Гимназија „Јован Јовановић Змај“

Нови Сад

Матурски рад из нумеричке математике

КОМБИНОВАНИ МЕТОД НУМЕРИЧКОГ РЕШАВАЊА ЈЕДНАЧИНА

Професор ментор:	Ученик:
др Драгослав Херцег	Предраг Кузмановић, IV-9

Нови Сад, мај 2012. год.

Предговор

Нумеричка математика представља једну од најпримењивијих грана математике, и као таква, непрекидно се развија и обогаћује новим сазнањима. За ову тему определио сам се пре свега како бих сазнао нешто више из ове области математике и тиме продубио своје знање.

Овим путем желим да изразим велику захвалност свом професору и ментору, др Драгославу Херцегу, на корисним саветима и сугестијама као и квалитетној литератури на коју ме је упутио. Такође, захваљујем му се и на предавањима на редовној настави, којима је у мени побудио интересовње за нумеричку математику и без којих овај рад не би био могућ.

С А Д Р Ж А Ј

Страна

1. УВОД

Мислим да се сваки мој колега “специјалац” који је у четвртој години средње школе слушао предмет “Нумеричка математика” код мог професора и ментора (или бар они који су редовно радили домаће задатке из тог предмета) бар једном запитао како програми попут *Mathematica*-е или MATLAB-а тако брзо и прецизно решавају за нас напорне и компликоване проблеме. Свакако да велику улогу игра рачунарски хардвер, који непрестано побољшава перформансе рачунара, али срж ових програма представља математички апарат, осмишљен од стране математичара, неретко и вековима уназад.

У математичкој подлози ових програма кључну улогу имају *нумерички методи*. У њима су имплементирани многи такви методи који се непрестано усавршавају и тако се ефиксаност ових програма све више побољшава са сваком новом верзијом. Тема овог рада је управо један такав нумерички метод: комбиновани метод.

Рад је подељен на пет поглавља. Прво поглавље представља увод у рад. У другом поглављу најпре су изнети основни појмови који ће се интензивно користити у даљем делу текста. Како се у основи комбинованог метода налазе два нумеричка метода, Њутнов метод и метод сечице, они су детаљно изложени у трећем поглављу, у одељцима 3.1 и 3.2 редом. У одељку 3.3 упоређена су ова два метода на основу неколико критеријума. Добро познавање ових метода је предуслов за испитивање комбинованог метода, који је изложен у четвртом поглављу. Најзначајнији закључци овог рада изложени су у последњем, петом поглављу.

У раду су јасно издвојене теореме и дефиниције, као и задаци који служе да илуструју и употнуне претходно изложену тероију. Крајеви доказа и решења задатака обележени су симболом ■.

2. НУМЕРИЧКО РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНА

У овом поглављу упознаћемо се са основним појмовима у вези са нумеричким решавањем једначина који ће нам бити потребни у даљем раду.

Бавићемо се реалним функцијама f једне реалне променљиве. Сваки број α за који важи $f(\alpha)=0$ називамо *решењем* или *кореном* једначине $f(x)=0$ или *нулом* функције f. Решења ћемо увек тражити у скупу реалних бројева или неком његовом подскупу. Ако је функција полином n-тог степена, тј. функција облика:

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0 ,$$

где су $a_i \in \mathbb{R}$, $i=0,1,...,n$, $n\in\mathbb{N}$ и $a_n \neq 0$ једначину $f(x)=0$ називамо *алгебарском*. Свака једначина која није алгебарска је *трансцендентна*. На пример, трансцендентне су једначине:

$$\ln x+\sin x+\cos x=0, \qquad e^x + x = 0, \qquad \log x + x^2 = 0 .$$

Као што знамо, постоје ефикасни поступци (алгоритми) за егзактно решавање неких алгебарских једначина. Линеарна алгебарска једначина решава се тривијално док се квадратна решава добро познатом формулом:

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2} .$$

Радови италијанских математичара[1] XVI века дали су значајне резултате у вези са решавањем произвољних алгебарских једначина трећег и четвртог степена. Формула за решавање једначина трећег степена носи име једног од њих, то је тзв. Карданова формула. Многи математичари сматрали су да постоје и општи поступци за решавање алгебарских једначина степена $n>4$, све док норвешки математичар Абел[2] 1824. године није доказао да се оне у општем случају не могу егзактно решити (под овим се подразумева формула са коначним бројем алгебарских операција над коефицијентима полинома која као резултат даје решења те једначине). Велики допринос овом доказу дао је и францускиматематичар Галоа[3].

[1] Сципионе дел Феро (1465-1526), Николо Фонтана Тартаља (1500-1557), Ђироламо Кардано (1501-1576), Лодовико Ферари (1522-1565) – италијански математичари

[2] Нилс Хенрик Абел (1802-1829) - норвешки математичар

[3] Еварист Галоа (1811-1832) – француски матемаричар, зачетник једне од најважнијих грана модерне алгебре – теорије група

Такође, постоје и поступци за решавање неких једноставних трансцендентних једначина (на пример неке врсте тригинометријских, експоненцијалних и логаритамских једначина) али се ни оне у општем случају не могу егзактно решити. Управо због тога се и јавља потреба за нумеричким решавањем једначина и развијањем нумеричких метода.

Основна идеја код већине нумеричких поступака је да се направи итеративни низ који конвергира ка решењу једначине. Прво се одређује почетна апроксимација x_0, а затим се итеративним правилом генерише низ апроксимација $x_0, x_1, \ldots$ (итеративни низ) који конвергира ка решењу α дате једначине. У том случају решење се може одредити са произвољном тачношћу. Пошто се у пракси израчунава само коначан број апроксимација, потребно је извршити и *оцену грешке* апроксимације. Итеративни низ конвергира ка решењу само ако се почетна апроксимација изабере довољно добро. Да би се то урадило, потребно је најпре *локализовати* рењења дате једначине (наћи интервале на реалној правој који садрже бар једно решење посматране једначине) или још боље *изоловати* их (наћи дисјунктне интервале на реалној правој који садрже једно и само једно решење посматране једначине). Проблемом изолације решења једначине укратко ћемо се позабавити у наредном делу текста.

2.1. Изолација решења једначина

Изолација решења може се извршити на разне начине. Један од начина је графички начин, који се састоји у цртању графика фукције и налажења пресечних тачака графика функције са x-осом. Уколико је график функције тежак за цртање, можемо једначину $f(x)=0$ написати у еквивалентном облику $g(x)=h(x)$ и тиме проблем свести на налажење апсциса пресечних тачака графика функција g и h. Уколико је график прецизније урађен, утолико се са већом тачношћу добијају приближна решења посматране једначине.

