Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

Dr. Pilászy György

# Digitális technika 1
# 03. előadás

(Logikai függvények grafikus minimalizálása)

Lektorálta: Dr. Horváth Tamás

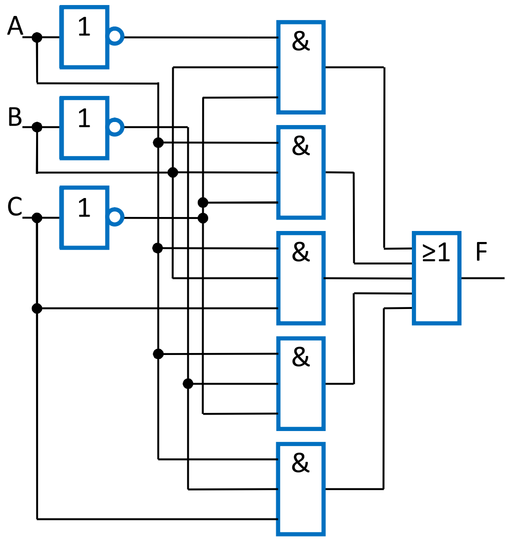
# Logikai függvények minimalizálása

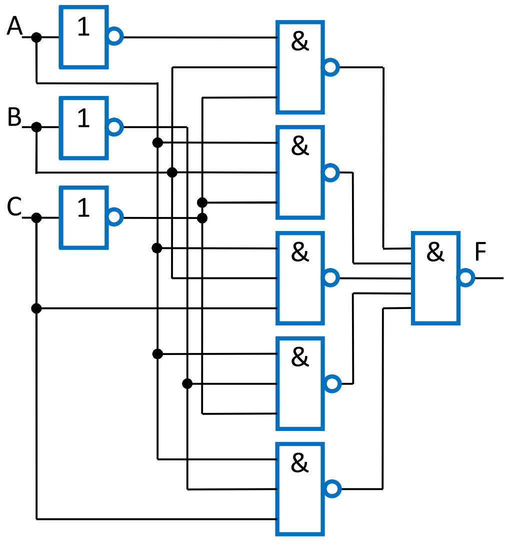
A gyakorlati megvalósítás során fontos az építőelem készlet optimális megválasztása és a felhasznált alkatrészek számának minimalizálása. Megfigyelhetjük, hogy minél kevesebb műveletet tartalmaz az algebrai alak, annál kevesebb kapubemenetet igényel a megvalósítás elvi logikai rajza. A továbbiakban az egyes kiadódó megoldások bonyolultságának mérőszámaként az elvi logikai rajzon található kapubemenetek darabszámát fogjuk használni úgy, hogy a bemenő jelek útjába épített esetleges inverter áramköröket nem számítjuk bele. Ennek a megkötésnek az a gyakorlati oka, hogy sok esetben a bemenő jelek negáltan, vagy negáltan és ponáltan is rendelkezésre állnak, emiatt nem minden esetben szükséges az elvi rajzon feltüntetett inverterek tényleges beépítése. Azt is megfigyelhetjük, hogy az eddig felrajzolt logikai hálózatokban az invertereket leszámítva két logikai kapuszinten keresztül jutottunk el a kimenetig. Diszjunktív függvényalak esetén az első szinten ÉS, a második szinten VAGY művelettel; konjunktív függvényalak az első szinten VAGY, a második szinten ÉS művelettel valósul meg. Az ilyen tulajdonságú logikai hálózatokat **kétszintű logikai hálózatoknak** nevezzük. A továbbiakban ismertetendő tervezési módszerek ilyen kétszintű hálózatok szisztematikus egyszerűsítésével foglalkoznak.

Egy barátunknak három lánya van (Anna, Bea és Cili). Karácsonyi meglepetésként szeretnénk megvalósítani a lányok babaházának világítását az alábbiak szerint. Mindhárom lánynak saját kapcsolója van a világítás működtetéséhez (A, B, C). A kapcsolók bekapcsolt állapotát „1”, kikapcsolt állapotát „0” logikai értékkel jelöljük. A babaház világítása üzemel (F=1), ha Anna és Cili kikapcsolta amikor Bea bekapcsolta a világítást; vagy Anna és Bea bekapcsolta de Cili nem; vagy mindhárman bekapcsolták; vagy Anna bekapcsolta amikor Bea és Cili nem; vagy Anna és Cili bekapcsolta amikor Bea nem.

