

Classification topologique des ensembles convexes de Allen

Classification of Allen's convex sets

Michel F. Dubois¹

Sylviane R. Schwer²

¹ I.U.T. de Vannes

² L.I.P.N.-UPRES-A 7030

Institut Galilée. Université Paris 13

Bd J-B Clément.

Fr. 93430 Villetaneuse.

e-mail: schwer@lipn.univ-paris13.fr

Résumé

Représenter et raisonner sur des informations temporelles qualitatives, incomplètes et imprécises constitue une partie essentielle de nombreux travaux en intelligence artificielle. Les modèles de représentation de ces informations temporelles reposent soit sur le concept d'intervalle, soit sur celui de point. Raisonner dans l'algèbre d'intervalle d'Allen est un problème connu comme NP-difficile. C'est pourquoi la recherche de sous-classes traitables est si importante. La classe traitable la plus utilisée, dû au concept cognitif de voisinage, est la classe des 83 relations convexes, ensemble des relations de Allen traduisibles en conjonction d'inéquations linéaires sur l'ensemble de leurs extrémités (points). Nous proposons dans cet article, une taxonomie de cette sous-classe fondée sur l'ensemble des ordres sur au plus 4 points préservant la notion d'intervalle. Nous en avons déduit un outil graphique d'aide à la spécification et à la résolution des contraintes temporelles qualitatives.

Mots Clef

Représentation et raisonnement temporel, algèbre de Allen, convexité, taxonomie.

Abstract

Representing and reasoning about incomplete and indefinite qualitative temporal information is an essential part of many artificial intelligence tasks. An interval-based framework and a point-based framework has been proposed for representing such temporal information. Reasoning tasks in Allen Interval Algebra are known to be NP-hard. That is why isolating tractable subclasses are so important. The

most used tractable subclass, due to the cognitive perspective of neighborhood, is the convex subclass, which consists of the 83 Allen's relations, one can translate into a conjunction of linear inequalities over endpoints. We propose, in this paper, a taxonomy for the convex subclass based on orders over a set of at most four points supporting intervals semantics and derive a graphical tool for designing qualitative temporal constraints between intervals and computing all possible solutions in a graphical manner in linear time.

Keywords

Temporal representation and reasoning, Allen's algebra, convexity, taxonomy.








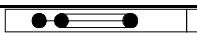
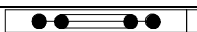


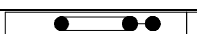


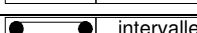
1 Introduction

Le raisonnement sur un univers évolutif exige souvent, plutôt qu'une modélisation explicite du temps, la modélisation des relations temporelles pouvant exister entre les objets spécifiques aux domaines considérés [8]. C'est par exemple le cas en planification, en contrôle ou en recherche ou suivi de scénarii. Un processus d'abstraction permet de réduire ces objets à leur trace temporelle, c'est-à-dire leur durée de vie ou d'occurrence. Les modèles utilisés sont généralement des points [19] des intervalles [1], [2], des chaînes d'intervalles [9] et [10], des intervalles généralisés [11] ou des mélanges comme des points et des intervalles [18] définis sur un ensemble totalement ordonné et dense comme R ou Q . C'est l'approche de Allen [2], travaillant sur les intervalles qui a donné lieu au plus grand nombre de travaux scientifiques.

Allen est le premier à avoir exhibé les 13 relations qua-

litatives possibles entre deux intervalles et à fournir une algèbre pour le raisonnement sur les couples d'intervalles. Ces 13 relations élémentaires que l'on peut trouver entre deux intervalles indépendamment des coordonnées exactes des débuts et fins des intervalles, sont qualitatives et topologiques (représentées dans le tableau 1). Une partie non vide de l'ensemble de ces 13 relations atomiques représente les relations possibles entre deux intervalles. Si cette partie est réduite à un singleton, l'information est complète, sinon elle est incomplète : une seule de ces relations sera à un instant donné réalisée. Cette approche représente l'information incomplète par des disjonctions de relations atomiques possibles. A partir de l'ensemble des 13 relations atomiques, on peut construire 2^{13} parties possibles. La partie vide représente l'absence de relation entre 2 intervalles. L'algèbre d'Allen munie des opérations d'inversion, d'intersection et de composition hérite de la structure d'une algèbre booléenne munie des opérateurs qui lui permettent d'être une algèbre relationnelle au sens de Tarski [17].

