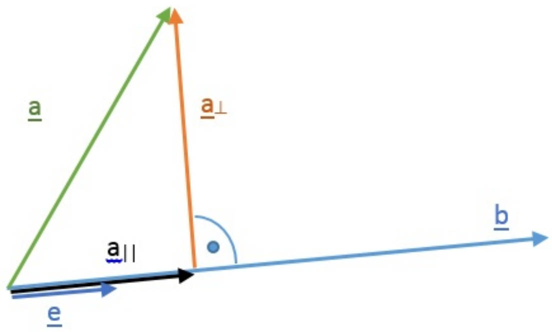
1. heti gyakorlat

Vektoralgebra, vektorszorzatok, vektorfelbontások

1. (26. Monostori)
Bontsuk fel az $\mathbf{a}$ vektort egy adott $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ vektorral párhuzamos és merőleges összetevőre.

Megoldás:
Legyen $\mathbf{a}_{\parallel}$ a $\mathbf{b}$-vel párhuzamos, $\mathbf{a}_{\perp}$ pedig a $\mathbf{b}$-re merőleges komponens.
Legyen továbbá $\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ a $\mathbf{b}-$vel párhuzamos és egyirányú egységvektor. Középiskolai



tanulmányaink alapján: $\left|\mathbf{a}_{\parallel}\right| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = |\mathbf{a}| \cdot 1 \cdot \cos\alpha$, ahol α az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ közrezárt szöge.
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$, továbbá $\mathbf{a}_{\parallel} = \left|\mathbf{a}_{\parallel}\right| \cdot \mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \cdot \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{e} \circ \mathbf{e})\mathbf{a}$
Ez utóbbi jelölés majd Matek G3-ban fog szerepelni.
Innen $\mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a}$ alapján $\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \cdot \mathbf{b}$.

2. (27. Monostori)
Igazoljuk, hogy az $\mathbf{a}$ és $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ vektorok merőlegesek.

Megoldás:
A két vektor pontosan akkor merőleges, ha skaláris szorzatuk nulla.
A skaláris szorzás mindkét változójában lineáris (bilineáris) művelet, illetve kommutatív, így:

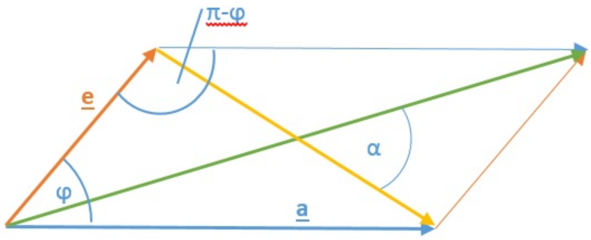
$$\Big((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}\Big) \cdot \mathbf{a} = \Big((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}\Big) \cdot \mathbf{a} - \Big((\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}\Big) \cdot \mathbf{a} =$$
$$= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = 0$$

3. (32. Monostori)

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{e}$ vektor hajlásszöge $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{e}| = 1$.
Számoljuk ki $\mathbf{a}+\mathbf{e}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{e}$ hajlásszögét (jelöljük ezt α−val).

Megoldás:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{e}) \cdot (\mathbf{a}-\mathbf{e}) = |\mathbf{a}+\mathbf{e}| \cdot |\mathbf{a}-\mathbf{e}| \cdot \cos(\alpha)$$



A skaláris szorzat (bi)linearitása és kommutativitása miatt:

(a) $(\mathbf{a}+\mathbf{e})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{e}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}+\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{e}\cdot\mathbf{e} = \mathbf{a}^2-\mathbf{e}^2 = |\mathbf{a}|^2-|\mathbf{e}|^2 = 3-1 = 2.$

(b) $|\mathbf{a}+\mathbf{e}|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{e})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{e}) = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{e} + \mathbf{e}^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{e}|\cos(\varphi) + |\mathbf{e}|^2$
$= 3 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot 1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1 = 4 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 7$

(c) $|\mathbf{a}-\mathbf{e}|^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{e})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{e}) = \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a}\mathbf{e} + \mathbf{e}^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{e}|\cos(\varphi) + |\mathbf{e}|^2$
$= 3 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot 1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1 = 4 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$

Az az eredeti egyenlőségbe behelyettesítve (a), (b), (c) értékeit: $2 = \sqrt{7}\cdot 1\cdot\cos(\alpha)$, amiből $\cos(\alpha) = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

A keresett hajlásszög $\alpha = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$.

Megjegyzés: a (b) és (c) pontban a vektorhosszakat az elemi síkgeometriából ismert koszinusztétellel is számolhattuk volna.

4. Műveletek vektorokkal:

Legyenek

$\mathbf{a} = 1 \cdot \mathbf{i} - 2 \cdot \mathbf{j} + 3 \cdot \mathbf{k}$, $\quad$ $\mathbf{b} = 3 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j} + 1 \cdot \mathbf{k}$,

$\mathbf{c} = 6 \cdot \mathbf{i} + 3 \cdot \mathbf{j} + 3 \cdot \mathbf{k}$, $\quad$ $\mathbf{d} = 4 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j} + 4 \cdot \mathbf{k}$.

Számoljuk ki a következőket:

(a) $2\mathbf{a}$,

(b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$,

(c) az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszögét (jelöljük φ−vel),

(d) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$,

(e) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$,

(f) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$,

(g) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d}$,

(h) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$,

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}$.

Megoldás:

(a) $2\mathbf{a} = 2 \cdot \mathbf{i} - 4 \cdot \mathbf{j} + 6 \cdot \mathbf{k}$

(b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 2$ (koordinátánkénti szorzatok összege)

(c) $\cos(\varphi) = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \dfrac{2}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{9+4+1}} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{1}{7} \approx 81,79°$.

(d) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\varphi) = 14 \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} = 14 \cdot \sqrt{\frac{48}{49}} = 2 \cdot \sqrt{48} = 8 \cdot \sqrt{3}$

Szemléletesen a paralelogramma területe.

(e) $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} +(-8) \\ -(-8) \\ +(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Így $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 8 \cdot \sqrt{3}$ is számolható.

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = -8 - 16 - 24 = 0$ ami triviális, hiszen $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges mind $\mathbf{a}$−ra, mind $\mathbf{b}$−re.

MJ.: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$ szintén a merőlegesség miatt.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = -48 + 24 + 24 = 0$$

Vagy lehetett volna a következő képpen is számolni: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = 0$

Geometriai jelentés: a három vektor komplanáris, a kifeszített parallelepipedon térfogata, azaz a vektorok vegyesszorzata 0.

(f) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = -48+24+24 = 0$

Ezek a vektorok is komplanárisak.

(g) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = -32+32+32 = 32$

Geometriai jelentés: a vektorok vegyesszorzata $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{d} = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}) > 0$, azaz a három vektor ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkot. A paralelepipedon térfogata most nem 0!!!

Vagy: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{d} = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = d_1(a_2d_3 - a_3b_2) - d_2(a_1b_3 - a_3b_1) + d_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 32$.

Érdekes, hogy a determináns bizonyos sorcseréi nem változtatják meg a determináns értékét!

(h) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -8 & 8 & 8 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 8\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$24\cdot \begin{bmatrix} +(0) \\ -(-3) \\ +(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 72 \\ -72 \end{bmatrix}$.

Vagy számolhatjuk a kifejtési tétellel is:

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} =$

$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} =$

$(6-6+9)\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - (18+6+3)\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27-27 \\ 18+54 \\ 9-327 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 72 \\ -72 \end{bmatrix}$

(i) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\cdot\mathbf{a} = 14\cdot\mathbf{b} - 2\cdot\mathbf{a} =$

$= \left(\begin{bmatrix} 42 \\ 28 \\ 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 40 \\ 32 \\ 8 \end{bmatrix}$

Ezt is lehetne másképpen számolni, az előzőhöz hasonlóan.

5. Vektor felbontás:

Legyen $\mathbf{a} = 1 \cdot \mathbf{i} - 2 \cdot \mathbf{j}$ és $\mathbf{b} = 3 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j}$.

(a) Számítsuk ki $\mathbf{a} \times \mathbf{b}-$t

(b) Bontsuk fel az $\mathbf{a}-$t $\mathbf{b}-$vel párhuzamos és arra merőleges összetevők összegére.

Megoldás:

(a) Mivel a keresztszorzat csak 3−dimenziós vektortérben van definiálva, terjesszük ki a vektorokat $\mathbb{R}^3$-beli vektorokká:
$\hat{\mathbf{a}} = 1\mathbf{i} - 2 \cdot \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ és $\hat{\mathbf{b}} = 3\mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$.
Innen

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} +(0) \\ -(0) \\ +(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = 8\mathbf{k}.$$

(b) Az $\mathbf{a}$ merőleges felbontása:

$$\mathbf{a}_{\|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \cdot \mathbf{b} = \frac{3-4}{9+4} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{13} \\ \frac{-2}{13} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\|} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-3}{13} \\ \frac{-2}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{13} \\ \frac{-24}{13} \end{bmatrix}$$

Azaz $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\|} + \mathbf{a}_{\perp} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{13} \\ \frac{-2}{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{16}{13} \\ \frac{-24}{13} \end{bmatrix}$.

Vagy gondolkodhatunk általánosan is:
$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}, \quad \mathbf{b}_{\perp} = b_2\mathbf{i} - b_1\mathbf{j}$

$x_1\mathbf{b} + x_2\mathbf{b}_{\perp} = \mathbf{a}$

$$\left.\begin{aligned} b_1x_1 + b_2x_2 &= a_1 \\ b_2x_1 - b_1x_2 &= a_2 \end{aligned}\right\}$$

Vektoros írásmódban:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Mátrixos írásmódban: $\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$.

Könnyű ellenőrizni, hogy ez $-b_1^2 - b_2^2 \neq 0$ esetén egyértelműen megoldható.

6. Vektor felbontása

Legyen $\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{i} + a_2 \cdot \mathbf{j}$, és $\mathbf{b} = b_1 \cdot \mathbf{i} + b_2 \cdot \mathbf{j}$.

Bontsuk fel a $\mathbf{c} = c_1 \cdot \mathbf{i} + c_2 \cdot \mathbf{j}$ vektort az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorral párhuzamos összetevők összegére, ahol $a_k,\ b_k,\ c_k \in \mathbf{R},\quad k = 1, 2.$

Megoldás:

Amennyiben $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamos, ez mindig lehetséges, hiszen két nem párhuzamos vektor bázis $\mathbb{R}^2-$ben.

A $\mathbf{c}$ párhuzamos felbontása a másik két vektorral:

$\mathbf{a}x_1 + \mathbf{b}x_2 = \mathbf{c}$, és keressük az x_1, x_2 valós együtthatókat.

Koordinátás alakban:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Ugyanez mátrixos alakban hasonlóan az előő példához:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ez $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ esetén egyértelműen megoldható. Ez ugyanis ekvivalens azzal hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamos.

Még rövidebb írásmódban: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\, \mathbf{x} = \mathbf{c}$

lineáris egyenletrendszer megoldásával ekvivalens.

Most még csak elemi úton tudjuk megoldani. Ez lehet házi feladat is.

Az egyenletet koordinátánként felírva egy lineáris egyenletrendszert kapunk x_1 és x_2 ismeretlennel. Az egyenletrendszert akkor tudjuk általánosan megoldani, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ bázist alkot. Azaz feltehető , hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ közül egyik sem nullvektor. Ekkor viszont legalább az egyik egyenletből kifejezhető az x_2 (és persze x_1 is).

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 & = & c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 & = & c_2 \end{cases}$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $b_1 \neq 0$.

Ha $b_1 \neq 0$, akkor $x_2 = \dfrac{c_1 - a_1x_1}{b_1}$.

A második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$a_2x_1 + b_2 \cdot \dfrac{c_1 - a_1x_1}{b_1} = c_2$, amit x_1-re rendezünk.

$$a_2x_1 - \frac{a_1b_2}{b_1}x_1 + \frac{b_2c_1}{b_1} = c_2$$

$$x_1\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1} = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{b_1}$$

$x_1 = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2}$ amennyiben a nevező nem nulla.

Ekkor $x_2 = \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$.

Megmutatjuk, hogy $a_2b_1 - a_1b_2$ pontosan akkor nem nulla, ha $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$, azaz e két vektor bázisa $\mathbb{R}^2-$nek.
$a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; a_2b_1 \neq a_1b_2 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} \neq \lambda\mathbf{b}\; (\lambda \in \mathbb{R}) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$
A párhuzamos felbontás végül:
$\mathbf{c} = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2}\mathbf{a} + \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}\mathbf{b}$

MJ.: a kiszámolt x_1 és x_2 rendre a $\mathbf{c}$ vektor első és második koordinátája az $\{\mathbf{a};\, \mathbf{b}\}$ bázisban.

7. Vektor felbontása 3-dimenzióban
Legyen $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^3$.
Bontsuk fel a $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^3$ vektort az $\mathbf{a}$, a $\mathbf{b}$ és a $\mathbf{c}$ vektorral párhuzamos összetevők összegére!
Megoldás:
Amennyiben $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ kifeszíti a teret, azaz lineárisan függetlenek, ez mindig lehetséges. Mert három lineárian független vektor bázist alkot $\mathbf{R}^3-$ben.
A $\mathbf{d}$ párhuzamos felbontása a másik két vektorral:
$\mathbf{a}x_1 + \mathbf{b}x_2 + \mathbf{c}x_3 = \mathbf{d}$, és keressük az x_1, x_2, x_3 ismeretleneket!.
Koordinátás alakban:
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$
Ugyanez mátrixos alakban hasonlóan az előő példához:
$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}.$$
Az egyenletrendszer megoldhatóságát vizsgálni kell. De mi már tudjuk, hogy a lineáris függetlenséget a determináns kiszámolásával lehet ellenőrizni.
Magasabb dimenziókban még korlátlan lehetőségek nyílnak hasonló feladatok felírására.

2. heti gyakorlat

Mátrixműveletek, determináns számítás

1. (277. Monostori)

   Legyen $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

   Számoljuk ki a következő műveletsorok eredményét.

   (a) $(A+B)^2$
   (b) $A^2 + 2AB + B^2$
   (c) $A^2 + BA - AB - B^2$
   (d) $(A+B)(A-B)$
   (e) $A^2 - BA + AB - B^2$
   (f) $A^2 - B^2$

   Megoldás:

   Megmutatjuk, hogy $(a) \neq (b)$:

$$(A+B)^2 = \left(\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 40 & 4 \\ 16 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

   Tehát (a) eredménye $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 40 & 4 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$.

   A disztributív tulajdonságot felhasználva:
   $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$
   $AB \neq BA$, mert

$$AB = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 29 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \end{array}, \text{ és } BA = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} \end{array}$$

   Innen a (b) feladat eredménye:

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 19 & -18 \\ 12 & -5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 29 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -4 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 32 \\ 16 & 22 \end{bmatrix},$$

$$\text{mert } A^2 = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 19 & -18 \\ 12 & -5 \end{bmatrix} \end{array} \text{ és } B^2 = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -4 & 17 \end{bmatrix} \end{array}$$

$(c) = (d)$ a disztributivitás miatt:
$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2 =$
$= \begin{bmatrix} 19 & -18 \\ 12 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 29 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -4 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -38 \\ 16 & -36 \end{bmatrix}$

$AB \neq BA$ miatt $(c) \neq (e)$ és $(e) \neq (f) \neq (c)$.

Például: (f) eredménye $A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 19 & -18 \\ 12 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -4 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 16 & -22 \end{bmatrix}$.

Az (e) eredményének kiszámítása házi feladat.

2. (284. Monostori - szerepelt előadáson is)
Mutassuk meg, hogy minden négyzetes A mátrix felírható egy szimmetrikus S és egy Z antiszimmetrikus mátrix összegeként. ($S = S^T,\ Z = -Z^T$ tehát.)

Megoldás:
$A = S + Z$
$\Updownarrow$
$A^T = S^T + Z^T = S - Z$

$$A + A^T = 2S \ \Leftrightarrow\ \frac{A + A^T}{2} = S \text{ és ez valóban szimmetrikus,}$$

$$A - A^T = 2Z \ \Leftrightarrow\ \frac{A - A^T}{2} = Z \text{ és ez valóban antiszimmetrikus.}$$

3. (285. (a) Monostori)
Bontsuk fel az A mátrixot egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

Megoldás:
$A = S + Z$, ahol S a szimmetrikus, Z az antiszimmetrikus komponens.
$A^T = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$
$S = \dfrac{A + A^T}{2} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -8 & 3 & 11 \\ \bullet & -2 & -4 \\ \bullet & \bullet & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ \bullet & -1 & -2 \\ \bullet & \bullet & 5 \end{bmatrix}$,
$Z = \dfrac{A - A^T}{2} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 8 \\ 5 & -8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 4 \\ \frac{5}{2} & -4 & 0 \end{bmatrix}$
$S + Z = A$ valóban.

4. (234. Monostori) Számítsuk ki a következő determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

Megoldás:

A definíció alapján

$$\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix} = (1+\sqrt{2})\,(1-\sqrt{2}) - (2+\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3}) =$$
$$= (1-2) - (4-3) = -2$$

5. (245. Monostori) Számítsuk ki a következő determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

Megoldás:

A definíció alapján nehézkes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} =$$
$$= 1\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 10 \\ 1 & 10 & 20 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 20 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} =$$
$$= 2\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} - 1(\cdots) + 1(\cdots) - 1(\cdots)$$

Inkább végezzünk el olyan sor(oszlop)műveleteket először, amik nem változtatják meg a determináns értékét, de egyszerűsítik a kifejtést.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \overset{\substack{s_4-s_1 \\ s_3-s_1 \\ s_2-s_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} \overset{\substack{s_4-3s_2 \\ s_3-2s_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} \overset{s_4-3s_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Az első oszlop szerinti kifejtéssel számoltuk az utolsó determinánst és annak minden aldeterminánsát.

Következmény: felső vagy alsó háromszögdetermináns értéke mindig a főátlóbeli elemek szorzata.

MJ.: szomszédos sorcsere esetén a determináns -1-szeresére változik.

