1.

(1) $y' = c$

$\therefore y = y'x + \sqrt{4+9y'^2}$ 为所求方程.

(2) $y - cx = \sqrt{4+9c^2}$

$4+9c^2 = y^2 - 2xy\cdot c + c^2x^2$ (损失信息:

$(9-x^2)c^2 + 2xy\cdot c + 4 - y^2 = 0$

$\Delta = (2xy)^2 - 4(9-x^2)(4-y^2) \geq 0$

$x^2y^2 \geq (9-x^2)(4-y^2)$

$x^2y^2 \geq 36 - 9y^2 - 4x^2 + x^2y^2$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1$ .. 值得注意的是,直线截距为正数

故包络为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ $(y \geq 0)$

(3) 4, 9 (注意包络性质).

2.

(1) 挑 $y = cx + \sqrt{4-9c^2}$

则 $y = y'x + \sqrt{4-9y'^2}$

$(y-cx)^2 = 4 - 9c^2$

$y^2 - 2cxy + c^2x^2 = 4 - 9c^2$

$c^2(x^2+9) - 2xy\cdot c + y^2 - 4 = 0$

$\Delta = 4x^2y^2 - 4(x^2+9)(y^2-4) \geq 0$

$x^2y^2 \geq (x^2+9)(y^2-4) = x^2y^2 - 4x^2 + 9y^2 - 36$

包络为 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ $(y \geq 0)$

(3) $-9, 4$ (同上)

3.

(1) 一阶圆 $x^2+y^2+2ax+2by+C=0$

故此圆有三个常数.

$x + y\cdot y' + a + by' = 0$

$1 + (y')^2 + y\cdot y'' + by'' = 0$

$2y'\cdot y'' + y'y'' + y\cdot y''' + by''' = 0$

$\therefore (b+y)y''' = -3y'y''$

$$b = \frac{-1-(y')^2 - y\cdot y''}{y''} = \frac{-1-(y')^2}{y''} - y$$

故 $\frac{-1-(y')^2}{y''} y''' = -3y'y''$

$(1+(y')^2)y''' = 3y'(y'')^2$ 即为所求

(2) $2y''y''' = c\,3(1+y'^2)^2\,2y'y''$

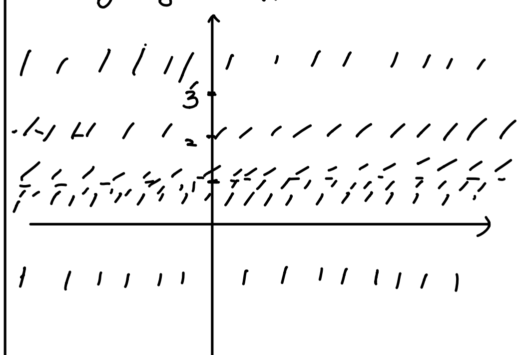
则 $c = \frac{1}{3}\frac{y'''}{(1+y'^2)^2 y'}$

$\therefore y''^2 = \frac{1}{3}\frac{y'''}{y'}(1+y'^2)$ 即为所求

(3) 比较: 结果相同.

1.3

1. (1) $y' = (y-1)^2$ 线素场



等斜线方程为 $(y-1)^2 = k$, $y = \pm\sqrt{k} + 1$

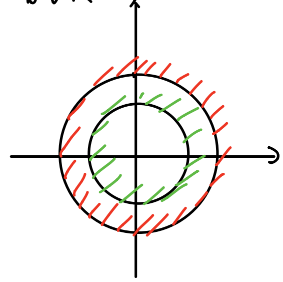
故斜率为 k 的线素的所有点在直线 $y = \pm\sqrt{k}+1$ 上.

注意 $y=1$ 上的线素都与 $y=0$ 平行.

(2) $y' = x^2 + y^2$

等斜线方程为 $x^2+y^2=k$, 故圆 $x^2+y^2=k$ 上的线素

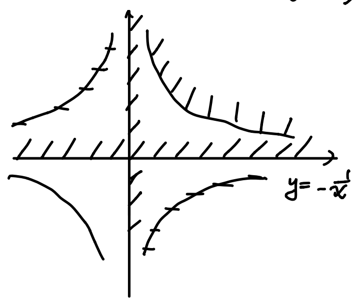
皆为 k



2.

(1) $y'=1+xy$，等斜线方程 $1+xy=k$

$$y=\frac{k-1}{x}$$



看这个趋势积分区域该大概就是这样的

3.

(1) 因为线素场是可以确定的。

不是。

例如补充 $y=\varphi(t)$，$t\in[t_0,t_0+1)$，就可以描述线素场（不一定有解？）

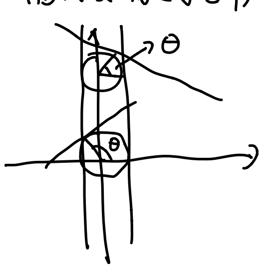
(2)

$$\begin{cases}(x-\sin c)^2+(y-\cos c)^2+(z-2c)^2=\varepsilon_0^2\\(x-\sin c)\cos c-(y-\cos c)\sin c+(z-2c)2=0\end{cases}$$

消去c，即是所求曲面方程。

(3) 一个存在但是另一个不存在的例子是非常简单的

例如我们对圆 $x^2+(y-c)^2=1$ 的全体切线形成的集合记为 $T(c,\theta)$；θ表征切点对应的张角，则 c 固定变θ会形成 $x^2+(y-c)^2=1$，而再变动c就形成 $x=-1$ 和 $x=1$



然而固定θ变c时的切线互相平行，由包络线定义，此时是不存在包络的。

关键是两个都存在但不相等。

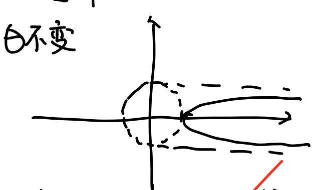
正面例子比如圆轮在x轴和y轴上滚动形成轨迹，二次包络都存在且相等。

反例：

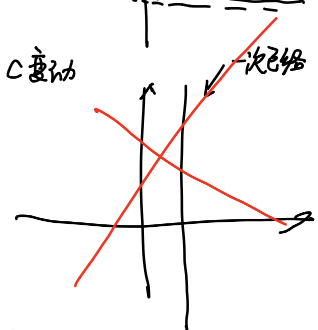
把直线视作包络的一种极限，

例如，把上个一个存在，一个不存在的切线方程换为 $\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|$

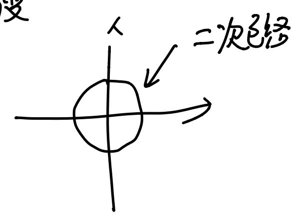
① θ不变



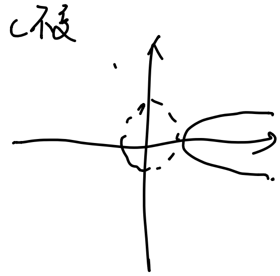
c变动

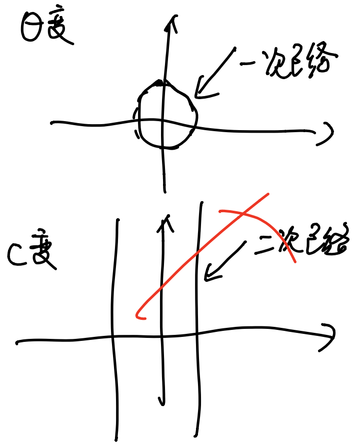


θ变



② c不变





没有找到反例.