TAB. 1 – Les 13 relations de Allen

Relations	Graphiques	Mots
précède	 p	$aabb$
rencontre	 m	$a \binom{a}{b} b$
chevauche	 o	$abab$
débute	 s	$\binom{a}{b} ab$
pendant	 d	$baab$
termine	 f	$ba \binom{a}{b}$
égale	 =	$\binom{a}{b} \binom{a}{b}$
est-terminé-par	 fi	$ab \binom{a}{b}$
contient	 di	$abba$
est-débuté-par	 si	$\binom{a}{b} ba$
est-chevauché-par	 oi	$baba$
est-rencontré-par	 mi	$b \binom{a}{b} a$
est-précédé-par	 pi	$bbaa$
Intervalle A	 intervalle A	aa
Intervalle B	 intervalle B	bb

Dès que l'on est en présence de trois intervalles ou plus, il faut utiliser les tables de transitivité de Allen. Une table de transitivité permet de déterminer la composition de deux relations. En effet la connaissance de relations liant X et Y, de relations liant Y et Z, peut permettre de déduire des relations possibles entre X et Z. Pour mener un tel raisonnement, il faut des pas d'inférence. Les opérateurs de composition et d'intersection permettent de les définir.

Le problème de déterminer l'existence d'une solution satisfaisant un ensemble de contraintes est NP complet dans le cas général [19]. Pour obtenir des algorithmes polynomiaux, il faut déterminer des sous classes de l'ensemble

à 8192 éléments. La plus grande sous-classe contenant les 13 relations atomique permettant des algorithmes polynomiaux est la classe ORD-Horn [12] qui possède 868 éléments. La plus petite sous-classe est celle des intervalles convexes définies par Nökel [13] et étudiés par Freksa [5] contenant 83 éléments. Van Beek & Cohen [20] ont montré que pour cette sous-classe, la consistance de chemin coïncide avec la consistance globale du réseau. D'autres classes ont été étudiées comme l'algèbre d'intervalles restreints contenant 187 éléments et qui est équivalente à l'algèbre d'instant. La classe des ensembles convexes est d'un intérêt pratique capital car non seulement elle possède les algorithmes les plus performants mais aussi permet de traiter la plupart des applications réelles. C'est pourquoi, nous proposons une taxonomie des 82 relations convexes propres (non vides) possibles entre deux intervalles en 15 classes, dénommées spectres et 38 sous-classes, dénommées patrons. Les spectres sont exactement tous les ordres sur au plus 4 points. Ils correspondent aussi aux 29 relations floues de Freksa qui forment la fermeture transitive de l'ensemble des 13 relations de base. Les patrons utilisent la notion de A-voisinage de Freksa. Le but de cette taxonomie est d'offrir à l'utilisateur une palette de 15 icônes spectrales. Après avoir choisi une icône, il peut la spécialiser en un patron sur lequel il ne lui reste plus qu'à indiquer l'identifiant des deux intervalles considérés pour décrire leurs relations possibles. Une fois ces spécifications faites, l'utilisateur demande la résolution de son problème par le système. L'ensemble des solutions possibles lui est fourni sous forme graphique.

L'usage de graphes pour le calcul des solutions d'un problème de contraintes temporelles est classique. Allen [2] utilise des graphes dont les sommets sont les intervalles et les arcs, les relations possibles, ou autorisées entre les intervalles étiquetant les noeuds extrémités. (figure 3). Toute insertion d'un nouveau fait, c'est à dire toute expression d'une relation temporelle entre deux intervalles, implique le calcul des relations entre ces intervalles et de chacun des nœuds du graphe existant. L'algorithme ne détecte pas les inconsistances dans le cas général. En revanche, il le fait pour la sous-classe des pointisables [21]. De plus cette représentation ne permet pas une représentation des relations possibles entre au moins trois intervalles. Les graphes de *meet* de Revault [15] permettent, tout en conservant le concept d'intervalles, de raisonner sur un ensemble fini quelconque d'intervalles. Son approche calculatoire est la même que celle que nous avons suivie : celle de pièces de Lego. Mais les graphes obtenus sont schématiquement moins directement traduisibles en scénarii car les intervalles y sont représentés par des points sur le graphe et non par des segments, moyen usuel de représenter les intervalles. Notre représentation, fondée sur des relations topologiques entre points, conserve néanmoins la sémantique des intervalles.