За изолацију се поред графичких користе и аналитички методи. То су сви они ставови познати из реалне анализе који нам помажу да испитамо функцију и њен ток. Централно место у овим ставовима заузима следећа теорема о супротним знацима коју овде наводимо без доказа:

Теорема 1. Нека је функција f непрекидна на интервалу $[a,b]$. Ако функција узима вредности различитог знака у тачкама a и b, тј. ако је $f(a)f(b)<0$, онда постоји бар једно решење једначине $f(x)=0$ у интервалу (a,b).

На примерима неколико функција илустроваћемо како се уз помоћ ове теореме и још неких других особина датих функција могу изолавати њихови корени.

Задатак 1. Изоловати решења следећих једначина:

а) $x^3 - 6x + 2 = 0$

б) $x^4 - 4x - 1 = 0$

в) $e^x + x = 0$.

Решење.

а) У табели 1 приказани су знаци вредности функције за неколико тачака:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\mathrm{sgn}(f(x))$	-1	1	1	1	-1	-1	1

Табела 1. Вредности функције $\mathrm{sgn}(f(x))$ за неколико тачака

Како је функција $f(x) = x^3 - 6x + 2$ полином, она је непрекидна, а из основног става алгебре следи да она има тачно 3 корена у скупу комплексних бројева. Из наведеног и уз помоћ теореме 1 закључујемо да су сва 3 корена реална и да се налазе у дисјунктним интервалима:

$$\left(-3,-2\right),\ \left(0,1\right) \text{ и } \left(2,3\right).$$

б) Извод ове функције је $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$, па важи:

f је строго опадајућа функција за $x < 1$,

f је строго растућа функција за $x > 1$,

у тачки $x = 1$ функција има локални минимум једнак $f(1) = -4$.

Важи још и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ из чега закључујемо да функција има две реалне нуле, и то једну у интервалу $\left(-\infty,1\right)$ а другу у интервалу $\left(1,\infty\right)$.Убацивањем неколико вредности за x добијамо: $f(-1) > 0$, $f(0) < 0$, $f(1) < 0$, $f(2) > 0$, па на основу теореме 1 закључујемо да се нуле налазе у интервалима:

$$\left(-1,0\right) \text{ и } \left(1,2\right).$$

в) Извод ове функције је $f'(x) = e^x + 1 > 0$ па је f строго растућа функција на целом скупу реалних бројева. Важи и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, па закључујемо да ова функција има тачно једну реалну нулу. Како је $f(0) = 1 > 0$ и $f(-1) = \dfrac{1}{e} - 1 = \dfrac{1-e}{e} < 0$, јединa реална нула ове функције налази се у интервалу $\left(-1,0\right)$. ■

3. ЊУТНОВ МЕТОД И МЕТОД СЕЧИЦЕ

У овом поглављу даћемо преглед и геометријску интерпретацију метода који су саставни део комбинованог метода: Њутнов[4] метод и метод сечице. Такође, биће изложени неки довољни услови (не и потребни!) за ковергенцију одговарајућих итеративних низова.

3.1. Њутнов метод

У основи Њутновог метода је идеја да се функција апроксимира линеарном функцијом, и то тангентом на график дате функције f у изабраној тачки x_0. Зато се овај метод понекад назива још и методом тангенте.
Једначина тангенте у тачки x_0 гласи:

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

па је пресек тангенте са x-осом тачка чија је апсциса x_1, а за коју важи $y(x_1) = 0$. Следи:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

одакле је

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},\ f'(x_0) \neq 0.$$

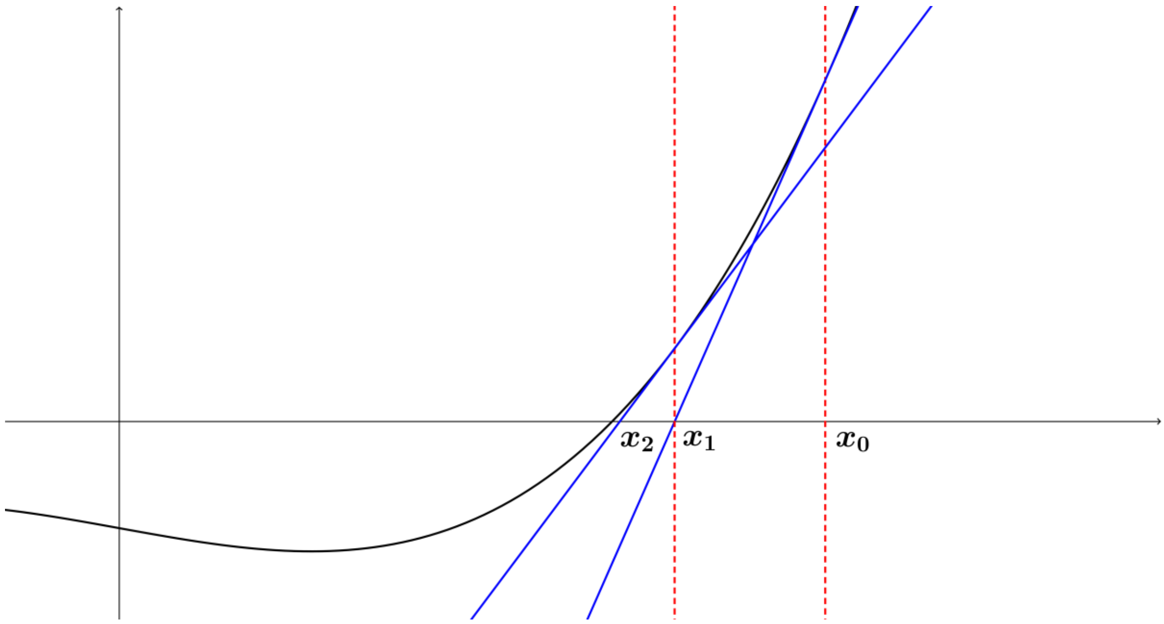
Број x_1 представља прву апроксимацију решења једначине $f(x) = 0$. Другу апроксимацију добијамо даљом применом претходног поступка, тј. постављањем тангенте у тачки $(x_1, f(x_1))$ итд. На тај начин добијамо итеративни низ дефинисан следећом рекурентном везом првог реда:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

који је потуно одређен почетном апроксимацијом x_0.
Видимо да се описани поступак може спровести уколико је функција диференцијабилна у тачкама итеративног низа и ако у тим тачкама извод није једнак нули. Под одређеним условима овај итеративни низ конвергира ка решењу α дате једначине.

4 Исак Њутн (1642-1727) – енглески математичар и физичар, између осталог и творац диференцијалног и интегралног рачуна

На слици 1 дата је геометријска интерпретација Њутновог метода.



Слика 1. Геометријска интерпретација Њутновог метода

Овај поступак први је посматрао Њутн, мада не у потпуности у облику у којем га данас познајемо. За то су заслужни многи математичари који су овај поступак разматрали и употпуњавали, пре свих Рафсон[5], те се овај поступак у литератури још среће и под називом Њутн-Рафсонов поступак.

