Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

Dr. Pilászy György

Digitális technika 1
04. előadás

(Számjegyes minimalizálás)

Lektorálta: Dr. Horváth Tamás

Számjegyes minimalizálás (Quine-McCluskey módszer)

Számjegyes minimalizálás során a logikai függvény indexes ábrázolásából indulunk ki, az összevonáshoz szükséges szomszédossági előírások teljesülését az indexek alapján vizsgáljuk. Határozzuk meg, hogy milyen szabályok egyidejű teljesülése esetén tekinthető két minterm szomszédosnak.

a) Két minterm szomszédos, ha indexeik különbsége kettő egész kitevőjű hatványa. pl.: m^4_2 és m^4_6 esetén az indexek különbsége 4, ami kettő egész kitevőjű hatványa.

$$\left.\begin{aligned} m_2^4 &= \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D} \\ m_6^4 &= \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D} \end{aligned}\right\} \overline{A}\cdot C\cdot\overline{D} \rightarrow \text{valóban szomszédosak}$$

Sajnos azonban ez a feltétel szükséges, de nem elégséges a szomszédossághoz ugyanis m^4_2 és m^4_4 esetén az indexek különbsége 2, ami kettő egész kitevőjű hatványa, de mégsem szomszédosak:

$$\left.\begin{aligned} m_2^4 &= \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D} \\ m_4^4 &= \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} \end{aligned}\right\} \text{nem szomszédosak, mert a B és a C változó is különböző!}$$

b) Két minterm szomszédos, ha az egyik indexnek megfelelő bináris szám pontosan eggyel több „1"-est tartalmaz, mint a másik indexé. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy az indexek bináris súlyainak különbsége 1. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy ez a szabály az m^4_2 és m^4_6 mintermek esetén teljesül, míg az m^4_2 és m^4_4 esetén nem. Sajnos ez a két szabály együtt még nem elégséges, ugyanis az m^4_7 és m^4_9 mintermek esetében:

$$\left.\begin{aligned} m_7^4 &= \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D \\ m_9^4 &= A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D \end{aligned}\right\} \text{nem szomszédosak, mert a B és a C változó is különböző!}$$

c) Ha két minterm szomszédos, akkor a nagyobb bináris súlyúnak a decimális indexe is nagyobb.

Az a), b) és c) feltételek együtt már szükséges és elégséges feltételét adják két minterm szomszédosságának eldöntésére.

A következőkben próbáljuk meg számjegyes minimalizálással meghatározni a grafikus minimalizálás bevezető részénél megismert feladatot. Adjuk meg tehát ezt a függvényt minterm indexes alakban.

$$F(A,B,C)=\sum^{3}(2,4,5,6,7)$$

Első lépésként (első oszlop) írjuk fel bináris súly szerint növekvő osztályokba a minterm indexeket úgy, hogy az egyes súlycsoportok közé vízszintes elválasztó vonalat húzunk. Ehhez gyakorlás képen írjuk fel a minterm indexeket bináris formában, majd határozzuk meg a bináris súlyukat.

index	**binárisan**	**bináris súly**
2	010	1
4	100	1
5	101	2
6	110	2
7	111	3

I.	II.	III.
2		
4		
5		
6		
7		

Számjegyes minimalizálás első lépése

Második lépésként képezzünk szomszédis párokat az egymás alatti súlycsoportokból az a), b) és c) szabályok felhasználásával. Amelyik indexet sikerült párosítani, azt kipipáljuk az első oszlopban. Akit nem sikerült párba válogatni, az prímimplikáns lesz. A megtalált párokat a II. oszlopban tüntetjük fel, mellettük zárójelbe téve írjuk az indexek különbségét.

I.	II.	III.
2 ✓	2,6 (4)	
4 ✓	4,5 (1)	
5 ✓	4,6 (2)	
6 ✓	5,7 (2)	
7 ✓	6,7 (1)	

Számjegyes minimalizálás második lépése

Harmadik lépésben a kapott párokat próbáljuk meg összevonni. Ehhez a súlycsoportok elválasztó vonalai felett és alatti párokat kell tovább vizsgálnunk, ha a zárójelbe tett különbségek egyformák. Amelyik párt sikerült tovább párosítani, azt kipipáljuk a második oszlopban. Akit nem sikerült párba válogatni, az prímimplikáns lesz. Az új pároknál zárójelbe kerül az első különbség és a második elemek különbsége. Mivel ebben a lépésben alakulnak ki a négyes hurkok, így minden négyes hurkot kétszer is meg kell kapnunk.