6. (255. Monostori) Fejtsük ki a következő determinánst.

$$\begin{vmatrix} a+x & a & a \\ a & a+x & a \\ a & a & a \end{vmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} a+x & a & a \\ a & a+x & a \\ a & a & a \end{vmatrix} \overset{\substack{o_2-o_3 \\ o_1-o_3}}{=} \begin{vmatrix} x & 0 & a \\ 0 & x & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = x^2 \cdot a$$

7. (258. Monostori) Számítsuk ki a következő determinánst. (Az i a képzetes egység, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.)

$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ c-di & a-bi \end{vmatrix}$$

Megoldás:

Komplex elemű mátrixokkal ugyanúgy számolunk.

$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ c-di & a-bi \end{vmatrix} = (a+bi)(a-bi) - (c-di)(c+di) =$$
$$= a^2 - b^2 i^2 - \left(c^2 - d^2 i^2\right) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

Házi feladatnak: 264. Monostori

8. (268. Monostori) Írjuk fel a determinánst a benne szereplő változók kifejezéseként.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Megoldás: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{ii}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

Az első oszlop szerinti kifejtés alapján. (Felső vagy alsó háromszögdetermináns esetén mindig a főátlóbeli elemek szorzatát kapjuk.)

9. (273. (a) Monostori feladat kicsit módosítva)

$$\det\left\{\left(\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{bmatrix}\right)^3\right\}=?$$

Megoldás:

A mátrixszorzat harmadik hatványának kiszámolása helyett alkalmazzuk inkább a determinánsok szorzástételét:

$\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$

Ez alapján $\det(M^n)=(\det M)^n$.

Vagyis $\det\left\{(AB)^3\right\}=(\det(AB))^3=(\det(A)\cdot\det(B))^3=(\det A)^3\cdot(\det B)^3$.

Legyen most $\det A=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}$ és $\det B=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{vmatrix}$

Innen $\det\left\{\left(\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{bmatrix}\right)^3\right\}=9^3\cdot(-4)^3=-36^3$

Mátrix rangja, inverze

1. (287. (d) Monostori feladat)

Határozzuk meg a következő mátrix inverz mátrixát.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 3 & -2\\ -5 & -4 & -1\end{bmatrix}$$

Megoldás:

$\det A=1(-3-8)-2(-4-10)+1(-16+15)=-11+28-1=16$

Az A ún. adjungált mátrixa:

$$A^*=\begin{bmatrix}+(-11) & -(-14) & +(-1)\\ -(2) & +(4) & -(6)\\ +(-7) & -(-6) & +(-5)\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-11 & -2 & -7\\ 14 & 4 & 6\\ -1 & -6 & -5\end{bmatrix}$$

Az A inverze $A^{-1}=\dfrac{1}{16}\begin{bmatrix}-11 & -2 & -7\\ 14 & 4 & 6\\ -1 & -6 & -5\end{bmatrix}$.

2. Határozzuk meg a következő mátrix inverz mátrixát (303. feladat együtthatómátrixa).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$\det A = 2\,(16-4) + 1\,(12+6) - 1\,(-6-12) = 24 + 18 + 18 = 60$

Az A ún. adjungált mátrixa:

$$A^* = \begin{bmatrix} +(12) & -(18) & +(-18) \\ -(-6) & +(11) & -(-1) \\ +(6) & -(-1) & +(11) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Az A inverze $A^{-1} = \dfrac{1}{60} \begin{bmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{bmatrix}$.

3. (289. Monostori feladat)

Határozzuk meg az X mátrixot a következő egyenletből.

$$X \cdot \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\det \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 35 - 36 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = -1 \cdot \begin{bmatrix} +5 & -4 \\ -9 & +7 \end{bmatrix}^T = -1 \cdot \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \\ X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -16 & 29 \\ -7 & 12 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. (295. Monostori feladat)

Határozzuk meg a következő mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Az ún. elemi sor- és oszlopműveletek nem változtatják meg a rangot.

$$r\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \stackrel{sorcserek}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -6 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \stackrel{\substack{s_4-2s_1 \\ s_3+4s_1 \\ s_2-3s_1}}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{s_3-s_2}{=}$$

$$\stackrel{s_3-s_2}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{s_3+9s_4}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{s_3\leftrightarrow s_4}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{o_3\leftrightarrow o_4}{=}$$

$$\stackrel{o_3\leftrightarrow o_4}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{\substack{o_2-o_1 \\ o_3+o_1 \\ o_4-o_1}}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{\substack{o_3-4o_2 \\ o_4+2o_2}}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

Visszafelé haladva megbeszéljük, hogy melyik lépesben tudjuk már a rangot! Tételekre hivatkozunk!

5. Határozzuk meg a következő mátrix rangját (303. feladat együtthatómátrixa) Eliminálni házi feladat.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Pár feladattal korábban ennek a mátrixnak kiszámoltuk az inverzét. Mivel a mátrixnak létezik inverze, ezért maximális rangú:

$$r\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} = 3.$$

6. (298. Monostori feladat)

Határozzuk meg a következő mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Az ún. elemi sor- és oszlopműveletek nem változtatják meg a rangot.

$$r\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \overset{sorcserek}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_5-s_1 \\ s_4-s_1 \\ s_3-s_1 \\ s_2-3s_1}}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_2 \leftrightarrow s_3}{=}$$

$$\overset{s_2 \leftrightarrow s_3}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_4-2s_2 \\ s_3+2s_2}}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{\frac{s_4}{-3}}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_3 \leftrightarrow s_5}{=}$$

$$\overset{s_3 \leftrightarrow s_5}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{2s_4 \\ 2s_5}}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & 4 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_4-5s_3 \\ s_5-9s_3}}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = 4$$

3. heti gyakorlat

Lineáris egyenletrendszerek

1. (303. Monostori)

Vizsgáljuk meg az egyenletrendszert megoldhatóság szempontjából. Ha megoldható, írjuk fel a megoldását.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11 \end{cases}$$

1.Megoldás:

Az egyenletrendszer $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$ mátrixalakja:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

A 2. heti gyakorlaton láttuk, hogy az együtthatómátrix invertálható, kiszámoltuk már az inverzét is: $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{60} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{bmatrix}$.

Mivel az $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$ egylenletredszert balról szorozva $\underline{A}^{-1}$-gyel kapjuk, hogy $\underline{A}^{-1}\underline{A}\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}$, azaz

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{A}^{-1}\underline{b} = \frac{1}{60} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{60} \cdot \begin{bmatrix} 180 \\ 60 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right] \overset{\substack{3s_1 \\ 2s_2 \\ 2s_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & -3 & 12 \\ 6 & 8 & -4 & 22 \\ 6 & -4 & 8 & 22 \end{array}\right] \overset{\substack{s_2-s_1 \\ s_3-s_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & -3 & 12 \\ 0 & 11 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \end{array}\right] \overset{\substack{s_2 \leftrightarrow s_3 \\ s_1:3}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \\ 0 & 11 & -1 & 10 \end{array}\right] \overset{s_3+11s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 110 & 110 \end{array}\right]$$

Látszik, hogy $\mathrm{r}\,[\underline{A} \mid \underline{b}] = 3 = \mathrm{r}\,[\underline{A}] =$ az ismeretlenek számával, azaz létezik egyértelmű megoldás.

Azaz $110x_3 = 110 \Rightarrow x_3 = 1$, $-x_2 + 11x_3 = 10 \Rightarrow x_2 = 1$, $2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \Rightarrow x_1 = 3$, azaz $\underline{x} = [3, 1, 1]^T$.

2. (313. Monostori)
Vizsgáljuk meg a következő $\underline{A}\underline{x} = \underline{0}$ alakú egyenletrendszert megoldhatóság szempontjából. Ha megoldható, írjuk fel a megoldását.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Az egyenletrendszer homogén, azaz biztosan megoldható. (A triviális megoldás mindig létezik.) Így a kibővített mátrixra nincs szükségünk, hiszen a nullák a rendszer jobb oldalán mindig nullák maradnak. Elég az együtthatómátrix, amin végrehajtjuk a Gauss-eliminációt:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2-2s_1 \\ s_3-s_1 \\ s_4-3s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 9 & -6 & -6 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_4-s_2 \\ s_3:3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{\substack{3\cdot s_2 \\ 5\cdot s_3}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 15 & -9 & -9 & 9 \\ 0 & 15 & -10 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{s_3-s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 15 & -9 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{s_4-2s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 15 & -9 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \overset{\substack{\frac{s_2}{3} \\ \frac{s_3}{-1} \\ \frac{s_4}{3}}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Látszik, hogy $\mathrm{r}\,[\underline{A}] = 4$, míg az ismeretlenek száma 5, azaz egyszeresen végtelen sok megoldás létezik. Az utolsó sor alapján $x_4 - x_5 = 0 \;\Rightarrow\; x_4 = x_5$, vagyis kettejük közül az egyik, pl. x_5 szabadon választható.
Az első három egyenletből $x_3 + x_4 - x_5 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$, $5x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$, és $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$.

Így: $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \\ x_5 \end{bmatrix}$, $x_5 \in \mathbb{R}$.

Az egyenletrendszernek egyszeresen végtelen sok megoldása van.

3. (316. Monostori)

Vizsgáljuk meg a következő $\underline{A}x = \underline{b}$ alakú egyenletrendszert megoldhatóság szempontjából. Ha megoldható, írjuk fel a megoldását.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

A kibővített mátrixon végrehajtjuk a Gauss-eliminációt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{s_2-2s_1 \\ s_3-s_1 \\ s_4-s_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right] \overset{\substack{s_4+s_2 \\ \frac{s_3}{-4}}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -7 \end{array}\right] \overset{s_4+8s_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Látszik, hogy $\mathrm{r}\,[\underline{A} \mid \underline{b}] = 4$ és $\mathrm{r}\,[\underline{A}] = 3$. Mivel $\mathrm{r}\,[\underline{A}] \neq \mathrm{r}\,[\underline{A} \mid \underline{b}]$, ezért az egyenletrendszernek nincs megoldása.

4. (325. Monostori)

A λ valós paraméter értékétől függően vizsgáljuk és oldjuk meg a következő $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$ alakú egyenletrendszert.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_4}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & 1 & 4 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{o_1 \leftrightarrow o_4 \; !x_1 \leftrightarrow x_4!}{\sim}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right] \end{array} \overset{\substack{s_2 - s_1 \\ s_3 - s_1 \\ s_4 - s_1}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

(a) Ha $\lambda \neq 0$ és $\lambda \neq 1$, akkor $\mathrm{r}\,[\underline{A}] = \mathrm{r}\,[\underline{A} \,|\, \underline{b}] = 4 = n$, ahol n az ismeretlenek száma, vagyis az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van.
Figyeljünk az oszlopcserékre!
$x_1 = 0, \; x_3 = \frac{3}{\lambda}, \; x_2 = \frac{2}{\lambda}, \; x_4 = 1 - x_1 - x_2 - x_3 = 1 - \frac{5}{\lambda},$
azaz $\underline{x} = \left[0, \; \frac{2}{\lambda}, \; \frac{3}{\lambda}, \; 1 - \frac{5}{\lambda}\right]^T$.

(b) Ha $\lambda = 1$, akkor $\mathrm{r}\,[\underline{A}] = \mathrm{r}\,[\underline{A} \,|\, \underline{b}] = 3 < 4 = n$, vagyis az egyenletrendszernek egyszeresen végtelen sok megoldása van, egy szabadon választható paraméter van.
$x_1 \in \mathbb{R}$ szabadon választható, $x_3 = 3$, $x_2 = 2$ és $x_4 = 1 - x_1 - x_2 - x_3 = -4 - x_1$.
Azaz $\underline{x} = [x_1, \; 2, \; 3, \; -4 - x_1]^T$.

(c) Ha $\lambda = 0$, akkor $\mathrm{r}\,[\underline{A}] = 2 \neq \mathrm{r}\,[\underline{A} \,|\, \underline{b}] = 3$. Ekkor nincs megoldás.

5. (327. Monostori)

A λ valós paraméter értékétől függően vizsgáljuk és oldjuk meg a következő $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$ alakú egyenletrendszert.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3+\lambda & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 8+\lambda & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 8+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\lambda \\ 2+\lambda \\ 2+\lambda \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \lambda & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3+\lambda & 6 & 6 & 1+\lambda \\ 3 & 6 & 8+\lambda & 9 & 2+\lambda \\ 3 & 6 & 9 & 8+\lambda & 2+\lambda \end{array}\right] \overset{o_1 \leftrightarrow o_4 \; !x_1 \leftrightarrow x_4!}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & \lambda & 1 \\ 6 & 3+\lambda & 6 & 2 & 1+\lambda \\ 9 & 6 & 8+\lambda & 3 & 2+\lambda \\ 8+\lambda & 6 & 9 & 3 & 2+\lambda \end{array}\right] \end{array} \overset{\substack{s_2-2s_1 \\ s_3-3s_1 \\ s_4-3s_1}}{\sim}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 2-2\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 3-3\lambda & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 0 & 3-3\lambda & \lambda-1 \end{array}\right] \end{array}$$

(a) Ha $\lambda = 1$, akkor

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Ha $\lambda = 1$, akkor $\mathrm{r}\,[\underline{A}] = \mathrm{r}\,[\underline{A}\,|\,\underline{b}] = 1$, azaz az egyenletrendszer megoldható, háromszorosan végtelen sok megoldása van, három paraméter választható szabadon. A háromparaméteres megoldása:
$x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 - 3x_4$, ahol az x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{R}$ szabadon választható egymástól független paraméterek.
A megoldás vektoros alakja: $\underline{x} = [1 - 2x_2 - 3x_3 - 3x_4, x_2, x_3, x_4]^T$.

(b) Ha $\lambda \neq 1$, akkor a második, harmadik és negyedik sort (egyenletet) eloszthatjuk $\lambda - 1$-gyel:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} {\color{red}x_4} & x_2 & x_3 & {\color{red}x_1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \end{array} \overset{s_1 \leftrightarrow s_4}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} {\color{red}x_4} & x_2 & x_3 & {\color{red}x_1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & \lambda & 1 \end{array}\right] \end{array} \overset{s_4 - 3s_1}{\sim}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} {\color{red}x_4} & x_2 & x_3 & {\color{red}x_1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & \lambda+9 & -2 \end{array}\right] \end{array} \overset{s_4 - 2s_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} {\color{red}x_4} & x_2 & x_3 & {\color{red}x_1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \lambda+13 & -4 \end{array}\right] \end{array} \overset{s_4 - 3s_3}{\sim}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} {\color{red}x_4} & x_2 & x_3 & {\color{red}x_1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+22 & -7 \end{array}\right] \end{array}$$

- $\lambda = -22$ esetén $\mathrm{r}\,[\underline{A}] = 3$, $\mathrm{r}\,[\underline{A} \,|\, \underline{b}] = 4$, azaz $\mathrm{r}\,[\underline{A}] \neq \mathrm{r}\,[\underline{A} \,|\, \underline{b}]$, ezért az egyenletrendszernek nincs megoldása,
- $\lambda \neq -22$ esetén $\mathrm{r}\,[\underline{A}] = \mathrm{r}\,[\underline{A} \,|\, \underline{b}] = n = 4$, azaz az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van:
  $x_1 = \frac{-7}{\lambda+22}$, $x_2 = 1 - \frac{14}{\lambda+22}$, $x_3 = 1 - \frac{21}{\lambda+22}$, $x_4 = 1 - \frac{21}{\lambda+22}$.

  A megoldás vektoros alakja: $\underline{x} = [\frac{-7}{\lambda+22}, \frac{\lambda+8}{\lambda+22}, \frac{\lambda+1}{\lambda+22}, \frac{\lambda+1}{\lambda+22}]^T$.

Sajátérték, sajátvektor

1. (362. Monostori)
Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit, sajátvektorait. Ha a mátrix szimmetrikus, akkor állítsuk elő a sajátegységvektorokból az (ortogonális) M mátrixot (amit a bázistranszformációnál használhatunk, ha át akarunk térni a sajátvektorok bázisába).

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\mathcal{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

A sajátértékek: $\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2}$, azaz $\lambda_1 = \dfrac{2+6}{2} = 4$ és $\lambda_2 = \dfrac{2-6}{2} = -2$.
Kiszámoljuk $\lambda_1 = 4$–hez az $\underline{s}_1 = [s_{11}, s_{12}]^T$ sajátvektort.

Az $\begin{bmatrix} 1-4 & 3 \\ 3 & 1-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ egyenletrendszert kell megoldani.

Látszik, hogy az első egyenlet a másodiknak (-1)-szerese. Ez természetes, hiszen az együtthatató mátrix determinánsa 0. Csak az egyik egyenlet használható.
Azaz $-s_{11} + s_{12} = 0$, így $\underline{s}_1 = [1,1]^T \cdot s_{12},\ s_{12} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Ilyenkor egy egyenest határozunk meg, amelynek tetszőleges nem zérus helyvektora sajátvektor. Pl. az $s_{12} = 1$-re adódó megfelelő választás. Legyen tehát $\underline{s}_1 = [1,1]^T$.

Kiszámoljuk $\lambda_2 = -2$–höz az $\underline{s}_2 = [s_{21}, s_{22}]^T$ sajátvektort.

Az $\begin{bmatrix} 1+2 & 3 \\ 3 & 1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ egyenletrendszert kell megoldani.

Most is csak az egyik egyenlet használható, hiszen mindkettő ugyanaz. Azaz $s_{21} + s_{22} = 0$, így $\underline{s}_2 = [-1,1]^T \cdot s_{22},\ s_{22} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ilyenkor is egy egyenest határozunk meg, amelynek tetszőleges nem zérus helyvektora sajátvektor. Pl. az $s_{22} = 1$-re adódó megfelelő választás. Ebben az esetben $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ jobbsodrású rendszert alkot. Matematikai szempontból ez nem lenne szükséges, de a mérnöki gyakorlatban igyekeznek az irányítás megtartására. Legyen tehát $\underline{s}_2 = [-1,1]^T$.

