

# Test de cohérence sur des graphes de contraintes entre hyperintervalles

## Coherence test on graphs constraints between hyperintervals

Philippe Balbiani \*

Institut de recherche en informatique de Toulouse †

### Résumé

*Dans cet article, nous développons un modèle pour la représentation logique et le traitement algorithmique du temps du point de vue de l'analyse non standard. Nous proposons une théorie du premier ordre et une approche qualitative des relations entre intervalles d'hyperréels. Concernant la théorie du premier ordre pour le temps hyperréel, nous présentons une axiomatisation complète et nous étudions la complexité du problème de l'appartenance à cette théorie. Concernant l'approche qualitative pour le temps hyperréel, nous présentons les graphes de contraintes qualitatives et nous étudions la complexité du problème de la consistance de ces graphes.*

### Abstract

*This paper proceeds to develop a model for representing and reasoning about time from the perspective of non-standard analysis. It sets out a first-order theory and a qualitative approach for relations between intervals of hyperreals. Within the first-order theory for hyperreal time, we establish a complete axiomatization and we study the computational complexity of the associated membership problem. Within the qualitative approach for hyperreal time, we establish qualitative constraint graphs and we study the computational complexity of the associated consistency problem.*

### Mots-clés

Raisonnement temporel qualitatif, algèbre des intervalles, satisfaction de contraintes.

### Keywords

Qualitative temporal reasoning, interval algebra, constraint satisfaction.

## 1 Introduction

Le but du système temporel dont nous allons parler est de permettre l'interprétation correcte d'expressions mettant en jeu différents niveaux de granularité dans une représentation du temps basée sur des entités étendues associées à plusieurs relations binaires. En informatique et

en intelligence artificielle, cela est important pour au moins deux raisons.

La première raison réside dans le fait qu'une modélisation correcte des phénomènes temporels du monde réel nécessite la prise en compte de différents niveaux de granularité dans la représentation du temps [5,9]. Pour modéliser des systèmes hybrides dont le comportement mêle nécessairement une composante continue et une composante discrète, le recours à des entités infinitésimales (hyperréels) associées à plusieurs relations binaires (comparabilité, proximité, ...) a souvent été fait [10,13]. Iwasaki *et al* [10], par exemple, considèrent les hyperréels et étudient l'applicabilité de l'analyse non standard à une représentation du temps basée sur les hyperréels.

La seconde raison réside dans le fait qu'une interprétation correcte de ce qui se rapporte au temps dans les langues naturelles nécessite le surpassement de la simple notion de précédence temporelle entre des entités ponctuelles comme les instants [1,7]. Pour interpréter des énoncés correspondant à une activité qui implique nécessairement l'existence d'un début et l'existence d'une fin, le recours à des entités étendues (intervalles) associées à plusieurs relations binaires (précédence stricte, chevauchement, ...) a pris un développement important [6,15]. Van Beek [6], par exemple, considère les intervalles et étudie la complexité du problème de la consistance des graphes de contraintes qualitatives entre intervalles.

Aucun modèle formel pour la représentation logique et le traitement algorithmique du temps présenté jusqu'à aujourd'hui ne recourt à la fois à des entités infinitésimales comme les hyperréels et à des entités étendues comme les intervalles. Cet article développe un modèle pour la représentation logique et le traitement algorithmique du temps du point de vue de l'analyse non standard. Proposant de travailler à partir de la notion d'intervalle d'hyperréels ou d'hyperintervalle, il est organisé en 5 sections. Dans la section 2, nous évoquons les travaux de Robinson [14] qui sont à l'origine du développement de l'analyse non standard en mathématiques. Dans la section 3, nous examinons la théorie du premier ordre avec égalité de l'ensemble des intervalles d'hyperréels muni de la relation de rencontre immédiate et de la relation de rencontre décalée. La section 4 porte sur l'algèbre des hyperintervalles. Dans la section 5, nous définissons les relations convexes et les relations préconvexes de l'algèbre des intervalles d'hyperréels et nous présentons certaines

\* Adresse électronique : Philippe.Balbiani@irit.fr.

† Adresse postale : CNRS — Université de Toulouse, Institut de recherche en informatique de Toulouse, 118 ROUTE DE NARBONNE, 31062 TOULOUSE CEDEX 9, FRANCE.

de leurs propriétés. La section 6 concerne les problèmes de satisfaction de contraintes entre hyperintervalles et la difficulté algorithmique de leur résolution.

## 2 Les hyperréels

L'ensemble des hyperréels a été introduit par Robinson [14] dans le cadre de ses travaux sur l'analyse non standard. Pour le construire, il faut considérer l'ensemble  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  des suites de réels et un ultrafiltre non principal  $U$  sur  $\mathbb{N}$ . Nous désignerons les suites de réels par les lettres  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . Soit  $\cdot \equiv_U \cdot$  la relation sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  définie par

- $\alpha \equiv_U \beta$  ssi  $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \beta(n)\} \in U$ .

Le lecteur montrera que  $\cdot \equiv_U \cdot$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . L'ensemble des hyperréels est le quotient de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  modulo  $\cdot \equiv_U \cdot$ . Muni des opérations  $\cdot \oplus \cdot$  et  $\cdot \otimes \cdot$  définies par

- $|\alpha|_{\equiv_U} \oplus |\beta|_{\equiv_U} = |\alpha + \beta|_{\equiv_U}$ ,
- $|\alpha|_{\equiv_U} \otimes |\beta|_{\equiv_U} = |\alpha \times \beta|_{\equiv_U}$ ,

il constitue un surcorps de l'ensemble des réels. Muni de la relation  $\cdot \prec \cdot$  définie par

- $|\alpha|_{\equiv_U} \prec |\beta|_{\equiv_U}$  ssi  $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \prec \beta(n)\} \in U$ ,

il est totalement ordonné. L'ensemble des hyperréels contient des « infiniment petits » et des « infiniment grands ». Par exemple, la suite  $(1/1, 1/2, \dots)$  de réels correspondra modulo  $\equiv_U$  à un hyperréel infiniment petit et la suite  $(1, 2, \dots)$  de réels correspondra modulo  $\equiv_U$  à un hyperréel infiniment grand. Dans cet article, nous ne nous intéresserons qu'à l'ensemble  $P_{\mathcal{H}}$  des hyperréels non infiniment grands. On peut montrer que pour tout hyperréel  $a \in P_{\mathcal{H}}$ , il existe un réel  $r_a$  et un hyperréel  $\epsilon_a$  infiniment petit tel que  $a = |(r_a, r_a, \dots)|_{\equiv_U} \oplus \epsilon_a$ .  $r_a$  est appelé partie standard de  $a$  et  $\epsilon_a$  est appelé partie infinitésimale de  $a$ . L'écriture de  $a$  sous la forme  $|(r_a, r_a, \dots)|_{\equiv_U} \oplus \epsilon_a$  nous invite à définir sur  $P_{\mathcal{H}}$  les relations  $\cdot \prec_{inf}$  et  $\cdot \prec_{app}$  par

- $a \prec_{inf} b$  ssi  $r_a = r_b$  et  $\epsilon_a \prec \epsilon_b$ ,
- $a \prec_{app} b$  ssi  $r_a \prec r_b$ .

Balbiani [2] a montré que la structure  $(P_{\mathcal{H}}, \prec_{inf}, \prec_{app})$  vérifie les propriétés ci-dessous :

- pour tout  $a \in P_{\mathcal{H}}$ ,  $a \not\prec_{inf} a$  et  $a \not\prec_{app} a$ ,
- pour tout  $a, b \in P_{\mathcal{H}}$ ,  $a \not\prec_{inf} b$  ou  $a \not\prec_{app} b$ ,
- pour tout  $a, b, c \in P_{\mathcal{H}}$ , si  $a \prec_{inf} c$  et  $c \prec_{inf} b$  alors  $a \prec_{inf} b$ , si  $a \prec_{inf} c$  et  $c \prec_{app} b$  alors  $a \prec_{app} b$ , si  $a \prec_{app} c$  et  $c \prec_{inf} b$  alors  $a \prec_{app} b$  et si  $a \prec_{app} c$  et  $c \prec_{app} b$  alors  $a \prec_{app} b$ ,
- pour tout  $a, b \in P_{\mathcal{H}}$ ,  $a = b$  ou  $a \prec_{inf} b$  ou  $a \prec_{app} b$  ou  $b \prec_{inf} a$  ou  $b \prec_{app} a$ ,

- pour tout  $a, b \in P_{\mathcal{H}}$ , si  $a \prec_{inf} b$  alors il existe  $c \in P_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \prec_{inf} c$  et  $c \prec_{inf} b$ , si  $a \prec_{app} b$  alors il existe  $c \in P_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \prec_{inf} c$  et  $c \prec_{app} b$ , si  $a \prec_{app} b$  alors il existe  $c \in P_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \prec_{app} c$  et  $c \prec_{inf} b$  et si  $a \prec_{app} b$  alors il existe  $c \in P_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \prec_{app} c$  et  $c \prec_{app} b$ ,
- pour tout  $a \in P_{\mathcal{H}}$ , il existe  $b \in P_{\mathcal{H}}$  tel que  $b \prec_{inf} a$  et il existe  $b \in P_{\mathcal{H}}$  tel que  $b \prec_{app} a$ ,
- pour tout  $a \in P_{\mathcal{H}}$ , il existe  $b \in P_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \prec_{inf} b$  et il existe  $b \in P_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \prec_{app} b$ .

Une structure  $\mathcal{S} = (P, \prec_{inf}, \prec_{app})$  basée sur les hyperpoints est la donnée d'un ensemble non vide  $P$  d'hyperpoints et de relations  $\cdot \prec_{inf} \cdot$  et  $\cdot \prec_{app} \cdot$  sur  $P$  appelées relation de précédence infinitésimale et relation de précédence appréciable.  $\mathcal{S}$  est dite normale si elle vérifie les propriétés ci-dessus.

## 3 Structures temporelles basées sur les hyperintervalles

### 3.1 Structures normales

Des hyperréels  $a, b \in P_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \prec_{app} b$  définissent un intervalle d'hyperréels, dénoté  $[a, b]$ . Parmi les relations qui sont possibles entre deux intervalles  $[a, b]$  et  $[c, d]$  d'hyperréels, deux sont à signaler :

- la relation  $\cdot \|_=\cdot$  de rencontre immédiate :  $[a, b] \|_=[c, d]$  ssi  $b = c$ ,
- la relation  $\cdot \|_-\cdot$  de rencontre décalée :  $[a, b] \|_- [c, d]$  ssi  $b \prec_{inf} c$ .

