高代笔记

所用教材为蓝以中——《高等代数简明教程》

1 m 维向量空间

命题 1 K^m 中向量加法、数乘运算满足如下的 8 条运算定律:

- 加法结合律 $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$;
- 加法交换律 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;
- 称 $(0,0,\cdots,0)$ 为 m 维**零向量**，记为 $\mathbf{0}$，对任何 m 维向量 α，有 $0+\alpha=\alpha+0=\alpha$;
- 任给 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，记 $-\alpha=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_m)$，称后者为 α 的**负向量**，它满足 $\alpha+(-\alpha)=0$;
- 对数 1，有 $1\cdot\alpha=\alpha$;
- 对 K 内的任意数 k,l，有 $(kl)\alpha=k(l\alpha)$;
- 对 K 内的任意数 k,l，有 $(k+l)\alpha=k\alpha+kl$;
- 对 K 内的任意数 k，有 $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

其中 K 表示数域，希腊字母 α,β,γ 表示 K^m 中的向量.

定义 1 给定 K^m 中的一个向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\quad \cdots,\alpha_s=\begin{bmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ms}\end{bmatrix},$$

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1s}x_s=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2s}x_s=0,\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{ms}x_s=0,\end{cases}$$

有非零解，则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ **线性相关**，如果方程组只有零解，则称此向量组**线性无关**. 作为判断依据，只需要判断 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 的消元（阶梯化）情况.

更一般的，给定 K^m 内的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，如果存在 K 内不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使:

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0,$$

则称向量组线性相关，否则称为线性无关.

命题 2 K^m 内向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性相关的充要条件是其中存在一个向量能被其余向量线性表示。

定义 2 给定 K^m 内的两个向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \tag{I}$$

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s, \tag{II}$$

如果向量组 (II) 中的每个向量均可被向量组 (I) 线性表示，反过来，向量组 (I) 中的每个向量均可被向量组 (II) 线性表示，则称两个向量组**线性等价**. 不难证明，线性等价具有反身性（向量组自身和自身线性等价）、对称性（A 和 B 线性等价相当于 B 和 A 线性等价）、传递性。

定义 3 给定 K^m 中的向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \tag{I}$$

如果它的一个部分组

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r} \tag{II}$$

满足如下两个条件：

(i) 向量组 (I) 中的每个向量都能被 (II) 线性表示；

(ii) 向量组 (II) 线性无关，

则称向量组 (II) 是向量组 (I) 的极大线性无关部分组.

命题 3 给定 K^m 内的两个向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \tag{I}$$

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s, \tag{II}$$

如果向量组 (I) 中每个向量都能被 (II) 线性表示，且 $r > s$，则向量组 (I) 线性相关.

命题 4 如某个向量组 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 与某个向量组 $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$ 线性等价并且 B 中向量线性无关，则 $n \geq m$.(否则利用定理 3，B 中向量线性相关，矛盾)

命题 5 给定 K^m 中的向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \tag{I}$$

设它的一个极大线性无关部分组为

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}, \tag{I'}$$

又有另一个向量组

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t \tag{II}$$

设它的某个极大线性无关部分组为

$$\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_t} \tag{II'}$$

如果 (I) 和 (II) 线性等价，则 $r = l$. 上述又有推论：一个向量组的任意两个极大线性无关部分组中包含的向量个数相同.

定义 4 一个向量组的极大线性无关部分组中包含的向量个数称为向量组的**秩**，全由 0 向量组成的向量组的秩为 0. 于是命题 5 可以改述为：两个线性等价的向量组的秩相等.

命题 6 给定 K^m 内的向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \tag{I}$$

其中 $\alpha_1 \neq 0$，对 (I) 作如下**筛选**：首先，α_1 保持不动，若 α_2 可被 α_1 线性表示，则去掉 α_2，否则保留之，继续筛选，如果 α_i 可被前面保留下来的向量线性表示，就去掉，否则保留，经过 n 轮后保留下来的向量组是

$$\alpha_{i_1} = \alpha_1, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r} \tag{II}$$

则称 (II) 为 (I) 的一个极大线性无关部分组.

2 矩阵的秩

命题 1 矩阵 A 的行秩在初等行变换下保持不变，矩阵 A 的列秩在初等列变换下也保持不变.(只需证明每次行变换或列变换后得到的都是等价矩阵)

命题 2 矩阵 A 的行秩在初等列变换下保持不变，A 的列秩在初等行变换下保持不变.

证明. • 先证明 A 的列秩在初等行变换下保持不变. 假设 A 的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，秩是 r. 不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 就是列向量组的极大线性无关部分组（否则利用筛选法原理结合列交换即可）. 假定 A 经过初等行变换后所得的新矩阵的列向量组为 $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n'$，我们只需 $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_r'$ 是其极大线性无关部分组.

(i) 先证 $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_r'$ 线性无关. 以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为列向量排成一个矩阵 B. 由于它们线性无关，故以 B 为系数矩阵的齐次线性方程组只有零解；另一方面，以 $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_r'$ 为列向量排列成矩阵 B_1，因为 B 由 A 的前 r 列组成，对 A 作行变换也就对 B 作同样的行变换，即 B_1 是 B 经过初等行变换得到，由于以 B_1 为系数矩阵的齐次线性方程组和以 B 为系数矩阵的齐次线性方程组同解，从而只有零解，故 $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_r'$ 线性无关。

(ii) 再证任一 α_i' 可被 $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_r'$ 线性表示. 为此，考察以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_i$ 为列向量组的矩阵 $\overline{B}$. 因 α_i 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示，故以 $\overline{B}$ 为增广矩阵的线性方程组有解；另一

方面，以 $\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_r',\alpha_i'$ 为列向量组的矩阵 $\overline{B_1}$ 可由 $\overline{B}$ 经初等行变换得到. 于是，以 $\overline{B_1}$ 为增广矩阵的线性方程组和以 $\overline{B}$ 为增广矩阵的线性方程组同解，因而也有解，说明 α_i' 可被 $\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_r'$ 线性表示.

- 再证行变换方面，注意到转置矩阵的列秩在初等行变换下不变的性质即可.

□

如果一个矩阵不是零矩阵，若对其不断使用初等行列变换，称最终得到的最稀疏的形式，且非 0 元素只能是 1，自上而下集中在对角线方向的矩阵为其**标准形**，有如下三种形式：

当 $n>m$ 时：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

当 $n=m$ 时：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

当 $n<m$ 时：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

命题 3 结合标准形的特点和前面的命题，我们有结论：矩阵的行秩等于列秩.

定义 一个矩阵 A 的行秩或列秩称为该矩阵的**秩**，记作 $r(A)$.

3 线性方程组

定义 1 齐次线性方程组的一组解向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 如果满足如下条件：

- $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 线性无关；
- 方程组的任一解向量都可以被 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 线性表示，

就称 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 是奇次线性方程组的一个基础解系.

命题 1 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，而向量 β 可被它线性表示，则表示法是唯一的.

命题 2 数域 K 上的齐次线性方程组的基础解系存在，且任一基础解系中解向量的个数为 $n-r$，其中 n 为未知量个数，而 r 为系数矩阵 A 的秩 $r(A)$.

证明. 因为方程组的任意两个基础解系是相互线性等价的，因为秩相等. 它们又是线性无关的，秩即等于其向量个数，因此只需找出一个基础解系包含 n-r 个向量，定理即证.

设矩阵 A 的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，如 $r(A) = r = n$，即 A 的列向量组线性无关，从而方程只有零解，基础解系中包含 0 个向量，定理成立.