A sajátegységvektorok: $|\underline{s}_1| = |\underline{s}_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ alapján:

$$\underline{s}_1^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ és } \underline{s}_2^0 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Az M (bázistranszformáció-) mátrix: $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Vegyük észre, hogy $\underline{s}_1$ és $\underline{s}_2$ merőlegesek. Ez természetes, az előadáson tanultak alapján. $\underline{s}_2$ kiszámolása felesleges volt. Egyszerűen $\underline{s}_1$-re kellett volna egy merőleges vektort készíteni. Lehetőleg úgy (a mérnökök ezt szeretik), hogy $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ ebben a sorrendben jobbsodrású legyen. Ha a paramétereket meghagytuk volna a sajátvektorokban, akkor a normáláskor azok úgyis eltűntek volna.

2. (368. Monostori)

Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit, sajátvektorait. Ha a mátrix szimmetrikus, akkor állítsuk elő a sajátegységvektorokból az (ortogonális) M mátrixot (amit a bázistranszformációnál használhatunk, ha át akarunk térni a sajátvektorok bázisába).

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

A sajátértékek:

$$\mathcal{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = +(-2-\lambda)\cdot\left[(6-\lambda)^2 - 4\right] = 0$$

$\lambda_1 = -2$ és $6 - \lambda = \pm 2$ felhasználásával $\lambda_2 = 8$ és $\lambda_3 = 4$ adódnak.

$\lambda_1 = -2$-höz tartozó sajátvektor $\underline{s}_1 = [s_{11}, s_{12}, s_{13}]^T$, amely az

$$\begin{bmatrix} 6-\lambda_1 & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda_1 & 0 \\ 2 & 0 & 6-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása. Alkalmazzuk Gauss-eliminációt!

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_1:2 \\ s_3:2}}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_3-4s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} \overset{s_3:(-15)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Innen $\underline{s}_1 = [0,1,0]^T \cdot s_{12},\ s_{12} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ilyenkor egy origón átmenő egyenest határozunk meg a térben, amelynek tetszőleges nem zérus helyvektora sajátvektor. Pl. az $s_{12} = 1$-re adódó megfelelő választás. Legyen tehát $\underline{s}_1 = [0,1,0]^T$. Ez egyébként éppen egységvektor is.

$\lambda_2 = 8$-höz tartozó sajátvektor $\underline{s}_2 = [s_{21}, s_{22}, s_{23}]^T$, amely az

$$\begin{bmatrix} 6-\lambda_2 & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda_2 & 0 \\ 2 & 0 & 6-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása. Alkalmazzuk Gauss-eliminációt!

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_1:(-2) \\ s_2:(-10) \\ s_3:2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{s_3-s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen $\underline{s}_2 = [s_{23}, 0, s_{23}]^T,\ s_{23} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Azaz most is egy origón átmenő egyenest határozunk meg a térben, amelynek tetszőleges nem zérus helyvektora sajátvektor. Pl. az $s_{23} = 1$-re adódó megfelelő választás. Legyen tehát $\underline{s}_2 = [1,0,1]^T$. Ugyan ekkor nem lesz egységvektor, de könnyű vele számolni és majd később normáljuk. Bármely más, a feltételnek eleget tevő vektor választása is lehetséges lett volna.

Mivel a mátrix szimmetrikus, így sajátvektorai ortogonális rendszert alkotnak. Ezért a $\lambda_3 = 4$-hez tartozó sajátvektorról tudjuk, hogy merőleges $\underline{s}_1$, és $\underline{s}_2$-re is. Ahhoz, hogy a mérnöki gyakorlatban "kedvelt" jobbsodrású rendszert kapjuk $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3$ sorrendjében:

$$\underline{s}_3 = \underline{s}_1 \times \underline{s}_2 = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\underline{i} - 0\underline{j} - \underline{k}.$$

Innen $\underline{s}_3 = [1, 0, -1]^T$

Természetesen lehetett volna az előekhez hasonlóan is számolni.

A sajátegységvektorok: $|\underline{s}_2| = |\underline{s}_3| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ alapján:

$\underline{s}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{s}_2^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ és $\underline{s}_3^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Az M (bázistranszformáció-) mátrix: $M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

3. (371. Monostori)
Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit, sajátvektorait. Ha a mátrix szimmetrikus, akkor állítsuk elő a sajátegységvektorokból az (ortogonális) M mátrixot (amit a bázistranszformációnál használhatunk, ha át akarunk térni a sajátvektorok bázisába).

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

A sajátértékek:

$$\mathcal{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 4 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{s_1-s_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 4 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -\lambda\,[(1-\lambda)\cdot(4-\lambda)-4] + \lambda\,[4-4\cdot(1-\lambda)] = \lambda\,(-\lambda^2+5\lambda+4\lambda) = \lambda^2\,(9-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 9$ és $\lambda_{2,3} = 0$

$\lambda_1 = 9$-hez tartozó sajátvektor $\underline{s}_1 = [s_{11}, s_{12}, s_{13}]^T$, amely az

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda_1 & -2 & 4 \\ -2 & 1-\lambda_1 & -2 \\ 4 & -2 & 4-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása. Alkalmazzunk Gauss-eliminációt!

$$\begin{bmatrix} -5 & -2 & 4 \\ -2 & -8 & -2 \\ 4 & -2 & -5 \end{bmatrix} \overset{s_2:(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} -5 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & -5 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -5 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_3-4s_1 \\ s_2+5s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 18 & 9 \\ 0 & -18 & -9 \end{bmatrix} \overset{s_3+s_2}{\sim}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{s_2}{9}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen $\underline{s}_1 = [2, -1, 2]^T \cdot s_{13},\ s_{13} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Azaz egy egy origón átmenő egyenest határozunk meg a térben, amelynek tetszőleges nem zérus helyvektora sajátvektor. Pl. az $s_{13} = 1$-re adódó megfelelő választás. Legyen tehát $\underline{s}_1 = [2, -1, 2]^T$. Ugyan ekkor nem lesz egységvektor, de könnyű vele számolni és majd később normáljuk. Bármely más, a feltételnek eleget tevő vektor választása is lehetséges lett volna. Maradhatna a paraméter is, de ne bonyolítsuk, a normáláskor úgyis eltűnik.

A $\lambda_2 = 0$-hoz tartozó $\underline{s}_2 = [s_{21}, s_{22}, s_{23}]^T$ sajátvektor számolása, amely a

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda_2 & -2 & 4 \\ -2 & 1-\lambda_2 & -2 \\ 4 & -2 & 4-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása. Alkalmazzunk Gauss-eliminációt!

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_1:2 \\ s_3:2}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_3-s_1 \\ s_2+s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen $\underline{s}_2 = [\frac{1}{2}(s_{22} - 2s_{23}), s_{22}, s_{23}]^T,\ s_{22},\ s_{23} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Azaz most egy egy origón átmenő síkot határozunk meg a térben, amelynek tetszőleges nem zérus helyvektora sajátvektor. Pl. az $s_{23} = -1,\ s_{22} = 0$-ra adódó megfelelő választás. Legyen tehát $\underline{s}_2 = [1, 0, -1]^T$. Ugyan ekkor nem lesz egységvektor, de könnyű vele számolni és majd később normáljuk. Bármely más, a feltételnek eleget tevő vektor választása is lehetséges lett volna. Maradhatna a paraméter is, de ne bonyolítsuk, a normáláskor úgyis eltűnik. Az ok, amiért egyetlen egyenlet van a sajátvektor koordinátáira az, hogy $\lambda_2 = 0$-hoz két lineárisan független sajátvektort kellene keresünk (nincs mindig, most van, mert szimmetrikus a mátrix). Egyszerűbb megkeresni egyet, és a másikat úgy határozzuk meg, hogy $\underline{s}_1, \underline{s}_2$-re merőleges legyen, és az indexek sorrendjében jobbsodrású.

$$\underline{s}_3 = \underline{s}_1 \times \underline{s}_2 = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 1\underline{i} + 4\underline{j} + 1\underline{k}.$$

Azaz $\underline{s}_3 = [1, 4, 1]^T$.
A sajátegységvektorokból az (ortogonális) M mátrix előállítása házi feladat.

4. (362. Monostori)
Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit, sajátvektorait.

$$\begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\mathcal{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -9 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 9 = 0 \Rightarrow 1-\lambda = \pm 3i \Rightarrow \lambda_1 = 1+3i, \quad \lambda_2 = 1-3i. \ (i^2 = -1)$$

Kiszámoljuk $\lambda_1 = 1+3i$-hez az $\underline{s}_1 = [s_{11}, s_{12}]^T$ sajátvektort.

Az $\begin{bmatrix} 1-(1+3i) & -9 \\ 1 & 1-(1+3i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ egyenletrendszert kell megoldani, azaz a

$\begin{bmatrix} -3i & -9 \\ 1 & -3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

egyenletrenszert. Látszik, hogy az első egyenlet éppen a $-3i$-szerese a másodiknak. Dolgozzunk ezért a másodikkal. Válasszuk az egyszerűség kedvéért $s_{12} := 1$. Ekkor $s_{11} = 3i$. Ezzel $\underline{s}_1 = [3i, 1]$.

Kiszámoljuk $\lambda_2 = 1-3i$-hez tartozó $\underline{s}_2 = [s_{21}, s_{22}]^T$ sajátvektort.

Az $\begin{bmatrix} 1-(1-3i) & -9 \\ 1 & 1-(1-3i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ egyenletrendszert kell megoldani, azaz a

$\begin{bmatrix} +3i & -9 \\ 1 & +3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

egyenletrenszert. Látszik, hogy az első egyenlet éppen a $3i$-szerese a másodiknak. Dolgozzunk ezért a másodikkal. Válasszuk az egyszerűség kedvéért $s_{22} := 1$. Ekkor $s_{21} = -3i$. Ezzel $\underline{s}_2 = [-3i, 1]$.

Vegyük észre, hogy λ_1 és λ_2 egymás komplex konjugáltjai és a sajátvektorok is $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ egymás komplex konjugáltjai. Ez természetes, az előadáson tanultak alapján. $\underline{s}_2$ kiszámolása felesleges volt. Egyszerűen $\underline{s}_1$-nek elő kellett volna állítani a konjugáltját.

5. (368. Monostori módosított verziója)
Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit, sajátvektorait.

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

A sajátértékek:

$$\mathcal{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = +(-2-\lambda)\cdot\left[(6-\lambda)^2+4\right] = (-2-\lambda)\cdot(\lambda^2-12\lambda+40) = 0$$

$\lambda_1 = -2$ és $\lambda_{2,3} = \dfrac{12 \pm \sqrt{144-160}}{2}$, azaz $\lambda_2 = 6+2i$ és $\lambda_3 = 6-2i$.

$\lambda_1 = -2$-höz tartozó sajátvektor $\underline{s}_1 = [s_{11}, s_{12}, s_{13}]^T$:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{\frac{s_1}{-2} \\ \frac{s_3}{2}}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{s_3-4s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

Innen $\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot s_{12},\ s_{12} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Egy lehetséges választás $s_{12} = 1$. (Más is lehetne.)

$\lambda_2 = 6+2i$-hez tartozó sajátvektor $\underline{s}_2 = [s_{21}, s_{22}, s_{23}]^T$ számítása Gauss-eliminációval:

$$\begin{bmatrix} -2i & 0 & 2 \\ 0 & -8-2i & 0 \\ -2 & 0 & -2i \end{bmatrix} \overset{\substack{s_1:2 \\ s_2:(-2) \\ s_3:2}}{\sim} \begin{bmatrix} -i & 0 & 1 \\ 0 & 4+i & 0 \\ -1 & 0 & -i \end{bmatrix} \overset{s_1 \cdot i}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 4+i & 0 \\ -1 & 0 & -i \end{bmatrix} \overset{s_3+s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 4+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen $\underline{s}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot s_{23},\ s_{23} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\lambda_3 = 6-2i$-hez tartozó sajátvektor az $\underline{s}_2$ komplex konjugáltjának nem nulla konstansszorosa: $\underline{s}_3 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot s_{33},\ s_{33} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Egylehetséges választás $s_{33} = 1$. (Más is lehetne.)

4. heti gyakorlat

Másodrendű görbék és felületek

1. (377/c Monostori)

   Ábrázoljuk a következő egyenlettel adott másodrendű görbét.

   $$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$$

   Megoldás:

   Az egyenlet mátrix alakja:

   $[x\ y] \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [28\ 12] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 28 = 0$

   Diagonizáljuk a kvadratikus rész mátrixát.

   Az előadáson tanultak alapján: $A = MDM^T$, amiből $D = M^T AM$

   $\mathcal{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(-1-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$

   Innen $(\lambda+2)(\lambda-8) = 0$, vagy $\lambda_{12} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = 3 \pm 5$

   $\lambda_1 = 8$ és $\lambda_2 = -2$

   Kiszámoljuk a sajátvektorokat.

   A $\lambda_1 = 8$ sajátértékhez tartozó $\underline{s}_1 = [s_{11}, s_{12}]^T$ sajátvektor a

   $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

   egyenlet nem zérus megoldása. A második egyenlet az első egyenlet (-3) szorosa. Így $-s_{11} + 3s_{12} = 0$ egyenletből, pl. $s_{11} = 3$ választásával

   $\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{s}_1^0 = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

   A $\lambda_2 = -2$ sajátértékhez tartozó $\underline{s}_2 = [s_{21}, s_{22}]^T$ sajátvektor merőleges az $\underline{s}_1 = [s_{11}, s_{12}]^T$ sajátvektorra. Válasszuk azt, amelyikkel $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ ebben a sorrendben jobbsodrású.

   $\underline{s}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\underline{s}_2^0 = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

   Ezzel $M = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ és $M^{-1} = M^T = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

   $[x\ y]\, MM^T AMM^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [28\ 12]\, MM^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 28 = 0$

   Alkalmazzuk az $\underline{\tilde{x}} = M^{-1}\underline{x}$ transzformációs formulát, azaz térjünk át a "hullámos" koordináta rendszerre.

   $[\tilde{x}\ \tilde{y}]\, D \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + [28\ 12]\, M \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + 28 = 0$

   $[\tilde{x}\ \tilde{y}] \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \dfrac{1}{\sqrt{10}} [28\ 12] \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + 28 = 0$

$$[\tilde{x}\ \tilde{y}]\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{10}}[96\ 8]\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{bmatrix}+28=0$$

$$8\tilde{x}^2-2\tilde{y}^2+\frac{96}{\sqrt{10}}\tilde{x}+\frac{8}{\sqrt{10}}\tilde{y}+28=0$$

$$8\left(\tilde{x}^2+\frac{12}{\sqrt{10}}\tilde{x}\right)-2\left(\tilde{y}^2-\frac{4}{\sqrt{10}}\tilde{y}\right)+28=0$$

$$8\left(\tilde{x}+\frac{6}{\sqrt{10}}\right)^2-\frac{144}{5}-2\left(\tilde{y}-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2+\frac{4}{5}+28=0$$

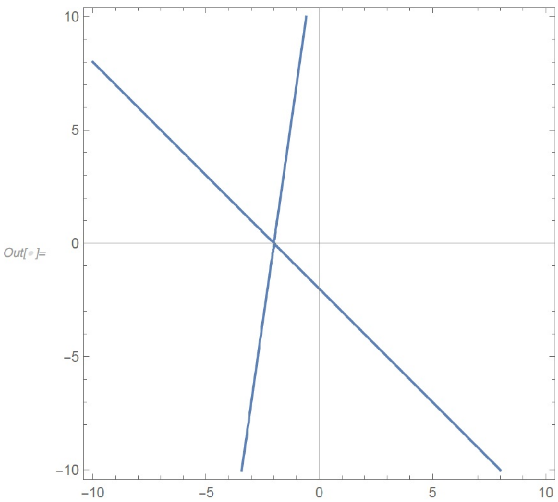
$$8\left(\tilde{x}+\frac{6}{\sqrt{10}}\right)^2-2\left(\tilde{y}-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2-28+28=0$$

$$4\left(\tilde{x}+\frac{6}{\sqrt{10}}\right)^2-\left(\tilde{y}-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2=0$$

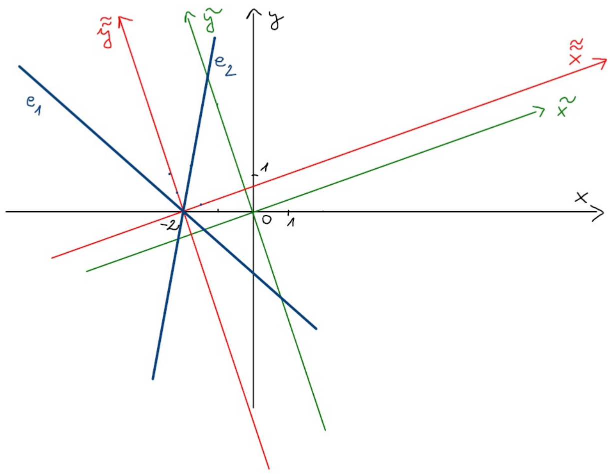
Az eltolást figyelembe véve a "kéthullámos" koordinátarendszerben a görbe:

$$4\tilde{\tilde{x}}^2-\tilde{\tilde{y}}^2=0$$

$$\left(2\tilde{\tilde{x}}-\tilde{\tilde{y}}\right)\left(2\tilde{\tilde{x}}+\tilde{\tilde{y}}\right)=0,\quad \text{ami egy metsző egyenespár.}$$



1. ábra. Metsző egyenespár 1.



2. ábra. Metsző egyenespár 2.

2. (378/d Monostori)
Írjuk fel a lehető legegyszerűbb alakban a következő másodrendű felület egyenletét, és határozzuk meg a felület jellegét.

$$y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 6x + 4y + 2z + 8 = 0$$

Megoldás:
Felírjuk az egyenlet mátrixos alakját, a kvadratikus résznél a megfelelő A szimmetrikus mátrix segítségével. A szimmetrikusság azért fontos, mert szimmetrikus mátrix mindig diagonalizálható, ráadásul található sajátvektorokból ortogonális bázis.

$$[x\ y\ z]\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [-6\ 4\ 2]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 8 = 0$$

Keressük az A mátrix diagonális D alakját a páronként merőleges sajátegységvektorokból álló M mátrix segítségével:

$A = MDM^T$, amiből $D = M^T AM$

$$\mathcal{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda) - 2\cdot(2\cdot(-1-\lambda)) - 2\cdot(0 + 2(1-\lambda)) = 0$$

Innen:

$$\lambda(1-\lambda^2) + 4(1+\lambda) - 4(1-\lambda) = -\lambda^3 + \lambda + 4 + 4\lambda - 4 + 4\lambda =$$
$$= -\lambda^3 + 9\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 9) = -\lambda(\lambda-3)(\lambda+3) = 0$$

A sajátértékek: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 0$.

