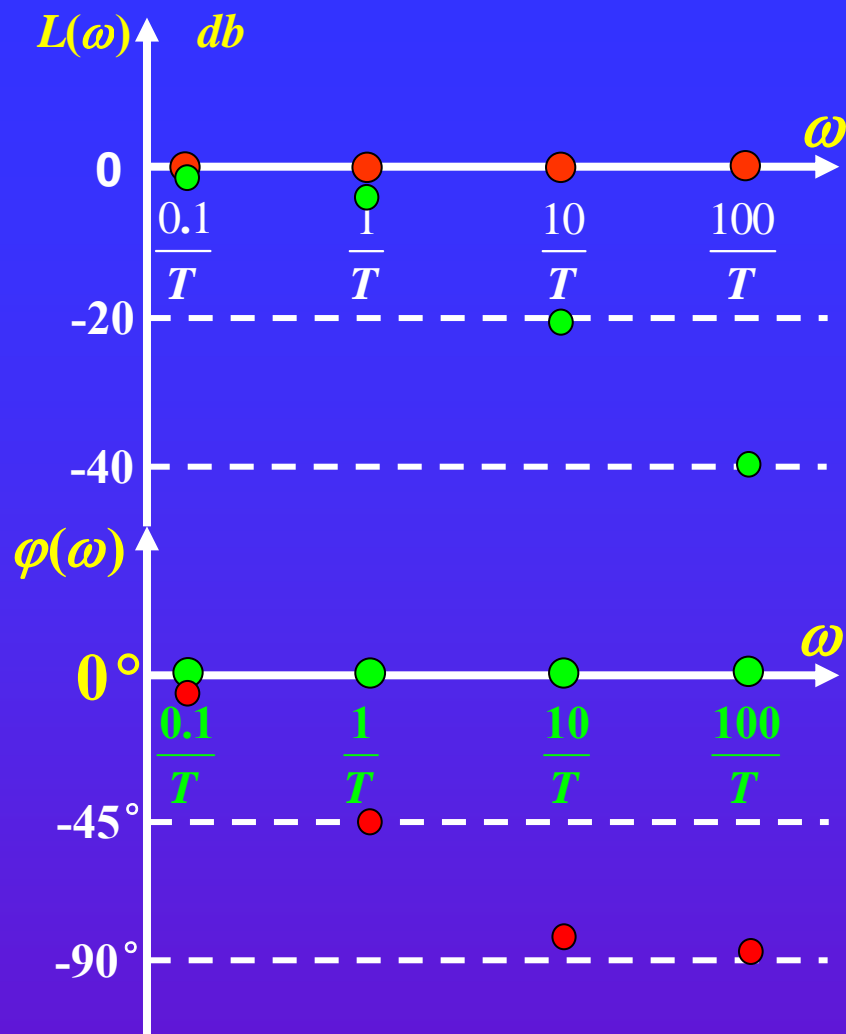
对数幅频特性:

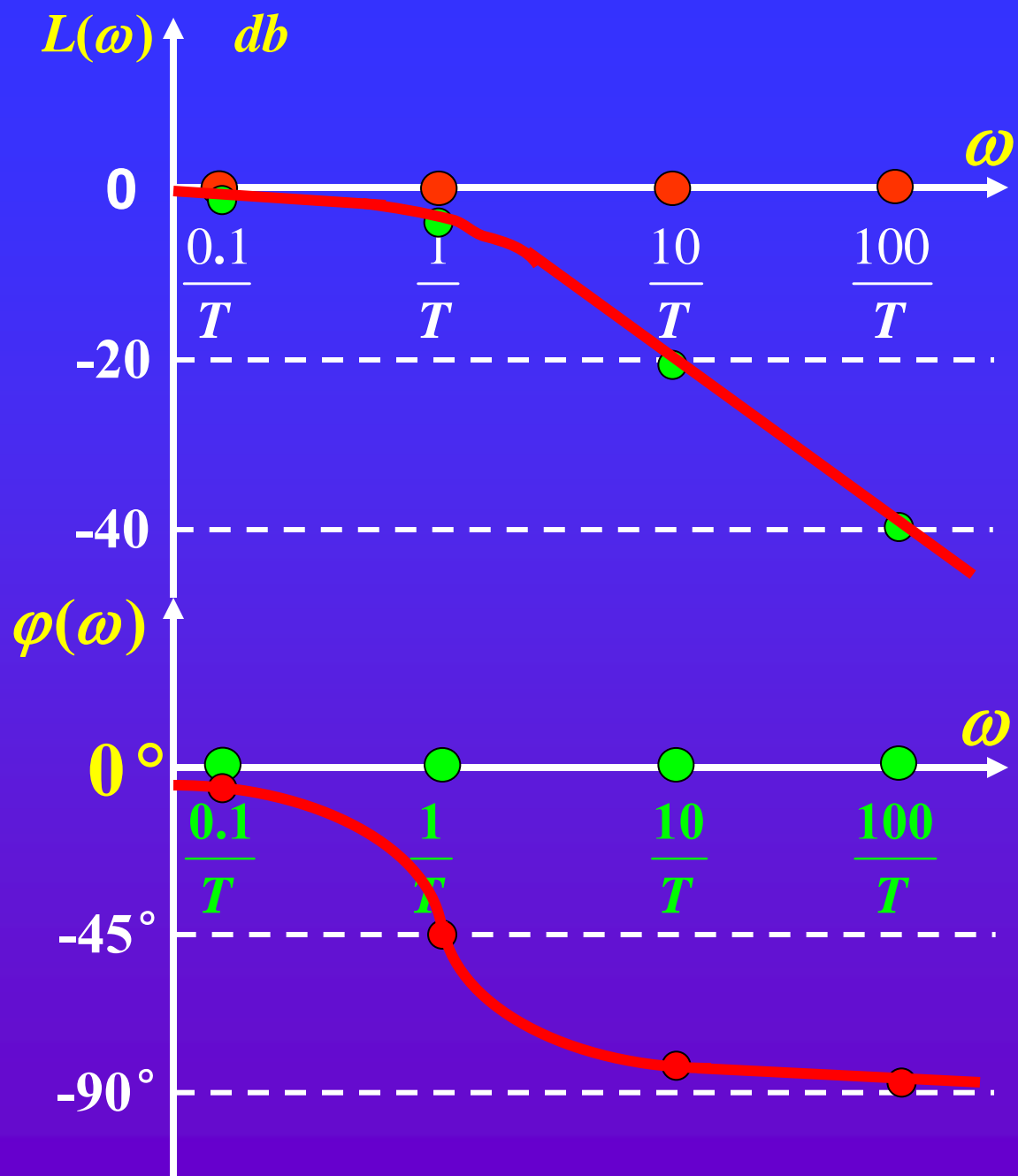
$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20\log|G(j\omega)| \\ &= 20\log 1 - 20\log\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \\ &= -20\log\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \end{aligned}$$

相频特性: $\varphi(\omega) = -\tan^{-1} \omega T$

$$\omega = \frac{1}{10T} \begin{cases} L = -0.04\text{db} \\ \varphi = -5.7^\circ \end{cases}$$

$$\omega = \frac{1}{T} \begin{cases} L = -3\text{db} \\ \varphi = -45^\circ \end{cases}, \omega = \frac{10}{T} \begin{cases} L = -20.04\text{db} \\ \varphi = -84.3^\circ \end{cases}, \omega = \frac{100}{T} \begin{cases} L = -40\text{db} \\ \varphi = -89.4^\circ \end{cases}$$





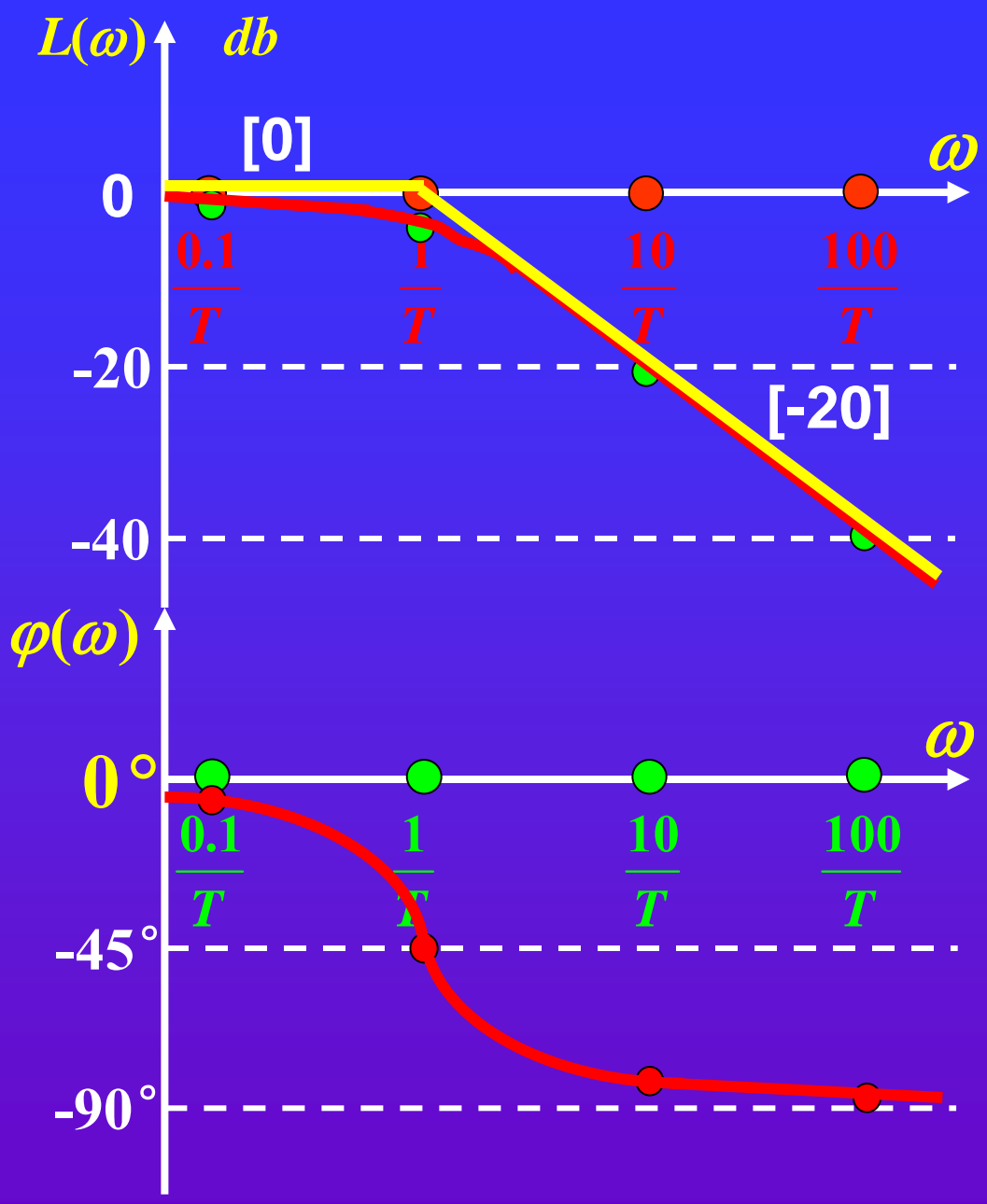
渐近线法近似作图:

$$L(\omega) = -20\log\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

- (1) 当 $\omega T \ll 1$, 即 $\omega \ll 1/T$ 时,
有 $L(\omega) \approx 0$, 零分贝线
- (2) 当 $\omega T \gg 1$, 即 $\omega \gg 1/T$ 时,
有 $L(\omega) \approx -20(\lg \omega + \lg T)$
- (3) 因为横坐标以 $\lg \omega$ 划分刻度,
因此曲线后半段为斜率为
 -20dB/dec 的过 $(\frac{1}{T}, 0)$ 点的
直线, 意味着频率每增大10倍,
曲线下降20dB.
- (4) 组成该幅频特性的两条直线交
点为 $(\frac{1}{T}, 0)$.
- (5) 渐近线法作图的最大误差在

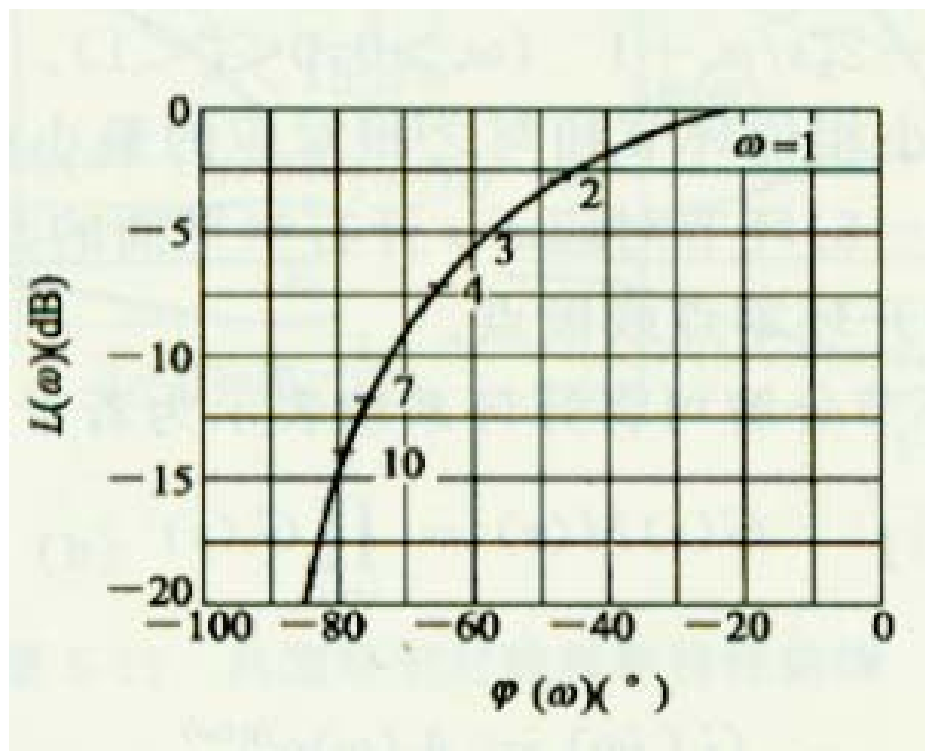
$\omega = \frac{1}{T}$ 处, 最大误差:

$$\left. -20\log\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \right|_{\omega = \frac{1}{T}} = -3\text{dB}$$



(三) 对数幅相频率特性曲线(Nichols图)

将对数幅频特性和相频特性合并为一条曲线，横坐标为相频特性 $\varphi(\omega)$ ，纵坐标为对数幅频特性 $L(\omega)$ ，都为线性分度， ω 作为参变量标注在曲线上相应点旁边



惯性环节的尼克尔斯图

5-2 典型环节的频率特性

系统或部件总是由一些典型环节组成，研究系统的频率特性，必须先研究典型环节的频率特性。

1) 比例环节 $G(s) = K$

幅相频率特性:

$$G(j\omega) = K \quad \begin{cases} |G(j\omega)| = K \\ \angle G(j\omega) = 0^\circ \end{cases}$$

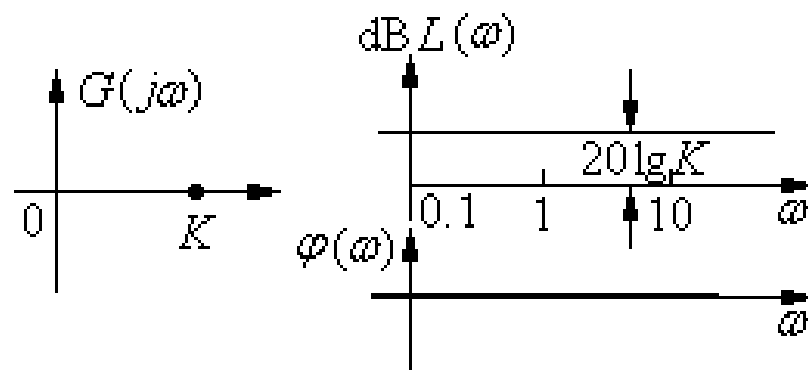
实轴上一个点

对数频率特性:

对数幅频特性 $L(\omega) = 20\lg K$ -> 平行于实轴的等分贝线

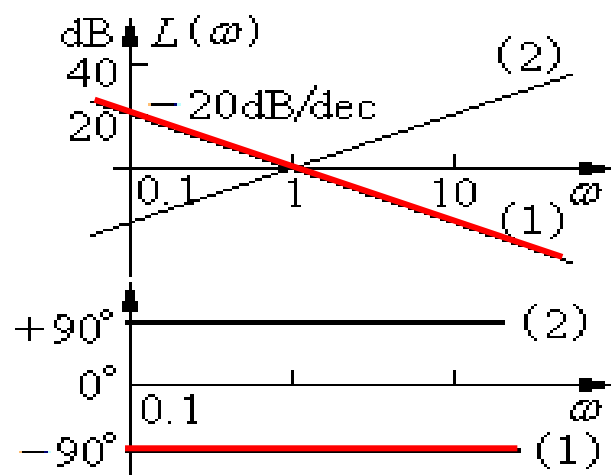
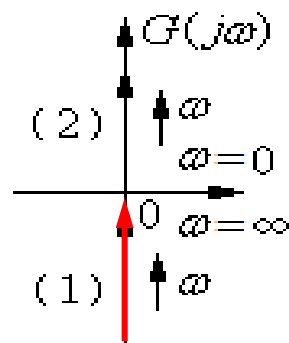
$\varphi(\omega) = 0^\circ$ -> 零度线

幅频、相频特性均与角频率无关。



2) 积分环节 $G(s) = \frac{1}{s}$

幅相频率特性曲线



$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \\ \angle G(j\omega) = -90^\circ \end{array} \right\} \quad \text{终点 } \omega = \infty: 0 \angle -90^\circ$$

对数频率特性曲线

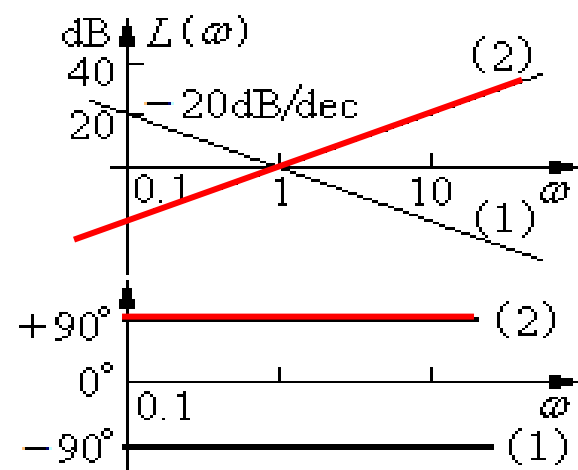
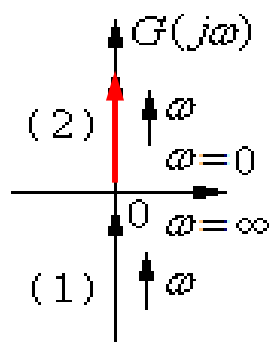
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L(\omega) = 20 \lg \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \lg \omega \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{array} \right.$$

当 $\omega = 1$ 时, $L(\omega) = 0$, 曲线过 (1,0) 点, 斜率为 -20dB/dec。

相频特性与角频率无关。

3) 微分环节 $G(s) = s$

幅相频率特性曲线



$$G(j\omega) = j\omega \begin{cases} |G(j\omega)| = \omega \\ \angle G(j\omega) = 90^\circ \end{cases} \begin{cases} \text{起点: } 0 \angle 90^\circ \\ \text{终点: } \infty \angle 90^\circ \end{cases}$$

对数频率特性曲线

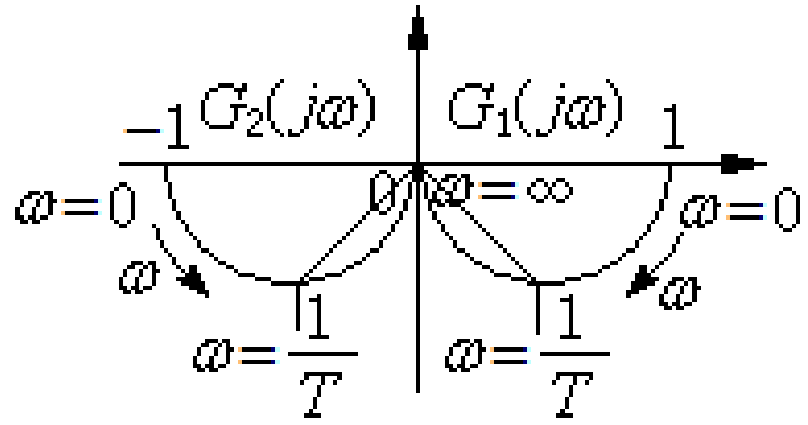
$$G(j\omega) = j\omega \Rightarrow \begin{cases} L_2(\omega) = 20 \lg |j\omega| = 20 \lg \omega \\ \varphi(\omega) = +90^\circ \end{cases}$$

当 $\omega=1$ 时, $L(\omega)=0$, 曲线过 $(1,0)$ 点, 斜率为 20dB/dec 。

相频特性与角频率无关。

4)

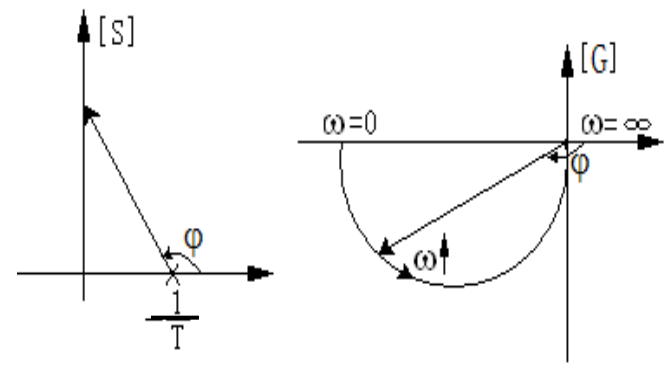
$$\begin{cases} \text{惯性环节 } G_1(s) = \frac{1}{Ts+1} \\ \text{非最小相位惯性环节 } G_2(s) = \frac{1}{Ts-1} = \frac{\frac{1}{T}}{s - \frac{1}{T}} \end{cases}$$



幅相频率特性曲线

惯性环节

$$G_1(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} \begin{cases} |G_1(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \\ \angle G_1(j\omega) = -\text{tg}^{-1}\omega T \end{cases} \begin{cases} \text{起点: } 1\angle 0^\circ \\ \text{终点: } 0\angle -90^\circ \end{cases}$$



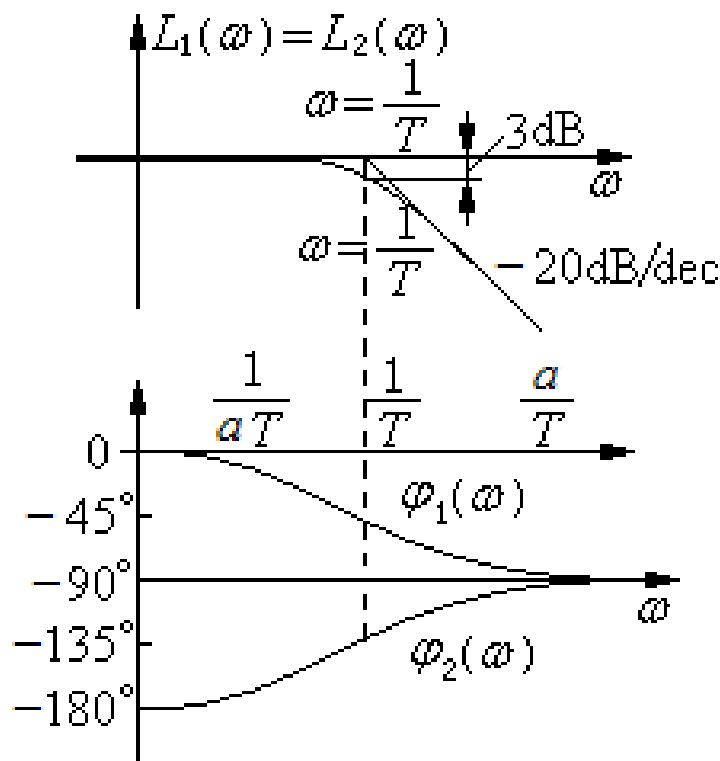
非最小相位惯性环节

$$G_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega T - 1} = \frac{-1-j\omega T}{(\omega T)^2 + 1} \begin{cases} |G_2(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \\ \angle G_2(j\omega) = \text{tg}^{-1} \frac{-\omega T}{-1} = \text{tg}^{-1}\omega T - 180^\circ \end{cases} \begin{cases} \text{起点: } 1\angle -180^\circ \\ \text{终点: } 0\angle -90^\circ \end{cases}$$

最小相位(非最小相位)惯性环节的伯德图

$$G_1(j\omega) = \frac{1}{jT\omega + 1} \begin{cases} L_1(\omega) = -20\lg\sqrt{T^2\omega^2 + 1} \\ \varphi_1(\omega) = -\arctg T\omega \end{cases} \begin{cases} T\omega \ll 1 \text{ 时, } L_1(\omega) = 0 \\ T\omega \gg 1 \text{ 时, } L_1(\omega) = -20\lg T - 20\lg \omega \\ \varphi_1(\omega): 0^\circ \rightarrow -90^\circ \end{cases}$$

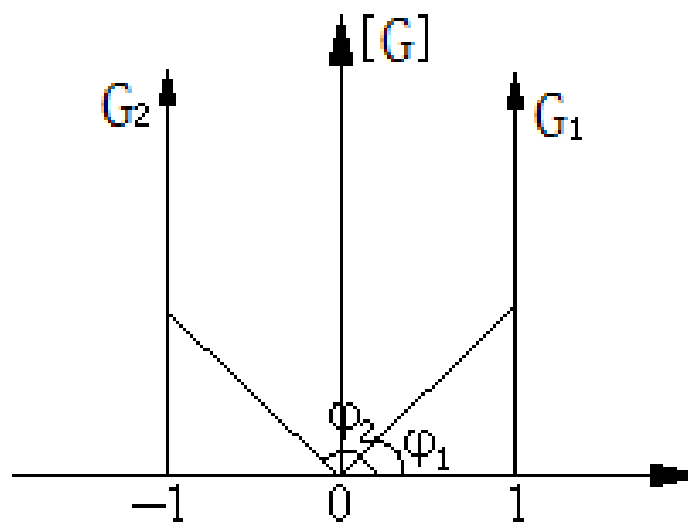
$$G_2(j\omega) = \frac{1}{jT\omega - 1} \begin{cases} L_2(\omega) = -20\lg\sqrt{T^2\omega^2 + 1} \\ \varphi_2(\omega) = \tg^{-1}\omega T - 180^\circ \end{cases} \begin{cases} T\omega \ll 1 \text{ 时, } L_2(\omega) = 0 \\ T\omega \gg 1 \text{ 时, } L_2(\omega) = -20\lg T - 20\lg \omega \\ \varphi_2(\omega): -180^\circ \rightarrow -90^\circ \end{cases}$$



5) 最小相位(非最小相位)一阶微分环节 $G_1(s) = Ts + 1$ ($G_2(s) = Ts - 1$)

$$\text{I. } G_1(j\omega) = j\omega T + 1 \begin{cases} |G_1(j\omega)| = \sqrt{1 + T^2\omega^2} \\ \angle G_1(j\omega) = \arctg \omega T \end{cases} \begin{cases} \text{起点: } 1\angle 0^\circ \\ \text{终点: } \infty\angle 90^\circ \end{cases}$$

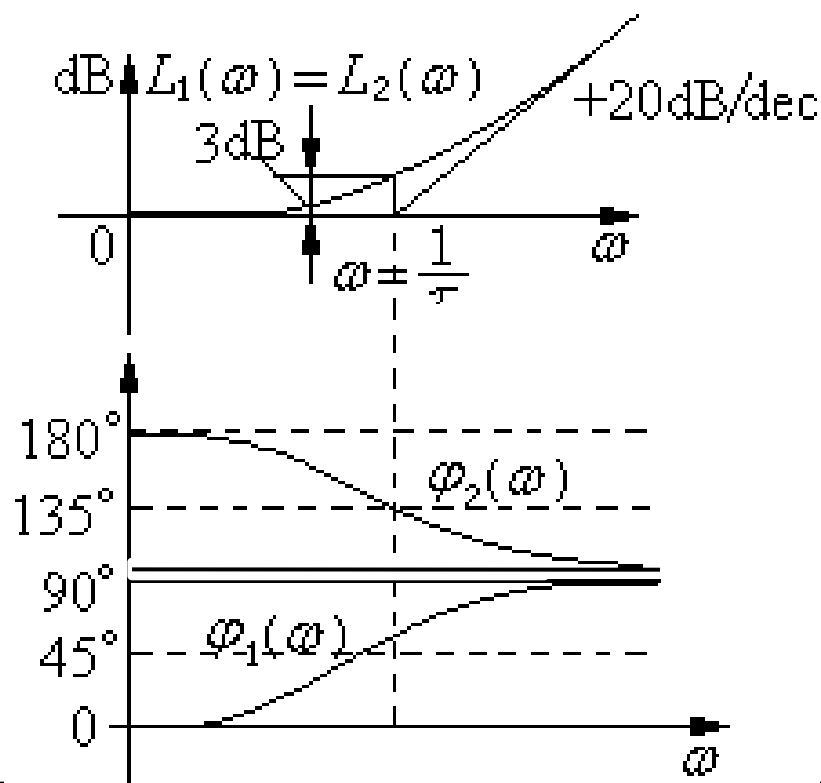
$$\text{II. } G_2(j\omega) = j\omega T - 1 \begin{cases} |G_2(j\omega)| = \sqrt{1 + T^2\omega^2} \\ \angle G_2(j\omega) = \arctg \frac{\omega T}{-1} = 180^\circ - \arctg \omega T \end{cases} \begin{cases} \text{起点: } 1\angle 180^\circ \\ \text{终点: } \infty\angle 90^\circ \end{cases}$$



一阶微分环节的伯德图

$$G_1(j\omega) = jT\omega + 1 \begin{cases} L_1(\omega) = +20\lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1} \\ \varphi(\omega) = \arctg T\omega \end{cases} \begin{cases} T\omega \ll 1 \text{ 时, } L_1(\omega) = 0 \\ T\omega \gg 1 \text{ 时, } L_1(\omega) = 20\lg T + 20\lg \omega \\ \varphi_1(\omega): 0^\circ \rightarrow 90^\circ \end{cases}$$