A szöveges specifikáció elég egyértelmű, ezalapján felírhatjuk az F logikai függvény algebrai alakját. A könnyebb áttekinthetőség érdekében a logikai változókat sorba rendezve írjuk fel a logikai szorzatokban. A felírt függvényalakot fel is rajzolhatjuk, és úgy tűnik, készen vagyunk a megvalósítással.

$$F(A,B,C) = \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C} + A\cdot B\cdot \overline{C} + A\cdot B\cdot C + A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C} + A\cdot \overline{B}\cdot C$$




A kapott egyenletből vagy a rajzból meghatározhatjuk a hálózat kapubemeneteinek számát az előbb leírtak szerint: Az első kapuszinten 5x3 bemenet + a második kapuszinten 1x5 bemenet = 20 bemenet.

Próbáljuk meg a tanult algebrai egyszerűsítéseket alkalmazni az F logikai függvényre:

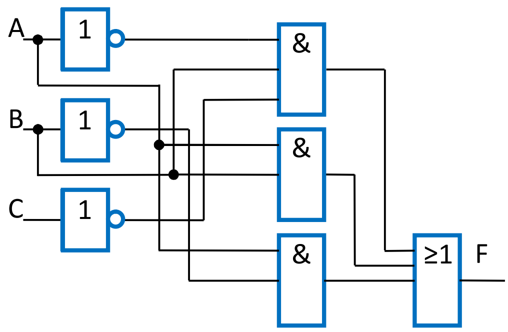
$$F(A,B,C) = \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C} + (A\cdot B\cdot \overline{C} + A\cdot B\cdot C) + (A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C} + A\cdot \overline{B}\cdot C) =$$

$$= \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C} + (A\cdot B\cdot (\overline{C}+C)) + (A\cdot \overline{B}\cdot(\overline{C}+C)) = \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C} + A\cdot B + A\cdot \overline{B}$$

A kapott (rész) eredményt akár fel is rajzolhatjuk.

Figyeljük meg, hogy a bemenetek száma 10-re csökkent. A második kapuszinten mindössze három szorzatot kell összekapcsolni a korábbi öt helyett.

$$F(A,B,C) = \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C} + A\cdot B + A\cdot \overline{B}$$



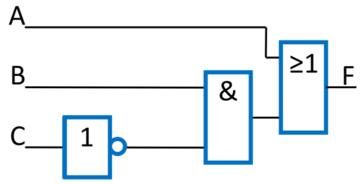

A módszert tovább folytathatjuk:

$$F(A,B,C) = \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C} + A\cdot B + A\cdot \overline{B} = \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C} + A\cdot(\overline{B}+B) = \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C} + A$$

Ez az eredmény akár végeredménynek is tűnhet 5 bemenettel, azonban tovább egyszerűsíthető. Ha ugyanis az eredeti alakban szereplő $A\cdot B\cdot \overline{C}$ kifejezést még egyszer hozzávesszük, akkor további egyszerűsítés végezhető el az alábbiak szerint:

$$F(A,B,C) = A\cdot B\cdot \overline{C} + \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C} + A = B\cdot \overline{C}\cdot(A+\overline{A}) + A = B\cdot \overline{C} + A$$

Ez az alak már tovább nem egyszerűsíthető és mindössze 4 kapubemenetet igényel a megvalósítása.




Ez a bevezető példa is jól szemlélteti, hogy a komoly mérnöki munka során gyakran nem csupán egyetlen intuitív megoldásra törekszünk, hanem szisztematikus módon szeretnénk a lehetséges megoldások közül a számunkra optimális megoldást megtalálni. Jelen esetben az optimum a legkevesebb kapubemenetet igénylő megoldás.