Soit  $I_{\mathcal{H}}$  l'ensemble des intervalles d'hyperréels. La structure  $(I_{\mathcal{H}}, \|_=, \|_-)$  vérifie les propriétés ci-dessous<sup>1</sup> :

- pour tout  $a, b, c, d \in I_{\mathcal{H}}$ , si  $a \|_c = c, c \|_d = d$  et  $d \|_b = b$  alors  $a \|_b = b$ , si  $a \|_c = c, c \|_d = d$  et  $d \|_b = b$  alors  $a \|_b = b$  et si  $a \|_c = c, c \|_d = d$  et  $d \|_b = b$  alors  $a \|_b = b$ ,
- pour tout  $a, b, c \in I_{\mathcal{H}}$ ,  $a \|_- b$  ou  $a \|_- b$  et  $a \|_- b$  ou  $a \|_- c$  ou  $c \|_- b$ ,
- pour tout  $a, b, c \in I_{\mathcal{H}}$ ,  $a \|_- b$  ou  $a \|_- c$  ou  $c \|_- b$ ,
- pour tout  $a, b, c, d \in I_{\mathcal{H}}$ , si  $a \|_c = c, c \|_d = d$  et  $d \|_b = b$  alors  $a \|_b = b$ , si  $a \|_c = c, c \|_d = d$  et  $d \|_b = b$  alors il existe  $e \in I_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \|_e = e$  et  $e \|_b = b$ , si  $a \|_c = c, c \|_d = d$  et  $d \|_b = b$  alors il existe  $e \in I_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \|_e = e$  et  $e \|_b = b$  et si  $a \|_c = c, c \|_d = d$  et  $d \|_b = b$  alors il existe  $e \in I_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \|_e = e$  et  $e \|_b = b$ ,
- pour tout  $a, b \in I_{\mathcal{H}}$ ,  $a \|_b = b$  ou  $a \|_b = b$  ou il existe  $c \in I_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \|_c = c$  et  $c \|_b = b$  ou il existe  $c, d \in I_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \|_c = c, c \|_d = d$  et  $d \|_b = b$  ou il existe  $c, d, e \in I_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \|_c = c, c \|_d = d, d \|_e = e$  et  $e \|_b = b$ ,

1. Les mêmes lettres  $a, b$  et  $c$  seront utilisées pour désigner les hyperréels et les intervalles d'hyperréels. Nous pensons que les contextes de ces utilisations permettront à chaque fois de lever les ambiguïtés.

- pour tout  $a, b \in I_{\mathcal{H}}$ , si  $a \parallel_{-} b$  alors il existe  $d, e \in I_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \parallel_{-} d, d \parallel_{=}^{-1} e$  et  $e \parallel_{-} b$ , si  $a \parallel_{=} c$  et  $c \parallel_{=} b$  alors il existe  $d \in I_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \parallel_{-} d$  et  $d \parallel_{=} b$ , si  $a \parallel_{=} c$  et  $c \parallel_{=} b$  alors il existe  $d \in I_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \parallel_{=} d$  et  $d \parallel_{-} b$  et si  $a \parallel_{=} c$  et  $c \parallel_{=} b$  alors il existe  $d, e \in I_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \parallel_{=} d, d \parallel_{=} e$  et  $e \parallel_{=} b$ ,
- pour tout  $a \in I_{\mathcal{H}}$ , il existe  $b \in I_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \parallel_{-} b$  et il existe  $b \in I_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \parallel_{-}^{-1} b$ ,
- pour tout  $a \in I_{\mathcal{H}}$ , il existe  $b \in I_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \parallel_{=} b$  et il existe  $b \in I_{\mathcal{H}}$  tel que  $a \parallel_{=}^{-1} b$ .

Une structure  $\mathcal{S} = (I, \parallel_{=}, \parallel_{-})$  basée sur les hyperintervalles est la donnée d'un ensemble non vide  $I$  d'hyperintervalles et de relations  $\cdot \parallel_{=} \cdot$  et  $\cdot \parallel_{-} \cdot$  sur  $I$  appelées relation de rencontre immédiate et relation de rencontre décalée.  $\mathcal{S}$  est dite normale si elle vérifie les propriétés ci-dessus.

### 3.2 Passage d'un point de vue à un autre

Nous venons de voir une méthode permettant de construire la structure  $(I_{\mathcal{H}}, \parallel_{=}, \parallel_{-})$  basée sur les intervalles d'hyperréels à partir de la structure  $(P_{\mathcal{H}}, \prec_{inf}, \prec_{app})$  basée sur les hyperréels. Par une méthode semblable, le lecteur montrera qu'il est possible de construire une structure normale  $i(\mathcal{S}) = (I, \parallel_{=}, \parallel_{-})$  basée sur les hyperintervalles à partir d'une structure normale  $\mathcal{S} = (P, \prec_{inf}, \prec_{app})$  basée sur les hyperpoints. Nous allons maintenant voir une méthode permettant de construire une structure normale  $p(\mathcal{S}) = (P, \prec_{inf}, \prec_{app})$  basée sur les hyperpoints à partir d'une structure normale  $\mathcal{S} = (I, \parallel_{=}, \parallel_{-})$  basée sur les hyperintervalles. Soit  $\mathcal{S} = (I, \parallel_{=}, \parallel_{-})$  une structure normale basée sur les hyperintervalles. Soit  $\Delta(\mathcal{S}) = \{(a, b) \in I \times I : a \parallel_{=} b\}$  le graphe de sa relation de rencontre immédiate. Soit  $\cdot \equiv \cdot$  la relation sur  $\Delta(\mathcal{S})$  définie par

- $(a_1, a_2) \equiv (b_1, b_2)$  ssi  $a_1 \parallel_{=} b_2$ .

Le lecteur montrera que  $\cdot \equiv \cdot$  est une relation d'équivalence sur  $\Delta(\mathcal{S})$ . On note  $P$  le quotient de  $\Delta(\mathcal{S})$  par  $\cdot \equiv \cdot$ :  $P = \Delta(\mathcal{S})_{|\equiv}$ . On définit ensuite les relations  $\cdot \prec_{inf} \cdot$  et  $\cdot \prec_{app} \cdot$  sur  $P$  par

- $| (a_1, a_2) | \prec_{inf} | (b_1, b_2) |$  ssi  $a_1 \parallel_{-} b_2$ ,
- $| (a_1, a_2) | \prec_{app} | (b_1, b_2) |$  ssi il existe  $c \in I$  tel que  $a_1 \parallel_{=} c$  et  $c \parallel_{=} b_2$ .

Le lecteur montrera que la structure  $p(\mathcal{S}) = (P, \prec_{inf}, \prec_{app})$  basée sur les hyperpoints est normale. Qui plus est<sup>2</sup>,

**Proposition 1** Soit  $\mathcal{S} = (P, \prec_{inf}, \prec_{app})$  une structure normale basée sur les hyperpoints,  $i(\mathcal{S}) = (I, \parallel_{=}, \parallel_{-})$  et  $p(i(\mathcal{S})) = (P^o, \prec_{inf}^o, \prec_{app}^o)$ .  $\mathcal{S}$  et  $p(i(\mathcal{S}))$  sont isomorphes.

---

2. Le lecteur trouvera dans l'annexe les preuves des propositions énoncées dans cet article.

**Proposition 2** Soit  $\mathcal{S} = (I, \parallel_{=}, \parallel_{-})$  une structure normale basée sur les hyperintervalles,  $p(\mathcal{S}) = (P, \prec_{inf}, \prec_{app})$  et  $i(p(\mathcal{S})) = (I^o, \parallel_{=}^o, \parallel_{-}^o)$ .  $\mathcal{S}$  et  $i(p(\mathcal{S}))$  sont isomorphes.

### 3.3 Axiomatisation/complétude et décidabilité/complexité

Les structures normales basées sur les hyperintervalles vérifient des propriétés intéressantes<sup>3</sup>.

**Proposition 3** Soit  $\mathcal{S} = (I, \parallel_{=}, \parallel_{-})$ ,  $\mathcal{S}' = (I', \parallel_{=}^{'}, \parallel_{-}^{'})$  des structures normales basées sur les hyperintervalles. Si  $I$  est dénombrable alors  $\mathcal{S}$  est élémentairement applicable dans  $\mathcal{S}'$  pour le langage avec égalité construit sur les prédictats binaires  $\parallel_{=}$  et  $\parallel_{-}$ .

**Proposition 4** Soit  $\mathcal{S} = (I, \parallel_{=}, \parallel_{-})$ ,  $\mathcal{S}' = (I', \parallel_{=}^{'}, \parallel_{-}^{'})$  des structures normales basées sur les hyperintervalles.  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  sont élémentairement équivalentes pour le langage avec égalité construit sur les prédictats binaires  $\parallel_{=}$  et  $\parallel_{-}$ .

Soit  $IHY$  la théorie élémentaire dans le langage avec égalité construit sur les prédictats binaires  $\parallel_{=}$  et  $\parallel_{-}$  définie par les axiomes correspondants aux propriétés vérifiées par la structure  $(I_{\mathcal{H}}, \parallel_{=}, \parallel_{-})$  définie dans la section 3.1. Le résultat suivant montre que  $IHY$  est bien la théorie du premier ordre de l'ensemble  $I_{\mathcal{H}}$  des intervalles d'hyperréels muni des relations  $\cdot \parallel_{=} \cdot$  et  $\cdot \parallel_{-} \cdot$ .

**Proposition 5** 1.  $IHY$  est  $\omega$ -catégorique.

2.  $IHY$  est maximale consistante.

3.  $IHY$  est complète pour  $(I_{\mathcal{H}}, \parallel_{=}, \parallel_{-})$ .

Pour ce qui concerne le problème de l'appartenance à  $IHY$ , le résultat suivant montre qu'il appartient à la même classe de complexité que le problème de l'appartenance à la théorie élémentaire dans le langage avec égalité de la classe des modèles infinis.

**Proposition 6** Le problème de l'appartenance à  $IHY$  est  $PSPACE$ -complet.

Le résultat suivant montre qu'on peut se borner à une seule des deux relations  $\cdot \parallel_{=} \cdot$  et  $\cdot \parallel_{-} \cdot$  pour définir les intervalles d'hyperréels de façon abstraite.

**Proposition 7** 1.  $\cdot = \cdot$  est définissable à partir de  $\cdot \parallel_{=}$  dans toute structure normale.

2.  $\cdot = \cdot$  est définissable à partir de  $\cdot \parallel_{-} \cdot$  dans toute structure normale.

3.  $\cdot \parallel_{=} \cdot$  est définissable à partir de  $\cdot = \cdot$  et  $\cdot \parallel_{-} \cdot$  dans toute structure normale.

4.  $\cdot \parallel_{-} \cdot$  n'est définissable à partir de  $\cdot = \cdot$  et  $\cdot \parallel_{=} \cdot$  dans aucune structure normale.