У свом раду "De analysi per aequationes numero terminorum infinitas" објављеном 1666. године Њутн је нумерички решавао једначину $x^3-2x-5=0$. На примеру ове једначине демонстрираћемо Њутнов метод.

Итеративни низ који одговара овој једначини је:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3-2x_n-5}{3x_n^2-2},\ n\in\mathbb{N}_0.$$

На већ приказани начин закључује се да се једино реално решење ове једначине налази у интервалу $(2,3)$. За иницијалну вредност $x_0=3$ првих 8 апроксимација приказано је у табели 2 док је у тебели 3 приказано исто толико апроксимација за $x_0=2$. У табели 4 приказани су резултати добијени за узето $x_0=0$. У табелама су приказане вредности првих 15 децимала сваке апроксимације.

[5] Џозеф Рафсон (1648-1715) – енглески математичар

n	x_n
0	3
1	2.36
2	2.127196780158816
3	2.095136036933634
4	2.094551673824268
5	2.094551481542347
6	2.094551481542326
7	2.094551481542326

Табела 2. Чланови низа за $x_0 = 3$

n	x_n
0	2
1	2.1
2	2.094568121104185
3	2.094551481698199
4	2.094551481542326
5	2.094551481542326
6	2.094551481542326
7	2.094551481542326

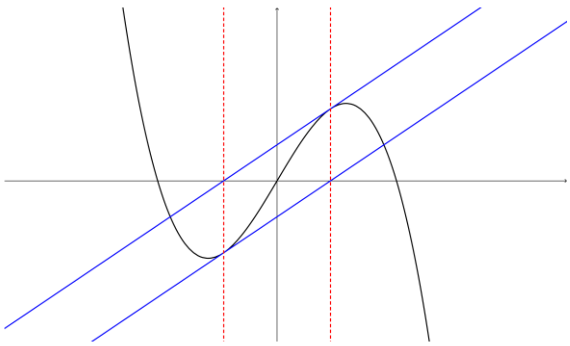
Табела 3. Чланови низа за $x_0 = 2$

n	x_n
0	0
1	-2.5
2	-1.567164179104478
3	-0.502592445086680
4	-3.820706467699331
5	2.549393391360608
6	-1.608111499728226
7	-0.576100433660241

Табела 4. Чланови низа за $x_0 = 0$

Из ових табела видимо да за $x_0 = 3$ и $x_0 = 2$ чланови Њутновог итеративног низа врло добро апроксимирају тачно решење чијих првих 15 децимала заиста износе 2.094551481542326. У првом случају, већ након 6 итерација узастопне апроксимације се поклапају на првих 15 децимала, док у другом случају низ још боље апроксимира решење, те се чланови низа поклапају на 15 децимала већ након 4 итерације. То нам сугерише да је $x_0 = 2$ боље изабрана почетна апроксимација. Поглед на табелу 4 може нас навести на (погрешан) закључак да за $x_0 = 0$ нећемо добити да се чланови низа приближавају решењу. Наиме, 19. и 20. апроксимација се поклапају на првих 15 децимала и износе 2.094551481542326..., што значи да и за овако узето x_0 чланови низа представљају добре апроксимације решења, иако се знатно спорије приближавају том решењу него у претходна 2 примера.

Након ових примера чини се да кад год се Њутнов метод може спровести (тј. кад код је одговарајући итеративни низ дефинисан), он и ковергира. Ипак, то није тако. Могу се једноставно конструисати примери једначина код којих Њутнов поступак "осцилује", тј. $x_{2k} = x_0$, $x_{2k+1} = x_1$, $k \in \mathbb{N}$. Један такав пример је једначина $-4x^3 + 3x = 0$. За $x_0 = \sqrt{\frac{3}{20}}$ добијамо $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{20}}$ и $x_{2k} = x_0$, $x_{2k+1} = x_1$, $k \in \mathbb{N}$. На слици 2 графички је приказана ова ситуација.



Слика 2. Пример када Њутнов метод "осцилује"

У следећој теореми доказаћемо конвергенцију Њутновог метода уз неколико довољних услова. Уведимо најпре једну дефиницију ради лакшег записа у наставку текста:

Дефиниција 1. Функцију f називамо n *пута непрекидно деиференцијабилном* на неком интервалу $[a,b]$ ако су сви изводи те функције закључно са n-тим непрекидни на истом интервалу, и обележавамо $f \in C^n[a,b]$.

Теорема 2. Нека је $f \in C^2[a,b]$. Ако је $f(a)f(b)<0$, а f' и f'' не мењају знак на интервалу $[a,b]$, онда за свако $x_0 \in [a,b]$ за које важи:

$$f(x_0)f''(x_0)>0,$$

Њутнов итеративни метод конвергира ка једниственом решењу $\alpha \in (a,b)$ једначине $f(x)=0$ и притом за све $n \in \mathbb{N}_0$ важи следећа табела:

$x \in [a,b]$	$f'(x)>0$	$f'(x)<0$
$f''(x)>0$	$x_{n+1}<x_n$	$x_{n+1}>x_n$
$f''(x)<0$	$x_{n+1}>x_n$	$x_{n+1}<x_n$

Доказ. Доказаћемо 1 од 4 могућа случаја, остали се доказују аналогно. Нека је $f'(x)<0$ и $f''(x)>0$ за све $x \in [a,b]$. Због $f'(x)<0$ заиста постоји јединствено решење α једначине $f(x)=0$ на датом интервалу. Следи да је $f(a)>0$ и $f(b)<0$, јер је функција строго опадајућа. За све $x \in [a,\alpha)$ важи $f(x)>0$, а за све $x \in (\alpha,b]$ важи $f(x)<0$. Због начина на који је x_0 изабрано, важи $x_0<\alpha$.
Докажимо да из $x_n<\alpha$ следи $x_{n+1}<\alpha$. Из Лагранжове[6] теореме добијамо:

$$0=f(\alpha)=f(x_n+(\alpha-x_n))=f(x_n)+f'(x_n)(\alpha-x_n)+\frac{1}{2}f''(\theta)(\alpha-x_n)^2,$$

за неко $\theta \in (\min\{x_n,\alpha\},\max\{x_n,\alpha\}) \subset [a,b]$.