Az egyszerűsítés során a logikai hálózat mintermeiből indultunk ki és kiemeléssel, valamint az $X+\overline{X}=1$ azonosság felhasználásával vontunk össze logikai szorzatokat. Az ilyen összevonható mintermeket **szomszédos mintermeknek** nevezzük. Az összevonást tehát úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az összes szomszédos mintermet megkeressük, párba válogatjuk. A párból elhagyjuk a különböző logikai változót. pl. $m^3_6$ és $m^3_7$ mintermek vagy az $m^3_4$ és $m^3_5$ mintermek esetében:

$$A\cdot B\cdot \overline{C} + A\cdot B\cdot C = A\cdot B\cdot(\overline{C}+C) = A\cdot B$$

$$A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C} + A\cdot \overline{B}\cdot C = A\cdot \overline{B}\cdot(\overline{C}+C) = A\cdot \overline{B}$$

Az így kapott eredményben további párokat keresünk:

$$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A \cdot (B + \overline{B}) = A$$

Az így kapott, tovább nem egyszerűsíthető tagot **prímimplikánsnak** nevezzük. Ha sikerült meghatároznunk az összes prímimplikánst, akkor nincs más dolgunk, mint kiválasztani azt a minimális mennyiséget, amely az előírt függvény összes mintermjét lefedi.

A bemutatott módszer természetesen maxermek esetén is alkalmazható. Nézzük pl.: az $M^3_7$ és $M^3_6$ maxtermeket:

$$(A+B+C) \cdot (A+B+\overline{C}) = ((A+B)+C) \cdot ((A+B)+\overline{C}) = (A+B)+(A+B) \cdot \overline{C} + (A+B) \cdot C + C \cdot \overline{C} =$$

$$(A+B)+(A+B) \cdot (C+\overline{C}) = A+B$$

A következőkben két szisztematikus módszert, a grafikus minimalizálást, valamint a számjegyes minimalizálást ismertetjük.

## *Grafikus minimalizálás*

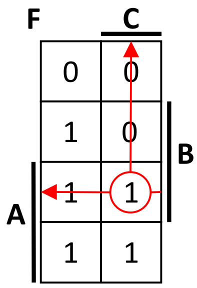
A bevezető részben láttuk, hogy milyen fontos a szomszédos mintermek megtalálása. Ehhez vegyük a kiindulásként megadott függvény igazság táblázatát. Rendezzük át az egyes oszlopokat a szomszédosság megtartásával az alábbiak szerint:

| **minterm index** | **A** | **B** | **C** | **F** |
|---|---|---|---|---|
| $m^3_0$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $m^3_1$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $m^3_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $m^3_3$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $m^3_4$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $m^3_5$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $m^3_6$ | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $m^3_7$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

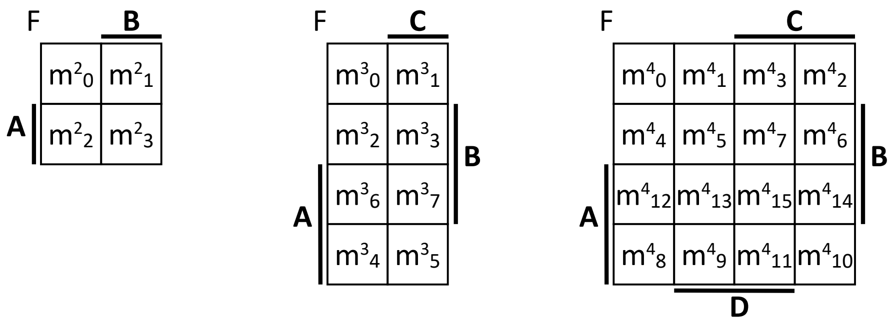
| **C** / **AB** | **0** | **1** |
|---|---|---|
| **00** | 0 | 0 |
| **01** | 1 | 0 |
| **11** | 1 | 1 |
| **10** | 1 | 1 |

Megfigyelhetjük, hogy az új táblázat „cellái” kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők az eredeti igazságtábla celláinak, azonban az új ábrázolásban az egymás mellett, egymás alatt és felett lévő cellák szomszédos tulajdonságúak, vagyis pontosan egy logikai változó értékében különböznek. A szomszédosság a táblázat legfelső és legalsó sora között is fennáll. Egyszerűsítsük ennek a táblázatnak a peremezését. Jelölje a logikai változó „1” értékeihez tartozó cellákat folytonos vonalszakasz. A következő ábrán ezt láthatjuk. Ennek a táblázatnak a továbbiakban a Karnaugh tábla nevet adjuk.

