TP de matemática discreta

Geração de fractais

Ian Paleta Starling – 2024005378

1. Iteratividade ou recursividade?

Durante a implementação do programa, a principal questão que decorre do fato de que a função do programa é gerar fractais, é: Deverá ser feita a implementação de forma recursiva ou iterativa?

E, no caso do meu código, a resposta escolhida foi a iterativa, por diversas razões. Primeiramente, é fato que implementações iterativas, quando possíveis, são superiores às recursivas em relação à eficiência e ao custo de memória. Implementações recursivas tendem a consumir muito memória da *stack* e a serem limitadas por isso. Além disso, uma opinião pessoal minha é que um código iterativo é mais fácil de compreender do que um recursivo caso não haja conhecimento prévio sobre recursividade.

Principalmente por essas razões, eu escolhi implementar o código de forma iterativa. Claro, implementações iterativas também tem seus negativos. Deixam o código menos elegante e claro (quando quem está lendo tem algum conhecimento sobre recursividade) e de uma forma geral aumentam o tamanho do código. Mas, para mim, a eficiência e não dependência de forma tão grande de memória da *stack*, favoreceram muito a escolha da iteratividade.

No PDF disponibilizado nas instruções para o TP, a sugestão da versão iterativa envolvia ler e gravar arquivos repetidamente. No caso do meu código, acredito que não havia necessidade de acessar várias vezes arquivos de texto diferentes para a gravação, e seria mais eficiente fazer todas as modificações dentro de uma *string* previamente alocada e depois inseri-la em um arquivo caso necessário.

```c
// returns the expected lenght of koch island in the "n" recursion level
// (also counts symbols that will be removed at the end, like X´s and Y´s)
int estimate_koch_island_lenght(int max_recursion_level){
    int estimated_lenght = 3 + 4*power(9, max_recursion_level);
    for(int i=1; i<=max_recursion_level; i++){
        estimated_lenght += 4*6*power(9, i-1);
    }
    return estimated_lenght;
}
// returns the expected lenght of hilbert space-filling curve in the "n" recursion level
// (also counts symbols that will be removed at the end, like X´s and Y´s)
int estimate_hilbert_space_lenght(int max_recursion_level){
    int estimated_lenght = power(4, max_recursion_level);
    for(int i=1; i<=max_recursion_level; i++){
        estimated_lenght += 7*power(4, i-1);
    }
    return estimated_lenght;
}
// returns the expected lenght of dragon curve in the "n" recursion level
// (also counts symbols that will be removed at the end, like X´s and Y´s)
int estimate_dragon_curve_lenght(int max_recursion_level){
    int estimated_lenght = 1 + power(2, max_recursion_level);
    for(int i=1; i<=max_recursion_level; i++){
        estimated_lenght += 3*power(2, i-1);
    }
    return estimated_lenght;
}
```

O código descobre quantos caracteres a *string* final terá (antes da remoção de X e Y) para alocar todo o espaço necessário para a geração do fractal de uma vez.

```c
// generates a fractal string and saves it to a file
void generate_fractal_string(char* axioma, rule* rules, int number_of_rules, int max_recusion_level, char* target_filename){
    int fractal_string_lenght = strlen(axioma);
    // recursion level loop
    for(int recursion_level=0; recursion_level<max_recusion_level; recursion_level++){
        // reading each recusion level fractal string
        for(int characther=0; characther<fractal_string_lenght; characther++){
            // applying rules if needed
            for(int rule_number=0; rule_number<number_of_rules; rule_number++){
                if(axioma[characther]==rules[rule_number].substituition_symbol){
                    replace(axioma, rules[rule_number].substituition_text, characther);
                    characther += rules[rule_number].substituition_text_lenght - 1;
                    fractal_string_lenght += rules[rule_number].substituition_text_lenght - 1;
                }
            }
        }
    }
    // removing symbols if needed
    fractal_string_lenght = strlen(axioma);
    for(int characther=0; characther<fractal_string_lenght; characther++){
        for(int rule_number=0; rule_number<number_of_rules; rule_number++){
            if(axioma[characther]==rules[rule_number].substituition_symbol && rules[rule_number].remove_symbol==1){
                pop(axioma, characther);
                fractal_string_lenght--;
                characther--;
            }
        }
    }
    // writing results in a txt file
    FILE* file;
    file = fopen(target_filename, "w");
    fprintf(file, "%s", axioma);
    fclose(file);
}
```

Então, realiza operações somente dentro dessa *string* previamente alocada (mudando as posições analisadas de acordo com o número de caracteres substituídos para não entrar em *loop* infinito), aplicando as regras no axioma de acordo com o nível de recursão desejado.