[6] Жозеф Луис Лагранж (1736-1813) – француски математичар, дао је посебно велики допринос у математичкој анализи, теорији бројева и механици

Како је квадратни члан $\frac{1}{2}f''(\theta)(\alpha - x_n)^2$ позитиван, следи $f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) < 0$. Због $f'(x_n) < 0$, ова неједнакост еквивалентна је неједнакости:

$$\alpha > x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1}.$$

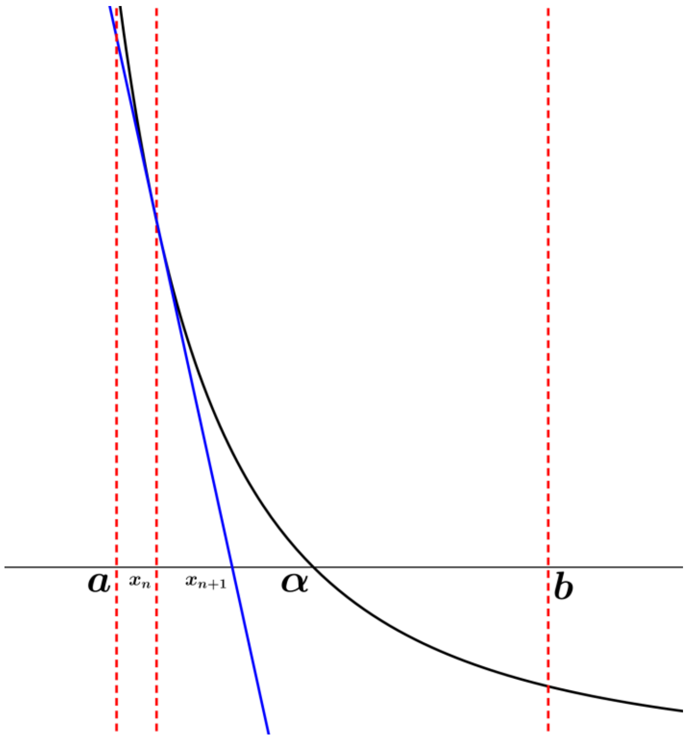
На слици 3 дат је геометријски приказ ове неједнакости.
Сада следи:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > x_0,$$

јер је $f(x_0) > 0$ и $f'(x_0) < 0$. Из $x_0 < \alpha$ следи $x_1 < \alpha$, па је и $f(x_1) > 0$. Одавде по индукцији следи $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots < \alpha$, што је и требало доказати. Како је итеративни низ монотон и ограничен, он има неку граничну вредност β.
Како су f и f' непрекидне функције, лимесом се може “ући” под њих, па из рекурентне везе итеративног низа следи:

$$\beta = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}.$$

Сада је $f(\beta) = 0$, тј. $\beta = \alpha$. Овим је доказ у потпуности завршен. ■



Слика 3. Геометријски приказ дела теореме 2

3.2. Метод сечице

Као и Њутнов метод, и метод сечице је заснован на веома једноставној и природној идеји. Она се састоји у апроксимирању функције њеном сечицом. Једначина сечице која садржи две тачке $(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$ гласи:

$$y(x) = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1),$$

па њен пресек са x-осом тражимо као решење једначине $y(x) = 0$. Решење је неки број x_2 за који важи:

$$0 = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_1),$$

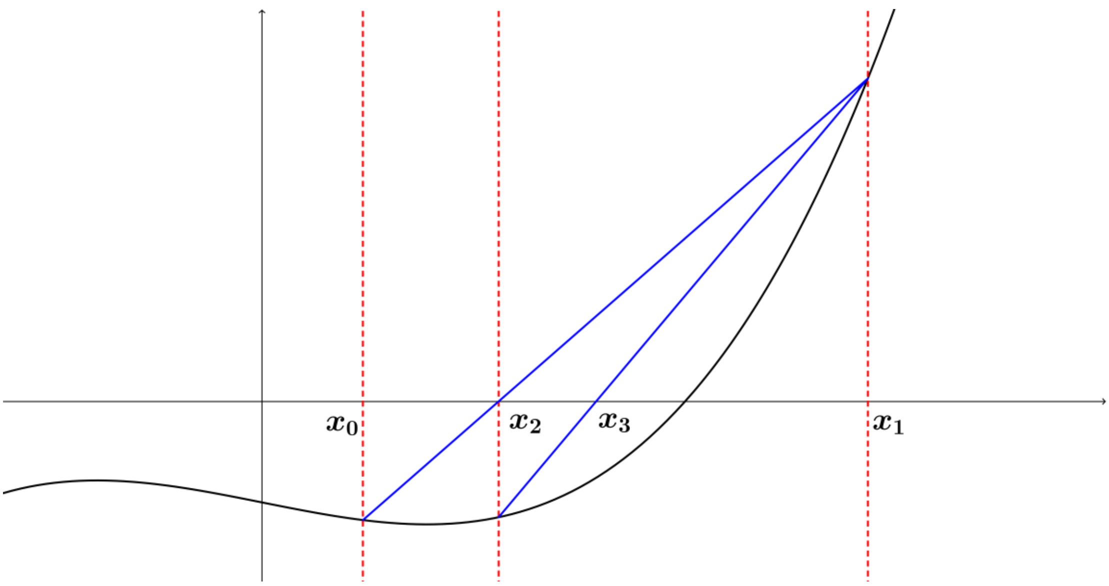
односно

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1), \; f(x_0) \neq f(x_1).$$

Описани поступак се даље примењује на тачке $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ и тако се добија следећа апроксимација x_3, итд. На тај начин добија се итеративни низ задат рекурентном једначином другог реда:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \; n \in \mathbb{N},$$

који је потпуно одређен са своја прва два члана, иницијалним апроксимацијама x_0 и x_1. Геометријска интерпретација метода сечице приказана је на слици 4.



Слика 4. Геометријска интерпретација метода сечице

Комбиновани метод који се изалже у овом раду не користи овај класичан метод сечице, већ једну његову модификацију. Та модификација је тзв. regula falsi метод или примитивни поступак сечице. Regula falsi метод дефинисан је на следећи начин:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_k}{f(x_n) - f(x_k)} f(x_n),\ n \in \mathbb{N},$$

$$\text{где је } k = \max\{i \in \{0,1,\dots n-1\} \mid f(x_n) f(x_i) < 0\}.$$

Regula falsi меотод не захтева строге услове за конвергенцију. Ако је функција f непрекидна на интервалу $[a,b]$ и ако је $f(a)f(b) < 0$ тада овај поступак задат са $x_0 = a$, $x_1 = b$ и горе наведеним итеративним правилом конвергира ка решењу $\alpha \in (a,b)$ (у овом случају не нужно и јединственом). У следећој теореми доказаћемо конвергенцију овог метода при нешто строжијим условима.