---

3. Le lecteur trouvera dans le livre [8] les définitions des notions de théorie des modèles utilisées dans cet article.

## 4 Algèbre des hyperintervalles

### 4.1 Relations primitives

Remarquons que chaque intervalle d'hypercarrés  $[b_1, b_2]$  définit 9 zones dans  $P_{\mathcal{H}}$ :  $Z_0 = \{a \in P_{\mathcal{H}} : a \prec_{app} b_1\}$ ,  $Z_{1-} = \{a \in P_{\mathcal{H}} : a \prec_{inf} b_1\}$ ,  $Z_{1\star} = \{b_1\}$ ,  $Z_{1+} = \{a \in P_{\mathcal{H}} : b_1 \prec_{inf} a\}$ ,  $Z_2 = \{a \in P_{\mathcal{H}} : b_1 \prec_{app} a\}$  et  $a \prec_{app} b_2\}$ ,  $Z_{3-} = \{a \in P_{\mathcal{H}} : a \prec_{inf} b_2\}$ ,  $Z_{3\star} = \{b_2\}$ ,  $Z_{3+} = \{a \in P_{\mathcal{H}} : b_2 \prec_{inf} a\}$  et  $Z_4 = \{a \in P_{\mathcal{H}} : b_2 \prec a\}$ . Pour ce qui concerne les positions relatives possibles de deux intervalles d'hypercarrés, on obtient donc 33 relations primitives,  $p$ ,  $m_-$ ,  $m_\star$ ,  $m_+$ ,  $o$ ,  $s_-$ ,  $s_\star$ ,  $s_+$ ,  $d$ ,  $fi_-$ ,  $fi_\star$ ,  $fi_+$ ,  $eq_{-, -}$ ,  $eq_{-, \star}$ ,  $eq_{-, +}$ ,  $eq_{\star, -}$ ,  $eq_{\star, \star}$ ,  $eq_{\star, +}$ ,  $eq_{+, -}$ ,  $eq_{+, \star}$ ,  $eq_{+, +}$ ,  $f_-$ ,  $f_\star$ ,  $f_+$ ,  $di$ ,  $si_-$ ,  $si_\star$ ,  $si_+$ ,  $oi$ ,  $mi_-$ ,  $mi_\star$ ,  $mi_+$  et  $pi$ , dont l'une,  $eq_{\star, \star}$ , est l'identité. Nous désignerons

$A$	$i_A$	$j_A$	Dim. de $A$	Rep. ord. de $A$
$p$	0	0	4	(0, 0)
$m_-$	0	1-	3	(0, 1-)
$m_\star$	0	1*	2	(0, 1*)
$m_+$	0	1+	3	(0, 1+)
$o$	0	2	4	(0, 2)
$fi_-$	0	3-	3	(0, 3-)
$fi_\star$	0	3*	2	(0, 3*)
$fi_+$	0	3+	3	(0, 3+)
$di$	0	4	4	(0, 4)
$s_-$	1-	2	3	(1-, 2)
$eq_{-, -}$	1-	3-	2	(1-, 3-)
$eq_{-, \star}$	1-	3*	1	(1-, 3*)
$eq_{-, +}$	1-	3+	2	(1-, 3+)
$si_-$	1-	4	3	(1-, 4)
$s_\star$	1*	2	2	(1*, 2)
$eq_{\star, -}$	1*	3-	1	(1*, 3-)
$eq_{\star, \star}$	1*	3*	0	(1*, 3*)
$eq_{\star, +}$	1*	3+	1	(1*, 3+)
$si_\star$	1*	4	2	(1*, 4)
$s_+$	1+	2	3	(1+, 2)
$eq_{+, -}$	1+	3-	2	(1+, 3-)
$eq_{+, \star}$	1+	3*	1	(1+, 3*)
$eq_{+, +}$	1+	3+	2	(1+, 3+)
$si_+$	1+	4	3	(1+, 4)
$d$	2	2	4	(2, 2)
$f_-$	2	3-	3	(2, 3-)
$f_\star$	2	3*	2	(2, 3*)
$f_+$	2	3+	3	(2, 3+)
$oi$	2	4	4	(2, 4)
$mi_-$	3-	4	3	(3-, 4)
$mi_\star$	3*	4	2	(3*, 4)
$mi_+$	3+	4	3	(3+, 4)
$pi$	4	4	4	(4, 4)

FIG. 1 – Relations primitives, zones, dimensions et représentations ordinaires.

les relations primitives par les lettres  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Dans la figure 1, pour toute relation primitive  $A$ , la valeur indiquée dans ...

- ... la colonne «  $i_A$  » est l'unique élément dans  $\{0, 1-, 1\star, 1+, 2, 3-, 3\star, 3+, 4\}$  pour lequel il existe des intervalles d'hypercarrés  $[a_1, a_2], [b_1, b_2]$  tel que  $[a_1, a_2] A [b_1, b_2]$  et  $a_1$  appartient à la zone  $Z_{i_A}$  définie dans  $P_{\mathcal{H}}$  par  $[b_1, b_2]$ ,

- ... la colonne «  $j_A$  » est l'unique élément dans  $\{0, 1-, 1\star, 1+, 2, 3-, 3\star, 3+, 4\}$  pour lequel il existe des intervalles d'hypercarrés  $[a_1, a_2], [b_1, b_2]$  tel que  $[a_1, a_2] A [b_1, b_2]$  et  $a_2$  appartient à la zone  $Z_{j_A}$  définie dans  $P_{\mathcal{H}}$  par  $[b_1, b_2]$ .

La colonne « Dimension de  $A$  » de la figure 1 suggère d'associer à chaque relation primitive  $A$  un élément  $\dim(A)$  dans  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ . La colonne « Représentation ordinaire de  $A$  » de la figure 1 suggère d'associer à chaque relation primitive  $A$  un couple  $(i_A, j_A)$  d'éléments dans  $\{0, 1-, 1\star, 1+, 2, 3-, 3\star, 3+, 4\}$ . Soit  $\dim(\cdot)$  la fonction de  $\{0, 1-, 1\star, 1+, 2, 3-, 3\star, 3+, 4\}$  vers  $\{0, 1, 2\}$  définie par

- pour tout  $n \in \{0, 1, 2\}$ ,  $\dim(2n) = 2$ ,
  - pour tout  $n \in \{1, 2\}$ ,  $\dim((2n-1)-) = 1$ ,  $\dim((2n-1)\star) = 0$  et  $\dim((2n-1)+) = 1$ .
- Soit  $ent(\cdot)$  la fonction de  $\{0, 1-, 1\star, 1+, 2, 3-, 3\star, 3+, 4\}$  vers  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  définie par
- pour tout  $n \in \{0, 1, 2\}$ ,  $ent(2n) = 2n$ ,
  - pour tout  $n \in \{1, 2\}$ ,  $ent((2n-1)-) = 2n-1$ ,  $ent((2n-1)\star) = 2n-1$  et  $ent((2n-1)+) = 2n-1$ .

Remarquons que pour toute relation primitive  $A$ ,  $\dim(A) = \dim(i_A) + \dim(j_A)$  et  $i_A$  est pair ou  $j_A$  est pair ou  $ent(i_A) < ent(j_A)$ .

### 4.2 Transposition et composition

Les colonnes « Dimension de  $A$  » et « Représentation ordinaire de  $A$  » suggèrent de représenter chaque relation primitive  $A$  par la figure 2. Dans cette figure, la demi-

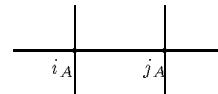


FIG. 2 – Représentation graphique de  $A$ .

droite ouverte située à gauche du point étiqueté par  $i_A$  est appelée zone  $Z_0$  de la représentation graphique de  $A$ , la demi-droite ouverte située dessous le point étiqueté par  $i_A$  est appelée zone  $Z_{1-}$  de la représentation graphique de  $A$ , le point étiqueté par  $i_A$  est appelé zone  $Z_{1\star}$  de la représentation graphique de  $A$ , la demi-droite ouverte située dessus le point étiqueté par  $i_A$  est appelée zone  $Z_{1+}$  de la représentation graphique de  $A$ , le segment ouvert situé entre le point étiqueté par  $i_A$  et le point étiqueté par  $j_A$  est appelé zone  $Z_2$  de la représentation graphique de  $A$ , la demi-droite ouverte située dessous le point étiqueté par  $j_A$  est appelée zone  $Z_{3-}$  de la représentation graphique de  $A$ , le point étiqueté par  $j_A$  est appelé zone  $Z_{3\star}$  de la représentation graphique de  $A$ , la demi-droite ouverte située dessus le point étiqueté par  $j_A$  est appelée zone  $Z_{3+}$  de la représentation graphique de  $A$ .

$Z_{3+}$  de la représentation graphique de  $A$  et la demi-droite ouverte située à droite du point étiqueté par  $j_A$  est appelée zone  $Z_4$  de la représentation graphique de  $A$ . Soit  $\lfloor \cdot \rfloor$  la fonction de  $\{0, 1-, 1\star, 1+, 2, 3-, 3\star, 3+, 4\}$  vers  $\{0, 1-, 1\star, 1+, 2, 3-, 3\star, 3+, 4\}$  définie par

- pour tout  $n \in \{0, 1, 2\}$ ,  $\lfloor 2n \rfloor = 2n$ ,
- pour tout  $n \in \{1, 2\}$ ,  $\lfloor (2n-1)- \rfloor = (2n-1)-$ ,  $\lfloor (2n-1)\star \rfloor = (2n-1)-$  et  $\lfloor (2n-1)+ \rfloor = (2n-1)-$

et  $\lceil \cdot \rceil$  la fonction de  $\{0, 1-, 1\star, 1+, 2, 3-, 3\star, 3+, 4\}$  vers  $\{0, 1-, 1\star, 1+, 2, 3-, 3\star, 3+, 4\}$  définie par

- pour tout  $n \in \{0, 1, 2\}$ ,  $\lceil 2n \rceil = 2n$ ,
- pour tout  $n \in \{1, 2\}$ ,  $\lceil (2n-1)- \rceil = (2n-1)+$ ,  $\lceil (2n-1)\star \rceil = (2n-1)+$  et  $\lceil (2n-1)+ \rceil = (2n-1)+$ .

Nous dirons qu'un intervalle  $[i, j]$  de  $\{0, 1-, 1\star, 1+, 2, 3-, 3\star, 3+, 4\}$  est équilibré lorsque  $i$  et  $j$  sont pairs ou  $i = j$  ou il existe  $n \in \{1, 2\}$  tel que  $i = (2n-1)-$  et  $j = (2n-1)+$ . Pour tout intervalle  $[i, j]$  de  $\{0, 1-, 1\star, 1+, 2, 3-, 3\star, 3+, 4\}$ , nous dénoterons par  $\llbracket i, j \rrbracket$  le plus grand intervalle équilibré de  $\{0, 1-, 1\star, 1+, 2, 3-, 3\star, 3+, 4\}$  contenu dans  $[i, j]$ . A chaque zone  $Z$  de la représentation graphique de  $A$ , nous associons un intervalle équilibré  $\text{int}_A(Z)$  dans  $\{0, 1-, 1\star, 1+, 2, 3-, 3\star, 3+, 4\}$  de la façon suivante :  $\text{int}_A(Z_0) = \llbracket 0, i_A \rrbracket$ ,  $\text{int}_A(Z_{1-}) = \llbracket \lfloor i_A \rfloor, i_A \rrbracket$ ,  $\text{int}_A(Z_{1\star}) = \{i_A\}$ ,  $\text{int}_A(Z_{1+}) = \llbracket i_A, \lceil i_A \rceil \rrbracket$ ,  $\text{int}_A(Z_2) = \llbracket i_A, j_A \rrbracket$ ,  $\text{int}_A(Z_{3-}) = \llbracket \lfloor j_A \rfloor, j_A \rrbracket$ ,  $\text{int}_A(Z_{3\star}) = \{j_A\}$ ,  $\text{int}_A(Z_{3+}) = \llbracket j_A, \lceil j_A \rceil \rrbracket$  et  $\text{int}_A(Z_4) = \llbracket j_A, 4 \rrbracket$ . Une propriété de base est vérifiée :

**Proposition 8** Soit  $A$  une relation primitive. Il existe une unique relation primitive  $B$  tel qu'il existe des intervalles d'hypercarrés  $a, b$  tel que  $a B b$  et  $b A a$ .

Soit  $A$  une relation primitive. La relation transposée de  $A$  est l'unique relation primitive  $B$  tel qu'il existe des intervalles d'hypercarrés  $a, b$  tel que  $a B b$  et  $b A a$ . Nous la dénotons par  $A^{-1}$ .

**Proposition 9** Soit  $A$  une relation primitive. La relation transposée de  $A$  est l'unique relation primitive  $B$  tel que  $1\star \in \text{int}_A(Z_{i_B})$  et  $3\star \in \text{int}_A(Z_{j_B})$ .