En effet, les points des graphes sont conceptuellement le support matériel de ces intervalles. Un point correspond à une partie des intervalles suivant la relation l'intervalle I est représenté dans le même point que l'intervalle J si et seulement si I rencontre J. De plus, chacun de nos graphes est directement traduisible en un langage rationnel [16].

Utilisant l'équivalence de l'algèbre d'instant et de l'algèbre d'intervalles restreinte, des réseaux ou treillis d'instant ont été développés pour calculer des scénarii globaux comme dans le système IxTeT [7] ou dans les graphes de scénarii temporels de Fontaine [4]. Ces graphes détruisent la sémantique des intervalles. Il y a une ressemblance visuelle entre nos graphes et ces réseaux d'instant mais l'interprétation des points n'est pas la même. En effet, dans notre formalisme, un point représente un instant temporel, rencontre possible de plusieurs événements et non des extrémités d'intervalles. L'étiquetage informe de l'ensemble des intervalles commençant ou se terminant à l'instant étiqueté.

L'article est divisé en 5 sections dont cette introduction. La deuxième section fournit la taxonomie. La troisième décrit l'exemple dû à Revault [15]. La quatrième donne un exemple d'application pour des relations non convexes. En effet tout ensemble de relations peut être décrit par au plus quatre ensembles convexes. L'exemple utilisé est celui du graphe d'incohérence de Allen. La dernière section conclut en présentant le cadre d'une application réelle pour le positionnement spatial d'objets dans une scène 3D.

2 Taxonomie de la classe convexe.

Une relation convexe est une partie convexe du treillis des 13 relations convexes présenté dans la figure 1.

En représentant un intervalle comme un couple de points - ces extrémités - de l'ensemble des réels, une relation qualitative entre deux intervalles présente soit deux points (égale), soit trois points (début, termine, rencontre, est-débuté-par, est-terminé-par, est-rencontré-par) soit quatre points (précède, chevauche, pendant, contient, est-chevauché-par, est-précédé-par) avec la contrainte qui exprime que si deux points sont issus du même intervalle, alors ils sont ordonnés l'un par rapport à l'autre. Les ordres sont donc réalisés sur des points (appelés S-points) qui eux-mêmes peuvent contenir plusieurs points extrémités d'intervalles. Dans le cas de deux intervalles, un S-point contient un ou deux points extrémités d'intervalles. Sur n intervalles, ils peuvent contenir n points extrémités d'intervalles.

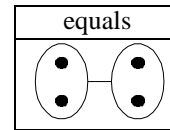
Un S-point singleton est représenté par ●, sinon par ⊙ pour 2 intervalles.

2.1 Détermination des 15 spectres

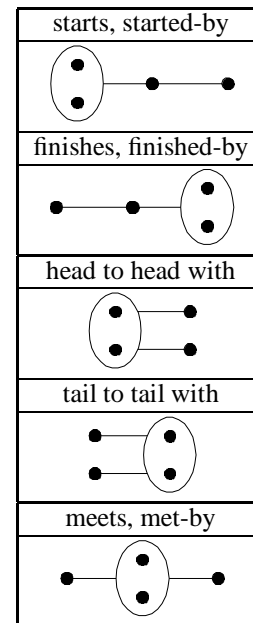
Une recherche exhaustive fournit 15 ordres possibles satisfaisant la contrainte énoncée sur au plus 4 points qui sont les 15 spectres suivants. Ces derniers correspondent aux 29

relations floues de Freksa [5] formant la fermeture transitive de Allen [2]. L'expression simple attribuée par Freksa à chaque relation floue est mentionnée au dessus de chaque spectre.