A Karnaugh tábla bármelyik cellájához meghatározhatjuk a hozzá tartozó bemeneti kombináció értékét, ha a cellát függőlegesen és vízszintesen kivetítjük a peremezésre. Ahol a peremezésnél a logikai változó folytonos vonalszakasszal van jelöve, ott „1”, ahol nincs ilyen vonal, ott „0” értékkel szerepel.

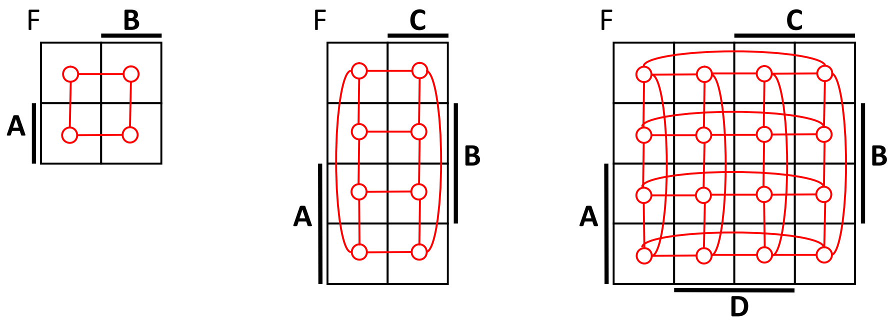



Például a baloldali táblában bekarikázott cellához az ABC változók 111 értéke tartozik. Ilyen módon meghatározhatjuk a háromváltozós logikai függvény mintermjeinek helyét a fenti Karnaugh táblában. A fenti gondolatmenethez hasonlóan alakíthatunk ki kettő és négy változós Karnaugh táblákat is. A négy változós esetben a táblázat bal- és jobb széle is szomszédos helynek tekintendő ép úgy, mint a táblázat legfelső és legalsó sora.




Kettő-, három- és négyváltozós Karnaugh táblák egy lehetséges peremezése és a mintermek elhelyezkedése

Az alábbi ábrán bejelöltük az összes szomszédos helyet mindhárom bemutatott Karnaugh tábla esetében

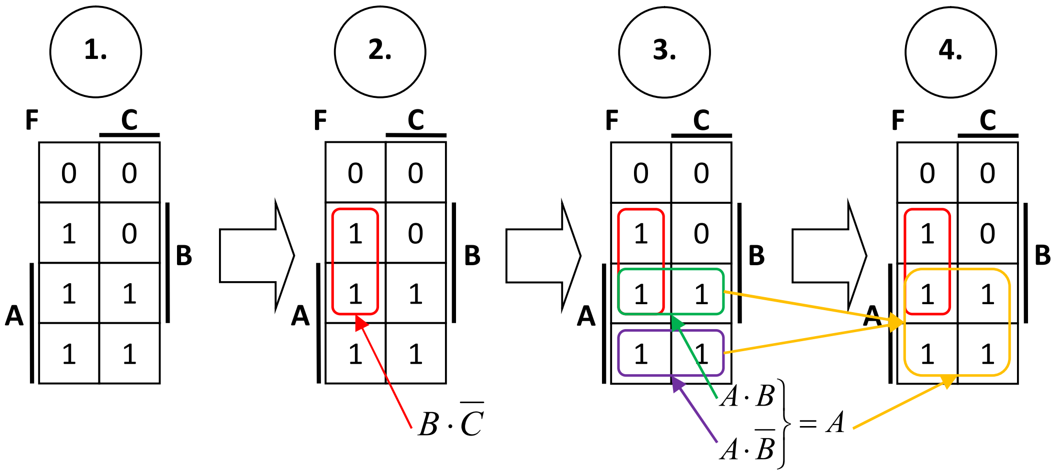



Szomszédos helyek különböző méretű Karnaugh táblákban

Ezek után fogalmazzuk meg a grafikus függvényminimalizálási eljárás lépéseit teljesen specifikált logikai hálózat esetére.