Une propriété de base est vérifiée :

**Proposition 10** Soit  $A, B$  des relations primitives. Il existe un plus petit ensemble  $R$  de relations primitives tel que pour toute relation primitive  $C$ , s'il existe des intervalles d'hypercarrés  $a, b, c$  tel que  $a C b$ ,  $a A c$  et  $c B b$  alors  $C$  est dans  $R$ .

Soit  $A, B$  des relations primitives. La relation composée de  $A$  et  $B$  est le plus petit ensemble  $R$  de relations primitives tel que pour toute relation primitive  $C$ , s'il existe des intervalles d'hypercarrés  $a, b, c$  tel que  $a C b$ ,  $a A c$  et  $c B b$  alors  $C$  est dans  $R$ . Nous la dénotons par  $A \circ B$ .

**Proposition 11** Soit  $A, B$  des relations primitives. La relation composée de  $A$  et  $B$  est le plus petit ensemble  $R$  de relations primitives tel que pour toute relation primitive  $C$ , si  $i_C \in \text{int}_B(Z_{i_A})$  et  $j_C \in \text{int}_B(Z_{j_A})$  alors  $C$  est dans  $R$ .

Nous appelons relation complexe tout ensemble de relations primitives. Nous désignerons les relations complexes par les lettres  $R, S$  et  $T$ . Pour toute relation complexe  $R, S$ , nous définissons

- $0 = \emptyset$ ,
- $-R = \{p, \dots, pi\} \setminus R$ ,
- $R \sqcup S = R \cup S$ ,
- $\text{id} = \{eq_{\star, \star}\}$ ,
- $R^{-1} = \{A^{-1} : A \in R\}$ ,
- $R \circ S = \bigcup \{A \circ B : A \in R \text{ et } B \in S\}$ .

Soit  $\mathcal{R}_{33}$  l'ensemble des relations complexes.

**Proposition 12**  $(\mathcal{R}_{33}, 0, -, \cdot \sqcup \cdot, \text{id}, \cdot^{-1}, \cdot \circ \cdot)$  est une algèbre représentable de relations.

Pour toute relation complexe  $R$ , nous définissons

- $\dim(R) = \max\{\dim(A) : A \in R\}$ .

### 4.3 Définissabilité

Le résultat suivant montre que les 33 relations primitives sont définissables à partir des relations primitives  $m_-$  et  $m_\star$  au moyen de l'opération booléenne d'intersection et des opérations relationnelles de transposition et de composition.

**Proposition 13** Dans la figure 3, pour toute relation primitive  $A$ , la valeur indiquée dans la colonne «  $\varphi_A$  » est une définition de  $A$  à partir des relations primitives  $m_-$  et  $m_\star$  au moyen de l'opération booléenne d'intersection et des opérations relationnelles de transposition et de composition.

Notons que dans la figure 3, pour toute relation primitive  $A$ , la valeur indiquée dans la colonne «  $\varphi_A$  » permet de calculer facilement une formule  $\varphi_A(x, y)$  avec  $x, y$  pour seules variables libres dans le langage défini par la règle

- $\varphi(x, y) := x \parallel_= y \mid x \parallel_- y \mid (\varphi_1(x, y) \wedge \varphi_2(x, y)) \mid \varphi(y, x) \mid \exists z(\varphi_1(x, z) \wedge \varphi_2(z, y))$

tel que pour toute fonction  $f(\cdot)$  d'interprétation des variables dans  $I_H$ ,  $f(x) A f(y)$  ssi  $(I_H, \parallel_=, \parallel_-) \models_f \varphi_A(x, y)$ . On ne peut pas se borner à une seule des deux relations primitives  $m_-$  et  $m_\star$  pour définir les 33 relations primitives au moyen de l'opération booléenne d'intersection et des opérations relationnelles de transposition et de composition. En effet,

$A$	$\varphi_A$
$p$	$m_\star \circ m_\star$
$m_-$	$m_-$
$m_\star$	$m_\star$
$m_+$	$(m_\star \circ m_-^{-1} \circ m_\star)$
$o$	$(m_\star \circ m_\star \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star \circ m_\star)$
$fi_-$	$(m_- \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star \circ m_\star)$
$fi$	$(m_\star \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star \circ m_\star)$
$fi_+$	$(m_\star \circ m_-^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star \circ m_\star)$
$di$	$(m_\star \circ m_\star^{-1} \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star \circ m_\star)$
$s_-$	$(m_\star \circ m_\star \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_-)$
$eq_{-,-}$	$(m_- \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_-)$
$eq_{-,*}$	$(m_\star \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_-)$
$eq_{-,+}$	$(m_\star \circ m_-^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_-)$
$si_-$	$(m_\star \circ m_\star^{-1} \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_-)$
$s$	$(m_\star \circ m_\star \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star)$
$eq_{*, -}$	$(m_- \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star)$
$ed_{*,*}$	$(m_\star \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star)$
$eq_{*,+}$	$(m_\star \circ m_-^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star)$
$si$	$(m_\star \circ m_\star^{-1} \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star)$
$s_+$	$(m_\star \circ m_\star \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star)$
$eq_{+,-}$	$(m_- \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star)$
$eq_{+,*}$	$(m_\star \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star)$
$eq_{+,+}$	$(m_\star \circ m_-^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star)$
$si_+$	$(m_\star \circ m_\star^{-1} \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star)$
$d$	$(m_\star \circ m_\star \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star^{-1} \circ m_\star)$
$f_-$	$(m_- \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star^{-1} \circ m_\star)$
$f$	$(m_\star \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star^{-1} \circ m_\star)$
$f_+$	$(m_\star \circ m_-^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star^{-1} \circ m_\star)$
$oi$	$(m_\star \circ m_\star^{-1} \circ m_\star^{-1}) \cap (m_\star^{-1} \circ m_\star^{-1} \circ m_\star)$
$mi_-$	$(m_\star^{-1} \circ m_- \circ m_\star^{-1})$
$mi_\star$	$m_\star^{-1}$
$mi_+$	$m_-^{-1}$
$pi$	$m_\star^{-1} \circ m_\star^{-1}$

FIG. 3 – Définition des relations primitives à partir de  $m_-$  et  $m_\star$ .

- Proposition 14** 1. Il n'existe aucune définition de  $m_\star$  à partir de la relation primitive  $m_-$  au moyen de l'opération booléenne d'intersection et des opérations relationnelles de transposition et de composition.
2. Il n'existe aucune définition de  $m_-$  à partir de la relation primitive  $m_\star$  au moyen de l'opération booléenne d'intersection et des opérations relationnelles de transposition et de composition.

## 5 Relations convexes et relations préconvexes

Soit  $\ll_I$  la plus petite relation d'ordre sur  $\{0, 1-, 1\star, 1+, 2, 3-, 3\star, 3+, 4\}$  tel que  $0 \ll_I 1-, 1- \ll_I 1\star, 1\star \ll_I 1+, 1+ \ll_I 2, 2 \ll_I 3-, 3- \ll_I 3\star, 3\star \ll_I 3+$  et  $3+ \ll_I 4$ . La relation d'ordre  $\ll_I$  entre les relations primitives représentée dans la figure 4 est définissable de la façon suivante :

- $A \ll_I B$ ssi  $i_A \ll_I i_B$  et  $j_A \ll_I j_B$ .

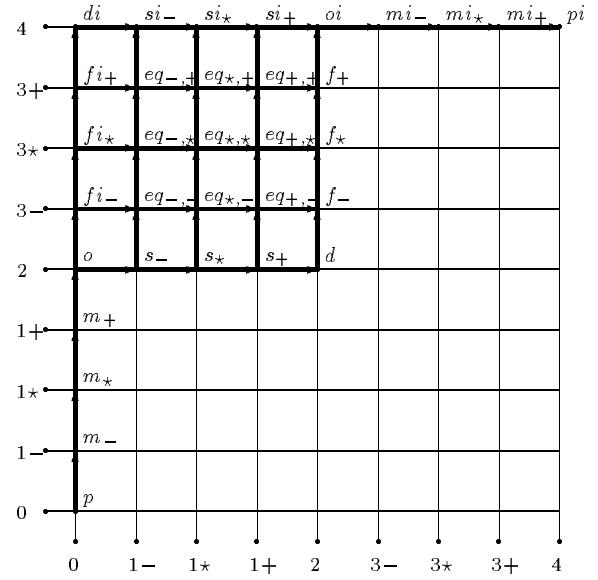


FIG. 4 – Treillis des relations primitives.

Les propriétés particulières de la relation d'ordre  $\ll_I$  font de l'ensemble des relations primitives un treillis. Nous écrirons  $A \ll_I R$  lorsque pour toute relation primitive  $C$ , si  $C$  est dans  $R$  alors  $A \ll_I C$  et  $R \ll_I B$  lorsque pour toute relation primitive  $C$ , si  $C$  est dans  $R$  alors  $C \ll_I B$ . Si  $A \ll_I B$  alors  $[A, B]$  désignera l'ensemble des relations primitives  $C$  tel que  $A \ll_I C$  et  $C \ll_I B$ . Pour toute relation complexe  $R$ , soit  $I(R) = \bigcap \{[A, B] : A \ll_I R \text{ et } R \ll_I B\}$ . Bien évidemment, pour toute relation complexe  $R$ ,  $R \subseteq I(R)$ . De plus, si  $R$  et  $S$  sont des relations complexes tel que  $R \subseteq S$  alors  $I(R) \subseteq I(S)$ . Nous dirons qu'une relation complexe  $R$  est convexe lorsque  $I(R) \subseteq R$ .

**Proposition 15** Soit  $R, S$  des relations complexes. Si  $R$  et  $S$  sont convexes alors  $R \cap S$  est convexe.

**Proposition 16** Soit  $R, S$  des relations complexes. Si  $R$  et  $S$  sont convexes alors  $R \circ S$  est convexe.

Evidemment,  $I(R)$  est convexe. Qui plus est,

**Proposition 17** Soit  $R, S$  des relations complexes.

$$1. \quad I(R^{-1}) = I(R)^{-1}.$$

$$2. \quad I(R \circ S) \subseteq I(R) \circ I(S).$$

Soit  $\ll_C$  la plus petite relation d'ordre sur  $\{0, 1-, 1\star, 1+, 2, 3-, 3\star, 3+, 4\}$  tel que  $0 \ll_C 1-, 1- \ll_C 1\star, 1\star \ll_C 1+, 2 \ll_C 3-, 3- \ll_C 3\star, 3+ \ll_C 3\star$  et  $4 \ll_C 3+$ . La relation d'ordre  $\ll_C$  entre les relations primitives représentée dans la figure 5 est définissable de la façon suivante :

- $A \ll_C B$ ssi  $i_A \ll_C i_B$  et  $j_A \ll_C j_B$ .