Assim, não é necessário abrir e gravar arquivos, deixando o programa mais eficiente.

2. Equações de recorrência

Terminologia:

F(n) = número de Fs no nível *n* de recursão
X(n) = número de Xs no nível *n* de recursão
Y(n) = número de Ys no nível *n* de recursão
S(n) = número total de símbolos (F, X, Y, +, -) no nível *n* de recursão
T(n) = número de símbolos que não são Fs no nível *n* de recursão
M(n) = número de símbolos que não são X ou Y no nível *n* de recursão

- Ilha de Koch
  $F(0) = 4$
  $F(n) = 9*F(n-1)$

$T(n) = S(n) – F(n)$

$S(0) = 7$
$S(n) = 15*F(n-1) + T(n-1) = 14*F(n-1) + S(n-1)$

- Preenchimento de Espaço de Hilbert
  $X(0) = 1$
  $X(n) = 2*X(n-1) + 2*Y(n-1)$

  $Y(0) = 0$
  $Y(n) = 2*X(n-1) + 2*Y(n-1)$

  $F(0) = 0$
  $F(n) = 3*X(n-1) + 3*Y(n-1) + F(n-1)$

  $T(n) = S(n) – F(n)$
  $M(n) = S(n) – X(n) – Y(n)$

  $S(0) = 1$
  $S(n) = 11*X(n-1) + 11*Y(n-1) + M(n-1) = 10*X(n-1) + 10*Y(n-1) + S(n-1)$

- Curva do Dragão
  $X(0) = 1$
  $X(n) = X(n-1) + Y(n-1)$

  $Y(0) = 0$
  $Y(n) = X(n-1) + Y(n-1)$

  $T(n) = S(n) – F(n)$
  $M(n) = S(n) – X(n) – Y(n)$

  $S(0) = 2$
  $S(n) = 5*X(n-1) + 5*Y(n-1) + M(n-1) = 4*X(n-1) + 4*Y(n-1) + S(n-1)$

3. Complexidade da implementação

O código trabalha através do uso de um algoritmo principal e seis algoritmos auxiliares. Os auxiliares desempenham papeis menores nos algoritmos principais, como remover um caractere, inserir uma *string*, ou elevar um uma base a um expoente. Já o algoritmo principal é o que realiza a geração do fractal.

```c
// generates a fractal string and saves it to a file
void generate_fractal_string(char* axioma, rule* rules, int number_of_rules, int max_recusion_level, char* target_filename){
    int fractal_string_lenght = strlen(axioma);
    // recursion level loop
    for(int recursion_level=0; recursion_level<max_recusion_level; recursion_level++){
        // reading each recusion level fractal string
        for(int characther=0; characther<fractal_string_lenght; characther++){
            // applying rules if needed
            for(int rule_number=0; rule_number<number_of_rules; rule_number++){
                if(axioma[characther]==rules[rule_number].substituition_symbol){
                    replace(axioma, rules[rule_number].substituition_text, characther);
                    characther += rules[rule_number].substituition_text_lenght - 1;
                    fractal_string_lenght += rules[rule_number].substituition_text_lenght - 1;
                }
            }
        }
    }
    // removing symbols if needed
    fractal_string_lenght = strlen(axioma);
    for(int characther=0; characther<fractal_string_lenght; characther++){
        for(int rule_number=0; rule_number<number_of_rules; rule_number++){
            if(axioma[characther]==rules[rule_number].substituition_symbol && rules[rule_number].remove_symbol==1){
                pop(axioma, characther);
                fractal_string_lenght--;
                characther--;
            }
        }
    }
    // writing results in a txt file
    FILE* file;
    file = fopen(target_filename, "w");
    fprintf(file, "%s", axioma);
    fclose(file);
}
```

A função *generate_fractal_string* recebe como parâmetros um axioma, um conjunto de regras e seu tamanho, o máximo nível de recursão desejado e um arquivo de saída. Note que essa função é capaz de gerar fractais independentemente do número de regras de cada um. Portanto, ela foi usada para a geração dos 3 fractais escolhidos.

