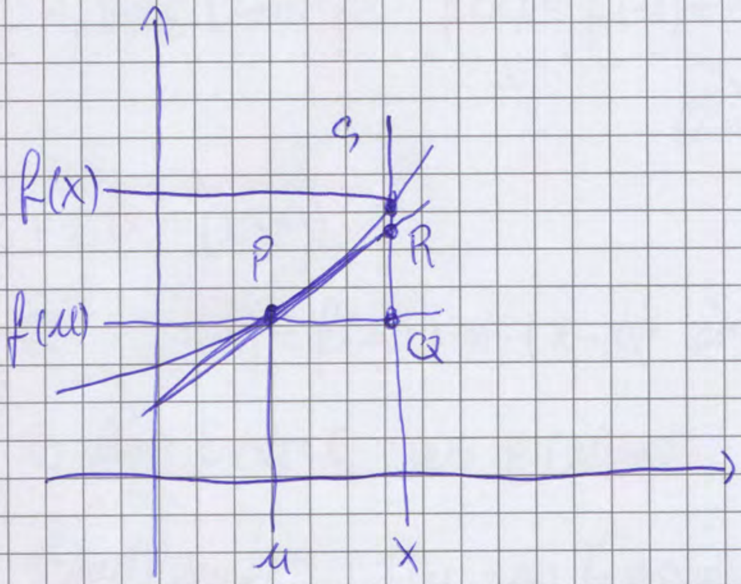
Differenciálás



PQR Δ leibniz-háromszög

$f(x) - f(u) = QS = \underbrace{RQ}_{\text{lineáris rész}} + \underbrace{RS}_{\text{nemlineáris rész}}$

lineáris rész nemlineáris rész

<u>Def(1)</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $u \in Dom(f) \cap Dom(f)'$

azt mondjuk hogy f differenciálható

$f(x)$ az u-ban és deriváltja az

$m \in \mathbb{R}$ szám, ha létezik olyan

$\varepsilon: Dom(f) \to \mathbb{R}$

1, $\forall x \in Dom(f) \quad f(x) = \underbrace{f(a) + m(x-a)}_{\text{lineáris rész}} +$

$+ \varepsilon(x) \cdot (x-a)$

$y = f(a) + m \cdot (x-a)$ érintő egyenlet

2, $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ és $\varepsilon(a) = 0$

<u>Következmény</u> Ha egy függvény egy pontban differenciálható akkor ott folytonos

~~F1A + (1) + (2) az~~

<u>Biz</u>: F1A + (1) + (2) következménye

$\boxed{\text{folytonos függvényekből van összetéve a folytonosságot megőrző módon}}$

Megf: $\frac{f(x)-f(u)}{x-u} = m + \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to u]{} m$

Def: #2 (...)

$$\exists \lim_{x \to u} \frac{f(x)-f(u)}{x-u} = m \in \mathbb{R}$$

Pl: $abs(x) = |x| = \begin{cases} x ; & x > 0 \\ 0 ; & x = 0 \\ -x ; & x < 0 \end{cases}$

Az abszolút érték nem differenciálható

X

Deriválás:

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = \sin x$

$(e^x)' = e^x$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

Gyak:

Szakadás vizsgálat:

$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-3} \begin{matrix} \rightarrow \text{folyt.} \\ \rightarrow \text{folyt.} \end{matrix}$$

Hol folytonos? Ha szakadásai vannak állapítsuk meg azok típusát.

Ez csak ott szakadhat ahol nincs értelmezve.

Folytonos fgv. összege, szorzata, kompozíciója és hányadosa is folytonos (ahol a nevező nem 0)

Az f folytonos az ért. tartományán szakadása csak a nevező $= 0$-nál van.

$x^2+2x-3=0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot-3}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Tehát $x_1 = 1$-ben és $x_2 = -3$-ban szakad

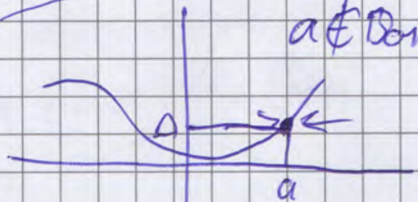
$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \frac{\cancel{(x+3)}(x+2)}{\cancel{(x+3)}(x-1)} = \text{„}\frac{0}{0}\text{"}$$

Ha x_1 és x_2 gyökei $ax^2+bx+c=0$-nak akkor $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{x+2}{x-1} = \frac{-3+2}{-3-1} = \frac{1}{4}$$

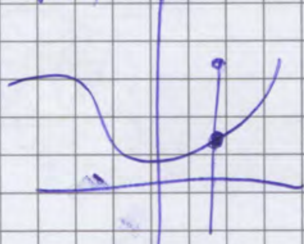
Első fajú szakadás. Ezen belül megszüntethető.