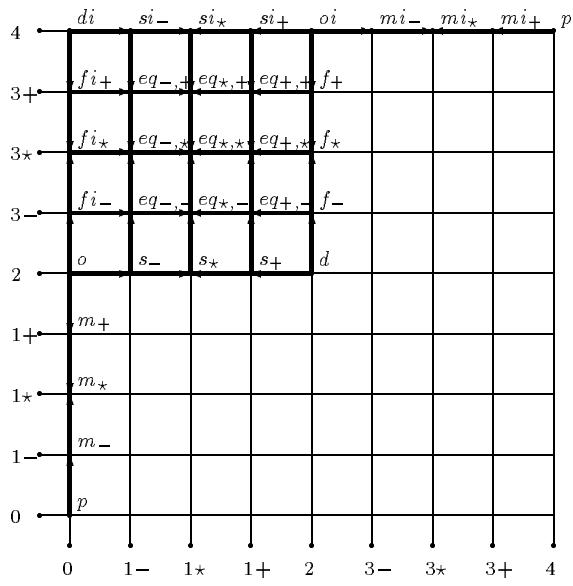


FIG. 5 – Clôture des relations primitives.

Nous écrirons  $\triangleleft_C(A)$  pour désigner l'ensemble des relations primitives  $B$  tel que  $A \triangleleft_C B$ . Pour toute relation complexe  $R$ , soit  $CL(R) = \bigcup\{\triangleleft_C(A) : A \in R\}$ . Bien évidemment, pour toute relation complexe  $R$ ,  $R \subseteq CL(R)$ . De plus, si  $R$  et  $S$  sont des relations complexes tel que  $R \subseteq S$  alors  $CL(R) \subseteq CL(S)$ . Nous dirons qu'une relation complexe  $R$  est faiblement préconvexe lorsque  $I(R) \subseteq CL(R)$ .

**Proposition 18** Soit  $R$  une relation complexe.  $\dim(CL(R) \setminus R) < \dim(R)$ .

**Proposition 19** Soit  $R$  une relation complexe. Si  $R$  est faiblement préconvexe alors  $\dim(I(R) \setminus R) < \dim(R)$ .

Nous dirons qu'une relation complexe  $R$  est fortement préconvexe lorsque pour toute relation complexe  $S$ , si  $S$  est convexe alors  $R \cap S$  est faiblement préconvexe. Evidemment, si  $R$  est fortement préconvexe alors  $R$  est faiblement préconvexe. Qui plus est,

**Proposition 20** Soit  $R, S$  des relations complexes. Si  $R$  est fortement préconvexe et  $S$  est convexe alors  $R \cap S$  est fortement préconvexe.

## 6 Problèmes de satisfaction de contraintes

Les 2 sections précédentes conduisent naturellement à considérer le problème de la cohérence des graphes de contraintes entre hyperintervalles. Un graphe  $\mathcal{G} = (n, C)$  de contraintes entre hyperintervalles est la donnée d'un entier positif  $n$  et d'une fonction  $C(\cdot, \cdot)$  de  $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$  vers  $\mathcal{R}_{33}$ . Nous dirons que  $\mathcal{G}$  est non vide

lorsque pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\text{Card}(C(i, j)) \geq 1$ .  $\mathcal{G}$  sera dit cohérent lorsqu'il existe des intervalles d'hyperréels  $a_1, \dots, a_n$  tel que pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , il existe une relation primitive  $A$  tel que  $A \in C(i, j)$  et  $a_i A a_j$ . Le problème de la cohérence des graphes de contraintes entre hyperintervalles est le suivant :

- étant donné un graphe  $\mathcal{G} = (n, C)$  de contraintes entre hyperintervalles, déterminer si  $\mathcal{G}$  est cohérent ou non.

Il est clair que  $\mathcal{G}$  est cohérentssi la sentence  $\varphi_{\mathcal{G}} = \exists x_1 \dots \exists x_n \wedge \{\vee \{\varphi_A(x_i, x_j) : A \in C(i, j)\} : i, j \in \{1, \dots, n\}\}$  dans le langage avec égalité construit sur les prédicts binaires  $\|=\|$  et  $\|-\|$  est dans  $IHY$ . Par la proposition 6, le problème de la cohérence des graphes quelconques est dans  $PSPACE$ . Mieux,

**Proposition 21** Le problème de la cohérence des graphes quelconques est dans  $NP$ .

L'ennui, c'est que

**Proposition 22** Le problème de la cohérence des graphes quelconques est  $NP$ -difficile.

Nous dirons que  $\mathcal{G}$  est atomique lorsque pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\text{Card}(C(i, j)) \leq 1$ .

**Proposition 23** Le problème de la cohérence des graphes atomiques est dans  $P$ .

Les 2 notions suivantes (convexité et chemin-cohérence) ont été considérées ensemble dans le cadre de l'algèbre des intervalles [6]. Nous dirons que  $\mathcal{G}$  est convexe lorsque pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $C(i, j)$  est convexe.  $\mathcal{G}$  sera dit chemin-cohérent lorsque pour tout  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $C(i, j) \subseteq C(i, k) \circ C(k, j)$ .

**Proposition 24** Soit  $\mathcal{G} = (n, C)$  un graphe convexe de contraintes entre hyperintervalles. Si  $\mathcal{G}$  est non vide et chemin-cohérent alors  $\mathcal{G}$  est cohérent.

Par conséquent, pour l'ensemble des relations convexes, le problème de la cohérence des graphes devient faisable en temps polynomial.

**Proposition 25** Le problème de la cohérence des graphes convexes est dans  $P$ .

Les 2 notions suivantes (préconvexité forte et chemin-cohérence faible) ont été considérées ensemble dans le cadre de l'algèbre des rectangles [3].  $\mathcal{G}$  sera dit fortement préconvexe lorsque pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $C(i, j)$  est fortement préconvexe. Nous dirons que  $\mathcal{G}$  est faiblement chemin-cohérent lorsque pour tout  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $C(i, j) \subseteq I(C(i, k) \circ C(k, j))$ .

**Proposition 26** Soit  $\mathcal{G} = (n, C)$  un graphe fortement préconvexe de contraintes entre hyperintervalles. Si  $\mathcal{G}$  est non vide et faiblement chemin-cohérent alors  $\mathcal{G}$  est cohérent.

Par suite, pour l'ensemble des relations fortement préconvexes, le problème de la cohérence des graphes reste faisable en temps polynomial.

**Proposition 27** *Le problème de la cohérence des graphes fortement préconvexes est dans P.*

Est-il possible de considérer des ensembles de relations plus grands que l'ensemble des relations fortement préconvexes et pour lesquels le problème de la cohérence des graphes de contraintes entre hyperintervalles reste faisable en temps polynomial ? Pour le moment, nous l'ignorons.

## 7 Conclusion

Nombreux sont les modèles formels qui ont été définis pour la prise en compte de différents niveaux de granularité dans la représentation du temps [9]. Tout aussi nombreux sont les modèles formels qui ont été définis pour le surpassement de la simple notion de précédence temporelle entre des entités ponctuelles comme les instants [7]. Toutefois, il semble que le modèle formel pour la représentation logique et le traitement algorithmique du temps présenté dans cet article du point de vue de l'analyse non standard et qui propose une théorie du premier ordre et une approche qualitative des relations entre intervalles d'hyperréels soit original.

Il reste beaucoup à faire. Au niveau des problèmes de satisfaction de contraintes, par exemple, nous ne savons pas s'il est possible de considérer des ensembles de relations plus grands que l'ensemble des relations fortement préconvexes et pour lesquels le problème de la cohérence des graphes de contraintes entre hyperintervalles reste faisable en temps polynomial. D'autre part, il y a la question du développement pour les hyperréels d'une approche qualitative à la Ligozat [11]. Pour le moment, nous ne savons rien de la faisabilité du problème de la cohérence des graphes de contraintes entre hyperintervalles généralisés qu'un tel développement susciterait.

## Remerciements

Nous tenons à remercier les collègues de l'institut de recherche en informatique de Toulouse qui ont contribué à la maturation du travail que nous présentons aujourd'hui.

## Références bibliographiques

1. Allen, J.: *Maintaining knowledge about temporal intervals*. Communications of the Association for Computing Machinery **26** (1983) 832–843.
2. Balbiani, P.: *Time representation and temporal reasoning from the perspective of non-standard analysis*. In: *Proceedings of the Eleventh International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*. Association for the Advancement of Artificial Intelligence (2008) 695–704.
3. Balbiani, P., Condotta, J.-F., Fariñas del Cerro, L.: *A new tractable subclass of the rectangle algebra*. In: *Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*. International Joint Conferences on Artificial Intelligence (1999) 442–447.
4. Balbiani, P., Tinchev, T.: *Line-based affine reasoning in Euclidean plane*. Journal of Applied Logic **5** (2007) 421–434.
5. Becher, G., Clérin-Debart, F., Enjalbert, P.: *A qualitative model for time granularity*. Computational Intelligence **16** (2000) 137–168.
6. Van Beek, P.: *Approximation algorithms for temporal reasoning*. In: *Proceedings of the Eleventh International Joint Conference on Artificial Intelligence*. International Joint Conferences on Artificial Intelligence (1989) 1291–1296.
7. Bestougeff, H., Ligozat, G.: *Outils logiques pour le traitement du temps: de la linguistique à l'intelligence artificielle*. Masson (1989).
8. Chang, C., Keisler, H.: *Model Theory*. Elsevier (1990).
9. Euzenat, J., Montanari, A.: *Time granularity* In: *Handbook of Temporal Reasoning in Artificial Intelligence*. Elsevier (2005) 59–118.
10. Iwasaki, Y., Farquhar, A., Saraswat, V., Bobrow, D., Gupta, V.: *Modeling time in hybrid systems: how fast is “instantaneous”?* In: *Proceedings of the Fourteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*. International Joint Conferences on Artificial Intelligence (1995) 94–103.
11. Ligozat, G.: *On generalized interval calculi*. In: *Proceedings of the Ninth National Conference on Artificial Intelligence*. American Association for Artificial Intelligence (1991) 234–240.
12. Ligozat, G.: *A new proof of tractability for ORD-Horn relations*. In: *Proceedings of the Thirteenth National Conference on Artificial Intelligence*. American Association for Artificial Intelligence (1996) 395–401.
13. Raiman, O.: *Order of magnitude reasoning*. Artificial Intelligence **51** (1991) 11–38.
14. Robinson, A.: *Non-standard Analysis*. Princeton University Press (1996).
15. Vilain, M., Kautz, H.: *Constraint propagation algorithms for temporal reasoning*. In: *Proceedings of the Fifth National Conference on Artificial Intelligence*. American Association for Artificial Intelligence (1986) 377–382.