I.	II.	III.
2 ✓	2,6 (4)→(a)	4,5,6,7 (1,2)→(b)
4 ✓	4,5 (1) ✓	~~4,6,5,7 (2,1)~~
5 ✓	4,6 (2) ✓	
6 ✓	5,7 (2) ✓	
7 ✓	6,7 (1) ✓	

Számjegyes minimalizálás harmadik lépése

Összesen két prímimplikánst kaptunk, ezeket a fenti táblázatban (a) és (b) -vel jelöltük. Írjuk fel a prímimplikánsok algebrai alakjait.

Prímimplikáns	**Algebrai alakja** 4 2 1
(a)→ 2,6 (4)	$\left.\begin{matrix}\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\\ A\cdot B\cdot\overline{C}\end{matrix}\right\}B\cdot\overline{C}$
(b)→ 4,5,6,7 (1,2)	$\left.\begin{matrix}A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\\ A\cdot\overline{B}\cdot C\\ A\cdot B\cdot\overline{C}\\ A\cdot B\cdot C\end{matrix}\right\}A$

Ezek alapján F legegyszerűbb kétszintű diszjunktív algebrai alakja: $F = B\cdot\overline{C} + A$

Figyeljük meg, hogy a prímimplikánsok számjegyes megadásánál a zárójelbe tett számok, mint kettőhatványok pontosan kijelölik, hogy mely változókat kell a prímimplikáns algebrai alakjából elhagyni. Az index képzési szabály alapján az A, B, C logikai változók esetén az A jelöli a legmagasabb helyi értéket, ezért hozzá tartozik a 4-es, a B-hez a 2-es és a C-hez az 1-es érték. Az (a) esetben a (4) különbség az A változó elhagyását jelenti. Hasonlóan a (b) prímimplikáns esetében az (1) és (2) vagyis a B és C változókat kell elhagyni.

Sok prímimplikáns kezelése

Az előző pontban bemutatott példa mindössze két prímimplikánst tartalmazott, így könnyen előállíthattuk a keresett függvényalakot. Több prímimplikánst tartalmazó esetben azonban nem mindig egyértelmű a legegyszerűbb megoldás megtalálása. A következőkben erre mutatunk egy szisztematikus eljárást.

Határozzuk meg számjegyez minimalizálással a következő logikai függvény legegyszerűbb kétszintű diszjunktív alakját.

$$F(A,B,C,D)=\sum^{4}(0,1,3,4,7,11,12,14,15)$$

I.	II.	III.
0 ✓	0,1 (1)→(a)	3,7,11,15 (4,8)→g
1 ✓	0,4 (4)→(b)	~~3,11,7,15 (8,4)~~
4 ✓	1,3 (2)→(c)	
3 ✓	4,12 (8)→(d)	
12 ✓	3,7 (4) ✓	
7 ✓	3,11 (8) ✓	
11 ✓	12,14 (2)→(e)	
14 ✓	7,15 (8) ✓	
15 ✓	11,15 (4) ✓	
	14,15 (1)→(f)	

A prímimplikánsok algebrai alakja:

(a) $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
(b) $\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$
(c) $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot D$
(d) $B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$
(e) $A\cdot B\cdot\overline{D}$
(f) $A\cdot B\cdot C$
(g) $C\cdot D$

Összesen hét prímimplikánst kaptunk, azonban a keresett legegyszerűbb alak előállításához nincs szükség mindegyikre. Az előírt mintermek lefedéséhez szükséges minimális számú prímimplikáns kiválasztásához készítsünk egy áttekintő táblázatot, egy **prímimplikáns táblát**. Ebben a táblázatban soronként tüntessük fel a számjegyes minimalizálás során kiadódott prímimplikánsokat, az oszlopok fejlécében pedig tüntessük fel a lefedendő indexeket. A táblázat celláiba tegyünk „x” jelet, ha az adott prímimplikáns lefedi az oszlop tetején feltüntetett mintermet.

Mintermek / Prímimplikánsok	**0**	**1**	**3**	**4**	**7**	**11**	**12**	**14**	**15**
(a) 0,1 (1)	x	x							
(b) 0,4 (4)	x			x					
(c) 1,3 (2)		x	x						
(d) 4,12 (8)				x			x		
(e) 12,14 (2)							x	x	
(f) 14,15 (1)								x	x
(g) 3,7,11,15 (4,8)			x		x	x			x

Keressünk olyan oszlopokat, ahol pontosan egy „x” található. Jelöljük meg ezeket az egyedül álló ”x”-eket: ☒ és a hozzá tartozó sorban az összes „x”-et: ⊗. Az ☒ jelölésű mintermek a megkülönböztetett mintermek és a hozzájuk tartozó prímimplikánsok a függvény lényeges prímimplikánsai. Rájuk egészen biztosan szükség lesz a legegyszerűbb függvényalak előállításához.