A sajátvektorok:

$$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \underline{s}_1^0 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{s}_2 = \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ s_{23} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \underline{s}_2^0 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{s}_3^0 = \underline{s}_1^0 \times \underline{s}_2^0 = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\left(\underline{i}(4-1) - \underline{j}(4+2) + \underline{k}(-2-4)\right)$$

$$\underline{s}_3^0 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$M=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ és } M^{-1}=M^T=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[x\ y\ z]\,MM^TAMM^T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}+[-6\ 4\ 2]\,MM^T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}+8=0$$

$$[\tilde{x}\ \tilde{y}\ \tilde{z}]\,D\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}+[-6\ 4\ 2]\,M\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}+8=0$$

$$D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{x}\ \tilde{y}\ \tilde{z}]\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}+\frac{1}{3}[-6\ 4\ 2]\ \overset{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}}{[-6\ \ -12\ \ -18]}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}+8=0$$

$$[\tilde{x}\ \tilde{y}\ \tilde{z}]\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}+[-2\quad -4\quad -6]\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}+8=0$$

$$3\tilde{x}^2-3\tilde{y}^2-2\tilde{x}-4\tilde{y}-6\tilde{z}+8=0$$

$$3\left(\tilde{x}^2-\frac{2}{3}\tilde{x}\right)-3\left(\tilde{y}^2+\frac{4}{3}\tilde{y}\right)-6\tilde{z}+8=0$$

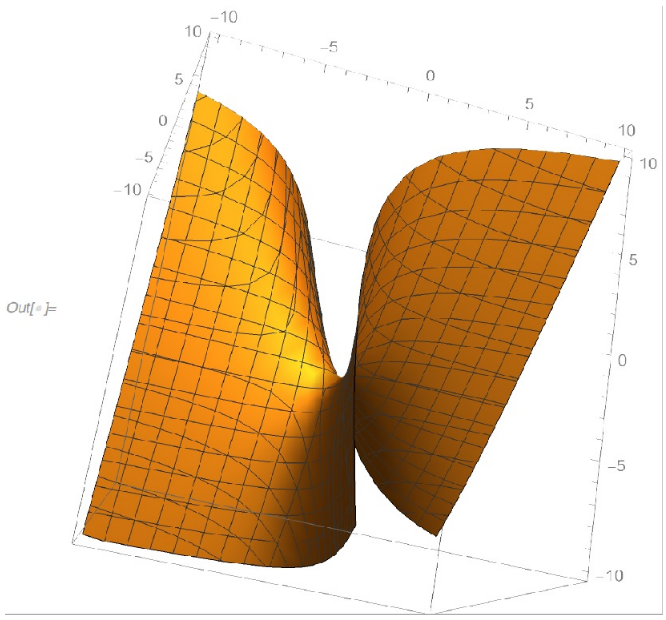
$$3\left(\tilde{x}-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}-3\left(\tilde{y}+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}-6\tilde{z}+8=0$$

$$3\left(\tilde{x}-\frac{1}{3}\right)^2-3\left(\tilde{y}+\frac{2}{3}\right)^2-6\tilde{z}+9=0$$

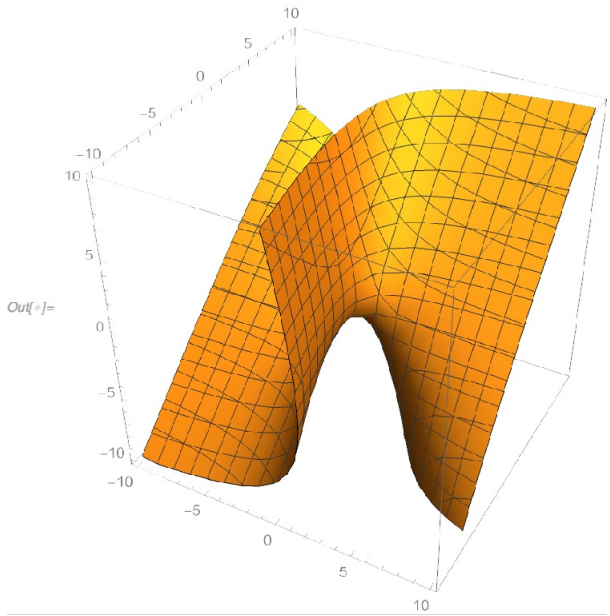
$$\left(\tilde{x}-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\tilde{y}+\frac{2}{3}\right)^2=2\left(\tilde{z}-\frac{3}{2}\right)$$

Az eltolást figyelembe véve:

$\tilde{\tilde{x}}^2-\tilde{\tilde{y}}^2=2\tilde{\tilde{z}}$ ami egy hiperbolikus paraboloid, azaz egy nyeregfelület.



3. ábra. Nyeregfelület 1.



4. ábra. Nyeregfelület 2.

Matematika G1

5. Gyakorlat

6-12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

$$h_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} - S_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \to 0$$

$$\begin{aligned} \exists N_0(\varepsilon) \quad \forall n > N_0(\varepsilon) \quad |h_n - 0| &< \varepsilon \\ \frac{1}{n+1} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< n+1 \\ \frac{1}{\varepsilon} - 1 &< n \Rightarrow N_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1 \end{aligned}$$

34. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2x}\right)^k$

$q = \frac{x+1}{2x} \qquad |q| < 1$ konvergens

$$\begin{aligned} \left|\frac{x+1}{2x}\right| &< 1 \\ |x+1| &< 2|x| \\ x > 1 \vee x &< -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{x+1}{2x}}$$

46. $0.1 - 0.01 + 0.001 - 0.0001 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \underbrace{0.1^k \cdot 0.1}_{a_k}$

Leibniz–kritérium: $a_k \searrow 0 \Rightarrow$ a sor konvergens

$a_k = 0.1^{k+1} \searrow \checkmark,\ \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0\ \checkmark \Rightarrow$ konvergens

48. $-0.11 + 0.101 - 0.1001 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \underbrace{(0.1 + 0.1^{k+2})}_{a_k}$

$\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0.1 \neq 0$ a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül $\Rightarrow$ divergens

54. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^i}{i!}$

$$\text{(H)} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = 3 \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1}, \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{a sor konvergens}$$

55. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$

$$\text{(GY)} \quad \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^n}} = \frac{3}{n}, \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \text{a sor konvergens}$$

56. $\sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k(\ln k)^2}}_{a_k}$

$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$

1. $f(k) = a_k$ ✓
2. $f(x) \geq 0$ ✓
3. $f(x) \searrow$ ✓

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} \mathrm{d}x = \lim_{\Omega\to\infty} \int_{x_0}^{\Omega} \frac{1}{x(\ln x)^2} \mathrm{d}x = \lim_{\Omega\to\infty} \int_{x_0}^{\Omega} \frac{1}{x}(\ln x)^{-2} \mathrm{d}x = \lim_{\Omega\to\infty} \left[\frac{(\ln x)^{-1}}{-1}\right]_{x_0}^{\Omega}$$
$$= \lim_{\Omega\to\infty} \left(\frac{-1}{\ln \Omega} + \frac{1}{\ln x_0}\right) = \frac{1}{\ln x_0} \quad \text{konvergens} \Rightarrow \text{a sor konvergens, pl. } x_0 = 2$$

58. $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j^2+50}$

$\frac{1}{j^2+50} < \frac{1}{j^2} \quad \forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ Előadáson szerepelt, hogy ez konvergens, azaz ez egy konvergens majoráns sor. Így az eredeti sor a majoráns kritérium miatt konvergens.

59. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k(k+1)}$

$\frac{\sin^2 k}{k(k+1)} < \frac{1}{k(k+1)}$, a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergens, lásd 6. feladat, azaz egy konvergens majoráns, így az eredeti sor konvergens.

61. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Az előadáson szerepelt a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor, ami divergens, azaz ez egy divergens minoráns sor, mivel az $\frac{1}{k} < \frac{1}{\sqrt{k}}$, $k \geq 2$, azaz az eredeti sor divergens.

62. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{5^k+1}$

$\frac{8}{5^k+1} < \frac{8}{5^k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^k}$ konvergens $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 8 \cdot \frac{1}{5^k}$ is konvergens

De ez egy konvergens majoráns $\Rightarrow$ eredeti sor konvergens a majoráns kritérium miatt.

69. $\frac{1}{3}+\frac{2!}{3^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{3^4}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{3^k}$

$$\text{(H)}\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{1}{3}(n+1)\to\infty>1$$

A sor tehát divergens.

77. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{3}}$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{3}}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\frac{n!}{(n-1)!}}{\frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!}}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(n-3)!3!}{(n-1)!}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{6}{(n-2)(n-1)}$$

$$\frac{6}{(n-2)(n-1)}<\frac{6}{(n-2)^2}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{6}{(n-2)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{k^2}\quad \text{ez pedig konvergens, a műveletek tétel és } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \text{ konvergenciája miatt.}$$

Ez egy konvergens majoráns $\Rightarrow$ eredeti sor konvergens majoráns kritérium miatt.

79. $\sum_{n=3}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{n\cdot\ln n}}_{a_n}$

$f(x):=\frac{1}{x\cdot\ln x}$

1. $f(n)=a_n\quad\checkmark$
2. $f(x)\geq 0\quad x\geq 3\quad\checkmark$
3. $f(x)\searrow\quad\checkmark$

$$\int_3^{\infty}\frac{1}{x\cdot\ln x}\mathrm{d}x=\lim_{\Omega\to\infty}\int_3^{\Omega}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\lim_{\Omega\to\infty}[\ln\ln x]_3^{\Omega}=\lim_{\Omega\to\infty}(\ln\ln\Omega-\ln\ln 3)$$
$$=\nexists\quad\text{véges lim, divergens improprius integrál}$$

Az integrál kritérium miatt divergens az eredeti sor is.

88. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2}$

(GY) $\quad\sqrt[n]{a_n}=\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$ helyett előbb egy majoráns kritérium

$$\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2}<\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}_{b_n}\quad\text{majoráns sor alk (GY)}$$

$$\sqrt[n]{b_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{1}{e}<1$$

Majoráns kritérium $\Rightarrow$ eredeti majoráns kritérium konvergens.

91. (HF) minoráns kritérium + (GY)

92. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan n)^n}{(n+1)2^{n-1}}$

$$\text{(GY)} \quad \sqrt[n]{a_n} = \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt[n]{n+1} \cdot \sqrt[n]{\frac{2^n}{2}}} = \frac{\sqrt[n]{2}\operatorname{arctg} n}{\sqrt[n]{n+1} \cdot 2} \to \frac{\pi}{4} < 1 \Rightarrow \text{tehát a gyök kritérium miatt a sor konvergen}$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\1}}{1} \leq \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\sqrt[n]{n+1}} \leq \sqrt[n]{2n} = \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\sqrt[n]{2}} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\sqrt[n]{n}}$$

122. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^t$

absz konv vizsgálata: $\sum_{n=1}^{\infty} n^t$ mikor konvergens?

$t \geq 0$ konv szüks nem teljesül $a_n = n^t \not\to 0$

$-1 \leq t < 0$ div a sor pl. integrálás kritérium HF

$t < -1$ konvergens $\Rightarrow$ absz. konv ha $t < -1$

feltételes konv vizsgálata: $\sum^{\infty} (-1)^n n^t$ hol konv?

vált előjelű Leibniz kritérium $n^t \searrow 0$? milyen t–re teljesül? Ha $t < 0$ akkor teljesül, azaz

$-1 \leq t < 0$–ra feltételesen konvergens

Matematika G1

6. Gyakorlat

167.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \qquad S_4\text{–gyel közelítjük, hibabecslést végzünk} \qquad \text{(Leibniz típusú sor)}$$

$$|h_4| = \left| \sum_{k=5}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right| \le \left| \frac{(-1)^6}{5^2} \right| = \frac{1}{25} \qquad \text{A hiba az első elhagyott tag abszolútértékével becsülhető.}$$

170.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \qquad S_3\text{–mal közelítjük, hibabecslést végzünk} \qquad \text{pozitív tagú konvergens}$$

$$|h_3| = \left| \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \right| = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = \frac{1}{8!} + \frac{1}{10!} + \ldots = \frac{1}{8!} \left(1 + \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} + \ldots \right)$$

$$\le \frac{1}{8!} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^4} + \ldots \right)}_{q = \frac{1}{9^2} \text{ geometriai sor}} = \frac{1}{8!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9^2}}$$

178.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \qquad S_4 \text{ meghatározás és hibabecslés}$$

$$h_4 = \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{(1+x)^4} \mathrm{d}x \le h_4 \le \int_4^{\infty} \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x$$

$$\left. \begin{aligned} \int_4^{\infty} \tfrac{1}{(1+x)^4} \mathrm{d}x &= \lim_{\Omega \to \infty} \left[-\tfrac{1}{3} \tfrac{1}{(1+x)^3} \right]_4^{\Omega} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{5^3} \\ \int_4^{\infty} \tfrac{1}{x^4} \mathrm{d}x &= \lim_{\Omega \to \infty} \left[-\tfrac{1}{3} \tfrac{1}{x^3} \right]_4^{\Omega} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4^3} \end{aligned} \right\} \qquad \tfrac{1}{3 \cdot 5^3} \le h_4 \le \tfrac{1}{3 \cdot 4^3}$$

184.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \qquad \varepsilon = 10^{-2}\text{–höz adjunk küszöbindexet}$$

$$|h_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \right| \le \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{1}{(n+1)!} < \varepsilon = \frac{1}{100} \Rightarrow (n+1)! > 100$$

$n = 4$–re már teljesül $\Rightarrow N = 4$

185.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \qquad \varepsilon = 10^{-2}\text{–höz adjunk küszöbindexet}$$

$$h_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leq \int_n^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{\Omega\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_n^{\Omega} = \frac{1}{n} < \varepsilon = \frac{1}{100} \Rightarrow n = 101 \quad \text{már jó } (N = 101)$$

215.-216.-217. $f_n(x) = x^n$ egyenletesen konvergens–e a $[0,1]$, $(0,1)$, $[0,c)$, $0 < c < 1$ intervallumokon?

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

215. $[0,1]$–en nem lehet egyenletesen konvergens, mert folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának határfüggvénye is folytonos kell legyen, de $f(x)$ nem folytonos

216. Nézzük, hogy $\forall\varepsilon > 0$ tudunk–e N küszöbindexet adni, amely nem függ a helytől, x–től $(0,1)$–en

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < \varepsilon$$
$$n \ln x < \ln\varepsilon$$
$$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln x}$$

$N(\varepsilon, x) = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right] + 1$, keressük $\sup_{x\in(0,1)} N(\varepsilon,x)$–re de $\lim\limits_{x\to 1-0} N(\varepsilon,x) = \infty$, tehát nem tudjuk az univerzális $N(\varepsilon)$–t megadni, ami jó lesz a teljes $(0,1)$–en.

217. Mi a helyzet a $(0,c)$–n? $0 < c < 1$

Itt viszont már $N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln c}\right] + 1$ érvényes. Ez jó lesz $[0,c)$–n, tehát a konvergencia egyenletes $[0,c)$–n.

224.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\ln x)^n \qquad \text{konvergencia tartomány és összeg függvény}$$

Rögzített x–re $q = \ln x$ geometriai sor $|q| < 1$–re konvergens, azaz $|\ln x| < 1$–re konvergens $\Rightarrow x \in (1/e, e)$ a konvergencia tartomány (KT–vel fogjuk jelölni), $S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\ln x}$

232.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)x^n}{n} \qquad \text{konvergencia tartomány, absz. konvergencia tartomány}$$

Abszolút konvergencia tartományt nézünk először, ugyanis itt rögzített x-re pozitívtagú sor, alkalmazzuk a (GY) kritériumot.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|1-x||x|^n}{n}} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{|1-x|}}{\sqrt[n]{n}} = \begin{cases} |x|, & \text{ha } x \neq 1 \\ 0, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

$|x| < 1$–re absz konvergens, de mi a helyzet a határokkal?

$x = 1$–et látjuk, hogy ott absz konvergens, vizsgáljuk $x = -1$–et, itt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n}$ ez viszont csak feltételesen konvergens $\Rightarrow$ absz konv: $(-1, 1]$–en

Megjegyzés: $|x| > 1$–re a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül, mert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1-x)x^n}{n} \neq 0$, ha $|x| > 1$, mert a hatvány függvény gyorsabban nő.
Mivel $x = -1$–re a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n}$ Leibniz típusú konvergens sor, ezért KT: $[-1, 1]$.

240.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + x^2}, \qquad (-\infty, \infty) \qquad \text{Egyenletesen konvergens–e a megadott intervallumon?}$$

Alkalmazzuk a Weierstrass kritériumot!

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{|\cos nx|}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2} \; \forall x \in \mathbb{R}$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens $\Rightarrow$ az eredeti sor abszolút és egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$–en.

Hatványsorok:

250. Hol konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$? Ez a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ alak

1. Megoldás:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^2} = 1$$

2. Megoldás:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = 1$$

Kérdés a határok:

$$x = 1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ Leibniz tip konv}$$
$$x = 3 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konv poz tagú pl. integrál kritériummal (szerepelt)}$$

$$\Rightarrow KT : \quad [1, 3]$$

257. Hol konvergens? $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{\sqrt{k}}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

középpont $x_0 = 0$, határok:

$$x = 1 : \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ Leibniz tip konvergens}$$
$$x = -1 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ divergens poz tagú pl. integrál kritériummal látszik}$$

$KT : (-1, 1]$

258. kidolgozott, az előadáson megcsinálom

Matematika G1
7. Gyakorlat

263.

