6.3

回顾：ℂ中的单连通区域除ℂ本身之外全都和单位圆盘(D)共形等价.

Schwarz引理：考虑全纯映射 $f: D \to D$。不妨设 $f(0)=0$，则有：

1) ~~f(z≠ |z|~~ $|f(z)| \le |z|$

2) 若 $\exists z_0 \ne 0$ s.t. $|f(z_0)| = z_0$，则 $f$ 必为一个旋转变换.

3) $|f'(0)| \le 1$，且 $|f'(0)| = 1 \iff f$ 是旋转.

证明：$f(z) = \cancel{z}\, a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$

$\Rightarrow \frac{f(z)}{z}$ 为D上的全纯函数，从而

$|z|=r$ 时.

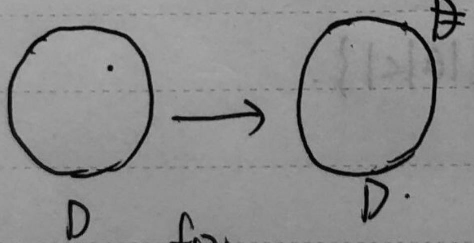
$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \le \frac{1}{r}$ (???)

$\forall r \le 1$,

特别地，由最大模原理，在 $|z|=r$ 时成立 $\Rightarrow |z| \le r$ 时成立.

令 $r \to 1$，即有 $|f(z)| \le |z|$.

2) 由最大模原理，$\left|\frac{f(z)}{z}\right| = 1 \Rightarrow \frac{f(z)}{z} = C$，从而 $f(z) = Cz$.




又，$|c| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| = 1 = e^{i\theta} \Rightarrow f(z) = e^{i\theta} z$.

3) $|f'(0)| = \lim\limits_{z \to 0} \left|\frac{f(z)}{z}\right| \le 1$.

由于 $z=0$ 为 $\frac{f(z)}{z}$ 的可去奇点，因此直接套用2)结论即得证.

记 $\mathrm{Aut}\,\Omega = \{ f: \Omega \to \Omega$ 为共形映射(解析同胚)$\}$.

则 $\mathrm{Aut}\,\Omega$ 对映射复合构成一个群, 单位元 $e = id$, 逆元为反函数(同胚保证存在性)

e.g. 1) $\Omega = D$ (单位圆盘), $\psi_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\bar{a}\cdot z} : D \to D$.

$\forall a \in \mathbb{C}, |a|<1$.

$$\psi_a(e^{i\theta}) = \frac{a-e^{i\theta}}{e^{i\theta}(e^{-i\theta}-\bar{a})} = -e^{i\theta} \cdot \frac{w}{\bar{w}}, \quad w = a - e^{i\theta}.$$

$$\therefore |\psi_a(e^{i\theta})| = |e^{-i\theta}|\left|\frac{w}{\bar{w}}\right| = 1.$$

于是它把边界映到边界, 从而是 $D \to D$ 的.

又, $$\psi_a \circ \psi_a = \frac{a - \frac{a-z}{1-\bar{a}z}}{1-\bar{a}\cdot\frac{a-z}{1-\bar{a}z}} = z.$$

$\therefore \psi_a \circ \psi_a = id$, $\psi_a^{-1} = \psi_a$.

又. $\psi_a(0) = a$. $\psi_a(a) = 0$. 从而它可以把任何全纯的 $f$ 在0处的取值变为0.

定理: $\mathrm{Aut}\,D = \{ e^{i\theta} \cdot \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}, \theta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C}$ 且 $|a|<1 \}$.

证: $f: D \to D$, 设 $f(a) = 0$.

则 $g = f \circ \psi_a : D \to D \to D$

$0 \mapsto a \mapsto 0$.

$\therefore g(0) = 0$, $g^{-1}(0) = 0$.

$\therefore |g(z)| \le |z|$, $|g^{-1}(w)| \le |w|$. $(|z| \le g(z))$

$\therefore$ $\therefore |g(z)| = |z|$, $g(z) = c(z)$, $c = e^{i\theta}$.

$\therefore f \circ \psi_a = e^{i\theta}$

$\therefore f = e^{i\theta} \circ \psi_a$

$= e^{i\theta} \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$. ✓

设 $M\in M_{\mathbb{C}}(2)$ 2×2的复矩阵

设 $u,v\in\mathbb{C}^2$，$\langle u,v\rangle\triangleq z_1\overline{w_1}-z_2\overline{w_2}$，

其中 $u=(z_1,z_2)$，$v=(w_1,w_2)$.

记这样的内积空间为 $\mathbb{C}^{1,1}$

此时这个自同构群记为 $u(1,1)$，若 $\det=1$ 则 $su(1,1)$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ \bar b & \bar a\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow |a|^2-|b|^2=1$

它的作用是 $z\to\dfrac{az+b}{\bar b z+\bar a}$

此时 $Su(1,1)\to \mathrm{Aut}D$ 为一同态.

且其 ker 为 $\{I,-I\}$

$\Rightarrow \mathrm{Aut}D=Su(1,1)/\{\pm I\}$

上半平面

$\mathrm{Aut}H$：设 $F: H\to D$.

则 $T: \mathrm{Aut}D\to\mathrm{Aut}H$

$\varphi\to F^{-1}\circ\varphi\circ F$.

定理：任一 H 到 H 的自同构都具有如下形式：

$$\mathrm{Aut}H=\left\{\frac{az+b}{cz+d},\ \det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=1,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}.$$

证：$\mathrm{Im}\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)=\dfrac{(ad-bc)\,\mathrm{Im}z}{|cz+d|^2}$

记 $Sl_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}: ad-bc=1,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$.

