n个常数 $C_1,\cdots,C_n$ 独立 $\Leftrightarrow$ $\exists\ i_1,i_2,\cdots,i_n\in\{0,1,\cdots,n\}$ 两两不同, s.t.

$$\frac{D[\varphi^{(i_1)},\cdots,\varphi^{(i_n)}]}{D[C_1,\cdots,C_n]}\neq 0.$$

Thm: 设 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 是方程 $F(x,\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n)})=0$ 的通解，

则利用初值条件 $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ 可以确定其中的任意常数.

$$\begin{cases} C_1^0=C_1(x_0,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)}) \\ C_2^0=C_2(x_0,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)}) \\ \cdots\cdots \\ C_n^0=C_n(x_0,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)}) \end{cases}$$

使 $y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0,\cdots,C_n^0)$ 是初值问题

$$\begin{cases} F(x,\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n)})=0 \\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

的解.

Prof · 取定点 $(x_0,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)})$ 旁边的点 P

在P点 $x=\xi$, $C_1=a_1,\ C_2=a_2,\ \cdots,\ C_n=a_n$

且由于 $C_1\cdots C_n$ 独立知

$$\frac{\partial(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{\partial(C_1\cdots C_n)}=0$$

故 $\exists$ $C_i(x,\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})$ 在P附近. 代入可解,

习题1-1, P11.

1. $(2C_1e^{2x}-2C_2e^{-2x})'$

(1) $=4C_1e^{2x}+4C_2e^{-2x}=4(C_1e^{2x}+C_2e^{-2x})$

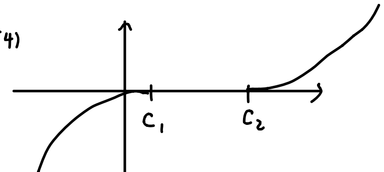
(2) $xy=\sin x$

$\therefore\ y+xy'=\cos x$

(3) $\frac{y}{x}=\int x^{-1}e^x\,dx+C$

$\therefore\ \frac{y'x-y}{x^2}=x^{-1}e^x,\ y'x-y=xe^x$

(4)



$$y'=\begin{cases} -\frac{1}{2}(x-C_1) \\ 0 \\ \frac{1}{2}(x-C_2) \end{cases}=\begin{cases} \sqrt{-y} & y<0 \\ 0 & y=0 \\ \sqrt{y} & y>0 \end{cases}$$

$=\sqrt{|y|}$

2. $y''=\frac{1}{2}x^2+C_0$

$y'=\frac{1}{6}x^3+C_0x+C_1$

(1) $y=\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{2}C_0x^2+C_1x+C_2$

$y=\frac{1}{24}x^4+\frac{a_2}{2}x^2+a_1x+a_0$

(4) $y=\int_0^x f(t)\,dx$

(3) $\frac{dR}{R}=-a\,dt$

$\ln|R|=-at+C$

$|R|=e^{-at}C'$

$1=C'$，由R的可导性，知 $R=\pm e^{-at}$

(4) $\frac{dy}{1+y^2}=dx$

$\arctan y=x+C$

$y=\arctan(x+C)$

$\arctan(x_0+C)=y_0$

$\therefore C=\arctan y_0-x_0$

$\therefore y=\arctan(x+\arctan y_0-x_0)$

3. (1) $y'=C+2x$

$C=y'-2x$

$\therefore y=xy'-2x^2+x^2=xy'-x^2$

$x^2+y-xy'=0$

(2)

$y=C_1e^x+C_2xe^x$

$y'=C_1e^x+C_2(x+1)e^x$

而 $\left|\frac{\partial(y,y')}{\partial(C_1,C_2)}\right|$

$=\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix}=e^{2x}\neq 0$，故独立.

故可解出

$C_1=\frac{(x+1)e^x\cdot y-xe^x\cdot y'}{e^{2x}}$

$=\frac{(x+1)y-xy'}{e^x}$

$C_2=\frac{e^x(y'-y)}{e^{2x}}=\frac{(y'-y)}{e^x}$

$y=(x+1)y-xy'+x(y'-y)$

$=$

注意这里出现了两个任意常数，尝试求导两次。

$y'=C_1e^x+C_2(x+1)e^x$

$y''=C_1e^x+C_2(x+2)e^x$

$C_1=\frac{(x+2)e^xy'-(x+1)e^xy''}{e^{2x}}$

$=\frac{(x+2)y'-(x+1)y''}{e^x}$

$C_2=\frac{e^x(y''-y')}{e^{2x}}=\frac{y''-y'}{e^x}$

$\therefore y=(x+2)y'-(x+1)y''+xy''-xy'$

$=2y'-y''$

即 $y''-2y'+y=0$。

(3) $x^2+2ax+y^2+2by=0$

$2x+2a+2y\cdot y'+2b\cdot y'=0$

$\Rightarrow\begin{cases} x+a+y\cdot y'+b\cdot y'=0 \\ 1+(y')^2+y\cdot y''+b\cdot y''=0 \end{cases}$

$$\therefore b = -\frac{1+(y')^2+y\cdot y''}{y''} = -\frac{1+(y')^2}{y''} - y$$

$$a + x + y\cdot y' + -\frac{y'}{y''}(1+y')^2 - y\cdot y' = 0$$

$$\therefore a = \frac{y'}{y''}(1+y')^2 - x$$

$$\therefore x^2 + 2\left(\frac{y'}{y''}(1+y')^2 - x\right)x + y^2 + 2y$$

以原点为中心：

$$x^2+y^2=C$$

$$\therefore 2x+2y\cdot y'=0$$

$$x+y\cdot y'=0$$

(4) $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$

$$2x+2y\cdot y'+2a+2by'=0$$

1. $x+y\cdot y'+a+by'=0$

2. $1+(y')^2+y\cdot y''+by''=0$

3. $2y'\cdot y''+y'\cdot y''+y\cdot y'''+by'''=0$

$$3y'\cdot y''+y\cdot y'''+by'''=0$$

$$b=\frac{-3y'y''-y\cdot y'''}{y'''}=-3\frac{y'y''}{y'''}-y$$

$$\therefore 1+(y')^2+y\cdot y''+-3\cdot\frac{y(y'')^2}{y'''}-y\cdot y''=0$$

即 $1+(y')^2=3\cdot\frac{y'(y'')^2}{y'''}$

$$y'''+(y')^2y'''-3y'(y'')^2=0$$

4.

$$\begin{cases} y'=g'(x,C_1,C_2,\cdots,C_n) \\ y''=g''(x,C_1,C_2,\cdots,C_n) \\ \cdots \\ y^{(n)}=g^{(n)}(x,C_1,C_2,\cdots,C_n) \end{cases}$$

由 $C_1,\cdots,C_n$ 的独立性

$$\frac{\partial(g,g^{(1)},g^{(2)},\cdots,g^{(n-1)})}{\partial(C_1,C_2,\cdots,C_n)}\neq 0$$

$\therefore$ C_i 实际上可表示为 $g,g^{(1)},\cdots,g^{(n-1)}$ 的函数（局部）

故记 $\varphi_i=C_i(g,g^{(1)},\cdots,g^{(n-1)})$

则 $y^{(n)}=g^{(n)}(x,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$ 即为所求.