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k+1)!}x^{2k+1} \quad KT:\mathbb{R}$$

267.

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k} \quad KT: x \in \mathbb{R}$$

271.

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^k}{k!}x^k \quad KT: x \in \mathbb{R}$$

275.

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{3}{k}x^k \quad KT: x \in \mathbb{R}$$

276.

$$(1+x)^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-3}{k}x^k, \quad KT: |x| < 1$$

Hogyan számoljuk ki $\binom{-3}{k}$ értékét?

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \quad \text{ezt lehet általánosítani}$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \text{így} \quad \binom{-3}{2} = \frac{-3\cdot(-4)}{2!} = 6$$

277.

$$(1+x)^{1/3} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{k}x^k, \quad |x| < 1$$

Például:

$$\binom{\frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2} = -\frac{1}{9}$$

280.

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x^2)\right)'$$

$\ln(1+x)$ sora hogyan keletkezik?

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k, \quad (|x|<1) \quad \text{ez az ötlet!}$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k \mathrm{d}t \underset{\substack{\downarrow\\ \text{egy konv}}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^k t^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \ |x|<1$$

Th:

$$\ln(1+x^2) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2(k+1)}}{k+1}$$
$$\frac{1}{2}(\ln(1+x^2))' = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+2}}{k+1}\right)' \underset{\substack{\downarrow\\ \text{egy konv}}}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k \frac{x^{2k+2}}{k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k+1}$$

☹☹☹☹☹☹☹☹☹☹☹
2. Megoldás:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k, \ |x|<1$$
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$$
$$x \cdot \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k+1}$$

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

288.

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(-x)^{k+1}}{k+1}\right)$$
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)\frac{x^{k+1}}{k+1}\right) \underset{\substack{\downarrow\\ \text{k = 2n-re marad}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ |x|<1$$

289.

$$\arccos x \quad \text{ötlet: } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_0^x (\arccos t)' \mathrm{d}t = \arccos x - \arccos 0 = \arccos x - \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}\arccos x &= \frac{\pi}{2} + \int_0^x (\arccos t)' \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + \int_0^x -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-t^2)^k \mathrm{d}t \underset{\substack{\downarrow \\ \text{egy konv}}}{=} \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k t^{2k} \mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^x = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, |x| < 1\end{aligned}$$

293.

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}}{t} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} \mathrm{d}t \underset{\substack{\downarrow \\ \text{egy konv}}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left[t^{2k+1}\right]_0^x}{(2k+1)(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!},\ x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

294.

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin\left(\left(x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2k}}{(2k)!}\right],\ x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

297.

$$e^x = e^{x-1+1} = e e^{x-1} = e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!} (x-1)^k,\ x \in \mathbb{R}$$

298.

$$\ln x = \ln((x-1)+1)$$

ismert $\ln(x+1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, |x| < 1$ ezért $\ln((x-1)+1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-1)^{k+1}}{k+1},\ |x-1| < 1$

306.

$$\frac{1}{1+x} \quad x_0 = c \quad (c \neq 1)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1+(x-c)+c} = \frac{1}{(1+c)+(x-c)} = \frac{1}{1+c} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-c}{1+c}} = \frac{1}{1+c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x-c}{1+c}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-c)^k}{(1+c)^{k+1}},\ \left|\frac{x-c}{1+c}\right| < 1\end{aligned}$$

308.

$$(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}x^k$$
$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+a_{k-1})x^k \quad \text{a konvergencia tartomány nem változott}$$

311. a.

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)'=\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)'\underset{\substack{\downarrow\\ \text{egy konv}}}{=}\sum_{k=0}^{\infty}(x^k)'=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$$

b.

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)''=\left(\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}(kx^{k-1})'=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}$$

c.

$$\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}t^k\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x t^k\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$|x|<1$ biztos, de $x=-1$–ben is konvergens

348.

$$\int_0^1\sin x^2\mathrm{d}x \qquad H<5\cdot10^{-4} \qquad KT: x\in\mathbb{R}$$

$$\int_0^1\sin x^2\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^kx^{4k+2}}{(2k+1)!}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left[x^{4k+3}\right]_0^1}{(4k+3)(2k+1)!}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(4k+3)(2k+1)!} \qquad \text{konvergens Leibniz sor}$$

$$\int_0^1\sin x^2\mathrm{d}x\approx S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(4k+3)(2k+1)!}$$

$$|h_n|\le\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(4(n+1)+3)\cdot(2(n+1)+1)!}\right|=\frac{1}{(4n+7)(2n+3)!}<5\cdot10^{-4}$$

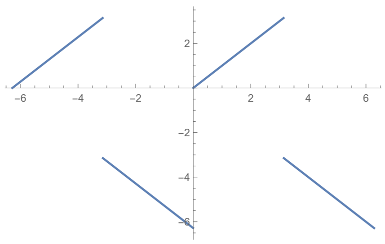
$$(4n+7)(2n+3)!>\frac{1}{5}\cdot10^4 \qquad n=2 \quad \text{már jó}$$

Érdemes megnézni még a 347, 349, 350 példákat! Teljesen hasonlóak!

Matematika G1
8. Gyakorlat

361.

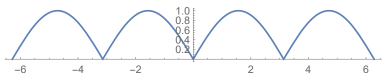
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 \le x < \pi \\ -x & \text{ha } \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$



$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-x - 2\pi)\ dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x\ dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x^2}{2} - 2x\pi \right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{2} - \frac{2\pi^2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi - 2\pi = -\pi \\
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\ dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-x - 2\pi) \cos kx\ dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos kx\ dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \underbrace{-x \cos kx\ dx}_{t=-x, dt=-dx} \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos kx\ dx = -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} t \cos kt\ dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos kx\ dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos kx}_{v' \to v = \frac{\sin kx}{k}}\ dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[x \cdot \frac{\sin kx}{k} \right]_{0}^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\sin kx}{k}\ dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos kx}{k^2} \right]_{0}^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} (\cos k\pi - 1) \\
&= \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2} & \text{ha } k \text{ páratlan} \\ 0 & \text{ha } k \text{ páros} \end{cases} \\
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\ dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-x - 2\pi) \sin kx\ dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin kx\ dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \underbrace{-x \sin kx}_{t=-x}\ dx \\
&- \frac{2\pi}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \sin kx\ dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin kx\ dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} t \sin kt\ dt - 2 \int_{-\pi}^{0} \sin kx\ dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin kx\ dx \\
&= 2 \left[\frac{\cos kx}{k} \right]_{-\pi}^{0} = \frac{2}{k} (1 - \cos k\pi) = \begin{cases} \frac{4}{k} & \text{ha } k \text{ páratlan} \\ 0 & \text{ha } k \text{ páros} \end{cases} \\
F(x) &= -\frac{\pi}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi (2l-1)^2} \cos(2l-1)x + \frac{4}{2l-1} \sin(2l-1)x
\end{aligned}
$$

365.

$$f(x) = |\sin x|$$



$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad b_k = 0, \quad \forall k$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \underbrace{-\sin x\ dx}_{t=-x} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\ dx = -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} \sin t\ dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\ dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(1+1) = \frac{4}{\pi} \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin x \cos kx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos kx\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos kx\ dx \\
&\underset{2\sin\beta\cdot\cos\alpha=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta), \quad k\neq 1\ (k=1\text{-re } 0)}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(k+1)x - \sin(k-1)x\ dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(k+1)x}{k+1} + \frac{\cos(k-1)x}{k-1}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(k+1)\pi}{k+1} + \frac{\cos(k-1)\pi}{k-1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1}\right] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{ha } k \text{ páratlan} \\ \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1}\right) = -\frac{4}{\pi(k^2-1)} & \text{ha } k \text{ páros} \end{cases}
\end{aligned}$$

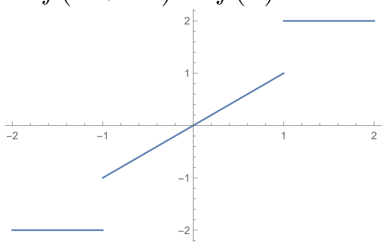
368.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin^2 x \cos 2x \\
f(x) &= \frac{1-\cos 2x}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos^2 2x = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2} \\
&= \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 4x
\end{aligned}$$

373.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{ha } -2 \le x < -1 \\ x & \text{ha } -1 \le x < 1 \\ 2 & \text{ha } 1 \le x < 2 \end{cases}$$

és $f(x+4k) = f(x)$



$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi}{2}x + b_k \sin\frac{k\pi}{2}x \right)$$

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0 \text{ páratlan függvény}$$

$$b_k = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x) \sin\frac{k\pi}{2}x\ dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} (-2)\underbrace{\sin\frac{k\pi}{2}x}_{t=-x}\ dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x \sin\frac{k\pi}{2}x\ dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{2} 2\sin\frac{k\pi}{2}x\ dx$$

$$= -\int_{2}^{1} \sin\frac{k\pi}{2}t\ dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\sin\frac{k\pi}{2}x\ dx + \int_{1}^{2} \sin\frac{k\pi}{2}x\ dx = 2\int_{1}^{2} \sin\frac{k\pi}{2}t\ dt$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{\sin\frac{k\pi}{2}x}_{v=-\frac{\cos\frac{k\pi}{2}x}{\frac{k\pi}{2}}}\ dx = -\frac{2}{\frac{k\pi}{2}}\left[\cos\frac{k\pi}{2}t\right]_1^2 + \frac{1}{2}\left[-x\frac{\cos\frac{k\pi}{2}x}{\frac{k\pi}{2}}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\cos\frac{k\pi}{2}x}{\frac{k\pi}{2}}\ dx$$

$$= -\frac{4}{k\pi}\left(\cos k\pi - \cos\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} - \frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{k\pi}{2}x}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2}\right]_{-1}^{1} = \dots$$

376. Számítsuk ki a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ sor összegét a 361. feladat segítségével!

$$F(0) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2l-1)^2} = \frac{f(+0)+f(-0)}{2} = -\frac{2\pi}{2} = -\pi$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2l-1)^2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

380. emelt, csak elkezdeni, Feladat csak szinuszos sorként előállítani a $\cos x$, $\quad 0 < x \leq \pi$ függvényt

$$f(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{ha } -\pi \leq x < 0 \\ \cos x & \text{ha } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

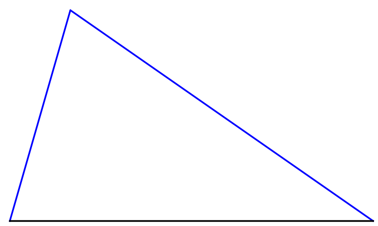
$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \; dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -\cos x \sin kx \; dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos x \sin kx \; dx = \ldots$$

382. Feladat csak szinuszos sorként előállítani az ábrán szereplő függvényt (csak elkezdeni)



$$f(x) = \begin{cases} -\frac{h}{l-c}x - \frac{hl}{l-c} & \text{ha } -l \leq x < -c \\ \frac{h}{c}x & \text{ha } -c \leq x < c \\ -\frac{h}{l-c}x + \frac{hl}{l-c} & \text{ha } c \leq x < l \end{cases}$$

383. Állítsa elő a $\sin x$, $\quad 0 < x \leq \pi$ függvényt tiszta koszinuszos sorral!

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{ha } 0 < x \leq \pi \\ -\sin x & \text{ha } -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$

Innen ugyanaz, mint a 365. feladat. Házi feladat befejezni.

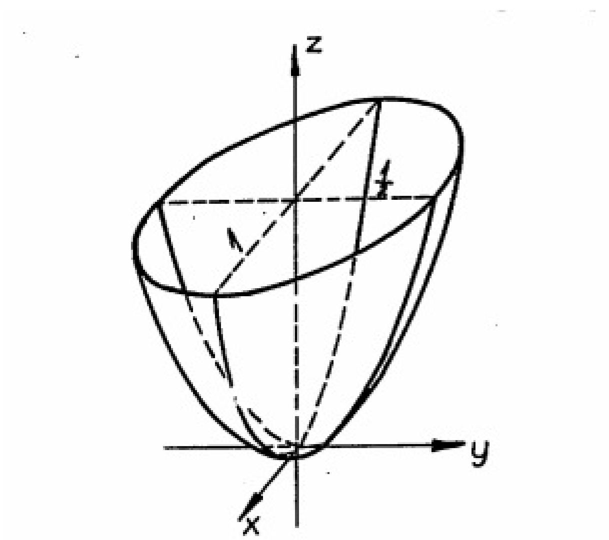
Monostory V./8.

A koordináta-síkokkal párhuzamos metszetgörbék vizsgálata alapján szemléltessük az alábbi felületet:
$z = x^2 + 4y^2$

Megoldás:

Az xz-síkmetszet ($y = 0$): $z = x^2$ parabola
Az yz-síkmetszet ($x = 0$): $z = 4y^2$ parabola
Az xy-síkkal párhuzamos síkmetszetek ($z = c^2 > 0$): $c^2 = x^2 + 4y^2$ ellipszisek

A $z = x^2 + 4y^2$ felület az alábbi ábrán látható elliptikus paraboloid:



Monostory V./31.

Határozzuk meg az alábbi határértéket:

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to\infty}} = \frac{2xy-1}{y+1}$$

Megoldás:

$$\lim_{y\to\infty}\lim_{x\to 2}\frac{2xy-1}{y+1} = 4, \text{ tehát ha létezik a határérték csak ez lehet az.}$$

Definíció alapján:

$$\left|\frac{2xy-1}{y+1}-4\right| = \left|\frac{2xy-1-4y-4}{y+1}\right| = \left|\frac{2y(x-2)-5}{y+1}\right| \leq$$

$$\leq \frac{2\,|y|}{|y+1|}\cdot|x-2| + \frac{5}{|y+1|} \leq$$

$$\left(\text{Mivel } \frac{|y|}{|y+1|} \leq 1, \text{ ha } y>0.\right)$$

$$\leq 2\,|x-2| + \frac{5}{|y+1|} \leq 2\,|x-2| + \frac{5}{|y|}$$

$$\text{Ha } 2\,|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ azaz } |x-2| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\text{és } 5\cdot\left|\frac{1}{y}\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ azaz } y > \frac{10}{\varepsilon}$$

akkor következik, hogy

$$2\,|x-2| + \frac{5}{|y|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\boxed{\text{1. példa}}$

$$\text{Határozzuk meg a } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{2x^2+y^2} \text{ határértéket!}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2+y^2}{2x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2+y^2}{2x^2+y^2} = 1$$

Mivel a két határérték nem egyezik meg, a keresett határérték nem létezik.

$\boxed{\text{2. példa}}$

$$\text{Határozzuk meg a } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \text{ határértéket!}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0 \text{ és } \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

Nézzük az y=cx egyenesek mentén:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=cx}} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{xc^2x^2}{x^2+c^2x^2} = 0$$

Tekintsünk egy tetszőleges origóba irányított görbét (utat), amelynek polárkoordinátás egyenlete $r = r(\varphi)$, $\alpha < \varphi < \beta$ és

$$\lim_{\varphi\to\beta} r(\varphi) = 0. \text{ (Itt } \beta \text{ lehet végtelen is.)}$$

Ekkor az

$$\begin{aligned} x(\varphi) =& r(\varphi)\cos\varphi \\ y(\varphi) =& r(\varphi)\sin\varphi, \quad (\alpha < \varphi < \beta) \end{aligned}$$

a görbe polárkoordinátás paraméterezése, és

$$\lim_{\varphi\to\beta} (x(\varphi), y(\varphi)) = (0,0).$$

Alkalmazzuk:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{\varphi\to\beta} \frac{r(\varphi)\cos\varphi\cdot r^2(\varphi)\sin^2\varphi}{r^2(\varphi)} =$$

$$= \lim_{\varphi\to\beta} r(\varphi)\cos\varphi\sin^2\varphi = 0, \text{ mert } r(\varphi)\to 0, \text{ ha } \varphi\to\beta, \text{ és } \cos\varphi\sin^2\varphi \text{ korlátos.}$$

Azaz ilyenkor azt vizsgáljuk, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi\to\beta}} \frac{r\cos\varphi\cdot r^2\sin^2\varphi}{r^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi\to\beta}} r\cos\varphi\sin^2\varphi = 0$$

Röviden:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \text{(minden ilyen útra)},\forall\varphi\text{-re}}} \frac{r\cos\varphi\cdot r^2\sin^2\varphi}{r^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\varphi\text{-re}}} r\cos\varphi\sin^2\varphi = 0$$

A továbbiakban csak az utóbbit írjuk ki.

$\boxed{\text{3. példa}}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \frac{\sqrt{x^2+y^2-6y+10}-1}{x^2+y^2-6y+9} = \lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\sqrt{x^2+(y-3)^2+1}-1}{x^2+(y-3)^2} =$$

(Áttérünk polárkoordinátás paraméterezésre: $x = r\cos\varphi$ és $y-3 = r\sin\varphi$)

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\sqrt{r^2+1}-1}{r^2} \overset{\text{B−L}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{r^2+1}}\cdot 2r}{2r} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{4. példa}}$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \lim_{r\to\infty} \frac{r\cos\varphi + r\sin\varphi}{r^2(1-\cos\varphi\sin\varphi)} = \lim_{r\to\infty} \frac{r(\cos\varphi+\sin\varphi)}{r^2(1-\frac{\sin(2\varphi)}{2})} =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r}\left(\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\frac{\sin(2\varphi)}{2}}\right)$$

Mivel $\left|\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\frac{\sin(2\varphi)}{2}}\right| \le \frac{2}{\left|1-\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right|} \le \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$, a szorzat második tényezője korlátos, tehát a határérték 0.

$\boxed{\text{5. példa}}$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2} \overset{\text{TF,H } \exists}{=} A$$

$$\ln A = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} x^2y^2\ln(x^2+y^2) = \lim_{r\to0} r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\ln(r^2) = \lim_{r\to0} r^4\ln(r^2)\cos^2\varphi\sin^2\varphi = 0,$$

mert

$$\lim_{r\to0} r^4\ln(r^2) = \lim_{r\to0}\frac{\ln(r^2)}{r^{-4}} \overset{\text{B−L}}{=} \lim_{r\to0}\frac{\frac{1}{r^2}\cdot 2r}{-4r^{-5}} = \lim_{r\to0} -\frac{1}{2}r^4 = 0$$

és $\cos^2\varphi\sin^2\varphi$ korlátos.
Így $A = 1$.