则 $Sl_2(\mathbb{R})\to\mathrm{Aut}H$ 是群同态(同构?)

$\forall z\in H$，$\exists\, G\in Sl_2(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

st. $\dfrac{az+b}{cz+d}=i$.

③ 首先, $\operatorname{Im}\dfrac{az+b}{cz} = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|cz|^2} = 1$. $\therefore |c|^2 = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}$.

令 $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $M = M_2 \cdot M_1$ 即可.

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

若 $f \in \operatorname{Aut} H$. $f(z_0) = i$ 则 $g$

$\Rightarrow f \circ M(i) = i$.

设 $F: H \to D$, $f_{M_\theta}: H \to H$

则 $F \circ f_{M_\theta} \circ F^{-1}: D \to D$.

$F \circ g \circ F^{-1}: D \to D$

$0 \to 0$. $F\circ \quad \circ F^{-1}$

$\therefore F \circ g \circ F^{-1}$ 为旋转, 从而 $g = f_{M_\theta}$(某些).

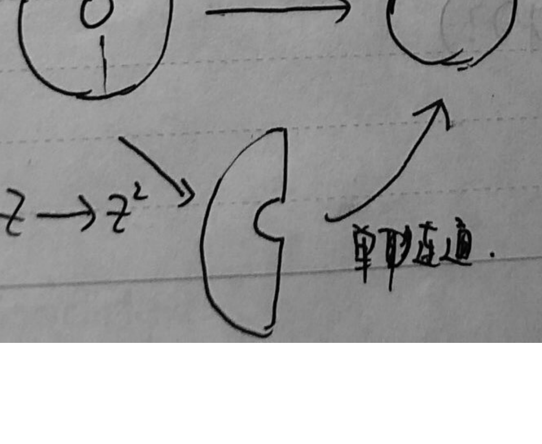
$\therefore g \in SL_2(\mathbb{R})$

$SL_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\operatorname{Aut} H}$ 其为一群同态 (因 $f_{M_1 M_2} = f_{M_1} \circ f_{M_2}$).

$M \to f_M$.

$\{\pm I\} \to id$.

$\therefore \operatorname{Aut} H = SL_2(\mathbb{R}) / \{\pm I\} \cong PSL_2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ 特殊射影群.



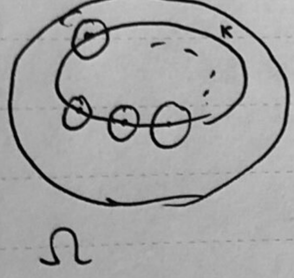
定理：$\Omega$单连通，$z_0\in\Omega$，则存在唯一的共形映射 $f:\Omega\to D$，
$f(z_0)=0$，$f'(z_0)\in\mathbb{R}^+$（正实数）

Monte$\ell$定理：$\mathcal{F}$是$\Omega$上的一族全纯映射，$\mathcal{F}$在$\Omega$的紧子集上一致有界。
（给定 $K\subset\Omega$，则 $\exists B>0$, s.t. $\forall f\in\mathcal{F}$，$|f(z)|\le B$ 对 $\forall z\in K$ 成立）。
则：1) $\mathcal{F}$在 $K\in\Omega$ 上等度连续
2) $\mathcal{F}$正规。

注：① 等度连续：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall z,w\in K$，只要 $|z-w|<\delta$，都有 $|f(z)-f(w)|<\varepsilon$ 对所有 $f\in\mathcal{F}$ 同时成立。
② 正规：对$\mathcal{F}$的每个~~子列~~序列，均存在子列在 $K\subset\Omega$ 上一致收敛。

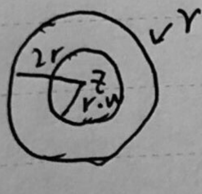
Lemma：若 $\{f'\}=\mathcal{F}'$ 一致有界，$f$ 定义在 $K$ 上。
$\Rightarrow\mathcal{F}$等度连续。　考虑
（$f'$一致有界的必要性："$f_n(x)=x^n$"）。

证：1) $K\subset\Omega$，取 $r>0$, s.t. $\forall z\in K$，$D_{3r}(z)\subset\Omega$。




$|z-w|<r$ 时，

$$f(z)-f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-w}\right)d\zeta.$$




$$\left|\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-w}\right|=\frac{|z-w|}{|\zeta-z||\zeta-w|}\le\frac{|z-w|}{r^2}.$$

$$\therefore|f(z)-f(w)|\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi r}{r^2}\cdot B|z-w|.$$

$$<\frac{B}{r}|z-w|<\varepsilon.$$

2) $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$，$K\subset\Omega$，取 $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ 在$\Omega$上稠密。
取 $\{f_{n,1}\}\subset\{f_n\}$ st. $\{f_{n,1}(w_1)\}$ 收敛。
$\{f_{n,2}\}\subset\{f_{n,1}\}$ st $\{f_{n,2}(w_2)\}$ 收敛。
……
$\{f_{n,k}\}$，$\forall k$。

$\therefore$ 令 $g_n = f_{n,n}$，则 $g_n$ 在 $\{w_j\}$ 上收敛.

$\therefore |g_n(z) - g_m(z)| \le |g_n(z) - g_m(w_j)| + |g_n(w_j) - g_m(w_j)| + |g_m(w_j) - g_m(z)|$

$< 3\varepsilon$.

$\therefore \{g_n\}$ 在 $K$ 上一致收敛.

最后，$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_l \subset \cdots \subset \Omega$

且 $\Omega = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l$

从而 $\{g_{n,n}\} \subset \{f_n\}$ 在每个 ~~K上~~ $K_l$ 上一致收敛.

扫描全能王 创建