1. Első lépésként kitöltjük a függvényhez tartozó Karnaugh táblát. Az egyszerűsítésben csak azok a mintermek vesznek részt, melyeket a logikai függvény tartalmaz.
2. Keressünk „1” értékű olyan cellát, melynek a szélein is összefüggőnek tekintett Karnaugh táblán belül van közvetlen „1”-est tartalmazó szomszédja. Ha ezeket a szomszédos cellákat egy közös karikázással összevonunk, akkor „kettes” hurkokat kapunk. Ezek a kettes hurkok olyan szorzatoknak felelnek meg, melyek két szomszédos minterm összevonásából keletkeztek. Az összevonás során a két mintermet megkülönböztető logikai változó kiegyszerűsödik.

   Például az alábbi ábra 2. lépésében jelölt kettes hurok felírása során az A változó „kiesik” a jelölt ketteshurokhoz tartozó algebrai alak: $B \cdot \overline{C}$
3. Képezzük annyi kettes hurkot, hogy minden „1” érték lefedésre kerüljön
4. A ketteshurkokat celláknak tekintve próbáljunk újabb hurkokat képezni. Ezek az eredeti táblára nézve négyeshurkok lesznek. Egy logikai változó kiegyszerűsítéséhez két azonos méretű hurkot kell összevonnunk, ezért az összekarikázott mintermek száma 1, 2, 4, 8… mindig kettő egész kitevőjű hatványának megfelelő számú kell legyen. Másként fogalmazva n darab változó elhagyásához $2^n$ darab szomszédos mintermet kell a huroknak lefednie. A maximális méretű (tovább már nem bővíthető) hurkokat **prímimplikánsnak** nevezzük. Azokat a hurkokat, amelyek még nem érték el a legnagyobb méretüket **implikánsnak** nevezzük.




A logikai függvény diszjunktív alakja akkor lesz a legegyszerűbb, ha a lehető legkevesebb prímimplikánst tartalmazza. Az algebrai alak akkor teljesen egyenértékű a kiindulási függvénnyel, ha a diszjunktív kanonikus algebrai alak minden egyes mintermjét legalább egy prímimplikáns helyettesíti (lefedi).

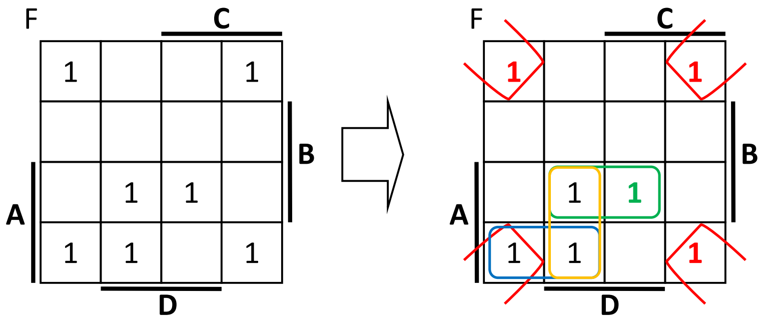
A fenti példákban a legegyszerűbb kétszintű diszjunktív algebrai alak tehát:

$$F = B \cdot \overline{C} + A$$

A kapott eljárást általánosíthatjuk nagyobb Karnaugh táblákra is. A Karnaugh táblán az „1”-est tartalmazó cellákból a lehető legkevesebb prímimplikánst kell kialakítani úgy, hogy minden „1”-est tartalmazó cella legalább egy prímimplikánsban szerepeljen. Egyes esetekben előfordulhat, hogy több, egyszerűség szempontjából egyenértékű algebrai alak is képezhető.

Lehet olyan „1”-est tartalmazó cella, melyek az összevonás során csak egyetlen prímimplikáns fed le. Ezt a mintermet **megkülönböztetett mintermnek**, az őt lefedő prímimplikánst pedig **lényeges prímimplikánsnak** nevezzük. Ha egy feladatnak több egyenértékű megoldása adódik, akkor a lényeges prímimplikánsok ugyanazok minden megoldás esetében.