下面设 $r < n$. 为了叙述简明，不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 A 的列向量组的一个极大线性无关部分组. 把方程组写成向量形式：

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0 \tag{1}$$

因为 $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n$ 均能被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示，于是它们的任一线性组合也可被后者线性表示，并且这种表示法是唯一的. 因此，给定 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 一组 K 内数值

$$x_{r+1} = k_{r+1},\ x_{r+2} = k_{r+2},\ \cdots,\ x_n = k_n,$$

则因 $\beta = -(k_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + k_n\alpha_n)$ 能唯一的表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的线性组合，所以存在 K 内唯一一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i = 0$$

这说明：

- 方程 (1) 中的未知量 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 任取一组数值，都可唯一确定未知量 $x_1, \cdots, x_r$ 的一组值，从而得到方程组的一组解；

- 方程组的两组解 η_1, η_2，如它们在 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 处取的值相同：

  $$\eta_1 = (*, \cdots, *, k_{r+1}, \cdots, k_n);$$

  $$\eta_2 = (*, \cdots, *, k_{r+1}, \cdots, k_n)$$

  其中 * 表示该处的具体数值无需具体给出，则 $\eta_1 = \eta_2$

  未知量 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 称为方程组的**自由未知量**. 如果让这 $n-r$ 个自由未知量中某个取值为 1，其余取值为 0，就得到方程组的一组解向量. 这样一共可以得到 $n-r$ 个解向量：

  $$\eta_1 = (*, \cdots, *, 1, 0, \cdots, 0),$$

  $$\eta_2 = (*, \cdots, *, 0, 1, \cdots, 0),$$

  $$\cdots$$

$$\eta_{n-r} = (*, \cdots, *, 0, 0, \cdots, 1),$$

下面我们证明 $\eta_1, \cdots \eta_{n-r}$ 是方程组的一个基础解系.

- 先证 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性无关. 因

  $$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} = (*, \cdots, *, k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}) = 0$$

  解之

  $$k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$$

  于是 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性无关.

- 设 $\eta = (k_1, \cdots, k_r, k_{r+1}, \cdots, k_n)$ 为方程组的任一组解，命

  $$\eta' = k_{r+1}\eta_1 + k_{r+2}\eta_2 + \cdots + k_n\eta_{n-r} = (*, \cdots, *, k_{r+1}, k_{r+2}, \cdots, k_n),$$

  η' 也是方程组的一组解，它与 η 在 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 处取相同的值，按前面的说明，$\eta = \eta'$. 从而

  $$\eta = k_{r+1}\eta_1 + k_{r+2}\eta_2 + \cdots + k_n\eta_{n-r}$$

  综合可知 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是方程组的一个基础解系，它恰好包含 $n-r$ 个向量.

□

命题 3（判别定理） 数域 K 上线性方程组有解的充要条件是其系数矩阵 A 与增广矩阵 $\overline{A}$ 等秩，即 $r(A) = r(\overline{A})$

命题 4 在 $r(A) = r(\overline{A})$ 的条件下，有：

- 如果 $r(A) = n$，则方程组有唯一解；
- 如果 $r(A) < n$，则方程组有无穷多组解，其全部解可以由某一特殊形式的解 γ_0 和它的导出方程组的一个基础解系表示.

这里的方程组是非齐次方程组，它的导出方程组指的是系数矩阵相同的齐次线性方程组，这个命题表明了二者解系的关系，也提供了普适的线性方程求解方法.

4 矩阵的运算

矩阵的加法和数乘

矩阵的乘法

矩阵乘法的几何意义

数域 K 上的矩阵 $M_{x,y}$ 实际上是从 K^y 到 K^x 上的映射，假设 K^s 上的向量可以被表示为 M_s，则有：

$$M_{x,y} \cdot M_y = M_x$$

这个映射也可以被写作 $f_{M_{x,y}}(M_y) = M_x$. **矩阵乘法的性质**

- 矩阵乘法满足结合律；
- 分别满足左分配律和右分配率；
- 对 K 内的任一数 k，有 $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- 记矩阵 A 的转置为 A'，则有：

$$A' + B' = (A+B)', \qquad (kA)' = kA', \qquad (AB)' = B'A'$$

需要注意的是矩阵乘法一般没有交换律和消去律.

矩阵运算和秩的关系

命题 1 在 K^m 中给定两个向量组：

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n; \tag{I}$$

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k. \tag{II}$$

如果 (I) 可被 (II) 线性表示，则 (I) 的秩 $\leq$(II) 的秩.

命题 2 给定 $A, B \in M_{m,n}(K)$. 则有：

(i) 对任意 $k \in K, k \neq 0, r(kA) = r(A)$;

(ii) $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

证明. (i) 相当于对每一行乘以一个常数的初等行变换，行秩不变，矩阵的秩不变；

(ii) 不妨设 A 的列向量的极大线性无关组为 $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$，B 的列向量的极大线性无关部分组分别为 $b = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\}$，由于 A+B 的列向量组一定可以被上述两个极大线性无关部分组线性表示，于是：

$$r(A+B) \leq r(a \bigcup b) \leq r(A) + r(B)$$

□

命题 3 设 $A \in M_{m,n}(K), B \in M_{n,s}(K)$，则：

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

证明. 注意到矩阵乘积 AB 的列向量可以被 A 的列向量线性表示于是 $r(AB) < r(A)$;

另一方面，考虑 AB 的转置，有 $r(AB) = r((AB)') = r(B'A') < r(B') = r(B)$，结合两方面即证. □

命题 4 设 $A \in M_{m,n}(K), B \in M_{n,s}(K)$，则：

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$$

证明. 令 $C=AB$. 设 B 的列向量组为 $B_1,B_2,\cdots,B_s$(看做 $n\times1$) 的矩阵,C 的列向量组为 $C_1,C_2,\cdots,C_s$(看做 $m\times 1$ 的矩阵)，按照矩阵乘法，应该有:

$$AB_i=Ci \qquad (i=1,2,\cdots,s).$$

现设 $C_{i_1},C_{i_2},\cdots,C_{i_r}$ 为 C 的列向量组的一个极大线性无关部分组，于是 $r=r(C)=r(AB)$. 对任一 C_i，有:

$$C_i=\sum_{j=1}^{r}k_jC_{i_j}$$

于是

$$\begin{aligned} A(\sum_{j=1}^{r}k_jB_{i_j}) &= \sum_{j=1}^{r}k_jAB_{i_j} && (1)\\ &= \sum_{j=1}^{r}k_jC_{i_j} && (2)\\ &= C_i && (3)\end{aligned}$$

现在方程组 $AX=C_i$ 有两组解:

$$X_i=B_i, \qquad X_2=\sum_{j=1}^{r}k_jB_{i_j}$$

如其导出方程组 $AX=0$ 的一个基础解系为 $P_1,P_2,\cdots,P_t$（都看做 $n\times1$ 的矩阵），则 $t=n-r(A)$，且:

$$B_i=\sum_{j=1}^{r}k_jB_{i_j}+\sum_{j=1}^{t}l_jP_j$$

于是 B 的列向量组 $B_1,B_2,\cdots,B_s$ 可由向量组

$$B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_r},P_1,P_2,\cdots,P_t \tag{I}$$

线性表示，由前述命题可知 $r(B)\le(I)$的秩 $\le r+t=r(C)+n-r(A)$，移项后即得所需. □

5 n 阶方阵

定义 1 n 阶单位矩阵 E 经过一次初等行变换或初等列变换所得的矩阵称为 **n 阶初等矩阵**. 可以用 $P_m(i,j)$ 表示，其中 m 是方阵 P 的阶数，括号里面表示操作（二元表示交换或者作和 [后 + 前]，一元表示数乘）.

命题 1 给定数域 K 上的 $m\times n$ 矩阵 A，则有:

(i) $P_m(i,j)A$ 为互换 A 的 i，j 两行；$AP_n(i,j)$ 为互换 A 的 i，j 两列；

(ii) $P_m(c\cdot i)A$ 为把 A 的第 i 行乘以 $c\neq0$；$AP_n(c\cdot i)$ 为把 A 的第 i 列乘以 $c\neq0$；

(iii) $P_m(k\cdot i,j)A$ 为把 A 的第 j 行加上第 i 行的 k 倍；$AP_n'(k\cdot i,j)$ 为把 A 的第 j 列加上第 i 列的 k 倍.

因此根据前面矩阵可以转化为标准形的讨论可知，任何矩阵 A 都可以写作

$$A = P_1P_2\cdots P_sDQ_1Q_2\cdots Q_t$$

，其中 D 是 A 的标准形.
当 D 是一个 n 阶单位矩阵时，我们可以推出：**方阵 A 满秩的充要条件是 A 可以表示为有限个初等矩阵的乘积**.

定义 1 给定数域 K 上的两个 $m \times n$ 矩阵 A,B，若 A 经过有限次初等行、列变换可以得到 B，则称 B 与 A **相抵**.