## Annexe

**Preuve de la proposition 1** Soit  $\alpha(\cdot)$  la bijection de  $P$  vers  $P^\circ$  qui associe à chaque hyperpoint  $a$  de  $P$  l'hyperpoint  $\alpha(a)$  de  $P^\circ$  défini par

$$-\alpha(a) = |([a_1, a], [a, a_2])|$$

où  $a_1, a_2$  sont des hyperpoints de  $P$  tel que  $a_1 \prec_{app} a$  et  $a \prec_{app} a_2$ . Le lecteur montrera que  $\alpha(\cdot)$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}$  vers  $p(i(\mathcal{S}))$ .  $\dashv$

**Preuve de la proposition 2** Soit  $\alpha(\cdot)$  la bijection de  $I$  vers  $I^\circ$  qui associe à chaque hyperintervalle  $a$  de  $I$  l'hyperintervalle  $\alpha(a)$  de  $I^\circ$  défini par

$$-\alpha(a) = ||(a_1, a)|, |(a, a_2)||$$

où  $a_1, a_2$  sont des hyperintervalles de  $I$  tel que  $a_1||=a$  et  $a||=a_2$ . Le lecteur montrera que  $\alpha(\cdot)$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}$  vers  $i(p(\mathcal{S}))$ .  $\dashv$

**Preuve de la proposition 3** Supposons que  $I$  est dénombrable. Soit  $p(\mathcal{S}) = (P, \prec_{inf}, \prec_{app})$ ,  $p(\mathcal{S}') = (P', \prec_{inf}', \prec_{app}')$  les structures normales basées sur les hyperpoints associées à  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}'$ . Puisque  $I$  est dénombrable, alors  $P$  est dénombrable. Par [2] (proposition 4),  $p(\mathcal{S})$  est élémentairement applicable dans  $p(\mathcal{S}')$  pour le langage avec égalité construit sur les prédictats binaires  $\prec_{inf}$  et  $\prec_{app}$ . Par conséquent, il existe une injection  $\tau(\cdot)$  de  $P$  vers  $P'$  qui associe à chaque hyperpoint  $|(a_1, a_2)|$  de  $P$  un hyperpoint  $\tau(|(a_1, a_2)|)$  de  $P'$  tel que pour toute formule  $\varphi$  dans le langage avec égalité construit sur les prédictats binaires  $\prec_{inf}$  et  $\prec_{app}$  et pour toute fonction  $f(\cdot)$  d'interprétation des variables dans  $P$ ,  $p(\mathcal{S}) \models_f \varphi$ ssi  $p(\mathcal{S}') \models_{\tau \circ f} \varphi$ . Soit  $i(p(\mathcal{S})) = (I^\circ, ||=^\circ, ||_-^\circ)$ ,  $i(p(\mathcal{S}')) = (I'^\circ, ||=^{\circ'}, ||_-^{\circ'})$  les structures normales basées sur les hyperintervalles associées à  $p(\mathcal{S})$ ,  $p(\mathcal{S}')$ . Par la proposition 2,  $\mathcal{S}$  est isomorphe à  $i(p(\mathcal{S}))$  et  $\mathcal{S}'$  est isomorphe à  $i(p(\mathcal{S}'))$ . Soit  $\alpha(\cdot)$  un isomorphisme de  $\mathcal{S}$  vers  $i(p(\mathcal{S}))$ ,  $\alpha'(\cdot)$  un isomorphisme de  $\mathcal{S}'$  vers  $i(p(\mathcal{S}'))$ . Soit  $\sigma(\cdot)$  l'injection de  $I$  vers  $I'$  qui associe à chaque hyperintervalle  $a$  de  $I$  l'hyperintervalle  $\sigma(a)$  de  $I'$  défini par

$$-\sigma(a) = \alpha'^{-1}([\tau(|(a_1, a)|), \tau(|(a, a_2)|)])$$

où  $a_1, a_2$  sont des hyperintervalles de  $I$  tel que  $a_1||=a$  et  $a||=a_2$ . Le lecteur montrera par induction sur la formule  $\varphi$  dans le langage avec égalité construit sur les prédictats binaires  $||=$  et  $||_-$  que pour toute fonction  $f(\cdot)$  d'interprétation des variables dans  $I$ ,  $\mathcal{S} \models_f \varphi$ ssi  $\mathcal{S}' \models_{\sigma \circ f} \varphi$ .  $\dashv$

**Preuve de la proposition 4** Soit  $\mathcal{S}'' = (I'', ||=^{''}, ||_-^{''})$  une structure normale basée sur les hyperintervalles tel que  $I''$  est dénombrable. Par la proposition 3,  $\mathcal{S}''$  est élémentairement applicable dans  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}''$  est élémentairement applicable dans  $\mathcal{S}'$ . Par conséquent,  $\mathcal{S}''$

et  $\mathcal{S}$  sont élémentairement équivalentes et  $\mathcal{S}''$  et  $\mathcal{S}'$  sont élémentairement équivalentes.  $\dashv$

## Preuve de la proposition 5

- Soit  $\mathcal{S} = (I, ||=, ||_-)$ ,  $\mathcal{S}' = (I', ||=^{'}, ||_-^{'})$  des structures normales basées sur les hyperintervalles. Supposons que  $I$ ,  $I'$  sont dénombrables. Soit  $p(\mathcal{S}) = (P, \prec_{inf}, \prec_{app})$ ,  $p(\mathcal{S}') = (P', \prec_{inf}', \prec_{app}')$  les structures normales basées sur les hyperpoints associées à  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}'$ . Puisque  $I$ ,  $I'$  sont dénombrables, alors  $P$ ,  $P'$  sont dénombrables. Par [2] (proposition 6),  $p(\mathcal{S})$  et  $p(\mathcal{S}')$  sont isomorphes. Par conséquent, il existe une bijection  $\tau(\cdot)$  de  $P$  vers  $P'$  tel que  $\tau(\cdot)$  est un isomorphisme de  $p(\mathcal{S})$  vers  $p(\mathcal{S}')$ . Soit  $i(p(\mathcal{S})) = (I^\circ, ||=^\circ, ||_-^\circ)$ ,  $i(p(\mathcal{S}')) = (I'^\circ, ||=^{\circ'}, ||_-^{\circ'})$  les structures normales basées sur les hyperintervalles associées à  $p(\mathcal{S})$ ,  $p(\mathcal{S}')$ . Soit  $\alpha(\cdot)$  un isomorphisme de  $\mathcal{S}$  vers  $i(p(\mathcal{S}))$ ,  $\alpha'(\cdot)$  un isomorphisme de  $\mathcal{S}'$  vers  $i(p(\mathcal{S}'))$ . Soit  $\sigma(\cdot)$  la bijection de  $I$  vers  $I'$  qui associe à chaque hyperintervalle  $a$  de  $I$  l'hyperintervalle  $\sigma(a)$  de  $I'$  défini par

$$-\sigma(a) = \alpha'^{-1}([\tau(|(a_1, a)|), \tau(|(a, a_2)|)])$$

où  $a_1, a_2$  sont des hyperintervalles de  $I$  tel que  $a_1||=a$  et  $a||=a_2$ . Le lecteur montrera que  $\sigma(\cdot)$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}$  vers  $\mathcal{S}'$ .

- Par la proposition 4.
- Par l'item 2 et le fait que l'ensemble  $I_{\mathcal{H}}$  des intervalles d'hyperréels muni des relations  $\cdot||= \cdot$  et  $\cdot||_- \cdot$  est une structure normale.

$\dashv$

**Preuve de la proposition 6** Pour montrer que le problème de l'appartenance à  $IHY$  est *PSPACE*-difficile, il suffit de constater que  $IHY$  est une extension conservatrice de  $EQ^\infty$ , la théorie élémentaire dans le langage avec égalité de la classe des modèles infinis, ce que le lecteur montrera. En effet, nous savons que le problème de l'appartenance à  $EQ^\infty$  est *PSPACE*-difficile [4]. Pour montrer que le problème de l'appartenance à  $IHY$  est dans *PSPACE*, il suffit de le réduire polynomialement au problème de l'appartenance à *PRE*. En effet, nous savons que le problème de l'appartenance à *PRE* est dans *PSPACE* [4]. A chaque variable  $x$  (dénotant un intervalle d'hyperréels) du langage avec égalité construit sur les prédictats binaires  $||=$  et  $||_-$ , nous associons les variables  $x_1^{app}$  (dénotant la partie appréciable du début de  $x$ ),  $x_1^{inf}$  (dénotant la partie infinitésimale du début de  $x$ ),  $x_2^{app}$  (dénotant la partie appréciable de la fin de  $x$ ) et  $x_2^{inf}$  (dénotant la partie infinitésimale de la fin de  $x$ ) du langage avec égalité construit sur le prédictat binaire  $\prec$ . Soit  $tr(\cdot)$  la traduction du langage avec égalité construit

sur les prédictats binaires  $\|_=_$  et  $\|_-$  vers le langage avec égalité construit sur le prédictat binaire  $\prec$  définie par

- $tr(x = y) = (x_1^{app} = y_1^{app} \wedge x_1^{inf} = y_1^{inf} \wedge x_2^{app} = y_2^{app} \wedge x_2^{inf} = y_2^{inf})$ ,
- $tr(x\|_=y) = (x_2^{app} = y_1^{app} \wedge x_2^{inf} = y_1^{inf})$ ,
- $tr(x\|_-y) = (x_2^{app} = y_1^{app} \wedge x_2^{inf} \prec y_1^{inf})$ ,
- $tr(\perp) = \perp$ ,
- $tr(\neg\varphi) = \neg tr(\varphi)$ ,
- $tr(\varphi \vee \varphi') = (tr(\varphi) \vee tr(\varphi'))$ ,
- $tr(\forall x \varphi) = \forall x_1^{app} \forall x_1^{inf} \forall x_2^{app} \forall x_2^{inf} (x_1^{app} \prec x_2^{app} \rightarrow tr(\varphi))$ .

A chaque fonction  $f(\cdot)$  d'interprétation des variables  $x, y, \dots$  dans  $I_{\mathcal{H}}$ , nous associons la fonction  $p(f)(\cdot)$  d'interprétation des variables  $x_1^{app}, x_1^{inf}, x_2^{app}, x_2^{inf}, y_1^{app}, y_1^{inf}, y_2^{app}, y_2^{inf}, \dots$  dans  $\mathbb{IR}$  définie par

- $p(f)(x_1^{app}) = app(|(b_1, f(x))|)$ ,
- $p(f)(x_1^{inf}) = inf(|(b_1, f(x))|)$ ,
- $p(f)(x_2^{app}) = app(|(f(x), b_2)|)$ ,
- $p(f)(x_2^{inf}) = inf(|(f(x), b_2)|)$ .

où  $b_1, b_2$  sont des intervalles d'hyperréels de  $I_{\mathcal{H}}$  tel que  $b_1\|_=_f(x)$  et  $f(x)\|_=_b_2$ . Le lecteur montrera par induction sur la formule  $\varphi$  dans le langage avec égalité construit sur les prédictats binaires  $\|_=_$  et  $\|_-$  que pour toute fonction  $f(\cdot)$  d'interprétation des variables dans  $I_{\mathcal{H}}$ ,  $(I_{\mathcal{H}}, \|_=_, \|_-) \models_f \varphi$ ssi  $(\mathbb{IR}, \prec) \models_{p(f)} tr(\varphi)$ . Par conséquent, pour toute sentence  $\varphi$  dans le langage avec égalité construit sur les prédictats binaires  $\|_=_$  et  $\|_-$ ,  $\varphi$  est dans  $IHY$ ssi  $tr(\varphi)$  est dans  $PRE$ .  $\dashv$

**Preuve de la proposition 7** Par la proposition 4, nous savons qu'il suffit de raisonner dans l'ensemble  $I_{\mathcal{H}}$  des intervalles d'hyperréels muni des relations  $\cdot\|_=_\cdot$  et  $\cdot\|_-\cdot$ .