A most bevezetett fogalmak szemléltetésére tekintsük az alábbi négyváltozós logikai függvényt. Jelöljük be és írjuk fel algebrai alakban az összes mintermből képezhető prímimplikánst. Jelöljük meg ezek közül a lényegeseket.




| | Algebrai alak | Lényeges |
|---|---|---|
| a) | $\overline{B}\cdot\overline{D}$ | ✓ |
| b) | $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$ | |
| c) | $A\cdot\overline{C}\cdot D$ | |
| d) | $A\cdot B\cdot D$ | ✓ |

A fenti ábrán vastag betűvel jelöltük a megkülönböztetett mintermeket ($m^3_0$, $m^3_2$, $m^3_{10}$, $m^3_{15}$). A táblázatban az algebrai alakok felírása mellett jelöltük, hogy melyek a lényeges prímimplikánsok ((a) és (d) jelű prímimplikánsok). Figyeljük meg, hogy ez a két lényeges prímimplikáns az $m^3_9$ kivételével az összes előírt mintermet lefedi. Emiatt ennek a függvénynek két egyenértékű legegyszerűbb kétszintű diszjunktív alakja van:

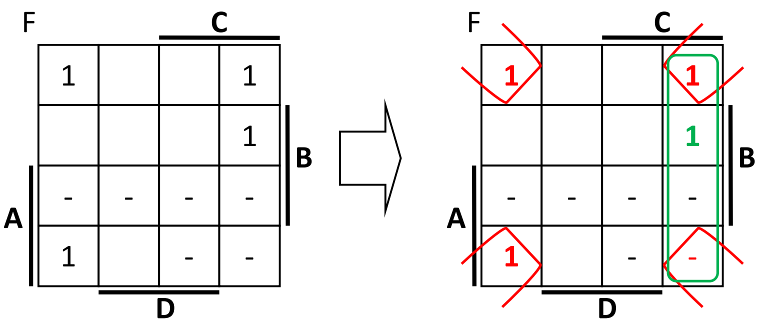
$$F=\overline{B}\cdot\overline{D}+A\cdot B\cdot D+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} \qquad \text{és az} \qquad F=\overline{B}\cdot\overline{D}+A\cdot B\cdot D+A\cdot\overline{C}\cdot D$$

Megfigyelhetjük, hogy mindkét megoldásban szerepel az (a) és (d) jelű lényeges prímimplikáns, de az $m^3_9$ minterm fedéséhez a (b) vagy (c) prímimplikánsok egyikére is szükség van.

## *Nem teljesen specifikált logikai függvények grafikus minimalizálása*

Az előző pontban bemutatott eljárás során azt feltételeztük, hogy a kiindulásként megadott logikai függvény teljesen specifikált. Most megvizsgáljuk, hogy az előzőleg kimunkált módszer milyen kiegészítésekkel tehető alkalmassá közömbös bejegyzéseket is tartalmazó logikai függvények egyszerűsítésére.

Példaként nézzük az alábbi nem teljesen határozott logikai függvényt. Képezzünk a specifikált mintermekből kiindulva prímimplikánsokat úgy, hogy a közömbös bejegyzéseket is belevesszük, ha ettől kedvezőbb méretű (kevesebb változót tartalmazó) lesz. A többi közömbös bejegyzést hagyjuk lefedetlenül.



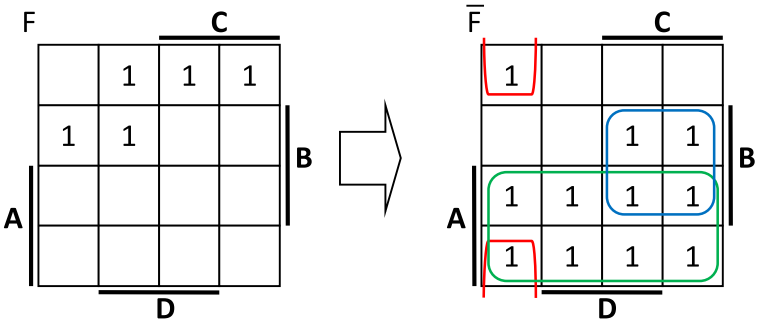
A keresett legegyszerűbb kétszintű diszjunktív függvényalak tehát:

$$F = \overline{B}\cdot\overline{D} + C\cdot\overline{D}$$

Figyeljük meg, hogy a minimalizálás során hogyan rögzültek a közömbös bejegyzések. A végeredményünk már teljesen határozott, azaz a megvalósított hálózat már nem tartalmaz közömbös bejegyzéseket. Azon közömbösök, amelyeket belevettünk valamelyik prímimplikáns kialakításában „1" logikai értékkel kerültek rögzítésre, a többiek pedig „0" értékűek lettek. A legegyszerűbb kétszintű alak előállításakor a lefedés ellenőrzésekor csak a határozott bejegyzéseket kell ellenőrizni, a közömbös bejegyzéseket nem szükséges lefedni prímimplikánsokkal.