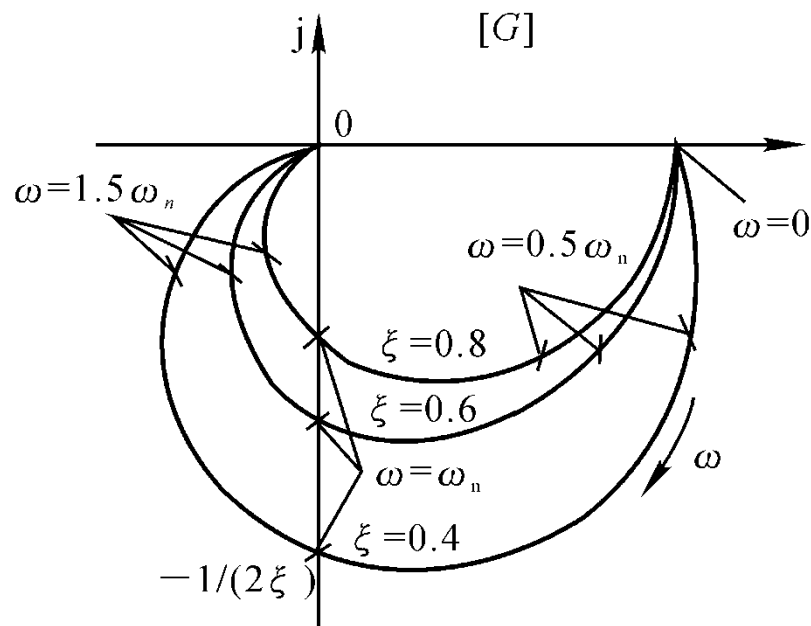
$$G_2(j\omega) = jT\omega - 1 \begin{cases} L_2(\omega) = 20\lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1} \\ \varphi(\omega) = \arctg \frac{T\omega}{-1} \end{cases} \begin{cases} T\omega \ll 1 \text{ 时, } L_2(\omega) = 0 \\ T\omega \gg 1 \text{ 时, } L_2(\omega) = 20\lg T + 20\lg \omega \\ \varphi_2(\omega): 180^\circ \rightarrow 90^\circ \end{cases}$$



6) 二阶振荡环节

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1}, \quad 0 \leq \xi < 1$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right] + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}} = \frac{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right] - j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

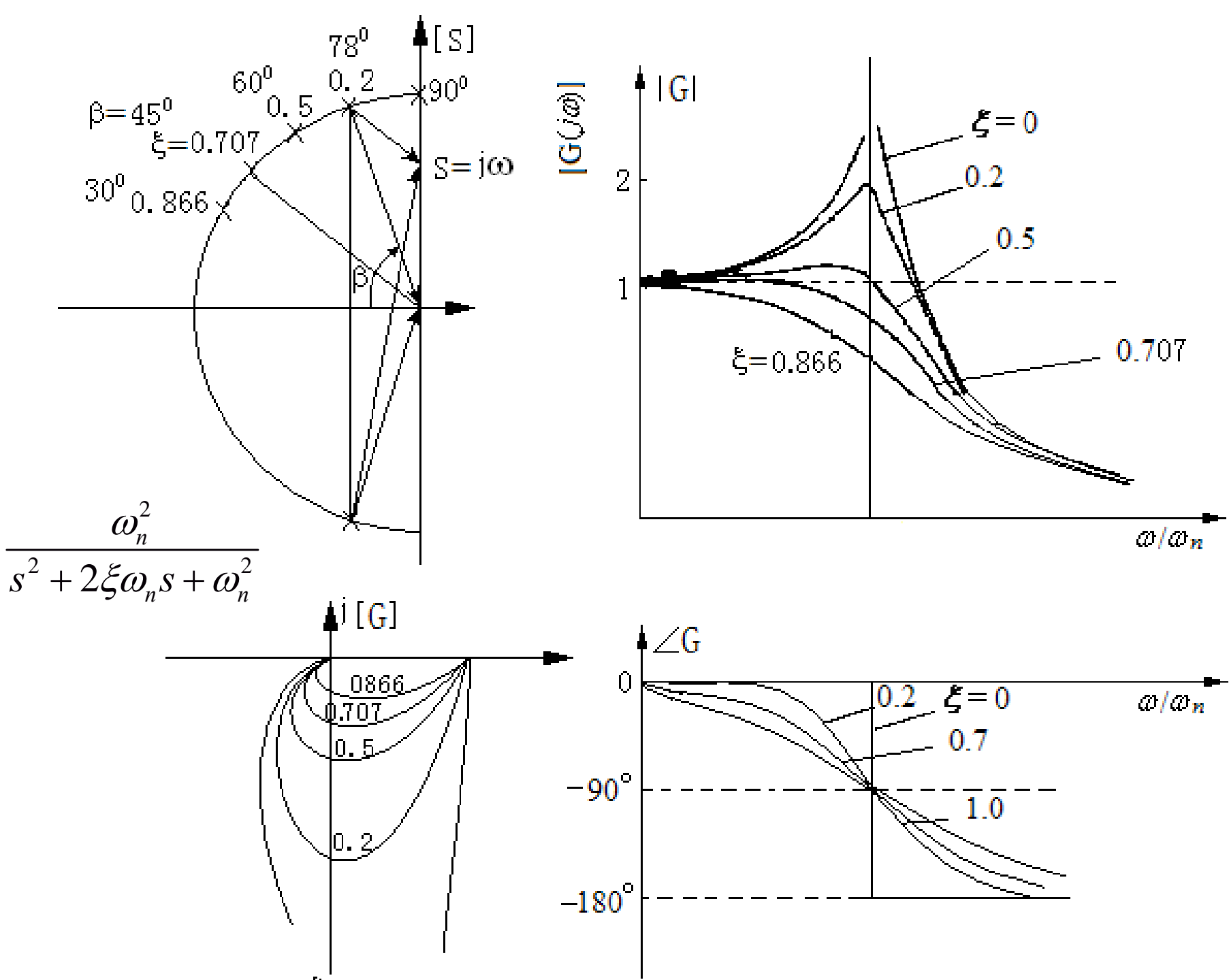


$$\left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \\ \angle G(j\omega) = \begin{cases} \operatorname{tg}^{-1} \frac{-2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, & \omega \leq \omega_n \\ \operatorname{tg}^{-1} \frac{-2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} - 180^\circ, & \omega > \omega_n \end{cases} \end{array} \right.$$

起点: $\omega=0$ 时, $1 \angle 0^\circ$

中间点: $\omega=\omega_n$ 时, $\frac{1}{2\xi} \angle -90^\circ$

终点: $\omega=+\infty$ 时, $0 \angle -180^\circ$



谐振频率、谐振峰值

谐振峰值 $M_r = |G(j\omega)|_{\max}$

阻尼较小时，输入正弦信号角频率变化时环节稳态输出能达到的最大幅值比

谐振频率 $\omega_r = \arg \max_{\omega} |G(j\omega)|$

推导：

$$G(s) = \frac{1}{(\frac{s}{\omega_n})^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1} \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

$$\frac{d|G|}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\omega} \left\{ \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow 2 \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right] \left(-2 \frac{\omega}{\omega_n^2}\right) + 4\xi \frac{\omega}{\omega_n} \left(2\xi \frac{1}{\omega_n}\right)$$

$$= 4 \left[-\frac{\omega}{\omega_n^2} + \frac{\omega^3}{\omega_n^4} \right] + 8 \frac{\xi^2 \omega}{\omega_n^2} = 4 \frac{\omega}{\omega_n^2} \left[-1 + \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\xi^2 \right] = 0$$

$$4\frac{\omega}{\omega_n^2}\left[-1+\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+2\xi^2\right]=0 \quad \text{即: } \frac{\omega^2}{\omega_n^2}=1-2\xi^2 \Rightarrow \begin{cases} \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \\ \omega_r = 0 \end{cases}$$

出现峰值的条件: $1-2\xi^2 \geq 0 \Rightarrow \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

当 $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时: 若 $\omega_r = 0$, 则 $|G(j\omega)| = 1$

若 $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$, 则 $|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1-(1-2\xi^2)]^2 + (2\xi)^2(1-2\xi^2)}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} > 1$

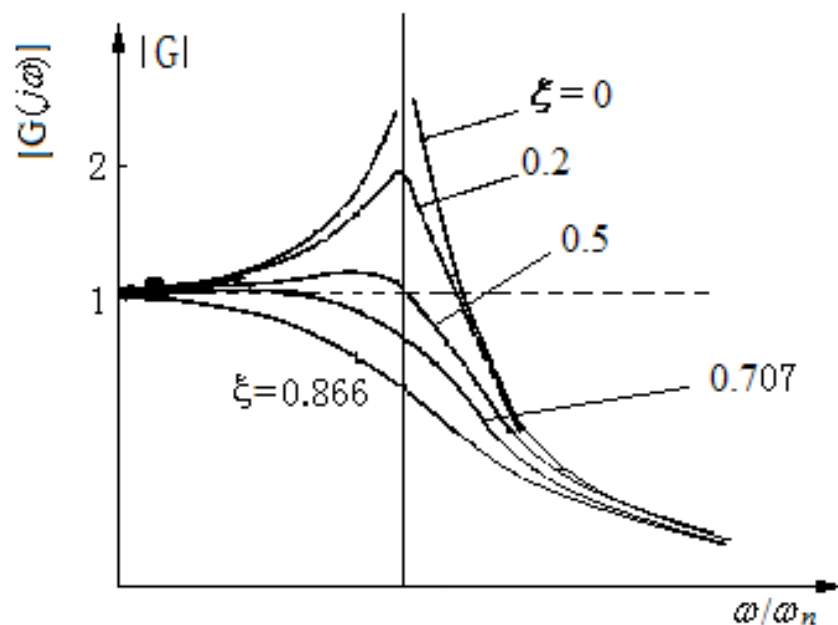
所以 $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$ 是峰值出现的位置。峰值为:

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

随着谐振频率 $\xi \rightarrow 0$, 谐振频率向高频方向移动, 并逐渐趋于自然频率, 而谐振峰值趋于无穷大

振荡环节特点:

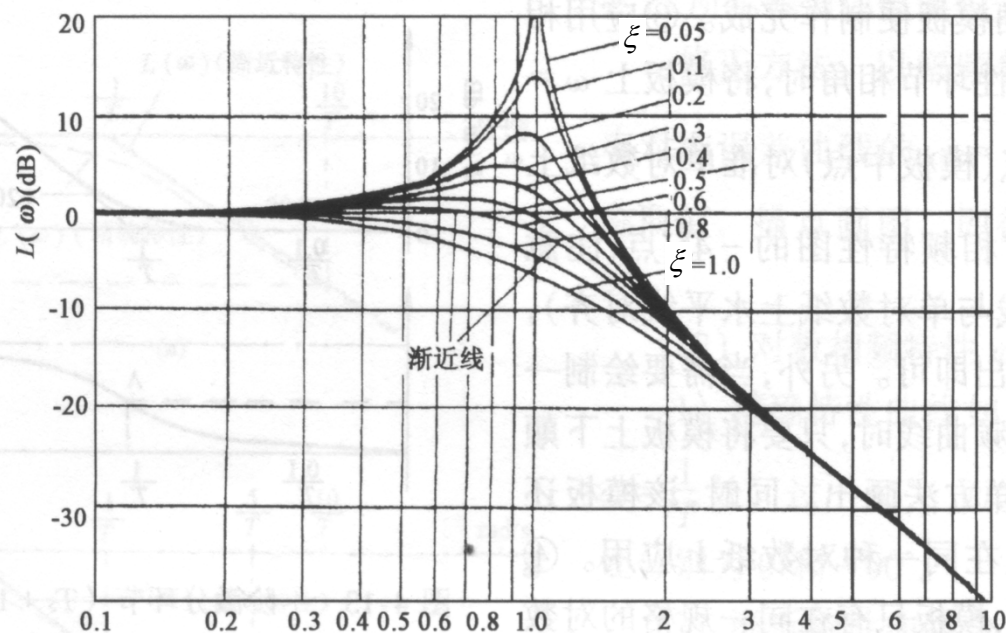
$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi > 0.707 & 1 - 2\xi^2 < 0 \\ \xi = 0.707 & 1 - 2\xi^2 = 0 \\ \xi < 0.707 & 1 - 2\xi^2 > 0 \\ \xi = 0 & 1 - 2\xi^2 = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_r, M_r \text{ 不存在,} \\ \omega_r = 0 \\ M_r = 1 \\ \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} < \omega_n \\ M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} > 1 \\ \omega_r = \omega_n \\ M_r = \infty \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} |G(j\omega)| \text{ 单调衰减} \\ \omega_r = 0 \text{ 是驻点} \\ |G(j\omega)| \text{ 先大后小} \end{array}$$



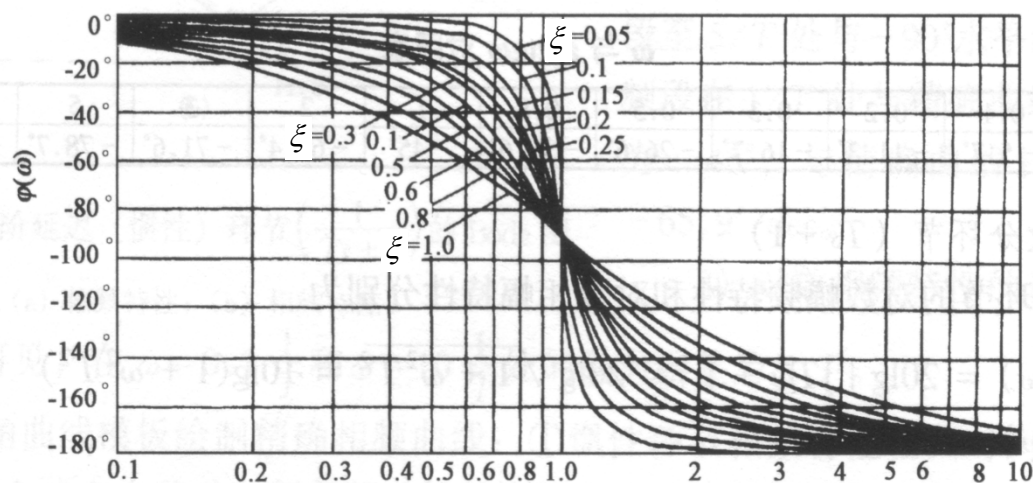
震荡环节的伯德图(精确)

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\omega) = -20 \lg \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \\ \varphi(\omega) = \begin{cases} \lg^{-1} \frac{-2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, & \omega \leq \omega_n \\ \lg^{-1} \frac{-2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} - 180^\circ, & \omega > \omega_n \end{cases} \end{array} \right.$$



(a)



(b)

ω/ω_n

震荡环节的伯德图(近似)

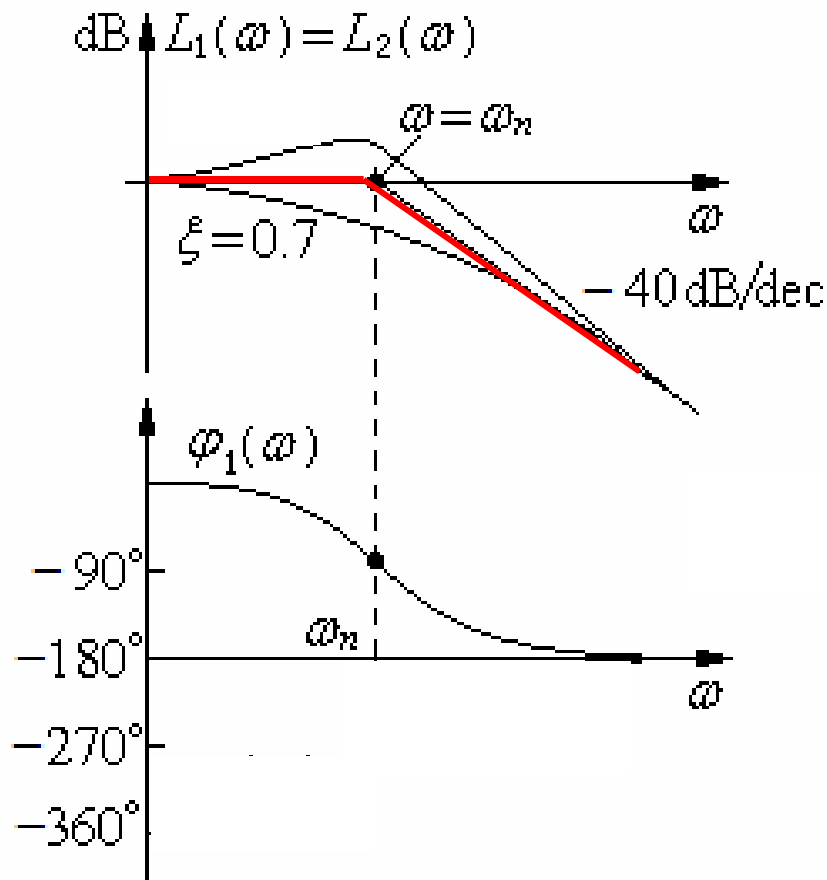
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}} \begin{cases} L(\omega) = -20\lg \sqrt{\left[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2\right]^2 + (2\xi \frac{\omega}{\omega_n})^2} \\ \varphi(\omega) \end{cases}$$

当 $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$ 时, $L(\omega) = 20\lg 1 = 0$

当 $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ 时,

$$L(\omega) = -20\lg\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = -40\lg \omega + 40\lg \omega_n$$

$L(\omega)$ 与 $\lg \omega$ 呈线性关系, 直线过 $(\omega_n, 0)$ 点, 斜率为 -40dB/dec



交接频率 $\omega_n = \frac{1}{T}$ 处的误差, $L_e(\omega) = -20\lg 2\xi$

当 $\xi=0.5$ 时, 误差为0

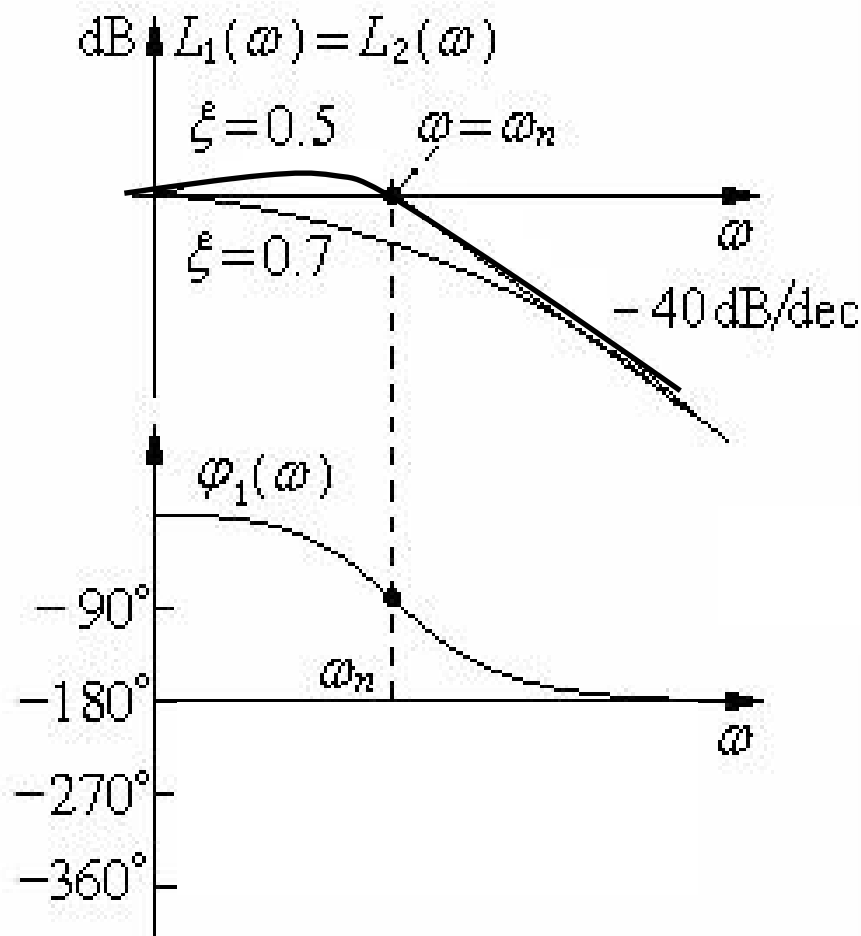
当 $\xi < 0.4$ 或 $\xi > 0.9$, 误差会相当大

渐近线不反映峰值特性

谐振频率处的误差

$$\begin{cases} 20\lg M_r = -20\lg 2\xi - 20\lg \sqrt{1-\xi^2} \\ \omega_r = \sqrt{1-2\xi^2} \cdot \omega_n \end{cases}$$

二阶系统也具有低通滤波特性。



例 系统的幅相曲线如图所试，求传递函数。

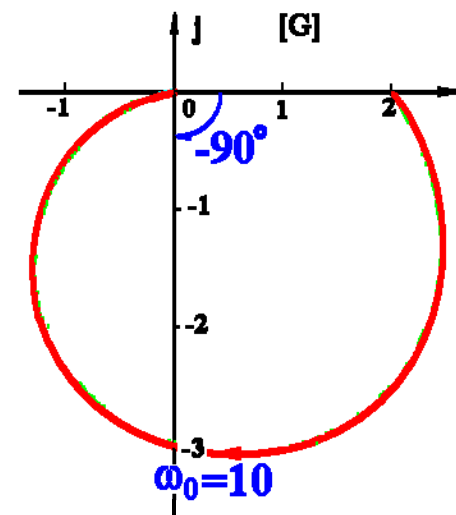
由曲线形状有
$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1}$$

由起点: $G(j0) = K \angle 0^\circ \quad K = 2$

由 $\varphi(\omega_0)$: $\angle G(j\omega_0) = -90^\circ \quad \omega_0 = \omega_n = 10$

由 $|G(\omega_0)|$: $|G(\omega_0)| = 3^{\omega_0=\omega_n} = \frac{K}{2\xi} = \frac{2}{2\xi} \quad \xi = \frac{1}{3}$

$$G(s) = \frac{2 \times 10^2}{s^2 + 2 \times \frac{1}{3} \times 10s + 10^2} = \frac{200}{s^2 + 6.67s + 100}$$



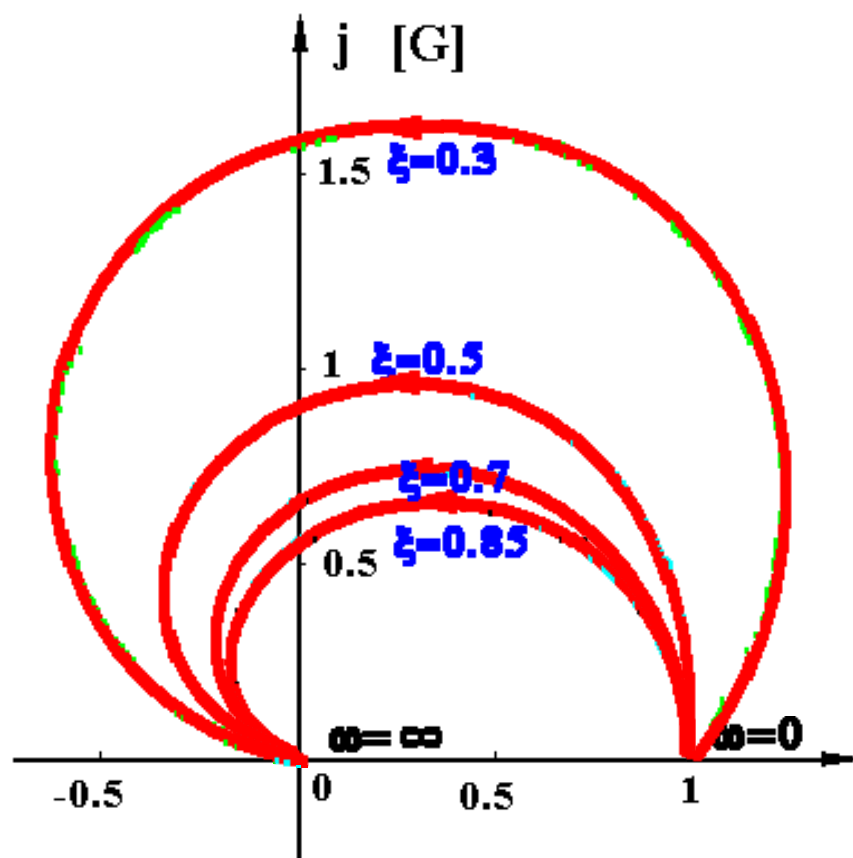
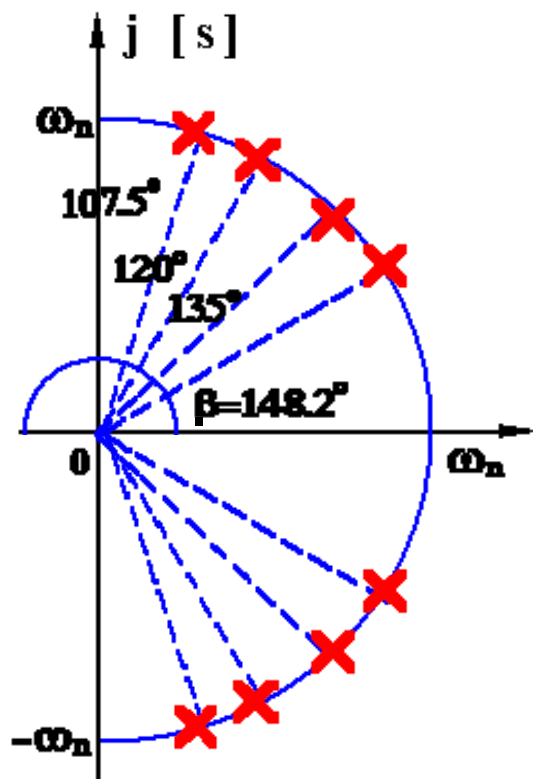
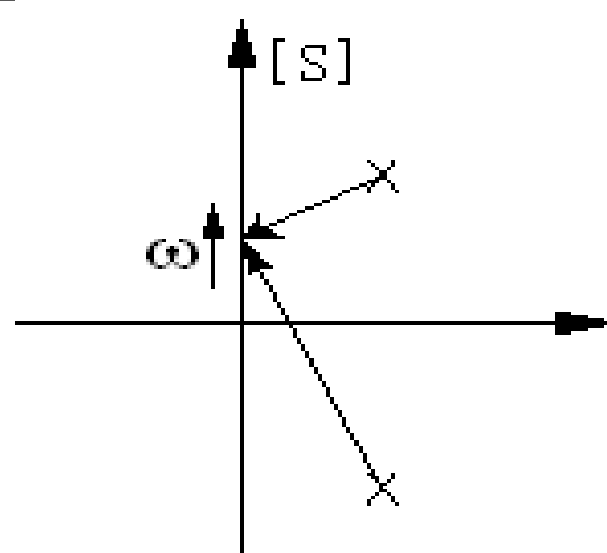
7) 非最小相位振荡环节 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 - 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 - 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} - j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}$$

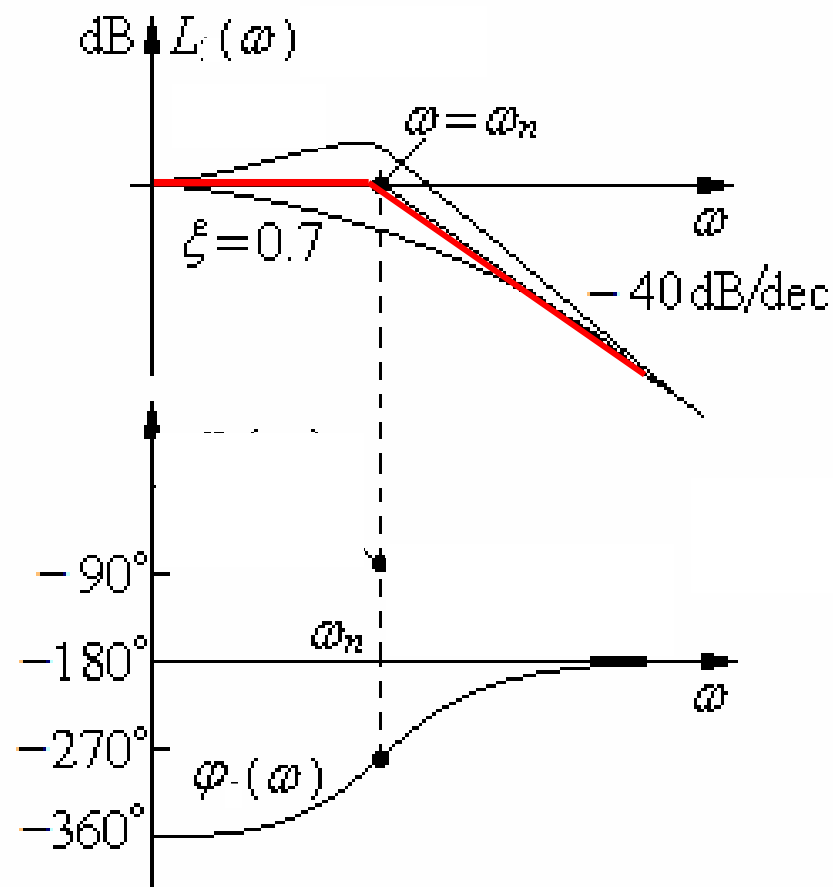
$$G(j0) = 1 \angle -360^\circ$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$$



$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 - j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}} \begin{cases} L(\omega) = -20 \lg \sqrt{\left[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2\right]^2 + (2\xi \frac{\omega}{\omega_n})^2} \\ \varphi(\omega) : -360^\circ \rightarrow -180^\circ \end{cases}$$

