$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \qquad (s = \sigma + it)$$

$$= \prod_{p(\text{prime})} (1-p^{-s}) \qquad \sigma = \mathrm{Re}\, s > 1 \text{ 收敛}$$

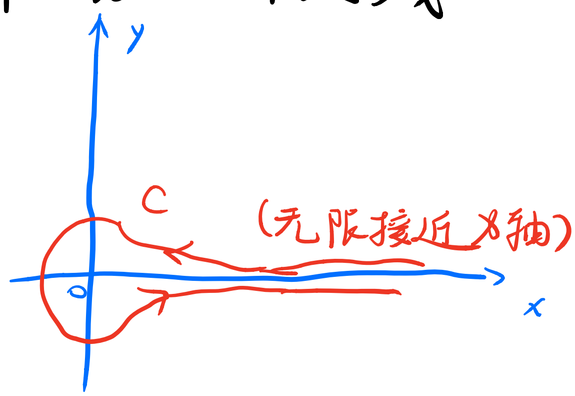
$$|n^{-s}| = e^{-\sigma \ln n} = n^{-\sigma}$$

$\sigma \geq 1+\delta$ uc $\Rightarrow$ 全纯

定理：$\sigma > 1$ 时，

$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

其中C为如下区域



证明：$(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\ln(-z)}$，$\ln(-z) \to (-\pi, \pi)$

$$\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1} dz = -\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1} e^{-(s-1)\pi i}}{e^x - 1}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1} e^{(s-1)\pi i}}{e^x - 1} dx$$

$$= 2i \sin(s-1)\pi \; \zeta(s)\, \Gamma(s)$$

这里用到了公式：

$\zeta(s)\cdot\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\,\Gamma(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-nx}dx$

又 $\sin(s-1)\pi=-\sin(s\pi)$

$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin(s\pi)}$.

定理得证. $\square$

$\frac{(-z)^s}{e^s-1}$ 对 s 为整函数

推论：ζ 函数扩张为 $\mathbb{C}$ 上亚纯函数

且有唯一极点、$s=1$，为单奇点、

$\mathrm{Res}_{s=}\ \zeta(s)=1$

因为 $\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{dz}{e^z-1}=1$

$$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}z^{2k-1}$$

(Bernoulli 数的定义)

$$\zeta(-n)=(-1)^n\frac{n!}{2\pi i}\int_c\frac{z^{-n-1}}{e^z-1}dz$$

只有 $\frac{1}{e^z-1}$ 展开中 z^n 系数有贡献

$\zeta(0)=-\frac{1}{2}$

$\zeta(-2m)=0\longrightarrow$ 平凡零点

$\zeta(-2m+1)=\frac{(-1)^m B_m}{2m}$

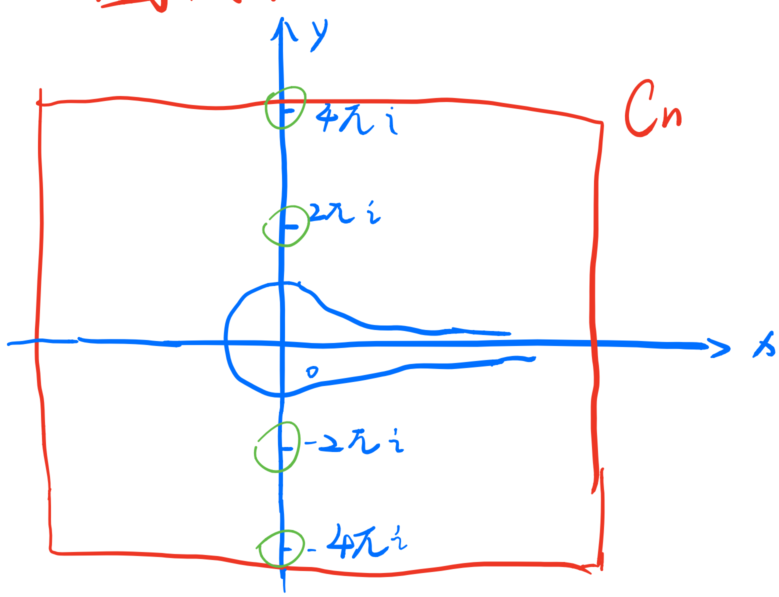
函数方程：

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s)$$

证明：（证明方法与上面类似）

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n - C} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}\,dz$$