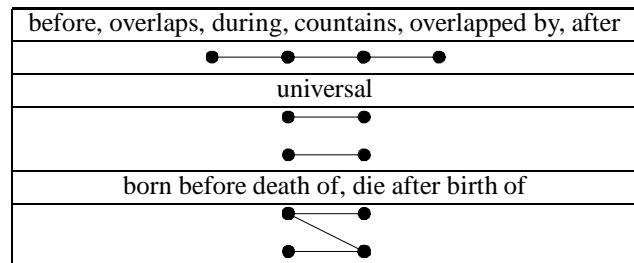
Spectres de taille 2. Il n'existe qu'un ordre possible satisfaisant la contrainte énoncée. Cet ordre correspond à l'égalité des deux intervalles.



Spectres de taille 3. Sur 3 points, il y en a un qui correspond à une extrémité commune des deux intervalles, les deux autres points sont liés à ce point commun par la relation d'ordre. Ce qui donne les 5 possibilités suivantes - dont deux symétries chirales.



Spectres de taille 4. Quatre points définissent deux couples de points liés entre eux par la relation d'ordre. Ce qui donne 9 possibilités, dont deux symétries chirales.



older, younger of
survives, survived by
older and survived by, younger and survives
contemporary of
older contemporary of, younger contemporary of
survived by contemporary of, surviving contemporary of

2.2 Patrons

Les spectres sont habillés avec la notion de A-voisinage, au sens de Freksa [5] (sens de la flèche). Ce qui signifie qu'un point peut venir fusionner avec un point qui est lié à lui par l'ordre mais pas par la contrainte (i.e. un point de l'autre intervalle).

Pour chaque spectre, une étude exhaustive de la possibilité d'introduire de telle flèche est étudiée. En particulier, il n'existe pas de flèche entrant ou sortant d'un point représentant deux extrémités d'intervalles confondues, pas de flèche sur les liens dus à la contrainte car cela permettrait de transformer un intervalle en un simple point.

Les 38 patrons sont exposés dans le tableau 2 et le tableau 3.

2.3 Classification des ensembles convexes

Suivant le formalisme des mots temporels [16], à chaque intervalle est attribué une lettre.

Soit a et b les deux lettres attribués aux deux intervalles considérés, le jeu consiste à étiqueter les points du graphe par ces lettres en respectant la sémantique des intervalles. Le tableau 5 récapitule les 83 ensembles convexes suite à l'étiquetage des patrons.

3 Exemple de manipulation

Le principe est le même que celui des jeux de construction Lego et utilise des algorithmes de recherche de motifs dans les mots.

Un ensemble convexe est représenté par des patrons étiquetés dont les nœuds sont les points étiquetés par des lettres. Deux ensembles convexes doivent s'emboîter par collage des points de même étiquettes sans casser les graphes, c'est à dire que les ordres sont compatibles : entre les lettres

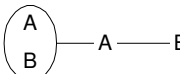
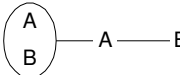
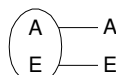
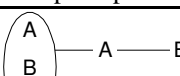
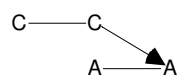
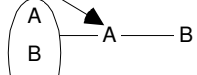
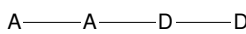

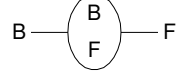

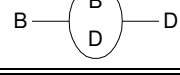

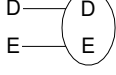
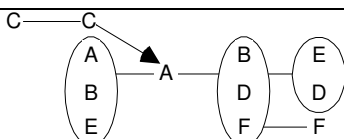
TAB. 2 – Les patrons

Classes	Patrons

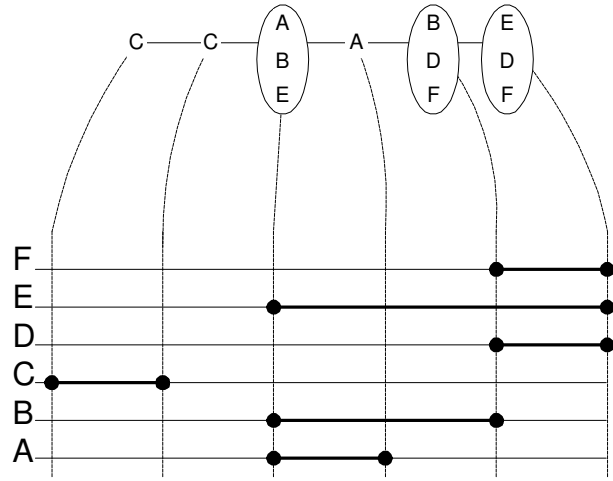
TAB. 3 – Les patrons (suite)

