6.2 因为可在 D_1 内取充分小单连通开集, 不妨设 D_1 单连通. 设 u 在 D_1 内恒为常数 a, 取 v 为 u 在 D_1 内共轭调和, 作 $f=u+\mathrm{i}v$ 为 D_1 内解析. 因为在 D_1 内 $v_x=-u_y, v_y=u_x$, 所以 v 在 D_1 内为某常数 b, 从而 f 在 D_1 内恒为 $a+b\mathrm{i}$, 由解析函数唯一性得 f 在 D 内也恒为 $a+b\mathrm{i}$, 因此在 D 内 u 恒为 a.

6.3 $0=\dfrac{\partial^2 f^2}{\partial z\partial\overline{z}}=2\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial\overline{z}}+2f\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial\overline{z}}=2\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial\overline{z}}$. 得 $\dfrac{\partial f}{\partial z}=0$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial\overline{z}}=0$.

6.6 $u=v=x^2-y^2$ 调和, 但 uv 不调和.

6.8 存在非常值整函数 $f=u+\mathrm{i}v$, 根据 Weierstrass 定理 f 的像在 $\mathbb{C}$ 中稠密, 从而 u 既无上界也无下界.

6.10 分式线性变换 $w_1=\dfrac{1-z}{1+z}$ 将单位圆变成右半平面, $|z|=1$ 变到虚轴. $w=w_1^2$ 将右半平面变为 $\mathbb{C}\setminus\{w\le 0\}$, 将虚轴变为 $\{w\le 0\}$. 这样一来 $w=(\dfrac{1-z}{1+z})^2$ 将 $|z|=1$ 变为 $\{w\le 0\}$.

6.13 利用最大、最小值原理的证明方法即可.

6.14 (Poisson公式) 设函数 $u(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内调和, 在 $|z-a|\le R$ 上连续, 则当 $|z-a|<R$ 时有

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi-a|=R}\frac{R^2-|z|^2}{|\xi-z|^2}u(\xi)\mathrm{d}\theta,\ \xi=a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$