O primeiro loop ocorre o número de vezes do nível máximo de recursão. O segundo ocorre de acordo com o número de caracteres de cada nível de recursão. O terceiro depende do número de regras do fractal (que é constante, e não muda durante a execução do algoritmo).

O If que compara se um caractere deve ser substituído tem um custo 1, e ambas as somas dentro do *if* terão custo 1 também. O acesso ao caractere e à regra correta tem custo 1.

As funções *pop*, *replace* e *insert* são funções auxiliares para fazer a manipulação de *strings*. Respectivamente, apaga um caractere, troca um caractere por uma *string* e insere uma *string* em outra.

```c
// inserts "target" string into "origin" at the specified position
void insert(char* target, char* origin, int position) {
    int base_lenght = strlen(origin);
    int target_lenght = strlen(target);
    memmove(origin + position + target_lenght, origin + position, base_lenght - position + 1);
    memcpy(origin + position, target, target_lenght);
}
// removes a charachter at a specified position in a "target" string
void pop(char* target, int position){
    int target_lenght = strlen(target);
    for(int i=position; i<target_lenght; i++){
        target[i] = target[i+1];
    }
}
// replaces a charachter in "position" at "origin" string with a "target" string
void replace(char* origin, char* target, int position){
    pop(origin, position);
    insert(target, origin, position);
}
```

A função *insert* tem o custo do tamanho de *target* e *origin* por conta do *strlen*, mais o custo de *memmove* que é o tamanho de *origin* menos a posição desejada, adicionado ao custo de *memcpy* que será o tamanho de *target*.

A função *pop* tem o custo do tamanho de target multiplicado por dois, menos a posição desejada. E a função *replace* soma ambos os custos.

Após o término do loop principal para aplicar as regras, temos a remoção de símbolos (caso seja necessária) que terá o custo do tamanho final do fractal multiplicado pelo número de regras, multiplicado novamente pelo tamanho final do fractal, por conta do uso da função *pop*.

E, por fim, o custo de abrir um arquivo, escrever nesse arquivo e fechá-lo seria O(L) onde L é o tamanho da *string* escrita.

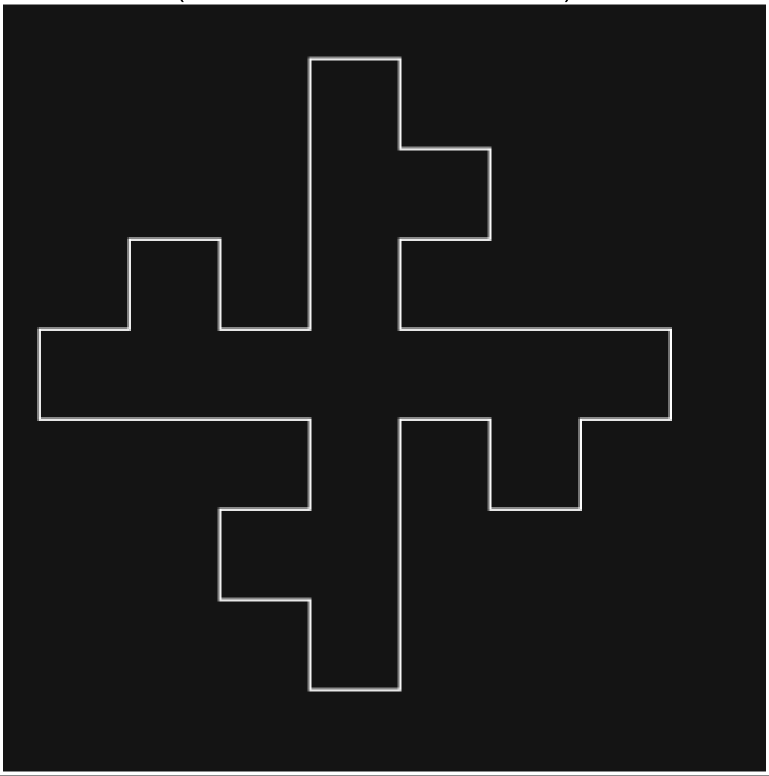
O custo total será:
O(*max_recursion_level***number_of_rules**S(*max_recursion_level*))