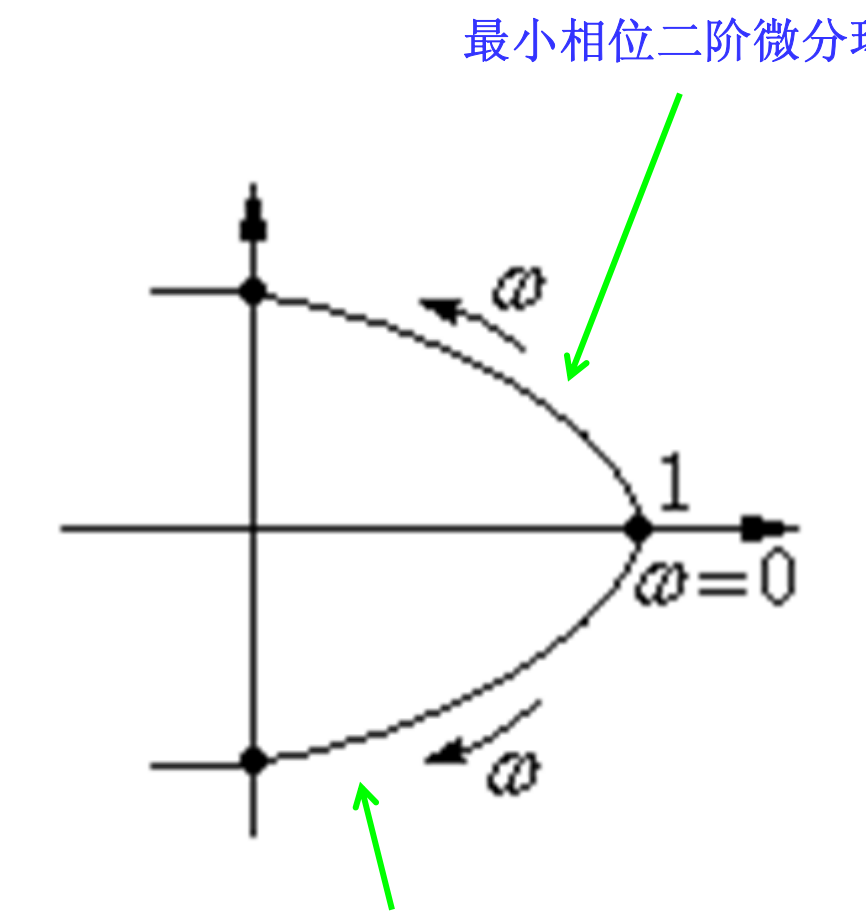
$$\begin{cases} \frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \text{ 时, } L(\omega) = -20 \lg (\frac{\omega}{\omega_n})^2 = -40 \lg \omega + 40 \lg \omega_n \\ \frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \text{ 时, } L(\omega) = 0 \end{cases}$$



8) 二阶微分环节

$$G(s) = T^2 s^2 + 2\xi T s + 1 \stackrel{T=1/\omega_n}{=} \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1$$

$$G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}$$

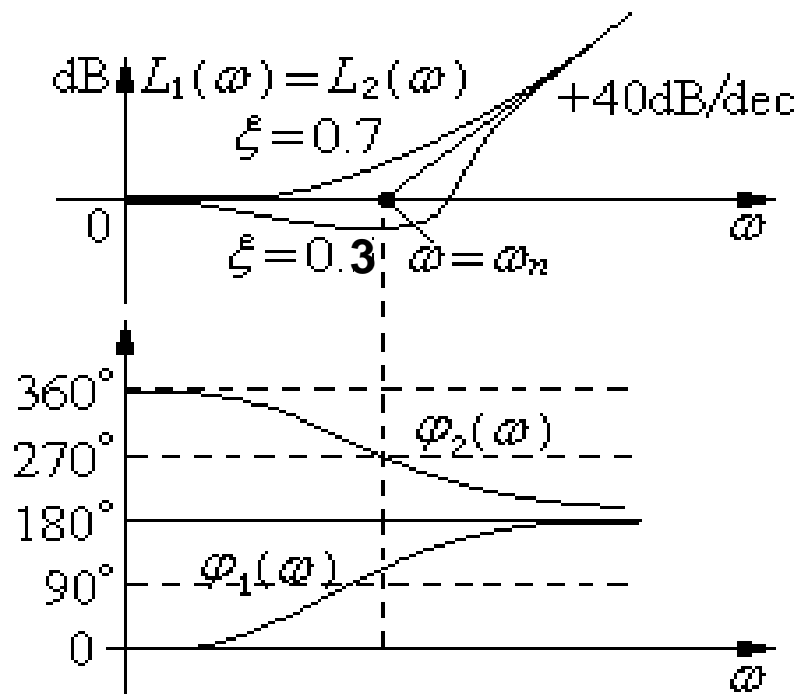


非最小相位二阶微分环节

$$G_1(j\omega) = \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \begin{cases} L_1(\omega) = 20\lg \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \varphi_1(\omega): 0^\circ \rightarrow 180^\circ \end{cases}$$

$$G_2(j\omega) = \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] - j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}, \begin{cases} L_2(\omega) = 20\lg \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \varphi_2(\omega): 360^\circ \rightarrow 180^\circ \end{cases}$$

$$\text{渐近线} \begin{cases} \frac{\omega}{\omega_n} \ll 1: L_1 = L_2 = 20\lg 1 = 0 \\ \frac{\omega}{\omega_n} \gg 1: L_1 = L_2 = 20\lg \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \\ \quad = 40\lg \omega - 40\lg \omega_n \end{cases}$$



9) 延迟环节

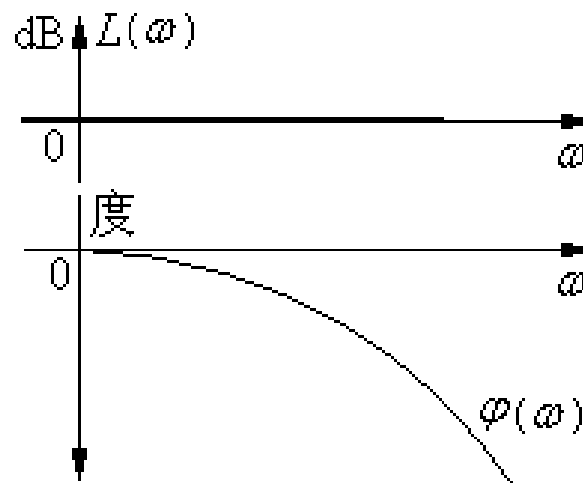
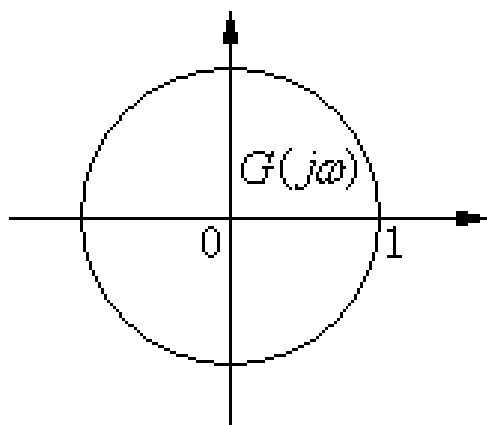
$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\left. \begin{array}{l} r(t) \\ c(t) = r(t - \tau) \cdot 1(t - \tau) \end{array} \right\} \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{e^{-\tau s} \cdot R(s)}{R(s)} = e^{-\tau s}$$

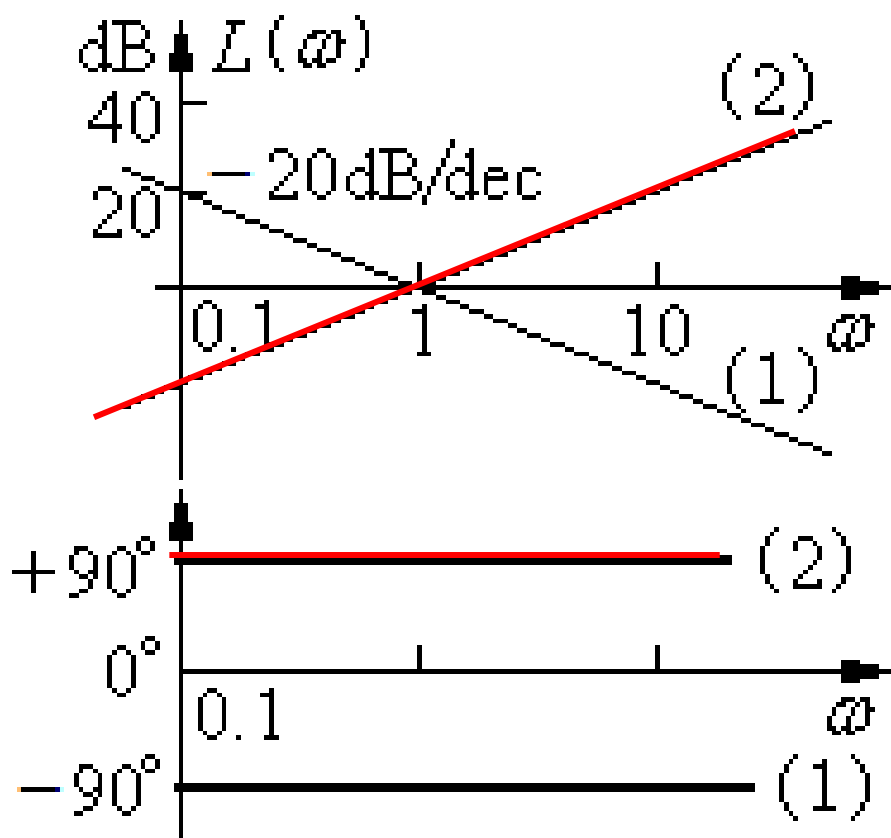
$G(j\omega) = 1e^{-j\omega\tau}$, 乃奎斯特图是单位圆

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau} \begin{cases} |G(j\omega)| = 1 \\ \angle G(j\omega) = -\tau\omega (\text{弧度}) \end{cases} \begin{cases} L(\omega) = 20 \lg 1 = 0 \\ \phi(\omega) = -57.3^\circ \times \tau \omega \end{cases}$$

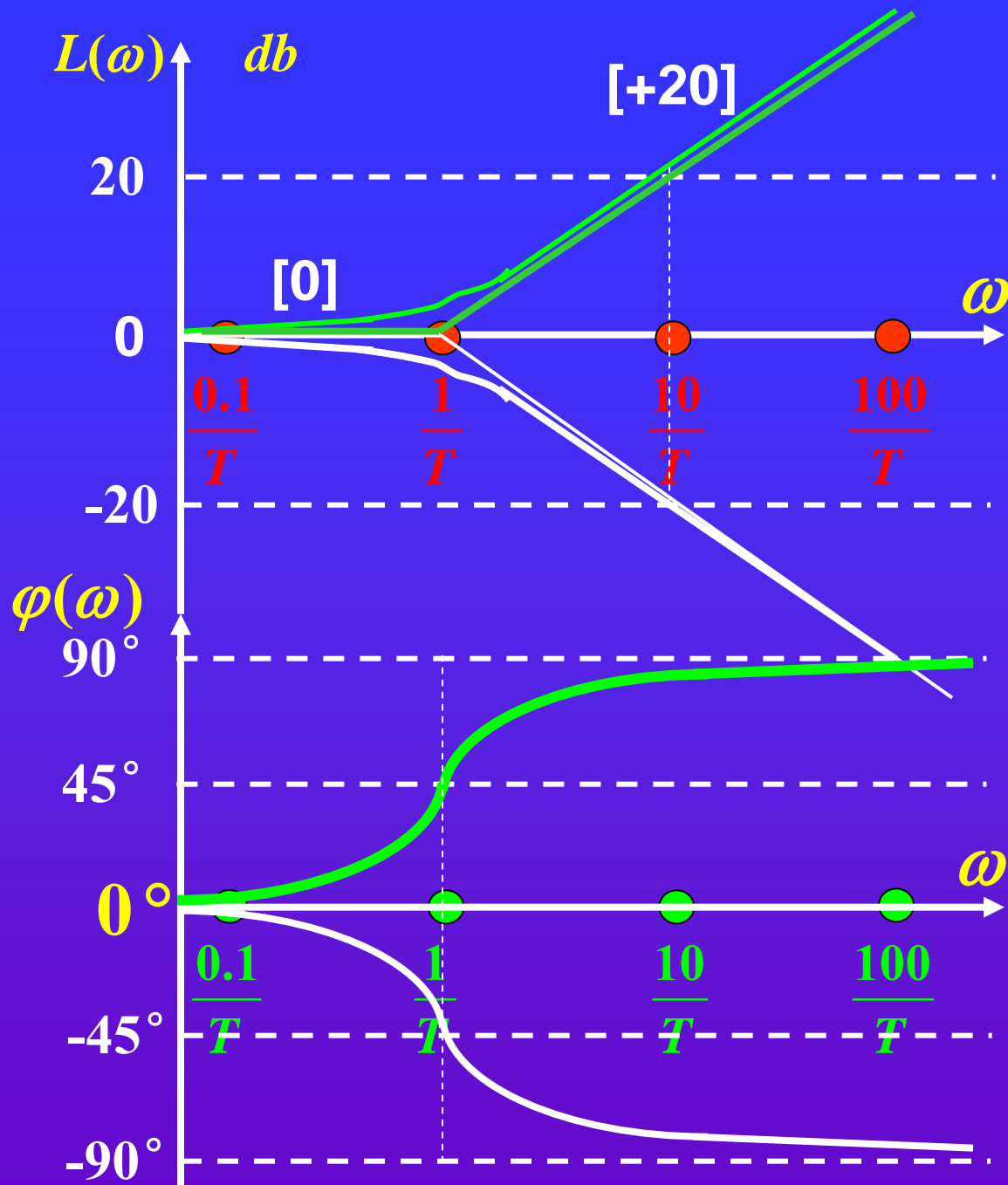


结论：

(1) 传递函数互为倒数，如一阶微分环节 $Ts + 1$ 与一阶惯性环节 $1/(Ts + 1)$ ；二阶微分环节与二阶振荡环节：对数幅频曲线关于零分贝线对称，对数相频曲线关于零度线对称。



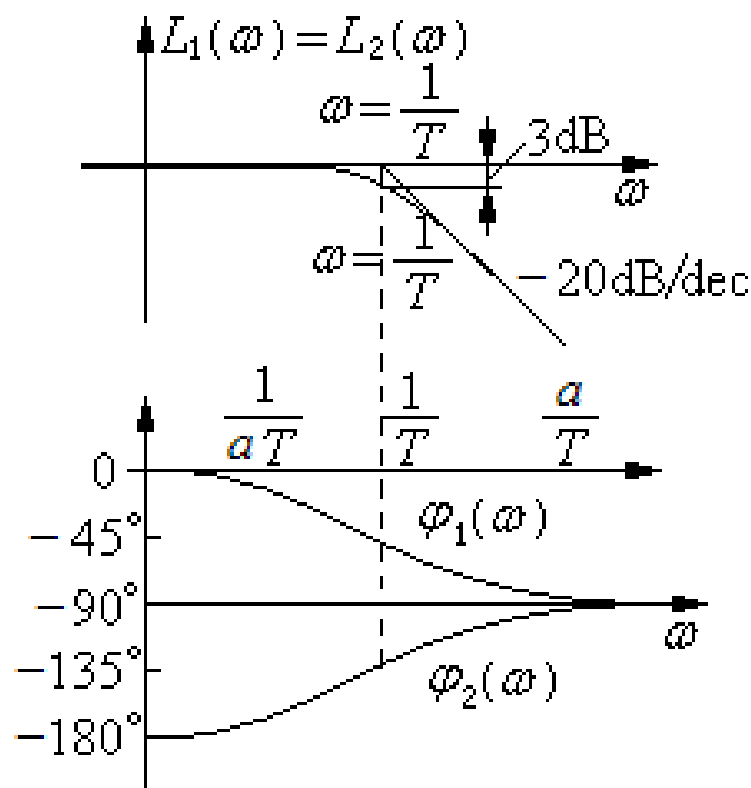
$$G_1(s) = \frac{1}{s}; G_2(s) = s$$



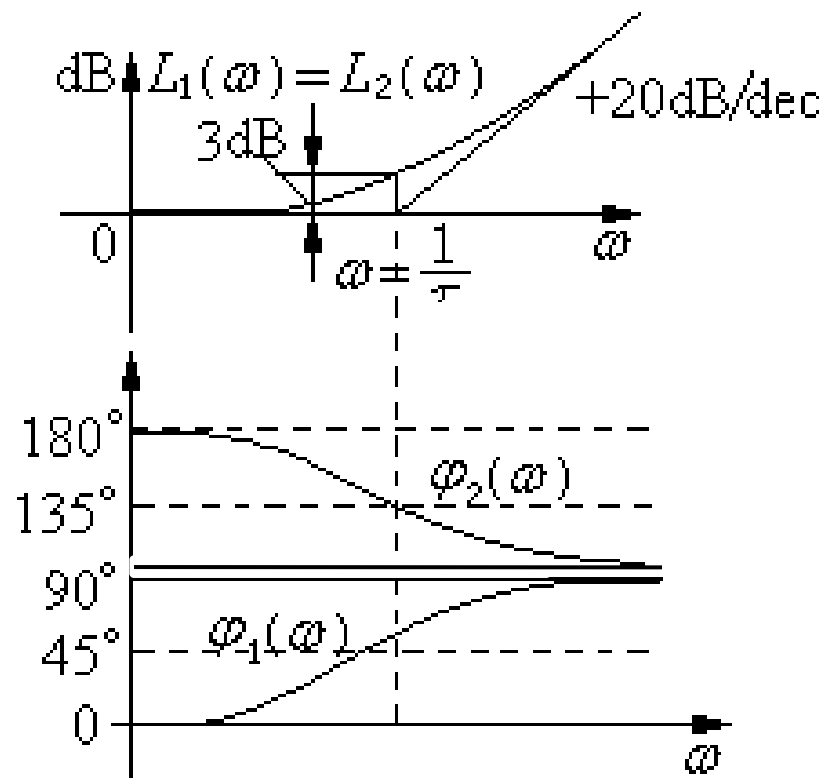
$$\Phi_1(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

$$\Phi_2(s) = Ts + 1$$

(2)最小相位与对应的非最小相位环节之间具有相同的幅频特性，相频特性对称于他们相角终值的坐标线。



$$G_1(s) = \frac{1}{Ts + 1}, \quad G_2(s) = \frac{1}{Ts - 1}$$



$$G_1(s) = Ts + 1, \quad G_2(s) = Ts - 1$$

- (3) 微分环节(包括一阶、二阶微分环节以及纯微分环节)的相角超前; 积分环节、惯性环节、震荡环节的相角滞后;
- (4) 最小相位环节相角的绝对值小于与其对应的非最小相位环节的相角的绝对值。因此若系统传递函数全部由稳定环节组成, 则称这样的系统为**最小相位系统**。若传递函数中存在不稳定环节, 则称为非最小相位系统。
- (5) **最小相位系统的对数幅频特性和相频特性之间具有一一对应关系, 仅利用对数幅频特性就得到传递函数;**

例 根据Bode图确定系统传递函数。

解. 依图有 $G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$

$20 \lg K = 30 \Rightarrow K = 10^{\frac{30}{20}} = 31.6$

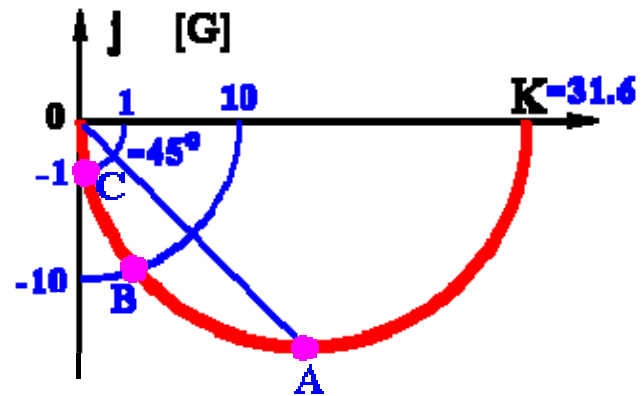
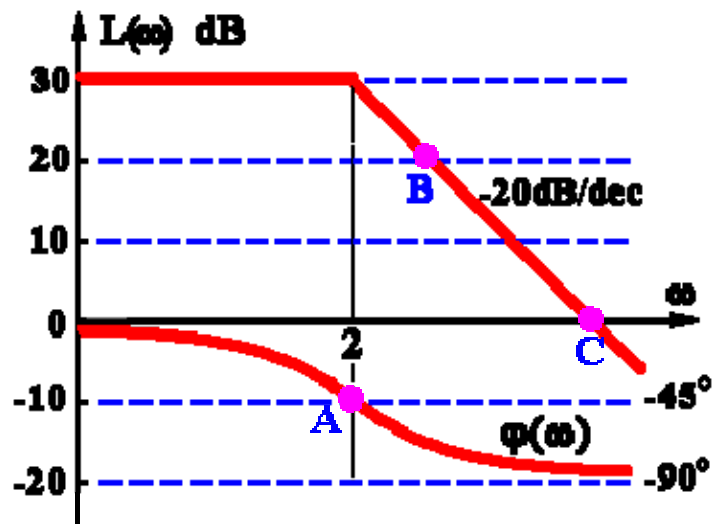
转折频率 $\omega = 2 = 1/T$ $G(s) = \frac{31.6}{\frac{s}{2} + 1}$
 $T = 0.5$

• Bode图与Nyquist图之间的对应关系:

• 截止频率 ω_c : $|G(j\omega_c)| = 1$

$30\text{dB} = -20(\lg 2 - \lg \omega_c) = 20 \lg \frac{\omega_c}{2}$ (近似计算)

$\lg \frac{\omega_c}{2} = \frac{30}{20} = 1.5 \quad \omega_c = 2 \times 10^{1.5} = 63.2 \text{ rad/s}$



例 根据Bode图确定系统传递函数。

解. 依图有 $G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1}$

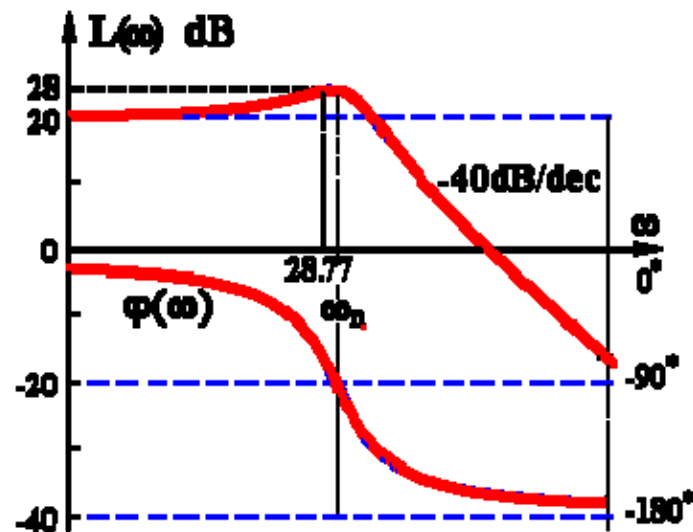
$$20 \lg K = 20 \Rightarrow K = 10$$

$$\begin{cases} 20 \lg M_r = 20 \lg \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}} = 8 \text{ dB} \\ \omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} = 28.77 \end{cases}$$

$$2\xi \sqrt{1-\xi^2} = 10^{-\frac{8}{20}} = 0.3981$$

$$\xi^4 - \xi^2 - 1.5774 = 0$$

$$\begin{cases} \xi_1 = 0.203 \\ \text{舍弃负根及大于0.707的根} \end{cases}$$



$$\omega_n = \frac{\omega_r}{\sqrt{1-2\xi^2}} = 30$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{10 \times 30^2}{s^2 + 2 \times 0.203 \times 30 s + 30^2} \\ &= \frac{9000}{s^2 + 12.18 s + 900} \end{aligned}$$

• Bode图与Nyquist图之间的对应关系:

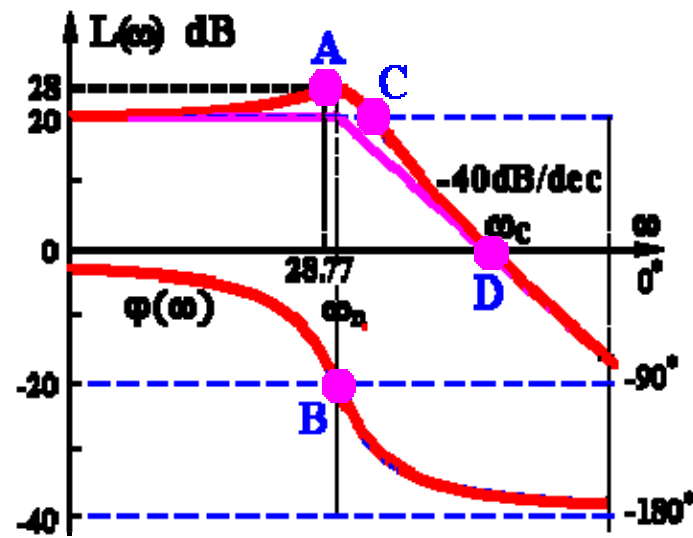
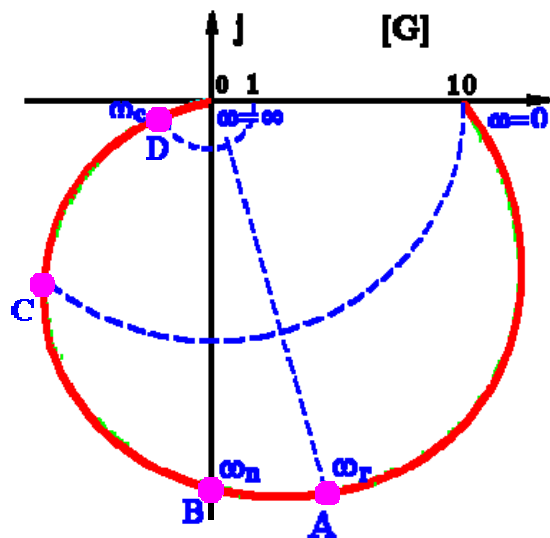
• 截止频率 ω_c :

$$\frac{0-20}{\lg \omega_c - \lg \omega_n} = -40$$

$$\lg\left(\frac{\omega_c}{30}\right) = \frac{20}{40}$$

$$\frac{\omega_c}{30} = 10^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_c = 30 \times \sqrt{10} = 94.87 \text{ rad/s}$$

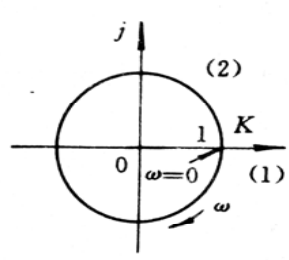
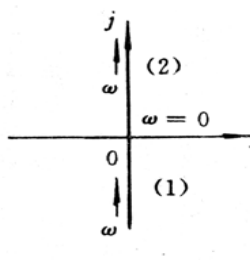
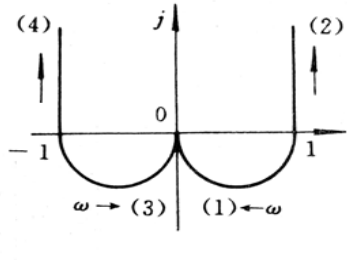
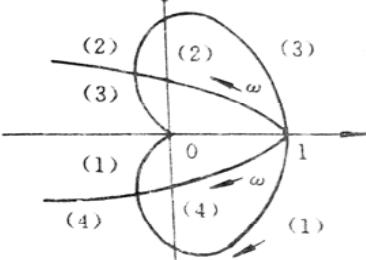
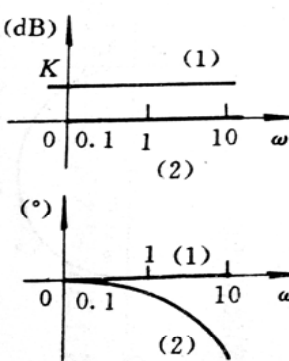
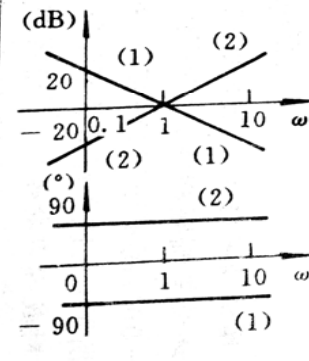
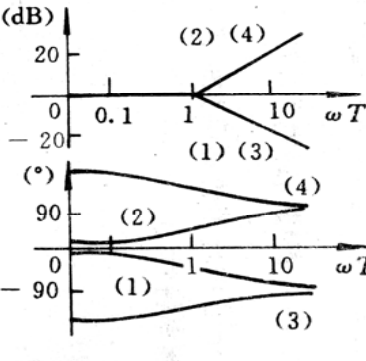
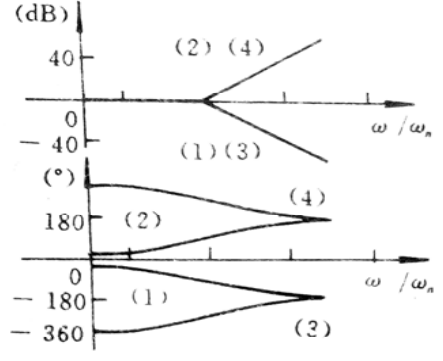


典型环节幅值、相位特性汇总

Transfer function	Magnitude M	Phase ϕ	Asymptotes			
			M_0	M_∞	ϕ_0	ϕ_∞
K	K	0	K	K	0	0
$\frac{1}{1 + sT}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$	$-\tan^{-1}(\omega T)$	1	0	0	-90
$1 + sT$	$\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$	$+\tan^{-1}(\omega T)$	1	∞	0	+90
$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{\omega}$	-90	∞	0	-90	-90
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{\omega^n}$	-90n	∞	0	-90n	-90n
$\frac{1}{1 + (2\zeta/\omega_n)s + s^2/\omega_n^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2}}}$	$\tan^{-1} \frac{-2\zeta\omega/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2}$	1	0	0	-180
$1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$	$\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2}}$	$-\tan^{-1} \frac{-2\zeta\omega/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2}$	1	∞	0	180

典型环节幅值、相位曲线汇总

表 5-2 典型环节频率特性一览表

典型环节 频率特性曲线	典型环节	典型环节	典型环节	典型环节
	(1) 比例环节 K (2) 延迟环节 $e^{-\tau s}$	(1) 积分环节 $1/s$ (2) 微分环节 s	(1) 惯性环节 $1/(Ts + 1)$ (2) 一阶微分环节 $Ts + 1$ (3) 不稳定惯性环节 $1/(Ts - 1)$ (4) 不稳定一阶微分环节 $Ts - 1$	(1) 振荡环节 $1/[(s/\omega_n)^2 + 2\xi(s/\omega_n) + 1]$ (2) 二阶微分环节 $(s/\omega_n)^2 + 2\xi(s/\omega_n) + 1$ (3) 不稳定振荡环节 $1/[(s/\omega_n)^2 - 2\xi(s/\omega_n) + 1]$ (4) 不稳定二阶微分环节 $(s/\omega_n)^2 - 2\xi(s/\omega_n) + 1$
幅相曲线				
对数频率特性曲线				

5-3 系统开环频率特性

1 绘制开环系统的Bode图

设开环传递函数 $G(s)$ 由典型环节串联而成

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)\cdots G_n(s)$$

频率特性

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)\cdots G_n(j\omega) \\ &= |G_1(j\omega)|e^{j\varphi_1(\omega)} |G_2(j\omega)|e^{j\varphi_2(\omega)} |G_3(j\omega)|e^{j\varphi_3(\omega)} \cdots |G_n(j\omega)|e^{j\varphi_n(\omega)} \\ &= \prod_{i=1}^n |G_i(j\omega)|e^{j\varphi_i(\omega)} \end{aligned}$$