Mintermek / Prímimplikánsok	**0**	**1**	**3**	**4**	**7**	**11**	**12**	**14**	**15**
(a) 0,1 (1)	x	x							
(b) 0,4 (4)	x			x					
(c) 1,3 (2)		x	x						
(d) 4,12 (8)				x			x		
(e) 12,14 (2)							x	x	
(f) 14,15 (1)								x	x
(g) 3,7,11,15 (4,8)			⊗		☒	☒			⊗

A prímimplikánsok logikai összegével képzett függvényalak csak akkor egyenértékű a kiindulási függvénnyel, ha a kiindulási függvény minden mintermjét a logikai összegben szereplő prímimplikánsok valamelyike helyettesíti (lefedi).

A fenti táblázatból kiolvasható, hogy az $m^4{}_0$ minterm lefedéséhez például az (a) vagy (b) prímimplikánsok közül legalább az egyiket tartalmaznia kell a végeredménynek. Hasonlóan az $m^4{}_1$ minterm lefedéséhez az (a) vagy (c) szükséges. Az $m^4{}_3$ minterm fedésénél (c) vagy (g) közül választhatunk, azonban a (g) lényeges prímimplikáns, így ő biztosan benne lesz a végeredményben. Az $m^4{}_4$ minterm fedésénél (b) vagy (d) szükséges. Az $m^4{}_7$ és $m^4{}_{11}$ mintermek esetében csak a (g) prímimplikáns biztosít fedést. Az $m^4{}_{12}$ minterm fedésénél (d) vagy (e) szükséges. Az $m^4{}_{14}$ minterm fedésénél (e) vagy (f) szükséges, végül az $m^4{}_{15}$ minterm fedésénél (g) vagy (g) szükséges, de ebből a g már kiválasztásra került korábban.

Észrevehetjük, hogy ezek a felsorolt feltételek ÉS kapcsolatban állnak egymással. Az összes előírt minterm lefedésének feltételét logikai függvény alakjában is megfogalmazhatjuk. Vezessük be az S segédfüggvényt vagy más néven szelekciós függvényt. S értéke csak akkor „1”, ha kiválasztott lefedés az összes előírt feltételt teljesíti. A segédfüggvény logikai változóit jelöljük a prímimplikánsok betűjelével. A változó értékét akkor tekintjük „1” értékűnek, ha az illető prímimplikáns szerepel a diszjunktív alakban. Ezek alapján a fenti függvényhez tartozó segédfüggvényt úgy határozzuk meg, hogy az egyes mintermekre megfogalmazott feltételeket ÉS kapcsolatba hozzuk egymással:

$$S = (a+b)\cdot(a+c)\cdot g\cdot(b+d)\cdot g\cdot g\cdot(d+e)\cdot(e+f)\cdot g$$

Vegyük észre, hogy az így kapott alak konjunktív alak. Ebből az egyes tagokat vizsgálva azt tudnánk könnyen kiolvasni, hogy mikor nem fedtük le teljesen a függvényünket. Vagyis, ha például az első tagot nézzük: biztosan nem fedtük le a függvényt, ha az a és b prímimplikánsok közül legalább az egyiket nem vettük hozzá a megoldáshoz. Nekünk azonban nem erre van szükségünk.

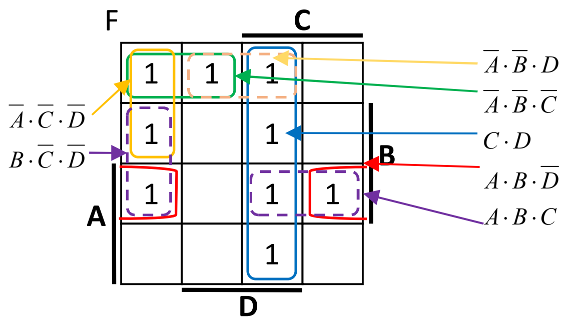
Az ismert azonosságok felhasználásával alakítsuk át a konjunktív alakot diszjunktívvá. A diszjunktív alakban szereplő szorzatok már azt mondják meg, hogy mely prímimplikánsok felhasználásával tudjuk lefedni a függvényt. A szorzatok a lehetséges alternatívákat mutatják. Cél a diszjunktív alakban a legkevesebb „betűt" (azaz prímimplikánst) tartalmazó szorzat megtalálása, hiszen a lehető legkevesebb prímimplikánssal kívánjuk megvalósítani az F függvényt.

