5.15

回顾：ζ函数

Euler的发现：$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

"自然数之和"⟺素数之积"

↳ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p为素数}(1-p^{-s})^{-1}$

Riemann的结果：$(\xi(s))\ \xi(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(s/2)\zeta(s)$

第一积分形式：$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$

第二积分形式：$\xi(s)=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\pi n^2x^2}\right)\cdot x^{\frac{s}{2}-1}dx$

第七章 ζ函数与素数定理

有 $\prod_{p为素数}(1-p^{-s})^{-1}=\zeta(s)=e^{\frac{r+\log\pi}{2}s-\log 2}\cdot\frac{1}{s-1}\cdot\prod_{\rho}(1-\frac{s}{\rho})\cdot\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{s}{2n})e^{-\frac{s}{2n}}$

式中ρ为当ζ(s)的非平凡零点

(本式可由Hadamard的结果证明)？

同时，$\zeta(s)=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$，于是 $\log\zeta(s)=\sum_{p,m}\frac{-p^{-ms}}{m}=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\cdot n^{-s}$，

其中 $C_n=\begin{cases}\frac{1}{m}, & 若n=p^m\\ 0, & 其它\end{cases}$

又，$\zeta(s)=\pi^{s-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}\zeta(1-s)$

$=2^{s-1}\cdot\pi^s(\cos\frac{\pi s}{2})^{-1}\Gamma(s)^{-1}\cdot\zeta(1-s)$

∴ ① ζ(s)在Res>1全纯，无零点

② ζ(s)在s=1有唯一极点

③ ζ(s)在Res<0有平凡零点 −2n.

↳ 我们知道了在Res>1与<0时ζ(s)的零点行为.

④ ~~下证~~ $\zeta(s)$在$\mathrm{Re}s=0.=1$无零点(下证)

设$s=\sigma+it$, $0\le\sigma_0\le1$.

于是有如下估计: ① $\sigma_0\le\sigma$, $|t|\ge1$, 则

$$|\zeta(s)|\le C_\varepsilon\cdot|t|^{1-\sigma_0+\varepsilon}.$$

② $1\le\sigma$, $|t|\ge0$时,

$$|\zeta'(s)|\le C_\varepsilon\cdot|t|^\varepsilon, \text{且} |\zeta(s)|^{-1}\le C_\varepsilon\cdot|t|^\varepsilon$$

回顾: $\zeta(s)-\frac{1}{s-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\delta_n(s)$, 其中$\delta_n(s)=\int_n^{n+1}\left[\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right]dx$

已证明$|\delta_n(s)|\le\frac{|s|}{n^{\sigma+1}}$, 同时$|\delta_n(s)|\le\frac{2}{n^\sigma}$

$\sigma_0\le\sigma$时, $\forall\delta>0$, 有$|\delta_n(s)|\le\left(\frac{|s|}{n^{\sigma_0+1}}\right)^\delta\left(\frac{2}{n^{\sigma_0}}\right)^{1-\delta}$.

特别地, 令$\delta=1-\sigma_0+\varepsilon$, 则有

$$|\delta_n(s)|\le\frac{2|s|^{\delta}}{n^{\sigma_0+\delta}}=\frac{2|s|^{1-\sigma_0+\varepsilon}}{n^{1+\varepsilon}}$$

于是$|\zeta(s)|\le\frac{1}{s-1}+2\cdot|s|^{1-\sigma_0+\varepsilon}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, ①得证

进一步运用Cauchy积分公式,

$$\zeta'(s)=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\zeta(s+re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$$

取$r=\varepsilon$, 此时$\mathrm{Re}s\ge1-\varepsilon\hat{=}\sigma_0$, 并将②中$\varepsilon$取为此时的$2\varepsilon$

(因为$\zeta'(s)\le C_\varepsilon\cdot|t|^{1-(1-\varepsilon)+\varepsilon}=C_\varepsilon\cdot|t|^{2\varepsilon}$).

定理: $\zeta(s)$在$s=1$无零点.

引理: ① $\log\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\cdot n^{-s}$, $C_n\ge0$

② $2(1+\cos\theta)^2=3+4\cos\theta+\cos2\theta\ge0$.

~~③~~ $\Rightarrow$ $\log|\zeta^3(\sigma)\cdot\zeta^4(\sigma+it)\cdot\zeta(\sigma+2it)|\ge0$.

上式$=3\mathrm{Re}\log(\zeta(\sigma))+4\mathrm{Re}\log\zeta(\sigma+it)+\mathrm{Re}\log\zeta(\sigma+2it)$

注意到$\mathrm{Re}\,n^{-s}=n^{-\sigma}\cdot\cos(t\log n)$

$\therefore$上式$=\sum C_n\cdot n^{-\sigma}(3+4\cos\theta_n+\cos2\theta_n)$, 其中$\theta_n=t\cdot\log n$,

再注意到$2(1+\cos\theta)^2\ge0$.