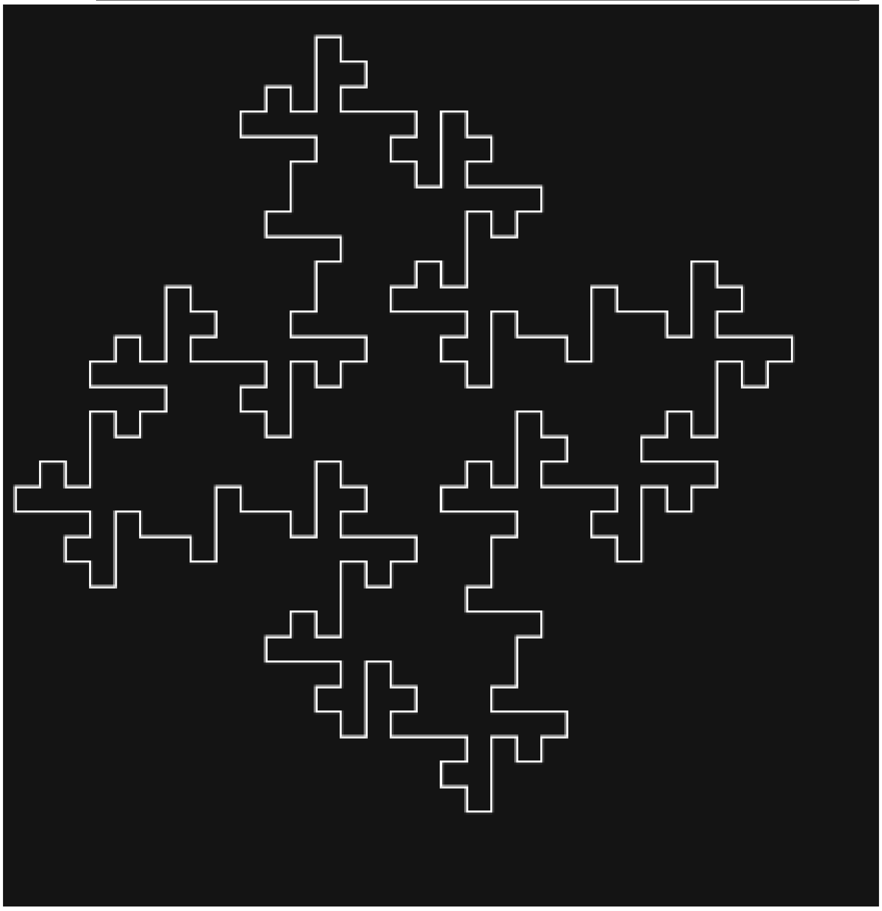
Onde S(*max_recursion_level*) é o tamanho final da *string* do fractal. Note que o custo é exponencial ao parâmetro *max_recursion_level* uma vez que S tem o crescimento exponencial.