Classes	Patrons

TAB. 4 – La spécification du premier problème

Etat du système	Patron étiqueté
Prise en compte de la contrainte n° 1	
A arrive en même temps que B mais repart avant B	
<pre> A — A B — B C — C D — D E — E F — F </pre>	
A arrive en même temps que E, sans connaissance de leur départs respectifs	
 <pre> C — C D — D E — E F — F </pre>	
Prise en compte de la contrainte n° 2	
A part après ou en même temps que C	
 <pre> C — C D — D E — E F — F </pre>	
A part avant l'arrivée de D	
 <pre> C — C D — D E — E F — F </pre>	
Prise en compte de la contrainte n° 3	
F arrive à l'instant où B part	
 <pre> C — C D — D E — E F — F </pre>	
D arrive à l'instant où B part	
 <pre> C — C D — D E — E F — F </pre>	
Prise en compte de la contrainte n° 4	
E et D repartent en même temps	
 <pre> C — C D — D E — E F — F </pre>	
Résultat	
	

d'instants créés. Nous obtenons alors la chronologie suivante :



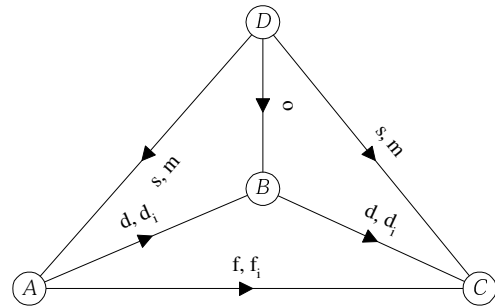
Il ne reste plus qu'à assigner des dates à chacun des 6 instants de cette chronologie.

4 Exemple dans le cas général

Il n'est pas possible d'échapper à l'explosion combinatoire inhérente aux problèmes de disjonction. Toute relation d'Allen sur deux intervalles est décomposable en au plus 7 ensembles convexes disjoints, nombre atteint par l'ensemble $\{aabb, abab, abba, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, baba, bbaa\}$. Le problème est toujours celui de la complexité[6]. Au sein de la sous classe des convexes, les meilleurs algorithmes sont linéaires comme ceux que nous utilisons.

En revanche, le choix d'une heuristique permettant de commencer par les contraintes les plus fortes permet d'en minimiser les effets comme nous le montrons sur l'exemple suivant.

Nous revisitons le graphe d'incompatibilité de Allen [2],



C et C' sont deux ensembles de patrons étiquetés, l'ensemble des contraintes correspondant à C et C' est

$$C'' = \{c \cap c' \mid c \in C, c' \in C'\}$$

Les relations ne sont pas toutes convexes. On les décompose en union de relations convexes.

Les contraintes utilisent donc les patrons étiquetés suivants :

- entre A et D : (1) = $(1a) \vee (1b)$



- entre A et B : (2) = $(2a) \vee (2b)$



- entre A et C : (3) = $(3a) \vee (3b)$



- entre B et C : (4) = $(4a) \vee (4b)$



- entre B et D :

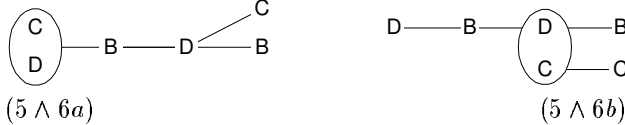


- entre C et D : (6) = $(6a) \vee (6b)$



Supposons que toutes ces contraintes nous sont spécifiées dès le début, nous allons choisir de commencer par la fusion des contraintes (5) et (6) - (5) car elle est la plus forte, (6) plutôt que (1) par proximité, (6) plutôt que (4) car nous privilégions les plus petits patrons.