$\boxed{\text{6. példa}}$

Tegyük folytonossá a (0,3) pontban az alábbi függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+y^2-6y+10}-1}{x^2+y^2-6y+9}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,3) \\ C, & \text{ha } (x,y)=(0,3) \end{cases}$$

A 3. példában láttuk, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(0,3)} f(x) = \frac{1}{2}.$$

$C = \frac{1}{2}$ választással tehát folytonossá tehető (pontban, tartományon, teljes értelmezési tartományon típusú zh példák lehetnek.)

$\boxed{\text{Monostory V./38.}}$

$f(x,y) = e^{x^2y} - 2x^2y^3 \sin(x+y)$
$f'_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = D_1 f(x,y) = e^{x^2y} \cdot 2xy - (4xy^3 \sin(x+y) + 2x^2y^3 \cos(x+y) \cdot (1+0))$
$f'_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = D_2 f(x,y) = e^{x^2y} \cdot x^2 - (6x^2y^2 \sin(x+y) + 2x^2y^3 \cos(x+y) \cdot (0+1))$

$\boxed{\text{Monostory V./49.}}$

Számítsuk ki az $f(x,y,z) = xy \sin z + zx \ln y + ye^x$ háromváltozós függvény első és másodrendű parciális deriváltjait!

Megoldás:

$f'_x(x,y,z) = y \sin z + z \ln y + ye^x$
$f'_y(x,y,z) = x \sin z + zx\frac{1}{y} + e^x$
$f'_z(x,y,z) = xy \cos z + x \ln y + 0$

$f''_{xx}(x,y,z) = ye^x$
$f''_{xy}(x,y,z) = \sin z + z\frac{1}{y} + e^x$
$f''_{xz}(x,y,z) = y \cos z + \ln y + 0$
$f''_{yx}(x,y,z) = \sin z + z\frac{1}{y} + e^x$
$f''_{yy}(x,y,z) = 0 - zx\frac{1}{y^2} + 0$
$f''_{yz}(x,y,z) =$
$f''_{zx}(x,y,z) = y \cos z + \ln y$
$f''_{zy}(x,y,z) =$
$f''_{zz}(x,y,z) =$

Látható, hogy $f''_{xy}(x,y,z) = f''_{yx}(x,y,z)$ és $f''_{xz}(x,y,z) = f''_{zx}(x,y,z)$.

A kimaradt deriváltak meghatározása HF.

$\boxed{\text{Monostory V./51.}}$

Határozzuk meg az alábbi implicit módon megadott függvény elsőrendű parciális deriváltjait:

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$$

Megoldás:

$z = f(x,y)$ lenne, ha explicit egyenlet lenne, azaz arra kell figyelnünk, hogy z függ x, y változóktól

Az x változó szerinti derivált:

$$\cos y + y(-\sin z) \cdot z'_x + z'_x \cdot \cos x + z(-\sin x) = 0$$

$$z'_x = \frac{z \sin x - \cos y}{\cos x - y \sin z}$$

Az y változó szerinti derivált:

$$-x \sin y + \cos z - y \sin z \cdot z'_y + z'_y \cdot \cos x = 0$$

$$z'_y = \frac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z}$$

Monostory V./54.

Határozzuk meg a következő függvény differenciálhányadosát:
$f(x) = g(u(x), v(x)) = \mathrm{arctg} u(x) + v(x)$, ahol $u(x) = e^{2x}$ és $v(x) = \cos 2x$!

1. megoldás

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+u^2(x)} \cdot 2e^{2x} + 1 \cdot (-2 \sin 2x) =$$
$$= \frac{1}{1+e^{4x}} \cdot 2e^{2x} + 1 \cdot (-2 \sin 2x)$$

2. megoldás

$$f(x) = \mathrm{arctg} e^{2x} + \cos 2x$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+e^{4x}} \cdot 2e^{2x} + 1 \cdot (-2 \sin 2x)$$

Monostory V./55.

Határozzuk meg a következő függvény differenciálhányadosát:
$f(x) = g(u(x), v(x)) = \ln [u(x) \cdot v(x)]$, ahol $u(x) = \mathrm{tg} x$ és $v(x) = \sqrt{x}$

1. megoldás

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot u'(x) + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot v'(x) = \frac{1}{u(x)v(x)} \cdot v(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{u(x)v(x)} \cdot u(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$
$$= \frac{1}{\mathrm{tg} x \cdot \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\mathrm{tg} x \sqrt{x}} \cdot \mathrm{tg} x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. megoldás

$f(x) = \ln (\mathrm{tg} x \cdot \sqrt{x})$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{tg} x \cdot \sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} \sqrt{x} + \mathrm{tg} x \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$\boxed{\text{Monostory V./59.}}$

Határozzuk meg a következő függvény parciális deriváltjait:

$f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y)) = \arcsin(u \cdot v)$, ahol $u(x,y) = e^{xy}$ és $v(x,y) = 2x - 2xy$

1. megoldás

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(uv)^2}} \cdot v \cdot ye^{xy} + \frac{1}{\sqrt{1-(uv)^2}} \cdot u \cdot (2-2y) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left[e^{xy}(2x-2xy)\right]^2}} \left[(2x-2xy)ye^{xy} + e^{xy}(2-2y)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(uv)^2}} \cdot v \cdot xe^{xy} + \frac{1}{\sqrt{1-(uv)^2}} \cdot u \cdot (-2x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left[e^{xy}(2x-2xy)\right]^2}} \left[(2x-2xy)xe^{xy} + e^{xy}(-2x)\right]$$

2. megoldás

$f(x,y) = \arcsin\left\{e^{xy}(2x-2xy)\right\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\left[e^{xy}(2x-2xy)\right]^2}} \left[ye^{xy}(2x-2xy) + e^{xy}(2-2y)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\left[e^{xy}(2x-2xy)\right]^2}} \left[xe^{xy}(2x-2xy) + e^{xy}(-2x)\right]$$

Matematika G2
10. gyakolrat

$\boxed{\text{1. példa}}$

Differenciálható-e az origóban az alábbi függvény:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Megoldás:

Ellenőrizzük, hogy $(x_0,y_0)=(0,0)$ esetén teljesül-e, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0 \qquad (\star)$$

Definícó alapján kiszámoljuk az origóban a parciális deriváltakat:

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}h\cdot\sin\frac{1}{h^2}=0$$

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}h\cdot\sin\frac{1}{h^2}=0$$

Ezeket behelyettesítve $(\star)$-ba, majd áttérve polárkoordinátákra:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=$$

$$=\lim_{r\to0}r\cdot\sin\frac{1}{r^2}=0$$

Tehát a függvény differenciálható az origóban.

$\boxed{\text{2. példa}}$

Differenciálható-e az origóban az alábbi függvény:

$$f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$$

Megoldás:

Hasonlóan, mint az első pédában

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{xy})^2} \cdot y, \text{ ha } x \neq 0 \neq y$$

$$f'_y(0,0) = 0$$

Behelyettesítve ($\star$)-ba:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{xy} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\sin\varphi\cos\varphi}}{r} \neq 0$$

Ez utóbbi határérték ugyanis nem létezik, tehát nem differenciálható a függvény.

$\boxed{\text{Monostory V./74.}}$

Határozzuk meg az α értékét, hogy teljes differenciál legyen.

Megoldás:

Azt mondjuk, hogy $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ ($\star$), $f,g : T \longmapsto \mathbb{R}$ T-n teljes differenciál, ha $\exists$ $F(x,y)$ differenciálható függvény úgy, $\forall$ $(x,y) \in T$ esetén $dF(x,y) = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$.

Mivel $dF(x,y) = F'_x(x,y)\,dx + F'_y(x,y)\,dy$ egyenlő ($\star$)-gal, keressük azt az $F(x,y)$-t, amelyre:

$$F'_x(x,y) = f(x,y) \text{ és } F'_y(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in T$$

$e^{-x}y\,dx + \alpha e^{-x}\,dy$ teljes differenciál-e?

$F'_x(x,y) = e^{-x}y \Longrightarrow F(x,y) = -e^{-x}y + c(y)$

$F'_y(x,y) = \alpha e^{-x} = -e^{-x} + c'(y) \Longrightarrow c'(y) = 0 \Longrightarrow c(y) = k \in \mathbf{R}, \alpha = -1$

$F(x,y) = -ye^{-x} + k$

$F(x,y)$ szintvonalai:

$$-ye^{-x} + k = \text{const.}$$

$$y = e^x(k - \text{const.}), \quad \text{jelöljük} \quad k - \text{const.} := \tilde{c}$$

$$y = \tilde{c}e^x$$

<u>Megjegyzés:</u> $F(x,y)$ kétszer biztos diffható (többször is), alkalmazzuk Young tételét:

$$F''_{xy}(x,y) = F''_{yx}(x,y) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f'_y(x,y) = e^{-x} = g'_x(x,y) = -\alpha e^{-x} \Longrightarrow \alpha = -1$$

---

3. példa

Határozzuk meg az α értékét, hogy teljes differenciál legyen az $e^{-x}y\,dx + (\alpha e^{-x} + 2y)\,dy$

Megoldás:

$f(x,y) = e^{-x}y,\ g(x,y) = \alpha e^{-x} + 2y$
$f,\ g$ diffható $\Longrightarrow f'_y(x,y) = e^{-x} = g'_x(x,y) = -\alpha e^{-x} \Longrightarrow \alpha = -1$-re teljes differenciál

$F'_x(x,y) = e^{-x}y \Longrightarrow F(x,y) = -e^{-x}y + c(y)$

$F'_y(x,y) = -e^{-x} + 2y = -e^{-x} + c'(y) \Longrightarrow c'(y) = 2y \Longrightarrow c(y) = y^2 + k, \quad k \in \mathbf{R}$

$F(x,y) = -e^{-x}y + y^2 + k$

Monostory V./81.

Határozzuk meg az $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2)} - z$ függvény iránymenti deriváltját a $P_0(1,0,1)$ pontban és a $\mathbf{v} = [3,2,-5]^T$ irányban!

Megoldás:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f|_{P_0} \cdot \mathbf{v}_0, \text{ ahol } \mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right|_{P_0} = \left.\begin{bmatrix} -2xe^{-(x^2+y^2)} \\ -2ye^{-(x^2+y^2)} \\ -1 \end{bmatrix}\right|_{(1,0,1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{9+4+25}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} =$$

$$= -2e^{-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{38}} \cdot 3 + 0 - \frac{1}{\sqrt{38}}(-5) = \dots$$

Monostory V./86.

Írjuk fel az $xy^2 + z^3 = 12$ felület $P(1,2,2)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét!

Megoldás:

$z(x,y)$ implicit függvény, $z_0 = f(x_0,y_0) = 2$

Deriváljuk x szerint:

$$y^2 + 3z^2 \cdot z'_x = 0$$

$$z'_x = -\frac{y^2}{3z^2}$$

$$z'_x|_P = -\frac{4}{3 \cdot 4} = -\frac{1}{3}$$

Deriváljuk y szerint:

$$2xy + 3z^2 \cdot z'_y = 0$$

$$z'_y = -\frac{2xy}{3z^2}$$

$$z'_y\big|_P = -\frac{4}{3 \cdot 4} = -\frac{1}{3}$$

Az érintősík egyenlete:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Behelyettesítve:

$$z - 2 = -\frac{1}{3}(x-1) + \left(-\frac{1}{3}\right)(y-2)$$

$\boxed{\text{Monostory V./90.}}$

Írjuk fel az $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ ellipszoid azon érintősíkjának az egyenletét, amelynek mindhárom tengelymetszete ugyanaz a pozitív érték.

Megoldás:

Az érintősík $z - z_0 = f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0)$. Nem ismert $P(x_0, y_0, z_0)$, hogy hová kell felírni a síkot, de azt tudjuk, hogy a pozitív oktánsban van, jelölje u az érintősíknak a metszéspontját a koordináta-tengelyekkel.

Deriváljuk a függvényt x szerint:

$$\frac{2x}{8} + 2z \cdot z'_x = 0 \Longrightarrow z'_x = -\frac{1}{8} \cdot \frac{x}{z} \Longrightarrow z'_x\big|_P = -\frac{1}{8} \cdot \frac{x_0}{z_0}$$

Deriváljuk a függvényt y szerint:

$$\frac{2y}{4} + 2z \cdot z'_y = 0 \Longrightarrow z'_y = -\frac{1}{4} \cdot \frac{y}{z} \Longrightarrow z'_y\big|_P = -\frac{1}{4} \cdot \frac{y_0}{z_0}$$

P-beli érintősík:

$$z - z_0 = -\frac{1}{8} \cdot \frac{x_0}{z_0}(x - x_0) - \frac{1}{4} \cdot \frac{y_0}{z_0}(y - y_0)$$

$$z_0 z - z_0^2 = -\frac{1}{8}x_0 \cdot x + \frac{1}{8}x_0^2 - \frac{1}{4}y_0 \cdot y + \frac{1}{4}y_0^2$$

$$z_0 z = -\frac{1}{8}x_0 \cdot x - \frac{1}{4}y_0 \cdot y + \frac{1}{8}x_0^2 + \frac{1}{4}y_0^2 + z_0^2$$

$\frac{1}{8}x_0^2 + \frac{1}{4}y_0^2 + z_0^2 = 1$, mivel a P az ellipszoid pontja, ezt behelyettesítve:

$$(*) \quad z_0 z = -\frac{1}{8} x_0 \cdot x - \frac{1}{4} y_0 \cdot y + 1$$

x tengellyel való metszéspont $y = z = 0$-ra adódik:

$$0 = -\frac{1}{8} x_0 \cdot u + 1 \Longrightarrow x_0 = \frac{8}{u}$$

y tengellyel való metszéspont $x = z = 0$-ra adódik:

$$0 = -\frac{1}{4} y_0 \cdot u + 1 \Longrightarrow y_0 = \frac{4}{u}$$

z tengellyel való metszéspont $x = y = 0$-ra adódik:

$$z_0 \cdot u = 1 \Longrightarrow z_0 = \frac{1}{u}$$

Az (x_0, y_0, z_0) pont az ellipszoid pontja, így kielégíti az egyenletét. Behelyettesítve az x_0, y_0, z_0-t az ellipszoid egyenletébe:

$$\frac{\left(\frac{8}{u}\right)^2}{8} + \frac{\left(\frac{4}{u}\right)^2}{4} + \left(\frac{1}{u}\right)^2 = 1$$

$$\frac{8}{u^2} + \frac{4}{u^2} + \frac{1}{u^2} = \frac{13}{u^2} = 1$$

$$u = \pm\sqrt{13}, \text{ amelyből nekünk a pozitív megoldás a jó.}$$

Ebből $x_0 = \frac{8}{\sqrt{13}}$, $y_0 = \frac{4}{\sqrt{13}}$, $z_0 = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

Behelyettesítve a sík (*) egyenletébe:

$$\frac{1}{\sqrt{13}} z = -\frac{1}{8} \cdot \frac{8}{\sqrt{13}} x - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{13}} y + 1$$

$$z = -x - y + \sqrt{13}$$

Szélsőérték

Monostory V./112.

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ kétváltozós függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

$f'_x(x, y) = 3x^2 - 3y = 0 \Longrightarrow y = x^2$

$f'_y(x, y) = 3y^2 - 3x = 0 \Longrightarrow 0 = y^2 - x = x^4 - x = x(x^3 - 1)$

$\Longrightarrow x_1 = 0, y_1 = 0$ és $x_2 = 1, y_2 = 1$

Vizsgáljuk a másodrendű parciális deriváltakat a $P_1(0, 0)$ és $P_2(1, 1)$ stacionárius pontokban!

$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$$

$$f''(x, y)|_{P_1} = f''(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det f''(x, y)|_{P_1} = -9 < 0 \Longrightarrow$ az $f''(x, y)|_{P_1}$ indefinit $\Longrightarrow$ nincs szélsőérték P_1-ben

$$f''(x, y)|_{P_2} = f''(1, 1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$\det f''(x, y)|_{P_2} = 36 - 9 > 0$ és $f''_{xx}|_{P_2} > 0 \Longrightarrow$ az $f''(x, y)|_{P_2}$ pozitív definit

$\Longrightarrow P_2$-ben lokális minimum van, értéke: $f(1, 1) = -1$

---

1. példa

Határozza meg az $f(x, y) = \ln x + \ln y - x - y$ kétváltozós függvény lokális szélsőértékeit $(x, y > 0)$!

Megoldás:

$f'_x(x, y) = \frac{1}{x} - 1 = 0 \Longrightarrow x_0 = 1$

$f'_y(x, y) = \frac{1}{y} - 1 = 0 \Longrightarrow y_0 = 1$

$P_0(1, 1)$

$$f''(x, y)|_{P_0} = \left.\begin{bmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{bmatrix}\right|_{P_0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$f''_{xx}(x, y)|_{P_0} < 0$ és $\det f''(x, y)|_{P_0} > 0 \Longrightarrow$ az $f''(x, y)|_{P_0}$ negatív definit $\Longrightarrow P_0$-ban lokális maximum van.

Megjegyzés:

$\begin{bmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{bmatrix}$ minden $x, y > 0$-ra negatív definit, tehát a függvény konkáv. Ez a Volterra-Lotka modell Ljapunov függvénye.