命题 2 给定数域 K 上 2 个 $m \times n$ 矩阵 A,B，下面的命题等价：

(i) B 与 A 相抵；

(ii) $r(A) = r(B)$;

(iii) 存在 m 阶满秩方阵 P 及 n 阶满秩方阵 Q，使 $B = PAQ$.

逆矩阵
注意，逆矩阵的定义仅对 n 阶方阵有用.

命题 1 设 A 是数域 K 上的 n 阶方阵. 如果存在 K 上的 n 阶方阵 B, B_1，使：

$$AB = B_1A = E$$

则 $B_1 = B$，即 A 可逆，且逆矩阵是 B.(直接在上式中替换 E 为 AB, B_1A 即可)，这个命题也间接说明了逆矩阵存在的唯一性
命题 2 设 A 是数域 K 上的 n 阶方阵，则 A 可逆的充要条件是 A 是满秩的.(利用 $r(AB) \le r(A)$ 以及 A 的初等变换分解) 事实上由这条命题可以推出命题 1 只要成立 $AB = E$或$BA = E$ 之一即可.
命题 3 设 A,B 是数域 K 上的两个可逆 n 阶方阵，则有：

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

(2) AB 可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(3) A’ 可逆，且 $(A')^{-1} = (A^{-1})'$;

(4) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k = A^{-k}$.

实际中找一个矩阵的逆矩阵的方法，可以是：给定一个 $n \times n$ 矩阵 A 和单位矩阵 E，则有：

- 把 A 和 E 并排放在一起，排成一个 $n \times 2n$ 矩阵：$(A \mid E)$;
- 对上面的 $n \times 2n$ 矩阵做初等行变换（不能做列变换），把左边的 A 化为 E 时，右边 E 的位置上所出来的就是 A^{-1}. 用图式表示，就是

$$(A \mid E) \to (E \mid A^{-1}).$$

例如，解方程：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然，有

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

但处理这类问题实际上可以不必先计算逆矩阵. 设 A 是一个 n 阶可逆方阵，B 是 $n \times s$ 矩阵，要求一个 $n \times s$ 矩阵 X，使

$$AX = B.$$

（显然，这样的 X 必存在，例如不难验证 $A^{-1}B$ 就是）. 已知有初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_t$，使

$$P_1P_2\cdots P_tA = E,$$

把这些初等矩阵左乘上面的矩阵方程，得

$$P_1P_2\cdots P_tAX = P_1P_2\cdots P_tB,$$

即

$$X = P_1P_2\cdots P_tB.$$

比较 (1)，(2) 两式可知：如果用一系列初等行变换把 A 化为 E，同时把这些初等行变换施加在 B 上，所得的结果即为 X 的解. 用图式表示，就是

$(A \mid B) \to (E \mid X)$.

该例具体计算如下：

$$(A \mid B)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

现在我们重新证明前面一个命题：给定数域 K 上 $m\times n$ 矩阵 A 和 $n\times s$ 矩阵 B，则，$r(AB)\geqslant r(A)+r(B)-n$.

证明. 若 $A=0$，则 $AB=0$，于是 $r(AB)=r(A)=0$，而 $r(B)\leqslant n$. 不等式显然成立. 下面设 $A\neq 0$。按前面的讨论，存在 m 阶初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ 及 n 阶初等矩阵 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_t$，使 $P_1P_2\cdots P_sAQ_1Q_2\cdots Q_t=D$ 为 A 在初等变换下的标准形. 令 $P=P_1P_2\cdots P_s, Q=Q_1Q_2\cdots Q_t$，则 $PAQ=D$。按命题 5.2，P,Q 均为满秩方阵. 又 $r(AB)=r(PAB)=r((PAQ)Q^{-1}B)=r(DB_1)$, 这里 $B_1=Q^{-1}B$，现在 $r(D)=r(A)$，$r(B_1)=r(B)$. 根据上面叙述

$$
DB_1=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1s}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2s}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{ns}\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1s}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2s}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{r1}&b_{r2}&\cdots&b_{rs}\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}
$$

DB_1 的秩等于 B_1 前 r 行的秩，DB_1 前 r 个行向量的极大线性无关部分组添加 B_1 的后 $n-r$ 个行向量即可线性表示 B_1 的各个行向量。故可得 $r(B_1)\leqslant r(DB_1)+(n-r)$。于是（注意 $r=r(D)=r(A)$）$r(AB)=r(DB_1)\geqslant r(B_1)+r-n=r(B)+r(A)-n$. □

n 阶对称矩阵

反对称矩阵 设 $A=(a_{ij})$ 是数域 K 上的 n 阶方阵. 如果 $A'=-A$, 则称 A 为 n 阶反对称矩阵. A 是 n 阶反对称矩阵的充分必要条件是 $a_{ij}=-a_{ji}$ $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$. 由此推出 $a_{ii}=-a_{ii}$，即 $a_{ii}=0$. 故反对称矩阵主对角线上元素全为 0，关于主对角线对称位置的元素互为相反数.

上三角矩阵

下三角矩阵

6 分块矩阵

分块矩阵的乘法

准对角矩阵 称数域 K 上的分块形式的 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

为**准对角矩阵**，其中 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为 n_i 阶矩阵，且 $n_1+n_2+\cdots+n_s=n$(除了 A_i 位置，其他位置全是小块零矩阵).

命题 1 n 阶准对角矩阵有如下性质：

(1) 对两个同类型的 n 阶准对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{bmatrix},$$

（其中 $A_i, B_i(i=1,2,\cdots,s)$ 同为 n_i 阶方阵），有

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sB_s \end{bmatrix}.$$

2) $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A_1) + \mathrm{r}(A_2) + \cdots + \mathrm{r}(A_s)$;

3) A 可逆 $\Leftrightarrow A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都可逆，且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

（A 可逆等价于秩为 n，只能是对角线上的分块都是满秩）

分块矩阵的秩

命题 2 给定数域 K 上的分块矩阵

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

, 其中 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $k \times l$ 矩阵，则

$$r(A) + r(B) \le r(M)$$

证明. 设 A 在初等变换下的标准形为

$$D_1=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad r=\mathrm{r}(A);$$

又设 B 在初等变换下的标准形为

$$D_2=\begin{bmatrix}E_s & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad s=\mathrm{r}(B).$$

那么，对 M 前 m 行前 n 列作初等变换，对它的后 k 行后 l 列也作初等变换可把 M 化为

$$M_1=\begin{bmatrix}D_1 & C_1\\ 0 & D_2\end{bmatrix}.$$

现在利用 D_1 左上角的 1 经列初等变换消去它右边 C_1 位置中的非零元；再用 D_2 左上角的 1 经行初等变换消去它上面 C_1 处的非零元素，于是把 M_1 再化作

$$M_2=\begin{bmatrix}E_r & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_2\\ 0 & 0 & E_s & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

则有

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(M)=\mathrm{r}(M_1)=\mathrm{r}(M_2)=r+s+\mathrm{r}(C_2)\geqslant r+s\\ =\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B).\end{aligned}$$

□

推论 给定数域 K 上的分块矩阵 $M=\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & B\end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix}A & 0\\ C & B\end{bmatrix}$, 其中 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $k\times l$ 矩阵。

当 $\mathrm{r}(A)=m,\mathrm{r}(B)=k$ 时，$\mathrm{r}(M)=\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$;

当 $\mathrm{r}(A)=n,\mathrm{r}(B)=l$ 时，$\mathrm{r}(N)=\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$.

命题 3 设 A 是数域 K 上的 $m\times n$ 矩阵，B 是 K 上的 $n\times k$ 矩阵，C 是 K 上的 $k\times s$ 矩阵，则 $\mathrm{r}(AB)+\mathrm{r}(BC)\leqslant\mathrm{r}(ABC)+\mathrm{r}(B)$.