## *Konjunktív függvényalak grafikus minimalizálása*

A következőkben arra keressük a választ, hogy hogyan lehet az eddig megismert grafikus minimalizálást felhasználni maxtermek minimalizálására, a legegyszerűbb kétszintű konjunktív alak meghatározására. Vegyük a következő példát. Adott az F teljesen specifikált logikai függvény Karnaugh táblája. Próbáljuk meg F negáltjának a grafikus minimalizálását a tanult módszerrel.



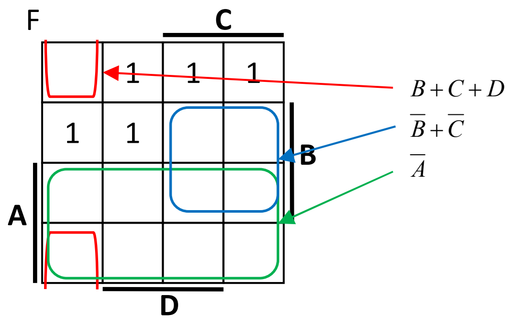

$$\overline{F} = A + B\cdot C + \overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$$

Alkalmazzuk a De-Morgan szabályt a kapott algebrai alakra, először a VAGY műveletekre, majd a zárójeleken belüli ÉS műveletekre:

$$F = \overline{A + B\cdot C + \overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}} = \overline{(A)}\cdot\overline{(B\cdot C)}\cdot\overline{(\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D})} =$$

$$F = \overline{A}\cdot(\overline{B}+\overline{C})\cdot(B+C+D)$$

Figyeljük meg, hogy ezt az eredményt közvetlenül is kiolvashatjuk a Karnaugh táblázatból, ha a prímimplikánsokat a maxtermekből képezzük, majd a tábla peremezését fordítva értelmezzük. A fordított értelmezés ebben az esetben azt jelenti, hogy a peremezésen folytonos vonallal jelölt cellákhoz tartozik a konjunktív alakban a negált változó, míg a vonallal nem jelölt cellákhoz a ponált változó.

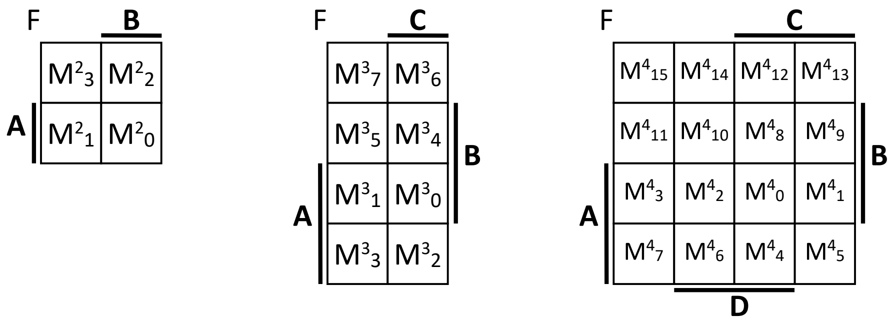



Maxtermekből képzett prímimplikánsok kiolvasása

Általánosságban elmondhatjuk, hogy ha egy adott probléma legegyszerűbb kétszintű megoldását keressük, akkor érdemes mind a diszjunktív, mind a konjunktív alakot meghatározni, majd a kettő közül a kevesebb bemenetszámú megoldást választani.

Amennyiben a feladat során maxterm indexek állnak rendelkezésre, úgy fontos felhívni a figyelmet, hogy ugyanazon decimális számú index teljesen más cellát azonosít, mint a mintermeknél láttuk. Ennek oka az indexképzés során felhasznált bináris szám képzésében keresendő. Ha például egy négy változós logikai függvény tartalmazza a 0. indexű mintermet, akkor Karnaugh tábla bal felső sarkába „1” értéket írunk, míg, ha egy függvény tartalmazza a 15. indexű maxtermet, akkor „0” értéket írunk a Karnaugh tábla bal felső sarkába.

