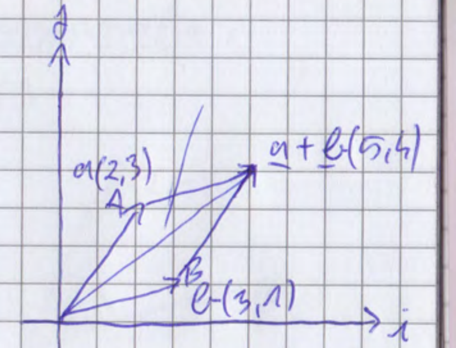
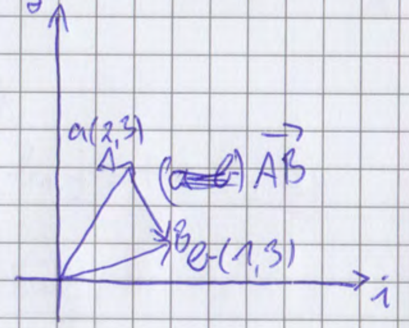
Analízis (Vektorok)

$\underline{a} + \underline{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$



$(\cancel{\underline{a}-\underline{b}})\ \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

A nyíl mindig a kivont vektor felé fog mutatni



$|\underline{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$

Az $\underline{a}$ vektor hossza pitagoras tétellel

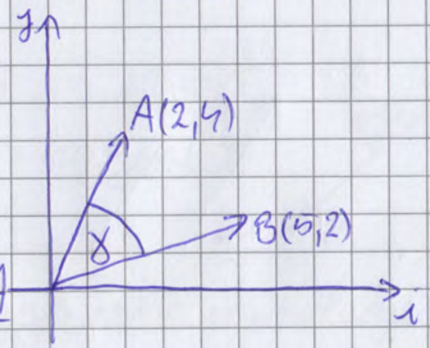
$|\overrightarrow{AB}| = |\underline{b} - \underline{a}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2} = d(A,B)$

Ugyan így kapjuk meg az ~~a, b~~ A, B pontok távolságát.

Két vektor skaláris szorzata:

$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \gamma$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$



$a = a_1 \cdot \underline{i} + a_2 \cdot \underline{j} \quad b = b_1 \cdot \underline{i} + b_2 \underline{j}$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_1 \cdot \underline{i} + a_2 \cdot \underline{j})(b_1 \cdot \underline{i} + b_2 \cdot \underline{j})$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 \cdot \underline{i} \cdot \underline{i} + a_1 \cdot b_2 \cdot \underline{i} \underline{j} + a_2 \cdot b_1 \cdot \underline{j} \cdot \underline{i} + a_2 \cdot b_2 \cdot \underline{j} \underline{j}$

$\left.\begin{array}{l} i \cdot i = j \cdot j = \cos 0 = 1 \\ i \cdot j = j \cdot i = \cos 90 = 0 \end{array}\right\}$ Bíz!

$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

Ezzel ki lehet számolni a kettő vektor által bezárt szöget.

$a_1 b_1 + a_2 \cdot b_2 = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2} \cdot \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2} \cdot \cos \gamma$

Két vektor pontosan akkor merőleges egymásra ha $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

90°-os elforgatás

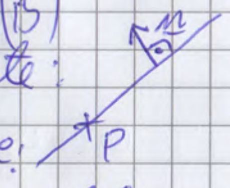
$\underline{a} = (a_x, a_y) = (a_1, a_2)$

$\underline{a}^{+90} = (-a_y, a_x)$

$\underline{a}^{-90} = (a_y, -a_x)$

Egyenes egyenlete!

$P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

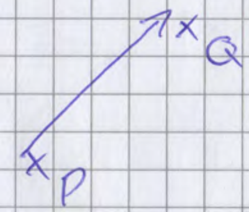


$e: A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

A normálvektor az egyenesre merőleges nem nullvektor.

Két pont közti vektor:

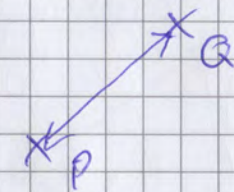
a $P(x_1, y_1)$ és a $Q(x_2, y_2)$ pontok közötti vektor koordinátás alakja:



$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Két pont távolsága!

a $P(x_1, y_1)$ és a $Q(x_2, y_2)$ pontok egymástól mért távolsága:

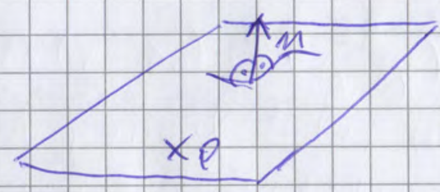


$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Tehát a $\overrightarrow{PQ}$ vektor hossza.

A sík egyenlete térben!

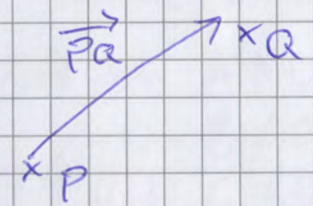
a $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete



$$A(x-\cancel{y}x_0)+B(y-y_0)+$$
$$+C(z-z_0)=0$$

Két pont közti vektor térben!

