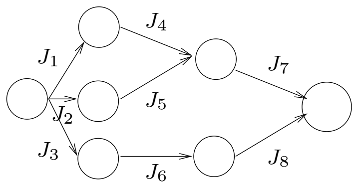

FIG. 2.9 – Le graphe PERT.

15 PERT probabiliste

Enoncé

La méthode PERT, qui a été présentée dans l'exercice 6 dans le cas de tâches de durées connues à l'avance, c'est-à-dire déterministe, est en fait à l'origine une méthode probabiliste. Elle a été développée pour prendre en compte des tâches dont on ne connaît pas les durées exactes à l'avance, ce qui est souvent le cas en réalité, en raison d'aléas qui viennent souvent perturber le bon déroulement du projet. La méthode PERT permet alors d'obtenir une estimation de la durée du projet. Nous considérons à partir de maintenant le graphe PERT de la figure 2.9.

Pour appliquer la méthode PERT dans le cas probabiliste, il est nécessaire de connaître trois durées pour chaque tâche :

- la durée minimale a ;
- la durée la plus probable m ;
- et la durée maximale b.

Ces durées sont (en semaines) :

Tâche	a	m	b
J_1	4	8	10
J_2	2	4	6
J_3	4	7	11
J_4	2	3	5
J_5	6	8	11
J_6	1	2	3
J_7	1	3	4
J_8	4	5	7

On suppose que les durées des tâches suivent une loi de type beta, ce qui permet de calculer pour chaque tâche, une durée moyenne et une variance à partir de ces trois durées de la façon suivante :

- moyenne $t = \frac{a+4m+b}{6}$
- variance $v = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$

Question 1. *Calculer les moyennes et variances des durées des tâches.*

Question 2. *Déterminer les dates de début au plus tôt et au plus tard de chaque tâche, en supposant que les durées d'exécution sont les durées moyennes obtenues à la question précédente. En déduire la durée moyenne du projet.*

Question 3. *Déduire de la question précédente un chemin critique, puis calculer la somme des variances des durées des tâches appartenant à ce chemin.*

On souhaite maintenant déterminer la probabilité que le projet se termine en une durée donnée. Pour cela on fait maintenant l'hypothèse que la durée du projet a une moyenne μ et un écart-type σ qui suivent une loi normale. Connaisant μ et σ, la probabilité que le projet dure x semaines s'obtient à partir de la table 2.2 en calculant $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$. Par exemple, si on obtient $Z = 1,83$, on cherche dans la table la ligne 1,8 et la colonne 0,03 : au croisement se trouve la valeur 0,4664, ce qui signifie que la probabilité que le projet dure x semaines (ou moins) est 0,5+0,4664 = 0,9664. Si Z est négatif, on fait le même raisonnement en ignorant le signe mais en n'ajoutant pas 0,5 à la valeur trouvée dans la table.

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

TAB. 2.2– Table de la loi normale.

Question 4. *Quelle est la probabilité que le projet dure 17 semaines ? 12 semaines ?*

Question 5. *Quelles sont les limites de cette méthode ?*

Réponses

Question 1. En appliquant les formules on obtient :

Tâche	t	v
J_1	$\frac{23}{3}$	1
J_2	4	$\frac{4}{9}$
J_3	$\frac{43}{6}$	$\frac{49}{36}$
J_4	$\frac{19}{6}$	$\frac{1}{4}$
J_5	$\frac{49}{6}$	$\frac{25}{36}$
J_6	2	$\frac{1}{9}$
J_7	$\frac{17}{6}$	$\frac{1}{4}$
J_8	$\frac{31}{6}$	$\frac{1}{4}$

Question 2. On calcule d'abord les dates de début au plus tôt r_i. La durée moyenne du projet est alors le maximum entre les dates de fin au plus tôt des tâches J_7 et J_8. On en déduit ensuite les dates de début au plus tard.

Tâche	r_i	f_i
J_1	0	$\frac{4}{3}$
J_2	0	0
J_3	0	$\frac{2}{3}$
J_4	$\frac{23}{3}$	$\frac{27}{3}$
J_5	4	4
J_6	$\frac{43}{6}$	$\frac{47}{6}$
J_7	$\frac{73}{6}$	$\frac{73}{6}$
J_8	$\frac{55}{6}$	$\frac{59}{6}$

Les dates de fin au plus tôt des tâches J_7 et J_8 sont respectivement $\frac{73}{6} + \frac{17}{6} = 15$ et $\frac{55}{6} + \frac{31}{6} = \frac{43}{3}$. Le projet a donc une durée moyenne de 15 semaines.

Question 3. Le chemin J_2, J_5, J_7 est critique puisque les tâches de ce chemin sont telles que $r_i = f_i$. La somme des variances pour ces tâches vaut $\frac{4}{9} + \frac{25}{36} + \frac{1}{4} = \frac{25}{18}$.

Question 4. Calculons μ et σ. D'après la question2, la durée moyenne μ vaut 15 et puisque $\sigma^2 = v$ on obtient $\sigma = \sqrt{\frac{25}{18}} = \frac{5}{3\sqrt{2}}$. Dans le premier cas, $x = 17$ d'où $Z = \frac{17-15}{\frac{2}{3\sqrt{2}}} = 1,70$. La valeur trouvée dans la table est 0,4554 (ligne 1,70, colonne 0,00), donc la probabilité que le projet dure au plus 17 semaines est 0,9554. Dans le second cas, on trouve $Z = \frac{12-15}{\frac{2}{3\sqrt{2}}} = -2,55$. Ainsi, la probabilité que le projet dure au plus 12 semaines est 0,4946 (ligne 2,50, colonne 0,05).

Question 5. Pour supposer que le projet a une durée moyenne et une variance qui suivent une loi normale, il faut un nombre suffisant de tâches (quelques dizaines) et des durées indépendantes. On peut alors appliquer le théorème central limite qui stipule que la somme d'un nombre important de valeurs aléatoires indépendantes suit une loi normale. Dans cet exercice, le nombre insuffisant de tâches ne permet pas de garantir les résultats obtenus.

Une seconde limite à cette approche est qu'elle repose sur l'analyse d'un seul chemin critique. Or, dans le cas où plusieurs chemins sont de longueurs proches, il se peut que le chemin critique réel ne soit pas celui choisi. Ainsi, le chemin J_4, J_6, J_8, qui a une durée moyenne de $\frac{43}{6} + 2 + \frac{31}{6} = 14,33$ semaines, est proche de la durée 15 du chemin critique : ce chemin peut dominer le chemin critique dans de nombreux cas.