A könnyebb érthetőség érdekében az alábbiakban megadjuk, hogy a korábban ismertetett peremezés esetén hol helyezkednek el az egyes maxtermek a kettő-, három-, és négy változós Karnaugh táblában.




Maxterm indexek elhelyezkedése a Karnaugh táblában a megadott peremezés mellett

## Ötváltozós függvények grafikus minimalizálása

Az eddigiekben bemutattuk kettő, három, illetve négyváltozós függvények grafikus minimalizálását. Négynél több változó esetén a szomszédosságok ábrázolása bonyolultabbá válik. Az alábbiakban két elrendezést mutatunk ötváltozós függvények grafikus minimalizálásához.

Az első megoldás kétdarab négyváltozós tábla használata úgy, hogy az egyik tábla minden bejegyzéséhez az ötödik változó ponált értékeit, a másikhoz pedig az ötödig változó negált értékeit rendeljük. Ebben az elrendezésben a két táblán belül a tanult eljárás szerint képezhetünk prímimplikánsokat, majd a két táblát „gondolatban" egymásra helyezve a döféspontok között is összevonhatunk azonos méretű hurkokat (pl.: $m^5_0$- $m^5_8$- $m^5_1$- $m^5_9$) . Ezt az elrendezést szemlélteti a következő ábra.

| F | | | C | C | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $m^5_{0}$ | $m^5_{2}$ | $m^5_{6}$ | $m^5_{4}$ | |
| | $m^5_{8}$ | $m^5_{10}$ | $m^5_{14}$ | $m^5_{12}$ | B |
| A | $m^5_{24}$ | $m^5_{26}$ | $m^5_{30}$ | $m^5_{28}$ | B |
| A | $m^5_{16}$ | $m^5_{18}$ | $m^5_{22}$ | $m^5_{20}$ | |
| | | D | D | | |

| | | | C | C | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $m^5_{1}$ | $m^5_{3}$ | $m^5_{7}$ | $m^5_{5}$ | |
| | $m^5_{9}$ | $m^5_{11}$ | $m^5_{15}$ | $m^5_{13}$ | B |
| A | $m^5_{25}$ | $m^5_{27}$ | $m^5_{31}$ | $m^5_{29}$ | B |
| A | $m^5_{17}$ | $m^5_{19}$ | $m^5_{23}$ | $m^5_{21}$ | |
| | | D | D | | |
| | E | E | E | E | |

Ötváltozós függvény grafikus minimalizálása két-négyváltozós Karnaugh táblával

A két táblát egymás mellé is illeszthetjük, de ekkor az ötödik változót a szomszédosságok miatt meg kell osztani. Emiatt a tábla függőleges középvonalára nézve szimmetrikusan elhelyezkedő mintermek is szomszédosak lesznek (pl.: $m^5_1$- $m^5_5$). Egy lehetséges ötváltozós elrendezést mutat az alábbi ábra.

| F | | | D | D | D, C | D, C | C | C | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $m^5_{0}$ | $m^5_{1}$ | $m^5_{3}$ | $m^5_{2}$ | $m^5_{6}$ | $m^5_{7}$ | $m^5_{5}$ | $m^5_{4}$ | |
| | $m^5_{8}$ | $m^5_{9}$ | $m^5_{11}$ | $m^5_{10}$ | $m^5_{14}$ | $m^5_{15}$ | $m^5_{13}$ | $m^5_{12}$ | B |
| A | $m^5_{24}$ | $m^5_{25}$ | $m^5_{27}$ | $m^5_{26}$ | $m^5_{30}$ | $m^5_{31}$ | $m^5_{29}$ | $m^5_{28}$ | B |
| A | $m^5_{16}$ | $m^5_{17}$ | $m^5_{19}$ | $m^5_{18}$ | $m^5_{22}$ | $m^5_{23}$ | $m^5_{21}$ | $m^5_{20}$ | |
| | | E | E | | | E | E | | |

Ötváltozós Karnaugh tábla egy másik lehetséges elrendezése