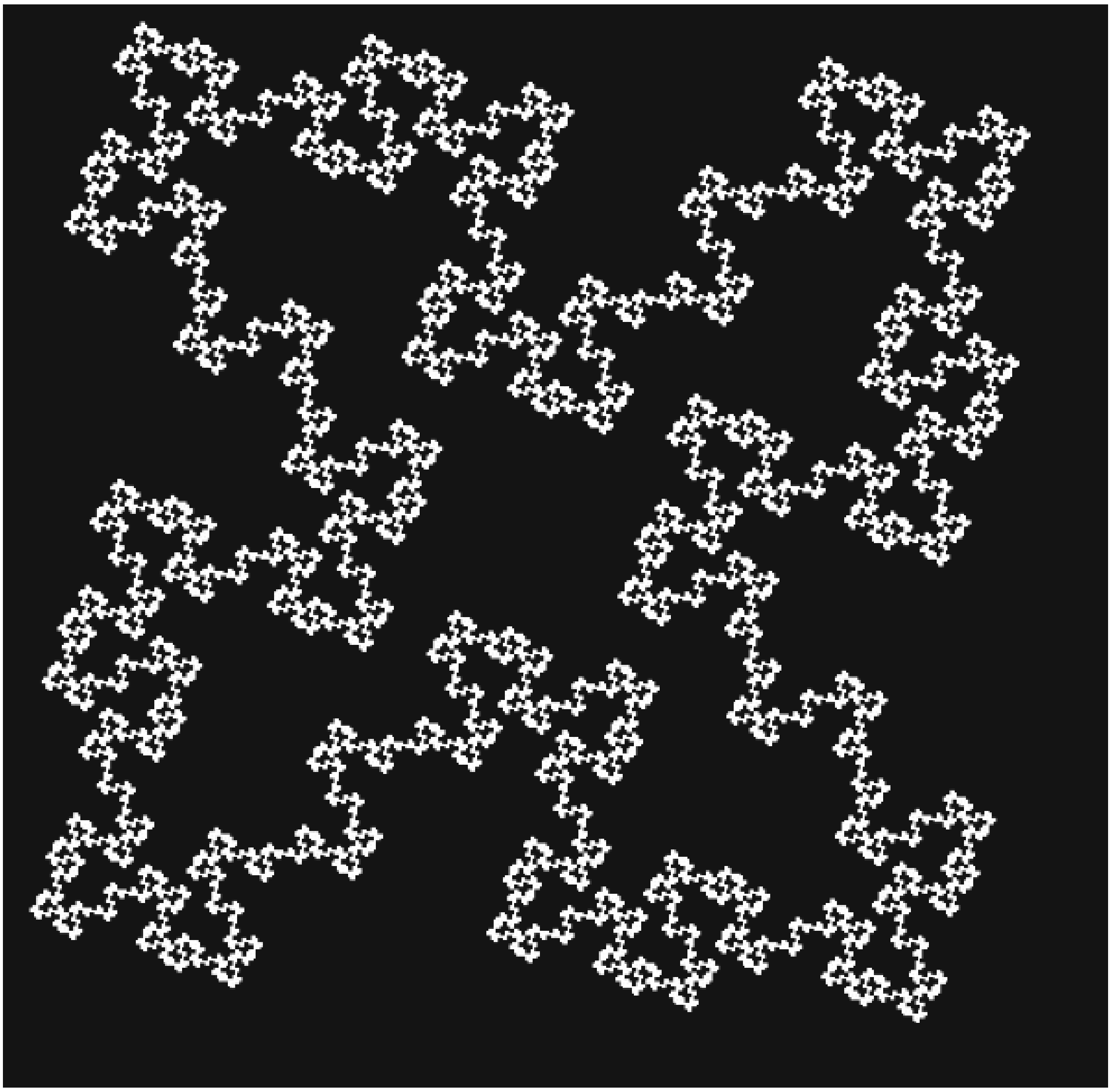
4. Ferramentas para desenhar os fractais