Теорема 3. Нека је $f \in C^2[a,b]$. Ако је $f(a)f(b) < 0$, а f' и f'' не мењају знак на интервалу $[a,b]$, онда за свако $x_0, x_1 \in [a,b]$ за које важи:

$$f(x_0) f''(x_0) > 0 \text{ и } f(x_1) f''(x_1) < 0$$

regula falsi метод конвергира ка једнииственом решењу $\alpha \in (a,b)$ једначине $f(x) = 0$ и притом за све $n \in \mathbb{N}_0$ важи следећа табела:

$x \in [a,b]$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$f''(x) > 0$	$x_{n+1} > x_n$	$x_{n+1} < x_n$
$f''(x) < 0$	$x_{n+1} < x_n$	$x_{n+1} > x_n$

Доказ. Због особина конвексности (односно конкавности) итеративни низ за примитивни поступак сечице у сва 4 могућа случаја гласи:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} f(x_n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Докажимо случај када је $f'(x) < 0$ и $f''(x) > 0$ на интервалу $[a,b]$. Остали случајеви доказују се аналогно. Због монотоности функције важи $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$. За све $x \in [a,\alpha)$ важи $f(x) > 0$, а за све $x \in (\alpha,b]$ важи $f(x) < 0$. Због начина на који су почетне апроксимације изабране, важи $f(x_0) > 0$ и $f(x_1) < 0$ из чега закључујемо да $x_0 \in [a,\alpha)$ и $x_1 \in (\alpha,b]$. Из итеративног низа имамо:

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) < x_1,$$

јер је $x_1 - x_0 > 0$, $f(x_1) - f(x_0) < 0$ и $f(x_1) < 0$.

Сада ћемо доказати да је $\alpha < x_2$. На слици 5 дат је геометријски приказ ове неједнакости. Због конвексности функције f, њен график се налази испод сваке њене сечице (осим у тачкама пресека), па следи закључак $\alpha < x_2$. Сада за тачку x_2 важе исти почетни услови као за тачку x_1, па се даљом применом итеративног поступка долази до закључка:

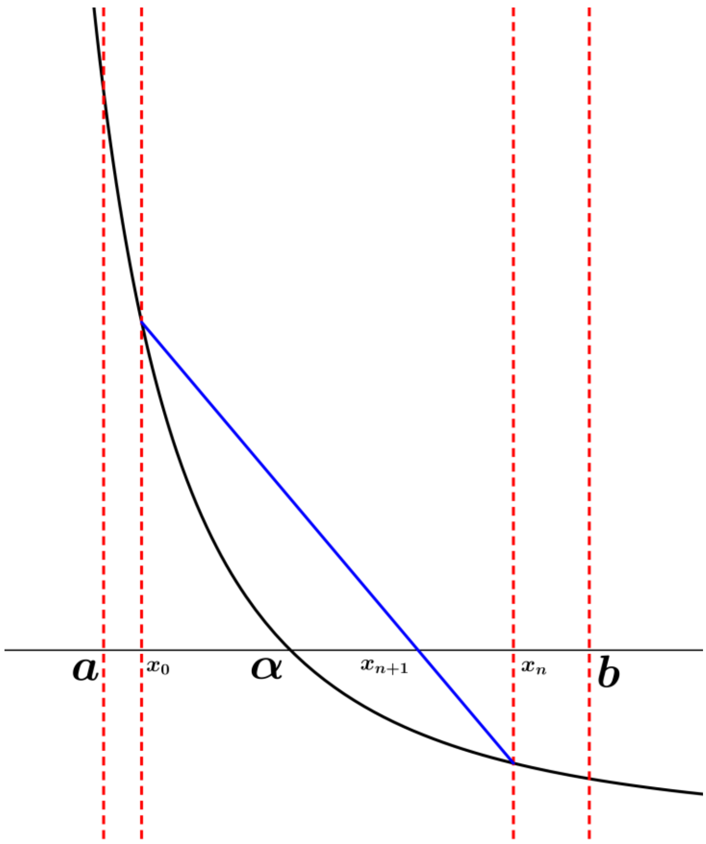
$$\alpha < \cdots < x_n < \cdots < x_2 < x_1,$$

што је и требало доказати.

Низ (x_n) је строго опадајући и ограничен одоздо. Следи да је овај низ конвергентан, тј. постоји број β, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$. Треба још доказати да је $\beta = \alpha$. Заиста, “пуштањем” лимеса у рекурентној вези добијамо:

$$\beta = \beta - \frac{\beta - x_0}{f(\beta) - f(x_0)} f(\beta),$$

а како је $\beta \neq x_0$ следи $f(\beta) = 0$. Решење једначине на интервалу (a,b) је једниствено, па мора бити $\beta = \alpha$. Овим је доказ у потпуности завршен. ■



Слика 5. Геометријски приказ дела теореме 3

На примеру једначине $x^3-2x-5=0$ демонстрираћемо метод regula falsi. Како смо већ раније утврдили, једино реално решење ове једначине налази се у интервалу $(2,3)$. На крајевима тог интервала функција узима вредности различитог знака, а функције $f'(x)=3x^2-2$ и $f''(x)=6x$ су позитивне на целом интервалу. Уз то, f'' је непрекидна фукција, па за узето $x_0=2$ и $x_1=3$ теорема 3 нам обезбеђује конвергенцију. У овом случају итеративни низ гласи:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-3}{x_n^3-2x_n-21}(x_n^3-2x_n-5),\ n\in\mathbb{N}.$$

Рачунајући вредности чланова овог низа, уочавамо да се они доста спорије приближавају решењу него што је то био случај код Њутновог метода. Док су се код Њутновог метода узастопне апроксимације поклапале на 15 децимала већ након 4 односно 6 итерација, код метода regula falsi тек се x_{34} и x_{35} поклапају на 15 децимала које такође износе 2.094551481542326.

3.3. Поређење Њутновог метода и метода сечице

Брзина конвергенције неког итеративног метода мери се *редом конвергенције*.

<u>Дефиниција 2</u>. Ако низ (x_n), $n \in \mathbb{N}_0$, има граничну вредност α, и ако за неки реалан број $p \geqslant 1$ постоји гранична вредност низа:

$$y_n = \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|\alpha - x_n|^p},$$

кажемо да низ (x_n) конвергира ка α са редом бар p.

Ред конвергенције показује како се односе апсолутне грешке узастопних апроксимација. Брже конвергира онај итеративни метод који чији итеративни низ има већи ред конвергенције. Ми се у овом раду нећемо бавити извођењем последица које произилазе из ове дефиниције, већ ћемо навести само закључке до којих се у теорији долази. Доказује се да је ред конвергенције Њутновог метода 2 (Њутнов метод је квадратно конвергентан), док је ред конвергенције метода сечице тзв. “златни пресек”, тј. број:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

који је гранична вредност количника два узастопна члана Фибоначијевог[7] низа. Управо се Фибоначијеви бројеви користе у доказу да је ред конвергенције метода сечице φ.