开环相频特性

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega)$$

开环对数幅频特性

$$L(\omega) = 20\lg \prod_{i=1}^n |G_i(j\omega)| = \sum_{i=1}^n 20\lg |G_i(j\omega)|$$

例：已知开环系统传递函数为 $G(s) = \frac{100}{s(s+10)(s+1)}$ ，绘制系统的开环对数频率特性曲线。

数频率特性曲线。

解：

(1) 将传函表示成典型环节的形式

$$G(s) = \frac{100}{s(s+10)(s+1)} = \frac{10}{s(0.1s+1)(s+1)}$$

其中包含四个典型环节

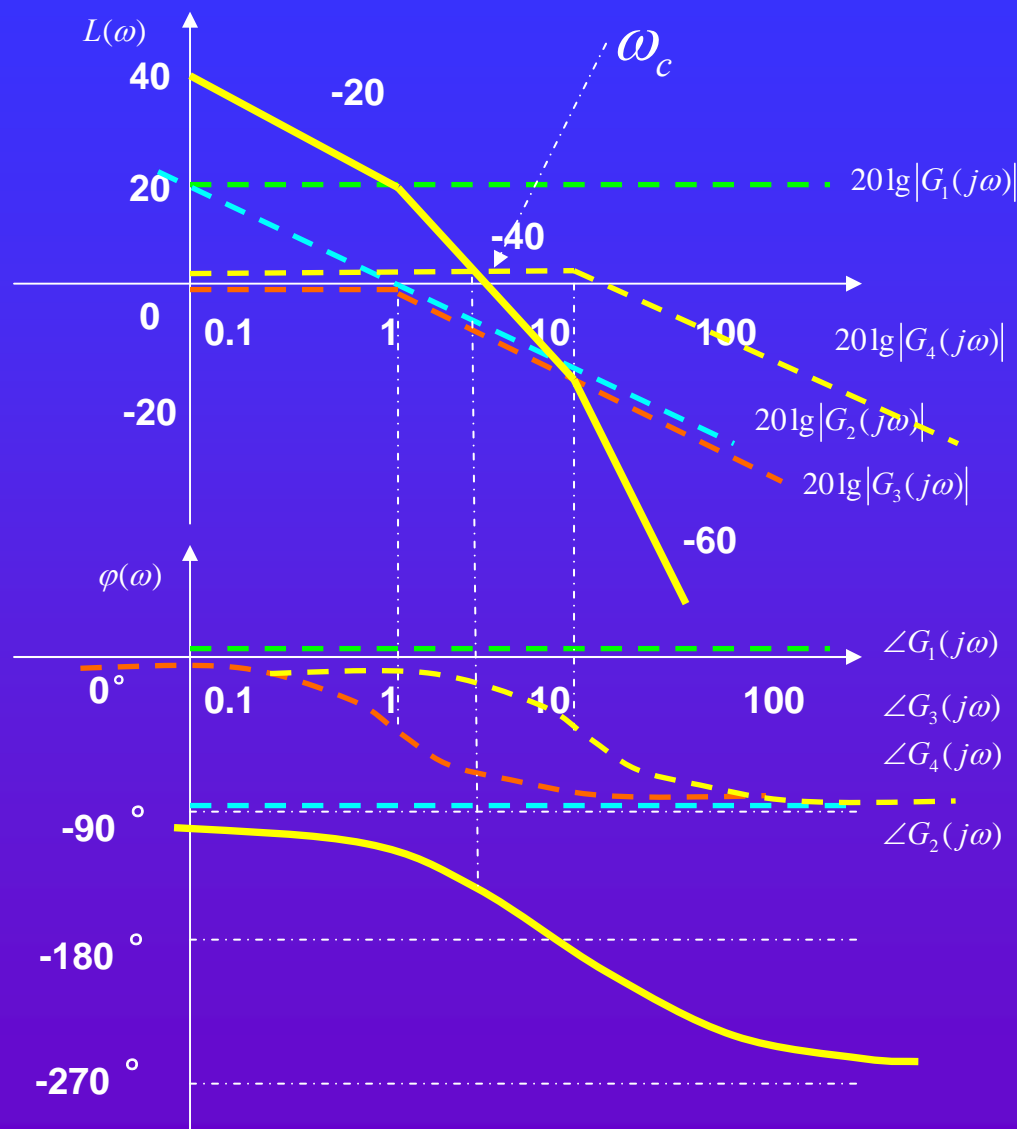
放大环节： $G_1(s) = 10$

积分环节： $G_2(s) = 1/s$

惯性环节： $G_3(s) = 1/(s+1)$;

$$G_4(s) = 1/(0.1s+1);$$

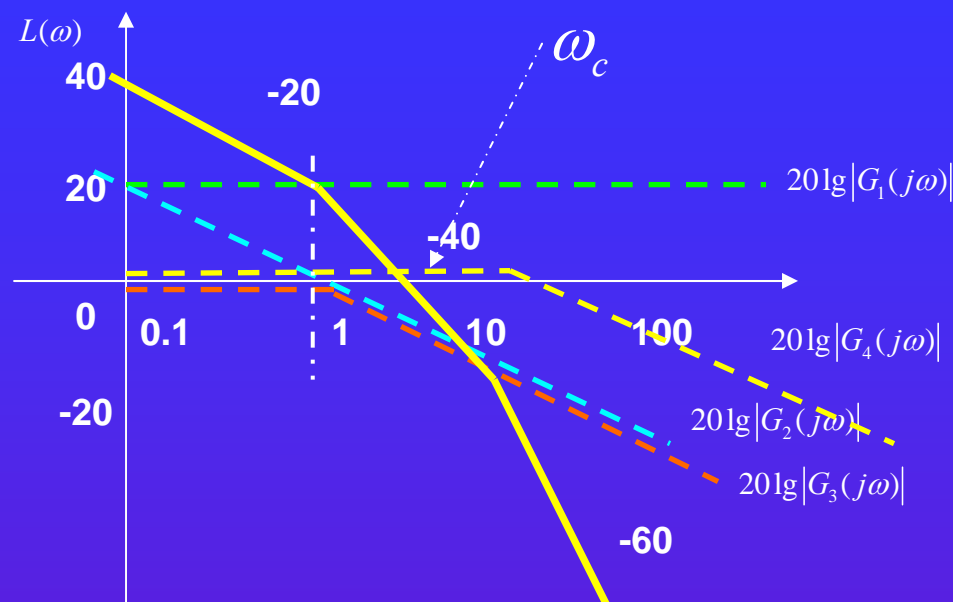
分别作出渐近线对数幅频曲线和相频曲线，然后叠加起来得到开环对数频率特性曲线



近似对数幅频曲线有以下特点：

- (1) 低频段斜率等于 $\pm \nu 20\text{dB/dec}$, 其中 ν 是开环传函中微、积分环节的个数.
- (2) 最左段直线(最小交接频率左侧)或它的延长线与 $\omega=1$ 的垂直线交点纵坐标为 $20\lg K$ 。(微分、积分环节对该点的贡献均为0, 其他环节贡献或者为0, 或者不被考虑)
- (3) 在交接频率处, 直线斜率将发生变化, 若遇到惯性环节则斜率减 20dB/dec , 若遇到震荡环节减 40dB/dec , 若遇到一阶微分环节加 20dB/dec , 若遇到二阶为分环节则加 40dB/dec 。

根据以上三条可以很方便地绘制对数幅频特性



绘制开环系统Bode图的步骤

(1) 化 $G(j\omega)$ 为尾1标准型

(2) 顺序列出转折频率

(3) 确定基准线 $\left\{ \begin{array}{l} \text{最小转折频率之左} \\ \text{的特性及其延长线} \end{array} \right.$

(4) 叠加作图 $\left\{ \begin{array}{l} \text{一阶} \left\{ \begin{array}{ll} \text{惯性环节} & -20\text{dB/dec} \\ \text{一阶微分} & +20\text{dB/dec} \end{array} \right. \\ \text{二阶} \left\{ \begin{array}{ll} \text{振荡环节} & -40\text{dB/dec} \\ \text{二阶微分} & +40\text{dB/dec} \end{array} \right. \end{array} \right.$

例1 $G(s) = \frac{40(s + 0.5)}{s(s + 0.2)(s^2 + s + 1)}$

$$G(s) = \frac{100(\frac{s}{0.5} + 1)}{s(\frac{s}{0.2} + 1)(s^2 + s + 1)}$$

- 0.2 惯性环节
- 0.5 一阶微分环节
- 1 振荡环节

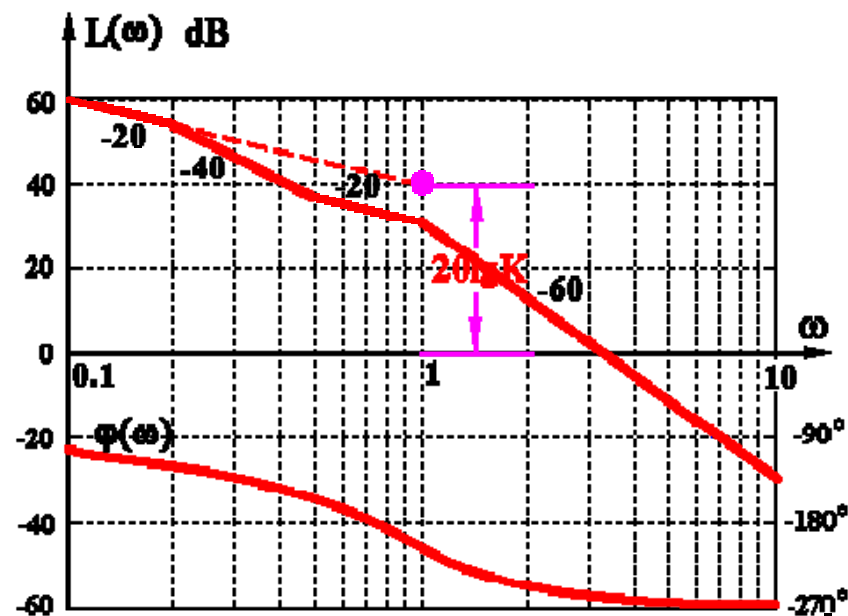
- 基准点 ($\omega = 1, L(1) = 20 \lg K$)
- 斜率 $-20 \cdot \nu \text{ dB/dec}$

- $\omega=0.2$ 惯性环节 -20
- $\omega=0.5$ 一阶微分 $+20$
- $\omega=1$ 振荡环节 -40

$$G(s) = \frac{100(\frac{s}{0.5} + 1)}{s(\frac{s}{0.2} + 1)(s^2 + s + 1)}$$

{ 基准点 ($\omega = 1, L(1) = 20 \lg K$)
 斜率 $-20 \cdot \nu$ dB/dec

{ $\omega=0.2$ 惯性环节 -20
 $\omega=0.5$ 一阶微分环节 $+20$
 $\omega=1$ 振荡环节 -40



- (5) 检查
- ① $L(\omega)$ 最右端曲线斜率 $= -20(n-m)$ dB/dec
 - ② 转折点数 = (惯性) + (一阶微分) + (振荡) + (二阶微分) 的个数

例 已知某最小相位系统的Bode 图，确定 $G(s)$ 的结构及增益。

解

$$G(s) = \frac{K \left(\frac{s}{\omega_1} + 1 \right)}{s^2 \left(\frac{s^2}{\omega_2^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_2} + 1 \right)}$$

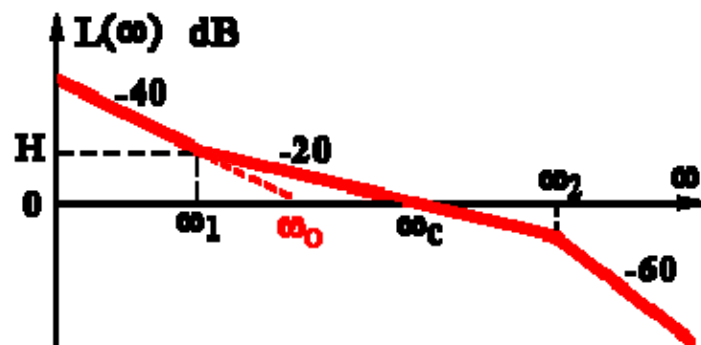
解法 I $20 \lg \frac{K}{\omega_0^2} = 0 \quad K = \omega_0^2$

$$H = -40[\lg \omega_1 - \lg \omega_0]$$

$$= -20(\lg \omega_1 - \lg \omega_c)$$

$$40 \lg \frac{\omega_0}{\omega_1} = 20 \lg \frac{\omega_c}{\omega_1}$$

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^2 = \frac{\omega_c}{\omega_1} \quad K = \omega_0^2 = \omega_1 \omega_c$$



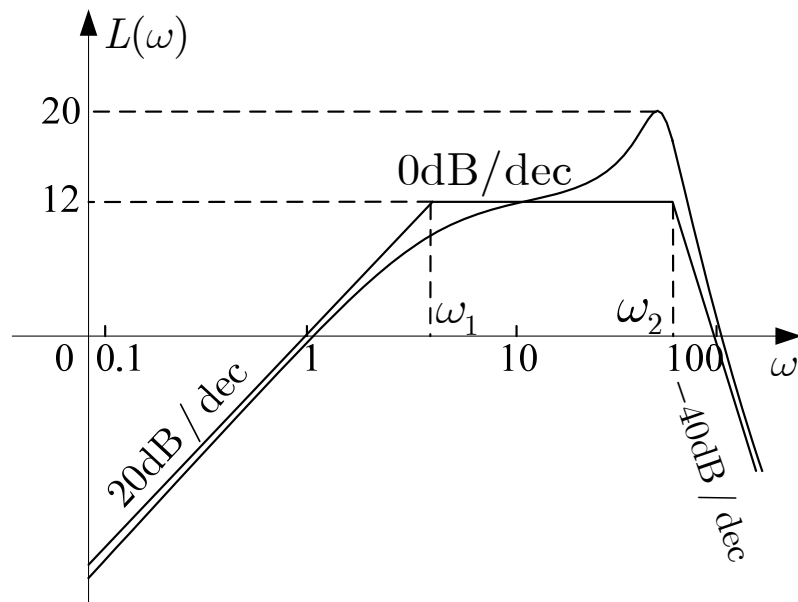
解法 II $|G(j\omega_c)| = 1 = \frac{K \frac{\omega_c}{\omega_1}}{\omega_c^2 \cdot 1} = \frac{K}{\omega_1 \omega_c}$

$$(\omega_c \gg \omega_1, \omega_c \ll \omega_2)$$

证明: $20 \lg \left| \frac{K}{s^v} \right| = 20 \lg \left| \frac{K}{\omega^v} \right| = 0$
 $K = \omega_0^v \quad \omega_0 = K^{\frac{1}{v}}$

能确定阻尼比吗？

例 某最小相位系统的对数幅频特性曲线及其渐近线如图所示，试确定该系统的传递函数。



解：①低频渐近线斜率为 $+20 \text{ dB/dec}$ ，所以 $v = -1$ ，系统含有一个微分环节。

②共有两个转折频率。 $\omega = \omega_1$ 处，斜率变化为 -20 dB/dec ，对应惯性环节。

$\omega = \omega_2$ 处，斜率变化为 -40 dB/dec ，且 ω_2 附近存在谐振现象，故开环传递函数中存在以 ω_2 为转折频率的振荡环节。写出传递函数结构

$$G(s) = \frac{Ks}{(1 + \frac{s}{\omega_1})(\frac{s^2}{\omega_2^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_2} + 1)}$$

③低频段渐近线的方程为

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\omega^v} = 20 \lg K + 20 \lg \omega$$

低频段直线必过 $(1, 20 \lg K)$ ，又 $\because 20 \lg K = 0 \Rightarrow K = 1$ 。

低频段直线过点 $(1, 0)$ 和 $(\lg \omega_1, 12)$ 且斜率为 20dB/dec ，

列写直线方程： $0 - 12 = 20(\lg 1 - \lg \omega_1)$

解得 $\omega_1 = 3.98$ 。

最右段直线过 $(100, 0)$ 和 $(\lg \omega_2, 12)$ 且斜率为 -40dB/dec ，列写直线方程

$$0 - 12 = -40(\lg 100 - \lg \omega_2)$$

解得 $\omega_2 = 50.1$ 。

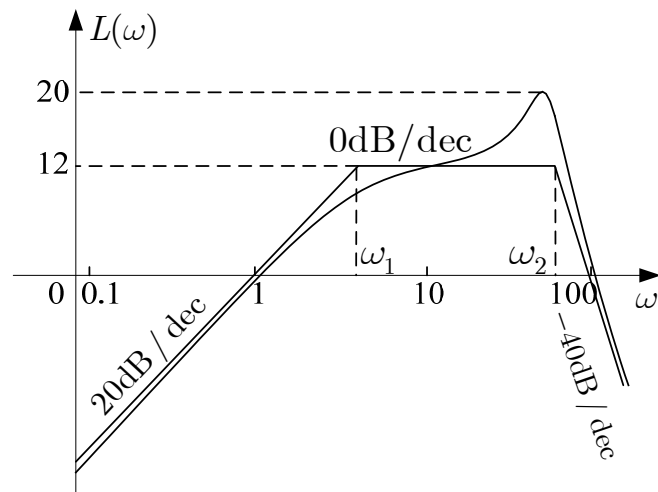
在谐振频率 ω_r 处，振荡环节的谐振峰值为

$$20 \lg M_r = 20 \lg \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

其中 $20 \lg M_r = 20 - 12 = 8 \text{ (dB)}$ ，可解得： $\xi_1 = 0.204$ ， $\xi_2 = 0.979$ (舍)。

故

$$G(s) = \frac{s}{(1 + \frac{s}{3.98})(\frac{s^2}{50.1^2} + 0.408 \frac{s}{50.1} + 1)}$$



2 绘制系统开环幅相频率特性曲线

要点:

(1)确定 Nyquist 图的起点($\omega = 0_+$)和终点($\omega = \infty$)

(2)与实轴的交点。解方程 $\text{Im}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)] = 0$ 得穿越频率 ω_x

交点坐标 $\text{Re}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)]$

(3)结合实频特性和虚频特性或者根据零极点分布图确定曲线的变化范围.

例 某零型单位反馈系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)} = K \frac{\frac{1}{T_1}}{\left[s - \left(-\frac{1}{T_1}\right)\right]} \frac{\frac{1}{T_2}}{\left[s - \left(-\frac{1}{T_2}\right)\right]}, \quad K > 0, T_1 > 0, T_2 > 0.$$

试绘制系统开环幅相频率特性曲线.

解: 惯性环节 $\varphi(\omega): 0^\circ \sim -90^\circ$, $\angle G(s)$ 变化范围 $0^\circ \sim -180^\circ$

起点: $A(0) = K, \varphi(0) = 0^\circ$; 终点: $A(\infty) = 0, \varphi(\infty) = -180^\circ$

$$G(j\omega) = \frac{K}{(T_1j\omega+1)(T_2j\omega+1)} = \frac{K[1 - T_1T_2\omega^2 - j(T_1+T_2)\omega]}{(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)}$$

当 $0 < \omega < +\infty$ 时, $\text{Im}[G(j\omega)] < 0$

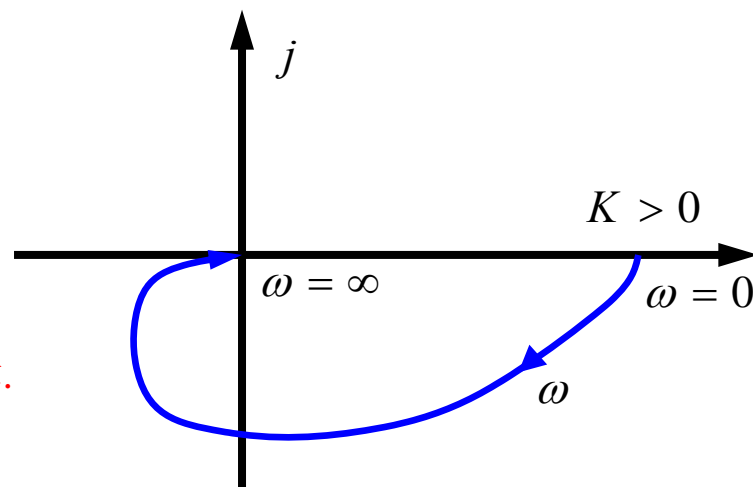
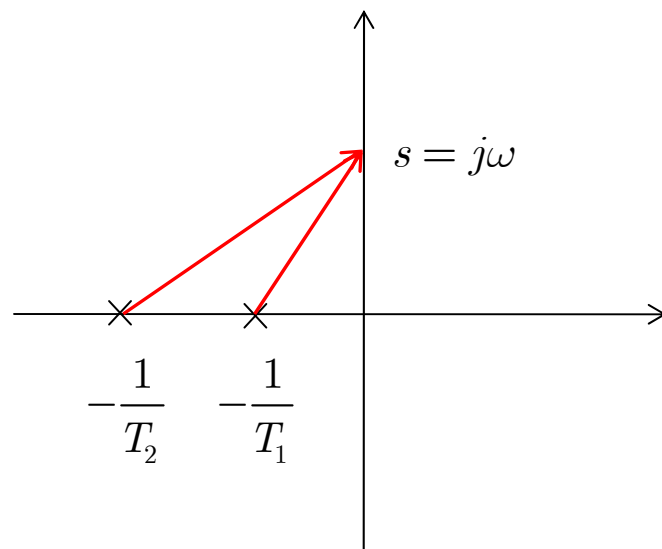
当 $0 < \omega^2 < \frac{1}{T_1T_2}$ 时, $\text{Re}[G(j\omega)] > 0 \rightarrow$ 第四象限;

当 $\omega^2 > \frac{1}{T_1T_2}$ 时, $\text{Re}[G(j\omega)] < 0 \rightarrow$ 第三象限;

令 $\text{Im}[G(j\omega_x)] = 0$, 得 $\omega_x = 0, \infty$ 。

也可根据零极点分布图分析幅值相角随 ω 的变化规律.

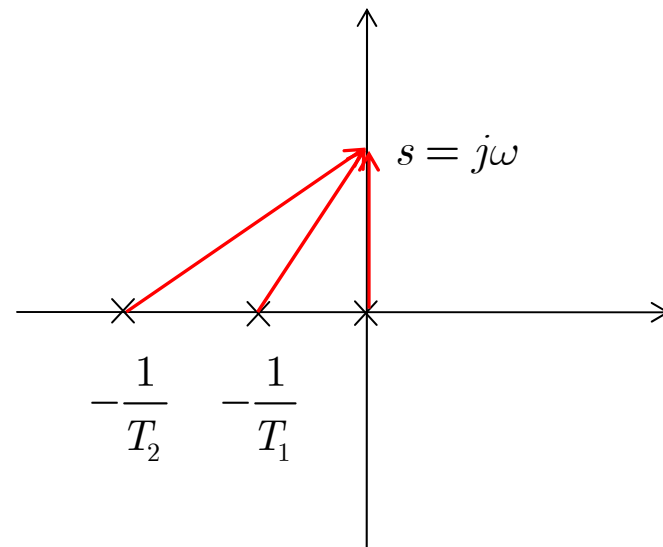
绘制概略幅相频率特性曲线如图.



例 某单位反馈系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{K}{s} \cdot \frac{\frac{1}{T_1}}{\left[s - \left(-\frac{1}{T_1}\right)\right]} \cdot \frac{\frac{1}{T_2}}{\left[s - \left(-\frac{1}{T_2}\right)\right]}$$

$$K, T_1, T_2 > 0$$



试绘制系统开环幅相频率特性曲线

解：频率特性

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(T_1j\omega+1)(T_2j\omega+1)} = \frac{K \left[-(T_1+T_2)\omega + j(1-T_1T_2\omega^2) \right]}{\omega(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)}$$

幅值变化： $A(0_+) = \infty$, $A(\infty) = 0$

各环节相角变化： $\angle \frac{1}{j\omega} : -90^\circ$, $\angle \frac{1}{jT_1\omega+1} : 0 \sim -90^\circ$

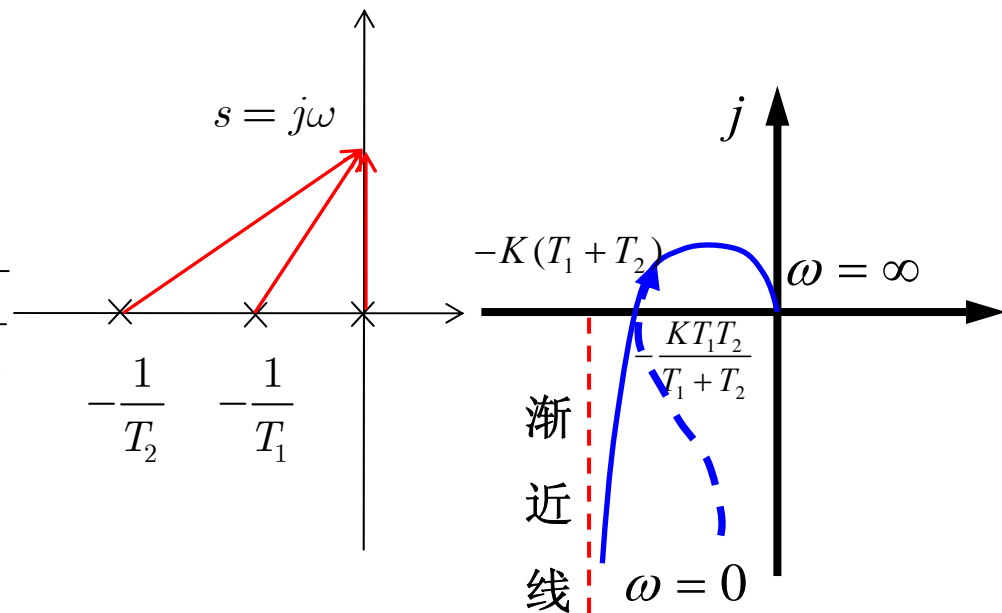
$$\angle \frac{1}{jT_2\omega+1} : 0 \sim -90^\circ , \quad \angle K : 0^\circ$$

开环传函相角变化: $\varphi(\omega): -90^\circ \sim -270^\circ$ 。

起点: $\text{Re}[G(j0_+)] = -K(T_1 + T_2)$
 $\text{Im}[G(j0_+)] = -\infty$

与实轴交点: 令 $\text{Im}[G(j\omega_x)] = 0$ 得, $\omega_x = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}}$

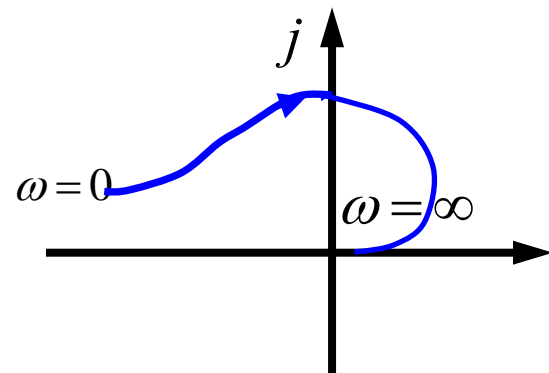
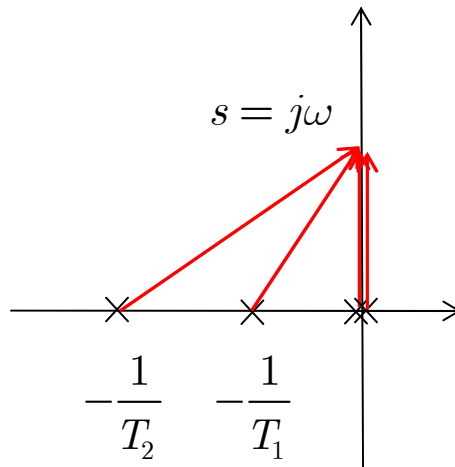
$$G(j\omega_x) = -\frac{KT_1 T_2}{T_1 + T_2}$$



再增添一个积分环节:

$$G(s) = \frac{K}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$= \frac{K}{s^2} \cdot \frac{\frac{1}{T_1}}{\left[s - \left(-\frac{1}{T_1}\right)\right]} \frac{\frac{1}{T_2}}{\left[s - \left(-\frac{1}{T_2}\right)\right]}$$



例 某系统开环传递函数 $G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ $K, T_1, T_2, \tau > 0$

试绘制系统开环幅相频率特性曲线

解：频率特性

$$G(j\omega) = \frac{K(j\tau\omega + 1)}{j\omega(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)}$$

各环节相角变化： $\angle j\tau\omega + 1 : 0 \sim 90^\circ$, $\angle \frac{1}{j\omega} : -90^\circ$, $\angle \frac{1}{jT_1\omega + 1} : 0 \sim -90^\circ$

$$\angle \frac{1}{jT_2\omega + 1} : 0 \sim -90^\circ , \quad \angle K : 0^\circ$$

总相角变化： $\varphi(\omega) : -90^\circ \sim -180^\circ$ 。

总相角变化: $\varphi(\omega): -90^\circ \sim -180^\circ$ 。

起点: $\infty \angle -90^\circ$, 终点: $0 \angle -180^\circ$

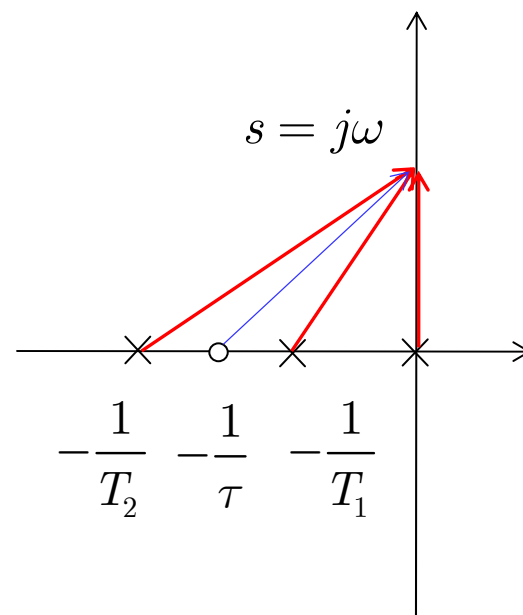
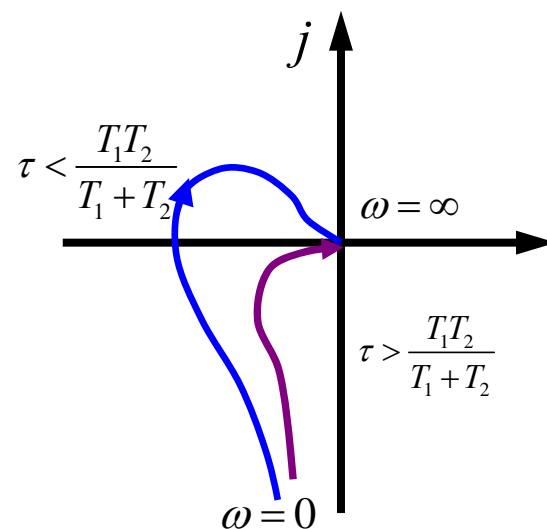
与实轴的交点: 令 $\text{Im}(G(j\omega_x)) = 0$,