证明. 令

$$M=\begin{bmatrix}AB & 0\\ B & BC\end{bmatrix}.$$

则由命题 6.1 有 $\mathrm{r}(AB)+\mathrm{r}(BC)\leqslant\mathrm{r}(M)$. 但

$$\begin{bmatrix}E_m & -A\\ 0 & E_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}AB & 0\\ B & BC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_k & -C\\ 0 & E_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -ABC\\ B & 0\end{bmatrix}=N.$$

显然有

$$\mathrm{r}(N)=\mathrm{r}(B)+\mathrm{r}(-ABC)=\mathrm{r}(ABC)+\mathrm{r}(B).$$

又由推论知

$$\begin{bmatrix} E_m & -A \\ 0 & E_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E_k & -C \\ 0 & E_s \end{bmatrix}$$

分别为满秩 $m+n$ 阶方阵及满秩 $k+s$ 阶方阵，又有 $\mathrm{r}(N)=\mathrm{r}(M)$. 故

$$\mathrm{r}(ABC)+\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(N)=\mathrm{r}(M)\geqslant \mathrm{r}(AB)+\mathrm{r}(BC).$$

□

命题再证 设 A 是数域 K 上的 $m\times n$ 矩阵，B 是 K 上的 $n\times s$ 矩阵，则 $r(A)+r(B)-n\leqslant r(AB)$.

证明. 按命题 3 有

$$\begin{aligned} r(A)+r(B)&=r(AE_n)+r(E_nB) \\ &\leqslant r(AE_nB)+r(E_n)=r(AB)+n. \end{aligned}$$

□

分块矩阵求逆

给定数域 K 上的 n 阶分块方阵

$$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

其中 A 为 k 阶可逆方阵。我们有

$$\begin{aligned} N&=\begin{bmatrix} E_k & 0 \\ -CA^{-1} & E_{n-k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_k & -A^{-1}B \\ 0 & E_{n-k} \end{bmatrix} \\ &=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

根据命题 6.1 的推论 2，

$$\begin{bmatrix} E_k & 0 \\ -CA^{-1} & E_{n-k} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E_k & -A^{-1}B \\ 0 & E_{n-k} \end{bmatrix}$$

均为满秩 n 阶方阵，故 $r(M)=r(N)=r(A)+r(D-CA^{-1}B)$. 若 $r(M)=n$, 令 $D_1=D-CA^{-1}B$, 则 $r(D_1)=n-k$, 故当 M 可逆时, D_1 也可逆。而

$$\begin{aligned} N^{-1}&=\begin{bmatrix} E_k & -A^{-1}B \\ 0 & E_{n-k} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} E_k & 0 \\ -CA^{-1} & E_{n-k} \end{bmatrix}^{-1} \\ &=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D_1^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

于是

$$M^{-1}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}E_k & -A^{-1}B\\ 0 & E_{n-k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^{-1} & 0\\ 0 & D_1^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_k & 0\\ -CA^{-1} & E_{n-k}\end{bmatrix}.$$

只要计算出两个低阶方阵 A, D_1 的逆矩阵 A^{-1} 和 D_1^{-1}，代入上面公式，即可求得高阶方阵 M 的逆。

7 行列式

平行六面体的有向体积

给定 $\mathbb{R}^3$ 中三个向量

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),$$

$$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3),$$

$$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3).$$

以它们为共顶点棱组成空间中一个平行六面体. 这个平行六面体用如下三阶方阵表示：

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}.$$

那么，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三向量的混合积 $V=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 表示这个平行六面体的有向体积，其绝对值等于该平行六面体的体积。当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成右手系时取正号，反之取负号。我们把它记为

$$V=|A|=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

按照点乘、叉乘的坐标计算公式，有

$$V=|A|=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

$$=a_1\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}.$$

我们把 $|A|$ 称为三阶方阵 A 的行列式。所以，一个 $\mathbb{R}$ 上三阶方阵 A 的行列式 $|A|$ 是刻画该三阶方阵（现在代表三维几何空间中一个平行六面体）特性的一个重要数据，它是这个三阶方阵所代表的平行六面体的有向体积.

(用到 $c=a\times b=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$，而 2 阶行列式就是被引入用来描述这个叉乘中每一项的运算符号. 向量叉乘有如下性质：

(i) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(ii) $(k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2)\times\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b}$;

(iii) $\boldsymbol{a}\times(l_1\boldsymbol{b}_1+l_2\boldsymbol{b}_2)=l_1\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1+l_2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2$.

)

行列式函数

考查数域 K 上全体 n 阶方阵所成的集合 $M_n(K)$. 从集合 $M_n(K)$ 到数域 K 的一个映射 f 称为定义在 $M_n(K)$ 上的一个**数量函数**.

定义 1 设 f 是定义在 $M_n(K)$ 上的一个数量函数，满足如下条件：对 K^n 中任意向量 $a_1,a_2,\cdots,a_n,a$（写成横排形式）以及 K 中任意数 λ，都有

$$f\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_i+a\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=f\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_i\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}+f\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix},$$

$$f\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ \lambda a_i\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=\lambda f\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_i\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}.$$

(这里 $i=1,2,\cdots,n$,a_i 是行向量，下文的 β_i 都表示列向量)，则称 f 为 $M_n(K)$ 上一个**行线性函数**.

设 g 是定义在 $M_n(K)$ 上一个数量函数，满足如下条件：对 K^n 中任意向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta$（写成竖列形式）以及 K 中任意数 λ，都有

$$g(\beta_1,\cdots,\beta_j+\beta,\cdots,\beta_n)=g(\beta_1,\cdots,\beta_j,\cdots,\beta_n)+g(\beta_1,\cdots,\beta,\cdots,\beta_n),$$

$$g(\beta_1,\cdots,\lambda\beta_j,\cdots,\beta_n)=\lambda g(\beta_1,\cdots,\beta_j,\cdots,\beta_n).$$

(这里 $j=1,2,\cdots,n$)，则称 g 为 $M_n(K)$ 上一个**列线性函数**.

如果 $A\in M_n(K)$，且 A 有一行向量为 0，于是该行向量可以写成 0α，则对任意行线性函数 f，有 $f(A)=0\cdot f(A)=0$. 同样，若 A 有一列向量为 0，则对任意列线性函数 g，有 $g(A)=0$.

如果 $M_n(K)$ 上一个列线性函数 f 满足如下条件：当 $A\in M_n(K)$ 有两列元素相同时（这时当然要 $n\geq 2$），必有 $f(A)=0$，则 f 称为**反对称**的列线性函数. 类似地可以定义反对称的行线性函数.

命题 1 设 f 是 $M_n(K)(n\geq 2)$ 上的反对称列（行）线性函数，那么成立如下性质：

(1) 设将 $A\in M_n(K)$ 的 i,j 两列（行）互换得出方阵 B，则 $f(B)=-f(A)$;

(2) 设将 $A \in M_n(K)$ 的第 j 列（行）加上其第 i 列（行）的 λ 倍 (λ 为 K 中任意取定的数) 得出方阵 B，则有 $f(B) = f(A)$

推论 1 设 f, g 是 $M_n(K)$ 上两个反对称列线性函数，且对某个 $A \in M_n(K)$ 有 $f(A) = g(A)$. 设 A 经有限次初等变换变为方阵 B，则仍有 $f(B) = g(B)$.(注意每次变换带来的双线性函数的符号变化是相同的)

推论 2 设 f 是 $M_n(K)(n \geq 2)$ 上的列（行）线性函数. 则 f 为反对称的充要条件是对 K 上任何不满秩 n 阶方阵 A 都有 $f(A) = 0$.

定义 2 设 f 是 $M_n(K)$ 上一个列线性函数且满足如下条件:

(i) 如果 $A \in M_n(K)$ 不满秩，则 $f(A) = 0$;

(ii) 对 $M_n(K)$ 内单位矩阵 E，有 $f(E) = 1$.

则称 f 为 $M_n(K)$ 上的一个**行列式函数**.

对 K 上任意一阶方阵 $A = (a_{11}) = a_{11}E$，定义 $f(A) = a_{11}$，数量函数 f 显然为 $M_1(K)$ 上的行列式函数. 反之，对 $M_1(K)$ 上任意行列式函数 g，按定义有 $g(A) = a_{11}g(E) = a_{11}$. 故 $g(A) \equiv f(A)$. 即此 f 为 $M_1(K)$ 上唯一的行列式函数. 下面只要讨论 $n \geq 2$ 的情况：行列式函数定义中的条件 (i) 等价于 f 为反对称列线性函数.

命题 2 $M_n(K)$ 上的行列式函数是唯一的

证明. 设 f 与 g 是 $M_n(K)$ 上两个行列式函数，我们需要证明：对任意 $A \in M_n(K)$，有 $f(A) = g(A)$.

(i) 如果 $r(A) < n$，那么按定义有 $f(A) = g(A) = 0$.