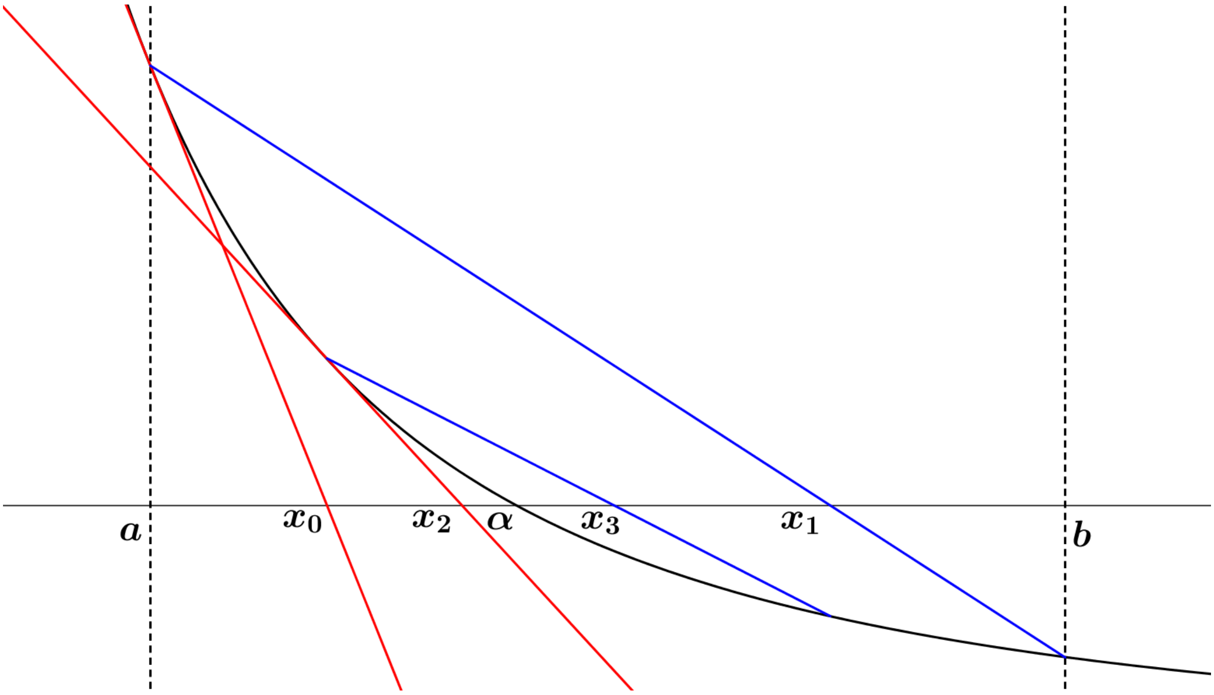
Дакле, и Њутнов метод и метод сечице су врло ефикасни нумерички методи који представљају основу за многе друге методе. Управо један такав метод биће представљен у четвртом поглављу.

Предност Њутновог метода у односу на метод сечице је то што брже конвергира, а мана што захтева израчунавање вредности првог извода у свакој апроксимацији. Са друге стране, метод сечице, иако има мањи ред конвергенције, има ту предност што не захтева израчунавање вредности првог извода.

[7] Леонардо Пизано (Фибоначи) (око 1170 – око 1250) – италијански математичар, познат по чувеном Фибоначијевом низу, заслужан и за ширење и популаризацију арапских цифара у Европи

4. КОМБИНОВАНИ МЕТОД

У претходном делу текста видели смо по ком принципу раде Њутнов метод и метод сечице. У овом поглављу биће презентован метод који комбинује та два и на ефикаснији и бржи начин одређује приближна решења једначине $f(x)=0$. Комбиновани метод се састоји у томе да се решењу α приближавамо са обе стране, и то са једне стране Њутновим методом, а са друге стране методом regula falsi. Од особина функције коју решавамо зависи са које стране се који метод користи. На слици 6 дат је геометријски приказ комбинованог метода.



Слика 6. Геометријски приказ комбинованог метода

Комбиновани метод се може спровести ако су испуњени исти услови као у теоремама 2 и 3. Дакле, нека је $f \in C^2[a,b]$, $f(a)f(b)<0$ и f' и f'' не мењају знак на интервалу $[a,b]$. Итеративни низ за комбиновани метод дефинисан је на следећи начин:

$$x_0 = \begin{cases} a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}, & \text{ако је } f(a)f''(a)>0, \\ b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}, & \text{ако је } f(b)f''(b)>0, \end{cases}$$

$$x_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a) = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)},$$

$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})},\ \ n \in \mathbb{N},$$

$$x_{2n+1} = x_{2n-1} - \frac{x_{2n-1} - x_{2n-2}}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})} f(x_{2n-1}),\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Парни чланови овог низа су уствари узастопне апроксимације Њутновим методом, док непарни представљају узастопне апроксимације методом regula falsi. У следећој теореми доказаћемо конвергенцију комбинованог поступка.

Теорема 4. Нека је $f \in C^2\left[a,b\right]$, $f(a)f(b)<0$ и f' и f'' не мењају знак на интервалу $\left[a,b\right]$. Тада комбиновани метод конвергира ка јединственом решењу $\alpha \in \left(a,b\right)$ једначине $f(x)=0$ и притом важи $x_{2n} < \alpha < x_{2n+1}$, за све $n \in \mathbb{N}_0$ или $x_{2n+1} < \alpha < x_{2n}$, за све $n \in \mathbb{N}_0$.

Доказ. Докажимо случај када је $f'(x)<0$ и $f''(x)>0$ за све $x \in \left[a,b\right]$. Остали случајеви доказују се аналогно. Тада важи $f(a)>0$ и $f(b)<0$ па је $x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$. За низ чланова са парним индексом по теореми 2 важи $a < x_0 < x_2 < \ldots < x_{2n} < \ldots < \alpha$, и тај низ конвергира ка решењу, тј. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \alpha$.

Пошто је x_1 апсциса тачке у којој сечица кроз тачке $\left(a, f(a)\right)$ и $\left(b, f(b)\right)$ пресеца x-осу, а функција је конвексна на посматраном интервалу, закључујемо да важи $\alpha < x_1 < b$. Из дефиниције итеративног низа за комбиновани метод видимо да је број x_{2n+1}, $n \in \mathbb{N}$ апсциса тачке пресека сечице кроз тачке $\left(x_{2n-2}, f(x_{2n-2})\right)$ и $\left(x_{2n-1}, f(x_{2n-1})\right)$, па на исти начин као у претходном разматрању закључујемо да важи $\alpha < x_{2n+1} < x_{2n-1}$. По принципу математичке индукције онда важи $\alpha < \cdots < x_{2n+1} < \cdots < x_3 < x_1 < b$, па и низ непарних чланова итеративног низа има граничну вредност (јер је монотоно опадајући и ограничен). Нека је та гранична вредност број β, тј. нека је $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = \beta$. Ако би било $\beta = \alpha$ доказ би био завршен. Заиста:

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \alpha \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\exists m_1 \in \mathbb{N}\right)\left(\forall k \in \mathbb{N}_0\right)\left(k > m_1 \Rightarrow \left|\alpha - x_{2k}\right| < \varepsilon\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \alpha \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\exists m_2 \in \mathbb{N}\right)\left(\forall k \in \mathbb{N}_0\right)\left(k > m_2 \Rightarrow \left|\alpha - x_{2k+1}\right| < \varepsilon\right),$$

па за $m = \max\left\{m_1, m_2\right\}$ важи:

$$\left(\forall k \in \mathbb{N}\right)\left(k > 2m \Rightarrow \left|\alpha - x_k\right| < \varepsilon\right),$$

па је и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Докажимо зато да је $\beta = \alpha$.