$\boxed{\text{2. példa}}$

Határozzuk meg az $f(x,y,z) = x^3+xy+y^2+2z^2+4z+1-x$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

$f'_x(x,y,z) = 3x^2 + y - 1 = 0$

$f'_y(x,y,z) = x + 2y = 0 \Longrightarrow x = -2y$

$f'_z(x,y,z) = 4z + 4 = 0 \Longrightarrow z = -1$

Behelyettesítjük f'_x-be:
$12y^2 + y - 1 = 0$

$$y_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{24} \Longrightarrow y_1 = -\frac{1}{3} \text{ és } y_2 = \frac{1}{4}$$

$P_1\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$ és $P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -1\right)$ a stacionárius pontok

$$f''(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6x & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$f''(x,y,z)|_{P_1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$f''_{xx}(x,y,z)|_{P_1} = 4 > 0$, $4 \cdot 2 - 1 = 7 > 0$ és $\det f''(x,y,z)|_{P_1} = 4 \cdot 7 > 0 \Longrightarrow$ az $f''(x,y,z)|_{P_1}$ pozitív definit $\Longrightarrow P_1$-ben lokális minimum van

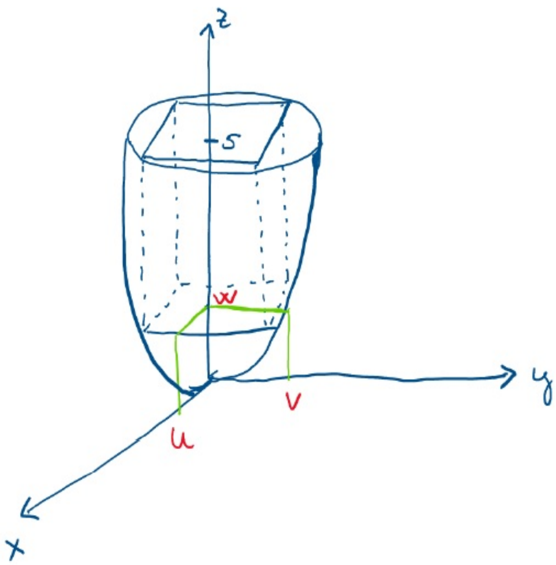
$$f''(x,y,z)|_{P_2} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$f''_{xx}(x,y,z)|_{P_2} = -3 < 0$, $-3 \cdot 2 - 1 = -7 < 0 \Longrightarrow$ azaz $f''(x,y,z)|_{P_2}$ indefinit $\Longrightarrow P_2$-ben nincs szélsőérték

Monostory V./120.

A $z = 2x^2 + y^2$ elliptikus paraboloidnak a $z = 5$ sík által kimetszett szeletébe írjuk be a legnagyobb térfogatú derékszögű hasábot. Mekkora ennek a hasábnak a térfogata?

Megoldás:



A hasáb oldalai: $5 - w$, $2u > 0$, $2v > 0$.

A térfogata: $\hat{V}(u, v, w) = 4uv(5 - w)$.

De az (u, v, w) pont a paraboloid pontja, azaz $w = 2u^2 + v^2$.
Így: $V(u, v) = 4uv(5 - 2u^2 - v^2)$

$V'_u(u, v) = 4v(5 - 2u^2 - v^2) - 4uv4u = 0 \Longrightarrow 5 - 2u^2 - v^2 = 4u^2$,
($u, v \neq 0$ uis. ha u=v=0, akkor nem lehet max.)

$V'_v(u, v) = 4u(5 - 2u^2 - v^2) - 4uv2v = 0 \Longrightarrow 5 - 2u^2 - v^2 = 2v^2$

$$\left.\begin{array}{r} 5 = 6u^2 + v^2 \\ 5 = 3v^2 + 2u^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow 4u^2 - 2v^2 = 0 \Longrightarrow 2u^2 = v^2 \Longrightarrow u = \frac{v}{\sqrt{2}} > 0$$

$$5 = 4v^2 \Longrightarrow v^2 = \frac{5}{4} \Longrightarrow v = \frac{\sqrt{5}}{2},\ u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} \Longrightarrow w = 2u^2 + v^2 = 2v^2 = \frac{5}{2}$$

$$V_{max} = V\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{5}{2}\right) = 4uv(5 - w)\Big|_{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{5}{2}\right)} = 4 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \left(5 - \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{\sqrt{2} \cdot 2}$$

Ez valóban maximum ld. geometria

$\boxed{\text{Monostory V./129.}}$

Határozzuk meg az $y = x^2$ és az $y = 1 - (x+2)^2$ görbék távolságát!

Megoldás:

Két görbe távolsága a legközelebbi pontjaik távolsága.

Legyen $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$, ahol $y_1 = x_1^2$ és $y_2 = 1 - (x_2+2)^2$.

$$d^2\overline{P_1P_2}(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - \left\{1 - (x_2+2)^2\right\})^2$$

$d^2\overline{P_1P_2}$ x_1, x_2-ben kétváltozós függvény. Ezt kell minimalizálni! Befejezni HF.

Matematika G2

11. gyakorlat

$\boxed{\text{1. példa}}$

Keressük meg az $f(x,y) = x^2 - y^2$ függvény szélsőértékeit (min., max.) $x^2 + y^2 \leq 4$-en!

Megoldás:

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ a körlap határa.

<u>1. lépés:</u> először a lokális szélsőértéket keressük és ellenőrizzük, hogy a körlapon van-e?

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x = 0 \\ f'_y(x,y) &= -2y = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow P_0(0{,}0)$$

$$\left(\text{Felesleges: } f'' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ indefinit, nincs szélsőérték } P_0\text{-ban.}\right)$$

<u>2. lépés, 1. mo.:</u> feltételes szélsőértéket keresünk

$$\phi(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2 - y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

$$\phi'_x(x,y,\lambda) = 2x - \lambda 2x = 0 = 2x(1-\lambda) = 0$$

$$\phi'_y(x,y,\lambda) = -2y - \lambda 2y = 0 = -2y(1+\lambda) = 0$$

$$\phi'_\lambda(x,y,\lambda) = -g(x,y) = 0 \text{ mindig, azaz } x^2 + y^2 = 4$$

Megoldásai:

1. $x = 0,\ y = 2,\ \lambda = -1 \Longrightarrow P_1(0{,}2)$
2. $x = 0,\ y = -2,\ \lambda = -1 \Longrightarrow P_2(0,-2)$
3. $x = 2,\ y = 0,\ \lambda = 1 \Longrightarrow P_3(2{,}0)$
4. $x = -2,\ y = 0,\ \lambda = 1 \Longrightarrow P_4(-2{,}0)$

Kiszámoljuk ezekben a pontokban a függvényértékeket és döntünk. Ez a legegyszerűbb.

$f(0{,}2) = -4,\ f(0,-2) = -4,\ f(2{,}0) = 4,\ f(-2{,}0) = 4$

$f_{max} = 4$, P_3-ban és P_4-ben veszi fel

$f_{min} = -4$, P_1-ban és P_2-ben veszi fel

2. lépés, 2. mo.:

Paraméterezzük a kört: $x = 2\cos\varphi$, $y = 2\sin\varphi$, $0 \le \varphi < 2\pi$

$\hat{f}(\varphi) = 4(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 4\cos 2\varphi$ szélsőértékét keressük

$\hat{f}'(\varphi) = -4 \cdot 2\sin 2\varphi = 0 \Longrightarrow \varphi_1 = 0$ ($\Longrightarrow P_3$), $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ ($\Longrightarrow P_1$), $\varphi_3 = \pi$ ($\Longrightarrow P_4$), $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ ($\Longrightarrow P_2$).

$\Big($Lehet: $\hat{f}''(\varphi) = -4^2\cos 2\varphi$ előjelét vizsgálni a kapott pontokban$\Big)$

2. lépés, 3. mo.:

Lehet $y^2 = 4 - x^2$, $-2 \le x \le 2$

$\tilde{f}(x) = 2x^2 - 4$, nyilván $x = 0$-ra minimum $\Longrightarrow y = \pm 2 \Longrightarrow P_1$, P_2

Még a széleken lehet:

$x_1 = -2 \Longrightarrow y_1 = 0 \Longrightarrow P_4$

$x_2 = 2 \Longrightarrow y_2 = 0 \Longrightarrow P_3$

(Megvizsgálhatom melyik maximum, minimum.)

$\boxed{\text{2. példa}}$

Keressük meg az $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2$ függvény szélsőértékeit (min., max.) az első, harmadik és negyedik síknegyedbe eső 2 sugarú 3/4 körlapon!

Megoldás:

1. lépés: szabad lokális szélsőértékek keresése

$f'_x(x,y) = 2x - 2$

$f'_y(x,y) = 2y$

$P_0(1{,}0)$ benne van körlapban (ki lehetne számolni, lokális minimum van itt)

2. lépés:

(a) 3/4 körív: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$

(b) x tengely egy szakasza: $-2 \le x \le 0$, $y = 0$

(c) y tengely egy szakasza: $0 \le y \le 2$, $x = 0$

2/a:

$$\phi(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

$$\phi'_x(x,y,\lambda) = 2x - 2 - \lambda 2x = 0 = 2((1-\lambda)x - 1)$$

$$\phi'_y(x,y,\lambda) = 2y - \lambda 2y = 0 = 2y(1-\lambda)$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

Megoldások:

- $y \neq 0$, $\lambda = 1 \longrightarrow$ ilyen nincs

- $y = 0$, $x = 2$, λ kiszámolható $\Longrightarrow P_1(2{,}0)$

- $y = 0$, $x = -2$, λ kiszámolható $\Longrightarrow P_2(-2{,}0)$

2/b:

$\hat{f}(x) = x^2 - 2x$

$\hat{f}'(x) = 2x - 2 \Longrightarrow x = 1 \notin [-2, 0]$.

Megnézzük még az $-2 \leq x \leq 0$ intervallum szélein is: $P_4(-2{,}0) = P_2$, $P_5(0{,}0)$

2/c:

$\tilde{f}(y) = y^2$

$y = 0$ és még az y határai jöhetnek szóba, azaz még $y = 2 \Longrightarrow P_6(0{,}0) = P_5$ és $P_7(0{,}2)$

Kiszámoljuk a kapott pontokban az értékeket:

$f(P_0) = -1 = f_{min}$

$f(P_1) = 0 = f(P_5)$

$f(P_2) = 8 = f_{max}$

$f(P_7) = 4$

$\boxed{\text{3. példa}}$

Az a, b, c, d oldalú négyszög két szemközti szöge α és β. Milyen α és β esetén lesz maximális a területe?

Megoldás:

A négyszög területét megkapjuk két háromszög területének összegeként:

$$T = \frac{ab\sin\alpha}{2} + \frac{cd\sin\beta}{2}$$

$$2T = ab\sin\alpha + cd\sin\beta = f(\alpha,\beta) \Longrightarrow \text{ezt maximalizáljuk}$$

De teljesülni kell a koszinusz-tételnek is a háromszögekre (a közös oldalra felírva):

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$$

$$g(\alpha,\beta) = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha - c^2 - d^2 + 2cd\cos\beta = 0$$

$$\phi(\alpha,\beta,\lambda) = f(\alpha,\beta) - \lambda g(\alpha,\beta)$$

$$\phi'_\alpha(\alpha,\beta,\lambda) = f'_\alpha(\alpha,\beta) - \lambda g'_\alpha(\alpha,\beta) = ab\cos\alpha + \lambda 2ab\sin\alpha = 0$$

$$\phi'_\beta(\alpha,\beta,\lambda) = f'_\beta(\alpha,\beta) - \lambda g'_\beta(\alpha,\beta) = cd\cos\beta - \lambda 2cd\sin\beta = 0$$

$$\cos\alpha = -\lambda 2\sin\alpha, \quad (\text{nyilván } \ \alpha \neq 0), \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha = 2\lambda$$

$$\cos\beta = \lambda 2\sin\beta, \quad (\text{nyilván } \ \beta \neq 0), \Rightarrow \operatorname{ctg}\beta = -2\lambda$$

Így: $\operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{ctg}\beta$, átalakítva $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(-\beta)$, ahol $\alpha, \beta \in (0, \pi)$.

$\alpha = -\beta + k\pi$, $\alpha + \beta = k\pi$. Csak $k = 1$ lehet $\Longrightarrow \alpha + \beta = \pi$, tehát húrnégyszög esetén maximális a terület.

(Hogy maximum, az a geometriából látszik.)

$\boxed{\text{4. példa}}$

Fektessünk $P(a,b,c)$, $a,b,c>0$ pontra egy síkot. Mikor lesz a P-n átmenő sík és a koordináta tengelyek által bezárt térrész térfogata minimális?

Megoldás:

Sík egyenlete:

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1,\text{ és }\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}=1$$

$$V=\frac{1}{6}ABC \Longrightarrow 6V=ABC \text{ ezt minimalizáljuk}$$

$$\phi(A,B,C,\lambda)=ABC-\lambda\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}-1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\phi'_A(A,B,C,\lambda)=BC+\lambda\frac{a}{A^2}=0\Rightarrow\frac{a}{A}=-\frac{ABC}{\lambda}\\ \phi'_B(A,B,C,\lambda)=AC+\lambda\frac{b}{B^2}=0\Rightarrow\frac{b}{B}=-\frac{ABC}{\lambda}\\ \phi'_c(A,B,C,\lambda)=AB+\lambda\frac{c}{C^2}=0\Rightarrow\frac{c}{C}=-\frac{ABC}{\lambda}\end{array}\right\}\Longrightarrow\sum=1\Longrightarrow-\frac{ABC}{\lambda}=\frac{1}{3}$$

$$3a=A,\ 3b=B,\ 3c=C \text{ esetén lesz minimális (geometria)}$$

<u>Megjegyzés:</u> Ehelyett a példa helyett lehet egy egyszerűbb síkháromszög alakú tartományon abszolút szélsőértéket keresni.

$\boxed{\text{5. példa}}$

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^3$ tér azon pontját, amelyre a tömegpontrenszer másodrendű nyomatéka minimális!

Megoldás:

Legyen az i-edik tömegpont $m_i>0$ és a tér $P_i(x_i,y_i,z_i)$ pontjában van. $(i=1,\ldots,n)$
Jelöljük $P_0(x,y,z)$-vel a keresett pontot (koordinátái ismeretlenek).
Legyen d_i a P_i pont P_0-tól való távolsága.

$$d_i^2=(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2$$

$$\Theta_i=m_id_i^2$$

$$\Theta(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}\Theta_i$$

$$\Theta(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}m_i\left\{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right\}\ \text{minimumát keressük}$$

$$\Theta'_x(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}m_i2(x-x_i)=2x\sum_{i=1}^{n}m_i-2\sum_{i=1}^{n}m_ix_i=0$$

$$\Theta'_y(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}m_i2(y-y_i)=2y\sum_{i=1}^{n}m_i-2\sum_{i=1}^{n}m_iy_i=0$$

$$\Theta'_z(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}m_i2(z-z_i)=2z\sum_{i=1}^{n}m_i-2\sum_{i=1}^{n}m_iz_i=0$$

$$x_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}\quad y_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}\quad z_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iz_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$$

$P_0(x_0,y_0,z_0)$ az n tömegpontból álló rendszer súlypontja.

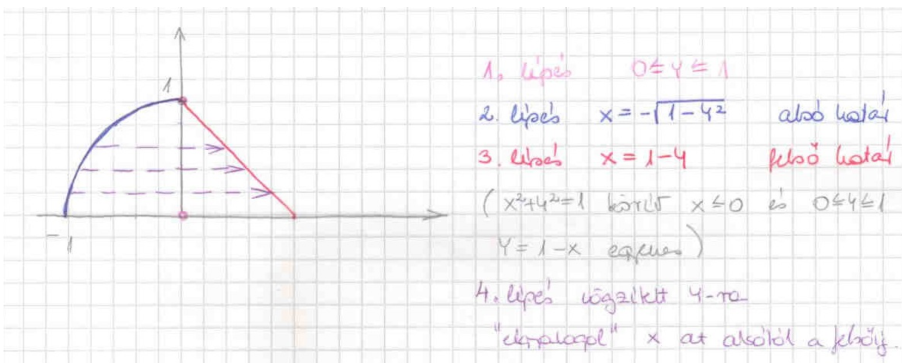
$$\Theta''(x,y,z)=\begin{bmatrix}2\sum_{i=1}^{n}m_i & 0 & 0\\ 0 & 2\sum_{i=1}^{n}m_i & 0\\ 0 & 0 & 2\sum_{i=1}^{n}m_i\end{bmatrix}, \text{ ez pedig pozitív definit.}$$

Monostory V./140.

Szemléltessük az alábbi egyenlőtlenségekkel meghatározott kétdimenziós tartományt:

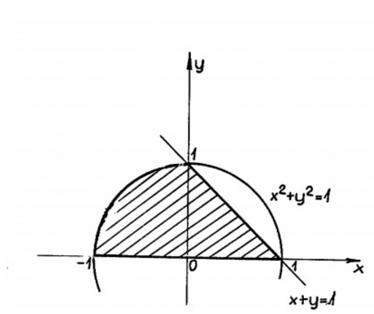
$$-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1-y$$
$$0 \leq y \leq 1$$

Megoldás:



1. ábra. 140. tartomány rajzolásának menete, Normáltartomány y tengelyre

1. lépés: $0 \leq y \leq 1$ kijelölése
2. lépés: $x = -\sqrt{1-y^2}$ alsó határ, $x^2 + y^2$ körív $x \leq 0$ és $0 \leq y \leq 1$ része
3. lépés: $x = 1 - y$ felső határ, az y=1-x egyenesből
4. lépés: rögzített y-ra "elgyalogol" az x az alsó határtól a felső határig



2. ábra. 140. Normáltartomány y tengelyre

Monostory V./143.