(ii) 如果 $r(A) = n$，由于 A 可表为 n 阶初等矩阵 $P_1, \cdots, P_m$ 的乘积：$A = P_1 \cdots P_m = EP_1 \cdots P_m$. 上式表明 A 可由单位矩阵 E 做 m 次初等列变换得出. 因为 f, g 均为 $M_n(K)$ 上反对称列线性函数，按命题 1 的推论 1，由 $f(E) = g(E) = 1$ 可推出 $f(A) = g(A)$. □

命题 3 设 $f(A)$ 是 $M_n(K)$ 上的行列式函数，则对一切 $A \in M_n(K)$ 有 $f(A') = f(A)$，即 A 和它的转置 A' 函数值相同.

证明. 当 $n = 1$ 时 $A' = A$，命题自然成立. 下面设 $n \geqslant 2$.

若 $r(A) < n$，则 $f(A) = 0$. 此时 $r(A') = r(A) < n$，故

$$f(A') = 0 = f(A).$$

若 $r(A) = n$，则存在 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_m$，使

$$A = EP_1P_2 \cdots P_m. \tag{1}$$

令 $B_i = EP_1P_2\cdots P_i(i=1,2,\cdots,m)$. 设 $B_0=E$，则 $B_i = B_{i-1}P_i$. 由 $B_{i-1}P_i$ 是对 B_{i-1} 作一次初等列变换. 因为 $f(A)$ 为反对称列线性函数，按命题 1 及列线性，$f(B_i)=f(B_{i-1}P_i)=\epsilon_i f(B_{i-1})$，其中

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1, & \text{若} P_i \text{ 是第一类初等矩阵} P_n(k,l), \\ \lambda, & \text{若} P_i \text{ 是第二类初等矩阵} P_n(\lambda\cdot k), \\ 1, & \text{若} P_i \text{ 是第三类初等矩阵} P_n(\lambda\cdot k,l). \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} f(A) = f(B_m) &= \epsilon_m f(B_{m-1}) = \epsilon_m\epsilon_{m-1}f(B_{m-2}) = \cdots \\ &= \epsilon_m\epsilon_{m-1}\cdots\epsilon_1 f(B_0) = \epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_m. \end{aligned}$$

如设 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 中有 r 个第一类初等矩阵，s 个第二类初等矩阵，则由上式得

$$f(A) = (-1)^r\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s.$$

现在由 (1) 式得

$$A' = EP'_mP'_{m-1}\cdots P'_2P'_1.$$

如果 P 是第一类或第二类初等矩阵，则 $P'=P$. 而当 P 是第三类初等矩阵时，P' 也是第三类初等矩阵. 于是 $P'_m,P'_{m-1},\cdots,P'_2,P'_1$ 中恰有与 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 中相同的 r 个第一类初等矩阵和 s 个第二类初等矩阵，于是 $f(A')=(-1)^r\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s = f(A)$. □

上述命题表明：行列式函数 $f(A)$ 如果对矩阵的列具有某种性质，那么它对行也具有相同的性质，即行与列处于平等的地位. 特别地，我们有：

命题 4 设 $f(A)$ 是 $M_n(K)$ $(n\geqslant 2)$ 上的行列式函数，则 $f(A)$ 是反对称的行线性函数.

证明. 设 A 的第 i 个行向量 $a_i=\lambda\alpha+\mu\beta$ (这里 α,β 看做 $1\times n$ 矩阵), 则 A' 的第 i 列为 $a'_i=\lambda\alpha'+\mu\beta'$. 设把 A 的第 i 行分别换成 α,β 后得到 n 阶方阵 A_1,A_2，由前命题与 f 的列线性，有

$$f(A) = f(A') = \lambda f(A'_1) + \mu f(A'_2)$$

$$= \lambda f(A_1) + \mu f(A_2).$$

这说明 f 是线性函数. 如果 A 有两行向量相同，则 A' 有两列向量相同，而 f 是反对称列线性函数，故

$$f(A) = f(A') = 0.$$

这就表明 f 是反对称行线性函数. □

定义 3 用记号 $N(\cdots,i,\cdots,j,\cdots)$ 表示排列 $\cdots,i,\cdots,j,\cdots$ 中的逆序数.

命题 5 对 n 个正整数的一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$，互换排列中的两个数 j_k,j_t 的位置，有：

$$(-1)^{N(\cdots j_k\cdots j_t\cdots)} = -(-1)^{N(\cdots j_k\cdots j_t\cdots)}$$

省略号的地方表示没有被替换.(思路：利用冒泡排序原理且发现每次相邻的前后对换只改变一次正负号)

定义 4 给定数域 K 上的 n 阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

令

$$\det(A)=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn},$$

其中和号表示对前 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的所有可能排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

$\det(A)$ 是 $M_n(K)$ 上一个数量函数. 使用如下记号来表示这个数量函数:

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$\det(A)$ 定义式的构成可概述如下:

1) $\det(A)$ 是由 $n!$ 个项连加而成.

2) 每项是矩阵 A 中 n 个不同行且不同列的元素的乘积. 如把它们按列角标的自然顺序排列，则其一般形式为

$$a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数的一个排列（如果矩阵 A 的行角标不用 $1,2,\cdots,n$ 表示，而用其他自然数表示，那就改用其他自然数的排列）. 这样的排列共有 $n!$ 个，就对应 det 定义式中包含的 $n!$ 项;

3）每项前面应带正、负号。如果 $i_1i_2\cdots i_n$ 是一个偶排列，则 $a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$ 这一项前面带正号；而如果 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇排列，则该项前面带负号.

下面我们将证明：$\det(A)$ 就是 $M_n(K)$ 上的行列式函数，因此，我们今后称 $\det(A)$ 为方阵 A 的行列式或简称它是一个 n 阶行列式.

命题 6 $\det(A)$ 是 $M_n(K)$ 上唯一的行列式函数.

证明. 当 $n=1$ 时 $\det(A)=a_{11}$，前面已指出结论成立. 下面设 $n\geqslant 2$.

(i) 证 $\det(A)$ 为列线性函数。设 A 第 k 列为两向量线性组合:

$$A=(a_1 \quad \cdots \quad \lambda\alpha+\mu\beta \quad \cdots \quad a_n),$$

$$A_1=(a_1 \quad \cdots \quad \alpha \quad \cdots \quad a_n),$$

$$A_2 = (a_1 \quad \cdots \quad \beta \quad \cdots \quad a_n),$$

即 A 的第 k 个列向量

$$a_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

那么

$$\det(A) = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} \cdots (\lambda a_{i_k} + \mu b_{i_k}) \cdots a_{i_n n}$$

$$= \lambda \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} \cdots a_{i_k} \cdots a_{i_n n}$$

$$+\mu \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} \cdots b_{i_k} \cdots a_{i_n n}$$

$$= \lambda \det(A_1) + \mu \det(A_2),$$

(ii) 证 $\det(A)$ 反对称. 设 A 的 k, l 两列向量相同:

$$\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1l} \\ a_{2l} \\ \vdots \\ a_{nl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

考查 $\det(A)$ 表达式中如下两项（注意 k, l 为取定正整数）：

$$(-1)^{N(i_1 \cdots i_k \cdots i_l \cdots i_n)} a_{i_1 1} \cdots a_{i_k k} \cdots a_{i_l l} \cdots a_{i_n n}$$
$$= (-1)^{N(i_1 \cdots i_k \cdots i_l \cdots i_n)} a_{i_1 1} \cdots a_{i_k} \cdots a_{i_l} \cdots a_{i_n n};$$
$$(-1)^{N(i_1 \cdots i_l \cdots i_k \cdots i_n)} a_{i_1 1} \cdots a_{i_k l} \cdots a_{i_l k} \cdots a_{i_n n}$$
$$= (-1)^{N(i_1 \cdots i_l \cdots i_k \cdots i_n)} a_{i_1 1} \cdots a_{i_l} \cdots a_{i_k} \cdots a_{i_n n}.$$

由命题 5 知上两项的结果相加为 0，这表明此时

$$\det(A) = 0.$$

(iii) 若 $A = E$，则

$$a_{i_k k} = \begin{cases} 1, & 若 i_k = k, \\ 0, & 若 i_k \neq k. \end{cases}$$

由此立得 $\det(E) = (-1)^{N(1\ 2 \cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = 1$.