Сечица која садржи тачке $\left(x_{2n-1}, f(x_{2n-1})\right)$ и $\left(x_{2n-2}, f(x_{2n-2})\right)$ је иста она сечица која садржи тачке $\left(x_{2n-2}, f(x_{2n-2})\right)$ и $\left(x_{2n-1}, f(x_{2n-1})\right)$, па је јасно да важи:

$$x_{2n+1} = x_{2n-1} - \frac{x_{2n-1} - x_{2n-2}}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})} f(x_{2n-1}) = x_{2n-2} - \frac{x_{2n-1} - x_{2n-2}}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})} f(x_{2n-2}) .$$

Сада имамо:

$$x_{2n+1} - x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{x_{2n-1} - x_{2n-2}}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})} f(x_{2n-2}) - \left(x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})} \right)$$

$$= f(x_{2n-2}) \left(\frac{1}{f'(x_{2n-2})} - \frac{x_{2n-1} - x_{2n-2}}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})} \right).$$

По Лагранжовој теореми следи да постоји неки број $\theta \in \left(x_{2n-2}, x_{2n-1}\right)$ такав да важи:

$$f'(\theta) = \frac{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}{x_{2n-1} - x_{2n-2}},$$

па је $x_{2n+1} - x_{2n} = f(x_{2n-2}) \left(\frac{1}{f'(x_{2n-2})} - \frac{1}{f'(\theta)} \right) = f(x_{2n-2}) \frac{f'(\theta) - f'(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2}) f'(\theta)}$.

Како је $\left(f'(x)\right)' = f''(x) > 0$ на интервалу $\left[a, b\right]$, то је функција f' строго растућа на интервалу $\left[a, b\right]$ па важи $f'(\theta) < f'(x_{2n-1}) \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\theta)} < \frac{1}{f'(x_{2n-1})}$.

Сада је:

$$f(x_{2n-2}) \frac{f'(\theta) - f'(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2}) f'(\theta)} < f(x_{2n-2}) \frac{f'(x_{2n-1}) - f'(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2}) f'(\theta)} < f(x_{2n-2}) \frac{f'(x_{2n-1}) - f'(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2}) f'(x_{2n-1})} .$$

Дакле, добили смо да важи:

$$0 < x_{2n+1} - x_{2n} < f(x_{2n-2}) \frac{f'(x_{2n-1}) - f'(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2}) f'(x_{2n-1})}, \text{ за све } n \in \mathbb{N}.$$

Због непрекидности функција f и f' имамо да је:

$$\lim_{n \to \infty} \left(f(x_{2n-2}) \frac{f'(x_{2n-1}) - f'(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2}) f'(x_{2n-1})} \right) = f(\alpha) \frac{f'(\beta) - f'(\alpha)}{f'(\alpha) f'(\beta)} = 0 .$$

Дакле, важи $0 \le \lim_{n\to\infty}\left(x_{2n+1} - x_{2n}\right) = \beta - \alpha \le 0$, односно $\beta = \alpha$. Овим је доказ у потпуности завршен. ■

<u>Последица теореме 4</u>. Под претпоставкама теореме 4 важи:

$$\left|x_{2n+1} - x_{2n}\right| < 2\varepsilon \Rightarrow \left|\alpha - \frac{1}{2}(x_{2n} + x_{2n+1})\right| < \varepsilon .$$

То уствари значи да ако се x_{2n} и x_{2n+1} поклапају на k децимала, онда су свих тих k децимала сигурне цифре у *ширем* смислу. Ако вредности првих k децимала ових апроксмација износе $d_1, d_2, ..., d_k$ редом, тада број $\lfloor x_{2n} \rfloor + \sum_{i=1}^{k} \frac{k_i}{10^i} + 5 \cdot 10^{-(k+1)}$ има k сигурних цифара у *ужем* смислу. ■

Решимо сада комбинованим методом већ посматрану једначину $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$. Утврдили смо да се једино реално решење ове једначине налази у интервалу $(2,3)$. Први извод $f'(x) = 3x^2 - 2$ и други извод $f''(x) = 6x$ су позитивни у том интервалу, а функција узима вредности различитог знака на крајевима интервала, па се може спровести комбиновани метод. Због знака другог извода за x_0 узимамо апсцису пресека тангенте у тачки $(3, f(3))$ са x-осом. Рецимо да желимо да одредимо приближно решење ове једначине са границом апсолутне грешке 10^{-15}. Дакле, када нам се у итеративном низу две узастопне апроксимације поклопе на 15 децимала, одредили смо то приближно решење са траженом границом апсолутне грешке. У тебели 5 приказано је првих 11 чланова итератвног низа за комбиновани метод.

n	x_n
0	2.36
1	2.058823529411764
2	2.127196780158816
3	2.089674909495548
4	2.095136036933634
5	2.094462853752799
6	2.094551673824268
7	2.094551452381437
8	2.094551481542323
9	2.094551481542326
10	2.094551481542326

Табела 5. Итеративни низ за комбиновани метод

Дакле, закључујемо да је приближна вредност решења $\alpha^* = 2.094551481542326$ са траженом границом апсолутне грешке.

Сада ћемо комбинованим методом решити још неке једначине.

Задатак 2. Комбинованим методом израчунати приближну вредност квадратног корена броја 10 са границом апсолутне грешке 10^{-15}.

Решење. Квадратни корен броја десет је уствари позитивно решење једначине $x^2 = 10$, односно позитивна нула функције:

$$f(x) = x^2 - 10.$$

Служећи се монотонијом функције, закључујемо да се тражено решење налази у интервалу $(3,4)$. Израчунајмо први и други извод функције f. Добијамо:

$$f'(x) = 2x,\ f''(x) = 2.$$

Како први и други извод не мењају знак на интетрвалу $(3,4)$, а важи $f(3) < 0$ и $f(4) > 0$ то ћемо се комбинованим методом приближавати решењу Њутновим методом са леве стране, односно regula falsi методом са десне. У табели 6 приказано је првих 10 чланова итеративног низа за комбиновани метод.

n	x_n
0	3.25
1	3.142857142857143
2	3.163461538461538
3	3.162011173184358
4	3.162277881692775
5	3.162277610292556
6	3.162277660168387
7	3.162277660168377
8	3.162277660168379
9	3.162277660168379