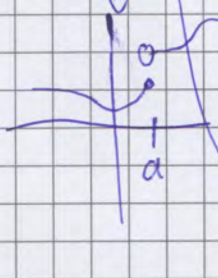
$a \notin Dom(f)$



1. Első fajú
   - ⓐ megszüntethető
   - ⓑ ugrás
2. Másod fajú
   - ⓐ lényeges
   - ⓑ végtelen

$f(a)$





$$\lim_{x\to a} f(x) = A \neq f(a)$$

~~Ez~~ Ez még a feladat

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x+6}{x^2+2x-3}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-1}\ \nexists$$

↓

mint előbb

$$\lim_{x\to 1+}\frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{0+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{0-}=-\infty$$

végtelen szakadása van 1-ben

$$\lim_{x\to\pm}\frac{x^2+5x+6}{x^2+2x-3}=\frac{1+\overbrace{\frac{5}{x}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{6}{x^2}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\to 0}}=1$$

$f(x)\ \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{x+1}$

$x+1=0$

$\boxed{x_1=-1}$

Ertelmezesi $\boxed{x_2=0}$

$\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ -n folytonos

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{x+1} = \frac{e^{\frac{1}{-1}}-1}{0^-} = +\infty \qquad e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{x-1} = \frac{e^{-1}-1}{\ }$$

→ Ez nem negatív

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{x+1} = \frac{e^{\frac{1}{0}}-1}{1} = -1 \qquad \frac{1}{0}\to\infty$$

0

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} e^{x} = 0}$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{x+1} = \frac{e^{\frac{1}{0+}}-1}{1} = +\infty$$

$\frac{1}{0+} \to \infty$, $e^{\frac{1}{0+}} \to \infty$

$x=0$-ban végtelen szakadása van.

Deriválás

$$f(x) = (x^2+4)\cdot \cos x$$

$$f'(x) = (x^2+4)'\cos x + (x^2+4)(\cos x)'$$

$$= 2x\cos x - (x^2+4)\sin x$$

$$f(x) = \frac{e^x + \ln x}{x \cdot \sin x}$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + \ln x)'(x \cdot \sin x) - (e^x + \ln x)(x \cdot \sin x)'}{(x \cdot \sin x)^2}$$

$$= \frac{\left(e^x + \frac{1}{x}\right) x \sin x - (e^x + \ln x)(1 \cdot \sin x + x \cos x)}{x^2 \sin^2 x}$$

$(x \sin x)' = (x)' \sin x +$
$+ x (\sin x)'$

$f(x) = \sin(\cos(x^2))$

$$\boxed{(\sin(\text{ire}))' = \cos(\text{ire}) \cdot (\text{ire})'}$$

$$f'(x) = \cos(\cos(x^2)) \cdot \underbrace{(\cos(x^2))'}$$ $=$

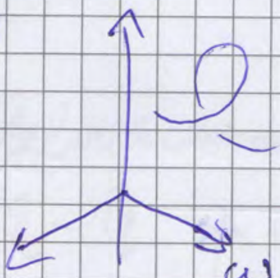
$= -\cos(\cos(x^2)) \sin(x^2) 2x$

A harmonikus rezgő mozgás kitérés - idő fve:

$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$V(t) = ?$

$a(t) = ?$



$$v(t) = x'(t) = A\cos(\omega t + \varphi)\overbrace{(\omega t + \varphi)'}^{\omega} =$$

$$= A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = x''(t) = -A\,\cancel{\cos}\,\omega\sin(\omega t + \varphi)\,\omega$$

$$= -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$$

$$g(t)\ \frac{e^{\sqrt{3}}\cdot\ln(1+2\sqrt{t})}{\sin(3t)}$$

$$g'(t)\ \frac{\left(e^{\sqrt{5}}\cdot\ln(1+2\sqrt{t})\right)' + \sin(3t) - \left(e^{\sqrt{5}}\ln(1+2\sqrt{t})\right)}{\sin^2(3t)}$$

$$\frac{(\sin(3t))'}{\sin^2(3t)}$$

$$= \frac{\left(e^{\sqrt{t}} \frac{1}{1+2\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \sin 3t - \left(e^{\sqrt{t}} \ln\left(1+2\sqrt{t}\right)\right) \cos(3t) \cdot 3}{\sin^2(3t)}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

Szélsőérték, monotonitás

Szélsőértéke ott lehet ahol a derivált $0 = f'(x)$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (x+1) - e^x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x e^x}{(x+1)^2}$$

Hol nulla?

$$\frac{x e^x}{(x+1)^2} = 0 \iff x e^x = 0$$

$x = 0$ $\quad$ $e^x \neq 0$

- Értelmezési tart.

$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$x+1=0$
$x=-1$

Tengely metszetek

x tg metszete
$e^x = 0$ -nál lehetetlen $\rightarrow$ nincs

y tg metszet
$f(0) = \frac{e^0}{0+1} = 1 \Rightarrow (0,1)$

$$f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2} > 0 \iff x\underbrace{e^x}_{>0} > 0$$

$(x+1)^2 > 0$ (ami négyzete)

$$\frac{\oplus}{\oplus} = \oplus$$

Ha $x > 0 \Rightarrow f$ szig. mon. növő.

Ha $x < 0 \Rightarrow f$ szig. mon. csökk.

$\Downarrow$

$(x \neq -1)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x+1} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

① Milyen tart? Indok.

$$\left(\frac{n+2}{n-5}\right)^{n(n+3)} = \left(\left(\frac{n+2}{n-5}\right)^{n}\right)^{n+3}$$

$$\left(\frac{n+2}{n-5}\right)^{n} = \left(\frac{\frac{n+2}{n}}{\frac{n-5}{n}}\right)^{n} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{-5}{n}\right)^{n}} = \frac{e^{2}}{e^{-5}} = e^{7}$$

rendőr elv

$$2^{n+3} \leq a_n$$
$$\downarrow$$
$$+\infty$$

$$\sqrt[n]{3^n - n^2 + \frac{111}{n}} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2\cdot 3^n} =$$

$$\sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{3^n} = \sqrt[n]{2}\cdot 3 \to 3$$

$$\leq$$
$$\downarrow$$
$$\sqrt[n]{3^n - n^2}$$

⑤

$f(x) = e^x \cdot (x^2+1)$

$f'(x) = e^x(x^2+1) + e^x \cdot 2x = e^x(x^2+2x+1) = e^x(x+1)^2$