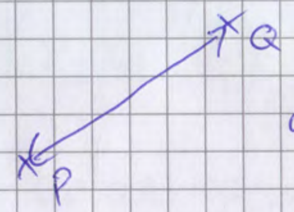
a $P(x_1, y_1, z_1)$ és a $Q(x_2, y_2, z_2)$ pontok közötti vektor koordinátás alakja:



$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Két pont távolsága térben:

a $P(x_1, y_1, z_1)$ és a $Q(x_2, y_2, z_2)$ pontok távolsága egymástól:



$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Az egyenes térbeli egyenlete:

a $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{v} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ irányvektorú egyenes egyenlete:

Ha a $Q(x, y, z)$ az egyenesnek tetszőleges pontja akkor

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow x - x_0 = \lambda \cdot A \\ \rightarrow y - y_0 = \lambda \cdot B \\ \rightarrow z - z_0 = \lambda \cdot C \end{matrix}$$

Ez a $\vec{PQ}$ vektor az egyenes irányvektorának valahányszorosa

Ha $A \neq 0$ leosztunk vele, ha 0, $\rightarrow x = x_0$

$-$ $\|$ $-$ $B \neq 0$ $-$ $\|$ $-$ $\rightarrow y = y_0$

$-$ $\|$ $-$ $C \neq 0$ $-$ $\|$ $-$ $\rightarrow z = z_0$

$$\frac{x - x_0}{A} = \lambda \qquad \frac{y - y_0}{B} = \lambda \qquad \frac{z - z_0}{C} = \lambda$$

Mivel mindenki λ-val egyenlő

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

Ez az egyenes egyenletrendszere térben.

Sorozatok határértéke

$\frac{1}{n^2} \to 0$	$n^2 \to \infty$	$\sqrt[2]{n} \to \infty$

q^n

Ha $q > 1 \Rightarrow q^n \to \infty$

Ha $q = 1 \Rightarrow q^n \to 1$

Ha $-1 < q < 1 \Rightarrow q^n \to 0$

Ha $q \leq -1 \Rightarrow q^n$ div

$a_n + b_n$		$\lim a_n$: $-\infty$	A	$+\infty$
$\lim b_n$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
	A	$-\infty$	$A+B$	$+\infty$
	$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$a_n \cdot b_n$		$\lim a_n$				
		$-\infty$	$A<0$	0	$A>0$	$+\infty$
	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
	$B<0$	$+\infty$	AB	0	AB	$-\infty$
$\lim b_n$	0	?	0	0	0	?
	$B>0$	$-\infty$	AB	0	AB	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$(-\infty)(+\text{szám}) = -\infty$

$(-\infty)(+\infty) = -\infty$

$(-\text{szám})(-\infty) = +\infty$

$\frac{a_n}{b_n}$		$\lim a_n$				
		$-\infty$	$A<0$	0	$A>0$	$+\infty$
	$-\infty$	?	0	0	0	?
	$B<0$	$+\infty$	A/B	0	A/B	$-\infty$
$\lim b_n$	0	?	?	?	?	?
	$B>0$	$-\infty$	A/B	0	A/B	$+\infty$
	$+\infty$	?	0	0	0	?

$\lim \frac{\infty}{\infty}$ típus

$\lim \frac{\text{POLINOM}}{\text{POLINOM}}$ A számlálót és a nevezőt is le kell osztani a nevező legnagyobb kitevőjű tagjával.

$\lim \frac{\text{EXPONENCIÁLIS}}{-\,\text{"}\,-}$ A számlálót és a nevezőt is leosztjuk a nevező legnagyobb hatványalapú tagjával.

$\lim \frac{\sqrt{\text{VALAMI}}}{\sqrt{\text{IZÉ}}}$ A számlálót és a nevezőt is leosztjuk a nevező legnagyobb kitevőjű tagjával.

$n = \sqrt{n^2}$ $\quad n = \sqrt[3]{n^3}$ $\quad n = \sqrt[k]{n^k}$

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ $\qquad \lim \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}$

α = más szám

$$\lim \left(1+\frac{\alpha}{\text{IZÉ}}\right)^{\text{IZÉ}} = e^{\alpha} \quad \text{Ha } \text{IZÉ} \to \infty$$

Egy sorozatot konvergensnek nevezünk, ha van olyan valós szám ami a sorozat határértéke.
Ha ilyen szám nem létezik, akkor a sorozat divergens

Konvergens: $\frac{1}{n} \to 0$ | $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$

van határérték: $-n^3 \to -\infty$ $\quad 3^n \to \infty$

Divergens

nincs határértékük: $(-1)^n \to$ sehova $\quad (-2)^n \to$ sehova

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Rendőr-elv:

Az a_n sorozat erősebb, mint a b_n sorozat, ha $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$ és ezt így jelöljük $a_n \gg b_n$

Erősségi sorrend

$\log n \ll \sqrt[k]{n} \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$

Rendőr-elv:

Ha $a_n \to A$ és $c_n \to A$ és van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \le b_n \le c_n$, akkor $b_n \to A$

$$\sqrt{\frac{\text{kisebb}}{\text{nagyobb}}} \le \sqrt{} \le \sqrt{\frac{\text{nagyobb}}{\text{kisebb}}}$$

Ha az alsó becslés túl kicsi lenne kell egy c szorzó ami $\cancel{A<C<}$ $1 > c > 0$

Komplex számok: $\boxed{i^2 = -1}$

$\boxed{z = a + b i}$ komplex szám $\boxed{\bar{z} = a - b i}$

$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + b_1 i + b_2 i$

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$$

$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i)$

Ha egy komplex számot megszorzunk a konjugáltjával, akkor mindig valós számot kapunk.

$z \cdot \bar{z} = (a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i) = a_1^2 + ab i - ab i - b^2 i^2 =$

$= a^2 + b^2$

$z + \bar{z} = a_1 + b_1 i + a_2 - b_2 i = 2a$

$a^2 + b^2 = a^2 - b \cdot (-1) = a^2 - b i^2 = (a - b i)(a + b i)$

Algebra alaptétele: A komplex számok segítségével minden polinom felbontható elsőfokú tényezők szorzatára.