高等数学B（II）期末考试题

子羽翛

2020 年 10 月 15 日

1.（15分）
求曲线积分
$$\oint_L (y^2+z^2-2x^2)dx+(z^2+x^2-2y^2)dy+(x^2+y^2-2z^2)dz$$
其中L为球面$z=\sqrt{2Rx-x^2-y^2}$与柱面$x^2+y^2=2Rx(0<r<R,z\geq 0)$的交线，$L^+$与球面上侧成右手系.

2.（10分）
(1)求二重积分$\iint_D \frac{1}{x^2}dxdy$，$D$是由$y=\alpha x,y=\beta x,x^2+y^2=a^2,x^2+y^2=b^2$ $(0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2},0<a<b)$所围的第一象限内的部分.
(2)求锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$z^2=2x$所截部分的曲面面积.

3.（20分）讨论下列级数的敛散性：
(a)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\phi}{\sqrt{n}}(\phi\in(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}))$
(b)$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$
(c)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+\alpha^n)}{n^\beta}(\alpha>0,\beta>0)$

4.（15分）解微分方程：
(a)$3xy'-y-3xy^4\ln x=0$ (b)$y''-9y=e^{3x}\cos x$ (c)$x^2y''-4xy'+6y=0$

5.（20分）
设函数$f(x)$是以2π为周期的连续函数，$a_0,a_n,b_n(n=1,2,\cdots)$为其Fourier系数，求函数
$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(t+x)dt$$

的Fourier系数$A_0, A_n, B_n (n=1,2,\cdots)$.

6.（20分）

(1)证明：如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，$g(x)$在闭区间$[a,b]$上不变号且是可积的，则在$[a,b]$上至少存在一个点ϵ，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\epsilon)\int_a^b g(x)dx$$

(2)证明：若$f(x)$连续，积分$\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$对$\forall A>0$都有意义，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{a}{b}(a>0,b>0)$$

(3)根据(2)的结论，求

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax - \arctan bx}{x}dx(a>0,b>0)$$

.