1. Le lecteur montrera que  $(I_{\mathcal{H}}, \|_=_, \|_-) \models \forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall z ((z\|_=_x \leftrightarrow z\|_=_y) \wedge (x\|_=_z \leftrightarrow y\|_=_z)))$ .
2. Le lecteur montrera que  $(I_{\mathcal{H}}, \|_=_, \|_-) \models \forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall z ((z\|_-x \leftrightarrow z\|_-y) \wedge (x\|_-z \leftrightarrow y\|_-z)))$ .
3. Le lecteur montrera que  $(I_{\mathcal{H}}, \|_=_, \|_-) \models \forall x \forall y (x\|_=_y \leftrightarrow \forall z \forall t ((x\|_-t \wedge z\|_-y \rightarrow z\|_-t) \wedge (z\|_-t \rightarrow \exists u \exists v (u\|_-v \wedge ((x\|_-v \wedge u\|_-t) \vee (u\|_-y \wedge z\|_-v))))))$ .
4. Supposons qu'il existe une formule  $\phi(x, y)$  dans le langage avec égalité construit sur le prédictat binaire  $\|_=_$  tel que  $(I_{\mathcal{H}}, \|_=_, \|_-) \models \forall x \forall y (x\|_-y \leftrightarrow \phi(x, y))$ . Soit  $a \in P_{\mathcal{H}}$  un hyperréel. Soit  $N^-(a) = \{b \in P_{\mathcal{H}} : b \prec a\}$  et  $N^+(a) = \{b \in P_{\mathcal{H}} : a \prec b\}$ . Soit  $\sigma(\cdot)$  une bijection de  $N^-(a)$  vers  $N^+(a)$ . Soit  $\tau(\cdot)$  la bijection de  $I_{\mathcal{H}}$  vers  $I_{\mathcal{H}}$  tel que pour tout intervalle  $[b_1, b_2]$  d'hyperréels,

**cas où**  $b_1 \in N^-(a) : \tau([b_1, b_2]) = [\sigma(b_1), b_2]$ ,  
**cas où**  $b_1 \in N^+(a) : \tau([b_1, b_2]) = [\sigma^{-1}(b_1), b_2]$ ,  
**cas où**  $b_2 \in N^-(a) : \tau([b_1, b_2]) = [b_1, \sigma(b_2)]$ ,  
**cas où**  $b_2 \in N^+(a) : \tau([b_1, b_2]) = [b_1, \sigma^{-1}(b_2)]$ ,  
**autres cas :**  $\tau([b_1, b_2]) = [b_1, b_2]$ .

Le lecteur montrera par induction sur la formule  $\varphi$  dans le langage avec égalité construit sur le prédictat binaire  $\|_=_$  que pour toute fonction  $f(\cdot)$  d'interprétation des variables dans  $I_{\mathcal{H}}$ ,  $(I_{\mathcal{H}}, \|_=_, \|_-) \models_f \varphi$ ssi  $(I_{\mathcal{H}}, \|_=_, \|_-) \models_{\tau \circ f} \varphi$ . Soit  $[b_1, b_2], [c_1, c_2]$  des intervalles d'hyperréels tel que  $b_2 \in N^-(a)$  et  $c_1 \in N^+(a)$ . Soit  $f(\cdot)$  une fonction d'interprétation des variables dans  $I_{\mathcal{H}}$  tel que  $f(x) = [b_1, b_2]$  et  $f(y) = [c_1, c_2]$ . Par conséquent,  $(I_{\mathcal{H}}, \|_=_, \|_-) \models_f x\|_-y$ . Par suite,  $(I_{\mathcal{H}}, \|_=_, \|_-) \models_f \phi(x, y)$ . Par conséquent,  $(I_{\mathcal{H}}, \|_=_, \|_-) \models_{\tau \circ f} \phi(x, y)$ . Par suite,  $(I_{\mathcal{H}}, \|_=_, \|_-) \models_{\tau \circ f} x\|_-y$ : une contradiction.

$\dashv$

**Preuve de la proposition 8** Le lecteur le montrera.  
 $\dashv$

**Preuve de la proposition 9** Il suffit de constater qu'il existe des intervalles d'hyperréels  $a, b$  tel que  $a \not\sim B b$  et  $b \not\sim A a$ ssi  $1 \star \in int_A(Z_{i_B})$  et  $3 \star \in int_A(Z_{j_B})$ .  $\dashv$

**Preuve de la proposition 10** Le lecteur le montrera.  
 $\dashv$

**Preuve de la proposition 11** Il suffit de constater qu'il existe des intervalles d'hyperréels  $a, b, c$  tel que  $a \not\sim C b$ ,  $a \not\sim A c$  et  $c \not\sim B b$ ssi  $i_C \in int_B(Z_{i_A})$  et  $j_C \in int_B(Z_{j_A})$ .  
 $\dashv$

**Preuve de la proposition 12** A chaque relation complexe  $R$  de  $\mathcal{R}_{33}$ , nous associons une relation  $\cdot\eta(R)\cdot$  sur  $I_{\mathcal{H}}$  de la façon suivante :

- $a \eta(R) b$ ssi il existe une relation primitive  $A$  tel que  $A \in R$  et  $a \sim A b$ .

Le lecteur montrera que  $\cdot\eta\cdot$  est un isomorphisme de  $(\mathcal{R}_{33}, 0, \dots, \cdot \sqcup \cdot, id, \cdot^{-1}, \cdot \circ \cdot)$  vers une sous-algèbre de relations de l'ensemble des relations sur  $I_{\mathcal{H}}$ .  $\dashv$

**Preuve de la proposition 13** Le lecteur le montrera.  
 $\dashv$

**Preuve de la proposition 14**

1. Supposons qu'il existe une définition de  $m_\star$  à partir de la relation primitive  $m_-$  au moyen de

l'opération booléenne d'intersection et des opérations relationnelles de transposition et de composition. Par conséquent, il existe une conjonction  $t_0 \parallel_{-} u_0 \wedge \dots \wedge t_k \parallel_{-} u_k$  avec  $x, y, z_1, \dots, z_n$  pour variables libres tel que

- pour toute fonction  $f(\cdot)$  d'interprétation des variables dans  $I_{\mathcal{H}}$ ,  $f(x) m_{\star} f(y)$ ssi  $(I_{\mathcal{H}}, \parallel_{=}, \parallel_{-}) \models_f \exists z_1 \dots \exists z_n (t_0 \parallel_{-} u_0 \wedge \dots \wedge t_k \parallel_{-} u_k)$ .

Considérons un hyperréel  $a \in P_{\mathcal{H}}$ . Soit  $[b_1, b_2], [c_1, c_2]$  des intervalles d'hyperréels tel que  $b_2 = a$  et  $c_1 = a$ . Considérons une fonction  $f(\cdot)$  d'interprétation des variables dans  $I_{\mathcal{H}}$  tel que  $f(x) = [b_1, b_2]$  et  $f(y) = [c_1, c_2]$ . Par suite,  $f(x) m_{\star} f(y)$ . Par conséquent,  $(I_{\mathcal{H}}, \parallel_{=}, \parallel_{-}) \models_f \exists z_1 \dots \exists z_n (t_0 \parallel_{-} u_0 \wedge \dots \wedge t_k \parallel_{-} u_k)$ . Par suite, il existe une fonction  $f'(\cdot)$  d'interprétation des variables dans  $I_{\mathcal{H}}$  tel que  $f \equiv f'$  modulo  $z_1, \dots, z_n$  et  $(I_{\mathcal{H}}, \parallel_{=}, \parallel_{-}) \models_{f'} t_0 \parallel_{-} u_0 \wedge \dots \wedge t_k \parallel_{-} u_k$ . Soit  $f'(z_1) = [d_1^1, d_2^1], \dots, f'(z_n) = [d_1^n, d_2^n]$ . Considérons des hyperréels  $b''_2, c''_1 \in P_{\mathcal{H}}$  tel que

- $b''_2 \prec_{inf} a$ ,
- $a \prec_{inf} c''_1$ ,
- pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $b''_2 \neq d_1^i, b''_2 \not\prec_{inf} d_1^i$  ou  $d_1^i \not\prec_{inf} a, b''_2 \neq d_2^i$  et  $b''_2 \not\prec_{inf} d_2^i$  ou  $d_2^i \not\prec_{inf} a$ ,
- pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $c''_1 \neq d_1^i, a \not\prec_{inf} d_1^i$  ou  $d_1^i \not\prec_{inf} d_1^i, c''_1 \neq d_2^i$  et  $a \not\prec_{inf} d_2^i$  ou  $d_2^i \not\prec_{inf} c''_1$ .

Soit  $f''(\cdot)$  la fonction d'interprétation des variables dans  $I_{\mathcal{H}}$  tel que  $f' \equiv f''$  modulo  $x, y$  définie par  $f''(x) = [b_1, b''_2]$  et  $f''(y) = [c''_1, c_2]$ . Par conséquent,  $f''(x) m_{-} f''(y)$ . Par ailleurs, le lecteur montrera que  $(I_{\mathcal{H}}, \parallel_{=}, \parallel_{-}) \models_{f''} t_0 \parallel_{-} u_0 \wedge \dots \wedge t_k \parallel_{-} u_k$ . Par suite,  $(I_{\mathcal{H}}, \parallel_{=}, \parallel_{-}) \models_{f''} \exists z_1 \dots \exists z_n (t_0 \parallel_{-} u_0 \wedge \dots \wedge t_k \parallel_{-} u_k)$ . Par conséquent,  $f''(x) m_{\star} f''(y)$ : une contradiction.

2. Supposons qu'il existe une définition de  $m_{-}$  à partir de la relation primitive  $m_{\star}$  au moyen de l'opération booléenne d'intersection et des opérations relationnelles de transposition et de composition. Par conséquent, il existe une conjonction  $t_0 \parallel_{=} u_0 \wedge \dots \wedge t_k \parallel_{=} u_k$  avec  $x, y, z_1, \dots, z_n$  pour variables libres tel que

- pour toute fonction  $f(\cdot)$  d'interprétation des variables dans  $I_{\mathcal{H}}$ ,  $f(x) m_{-} f(y)$ ssi  $(I_{\mathcal{H}}, \parallel_{=}, \parallel_{-}) \models_f \exists z_1 \dots \exists z_n (t_0 \parallel_{=} u_0 \wedge \dots \wedge t_k \parallel_{=} u_k)$ .

Considérons des hyperréels  $a', a'' \in P_{\mathcal{H}}$  tel que  $a' \prec_{inf} a''$ . Soit  $[b_1, b_2], [c_1, c_2]$  des intervalles d'hyperréels tel que  $b_2 = a'$  et  $c_1 = a''$ . Considérons une fonction  $f(\cdot)$  d'interprétation des variables dans  $I_{\mathcal{H}}$  tel que  $f(x) = [b_1, b_2]$  et  $f(y) = [c_1, c_2]$ . Par suite,  $f(x) m_{-} f(y)$ . Par conséquent,  $(I_{\mathcal{H}}, \parallel_{=}, \parallel_{-}) \models_f$

$\exists z_1 \dots \exists z_n (t_0 \parallel_{=} u_0 \wedge \dots \wedge t_k \parallel_{=} u_k)$ . Par suite, il existe une fonction  $f'(\cdot)$  d'interprétation des variables dans  $I_{\mathcal{H}}$  tel que  $f \equiv f'$  modulo  $z_1, \dots, z_n$  et  $(I_{\mathcal{H}}, \parallel_{=}, \parallel_{-}) \models_{f'} t_0 \parallel_{=} u_0 \wedge \dots \wedge t_k \parallel_{=} u_k$ . Soit  $f'(z_1) = [d_1^1, d_2^1], \dots, f'(z_n) = [d_1^n, d_2^n]$ . Considérons la bijection  $\theta(\cdot)$  de  $P_{\mathcal{H}}$  vers  $P_{\mathcal{H}}$  définie par

- si  $d \neq a'$  et  $d \neq a''$  alors  $\theta(d) = d$ ,
- $\theta(a') = a''$ ,
- $\theta(a'') = a'$ .