得 $\omega_x = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2 - T_1 \tau - T_2 \tau}}$, 与实轴的交点: $G(j\omega_x)$

当 $\tau < \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ 时, 与实轴有非零交点。

当 $\tau > \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ 时, 与实轴无非零交点。

$$G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{K}{s} \cdot \frac{\frac{1}{T_1}}{\left[s - \left(-\frac{1}{T_1}\right)\right]} \cdot \frac{\frac{1}{T_2}}{\left[s - \left(-\frac{1}{T_2}\right)\right]} \cdot \tau \cdot \left[s - \left(-\frac{1}{\tau}\right)\right]$$



一些有用结论:

对最小相位开环系统

$$G(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s^v (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_{n-v} s + 1)} = \frac{K}{s^v} G_0(s)$$

其幅相频率特性曲线有如下特点:

① 幅相频率特性曲线的起点仅和 $\frac{K}{s^v}$ 有关:

当 $v = 0$ 时, $G(j0^+) = K \angle 0^\circ$, 即曲线起始于实轴上坐标为 K 的点;

当 $v > 0$ 时, $G(j0^+) = \infty \angle (-90^\circ v)$, 即曲线起始于无穷远处, 相频特性值为 $-90^\circ v$;

当 $v < 0$ 时, $G(j0^+) = 0 \angle (90^\circ |v|)$, 即曲线起始于复平面的原点, 相频特性值为 $+90^\circ |v|$;

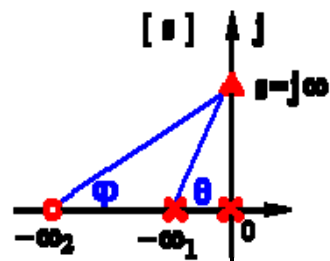
② 幅相频率特性曲线的终点 $G(j\infty)$:

当 $n - m = 0$ 时, $G(j\infty) = \frac{K\tau_1\tau_2 \cdots \tau_m}{T_1 T_2 \cdots T_{n-v}} \angle 0^\circ$, 曲线终止于实轴上一个点;

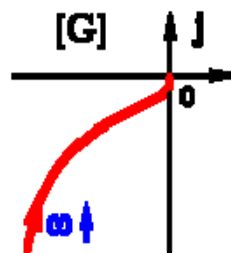
当 $n - m > 0$ 时, $G(j\infty) = 0 \angle (-90^\circ (n - m))$, 曲线终止于原点, 接近角是 $-90^\circ \times (n - m)$;

当 $n - m < 0$ 时, $G(j\infty) = \infty \angle (90^\circ (m - n))$, 曲线终止于无穷远, 接近角是 $90^\circ \times (m - n)$;

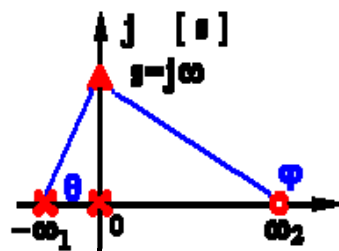
(1)



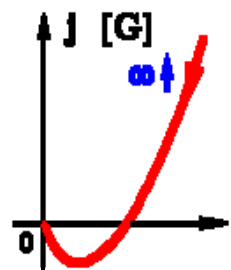
$$\begin{cases} G(j0) = \infty \angle -90^\circ \\ G(j\infty) = 0 \angle -90^\circ \end{cases}$$



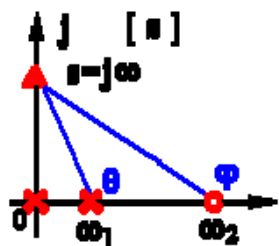
(2)



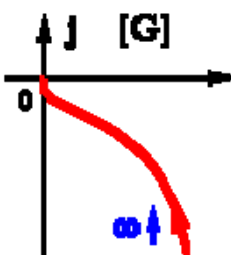
$$\begin{cases} G(j0) = \infty \angle 90^\circ \\ G(j\infty) = 0 \angle -90^\circ \end{cases}$$



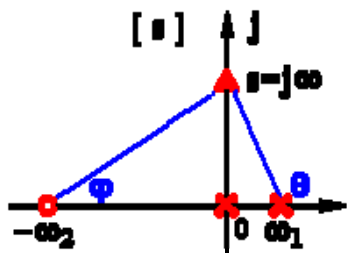
(3)



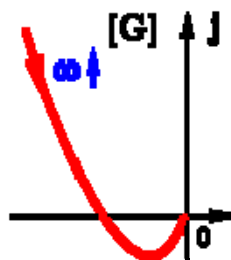
$$\begin{cases} G(j0) = \infty \angle -90^\circ \\ G(j\infty) = 0 \angle -90^\circ \end{cases}$$



(4)



$$\begin{cases} G(j0) = \infty \angle -270^\circ \\ G(j\infty) = 0 \angle -90^\circ \end{cases}$$



$$G(s) = \frac{K(\frac{s}{\omega_2} \pm 1)}{s(\frac{s}{\omega_1} \pm 1)}$$

非最小相位

5.4 系统稳定性分析

一 引言

系统稳定的充要条件 — 全部闭环极点均具有负的实部

代数稳定判据 — Routh判据

频域稳定判据 — $\begin{cases} \text{Nyquist 判据} \\ \text{对数稳定判据} \end{cases}$

由开环频率特性直接判定闭环系统的稳定性

二 奈奎斯特稳定判据

闭环系统稳定的充要条件:当 $\omega=0 \rightarrow \infty$ 时, 系统开环幅相频率特性曲线正向包围 $(-1, j0)$ 点的圈数 N 等于开环特征式的正实部根数 P 的二分之一,

即: $N = \frac{P}{2}$;

若开环系统稳定 ($P=0$), 则闭环系统稳定的充要条件是: 系统开环幅相频率特性曲线不包围 $(-1, j0)$ 点, 否则系统不稳定。

注: ● 正(负)向包围 $(-1, j0)$ 是指开环幅相频率特性曲线从 $(-1, j0)$ 的左侧随 $\omega \uparrow$ 自上而下(自下而上)穿越负实轴。正(负)向包围则 N 为正(负);

● 曲线从 $(-1, j0)$ 右侧穿越的次数不计入 N ;

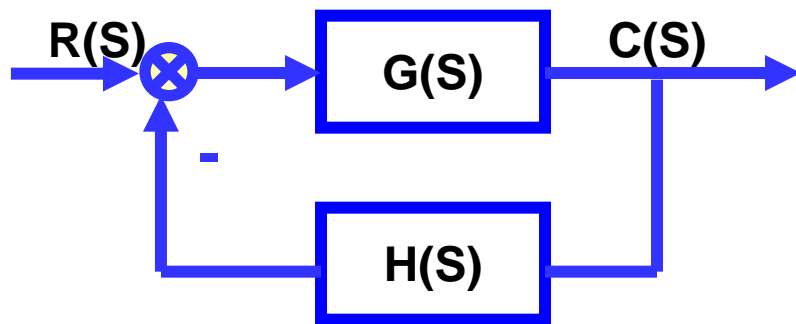
● 半次正穿越: 曲线自上向下从 $(-1, j0)$ 左侧到达负实轴终止或者自上向下从负实轴 $(-1, j0)$ 左侧出发

● 半次负穿越: 曲线自下向上从 $(-1, j0)$ 左侧到达负实轴终止或者自下向上从负实轴 $(-1, j0)$ 左侧出发。

开环频率特性与闭环特征方程之间的关系

开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$$



闭环特征方程

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{M(s)}{N(s)} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{N(s)}{N(s)}}_{\text{开环特征多项式}} + \underbrace{M(s)}_{\text{闭环特征多项式}} = 0$$

引入辅助方程

$$F(s) = \frac{N(s) + M(s)}{N(s)} = 1 + G(s)H(s)$$

零点 is 闭环极点
极点 is 开环极点

$$F(j\omega) = 1 + \underbrace{G(j\omega)H(j\omega)}_{\text{开环频率特性}}$$

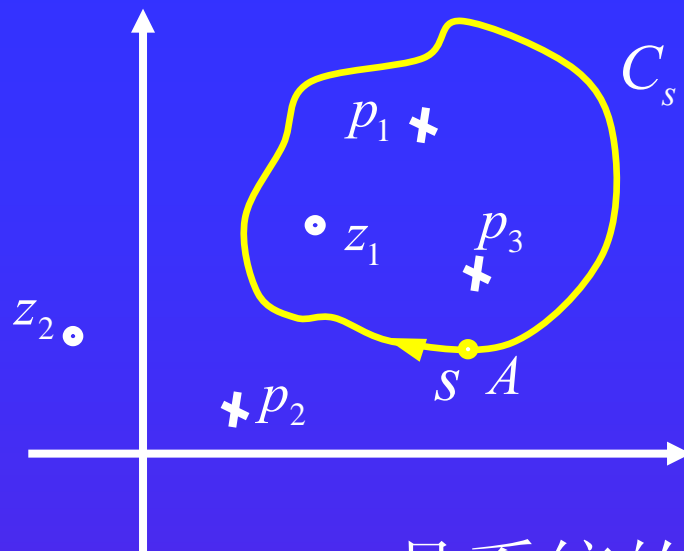
闭环特征式

映射定理：

闭环特征式为复变函数：

$$F(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

z_1, z_2, \dots, z_n 是系统的闭环极点； p_1, p_2, \dots, p_n 是系统的开环极点



引理（映射定理）：若自变量 s 在 $[s]$ 平面内顺时针沿任意一封闭回线 C_s （封闭回线不通过 $F(s)$ 的零极点）移动一周，且封闭回线包围了 $F(s)$ 的 Z 个零点和 P 个极点，那么 C_s 的映射线 $F(s)$ 在 $[s]$ 平面上正向（逆时针）包围坐标原点 $P - Z$ 圈。

简要证明:

假设 $F(s)$ 的零极点分布如右图,

当 s 从 A 点开始顺时针沿 C_s 移动一周时, 各向量相角变化情况:

$$\Delta\angle(s - z_2) = 0$$

$$\Delta\angle(s - p_2) = 0$$

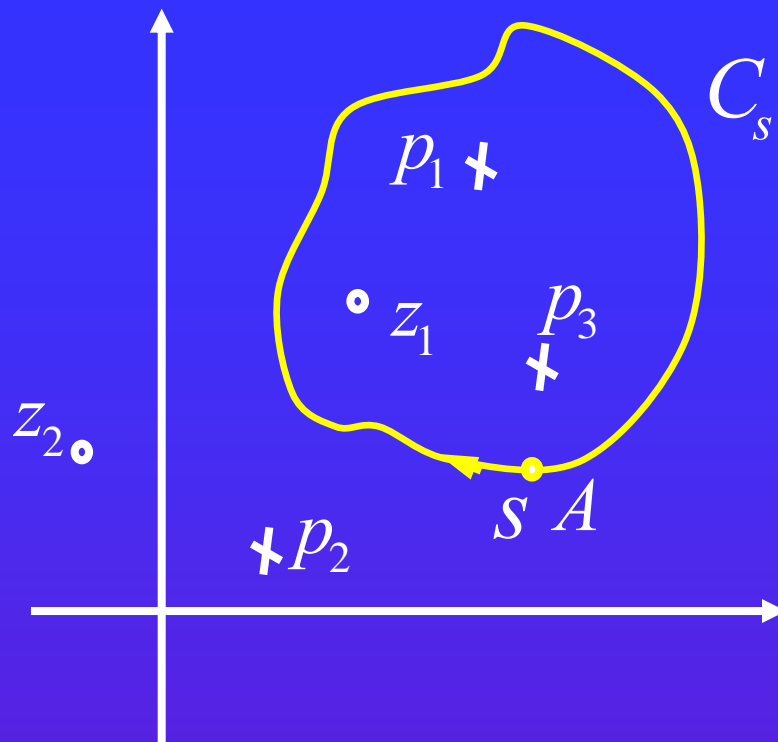
$$\Delta\angle(s - p_1) = -2\pi$$

$$\Delta\angle(s - z_1) = -2\pi$$

$$\Delta\angle(s - p_3) = -2\pi$$

$$\Delta\angle F(s) = 0 - 2\pi - (0 - 2\pi - 2\pi) = \left(\underbrace{P}_{\text{回线内极点的个数}} - \underbrace{Z}_{\text{回线内零点的个数}} \right) \times 2\pi$$

上式说明 $F(s)$ 绕原点正向（逆时针）转过 $P-Z$ 圈。



取：(1) $F(s) = 1 + G(s)H(s)$

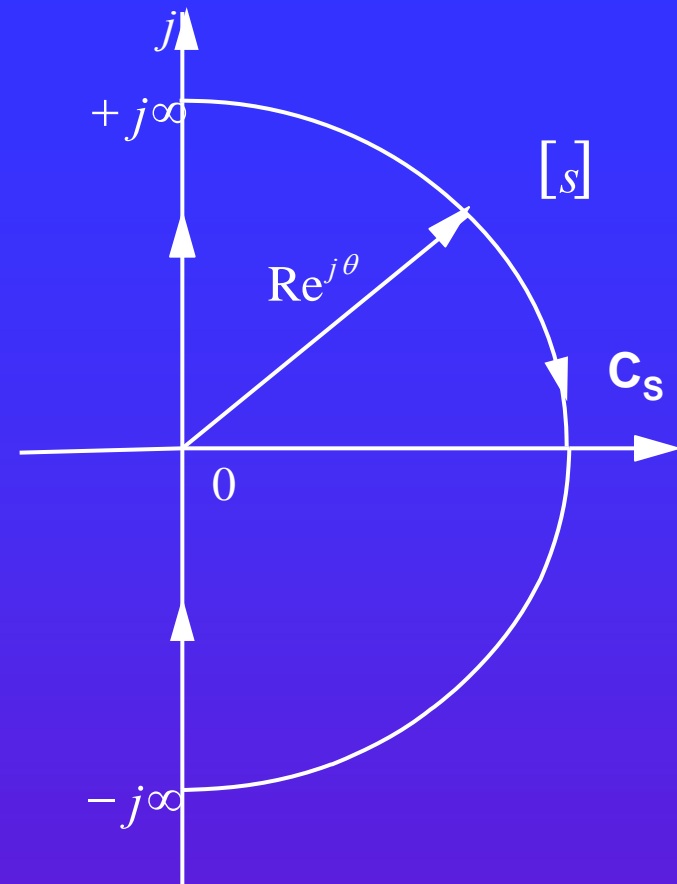
(2) 若 $F(s)$ 的零极点均不在虚轴上，
则封闭曲线 C_s 取以原点为圆心、

半径为 ∞ 的右半圆以及虚轴。

该封闭回线包围了 $F(s)$ 的所有正实部
零点 (Z 个) (闭环极点)、极点 (P 个)
(开环极点)。根据映射定理

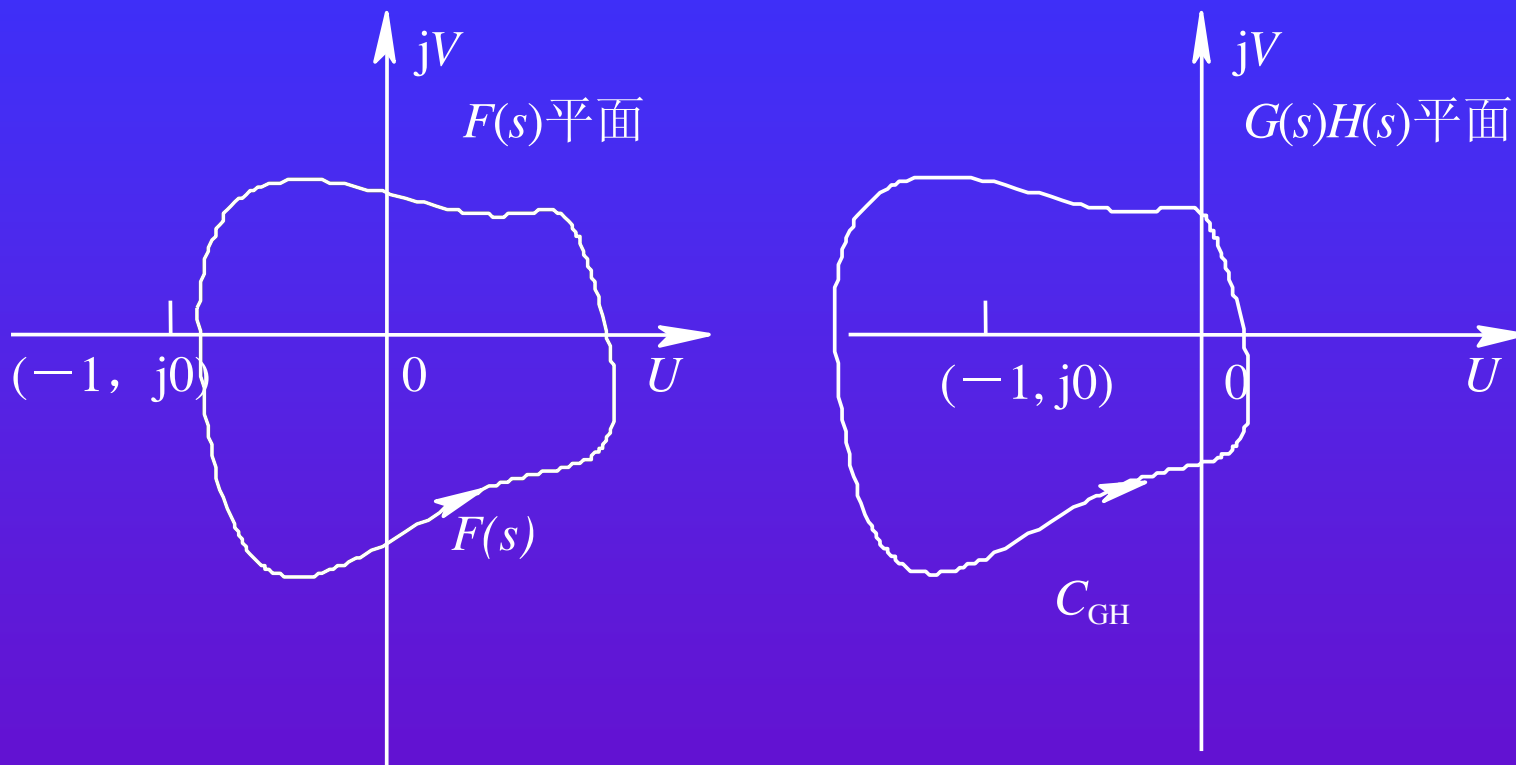
$$\begin{aligned} & \Delta \angle F(s) \Big|_{s=C_s} \\ &= \sum_{i=1}^n \Delta \angle (s - z_i) \Big|_{s=C_s} - \sum_{i=1}^n \Delta \angle (s - p_i) \Big|_{s=C_s} \\ &= \left(\underbrace{P}_{\text{开环正实部极点}} - \underbrace{Z}_{\text{闭环正实部极点}} \right) \times 2\pi \end{aligned}$$

当 s 顺时针绕以上封闭曲线一周时， $F(s)$ 逆时针绕原点 $P - Z$ 周



$$\because F(s) = 1 + G(s)H(s)$$

$\therefore s$ 顺时针绕 C_s 一周, $G(s)H(s)$ 逆时针绕 $(-1, j0)$ 点 $P-Z$ 周。



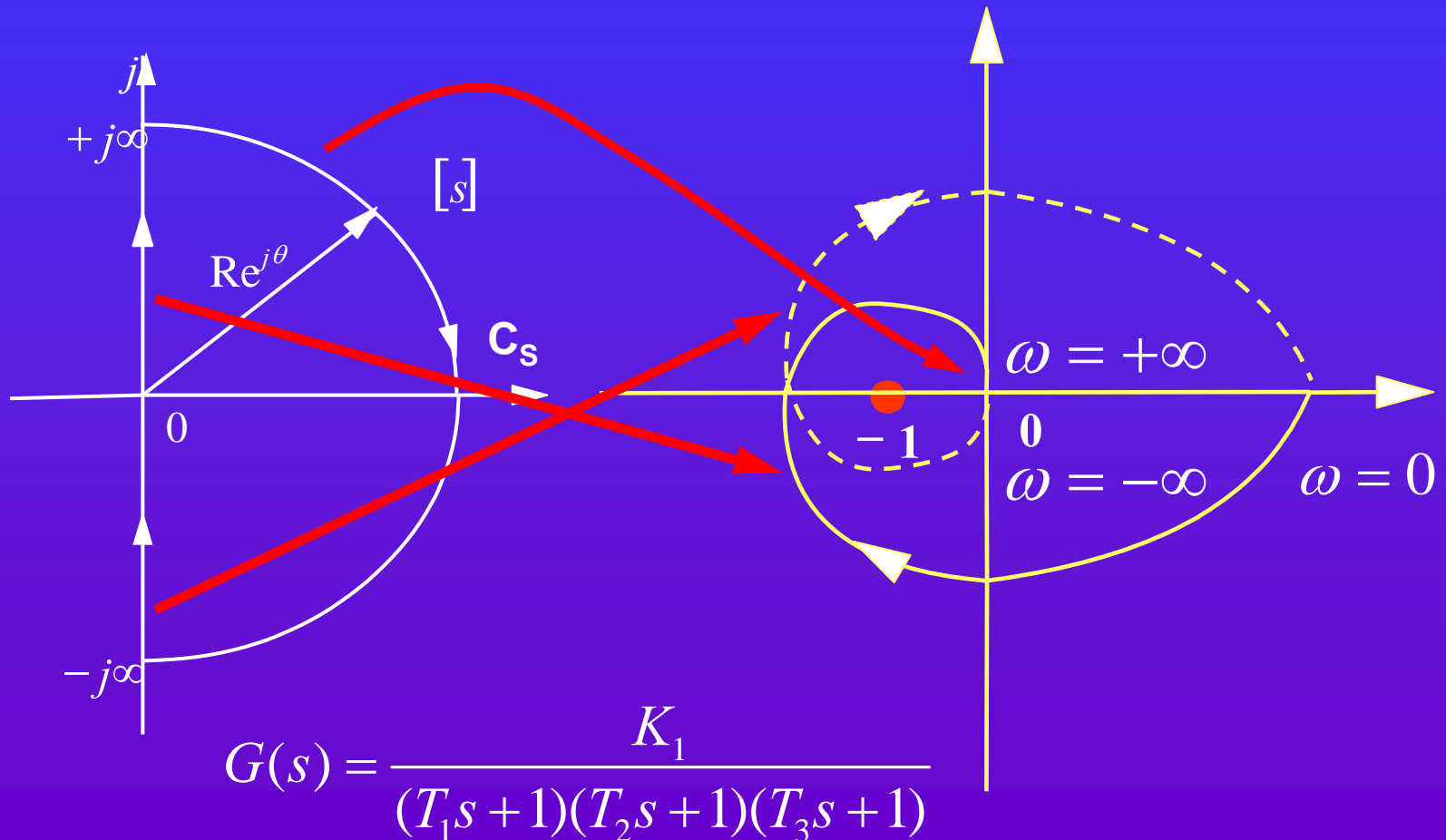
$F(s)$ 平面和 $G(s)H(s)$ 平面

可以证明：当 s 顺时针绕 C_s 一周， $G(s)H(s)$ 的映射线就是系统从 $\omega=-\infty \rightarrow \infty$ 的开环幅相频率特性曲线。

a) 半径为无穷大的半圆弧对应的 $G(s)H(s)$ 映射线为：坐标原点（ $G(s)H(s)$ 中分母阶次高于分子）或者实轴上的某点（ $G(s)H(s)$ 中分母阶次等于分子）。

b) 当 $s:-j\infty \rightarrow +j\infty$ 时，映射线是 $\omega:-\infty \rightarrow +\infty$ 的 $Nyquist$ 曲线。 $\omega:-\infty \rightarrow 0$ 和 $\omega:0 \rightarrow +\infty$ 对应的 $Nyquist$ 曲线关于实轴对称。

- 当 s 顺时针绕 C_s 一周，对应于 $\omega = -\infty \rightarrow +\infty$ 的开环幅相频率特性曲线逆时针绕 $(-1, j0)$ 点 ($\underbrace{P}_{\text{开环正实部极点}} - \underbrace{Z}_{\text{闭环正实部极点}}$) 圈。
- 系统稳定的条件： $Z = 0$ 或者说当 $\omega = -\infty \rightarrow +\infty$ 时的特开环幅相频率特性曲线逆时针绕 $(-1, j0)$ 点 P 圈



当仅考虑 $\omega=0 \rightarrow +\infty$ 时，开环幅相频率特性曲线逆时针绕 $(-1, j0)$ 点 $\frac{P-Z}{2}$ 周。

闭环系统稳定

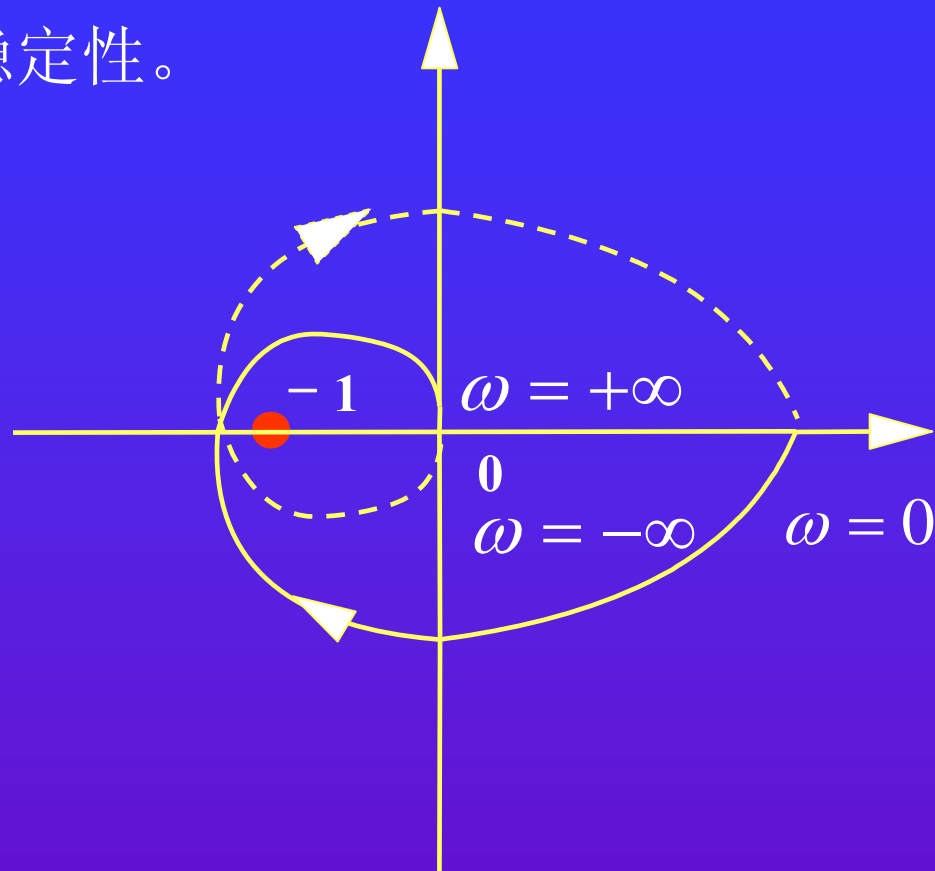
$$\Leftrightarrow \overset{\text{闭环正实部极点的个数}}{\underbrace{Z}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overset{\omega=0 \rightarrow +\infty \text{ 时的奈氏曲线包围 } (-1, j0) \text{ 的次数}}{\underbrace{N}} = \frac{\overset{\text{开环正实部极点个数}}{\underbrace{P}}}{2}$$

若开环稳定 $P=0$ ，则闭环稳定的充要条件为 $N=0$ 。

系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$,

试判断其稳定性。



用完整奈奎斯特曲线 $\omega: -\infty \rightarrow \infty$ 判断闭环稳定性;
仅用一半奈奎斯特曲线 $\omega: 0 \rightarrow \infty$ 判断闭环稳定性;

以上判据仅对 $G(s)H(s)$ 在虚轴上无零极点的情形成立。

下面考虑 $G(s)H(s)$ 在原点处有极点的情形：

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^v \prod_{k=1}^{n-v} (T_k s + 1)}$$

选择封闭曲线 C_s 如图(不经过原点)：

小半圆上有：

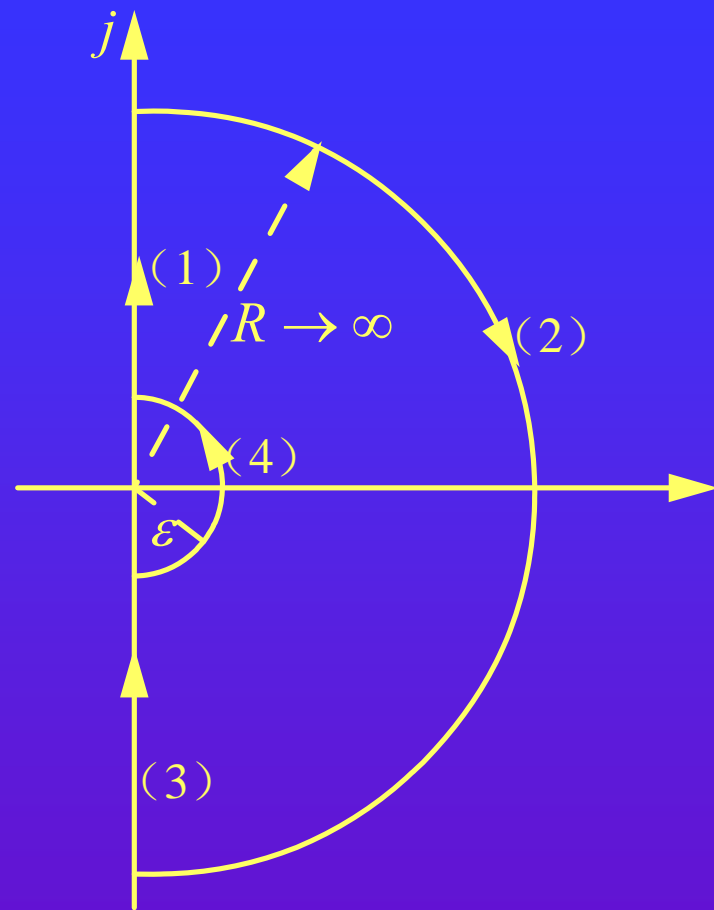
$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{j\theta}$$