综合上面三条结论和命题 2 立知 $\det(A)$ 是 $M_n(K)$ 上唯一的行列式函数. $\square$

推论 3 设 $A=(a_{ij})$ 为数域 K 上的 n 阶方阵，则

$$|A|=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

其中和式为对前 n 个自然数的所有可能排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 求和.

证明. 设 $A'=(a'_{ij})$，则 $a'_{ij}=a_{ji}$. 按命题 3 有

$$\begin{aligned}|A|=|A'|&=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a'_{i_11}a'_{i_22}\cdots a'_{i_nn}\\&=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.\end{aligned}$$

□

可见行列式的完全展开式的 $n!$ 个项，每一项也可以按照行角标的自然顺序排序，然后对列角标的所有可能排列求和.

对数域 K 上 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$，去掉 A 的第 i 行第 j 列得到的 $n-1$ 阶方阵记做 $A_j^{(i)}$. 我们有

$$A_k^{(1)}=\begin{bmatrix}a_{21}&\cdots&a_{2(k-1)}&a_{2(k+1)}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n(k-1)}&a_{n(k+1)}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}.$$

按照上面的推论，我们有

$$\det(A_j^{(i)})=|A_j^{(i)}|=\sum_{j_2j_3\cdots j_n}(-1)^{N(j_2j_3\cdots j_n)}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{nj_n},\tag{3}$$

其中 $j_2j_3\cdots j_n$ 是 $n-1$ 个自然数 $1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n$ 的一个排列，和号表示对所有可能的 $(n-1)!$ 个这种排列求和。

命题 7 对数域 K 上的 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$，我们有

$$\det(A)=|A|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}\det(A_k^{(1)}).$$

证明. 设 $\epsilon_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是 K 上 n 维向量空间 K^n 的坐标向量。若设 A 的行向量组是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^n a_{1k}\epsilon_k\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{bmatrix}.$$

按命题 4, $\det(A)$ 是行线性函数，故

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \det \begin{bmatrix} \epsilon_k \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \tag{4}$$

这里

$$\begin{bmatrix} \epsilon_k \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2(k-1)} & a_{2k} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(k-1)} & a_{nk} & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

按上面的推论，有（注意第一行仅第 k 个元素等于 1，其他元素均为 0）

$$\det \begin{bmatrix} \epsilon_k \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \sum_{j_2 j_3 \cdots j_n} (-1)^{N(k j_2 j_3 \cdots j_n)} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n},$$

其中和号是对 $n-1$ 个自然数 $1, 2, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n$ 的所有可能的排列 $j_2 j_3 \cdots j_n$ 求和，显然有

$$N(k j_2 j_3 \cdots j_n) = k - 1 + N(j_2 j_3 \cdots j_n)$$

（因为 $j_2, j_3, \cdots, j_n$ 中恰有 $k-1$ 个数小于 k）。利用上面关于 $\det(A_j^{(i)})$ 的表达式 (3)，得

$$\det \begin{bmatrix} \epsilon_k \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = (-1)^{k-1} \sum_{(j_2 j_3 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_2 j_3 \cdots j_n)} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}$$

$$= (-1)^{k+1} \det(A_k^{(1)}).$$

以此代入 (4) 式即得

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \det(A_k^{(1)}).$$

□

命题 8 我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

行列式的性质

1. 行列互换，行列式的值不变，亦即 $|A'| = |A|$.
2. 两行（列）互换，行列式值变号.
3. 若行列式中某行（列）每个元素分为两个数之和（即某行（列）向量为两向量之和），则该行列式可关于该行（列）拆开成两个行列式之和。拆开时其他各行（列）均保持不动.
4. 行列式中某行（列）有公因子 $\lambda \in K$ 时，λ 可提出行列式外.
5. 把行列式的第 j 行（列）加上第 i 行（列）的 k 倍后，其值不变.
6. 一个 n 阶方阵 A 不满秩（即 $r(A) < n$）时，其行列式为 0. 特别地，如果 A 有两行（列）元素相同时，$|A| = 0$; 或 A 有一行（列）元素全为 0 时，$|A| = 0$.

给定 $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. 前面用 $A_j^{(i)}$ 表示划去 A 的第 i 行第 j 列后所剩的 $n-1$ 阶方阵，其行列式 $|A_j^{(i)}|$ 称为 A 中元素 a_{ij} 的**余子式**。为了简单起见，我们把 a_{ij} 的余子式简单地写成 M_{ij}(只要从上下文可以清楚知道是哪个元素的余子式).

定义 5 设 $A = (a_{ij}$ 是一个数域 K 上的 n 阶方阵，M_{ij} 为第 i 行等 j 列元素 a_{ij} 的余子式. 令

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

称之为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.(后文若涉及这个概念依然采用这个符号)

命题 9 n 阶行列式 $|A|$ 可按任意一行和任意一列展开，展开公式为

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n);$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n);$$

证明. 首先证明对第 i 行的展开公式，再利用行列式性质 1 来证明对任一列的展开公式.$i = 1$ 时即为命题 7，已经成立. 下面设 $i \geqslant 1$.

如果把矩阵 A 的 i 行与 $i-1$ 行互换，再与 $i-2$ 行互换，$\cdots$，最后与第 1 行互换，共经过 $i-1$ 次相邻两行的互换，此时原第 i 行换到第 1 行，而其他行则各向下推移一行，它们之间的相对位置没有变化. 最后得到的矩阵记做 $\overline{A}$. 由行列式性质 2，$|A| = (-1)^{i-1}|\overline{A}|$。$|A|$ 和 $|\overline{A}|$ 的余子式分别记做 M_{ij} 和 $\overline{M}_{ij}$，它们的代数余子式分别记做 A_{ij} 和 $\overline{A}_{ij}$. 显然有

$$\overline{M}_{1k} = M_{ik} \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

因而

$$\overline{A}_{1k} = (-1)^{1+k}\overline{M}_{1k} = (-1)^{1+k}M_{ik} = (-1)^{1+i}(-1)^{i+k}M_{ik} = (-1)^{1+i}A_{ik}.$$

把 $|\overline{A}|$ 按第一行展开（注意 $|\overline{A}|$ 第一行元素为 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$）

$$\begin{aligned}|\overline{A}| &= a_{i1}\overline{A}_{11} + a_{i2}\overline{A}_{12} + \cdots + a_{in}\overline{A}_{1n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{A}_{1k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{i+1}A_{ik}\end{aligned}$$

$$= (-1)^{i+1}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

而

$$\begin{aligned}|A| &= (-1)^{i-1}|\overline{A}| \\ &= (-1)^{i-1}\cdot(-1)^{i+1}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}\end{aligned}$$

下面证明 $|A|$ 对其第 j 列元素的展开公式.A 的第 j 列为 A' 的第 j 行，而 $(A\binom{k}{j})' = A'\binom{j}{k}$，故按行列式性质 1 及 A' 对第 j 行的展开公式，有

$$\begin{aligned}|A| &= |A'| \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{kj}|A'\tbinom{j}{k}| \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{j+k}|A\tbinom{k}{j}| \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}.\end{aligned}$$

□

【例】证明范德蒙德（Vandermonde）行列式：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j)$$

证明. 采用数学归纳法. 当 $n=2$ 时，有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1,$$

命题成立. 设对 $n-1$ 阶范德蒙德行列式命题成立，证明对 n 阶范德蒙德行列式 $|A|$，命题也成立.

在 $|A|$ 中将第 n 行减去第 $n-1$ 行的 a_1 倍，第 $n-1$ 行又减去第 $n-2$ 行的 a_1 倍，……即由下而上依次把每一行减去它上面一行的 a_1 倍，有

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1a_2 & a_3^2 - a_1a_3 & \cdots & a_n^2 - a_1a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}
$$

$$
= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.
$$

最后得到的是一个 $n-1$ 阶范德蒙德行列式. 根据归纳假设，它等于所有可能的差

$$
(a_i - a_j) \quad (2 \le j < i \le n)
$$

的连乘积. 而包含 a_1 的差 $a_i - a_1$ $(i = 2, 3, \cdots, n)$ 全在前面的因子中出现了，因之，命题对 n 阶范德蒙德行列式也成立. □

命题 10 给定数域 K 上分块 n 方阵

$$
M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix},
$$

其中 A 为 k 阶方阵. 则 $|M| = |A| \cdot |B|$.