反证法：设 $\exists t_0$，$\zeta(1+it_0)=0$.

则 $1+it_0$ 作为零点是一阶的零点.

故 $|\zeta(\sigma+it_0)^4| = |(\sigma-1)^4 \cdot h^4| \le C(\sigma-1)^4$

h 全纯.

$|\zeta(\sigma)|^3 \le C' \cdot (\sigma-1)^{-3}$

$\zeta(\sigma) \sim \frac{h}{\sigma-1}$

$|\zeta(\sigma+2it_0)| \le C''$

可提出一个 $(\sigma-1)^4$，在 $\sigma\to 1$ 时它 $\to 0$.

但同时，上述三项乘积取对数 ≥ 0，因此不可能 $\to 0$，矛盾.

命题：$\forall \varepsilon>0$，设 $s=\sigma+it$，$\sigma\ge 1$，$|t|\ge 1$，则

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \le C_\varepsilon \cdot |t|^\varepsilon.$$

证：已证
$$|\zeta^4(\sigma+it)| \ge \frac{1}{|\zeta^3(\sigma)\cdot\zeta(\sigma+2it)|}$$
$$\ge C\cdot\zeta^{-3}(\sigma)\cdot|t|^{-\varepsilon}$$
$$\ge C'\cdot(\sigma-1)^3\cdot|t|^{-\varepsilon}$$

$\therefore |\zeta(\sigma+it)| \ge C''\cdot(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}\cdot|t|^{-\frac{\varepsilon}{4}}$.

下设 $\sigma-1 \ge A\cdot|t|^{-5\varepsilon}$ (*)

若(*)成立，命题即得证.

若(*)不成立，取 $\sigma'>\sigma$，$\sigma'-1 = A\cdot|t|^{-5\varepsilon}$.

此时 $|\zeta(\sigma+it)| \ge |\zeta(\sigma'+it)| - |\zeta(\sigma'+it)-\zeta(\sigma+it)|$.

其中
$$|\zeta(\sigma'+it)-\zeta(\sigma+it)| \le C''\cdot|\sigma'-\sigma|\cdot|t|^\varepsilon$$
$$\le C''\cdot|\sigma'-1|\cdot|t|^\varepsilon$$

对 $\zeta(\sigma'+it)$ 应用上述结果，有
$$|\zeta(\sigma'+it)| - |\zeta(\sigma'+it)-\zeta(\sigma+it)|$$
$$\ge C'(\sigma'-1)^{\frac{3}{4}}\cdot|t|^{-\frac{\varepsilon}{4}} - C''\cdot(\sigma'-1)\cdot|t|^\varepsilon.$$

令 $A=\left(\frac{C'}{2C''}\right)^4$，上式 $\geq (2C''-C'')\cdot(6'-1)\cdot|t|^\varepsilon$，即得.

~~素数定理~~：记 $\pi(x)=\#\{p: p\le x\}$

↓（素数）

记数函数

~~历史：早期有结论 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)}{x}=0$.~~

素数定理：$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}\ (x\to+\infty)$.

其中 $f\sim g$，$x\to x_0$ 定义为 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f}{g}=1$

历史：① 早期有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)}{x}=0$.

② Chebychev 的结论：$\pi(x)\approx\frac{x}{\log x}$

其中 $f\approx g$ 定义为 $\exists$ 常数 c_1, c_2, s.t. $c_1 g\le f\le c_2 g$

定义：$\Pi(x)=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m}\pi(x^{\frac{1}{m}})$

$=\sum_{p^m\le x}\frac{1}{m}$.

↑Riemann 的显式函数

定理：(Riemann) $\Pi(x)=Li(x)-\sum_{\rho}Li(x^{\rho})+\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t(t^2-1)\log t}-\log 2$，其中 ρ 为 $\zeta(s)$ 的非平凡零点，

$Li(x)=\int_0^x\frac{dt}{\log t}$

注：$\pi(x)=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\mu(m)}{m}\Pi(x^{\frac{1}{m}})$，其中 μ 是 Mobius 函数.

~~且~~ 又，$\pi(x)=Li(x)+O(x^{\frac{1}{2}}\log x)$ ($\Leftrightarrow$ RH)

($\Leftrightarrow \pi(x)=Li(x)+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$，$\forall\varepsilon>0$)

Siegel，1932：Riemann-Siegel 公式

Riemann 通过这个公式算出了 $0<\mathrm{Im}\,\rho<100$ 的全部零点.

公式: $$\sum_{\rho} \frac{1}{\rho} = \cancel{\mathrm{Im}} \sum_{\mathrm{Im}\rho>0} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-\rho} = \frac{r}{2} + \frac{\log \pi}{2} + 1 - \underbrace{\frac{\xi'(0)}{\xi(0)}}_{\log 2\pi}.$$