习题2.2.

1.

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y}$

$\therefore\ y\,dy=x^2\,dx$

$\frac{y^2}{2}=\frac{x^3}{3}+C$. 有意义区域 $y\neq0$.

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y(1+x^3)}$

$\therefore\ y\,dy=\frac{x^2}{1+x^3}dx$

$\frac{y^2}{2}=\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+C$. $x\neq-1, y\neq0$.

(3) $\frac{dy}{dx}+y^2\sin x=0$

$\frac{1}{y^2}dy+\sin x\,dx=0$

$-\frac{1}{y}-\cos x+C=0$

$\frac{1}{y}=C-\cos x$ 和 $y=0$

(4) $\frac{dy}{dx}=1+x+(1+x)y^2=(1+x)(1+y^2)$

$\frac{1}{1+y^2}dy=(1+x)\,dx$

$\therefore\ \arctan y+C=x+\frac{x^2}{2}$.

(5) $\frac{dy}{dx}=\cos^2 x\ \cos^2 2y$

$dy\cdot\frac{1}{\cos^2 2y}=\cos^2 x\,dx$

$\frac{\tan 2y}{2}+C=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}$; 和 $y=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$

(6) $x\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$

即 $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{x}dx$

$\therefore\ \arcsin y+C=\ln|x|$, $y=\pm1$. $x=0$

(7) $\frac{dy}{dx}=\frac{x-e^{-x}}{y+e^y}$

$(y+e^y)dy=(x-e^{-x})dx$

$\frac{y^2}{2}+e^y+C=\frac{x^2}{2}+e^{-x}$

2.

(1) $\sin 2x\,dx+\cos 3y\,dy=0$

则 $-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\sin 3y+C=0$

代入 $y(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{3}$ 得

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sin\pi+C=0$, $C=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 为 $\frac{1}{3}\sin 3y-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}=0$

(2) $x\,dx+ye^{-x}dy=0$

$\frac{x}{e^{-x}}dx+y\,dy=0$

$\int -x\,d(e^{-x})+\frac{y^2}{2}=0$

$-xe^{-x}+\int(e^{-x})dx+\frac{y^2}{2}=0$

$C-xe^{-x}-e^{-x}+\frac{y^2}{2}=0$, 代入 $y(0)=1$.

$C-1+\frac{1}{2}=0$, $C=\frac{1}{2}$.

$\frac{y^2}{2}-xe^{-x}-e^{-x}+\frac{1}{2}=0$.

(3) $\frac{dr}{d\theta}=r$, $r(0)=2$;

$\frac{1}{r}dr=d\theta$, $\ln|r|+C=\theta$

$\therefore\ \ln2+C=0$, $C=-\ln2$

$\therefore\ \ln|r|-\ln2=\theta$.

$\therefore |r|=2e^{\theta}$, $r=2e^{\theta}$.

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{\ln|x|}{1+y^2}$, $y(1)=0$

先设 $x>0$.

$(1+y^2)dy=\ln x\,dx$

$y+\frac{y^3}{3}+C=x\ln x-x$

则 $C=-1$, $y+\frac{y^3}{3}-1=x\ln x-x$

再看 $x<0$.

$(1+y^2)dy=\ln(-x)\,dx$

$y+\frac{y^3}{3}+C=x\ln(-x)-\int x\frac{-1}{-x}dx$

$=x\ln(-x)-x$

(5) $\sqrt{1+x^2}\frac{dy}{dx}=xy^3$

$\frac{1}{y^3}dy=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$-\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} = \sqrt{1+x^2}+C$ 或 $y=0$.

代入 $y(0)=1$

$-\frac{1}{2}=1+C$, $C=-\frac{3}{2}$

∴为 $-\frac{1}{2}\frac{1}{y^2}=\sqrt{1+x^2}-\frac{3}{2}$

3

(1) $\sin x+C$

(2) $dy\cdot\frac{1}{ay}=dx$; $y=0$

$\ln|y|=ax+C$

$|y|=Ce^{ax}$

(3) $\frac{dy}{dx}=1-y^2$, $y=\pm1$ 或

$\frac{dy}{1-y^2}=dx$

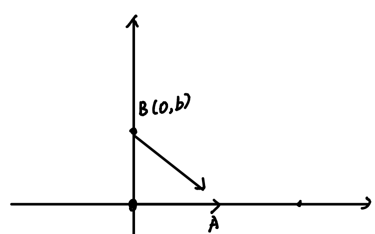
$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|=x+C$

(4) $\frac{dy}{dx}=y^n$, $\frac{dy}{y^n}=dx$. $y=0$ 或

$\frac{1}{1-n}\frac{1}{y^{n-1}}=x+C$, $n\neq1$

若 $n=1$ 是 $\ln|y|=x+C$

4.



设 $B(x,y)$ $y(0)=b$.

设B的轨迹为 f: $y=f(x)$. 则找A的位置.

$y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$ 为切线, 令 $y=0$, 则

$x=\frac{-y(x_0)}{y'(x_0)}+x_0$

故 $\left[\frac{y(x_0)}{y'(x_0)}\right]^2+[y(x_0)]^2=b^2$

∴ $b^2-y^2=\frac{y^2}{y'^2}$, $\frac{y'^2}{y^2}=\frac{1}{b^2-y^2}$

$y'^2=\frac{y^2}{b^2-y^2}$

$y'=\frac{y}{\sqrt{b^2-y^2}}$

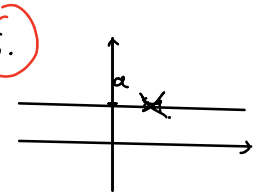
则 $\frac{\sqrt{b^2-y^2}}{y}dy=dx$

即 $\sqrt{b^2-y^2}-b\ln\frac{y+\sqrt{b^2-y^2}}{y}+C=x$

代入 $(0,b)$,

$\sqrt{b^2-y^2}-b\ln\left(1+\frac{\sqrt{b^2-y^2}}{y}\right)=x$ 即为所求.

5.



考虑 (x_0,a)

首先直线 $y=a$ 上的每一点, $y=a$ 都是经过它的积分曲线,

要局部唯一, 则不能再有积分曲线经过 $y=a$.

考虑 $x=\int_a^y\frac{1}{f(y)}dy+C$, C 是某常数.

确定方程 $F(y,x)=\int_a^y\frac{1}{f(y)}dy+C-x$ 在 $|y-a|\le\varepsilon$ 内, $y\neq a$

且 $\frac{\partial F}{\partial y}\neq0$, 由隐函数存在定理, ∃ y 关于 x 的隐函数.

不妨设在 $(x_1,a-\frac{\varepsilon}{2})$ 点的邻域内存在这个函数,

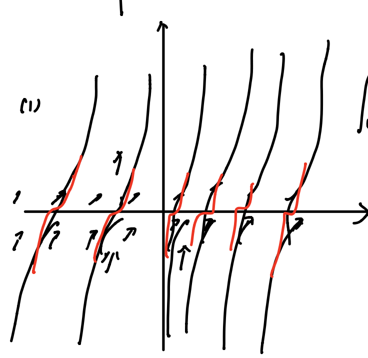
实际上即积分曲线. $\int_a^{a-\frac{\varepsilon}{2}}\frac{dy}{f(y)}$ 收敛

$\Leftrightarrow$ ∃ x', s.t. (x',a) 在 $y=a$ 上, 且还有一个不是 $y=a$ 的积分曲线在此处与 $y=a$ 相切.

证毕.

6.

(1)



$\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{y}}$ 收敛

(2) $\int_0^e \frac{1}{y\ln y}\,dy$ 发散.