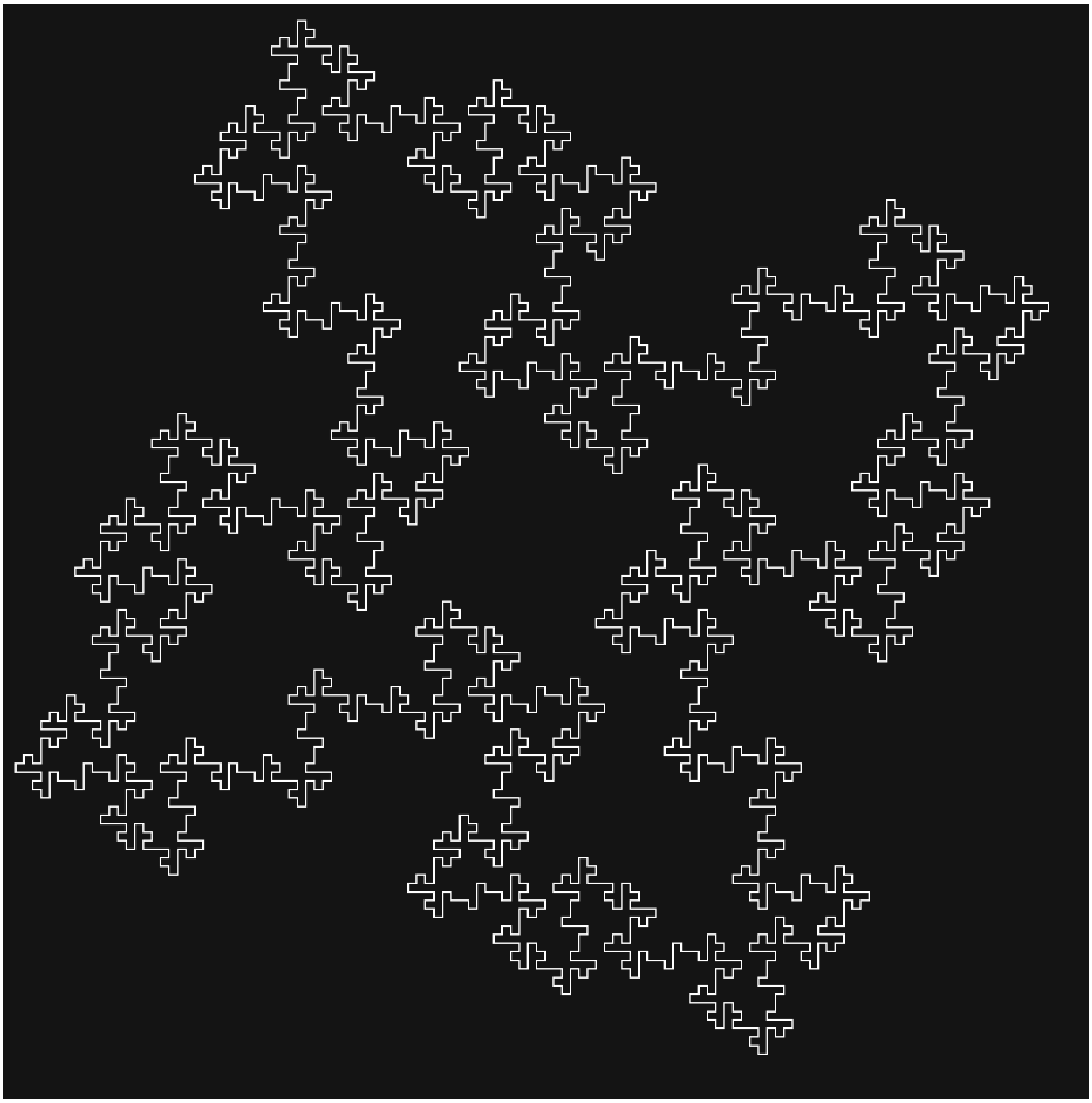
Existem diversas ferramentas para desenhar os fractais. Sites online podem gerar os desenhos derivados do *l-system*, e bibliotecas como o *turtle* ou o *matplotlib* podem ser usadas para a geração das figuras.
Aqui, usarei um site disponível em https://piratefsh.github.io/p5js-art/public/lsystems/ para gerar as figuras.