证明. 对 k 作数学归纳法. 当 $k = 1$ 时对第 1 列展开：$M = \begin{bmatrix} a_{11} & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$, $|M| = a_{11}|B| = |A| \cdot |B|$.

现设对 A 为 k 阶方阵时命题成立，当 A 为 $k+1$ 阶方阵时，把 $|M|$ 按第 1 列展开：

$$
|M| = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} a_{i1} |M\binom{i}{1}|.
$$

注意到 $M(i_1) = \begin{bmatrix} A(i_1) & C_i \\ 0 & B \end{bmatrix}$, 按归纳假设，有 $|M(i_1)| = |A(i_1)||B|$.

代回 $|M|$ 的表达式，有 $|M| = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} a_{i1} |A\binom{i}{1}||B| = |A| \cdot |B|$. □

推论 4 给定数域 K 上的 n 阶准对角矩阵

$$
A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix},
$$

则

$$
|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|.
$$

命题 11 给定实数域上的 n 阶方阵

$$A(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{bmatrix},$$

其中 $a_{ij}(t)$ 为开区间 (a,b) 内的可微函数. 则 $|A(t)|$ 也是 (a,b) 内的可微函数，且

$$\frac{d}{dt}|A(t)|=\sum_{i=1}^{n}|A_i(t)|.$$

证明. 注意到：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|A|&=\frac{d}{dt}\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}\cdot a_{1i_1}(t)a_{2i_2}(t)\cdots a_{ni_n}(t)\\ &=\sum_{k=1}^{n}\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}(t)\cdots a'_{ki_k}(t)\cdots a_{ni_n}(t)\\ &=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a'_{k1}(t) & a'_{k2}(t) & \cdots & a'_{kn}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

□

命题 11 表明，对于由函数作元素的 n 阶方阵的行列式求微商时，等于分别对每一行求微商再连加. 由于行列式中行与列是平等的，所以也可以分别对每一列求微商再连加起来.

命题 12 设 A_0 是数域 K 上的一个 n 阶方阵，则 A_0 满秩的充分必要条件是其行列式 $|A_0|\neq 0$.

证明. 必要性：$n=1$ 时显然成立. 设 $n\geqslant 2$. 在 $M_n(K)$ 上定义函数 $f(A)\equiv 0$. 它显然是反对称列线性函数. 若 $r(A_0)=n$, 但 $\det(A_0)=0$, 则 $\det(A_0)=f(A_0)=0$. 而 A_0 可单用初等列变换化为 E, 再由推论知 $\det(E)=f(E)=0$, 矛盾. 故 $\det(A_0)\neq 0$.

充分性：因为 $\det(A)$ 为行列式函数, 由定义可知. □

现在来讨论 n 个未知量 n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0.\end{cases}$$

根据以前的推论，上面的齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是其系数矩阵 A 的秩 $r(A)$ 小于未知量个数 n. 现在 A 是一个 n 阶方阵，由命题 3.1, $r(A) < n$ 的充分必要条件是 $|A| = 0$. 故有如下结论.

命题 13 数域 K 上的 n 个未知量 n 个方程的齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是其系数矩阵的行列式为零.

定义

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当} i = j \text{ 时}, \\ 0, & \text{当} i \neq j \text{ 时}. \end{cases}$$

这个记号称为克朗涅克 (Kronecker) 记号. 利用这个记号，许多数学式子就可以写的比较简洁. 例如，单位矩阵 E 可以写成 (δ_{ij})，即 E 的 i 行 j 列元素为 δ_{ij}.

命题 14 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的行列式 $|A|$ 和它的代数余子式有如下关系：

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \delta_{ij}|A|,$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \delta_{ij}|A|. \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

证明. 当 $i = j$ 时上面两个等式即为命题 9. 下面来证 $i \neq j$ 的情况. 我们只要证明了第一个关于行的公式，那么，由行列式的性质 1，第二个关于列的公式就随之成立.

把 A 的第 j 行元素换成 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$，得矩阵 $\overline{A}$. $\overline{A}$ 的 i, j 两行相同，故 $|\overline{A}| = 0$. 把 $\overline{A}$ 对第 j 行展开，就有

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = |\overline{A}| = 0.$$

其中利用了 $\overline{A}$ 与 A 仅是第 j 行不相同，故 $|\overline{A}|$ 第 j 行元素的代数余子式与 $|A|$ 的第 j 行元素的代数余子式相同. □

给定数域 K 上一个 n 阶方阵 $(n \geqslant 2)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

用 $|A|$ 的代数余子式排成如下一个 n 阶方阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

(即 A^* 的 i 行 j 列处放置代数余子式 A_{ji})，A^* 称为 A 的伴随矩阵. 根据命题 14，有

$$AA^* = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} \right) = (\delta_{ij}|A|) = |A| \cdot E,$$

$$A^*A=\left(\sum_{k=1}^{n}A_{ki}a_{kj}\right)=(\delta_{ij}|A|)=|A|\cdot E.$$

如果 $|A|\neq 0$，则有

$$\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A=A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=E.$$

这表示此时 A 可逆，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*.$$

反之，若 A 可逆，则知 A 满秩，再由命题 12 知 $|A|\neq 0$，于是 $\frac{1}{|A|}A^*$ 有意义，那么，它就是 A 的逆矩阵. 故有

命题 15 n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A|\neq 0$. 在 A 可逆且 $n\geqslant 2$ 时，有

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*.$$

下面再来讨论 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}\tag{1}$$

定义系数矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

以及向量 X 和 B 分别为

$$X=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{bmatrix}.$$

则方程组可写成

$$AX=B.\tag{2}$$

现在 (1) 的系数矩阵 A 是一个 n 阶方阵. 我们有如下两个结论：

1) 方程组 (1) 有唯一解的充分必要条件是 $|A|\neq 0$。

证明. 必要性：若 $|A|\neq 0$，由 $\mathrm{r}(A)=n$，从而方程组 (1) 的增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\overline{A})=n=\mathrm{r}(A)$（因 $\overline{A}$ 只有 n 行，其秩不超过 n，而 $\mathrm{r}(\overline{A})\geq \mathrm{r}(A)=n$），故方程组有唯一解.

充分性：若方程组有唯一解，则 $r(A)=n$，从而 $|A|\neq 0$. □

2) 当 $|A| \neq 0$, 方程组 (1) 有唯一解时, 命

$$X = A^{-1}B, \tag{3}$$

代入 (2) 式, 即知 (3) 式就是方程组的唯一解.

现在用伴随矩阵表示 A^{-1}. 把命题 15 的结论代入 (3) 式, 得

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{|A|}A^*B$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n A_{k1}b_k \\ \sum_{k=1}^n A_{k2}b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n A_{kn}b_k \end{bmatrix}.$$

命

$$|A_i| = \sum_{k=1}^n A_{ki}b_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$|A_i|$ 恰为把 $|A|$ 的第 i 列换成方程组 (1) 的常数项而得的 n 阶行列式. 此时方程组 (1) 的解可表为

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} |A_1| \\ |A_2| \\ \vdots \\ |A_n| \end{bmatrix}.$$

于是我们可以得到下面的定理:

Cramer 法则 若数域 K 上的 n 个未知量 n 个方程的线性方程组 (1) 的系数矩阵的行列式 $|A| \neq 0$ 时, 则它有唯一的一组解

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

其中 $|A_i|$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是把 $|A|$ 的第 i 列换成方程组的常数项而得的 n 阶行列式.

命题 16 设 P 是 n 阶初等矩阵, B 是任一 n 阶方阵, 则 $|PB| = |P| \cdot |B|$.

证明. PB 相当于对 B 作一次初等行变换. 下面分三种情况讨论:

(i) $P = P_n(i, j)$, 则 $|P| = -1$. 而 PB 是互换 B 的 i, j 两行, 由行列式性质 2, 有 $|PB| = -|B| = |P| \cdot |B|$;

(ii) $P = P_n(c \cdot i)$, 则 $|P| = c$. 而 PB 是把 B 的第 i 行乘以 c, 由行列式性质 4, 有 $|PB| = c|B| = |P| \cdot |B|$;

(iii) $P = P_n(k \cdot i, j)$, 则 $|P| = 1$. 而 PB 是把 B 的第 j 行加上第 i 行的 k 倍, 由行列式性质 5, $|PB| = |B| = |P| \cdot |B|$. □

命题 17 对数域 K 上任意两个 n 阶方阵 A,B 有 $|AB|=|A|\cdot|B|$.(假如有一个矩阵不满秩，则用秩不等式发现乘积行列式也为 0；否则矩阵可以被表示为初等矩阵的乘积，利用命题 16 即可).