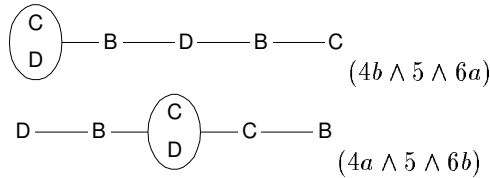
$$(5 \wedge 6) = (5 \wedge 6a) \vee (5 \wedge 6b)$$



Nous insérons la contrainte la plus forte par rapport au résultat précédant, c'est à dire celle liant B et C ie (4).

$(4a \wedge 6a \wedge 5)$ est le patron vide (\emptyset) car essayer de les connecter les casse. De même $(4b \wedge 6b \wedge 5)$ donne le patron vide. Il ne reste donc plus que deux patrons étiquetés.

$$(4 \wedge 5 \wedge 6) = (4b \wedge 5 \wedge 6a) \vee (4a \wedge 5 \wedge 6b)$$

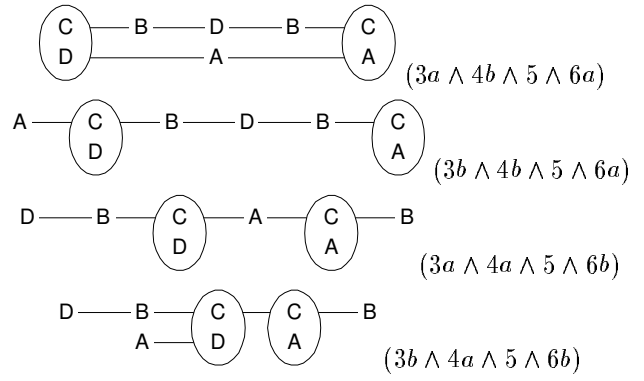


Le choix suivant ne permet pas d'échapper à la multiplication (2x2) des patrons étiquetés à cause de l'introduction de A.

Choisissons (3).

$$(3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge 6) = (3a \wedge 4b \wedge 5 \wedge 6a)$$

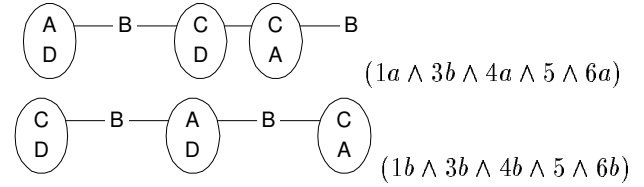
$$\vee (3a \wedge 4a \wedge 5 \wedge 6b) \vee (3b \wedge 4b \wedge 5 \wedge 6a) \vee (3b \wedge 4a \wedge 5 \wedge 6b)$$



Choisissons (1) qui minimise toujours la taille du patrons. La présence de $\begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$ élimine plusieurs patrons résultants. On trouve

$$(1 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge 6) = (1a \wedge 3b \wedge 4a \wedge 5 \wedge 6a)$$

$$\vee (1b \wedge 3a \wedge 4b \wedge 5 \wedge 6b)$$



Enfin, comme attendu, on voit que les patrons obtenus donnent pour A et B les patrons étiquetés :

A — B — A — B pour $(1a \wedge 3b \wedge 4a \wedge 5 \wedge 6a)$

et B — A — B — A pour $(1b \wedge 3b \wedge 4b \wedge 5 \wedge 6b)$

Ces patrons sont incompatibles avec (2).

Donc $(1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge 6) = \emptyset$

5 Conclusion et perspectives

Nous avons fourni dans cet article une taxonomie de la classe des convexes de l'algèbre d'Allen sur deux intervalles. Cette taxonomie, abstraction faite de la partie vide, possède 15 classes et 38 sous-classes (dont les 15 classes), représentées par des graphes dirigés acycliques non étiquetés appelés patrons. Chaque relation convexe d'Allen correspond à l'étiquetage de l'un de ces patrons. Cet étiquetage maintient la sémantique des intervalles. Le calcul de la recherche des solutions possibles se fait incrémentalement est fondé sur la recherche de motif dans des ensembles de mots [3]. A partir de cette taxonomie, nous développons un outil graphique d'aide à la spécification de contraintes temporelles qualitative. Cet outil doit être intégré dans le langage d'aide à la conception déclarative de scènes 3D SOML [14]. En effet, les objets étant empaquetés dans des boîtes isothétiques, les projections de leurs dimensions sur les axes de coordonnées, qui sont des intervalles, suffisent à déterminer leurs positions dans l'espace. Comme pour le premier exemple, l'aspect quantitatif est pris en compte

comme contrainte supplémentaire pour affiner les scénarii solutions.

