BEAMER 模板

示例：概率论基础

刘　岩

武汉大学经管学院金融系

2021 年 9 月 26 日

本讲内容

1. 概率空间
2. 1-元随机变量
3. 多元随机变量
4. 独立性

符号体系

- 数字：a, b, c 或 α, β, γ
- 数系：实数 $\mathbb{R}$，有理数 $\mathbb{Q}$，整数 $\mathbb{Z}$，自然数 $\mathbb{N}$
- 向量-矩阵：列向量 $\boldsymbol{x}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$，转置 $\boldsymbol{x}^\intercal, \boldsymbol{X}^\intercal$，行列式 $\det \boldsymbol{X}$
- 集合：简单情形时，如 A, B；多类符号混用时，如 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$
- 集合运算：交 $A \cap B$，并 $A \cup B$，补 A^c，空集 $\varnothing$
- 函数：$f(\cdot), F(\cdot)$ 或 $\Phi(\cdot)$
- 概率算符：概率 $\mathbb{P}$，期望 $\mathbb{E}$，方差 var，协方差 cov
- 一般算符：如滞后算符 $\mathscr{L}$
- 数学表达：任意 $\forall$，存在 $\exists$，属于 $\in$，包含于 $\subset$

本节内容

1. 概率空间
2. 1-元随机变量
3. 多元随机变量
4. 独立性

概率空间：样本空间

概率空间 (probability space)，即三元组 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1. Ω：样本空间 (sample space)，一个集合，其元素为各种可能发生的随机状况
   - 如抛硬币，$\Omega = \{H, T\}$，正面、反面；又如 GDP 增速（百分比），$\Omega = [-100, \infty)$
   - 样本空间中的点一般记做 $\omega \in \Omega$，称为样本点 (sample point) 或随机元 (random point)
   - 从经济、金融角度看，ω 称为状态 (state)，Ω 称为状态空间 (state space) 更合适

本节内容

1 概率空间

2 1-元随机变量

3 多元随机变量

4 独立性

随机变量：定义

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

- 随机变量 (random variable, r.v.) X 是从 Ω 到实数的一个函数，$X : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
  - $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 表示随机变量可以取值正负无穷；但后续不考虑
  - 抛硬币示例：$\omega = H, T$，定义 $X(H) = 0, X(T) = 1$，则 X 的 0-1 取值反映正负面
  - GDP 增速示例：$\omega \in [-100, \infty)$，定义 $X(\omega) = \omega$，则 ω 即表示状态又表示 GDP 增速随机变量的取值
- 这个函数需要满足可测 (measurable) 的要求：

$$\underbrace{\{\omega : X(\omega) \le x\}}_{\text{事件}} \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

练习 上面两个例子满足可测性吗？

本节内容

1 概率空间

2 1-元随机变量

3 多元随机变量

4 独立性

多元随机变量：联合分布

给定 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及其上定义的 n 个 r.v. $X_1, \ldots, X_n$

- 多元随机事件：$\{X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n\}$ 表示 $\{X_1 \le x_1\}, \ldots, \{X_n \le x_n\}$ n 个事件同时发生，即

$$\{X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n\} = \bigcap_{1 \le i \le n} \{X_i \le x_i\} \in \mathcal{F}$$

- $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$，$X_1, \ldots, X_n$ 的<u>联合累积分布函数</u> (joint CDF) 定义为

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n)$$

简称为<u>联合分布</u> (joint distribution)

本节内容

1 概率空间

2 1-元随机变量

3 多元随机变量

4 独立性

随机变量独立性：定义

- 给定 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，两个事件 $A, B \in \mathcal{F}$ 若满足

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

  则称为独立 (independent) 事件

- 给定 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的两个 r.v. X, Y，若 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 满足

$$\mathbb{P}(X \le x, Y \le y) = \mathbb{P}(X \le x)\mathbb{P}(Y \le y)$$

  则称两个 r.v. 相互独立

- 若 X, Y 相互独立，则其联合分布 F 为两个边缘分布 F_X, F_Y 的乘积

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

CLT：Monte Carlo 模拟示例