【例】给定数域 K 上的 n 阶循环矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{bmatrix},$$

试计算 A 的行列式.

解 令 $\varepsilon_k=e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 为 1 的 n 个 n 次根，即方程 $x^n=1$ 在 $\mathbb{C}$ 内的 n 个根。构造 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

因为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 两两不同，从 §2 例 2.6 知 $|B|\neq 0$.

令 $f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$ 为 K 上多项式. 我们有

$$f(\varepsilon_k)=a_1+a_2\varepsilon_k+\cdots+a_n\varepsilon_k^{n-1},$$

$$\varepsilon_kf(\varepsilon_k)=a_n+a_1\varepsilon_k+\cdots+a_{n-1}\varepsilon_k^{n-1},$$

$$\varepsilon_k^2f(\varepsilon_k)=a_{n-1}+a_n\varepsilon_k+\cdots+a_{n-2}\varepsilon_k^{n-1},$$

$$\cdots$$

$$\varepsilon_k^{n-1}f(\varepsilon_k)=a_2+a_3\varepsilon_k+\cdots+a_1\varepsilon_k^{n-1}.$$

于是

$$AB=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$=\begin{bmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2f(\varepsilon_2) & \cdots & \varepsilon_nf(\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1}f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1}f(\varepsilon_2) & \cdots & \varepsilon_n^{n-1}f(\varepsilon_n) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

两边取行列式，有

$$|A| \cdot |B| = |AB| = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n)|B|.$$

因 $|B| \neq 0$，故有

$$|A| = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n).$$

定义 6 给定数域 K 上的 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

取 $2r$ 个正整数 $i_1, i_2, \cdots, i_r, j_1, j_2, \cdots, j_r$，其中可有相同者且 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 属集合 $\{1, 2, \cdots, m\}$，$j_1, j_2, \cdots, j_r$ 属集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$. 定义

$$A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_r} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \cdots & a_{i_rj_r} \end{vmatrix},$$

即取 A 的 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行，$j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列交叉点处的 r^2 个元素组成一个 r 阶行列式，称之为 A 的一个 r **阶子式**.

命题 18 数域 K 上一个 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 m 的充要条件是它有一个 m 阶子式不为 0.

命题 19 设 A 是数域 K 上一个 $m \times n$ 矩阵. 则 $r(A) = r$ 的充要条件是 A 有一个 r 阶子式不为 0，而所有 $r+1$ 阶子式都为 0.

给定数域 K 上的 n 阶方阵 A，划去 A 的 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 行，$j_1, j_2, \cdots, j_m$ 列（这里设 $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$，$j_1 < j_2 < \cdots < j_m$）所剩 $n-m$ 方阵的行列式记做

$$A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{bmatrix}.$$

如果行角标固定不变，我们也采用如下简单记号:

$$A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{Bmatrix} = A\{j_1j_2\cdots j_m\};$$

$$A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{bmatrix} = A[j_1j_2\cdots j_m];$$

$$\omega(j_1j_2\cdots j_m) = (-1)^{j_1+j_2+\cdots+j_m}A\{j_1j_2\cdots j_m\}A[j_1j_2\cdots j_m].$$

命题 20 记号如上. 设 n 方阵 A 有 k, l 两个列向量相同. 给定自然数序列 $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_{m+1} \leqslant n$。设 $j_s = k$，$j_{s+t+1} = l$. 又设已取定 A 的 m 个行（省略不写出来），则

$$\omega(j_1\cdots j_s\cdots \hat{j}_{s+t+1}\cdots j_{m+1}) + \omega(j_1\cdots \hat{j}_s\cdots j_{s+t+1}\cdots j_{m+1}) = 0,$$

其中记号“^”表示把该数字去掉.（直接考虑交换列的行列式值符号变化即可）

Laplace 定理 给定数域 K 上的 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ $(n\geqslant 2)$。又给定 m 个自然数 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ $(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n)$，令 $i=i_1+i_2+\cdots+i_m$，则

$$|A|=(-1)^i\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_m\leqslant n}(-1)^{j_1+j_2+\cdots+j_m}$$

$$\times A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m\end{Bmatrix} A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m\end{bmatrix}.$$

(将 RHS 视为数量函数，只需证明它是行列式函数，即列线性、反对称和 $f(E)=1$.)

命题 21 给定数域 K 上的 $m\times n$ 矩阵 $(m\leqslant n)$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}.$$

取定 m 个自然数，按大小次序排列：$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n$.

又设 $j_1,j_2,\cdots,j_m$ 是这 m 个自然数的一个排列，则

$$\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_m}\\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{mj_1} & a_{mj_2} & \cdots & a_{mj_m}\end{vmatrix}=(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_m)}\begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_m}\\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \cdots & a_{2i_m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{mi_1} & a_{mi_2} & \cdots & a_{mi_m}\end{vmatrix}.$$

（利用冒泡排序的想法立证）

Binet-Cauchy 定理 设 A 是数域 K 上的 $m\times n$ 阵，B 是 K 上的 $n\times m$ 矩阵，则

$$|AB|=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n} A\begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m\end{Bmatrix} B\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m\\ 1 & 2 & \cdots & m\end{Bmatrix}.$$

证明. 若 $m>n$，则因 $r(A)\leqslant n$，有

$$r(AB)\leqslant \min\{r(A),r(B)\}\leqslant n.$$

AB 为 m 方阵，故不满秩，应有 $|AB|=0$. 而此时

$$A\begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m\end{Bmatrix}=0$$

（因 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中的自然数，共 m 个，而 $m>n$，故其中必有两个相同）. 等式成立.

下面设 $m \leqslant n$. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$，则

$$|AB| = \begin{vmatrix} \sum_{i_1=1}^n a_{1i_1}b_{i_11} & \sum_{i_2=1}^n a_{1i_2}b_{i_22} & \cdots & \sum_{i_m=1}^n a_{1i_m}b_{i_mm} \\ \sum_{i_1=1}^n a_{2i_1}b_{i_11} & \sum_{i_2=1}^n a_{2i_2}b_{i_22} & \cdots & \sum_{i_m=1}^n a_{2i_m}b_{i_mm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i_1=1}^n a_{mi_1}b_{i_11} & \sum_{i_2=1}^n a_{mi_2}b_{i_22} & \cdots & \sum_{i_m=1}^n a_{mi_m}b_{i_mm} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n \begin{vmatrix} a_{1i_1}b_{i_11} & a_{1i_2}b_{i_22} & \cdots & a_{1i_m}b_{i_mm} \\ a_{2i_1}b_{i_11} & a_{2i_2}b_{i_22} & \cdots & a_{2i_m}b_{i_mm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mi_1}b_{i_11} & a_{mi_2}b_{i_22} & \cdots & a_{mi_m}b_{i_mm} \end{vmatrix}.$$

$$= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n \begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_m} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \cdots & a_{2i_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mi_1} & a_{mi_2} & \cdots & a_{mi_m} \end{vmatrix} b_{i_1}b_{i_2}\cdots b_{i_m}.$$

如果 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 中有相同者，则上式中的行列式为 0. 对 $i_1i_2\cdots i_m$ 为 m 个不同自然数的排列，把它们改换成按大小顺序排列，于是

$$|AB| = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n} \sum_{(j_1j_2\cdots j_m)} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_m)} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_m} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mj_1} & a_{mj_2} & \cdots & a_{mj_m} \end{vmatrix} b_{j_1}b_{j_2}\cdots b_{j_m}$$

$$= \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n} A\begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m \end{Bmatrix} B\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{Bmatrix}.$$

其中上面等式中的排列 $(j_1j_2\cdots j_m)$ 是 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 的一个排列，求和号是对所有可能的这种排列求和，有

$$\sum_{(j_1j_2\cdots j_m)} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_m)} b_{j_1}b_{j_2}\cdots b_{j_m} = B\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{Bmatrix}.$$

定理证毕. □