当 ω 从 0_- 沿小半圆移动到 0_+ ， θ 逆时针从

$-\frac{\pi}{2}$ 转到 $\frac{\pi}{2}$ ，此时映射线为：

$$G(s)H(s) \Big|_{s=\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{j\theta}} = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^v \prod_{k=1}^{n-v} (T_k s + 1)} \Big|_{s=\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{j\theta}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon^v} e^{-jv\theta} = \infty \angle e^{-jv\theta}$$



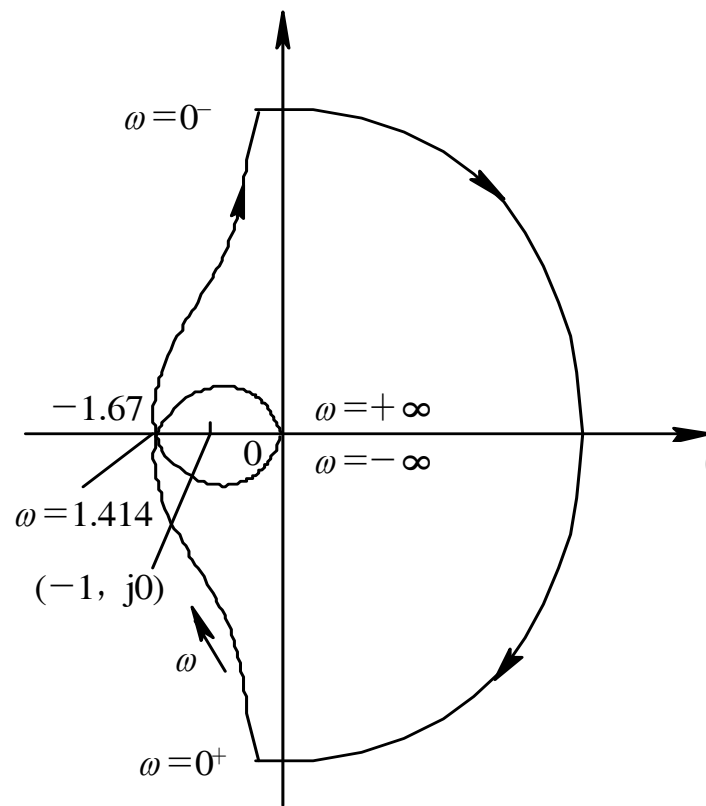
$$G(s)H(s)\Big|_{s=\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{j\theta}} = \infty \angle e^{-jv\theta}$$

和 $v=0$ 情形相比， $v \neq 0$ 时，映射线多出一段，该段是半径为无穷大，圆心角为 $v\pi$ 的圆弧，其终点位于 $\omega=0_+$ 时的奈氏曲线处。

该段和 $\omega:-\infty \rightarrow 0$ 和 $\omega:0 \rightarrow +\infty$ 对应的映射线构成了封闭的曲线

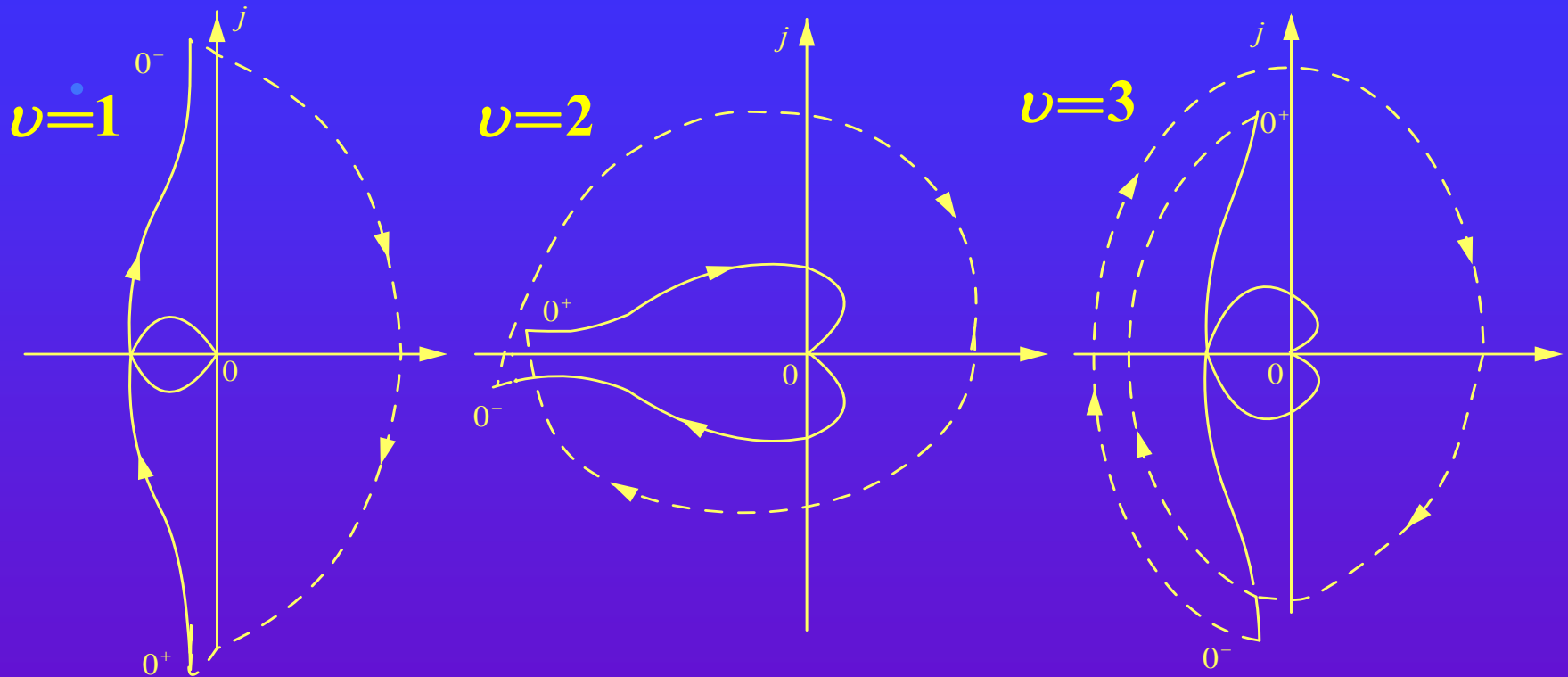
若仅考虑 $\omega:0 \rightarrow +\infty$ ，则 s 转过 $\frac{\pi}{2}$ ，

映射线转过 $\frac{v\pi}{2}$ 。



$$G(s) = \frac{10}{s(0.1s+1)(s+1)}$$

开环传递函数具有积分环节时，使用奈氏判据判断闭环稳定性之前，需要对开环奈氏曲线进行增补。



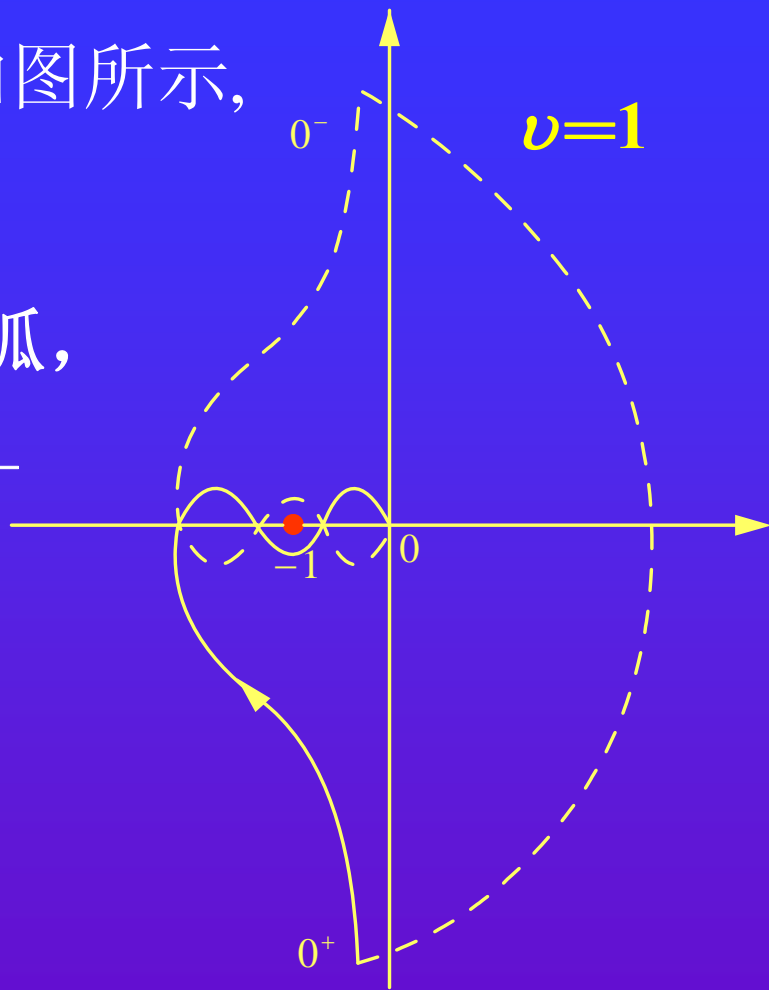
例 某系统的 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线如图所示,

$P=0$, 试判断其闭环稳定性。

解: 先画镜像曲线, 再补大圆弧,

从 $0^- \rightarrow 0^+ \rightarrow \infty \rightarrow -\infty \rightarrow 0^-$

不包围 $(-1, j0)$ 点, 故闭环
稳定。



例 某系统的 $G(j\omega)$ 曲线如图所示，

$\nu = 2, P = 0$ ，试判断闭环稳定性。

解：先画镜像曲线，再补大圆弧，

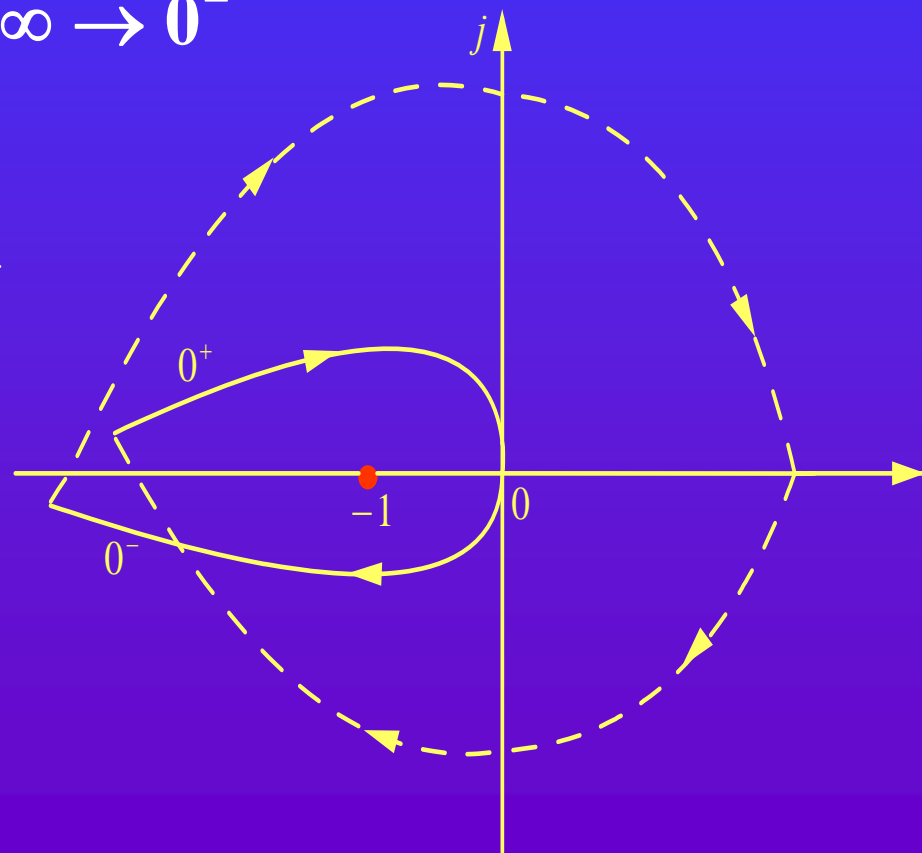
$$\omega = 0^- \rightarrow 0^+ \rightarrow \infty \rightarrow -\infty \rightarrow 0^-$$

顺时针包围 $(-1, j0)$ 点

2周 ($N=-2$)，故 闭

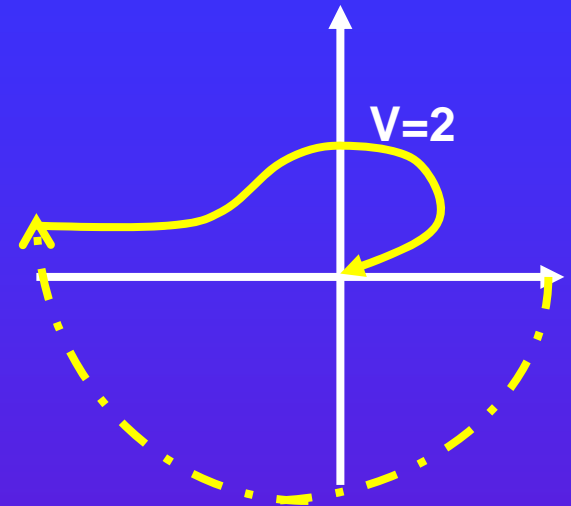
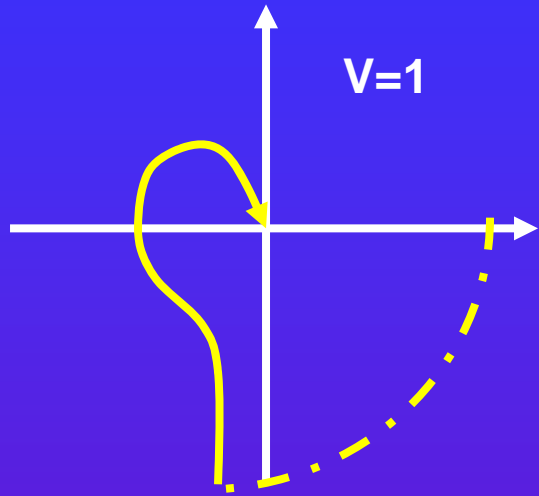
环系统不稳定，且有

两个正实部根。



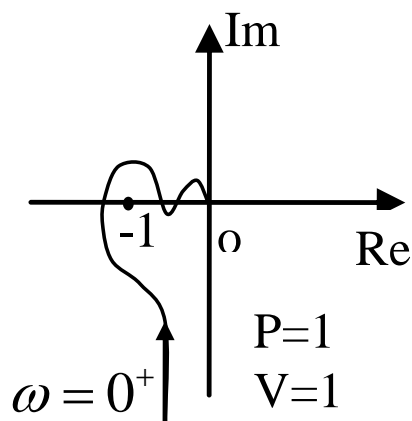
依据： $N=(P-Z)$

仅用一半奈奎斯特曲线 $\omega:0 \rightarrow \infty$ 判断闭环稳定性，增补的半径无穷大弧段为 $\nu \times 90^\circ$ ；

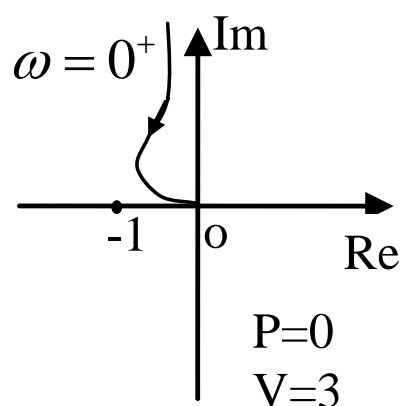


闭环系统稳定的充要条件：当 $\omega=0 \rightarrow +\infty$ 时，系统开环幅相频率特性曲线正向包围 $(-1, j0)$ 点的圈数 N 等于开环特征式的正根数 P 的二分之一，即：
$$N = \frac{P}{2};$$

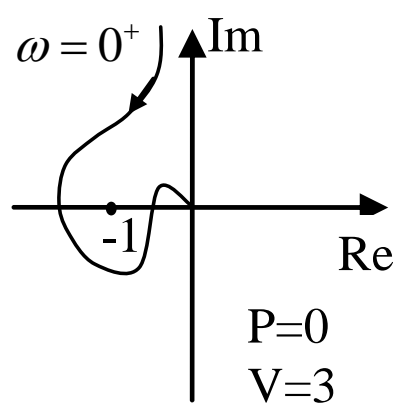
有三个系统，它们的开环幅相频率特性曲线如图 (a) (b) (c)，图中只画出了当 $\omega = 0^+$ 到 $\omega = +\infty$ 的曲线，曲线上箭头代表 ω 增大的方向，负实轴上的黑点表示 $(-1, j0)$ 点的位置，各子图中P表示开环传递函数正实部特征根的个数，V为开环传递函数中积分环节的个数，请依据有关判据判断这三个系统的闭环稳定性，并说明理由。



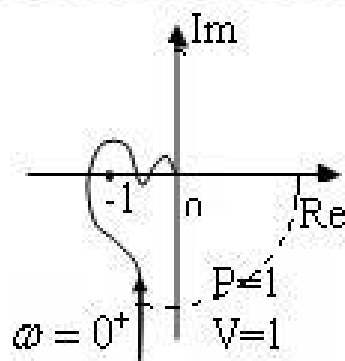
(a)



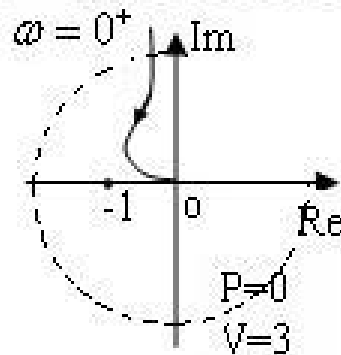
(b)



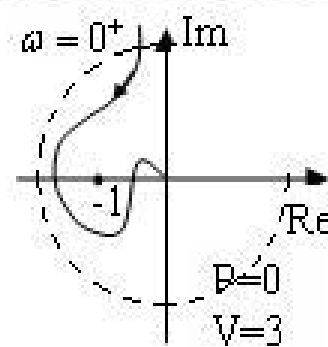
(c)



(a)



(b)

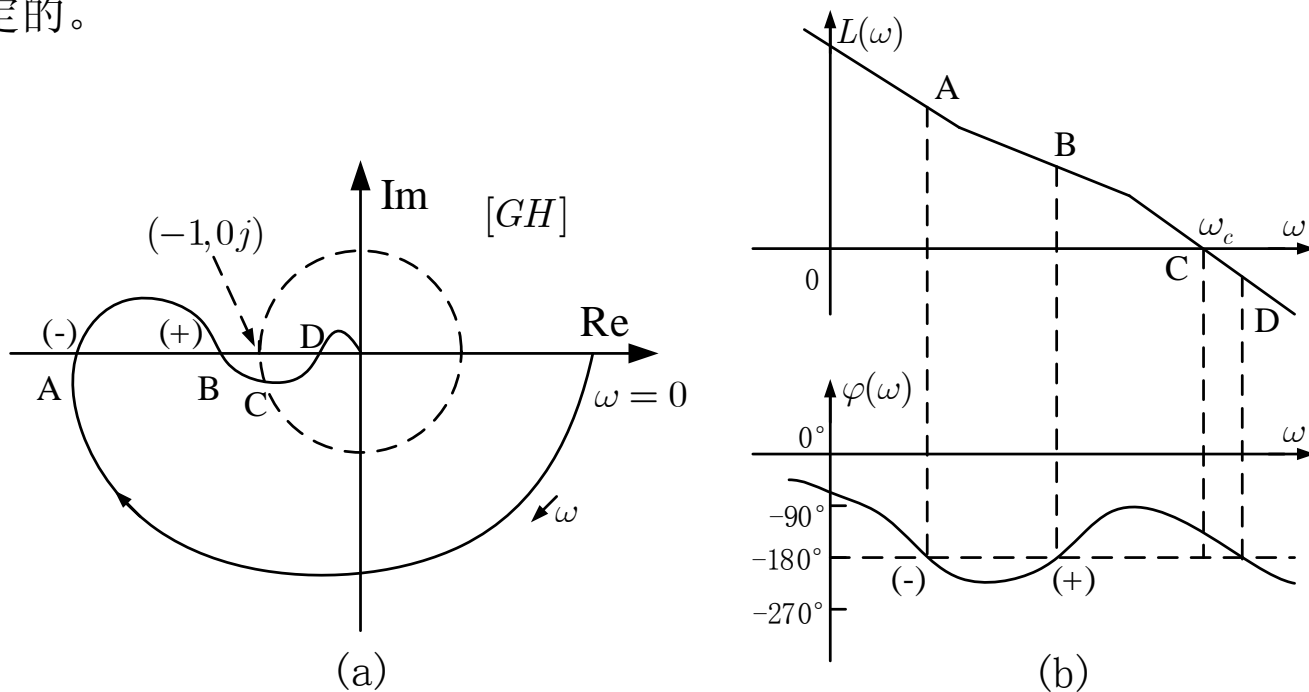


(c)

- a) 开环传递函数中积分环节的个数为 1, 需补做从 $\omega = 0$ 开始顺时针转 90 度到 $\omega = 0^+$ 为止半径为无穷大的一段圆弧, 如上图 (a). 可见开环幅相频率特性曲线包围 $(-1, 0j)$ 点的圈数 $N = -1$, 而开环极点个数 $P = 1$, 不满足关系式 $N = P/2$, 因此闭环系统不稳定。
- b) 补做圆弧后图形如上图 (b), 可见 $N = -1$, $P = 0$, 不满足关系式 $N = P/2$, 系统不稳定
- c) $N = 0$, $P = 0$, 满足关系式 $N = P/2$, 因此闭环系统稳定。

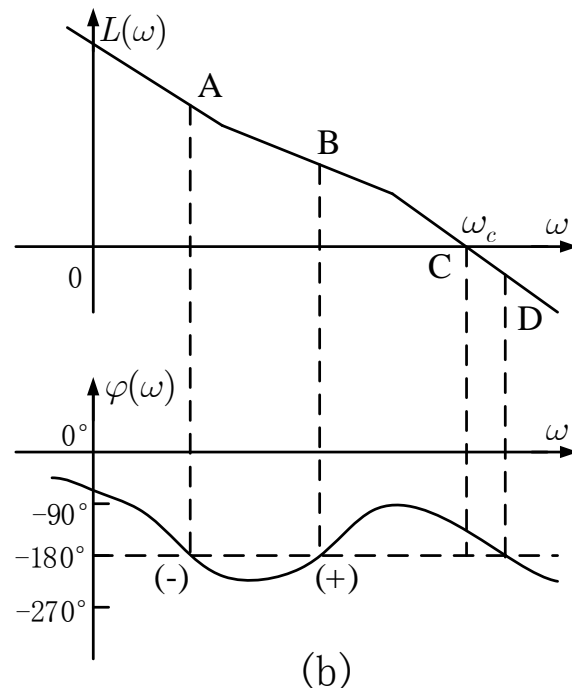
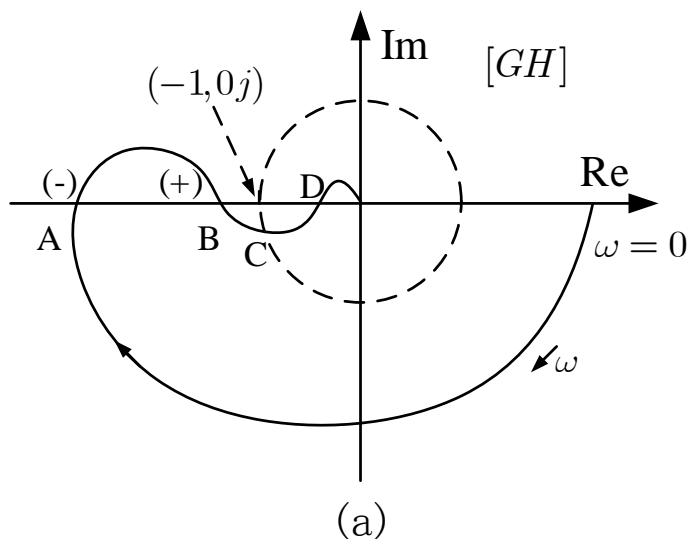
三 对数稳定判据

ω 由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时, 开环幅相频率特性曲线包围 $(-1, j0)$ 点的圈数 N 若等于开环正实部极点个数 P 的一半, 则系统闭环稳定。如下图的系统, 若开环稳定系统闭环也是稳定的。



对数频率特性曲线和幅相频率特性曲线之间的关系:

- ①奈奎斯特图上的单位圆与伯德图上的零分贝线相对应;
- ②单位圆外部对应于伯德图上 $L(\omega) > 0$ 的区域, 单位圆内部对应于 $L(\omega) < 0$ 的区域;
- ③奈奎斯特图上的负实轴对应于伯德图上 $\varphi(\omega) = (2k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 的水平线。



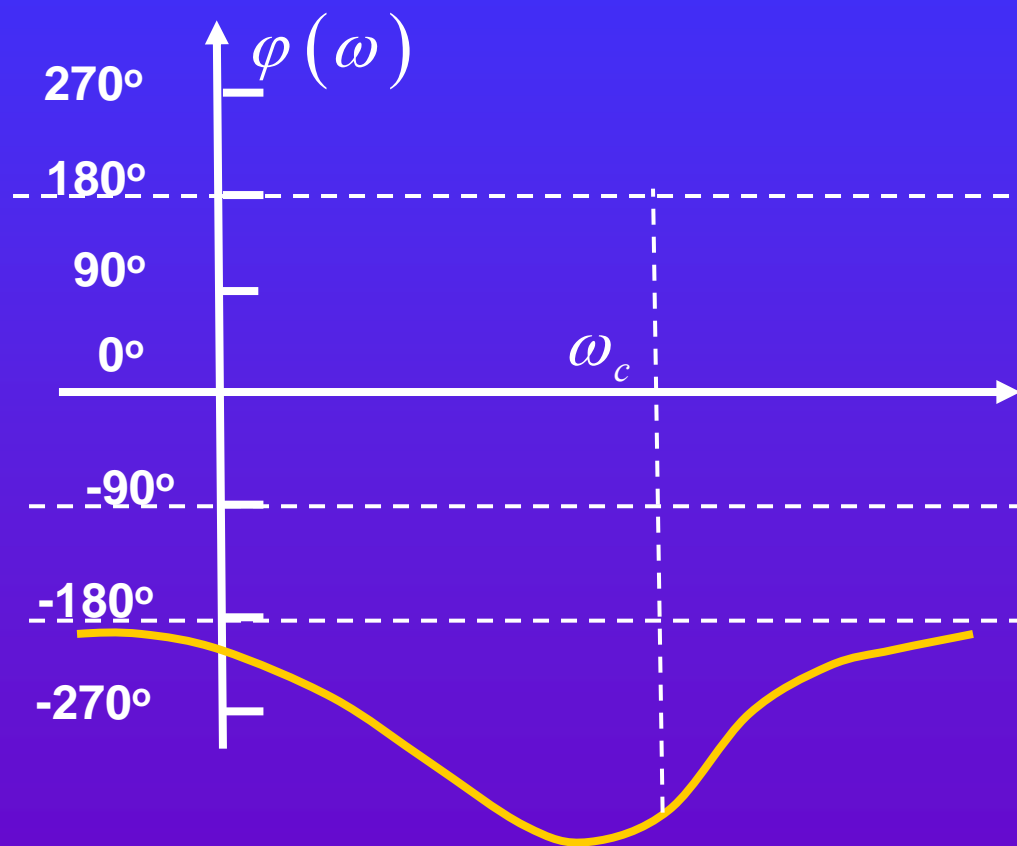
依据伯德图的判据：

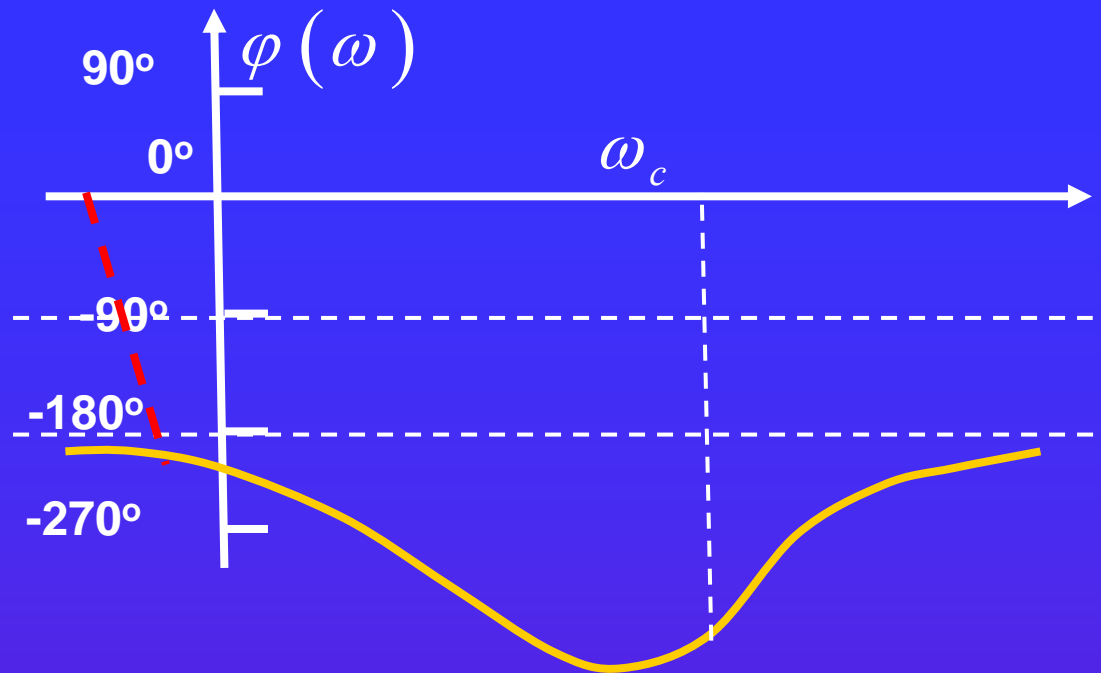
在满足 $20\lg|G(j\omega)H(j\omega)| > 0$ 的频率范围内，对数相频特性曲线对 -180° 度线的正（相角随 ω 增大而增大）负穿越次数之差 N 等于开环正实部极点个数的一半，即 $\frac{P}{2}$ 。

$$N = N_+ - N_- = \frac{P}{2}$$

当开环传递函数中包含 ν 个积分环节时，在对数相频特性曲线上必须增补 ω 从 $0 \rightarrow 0_+$ 变化时所对应的相角变化量 $\nu \times 90^\circ$ 。