C_n是由 $\mathrm{Re}\,z = \pm(2n+1)\pi$ 和 $\mathrm{Im}\,z = \pm(2n+1)\pi$ 围成的



在 C_n 上，$|e^z - 1| \geq C$ (constant)

$|(-z)^{s-1}| \leq C' n^{\sigma-1}$

$$\left|\int_{C_n} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}\,dz\right| \leq A\cdot n^{\sigma} \to 0. \quad n\to\infty,\ \sigma<0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n-C} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}\,dz \xrightarrow[n\to\infty]{\sigma<0} \int_{-C} = \frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)}$$

又LHS $= \sum_{m=1}^{n}\left[(-2m\pi i)^{s-1} + (2m\pi i)^{s-1}\right]$

(由留数公式)

$$= \sum_{m=1}^{n} (2m\pi)^{s-1} \cdot \left(\frac{e^{\frac{i\pi}{2}s} - e^{-\frac{i\pi}{2}s}}{i} \right)$$

$$= 2\sum_{m=1}^{n} (2m\pi)^{s-1} \sin\frac{\pi s}{2}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 2\cdot(2\pi)^{s-1}\zeta(1-s)\sin\frac{\pi s}{2}.$$

证毕 □

定义 $\xi(s) = \frac{1}{2} s(1-s)\cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s)$

推论: $\xi(s) = \xi(1-s)$ ✓整函数

证明: $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s) = \pi^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(\frac{1-s}{2}) \zeta(1-s)$

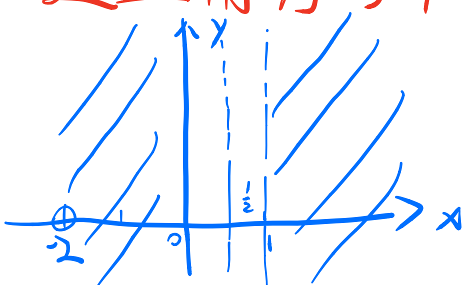
$$= 2^{1-s} \pi^{-\frac{s+1}{2}} \frac{\Gamma(s)\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\cos\frac{\pi s}{2}}$$

$\Leftrightarrow$ 证明

$$\cos\frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = 2^{s-1} \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(s) = 2^{s-1} \Gamma(\frac{s}{2}) \Gamma(\frac{1+s}{2})$ “增倍公式”

这里用到了 $\Gamma(\frac{1-s}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1+s}{2}) = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi s}{2}}$ □



$\xi(s)$ 全纯

非凡零点只能在带状区
Riemann 猜想：$\zeta(s)$ 非凡零点都落在 $\{\sigma=\frac{1}{2}\}$ 上

定义 $N(T)=\#\{0\le \underset{\operatorname{Im} s}{t}\le T,\ s \text{ 为零点}\}$

则 $N(T)=\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\ln T)\quad (T\to\infty)$

ζ 函数的增大性质（t 依赖性）
命题：$\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^s}-\int_1^N\frac{dx}{x^s}=\sum_{n=1}^{N-1}\delta_n(s)$

$$\delta_n(s)=\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx$$

证明：$f(x)=x^{-s}\quad n\le x\le n+1$

$$\left|\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right|\le \underset{[n,n+1]}{f'(y)}(x-n)=\left|\frac{-s}{y^{s+1}}\right|\le\frac{|s|}{n^{\sigma+1}}$$

$$|\delta_n(s)|\le\frac{|s|}{n^{\sigma+1}}$$

$\square$

推论：$\operatorname{Re}s>0$，$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n(s)$
命题：$s=\sigma+it$，$\sigma_0\in[0,1]$，$\forall\varepsilon>0$
(i) 若 $\sigma_0\le\sigma$，$|t|>1$，则
$$|\zeta(s)|\le C_\varepsilon\cdot|t|^{1-\sigma_0+\varepsilon}$$
(ii) 若 $1\le\sigma$，$|t|>1$，则 $|\zeta(s)|\le C_\varepsilon|t|^\varepsilon$

作业：① 问题 2，3
② 练习 3，4，6，10，12，14
选作 15-17