Ilha de Koch (níveis de recursão 1, 2, 3 e 4)

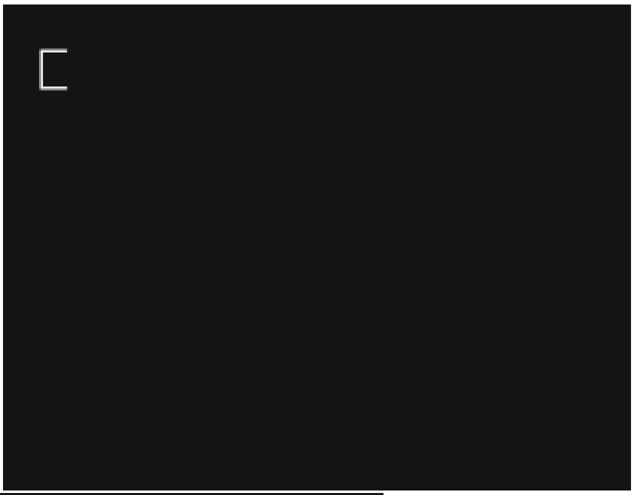


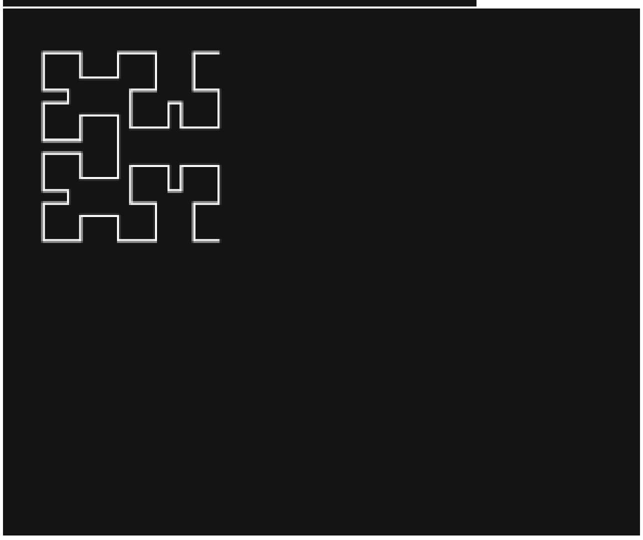


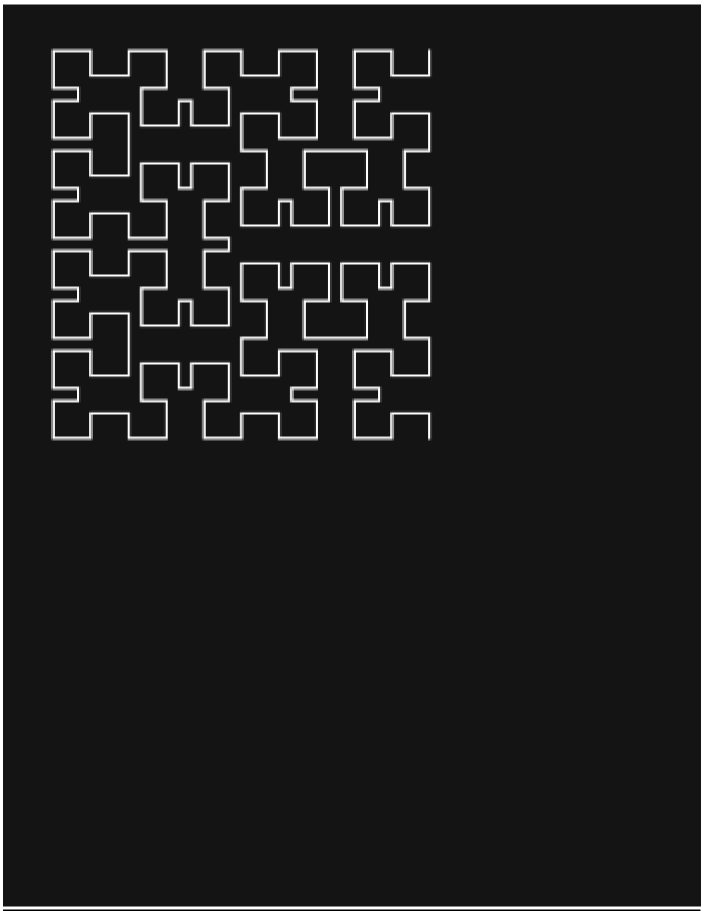




Preenchimento de Espaço de Hilbert (níveis de recursão 1, 2, 3 e 4)







Curva do Dragão (níveis de recursão 1, 2, 3, 4 e 10)