例：开环系统 $\nu = 2, P = 0$, 开环对数相频特性曲线如下图，图中 $\omega < \omega_c$ 时， $L(\omega) > L(\omega_c)$, 试确定闭环不稳定极点的个数





解: $\nu = 2$, 需要在低频处由 $\varphi(\omega)$ 向上补做 180° 虚直线于 0° 线处, 在 $L(\omega) > L(\omega_c) = 0$ 的 ω 范围内, 存在 1 个与 $(2k+1)\pi$ 的交点。

且为负穿越; $N_- = 1$, $N_+ = 0$;

$N_+ - N_- = -1 \neq P/2 = 0$, \therefore 闭环不稳定.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{P-Z}{2} = -1 \\ P=0 \end{array} \right\} \Rightarrow Z = 2, \text{ 即闭环正实部根有 2 个}$$

四 稳定裕度:

能正常工作的控制系统不但要求是稳定的，而且必须具有一定的稳定裕度。

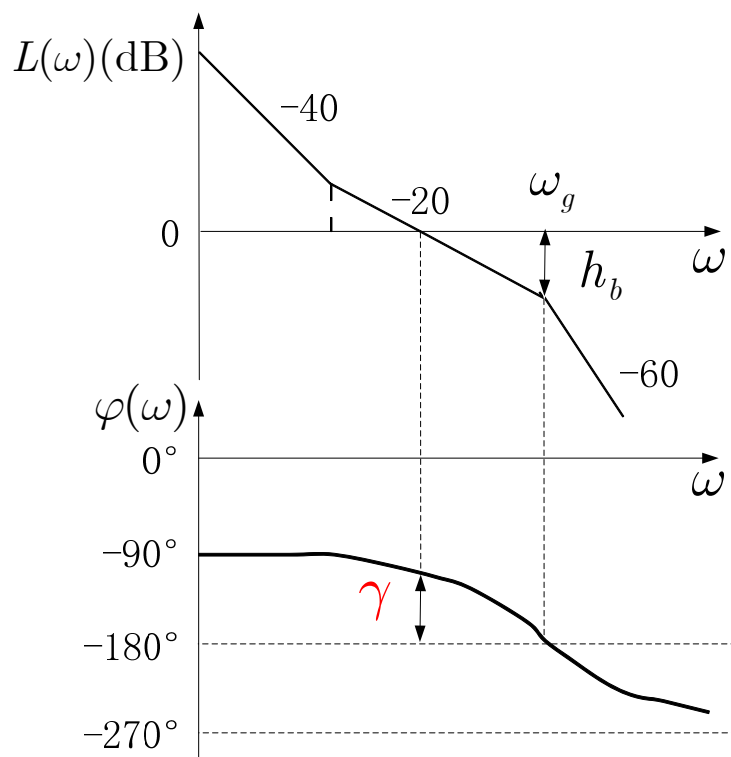
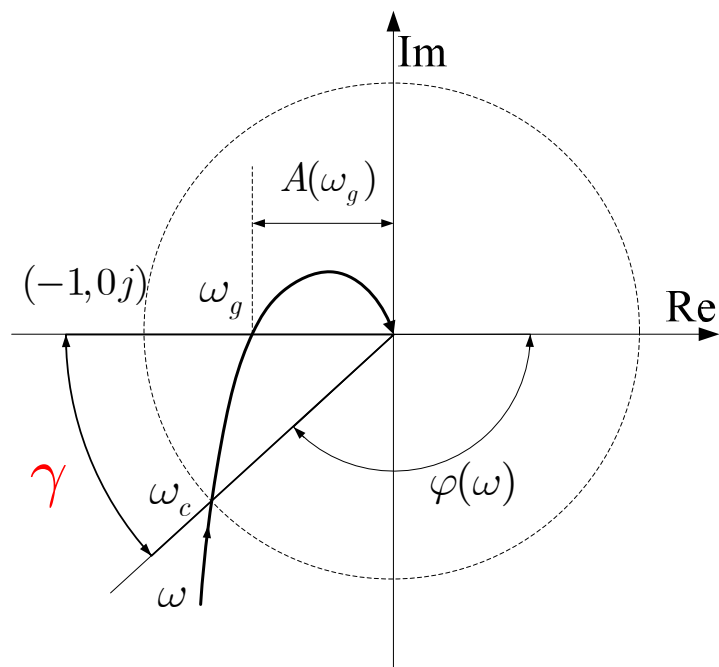
(1) 相角裕度 γ

设系统截止频率为 ω_c ，则 $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)|=1$

定义相角裕度为： $\gamma=180^\circ+\angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)=180^\circ+\varphi(\omega_c)$

即：开环幅相频率特性曲线上幅值等于1的矢量与负实轴的夹角。

含义：对于闭环稳定系统，若系统开环相频特性再滞后 γ 度，则系统处于临界稳定状态。



(2) 幅值裕度 h

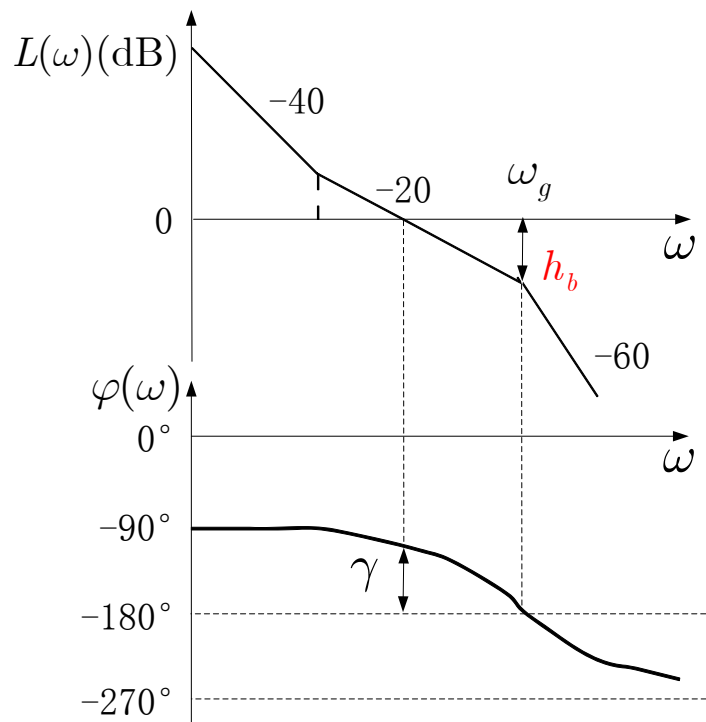
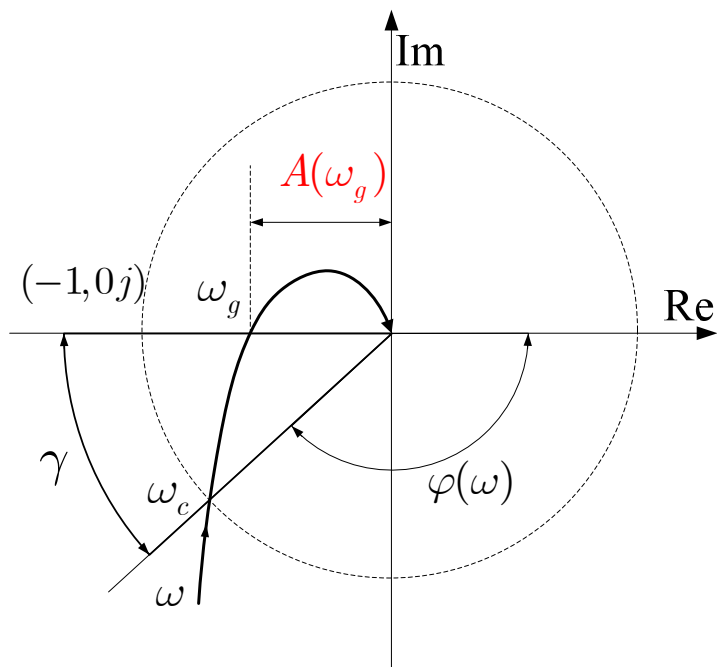
相位穿越频率为 ω_g ：满足 $\varphi(\omega_g) = \angle G(j\omega_g)H(j\omega_g) = (2k+1)\pi$.

定义幅值裕度： $h = \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|} = \frac{1}{A(\omega_g)}$,

即：奈奎斯特曲线与 -180° 线交点坐标绝对值的倒数。

含义：对于闭环稳定系统，若系统开环增益增大到原来的 h 倍，则系统处于临界稳定状态。

伯德图中的幅值裕度： $h_b = -20\lg|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|$ ，即开环对数频率特性曲线上，相频特性曲线为 -180° 时的对数幅频值到零分贝线的距离。



(1) 稳定裕度与系统稳定性的关系:

对于最小相位系统, 若开环奈奎斯特曲线(ω 从0变化到 $+\infty$)与实轴负半轴只有一个交点, 或者伯德图中的相频特性曲线与 $(2k+1)\pi$, $k=0, \pm 1, \dots$ 线至多有一个交点, 则只要相角裕度 $\gamma > 0^\circ$ 、幅值裕度 $h_b > 0$ (dB)或 $h > 1$ 便可得出系统稳定的结论。

(2) γ 和 h 越大, 系统稳定性越好, 动态过程越平稳。

(3) 为了保证系统具有一定的相对稳定性, 稳定裕度不能太小。在工程设计中, 要求 $\gamma > 30^\circ$ (一般选 $\gamma = 40^\circ \sim 60^\circ$), 要求 $h > 2$ (即 $h_b > 6$ (dB)), 一般选 $h_b = 10 \sim 20$ (dB)。

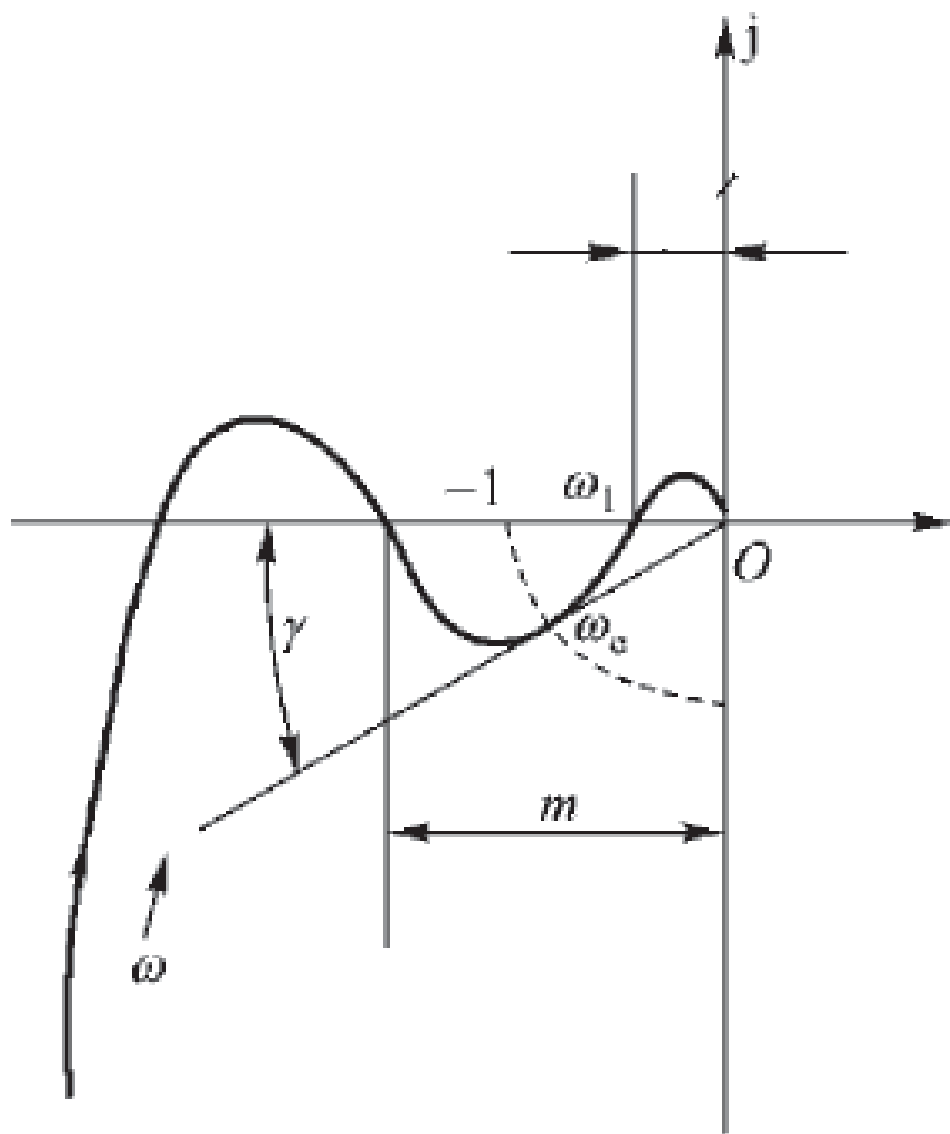
注意：

对右图的系统，其幅值裕度应该包含两个指标

除 $\frac{1}{|G(j\omega_1)H(j\omega_1)|}$ 外，

还应该包含指标 m ，

m 越大稳定裕度越大。



例 已知单位反馈系统开环传递函数 $G(s) = \frac{K}{(s+1)^3}$ ，计算 K 分

别为 4 和 10 时系统的稳定裕度。

解：系统开环频率特性

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)^3} = \frac{K}{(\omega^2+1)^{\frac{3}{2}}} \angle -3\arctg \omega = \frac{K \left[(1-3\omega^2) - j\omega(3-\omega^2) \right]}{(\omega^2+1)^3}$$

令 $\text{Im}[G(j\omega_g)] = 0$ ，得 $\omega_g = \sqrt{3}$ ，

此时 $\text{Re}[G(j\omega_g)] < 0$ ， $\therefore \varphi(\omega_g) = (2k+1)\pi$

$$1) \text{ 当 } K=4 \text{ 时, } G(j\omega_g) = \frac{4(1-3(\sqrt{3})^2)}{(1+3)^3} = -0.5, \therefore h = \frac{1}{|G(j\omega_g)|} = 2 > 1$$

$$\text{令 } |G(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow \frac{4}{(\omega_c^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = 1 \Rightarrow \omega_c = 1.233$$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 3\arctg\omega_c = 27.1^\circ > 0$$

\therefore 系统闭环稳定

2) 当 $K = 10$ 时, $G(j\omega_g) = -1.25$ 。

$$h = \frac{1}{|G(j\omega_g)|} = 0.8 < 1$$

$$\text{令 } |G(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow \frac{10}{(\omega_c^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = 1 \Rightarrow \omega_c = 1.908$$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 3\arctg\omega_c = -7.0^\circ < 0$$

实际上, 该系统不稳定。对不稳定的系统一般没有必要计算稳定裕度

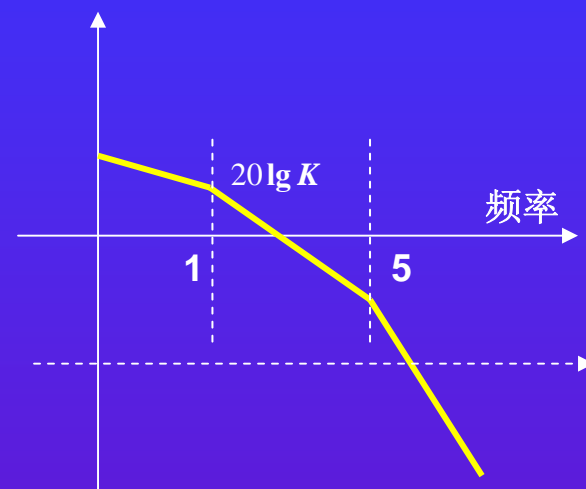
例：某单位反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{K}{s(s+1)\left(\frac{s}{5}+1\right)}$
 试求 **K=2**时系统的相角裕度(可近似求解)

解：求解 $\left| \frac{2}{j\omega_c(j\omega_c+1)\left(\frac{j\omega_c}{5}+1\right)} \right| = 1$ 有困难。可采用渐近线法近似求解 ω_c

$$K = 2 \text{ 时, } 20 \lg K = 6 \text{ dB,}$$

$$\therefore \frac{2}{\omega_c \cdot \omega_c \cdot 1} = 1 \quad \therefore \omega_c = \sqrt{2}$$

$$(\text{也可 } \frac{20 \lg K - 0}{1 \lg 1 - 1 \lg \omega_c} = -40 \Rightarrow \omega_c = \sqrt{2})$$



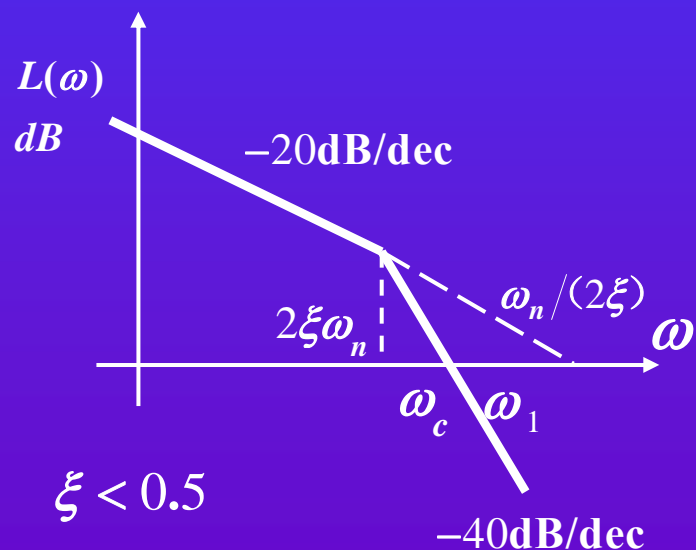
$$\gamma_1 = 180^\circ - \left(90^\circ + \tan^{-1} \omega_c + \tan^{-1} \frac{\omega_c}{5} \right) = 90^\circ - 54.7^\circ - 15.6^\circ = 19.7^\circ$$

5.6 利用开环对数频率特性分析系统的性能

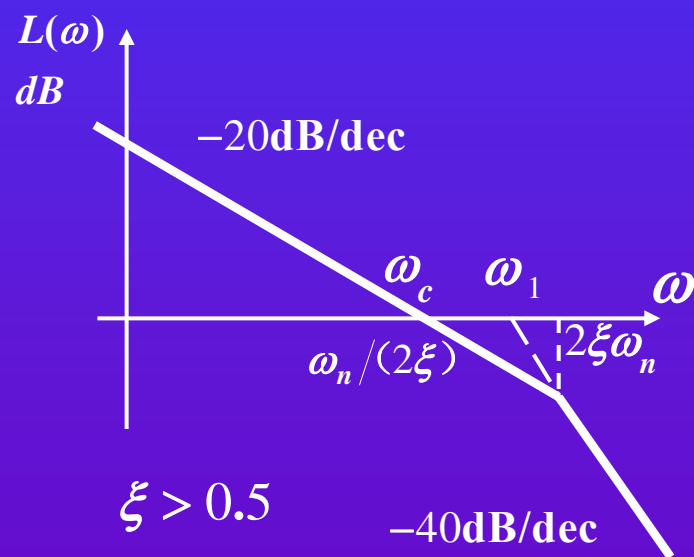
5.6.1 开环频率特性指标与时域指标之间的关系

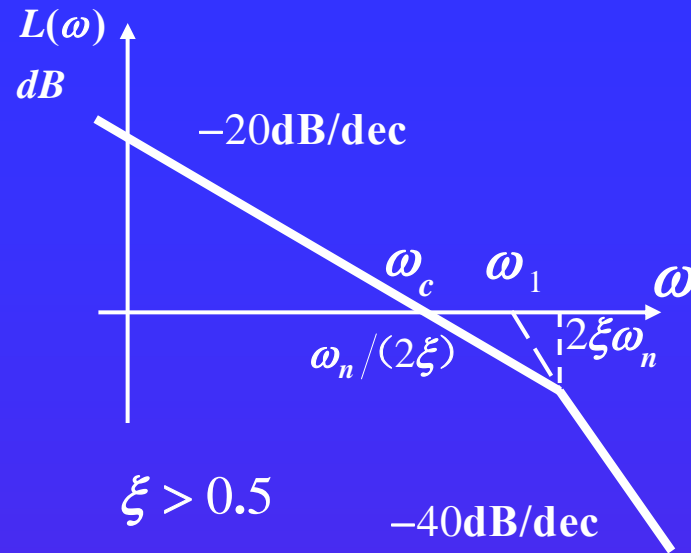
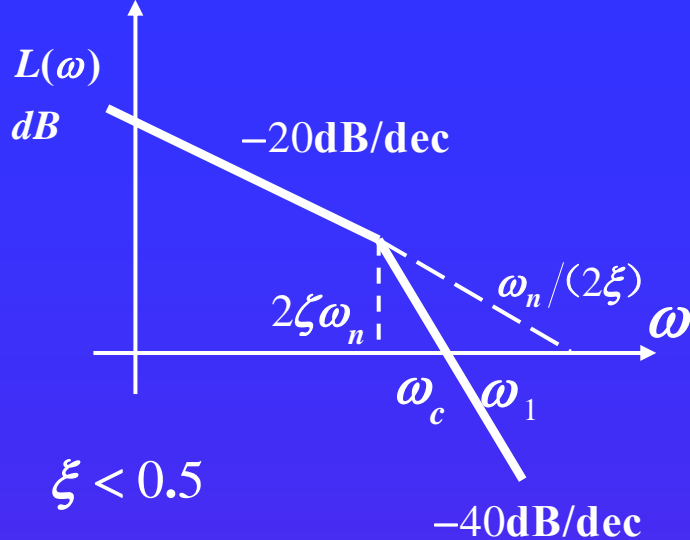
二阶系统相裕量与时域指标间的关系

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} = \frac{\omega_n/2\xi}{s \left(\frac{1}{2\xi\omega_n}s + 1 \right)}$$



$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\xi\omega_n)} = \frac{\omega_n/2\xi}{j\omega \left(\frac{1}{2\xi\omega_n}j\omega + 1 \right)}$$





设 ω_1 是斜率为-40的直线（或其延长线）与0分贝线交点的频率，则有 $\omega_1 = \omega_n$ ——给出了获取 ω_n 的方法
由斜率为-20的直线计算转折点纵坐标

$$y - 0 = -20 \left(\lg 2\xi\omega_n - \lg \frac{\omega_n}{2\xi} \right) \Rightarrow y = -40 \lg 2\xi$$

由斜率为-40的直线计算 ω_1

$$\frac{0 - (-40 \lg 2\xi)}{\lg \omega_1 - \lg 2\xi\omega_n} = -40 \Rightarrow \omega_1 = \omega_n$$

当 $\xi < 0.5$ 时, $\omega_c = \omega_n$; 当 $\xi > 0.5$ 时, $\omega_c = \omega_n/(2\xi)$ (近似值)

γ 与 ξ 及 $\sigma\%$ 的关系

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\omega \sqrt{\omega^2 + (2\xi\omega_n)^2}} \\ \angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega}{2\xi\omega_n} \end{cases}$$

$$|G(j\omega_c)| = \frac{\omega_n^2}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2 + (2\xi\omega_n)^2}} = 1$$

$$\omega_c^2 [\omega_c^2 + 4\xi^2 \omega_n^2] - \omega_n^4 = \omega_c^4 + 4\xi^2 \omega_n^2 \omega_c^2 - \omega_n^4 = 0$$

$$\omega_c = \sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2} \cdot \omega_n \text{——精确}$$

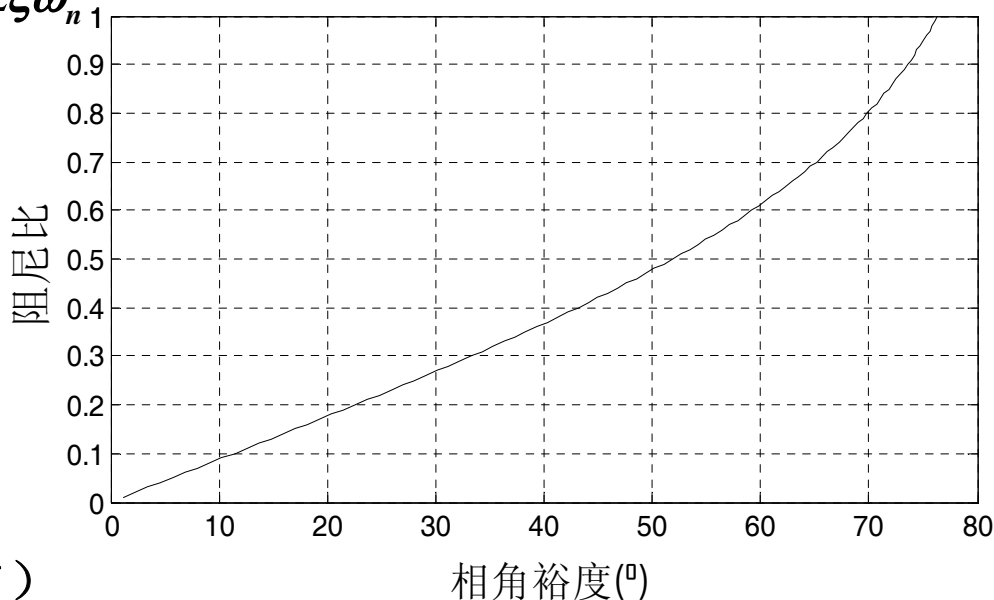
$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ + (-90^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{2\xi\omega_n})$$

$$= 90^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{2\xi\omega_n}$$

$$= \arctan \frac{2\xi\omega_n}{\omega_c}$$

$$= \arctan \frac{2\xi\omega_n}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2} \cdot \omega_n}$$

$$= \arctan \frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}} \quad (\gamma \uparrow \Rightarrow \xi \uparrow)$$



给出了获取 ξ 的方法

频域指标与调节时间的关系

考虑和5%误差带对应的近似公式： $t_s = \frac{3.5}{\xi \omega_n}$

$$\text{又} \because \omega_c = \sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2} \cdot \omega_n, \quad \gamma = \arctan \frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}}$$

$$\Rightarrow t_s \omega_c = \frac{3.5}{\xi} \sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}$$

$$= \frac{3.5}{\xi} \frac{2\xi}{\tan \gamma} = \frac{7}{\tan \gamma}$$

$$t_s = \frac{7}{\omega_c \tan \gamma}$$

调节时间 t_s 与截止频率 ω_c 和相角裕度 γ 均有关，增大 ω_c 或 γ 均能减小调节时间。

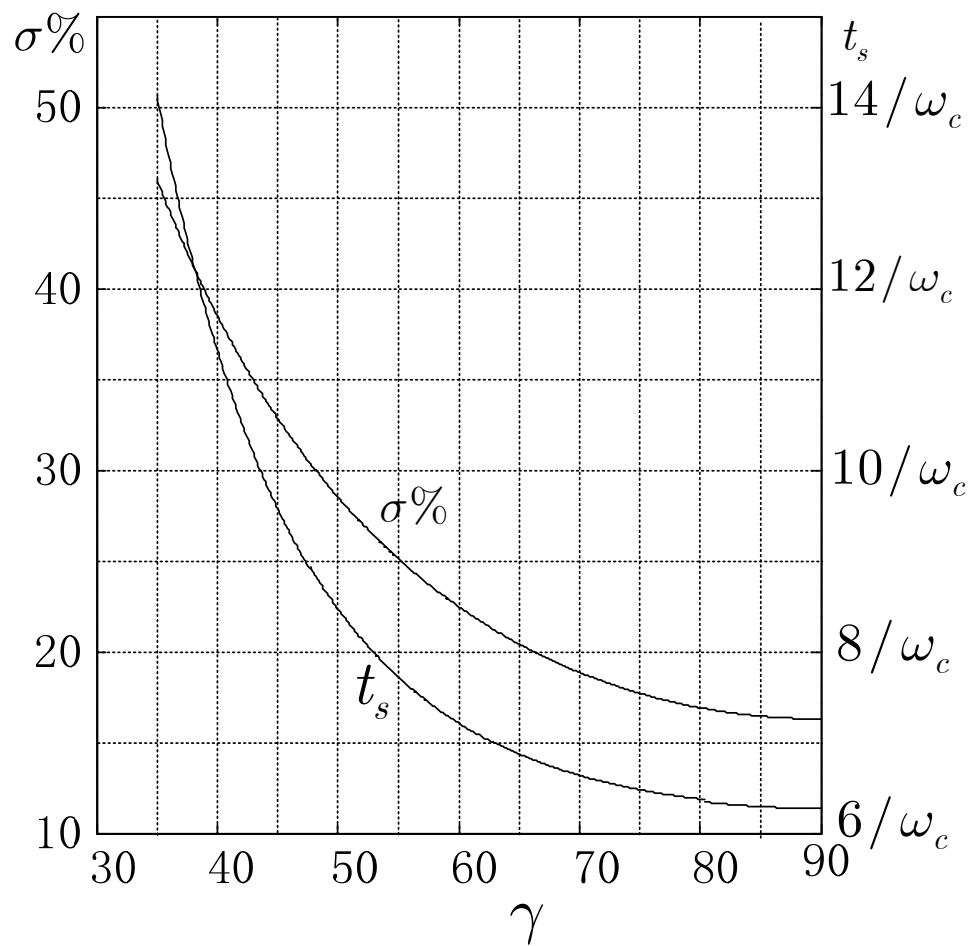
高阶系统相裕量与时域指标间的关系

关系比较复杂，但有如下近似公式

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} \left[2 + 1.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) + 2.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)^2 \right]$$

$$\sigma\% = \left[0.16 + 0.4 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) \right] \times 100\%$$