Références

- [1] J. F. Allen. An Interval-Based Representation of Temporal Knowledge. *Proceedings of the seventh IJCAI, Vancouver, B. C.* (1991) 221-226
- [2] J. F. Allen. Maintening Knowledge about Temporal Interval *Communication of the ACM* 26(11), 1983 832-843.
- [3] M. Crochemore, C. Hancart: Automata for matching patterns in *Handbook of Formal Languages, G. Rosenberg and A. Salomaa. eds, Vol2 Linear Modeling, Springer Verlag 1997* pp399-462.
- [4] D. Fontaine. Une approche par graphes pour la reconnaissance descénarios temporels. *Revue d'Intelligence Artificielle*, Vol 10, 1996, pp 439-468.
- [5] C. Freksa. Temporal reasoning based on semi-intervals, *Artificial Intelligence*, Vol 54, 1991, pp 199-227.
- [6] A. Gerevini, L. Schubert. Efficient temporal reasoning through time graphs. *Proceeding of IJCAI'93* (1993) 648-654.
- [7] M. Ghallab, A. M. Alaoui. Relations temporelles symboliques : représentation set algorithmes. *Revue d'Intelligence Artificielle*, Vol 3, 1989 pp 67-115
- [8] J.-P. Haton & al. *Le raisonnement en intelligence artificielle*. Inter-Editions. Paris, 1991
- [9] Y. Kandrashina. Representation of temporal knowledge. *Proceedings of the Eight IJCAI, Karlsruhe, West Germany.* (1983) 346-348
- [10] P. Ladkin. Time Representation : A Taxonomy of Interval Relations. *Proceedings of the AAAI*, (1986) 360-366
- [11] G. Ligozat. On generalized interval calculi, *Proceedings of the AAAI, Anaheim, C.A.*, (1991) 234-240
- [12] B. Nebel, H. Bürckert. Reasoning about temporal relations: A maximal tractable subclass of Allen's Interval Algebra. *Journal of the ACM*, 42 (1995) 43-66
- [13] K. Nökel. Convex Relations Between Time Intervals. *Proceedings of the AAAI, Boston, MA.* (1990) 721-727
- [14] V. Popov, L. Popova, G. de Paoli. Vers un langage déclaratif de conception de scènes. *ACADIA'98*, Quebec, Canada, 1998.
- [15] J. Revault. Une modélisation par le graphe de la relation meet pour traiter des contraintes temporelles exprimées à l'aide d'intervalles. Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes, 14 nov 1996. France
- [16] S. R. Schwer. Raisonnement Temporel : les mots pour le dire. Rapport interne LIPN, 1997. Une nouvelle version est en cours de rédaction. La partie intéressante pour cet article est disponible auprès de l'auteur.
- [17] A. Tarski. On the calculus of relations. *The Journal of Symbolic logic*, vol. 6, n3, sept 1941, p73-89.
- [18] M. Vilain. A system for reasoning about time, *Proceedings of the third AAAI, Pennsylvania, PA* (1982) 197-201
- [19] M. Vilain, H. Kautz. Constraint Propagation Algorithms for Temporal Reasoning, *Proceedings of the fifth AAAI, Philadelphia, PA* (1986) 377-382
- [20] P.G. van Beek, R. Cohen. Exact and Approximate Reasoning about Temporal Relations, *Computational Intelligence*, Vol 6, 1990) 132-144.
- [21] M. Vilain, H. Kautz and P.G. van Beek. Constraint propagation algorithms for temporal reasoning: a revisited report. in D. S. Weld and J. de Kleer. eds., *Readings in Qualitative Reasoning about Physical Systems* (Morgan Kaufmann. San Mateo. CA. 1989) 373-381.

