Osgood条件:

设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，且满足不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq F(|y_1-y_2|)$$

其中 $F(r)>0$ 是 $r>0$ 的连续函数，且瑕积分

$$\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=\infty\quad(r_1>0\text{ 为常数})$$，称 $f(x,y)$ 在 G 内满足Osgood条件.

显然李氏条件是其特例.

定理3.2.(Osgood解的唯一性定理)设 $f(x,y)$ 在区域 G 内对 y 满足Osgood条件，则微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 在 G 内经过每一点的解都是唯一的.

否则 G 内 $\exists(x_0,y_0)$，方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 有两个解 $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$ 都过 (x_0,y_0). 且至少 $\exists$ 一个值 $x_1\neq x_0$，s.t.

$y_1(x_1)\neq y_2(x_1)$. 不妨设 $x_1>x_0$，且

$y_1(x_1)>y_2(x_1)$，令

$$\bar{x}=\sup_{x\in[x_0,x_1]}\{x:y_1(x)=y_2(x)\}$$ (提 $\bar{x}$ 与 x_1 间无 $y_1(x)-y_2(x)$ 的零点)

则 $x_0\leq\bar{x}<x_1$，且

$r(x):=y_1(x)-y_2(x)>0$，$\bar{x}<x\leq x_1$ 和 $r(\bar{x})=0$

则有

$$r'(x)=y_1'(x)-y_2'(x)=f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x))$$
$$\leq F(|y_1(x)-y_2(x)|)=F(r(x))$$

亦即 $$\frac{dr(x)}{F(r(x))}\leq dx\quad(\bar{x}<x\leq x_1)$$

积分得 $$\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}\leq x_1-\bar{x}\ ,\ r_1=r(x_1)>0.$$

矛盾.

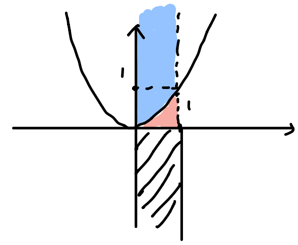
例1: Müller反例:

设初值问题

(E_0): $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$，$y(0)=0$，

其中函数

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x=0,\ -\infty<y<\infty\\ 2x & 0<x\leq1,\ -\infty<y<0\\ 2x-\frac{4y}{x} & 0<x\leq1,\ 0\leq y<x^2\\ -2x & 0<x\leq1,\ x^2\leq y<\infty\end{cases}$$



习题3.1

1.

(1) $\alpha \geq 1$时

在$y=0$处满足Osgood条件，故局部只有一条积分曲线过$(0,0)$

$0<\alpha<1$时

$y>0$时，$\frac{dy}{dx}=y^{\alpha}$

$$y^{-\alpha}dy=dx$$

$\frac{1}{1-\alpha}y^{1-\alpha}=x$ 也过$(0,0)$. 解$y=0$也过$(0,0)$

故不唯一.

(2) 在$(0,0)$处满足Osgood条件，故唯一.

2. $y_n=\int_0^x (x+y_{n-1}+1)\,dx$ 显然满足李氏条件，皮卡序列收敛.

$$=\frac{x^2}{2}+x+\int_0^x y_{n-1}\,dx$$

$y_0(x)=0$, $y_1(x)=\frac{x^2}{2}+x$

$$y_2(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2}=\frac{x^3}{3!}+x^2+x$$

$$y_3(x)=\frac{x^4}{4!}+\frac{x^3}{3}+x^2+x$$

$$y_{n-1}(x)=\frac{x^n}{n!}+\frac{2x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{2x^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+\frac{2x^3}{3!}+x^2+x$$

$$y_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{2x^n}{n!}+\cdots+\frac{2x^4}{4!}+\frac{2x^3}{3!}+x^2+x$$

令$n\to+\infty$，有 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

$$y(x)=2e^x-x-2$$

经检验，确实符合条件.

3. 反证即可. 若不然，$\exists\delta$, s.t. $\forall x_0\leq x<x_0+\delta$,

有积分曲线 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 都过(x_0,y_0)，且 $y_1(x)>y_2(x)$, $x_0<x<x_0+\delta$.

但是 $y_1(x_0+\frac{\delta}{2})-y_1(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+\frac{\delta}{2}}f(x,y_1)\,dx$

$$<\int_{x_0}^{x_0+\frac{\delta}{2}}f(x,y_2)\,dx=y_2(x_0+\frac{\delta}{2})-y_2(x_0)$$

矛盾.

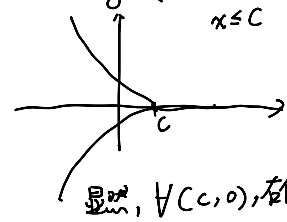
左侧不一定唯一. 例如:

$$y'=-\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$$ (课本P28)

$y\neq0$时，$\frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}}=-\frac{3}{2}dx$

得到 $y^{\frac{2}{3}}=-x+C$

通积分 $y^2=(C-x)^3$, $x\leq C$，加特解 $y=0$



显然，$\forall(c,0)$，右侧解唯一，左侧不唯一.