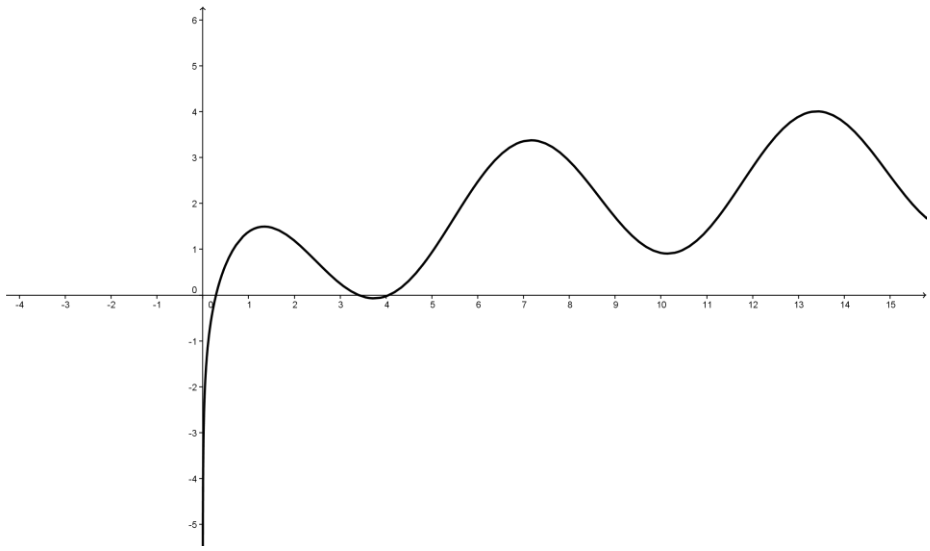
Табела 6. Налажење $\sqrt{10}$ комбинованим методом

Дакле, $\sqrt{10} \approx 3.162277660168379$, $\sqrt{10} \in (3.162277660168379, 3.16227766016838)$. ■

Овај поступак се врло лако може уопштити, тј. на врло сличан начин може се комбинованим методом тражити и n-ти корен произвољног позитивног броја c.

***Задатак 3*.** Комбинованим методом одредити приближна решења једначине $\ln x + \sin x + \cos x = 0$ са границом апсолутне грешке 10^{-15}.

***Решење*.** Графичком изолацијом решења добијамо да једначина има 3 реална решења која се налазе у интервалима $(0.2, 0.3)$, $(3.4, 3.5)$ и $(4, 4.1)$ редом. На слици 7 скициран је график функције $f(x) = \ln x + \sin x + \cos x$.



Слика 7. График функције $f(x) = \ln x + \sin x + \cos x$

Израчунајмо вредности првог и другог извода функције f и одредимо њихов знак на добијеним интервалима. Добијамо:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \cos x - \sin x, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \sin x - \cos x.$$

Уз помоћ графичког метода, дабијамо важи:

За $x \in (0.2, 0.3)$: $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$,
За $x \in (3.4, 3.5)$: $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$,
За $x \in (4, 4.1)$: $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$.

Из овога закључујемо да за x_0 треба узети апсцису пресека x-осе са тангентом на график функције f редом у тачкама $(0.2, f(0.2))$, $(3.4, f(3.4))$ и $(4.1, f(4.1))$.

У табелама 6, 7 и 8 приказано је неколико првих чланова 3 итеративна низа који конвергирају ка 3 различита решења.

n	x_n
0	0.274497908618518
1	0.290183149894826
2	0.288152624932190
3	0.288508121305107
4	0.288469391392306
5	0.288469571843621
6	0.288469552268747
7	0.288469552268794
8	0.288469552268789
9	0.288469552268789

Табела 6. Конвергенција ка 1. решењу

n	x_n
0	3.403442822390026
1	3.403998924280029
2	3.403459125180364
3	3.403459137680101
4	3.403459125546501
5	3.403459125546500
6	3.403459125546500

Табела 7. Конвергенција ка 2.решењу

n	x_n
0	4.063300070867976
1	4.057452647548656
2	4.061247108959493
3	4.061228580321335
4	4.061240622191114
5	4.061240622006092
6	4.061240622126339
7	4.061240622126339

Табела 8. Конвергенција ка 3. решењу

Из ових табела закључујемо да су тражене приближне вредности решења:

$$\alpha_1^* = 0.288469552268789,\ \alpha_2^* = 3.4034591255465 \text{ и } \alpha_3^* = 4.061240622126339.\ \blacksquare$$

5. ЗАКЉУЧАК

Једна од главних предности комбинованог метода је то што нема потребе посебно развијати поступке за оцену грешке, као код већине других нумеричких метода. Овим поступком се добија низ угњеждених интервала у од којих сваки садржи тражено решење. Постоји само један број који припада сваком од ових интервала (више о томе можете наћи у [1]), и тај број је баш тражено решење.

Са друге стране, комбиновани метод не захтева никакве додатне услове за конвергенцију у односу на услове које захтевају Њутнов метод и метод regula falsi, што га чини врло примењивим и незахтевним.

На први поглед, услови да функције f' и f'' не мењају знак на интервалу $[a,b]$ чине се строгим, али уствари није тако. Огроман број функција задовољава ове услове, нарочито ако се добро изолују њене нуле.

Због све веће потребе за све бољим прорачунима у применама математике, нарочито у физици, нумеричка математика је једна од грана математике која се највише и најбрже развија. Свакодневно се објављује мноштво научних радова у вези са нумеричким методима, било да се ради о новим, или о модификацијама већ постојећих метода.

6. ЛИТЕРАТУРА

[1] Каделбург, З., Мићић, В., Огњановић, С., *Анализа са алгебром 3*, четврто издање, "Круг", Београд, 2007.

[2] Митриновић, Д., С., Михаиловић, Д., Васић, П. М., *Линеарна алгебра, полиноми, аналитичка геометрија*, девето исправљено издање, "Грађевинска књига", Београд, 1979.

[3] Херцег, Д., Вулановић, Р., *Нумеричка анализа*, прво поновљено издање, Нови Сад, 1994.

[4] Херцег, Д., Крејић, Н., *Нумеричка анализа збирка задатака I*, Природно-математички факултет, Нови Сад, 1998.

[5] Херцег, Д., Херцег, Ђ., *Нумеричка математика*, "Symbol", Нови Сад, 2009.

[6] Херцег, Д., *Нумеричке и статистичке методе у обради експременталних података*, Институт за математику, Нови Сад, 1989.

[7] Demidovich, B. P., Maron, I. A., *Computational mathematics*, треће издање, "Мир", Москва, 1981.

БИОГРАФИЈА МАТУРАНТА

Предраг Кузмановић рођен је 29.7.1993. у Новом Саду од мајке Верице и оца Мирослава. Првих 7 разреда основне школе завршио је у Основној Школи "Никола Тесла" у Новом Саду са одличнним успехом. 2007. године се уписује у огледно одељење за ученике талентоване за математику и природне науке при Гимназији "Јован Јовановић Змај", у којој и наставља своје средњошколско образовање. После завршене средње школе планира да студира физику на Природно-математичком факултету у Новом Саду.

Датум предаје матурског рада: _______________

Комисија:

Председник _________________

Испитивач _________________

Члан _________________

Коментар:

Датум одбране: ______________ Оцена__________ (___)