$(35^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ)$



5.6.2 三频段理论

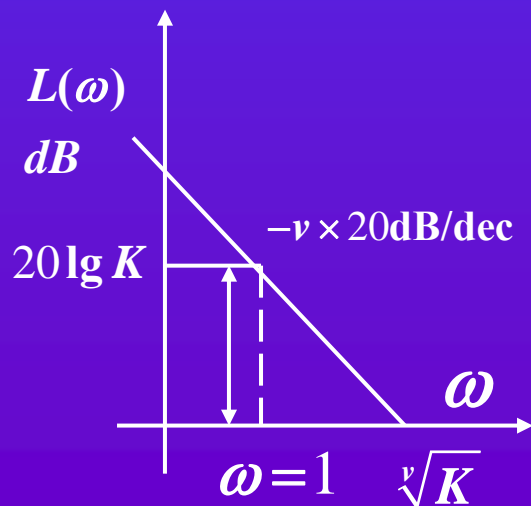
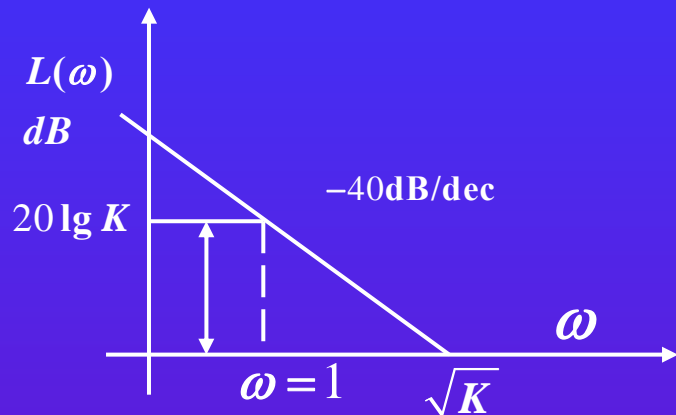
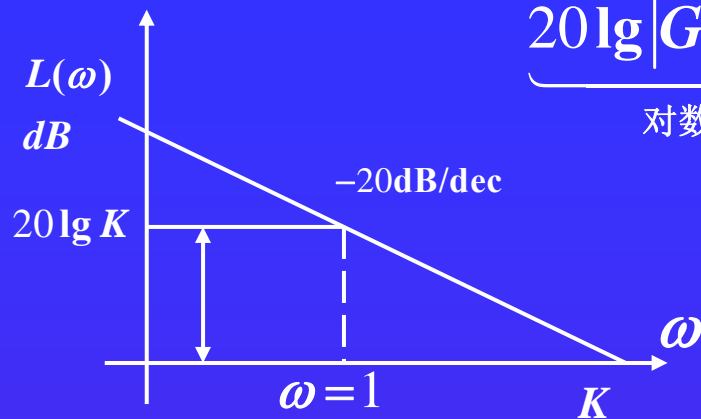
一、低频段：指开环对数幅频特性的渐进线在第一个交接点左侧的频段。

特点：低频段的性态完全由开环传递函数中的微分、积分环节和放大环节决定

理由：一阶惯性环节、一阶微分环节、振荡环节、二阶为分环节和它们各自对应的不稳定环节以及延迟环节在转折频率之前的对数幅频渐进线都是零分贝线。

$$\underbrace{20 \lg |G(j\omega)H(j\omega)|}_{\text{对数幅频特性值}} = 20 \lg \frac{K}{\omega^v} = 20 \lg K \underbrace{-v \times 20}_{\text{斜率}} \underbrace{\lg \omega}_{\text{横坐标值}}$$

$$\underbrace{20\lg|G(j\omega)H(j\omega)|}_{\text{对数幅频特性值}} = 20\lg \frac{K}{\omega^v} = 20\lg K \underbrace{-v \times 20}_{\text{斜率}} \underbrace{\lg \omega}_{\text{横坐标值}}$$



(1) 低频段渐近线 (或其延长线) 必然过 $(\omega=1, 20\lg K)$ 点, 对应于 $\omega=1$ 的曲线纵坐标值反映了系统开环增益的大小。

(2) 低频段渐近线斜率值是 20dB/dec 的整数倍, 倍数反映了开环系统中微分、积分环节的个数。

(3) 渐近线或其延长线与零分贝线的交点频率为 $\sqrt[v]{K}$ 。 $20\lg K - v \times 20\lg \omega = 0 \Rightarrow \omega_{Lc} = \sqrt[v]{K}$, 意味着低频段直线必过 $(\sqrt[v]{K}, 0)$ 点。

(4) 低频段频率特性决定了系统的稳态性能。低频段位置 ($20\lg K$) 越高, 稳态误差越小 (若存在常值误差), 负斜率的绝对值越大, 无差度越高。

二、中频段：指开环对数幅频特性曲线截止频率附近的频段。

反映中频段形状的三个参数：

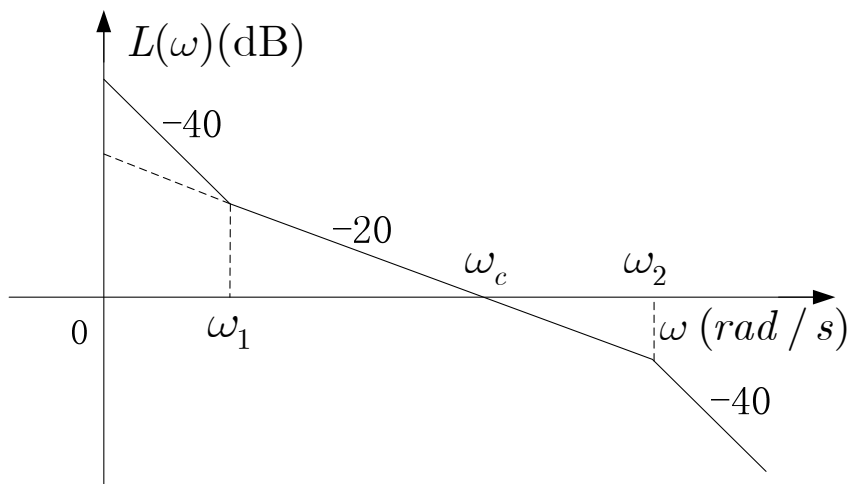
①截止频率；截止频率越大，系统快速性越好

②中频段的斜率；

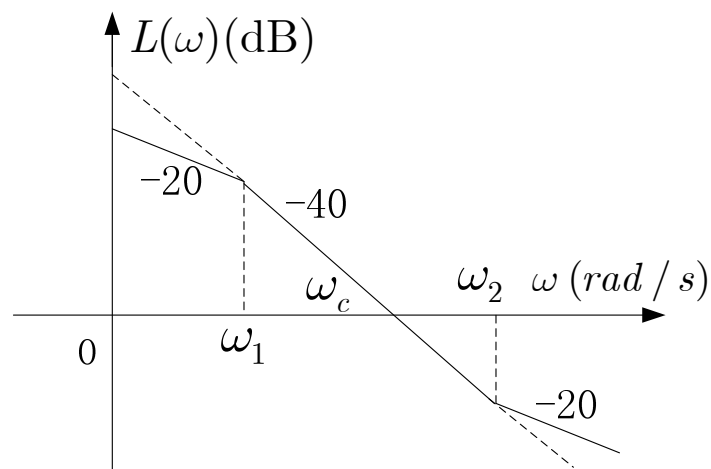
③中频段的宽度。

对系统动态性能有何影响？

分两种情况讨论：

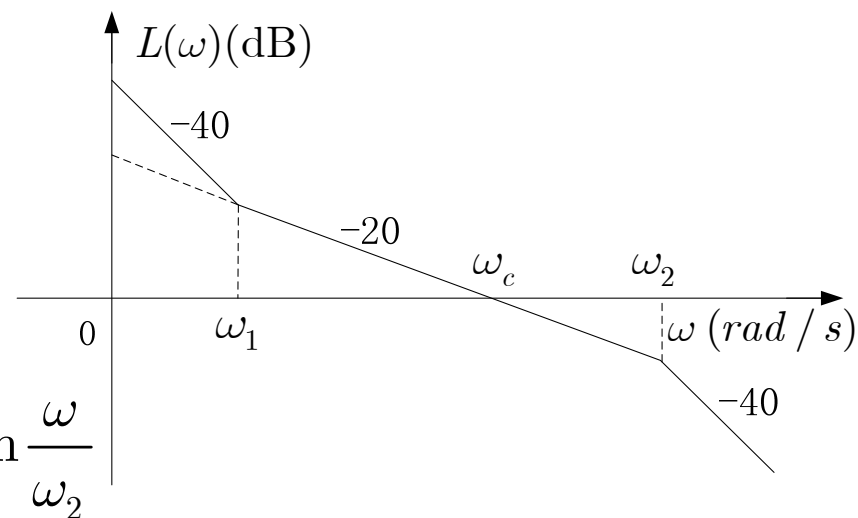


(a)中频段斜率为-20且较长



(b)中频段斜率为-40且较长

(a)中频段斜率为**-20**且较长



易知系统的相频特性为

$$\varphi(\omega) = -180^\circ + \arctan \frac{\omega}{\omega_1} - \arctan \frac{\omega}{\omega_2}$$

相角裕度为

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = \arctan \frac{\omega_c}{\omega_1} - \arctan \frac{\omega_c}{\omega_2}$$

中频段越宽，即 ω_2 比 ω_1 大得越多，则系统的相角裕度 γ 越大，系统平稳性越好。

(b)中频段斜率为-40且较长

易知系统的相频特性为

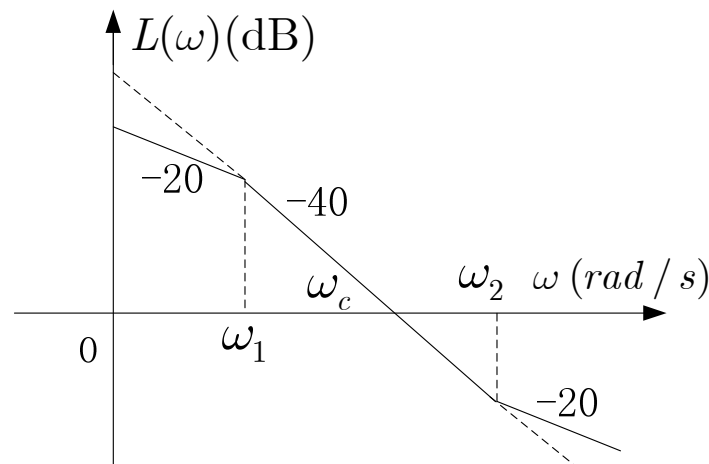
$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega}{\omega_1} + \arctan \frac{\omega}{\omega_2}$$

相角裕度为

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 90^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{\omega_1} + \arctan \frac{\omega_c}{\omega_2}$$

可见中频段越宽，即 ω_2 比 ω_1 大得越多，则系统的相角裕度 γ 越接近 0° ，系统近乎处于临界稳定状态，动态响应持续振荡。

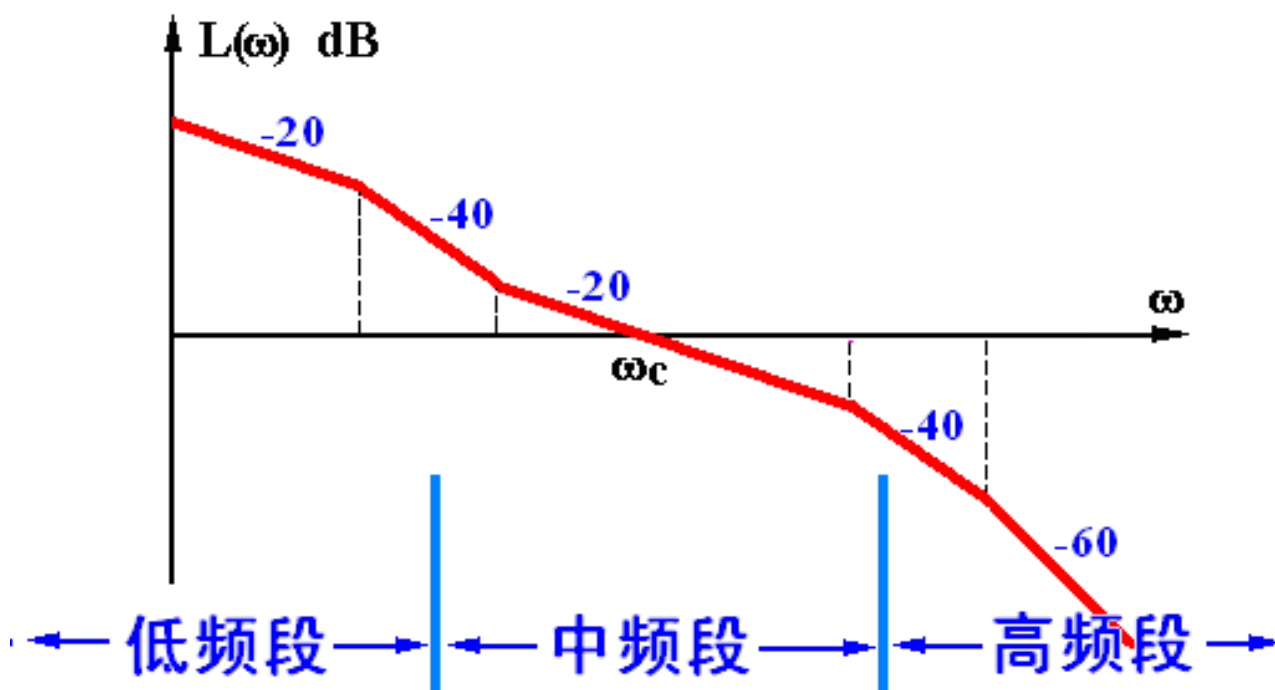
中频段直线越陡，闭环系统越难以稳定。理想的中频段应该是斜率为 -20dB/dec 且具有足够的宽度，同时 ω_c 尽可能大些，以提高动态响应的快速性。



三、高频段：指开环对数幅频特性曲线在中频段以后的频段($\omega > 10\omega_c$)。

特点：远离截止频率，分贝值较低。反映了系统对输入端高频干扰的抑制能力。有利的高频段是：分贝值越低、曲线越陡越好。

$$|\Phi(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{1 + |G(j\omega)|} \approx |G(j\omega)|$$



5.6 系统闭环频率特性和性能指标

系统稳定性可以通过开环频率响应确定。一旦系统稳定，其性能也可通过闭环频率响应来分析。利用系统的开环频率特性和一些标准曲线可以方便地获取系统闭环频率响应。

一、闭环频率特性和尼克尔斯图线

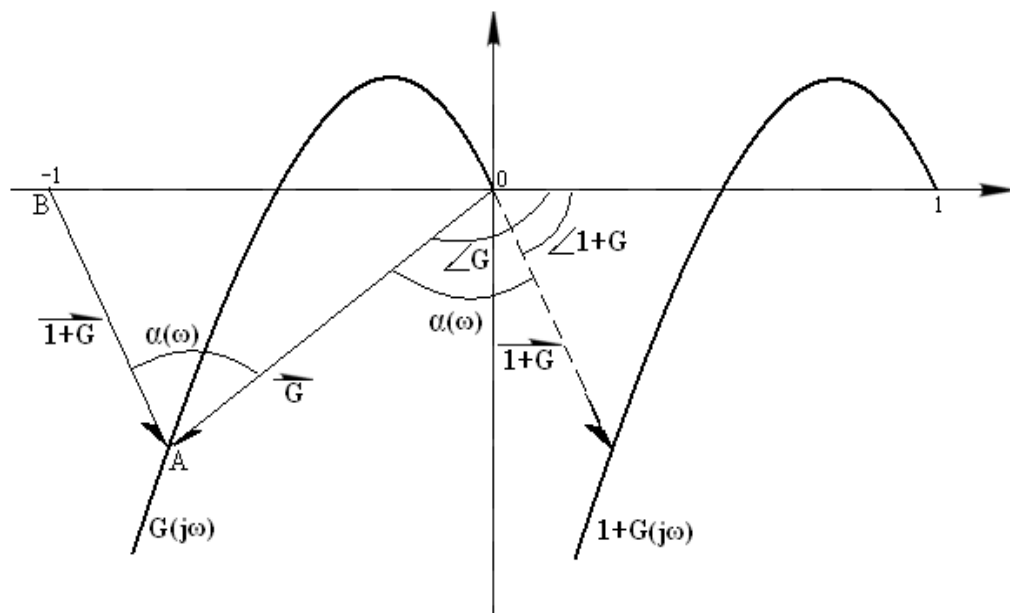
$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad (\text{单位反馈})$$

$$\Phi(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}$$

$$\downarrow \quad G(j\omega) = \overline{OA}$$

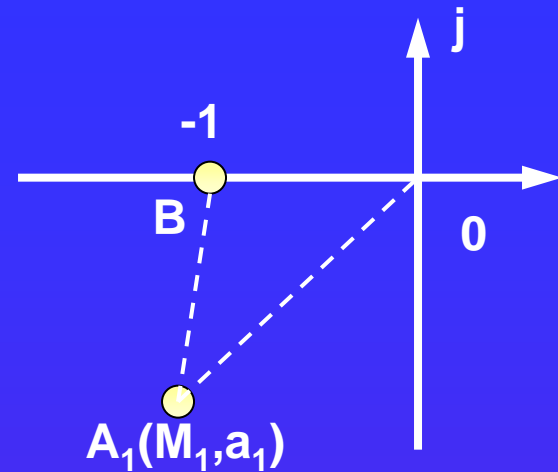
$$1+G(j\omega) = \overline{BA}$$

$$= \left| \frac{\overline{OA}}{\overline{BA}} \right| \cdot (\angle G - \angle (1+G)) = \frac{OA}{BA} \angle \alpha$$



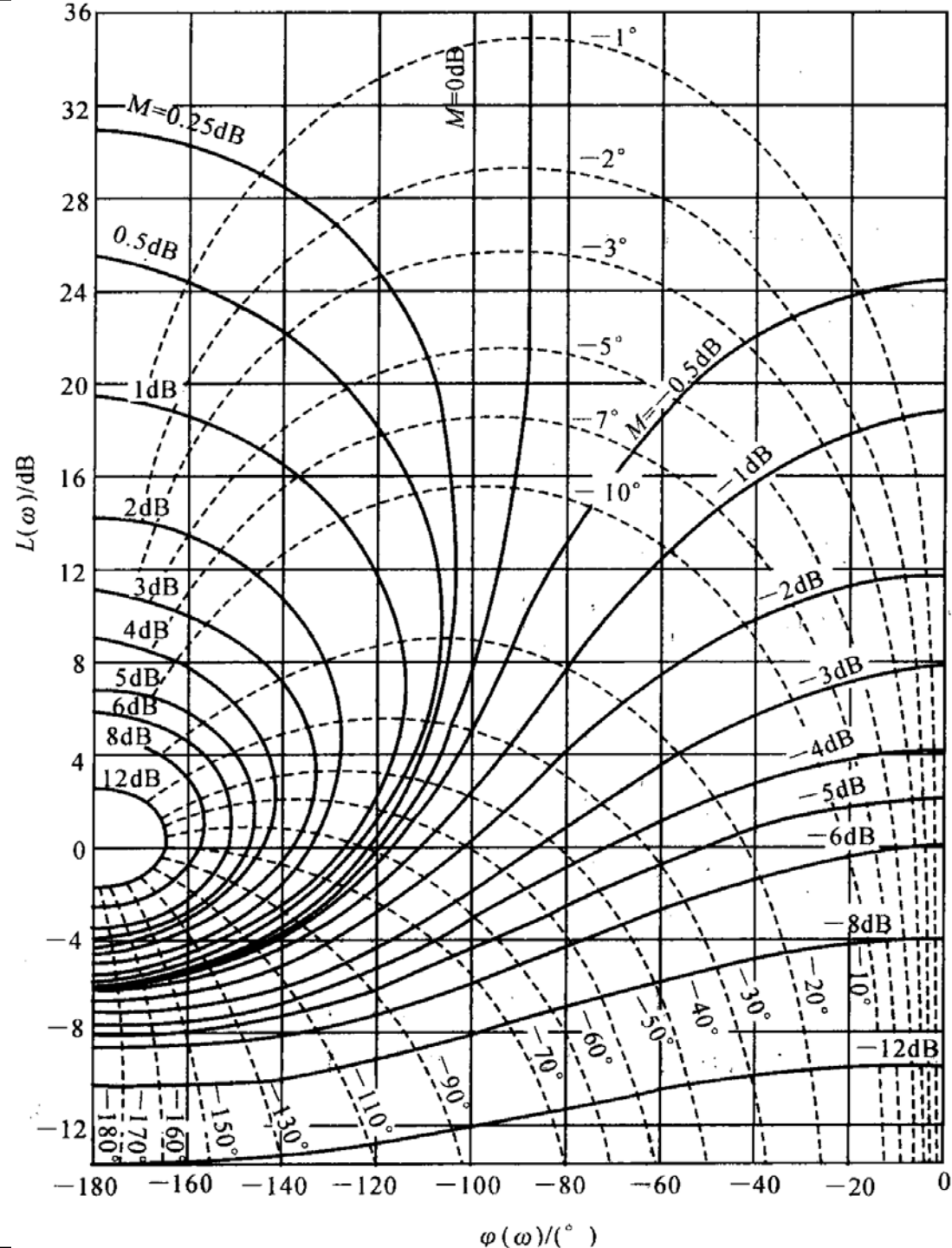
$$M = 20\lg|\Phi(j\omega)| = 20\lg\left|\frac{\overline{OA}}{\overline{BA}}\right|$$

$$\angle\alpha = \angle\Phi(j\omega) = \angle\overline{OA} - \angle\overline{BA} = \angle BAO$$



尼柯尔斯图线及其绘制方法

- (1) 在复平面内任取一点 A_1 ，按照前述公式求取 (M_1, α_1) 及系统开环对数幅频值 $20\lg|G(j\omega_{A_1})|$ 和相频值 $\varphi(\omega_{A_1})$
- (2) 分别以 $20\lg|G(j\omega_{A_1})|$ 和 $\varphi(\omega_{A_1})$ (开环) 为纵、横坐标值在开环对数幅相平面上描出该点，并在其旁标注出 (M_1, α_1) (闭环频率特性)。在复平面上取其它点做类似处理。
- (3) 将 M 和 α 值相等的点连起来构成等 M 图线和等 α 图线，即得尼克尔斯图线。



尼克尔斯图线的特点：

(1) 尼克尔斯图线是唯一的, 不是针对某一特定系统绘制的, 它建立了从开环对数频率特性到闭环对数频率特性的一种纽带. 而尼克尔斯图是针对特定系统的。

(2) 图线纵坐标为系统开环对数幅频特性 $20\lg|G(j\omega)|$, 横坐标为开环相频特性 $\varphi(\omega)$ 。

(3) 图线上标注的分贝值是闭环对数幅频值, 角度为闭环相频值。

(4) 图线对称于 $\varphi(\omega)=-180^\circ$ 线

一、闭环频域性能指标

频域性能指标及其与时域性能指标的关系

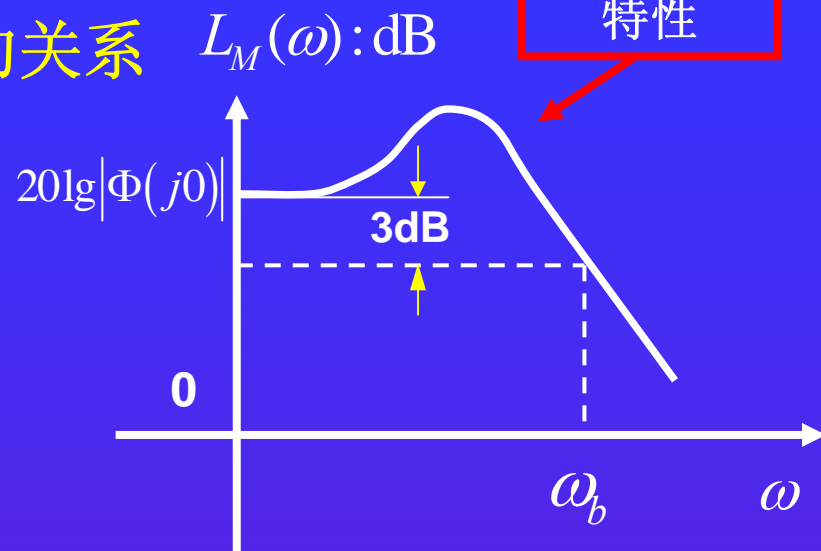
(1) 谐振峰值 M_r :

对数幅频特性的最大值，峰值越大表明系统阻尼越小，平稳性越差，超调量越大。

一阶系统，无峰值，阶跃响应无超调。

二阶系统， ξ 较小时，
$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}},$$

$\xi \downarrow$ ，则 $M_r \uparrow$ ， $\sigma\% \uparrow$ 。



(2)带宽频率和带宽:

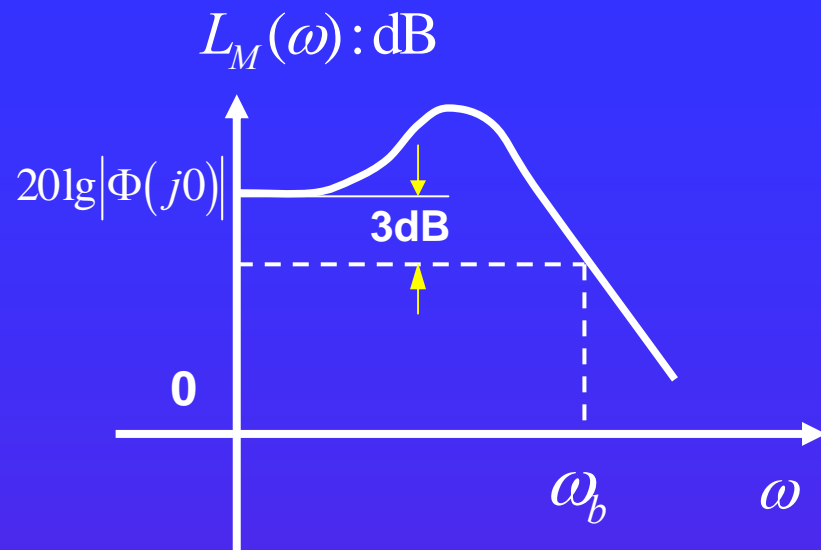
当闭环对数幅频特性的分贝值相对于 $20\lg|\Phi(j0)|$ 下降3dB时对应的频率 ω_b ,称为带宽频率。

此时, $|\Phi(j\omega_b)|=0.707|\Phi(j0)|$ 。

带宽频率的范围 $0 < \omega < \omega_b$ 称为带宽。

带宽越大系统抑制高频噪声的能力越差;但复现快速变化信号的能力越强,系统惯性越小,失真越小。上升时间和调节时间越短。

下面给予说明。



对于一阶系统

设其闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{1}{Ts + 1}$

计算带宽频率: $20\lg|\Phi(j0)| = 0$,

$$20\lg|\Phi(j\omega_b)| = -3\text{dB} \Rightarrow 20\lg\left|\frac{1}{jT\omega_b + 1}\right| = -3 \Rightarrow \omega_b \approx \frac{1}{T}$$

$$t_s = 3T = \frac{3}{\omega_b}$$

带宽越大，时间指标越小，快速性越好。

对于欠阻尼二阶系统

对欠阻尼二阶系统

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$20\lg|\Phi(j0)| = 0; \Rightarrow 20\lg|\Phi(j\omega_b)| = -3 \Rightarrow \left| \frac{\omega_n^2}{(j\omega_b)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega_b) + \omega_n^2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow (\omega_b^2)^2 - (2\omega_n^2 - 4\xi^2\omega_n^2)\omega_b^2 - (\omega_n^2)^2 = 0 \Rightarrow \omega_b = \omega_n \left[(1 - 2\xi^2) + \sqrt{(1 - 2\xi^2)^2 + 1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

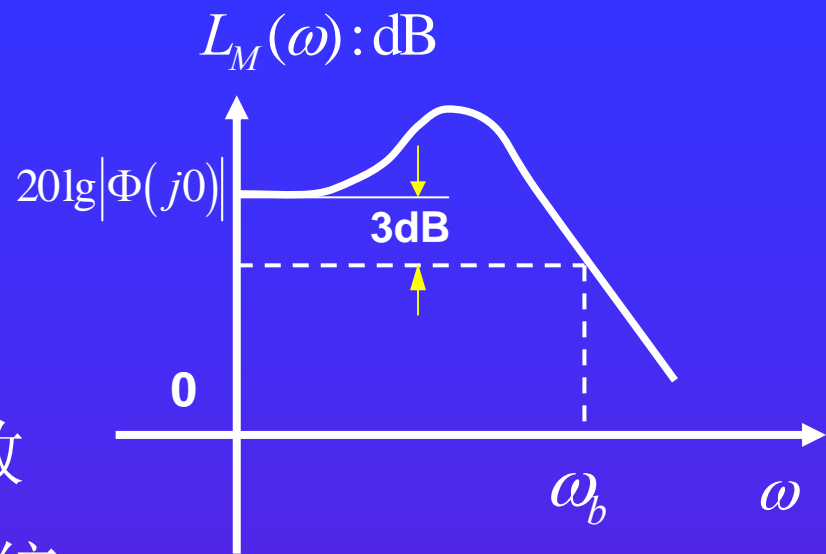
当 ξ 一定时， ω_n 与 ω_b 成正比。

$$\text{又} \because t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n}, t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}, t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

所以 ω_b 增大，系统响应加快。

带宽频率附近对数幅频特性下降越快，系统从噪声中区别有用信号能力越强，但意味着 M_r 越大，平稳性越差。

(3) 零频值：频率为零时闭环对数幅频值 $20\lg|\Phi(j0)|$ 。 $\Phi(j0)$ 是系统对直流分量的放大倍数， $\Phi(j0)=1$ 意味着系统在阶跃信号作用下的稳态输出等于输入，稳态误差为零。



第五章 作业1

5.1 5.2 5.3 (基本概念)

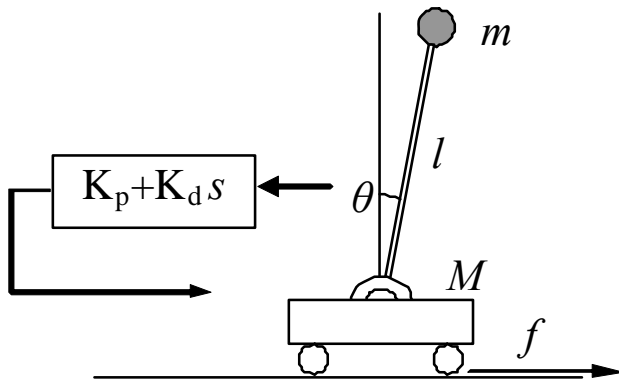
5.8 5.9 5.11 2.6E (Bode图)

第五章 作业2

5.14 5.17 (稳定性)

5.27 5.31 (时域频域关系)

5.36 5.42 5.45 2.6F (校正)



2.6E. 绘制2.6D闭环倒立摆系统频率特性。

2.6F. 根据2.6D闭环系统倒立摆频率特性分析其稳定性，并估算保持稳定需用的最小电机功率。