Tab. 5 – *La classification des ensembles convexes*

Patrons	Ensembles convexes	N
	$\left\{ \binom{a}{b} \binom{a}{b} \right\}$	1
	$\left\{ \binom{a}{b} ab \right\}, \left\{ \binom{a}{b} ba \right\}$	2
	$\left\{ \binom{a}{b} ab, \binom{a}{b} \binom{a}{b} \right\}, \left\{ \binom{a}{b} ba, \binom{a}{b} \binom{a}{b} \right\}$	2
	$\left\{ ab \binom{a}{b} \right\}, \left\{ ba \binom{a}{b} \right\}$	2
	$\left\{ ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b} \right\}, \left\{ ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b} \right\}$	2
	$\left\{ \binom{a}{b} ab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba \right\}$	1
	$\left\{ ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b} \right\}$	
	$\left\{ a \binom{a}{b} b \right\}, \left\{ b \binom{a}{b} a \right\}$	2
	$\{aabb\}, \{abab\}, \{abba\}, \{bbaa\}, \{baba\}, \{baab\}$	6
	$\{abab, \binom{a}{b} ab\}, \{abba, \binom{a}{b} ba\}, \{baba, \binom{a}{b} ba\}, \{baab, \binom{a}{b} ab\}$	4
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b\}, \{abab, a \binom{a}{b} b\}, \{bbaa, b \binom{a}{b} a\}, \{baba, b \binom{a}{b} a\}$	4
	$\{abab, ab \binom{a}{b}\}, \{abba, ab \binom{a}{b}\}, \{baba, ba \binom{a}{b}\}, \{baab, ba \binom{a}{b}\}$	4
	$\{abab, \binom{a}{b} ab, a \binom{a}{b} b\}, \{baba, \binom{a}{b} ba, b \binom{a}{b} a\}$	2
	$\{abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}\}, \{abba, \binom{a}{b} ba, ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}\}$ $\{baba, \binom{a}{b} ba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}\}, \{baab, \binom{a}{b} ab, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}\}$	4
	$\{abab, a \binom{a}{b} b, ab \binom{a}{b}\}, \{baba, b \binom{a}{b} a, ba \binom{a}{b}\}$	2
	$\{abab, \binom{a}{b} ab, a \binom{a}{b} b, ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}\}, \{baba, \binom{a}{b} ba, b \binom{a}{b} a, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, bbaab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	1
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, bbaab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba\}$ $\{abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, bbaab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a\}$ $\{a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, bbaab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, ab \binom{a}{b}, abba\}, \{bbaa, b \binom{a}{b} a, baba, ba \binom{a}{b}, baab\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, \binom{a}{b} ba\}$ $\{\binom{a}{b} ab, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, baab\}, \{abba, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b}\}$ $\{ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab\}, \{baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab\}, \{\binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, ab \binom{a}{b}\}, \{ba \binom{a}{b}, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}\}, \{\binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	2
	$\{abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, bbaab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba\}$	1
	$\{a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, bbaab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba\}$ $\{abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, bbaab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a\}$	2
	$\{a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, bbaab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a\}$	1
	$\{abab, ab \binom{a}{b}, abba\}, \{baab, ba \binom{a}{b}, baba\}$	2
	$\{abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, \binom{a}{b} ba\}, \{\binom{a}{b} ab, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba\}$	2
	$\{a \binom{a}{b} b, abab, ab \binom{a}{b}, abba\}, \{baab, ba \binom{a}{b}, baba, b \binom{a}{b} a\}$	2
	$\{a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, \binom{a}{b} ba\}$ $\{\binom{a}{b} ab, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a\}$	2
	$\{abab, \binom{a}{b} ab, baab\}, \{abba, \binom{a}{b} ba, baba\}$	2
	$\{abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, bbaab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b}\}, \{ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba\}$	2
	$\{a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, abba\}, \{baab, ba \binom{a}{b}, baba, b \binom{a}{b} a\}$	2
	$\{a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, \binom{a}{b} ba\}$ $\{\binom{a}{b} ab, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a\}$	2
	$\{abab, \binom{a}{b} ab, baab\}, \{abba, \binom{a}{b} ba, baba\}$	2
	$\{abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, bbaab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b}\}, \{ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba\}$	2
	$\{a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, baab\}, \{abba, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a\}$	2
	$\{a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, bbaab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b}\}$ $\{ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a\}$	2
\emptyset	La partie vide	1

FIG. 1 – Le treillis des 13 relations de Allen