Soit  $f''(\cdot)$  la fonction d'interprétation des variables dans  $I_{\mathcal{H}}$  tel que pour toute variable  $z$ , si  $f'(z) = [d_1^i, d_2^i]$  alors  $f''(z) = [\theta(d_1^i), \theta(d_2^i)]$ . Par conséquent,  $f''(x) m_{+} f''(y)$ . Par ailleurs, le lecteur montrera que  $(I_{\mathcal{H}}, \parallel_{=}, \parallel_{-}) \models_{f''} t_0 \parallel_{=} u_0 \wedge \dots \wedge t_k \parallel_{=} u_k$ . Par suite,  $(I_{\mathcal{H}}, \parallel_{=}, \parallel_{-}) \models_{f''} \exists z_1 \dots \exists z_n (t_0 \parallel_{=} u_0 \wedge \dots \wedge t_k \parallel_{=} u_k)$ . Par conséquent,  $f''(x) m_{-} f''(y)$ : une contradiction.

→

**Preuve de la proposition 15** Supposons que  $R$  et  $S$  sont convexes. Puisque  $R \cap S \subseteq R$  et  $R \cap S \subseteq S$ , alors  $I(R \cap S) \subseteq I(R)$  et  $I(R \cap S) \subseteq I(S)$ . Puisque  $R$  et  $S$  sont convexes, alors  $I(R) \subseteq R$  et  $I(S) \subseteq S$ . Puisque  $I(R \cap S) \subseteq I(R)$  et  $I(R \cap S) \subseteq I(S)$ , alors  $I(R \cap S) \subseteq R$  et  $I(R \cap S) \subseteq S$ . Par conséquent,  $I(R \cap S) \subseteq R \cap S$ . Par suite,  $R \cap S$  est convexe. →

**Preuve de la proposition 16** Supposons que  $R$  et  $S$  sont convexes. Soit  $int(\cdot)$  la fonction de  $I_{\mathcal{H}}$  vers  $\mathbb{R}^4$  définie par

$$- int(a) = (a_1^{app}, a_1^{inf}, a_2^{app}, a_2^{inf})$$

où  $a_1^{app}$  dénote la partie appréciable du début de  $a$ ,  $a_1^{inf}$  dénote la partie infinitésimale du début de  $a$ ,  $a_2^{app}$  dénote la partie appréciable de la fin de  $a$  et  $a_2^{inf}$  dénote la partie infinitésimale de la fin de  $a$ . A chaque intervalle  $a \in I_{\mathcal{H}}$  d'hyperréels et à chaque relation primitive  $C$ , nous associons l'ensemble  $reg(a, C)$  des points de  $\mathbb{R}^4$  défini de la façon suivante:  $reg(a, C) = \{int(b) : a C b\}$ . Pour tout intervalle  $a \in I_{\mathcal{H}}$  d'hyperréels et pour toute relation complexe  $T$ , nous définissons

$$- reg(a, T) = \bigcup \{reg(a, C) : C \in T\}.$$

Le lecteur montrera que pour tout intervalle  $a \in I_{\mathcal{H}}$  d'hyperréels et pour toute relation complexe  $T$ , si  $reg(a, T)$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}^4$  alors  $T$  est convexe.  $reg(a, R \circ S)$  est l'ensemble des projections sur leurs 4 premières coordonnées des octuplets de l'ensemble défini par

$$- reg(a, R, S) = \{(b_1^{app}, b_1^{inf}, b_2^{app}, b_2^{inf}, c_1^{app}, c_1^{inf}, c_2^{app}, c_2^{inf}) : \text{il existe } A \in R \text{ et il existe } B \in S \text{ tel que } a A c \text{ et } c B b\}.$$

Puisque  $R$  et  $S$  sont convexes, alors le lecteur montrera que  $\text{reg}(a, R, S)$  est définissable dans  $\mathbb{R}^8$  par une conjonction d'équations et d'inéquations entre  $a_1^{app}$ ,  $a_1^{inf}$ ,  $a_2^{app}$ ,  $a_2^{inf}$ ,  $b_1^{app}$ ,  $b_1^{inf}$ ,  $b_2^{app}$ ,  $b_2^{inf}$ ,  $c_1^{app}$ ,  $c_1^{inf}$ ,  $c_2^{app}$  et  $c_2^{inf}$ . Par conséquent,  $\text{reg}(a, R, S)$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}^8$ . Puisque  $\text{reg}(a, R \circ S)$  est l'ensemble des projections sur les 4 premières coordonnées des octuplets de  $\text{reg}(a, R, S)$ , alors  $\text{reg}(a, R \circ S)$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}^4$ . Puisque pour tout intervalle  $a \in I_{\mathcal{H}}$  d'hyperréels et pour toute relation complexe  $T$ , si  $\text{reg}(a, T)$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}^4$  alors  $T$  est convexe, alors  $R \circ S$  est convexe.  $\dashv$

### Preuve de la proposition 17

1. Il suffit de remarquer que pour toute relation primitive  $A, B$ ,  $A \ll_I B$  ssi  $B^{-1} \ll_I A^{-1}$ .
2. Puisque  $R \subseteq I(R)$  et  $S \subseteq I(S)$  alors  $R \circ S \subseteq I(R) \circ I(S)$ . Par conséquent,  $I(R \circ S) \subseteq I(I(R) \circ I(S))$ . Puisque  $I(R)$  et  $I(S)$  sont convexes, alors d'après la proposition 16,  $I(R) \circ I(S)$  est convexe. Par suite,  $I(I(R) \circ I(S)) \subseteq I(R) \circ I(S)$ . Puisque  $I(R \circ S) \subseteq I(I(R) \circ I(S))$ , alors  $I(R \circ S) \subseteq I(R) \circ I(S)$ .

$\dashv$

**Preuve de la proposition 18** Il suffit de remarquer que pour toute relation primitive  $A, B$ , si  $B \in \triangleleft_C(A)$  alors  $B = A$  ou  $\dim(B) < \dim(A)$ .  $\dashv$

**Preuve de la proposition 19** Supposons que  $R$  est faiblement préconvexe. Supposons que  $\dim(I(R) \setminus R) \geq \dim(R)$ . Par conséquent, il existe une relation primitive  $A$  tel que  $A \in I(R) \setminus R$  et  $\dim(A) \geq \dim(R)$ . Puisque  $R$  est faiblement préconvexe, alors  $I(R) \subseteq CL(R)$ . Par suite,  $I(R) \setminus R \subseteq CL(R) \setminus R$ . Puisque  $A \in I(R) \setminus R$ , alors  $A \in CL(R) \setminus R$ . Par conséquent,  $\dim(A) \leq \dim(CL(R) \setminus R)$ . D'après la proposition 18,  $\dim(CL(R) \setminus R) < \dim(R)$ . Puisque  $\dim(A) \leq \dim(CL(R) \setminus R)$ , alors  $\dim(A) < \dim(R)$ : une contradiction.  $\dashv$

**Preuve de la proposition 20** Supposons que  $R$  est fortement préconvexe et  $S$  est convexe. Soit  $T$  une relation complexe. Supposons que  $T$  est convexe. Puisque  $S$  est convexe, alors d'après la proposition 15,  $S \cap T$  est convexe. Puisque  $R$  est fortement préconvexe, alors  $R \cap (S \cap T)$  est faiblement préconvexe. Par conséquent,  $(R \cap S) \cap T$  est faiblement préconvexe. Par suite,  $R \cap S$  est fortement préconvexe.  $\dashv$

**Preuve de la proposition 21** Il suffit de constater que d'après la proposition 23, l'algorithme consistant à effectuer l'opération suivante de choix et à vérifier que le graphe atomique obtenu est cohérent constitue une procédure non déterministe polynomiale de décision pour

le problème de la cohérence des graphes quelconques :

- pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  faire
  - choisir  $A$  dans  $C(i, j)$ ;
  - $C(i, j) := \{A\}$ .

$\dashv$

**Preuve de la proposition 22** Il suffit de constater que le problème de la cohérence des graphes de contraintes entre intervalles d'Allen est réductible polynomialement au problème de la cohérence des graphes quelconques de contraintes entre hyperintervalles, ce que le lecteur montrera. En effet, nous savons que le problème de la cohérence des graphes de contraintes entre intervalles d'Allen est  $NP$ -difficile [15].  $\dashv$

**Preuve de la proposition 23** Il suffit de constater que le problème de la cohérence des graphes atomiques de contraintes entre hyperintervalles est réductible polynomialement au problème de la cohérence des graphes de contraintes entre hyperpoints, ce que le lecteur montrera. En effet, nous savons que le problème de la cohérence des graphes de contraintes entre hyperpoints est dans  $P$  [2].  $\dashv$

**Preuve de la proposition 24** Supposons que  $\mathcal{G}$  est non vide et chemin-cohérent. Soit  $P(\cdot)$  la relation sur  $\{1, \dots, n\}$  définie par

- $P(k)$  ssi il existe des intervalles d'hyperréels  $a_1, \dots, a_k$  tel que pour tout  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ , il existe une relation primitive  $A$  tel que  $A \in C(i, j)$ ,  $\dim(A) = \dim(C(i, j))$  et  $a_i A a_j$ .

A la manière de Ligozat [12], le lecteur montrera que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , si  $k < n$  alors  $P(k)$  implique  $P(k+1)$ . Evidemment,  $P(1)$ . Par conséquent,  $P(n)$ . Par suite,  $\mathcal{G}$  est cohérent.  $\dashv$

**Preuve de la proposition 25** Il suffit de constater que d'après la proposition 24, l'algorithme consistant à itérer l'opération suivante de triangulation autant de fois que faire se peut et à vérifier que le graphe convexe obtenu est non vide constitue une procédure déterministe polynomiale de décision pour le problème de la cohérence des graphes convexes :

- pour tout  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$  faire
  - $C(i, j) := C(i, j) \cap (C(i, k) \circ C(k, j))$ .

$\dashv$

**Preuve de la proposition 26** Supposons que  $\mathcal{G}$  est non vide et faiblement chemin-cohérent. D'après la proposition 17, le lecteur montrera que le graphe convexe  $\mathcal{G}' = (n, C')$  défini par

- $C'(i, j) = I(C(i, j))$

est non vide et chemin-cohérent. D'après la proposition 24,  $\mathcal{G}'$  est cohérent. Qui plus est, la preuve de la proposition 24 nous permet d'affirmer qu'il existe des intervalles d'hypercarréels  $a_1, \dots, a_n$  tel que pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , il existe une relation primitive  $A$  tel que  $A \in I(C(i, j))$ ,  $\dim(A) = \dim(I(C(i, j)))$  et  $a_i A a_j$ . Puisque  $\mathcal{G}$  est fortement préconvexe, alors pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $C(i, j)$  est faiblement préconvexe et d'après la proposition 19, il existe une relation primitive  $A$  tel que  $A \in C(i, j)$  et  $a_i A a_j$ . Par conséquent,  $\mathcal{G}$  est cohérent.  $\dashv$

**Preuve de la proposition 27** Il suffit de constater que d'après la proposition 26, l'algorithme consistant à itérer l'opération suivante de triangulation faible autant de fois que faire se peut et à vérifier que le graphe fortement préconvexe obtenu est non vide constitue une procédure déterministe polynomiale de décision pour le problème de la cohérence des graphes fortement préconvexes :

- pour tout  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$  faire
- $C(i, j) := C(i, j) \cap I(C(i, k) \circ C(k, j))$ .

$\dashv$