Szemléltessük az alábbi egyenlőtlenségekkel meghatározott kétdimenziós tartományt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \quad & r \quad \leq 2\sqrt{\cos 2\varphi} \\ -\frac{\pi}{4} < \quad & \varphi \quad < \frac{\pi}{4}, \quad \text{(ahol } r \text{ és } \varphi \text{ polárkoordináták)} \end{aligned}$$

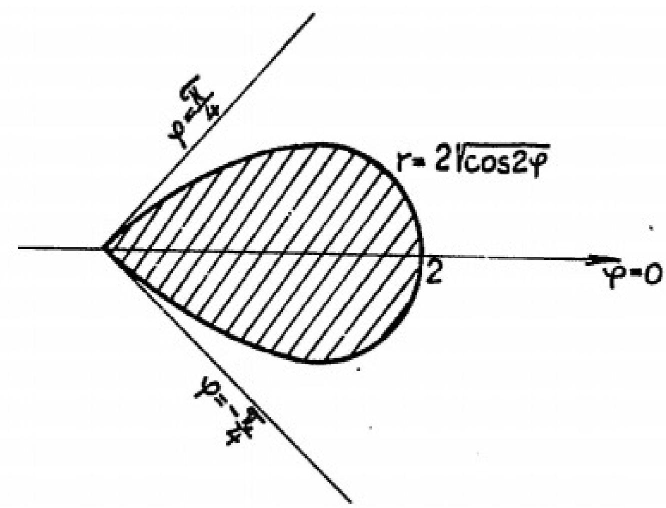
Megoldás:

1. lépés: $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$ szögtartomány kijelölése

2. lépés: $r = 0$ alsó határ

3. lépés: $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniszkáta felső határ

4. lépés: rögzített φ-re "elgyalogol" az r az alsó határtól a felső határig



3. ábra. 143. Normáltartomány φ-re

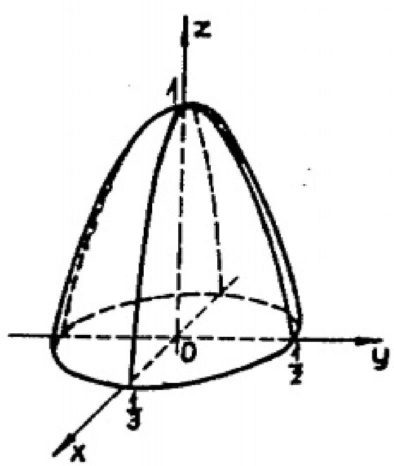
Monostory V./144.

Szemléltessük az alábbi egyenlőtlenségekkel meghatározott háromdimenziós tartományt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \quad & z & \leq 1 - 9x^2 - 4y^2 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{1-9x^2} \leq \quad & y & \leq \frac{1}{2}\sqrt{1-9x^2} \\ -\frac{1}{3} \leq \quad & x & \leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Megoldás:

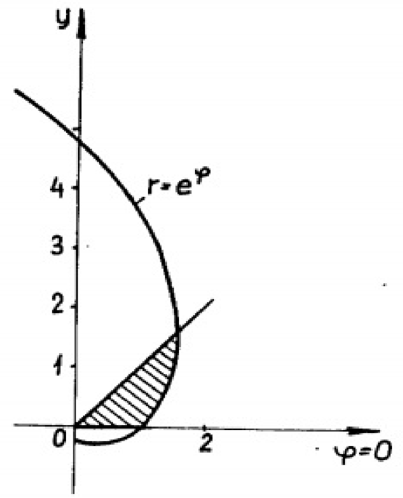
1. lépés: $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$ kijelölése az x-tengelyen
2. lépés: Az xy-síkon felrajzoljuk a $-\frac{1}{2}\sqrt{1-9x^2} = y$ alsó határt (az $\left((2y)^2 = 1 - 9x^2 \Longrightarrow \frac{x^2}{(\frac{1}{3})^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1\right)$ ellipszis része)
3. lépés: Az xy-síkon felrajzoljuk a $\frac{1}{2}\sqrt{1-9x^2} = y$ felső határt (az $\left((2y)^2 = 1 - 9x^2 \Longrightarrow \frac{x^2}{(\frac{1}{3})^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1\right)$ ellipszis része)
4. lépés: rögzített x-re "elgyalogol" az y az alsó határtól a felső határig
5. lépés: z alsó határa az xy sík
6. lépés: z felső határa a $z = 1 - 9x^2 - 4y^2$ (a síkmetszetek lefelé álló parabolák)
7. lépés: "elgyalogol" a z az alsó határtól a felsőig egy rögzített (x, y)-ra



4. ábra. 144. Normáltartomány az xy síkra

Monostory V./152.

Írjuk fel az alábbi zárt tartományt meghatározó egyenlőtlenségeket:



5. ábra. 152 Normáltartomány a φ-re

Megoldás:

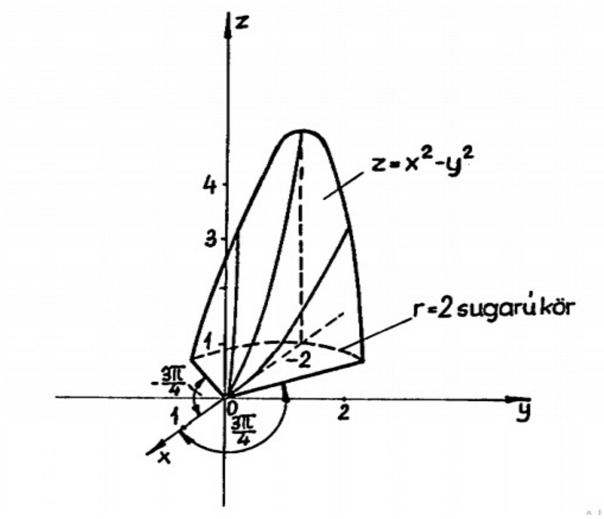
Polárkoordinátákban érdemes gondolkodni (normáltartomány φ-re):

1. lépés: Megállapítjuk a szögtartományt: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

2. lépés: Rögzítek egy φ-t és megnézem honnan hová "gyalogol" az r: az origóból a görbéig, azaz $0 \leq r \leq e^{\varphi}$

Monostory V./155.

Írjuk fel az alábbi zárt tartományt meghatározó egyenlőtlenségeket:



6. ábra. 155. Normáltartomány az (r, φ) síkra

Megoldás:

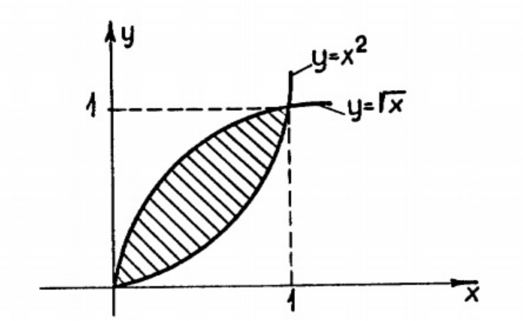
Hengerkoordinátákban érdemes gondolkodni ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$)

1. lépés: Megállapítjuk a szögtartományt: $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$
2. lépés: Rögzítek egy φ-t és megnézem honnan hová "gyalogol" az r: az origóból a körívig, azaz $0 \leq r \leq 2$
3. lépés: Rögzítek egy (r, φ)-t és megnézem honnan hová "gyalogol" a z: az (x, y) síktól a felületig, azaz $0 \leq z \leq x^2 - y^2 = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = r^2\cos 2\varphi$

Normáltartomány az (r, φ) síkra.

$\boxed{\text{Monostory V./161.}}$ Ez a példa szerepelt az előadáson is.

Határozzuk meg a $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény kettős integrálját a következő tartományon!



Megoldás:

1.megoldás: x tengelyre normáltartomány

$$0 \le x \le 1$$
$$x^2 \le y \le \sqrt{x}$$

$$\iint_T x^2 + y^2\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 + y^2\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 x^2\sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x})^3}{3} - x^2x^2 - \frac{(x^2)^3}{3}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3\cdot\frac{5}{2}} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{3\cdot 7}\right]_0^1 = \frac{1}{\frac{7}{2}} + \frac{1}{3\cdot\frac{5}{2}} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 7}$$

2.megoldás: y tengelyre normáltartomány

$$0 \le y \le 1$$
$$y^2 \le x \le \sqrt{y}$$

$$\iint_T x^2 + y^2\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} x^2 + y^2\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{y^2}^{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{(\sqrt{y})^3}{3} + y^2\sqrt{y} - \frac{(y^2)^3}{3} - y^2y^2\,dy = \int_0^1 \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + y^{\frac{5}{2}} - \frac{y^6}{3} - y^4\,dy =$$

$$= \left[\frac{y^{\frac{5}{2}}}{3\cdot\frac{5}{2}} + \frac{y^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{y^7}{3\cdot 7} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3\cdot\frac{5}{2}} + \frac{1}{\frac{7}{2}} - \frac{1}{3\cdot 7} - \frac{1}{5}$$

$\boxed{\text{1. példa}}$

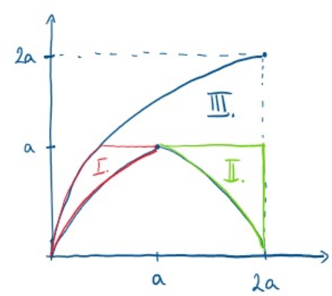
Cserélje fel az integrálás sorrendjét:

$$\int_0^{2a}\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\ a>0$$

Megoldás:

<u>1.lépés:</u> a tartomány felrajzolása (x tengelyre normáltartomány)

$$\begin{aligned} 0 \leq \quad & x \quad \leq 2a \\ \sqrt{2ax-x^2} \leq \quad & y \quad \leq \sqrt{2ax} \end{aligned}$$



y alsó határa: $\sqrt{-(x-a)^2+a^2} = y \Longrightarrow a^2 = (x-a)^2+y^2$ kör része

y felső határa $y=\sqrt{2ax} \Longrightarrow x = \frac{y^2}{2a}$

<u>2.lépés:</u> y tengelyre részekre bontással lesz normáltartomány

I.

$$\begin{aligned} 0 \leq \quad & y \quad \leq a \\ \frac{y^2}{2a} \leq \quad & x \quad \leq a-\sqrt{a^2-y^2} \end{aligned}$$

Ugyanis $a^2=(x-a)^2+y^2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{a^2-y^2}+a$. Ebből a negatív lesz jó, mert x a-nál kisebb most.

II.

$$\begin{aligned} 0 \leq \quad & y \quad \leq a \\ a+\sqrt{a^2-y^2} \leq \quad & x \quad \leq 2a, \ \text{most a körív másik része kell} \end{aligned}$$

III. rész:

$$\begin{aligned} a \leq \quad y \quad &\leq 2a \\ \frac{y^2}{2a} \quad \leq \quad x &\leq 2a \end{aligned}$$

Így az integrál:

$$\iint\limits_T f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{T_I} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{T_{II}} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{T_{III}} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^a \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^a \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx\,dy + \int_a^{2a} \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,dx\,dy$$

$\boxed{\text{2. példa}}$

Számítsuk ki:

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 y \cos x^3 \, dx \, dy$$

Megoldás:

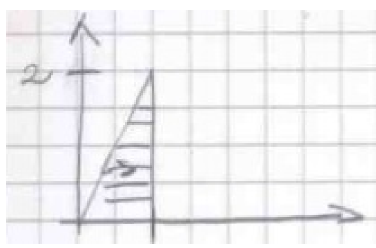
Nem lehet x szerint zárt alakban integrálni!

Ötlet: y szerint lehet, menjünk a kisebb ellenállás irányába, integráljunk először y szerint.

Ehhez fel kell cserélni az integrálás sorrendjét!

Eredeti határok:

$$\begin{aligned} 0 \le &\quad y \quad \le 2 \\ \frac{y}{2} \le &\quad x \quad \le 1 \end{aligned}$$



Új határok:

$$\begin{aligned} 0 \le &\quad x \quad \le 1 \\ 0 \le &\quad y \quad \le 2x \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 y \cos x^3 \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{2x} y \cos x^3 \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2x} \cos x^3 \, dx =$$

$$= \int_0^1 2x^2 \cos x^3 \, dx = \frac{2}{3} \int_0^1 3x^2 \cos x^3 \, dx = \frac{2}{3} \left[\sin x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} \sin 1$$

Micsoda mázli:)

$\boxed{\text{3. példa}}$

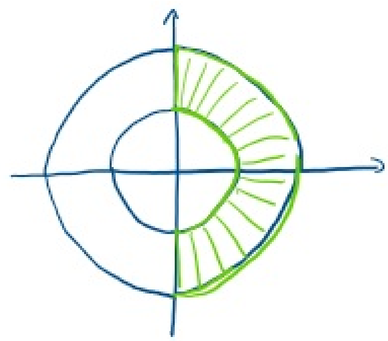
Számítsuk ki:

$$\iint_T \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dT$$

T:

$$1 \le x^2+y^2 \le 4,\; x \ge 0$$

Megoldás:



1. Nehéz x vagy y tengelyre normáltartományként felírni
2. Úgysem fogom tudni integrálni $\Longrightarrow$ válasszunk polárt!

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 1 \le r \le 2 \end{array}\right\} \text{(integrál sorrendje mindegy)}$$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$J = {\color{red} r}$ a Jacobi determináns

$$\iint_T \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dT = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 {\color{red} r}\sin r\,dr\,d\varphi =$$

(parciális integrálás: $u = r,\ u' = 1,\ v' = \sin r,\ v = -\cos r$)

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left([-r\cos r]_1^2 - \int_1^2 -\cos r\,dr\right)d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [-r\cos r]_1^2 + [\sin r]_1^2\,d\varphi =$$

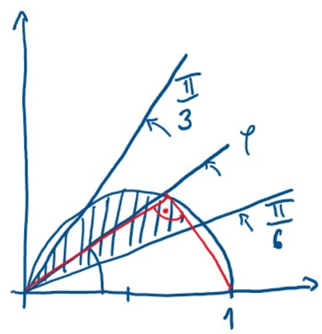
$$= [\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\,[-r\cos r + \sin r]_1^2 = \pi\,[-r\cos r + \sin r]_1^2$$

$\boxed{\text{4. példa}}$

Alakítsa kétszeres integrállá:

$$\iint_T f(x,y)\,dT$$

T:



Megoldás:

1. Kör $\longmapsto$ polárkoordináták

$$\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$$

2. Választunk tetszőleges φ-t, honnan hová "gyalogol" r?

Geometria: r_{max} a piros derékszögű háromszögből:

$$\frac{r_{max}}{1} = \cos\varphi \Longrightarrow 0 \le r \le \cos\varphi$$

3.

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$J = r$

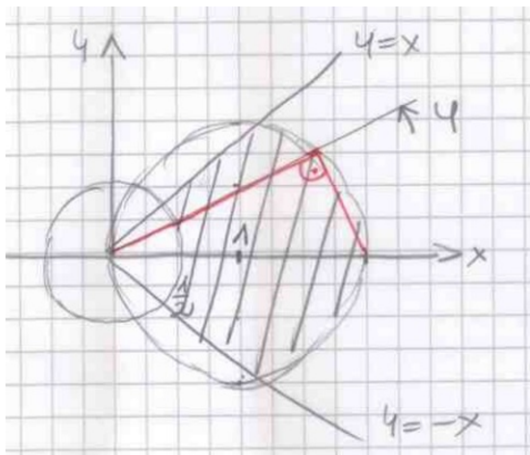
$$\iint_T f(x,y)\,dT = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\cos\varphi} r\, f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr\,d\varphi$$

$\boxed{\text{5. példa}}$

Alakítsa kétszeres integrállá:

$$\iint_T f(x,y)\,dT$$

T:



Megoldás:

1. Kör $\longmapsto$ polárkoordináták

$$-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$$

2. Választunk tetszőleges φ-t, honnan hová "gyalogol" r?

r_{max} a piros derékszögű háromszögből:

$$r_{max} = 2\cos\varphi \Longrightarrow \frac{1}{2} \le r \le 2\cos\varphi$$

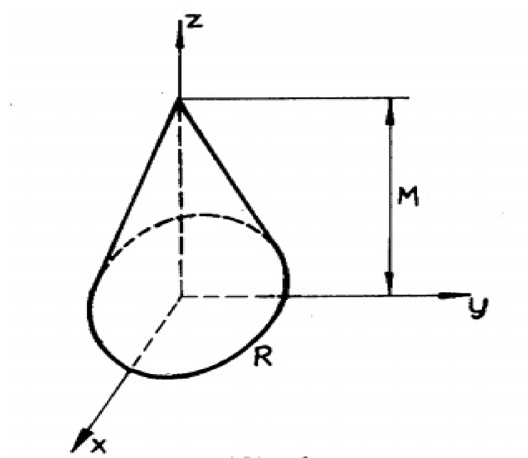
$$\iint_T f(x,y)\,dT = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{2}}^{2\cos\varphi} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr\,d\varphi$$

$\boxed{\text{Monostory V./227.}}$

Számítsuk ki az alábbi integrált:

$$\iiint\limits_V x^2 + y^2 \, dV$$

V az R alapkörsugarú körkúp:



Megoldás:

Hengerkoordinátákat használunk (kör alap és 3 dim.)

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

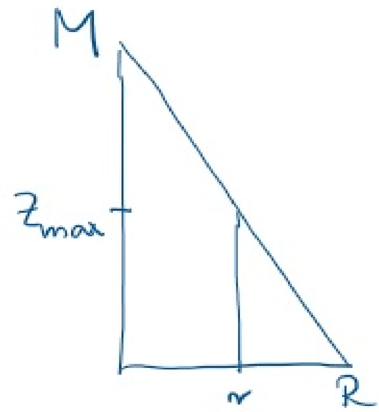
$z = z$

$J = r$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le R \end{array}\right\} (x, y) \text{ síkon a kör (integrálás sorrendje mindegy)}$$

Válasszunk tetszőleges r, φ-t és nézzük meg honnan hová "gyalogol" a z.

Kirajzoljuk a φ szögnél lévő alkotót:



Hasonló háromszögek:

$$\frac{z_{max}}{R-r} = \frac{M}{R} \Longrightarrow z_{max} = (R-r)\frac{M}{R}$$

$$0 \le z \le (R-r)\frac{M}{R}$$

$$\iiint\limits_V x^2 + y^2 \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{(R-r)\frac{M}{R}} r \cdot r^2 \, dz \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \, [z]_0^{(R-r)\frac{M}{R}} \, dr \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R Mr^3 - \frac{M}{R} r^4 \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{Mr^4}{4} - \frac{Mr^5}{R \cdot 5} \right]_0^R d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{MR^4}{4} - \frac{MR^4}{5} \, d\varphi = 2\pi \left(\frac{MR^4}{20} \right) = \pi \frac{MR^4}{10} = \frac{R^2 \pi M}{3} \cdot \frac{3}{10} \cdot R^2 = V \cdot \frac{3}{10} \cdot R^2$$

(Később még megbeszéljük, hogy mit jelent)