$$S = (a+b)\cdot(a+c)\cdot g\cdot(b+d)\cdot g\cdot g\cdot(d+e)\cdot(e+f)\cdot g =$$
$$= g(a+ac+ab+bc)(bd+be+d+de)(e+f) =$$
$$= g(a+bc)(d+be)(e+f) =$$
$$= g(ad+abe+bcd+bce)(e+f) =$$
$$= g(ade+adf+abe+abef+bcde+bcdf+bce+bcef) =$$
$$= g(ade+adf+abe+bce+bcdf) =$$
$$= a\deg + adfg + abeg + bceg + bcdfg$$

Végeredményként négy egyforma bonyolultságú (négy prímimplikáns) és egy bonyolultabb függvényalak adódott. Írjuk fel a négy egyforma bonyolultságú megoldáshoz tartozó algebrai alakokat:

$$a\deg \rightarrow F(A,B,C,D) = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot\overline{D} + C\cdot D$$
$$adfg \rightarrow F(A,B,C,D) = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot C + C\cdot D$$
$$abeg \rightarrow F(A,B,C,D) = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot\overline{D} + C\cdot D$$
$$bceg \rightarrow F(A,B,C,D) = \overline{A}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot D + A\cdot B\cdot\overline{D} + C\cdot D$$

Megfigyelhetjük, hogy mindegyik megoldás 15 kapubemenetet igényel. Mivel négyváltozós függvényt minimalizáltunk, ezért a kapott eredmény könnyen ábrázolhatjuk Karnaugh táblában is, így jól szemléltethető, hogy pontosan miben is különböznek a kapott megoldások.



Közömbösök kezelése számjegyes minimalizálás során

A nem teljesen határozott logikai függvények minimalizálásakor láttuk, hogy a közömbös bejegyzéseket nem szükséges prímimplikánsokkal lefedni, ugyanakkor a közömbös bejegyzéseket a lehető legnagyobb méretű prímimplikáns kialakításához figyelembe kell vennünk. Vagyis a számjegyes minimailzálás során az első lépésben tekintsük úgy a közömbös bejegyzéseket, mintha azok határozott bejegyzések lennének és így határozzuk meg a prímimplikánsokat. Azt a megállapítást pedig, hogy a közömbös bejegyzéseket nem kell lefedni a prímimplikáns táblán keresztül tudjuk érvényesíteni. Az oszlopok fejlécében nem kell tehát feltüntetnünk a közömbös bejegyzések indexeit, így azokra lefedési előírás sem keletkezik a segédfüggvény felírásakor. Az elmondottak szemléltetésére nézzünk egy nagyon egyszerű példát. Számjegyes minimalizálással határozzuk meg a következő minterm indexekkel adott logikai függvény legegyszerűbb kétszintű diszjunktív algebrai alakját.

$$F(A,B,C)=\sum^{3}\left[(5,6)+(0,7)\right]$$

Első lépésben a számjegyes minimalizálásról tanultak alapján állítsuk elő a prímimplikánsokat.

I.	II.	Algebrai alakok:
0 → (a)	5,7 (2) → (b)	(a) $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
	6,7 (1) → (c)	(b) $A\cdot C$
5 ✓		(c) $A\cdot B$
6 ✓		
7 ✓		

Prímimplikáns \ Minterm	5	6
(a) 0		
(b) 5,7 (2)	x	
(c) 6,7 (1)		x

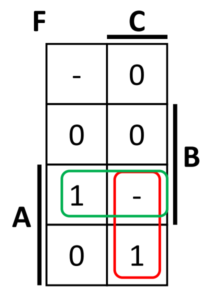
Figyeljük meg, hogy a prímimplikánstábla fejlécében nem kerültek feltüntetésre a közömbös bejegyzések minterm indexei. Emiatt a segédfüggvény: S=bc alakúra adódott.

A kereset legegyszerűbb kétszintű diszjunktív algebrai alak:

$$F(A,B,C)=A\cdot C+A\cdot B$$

Figyeljük meg azt is, hogy a módszer formálisan képezte a csak közömbös bejegyzést tartalmazó (a) prímimplikánst is. Ez a grafikus minimailzálás során nem képződött volna. A prímimplikáns tábla alapján azonban (a) nem került felhasználásra, nem hozott létre lefedési előírást a segédfüggvényben.

Végül szemléltetésként megmutatjuk, hogy ugyanez hogyan ábrázolható egy három változós Karnaugh táblában:



Konjunktív függvény számjegyes minimalizálása

Amint a grafikus minimalizálásnál megismertük, a számjegyes minimalizálás lényeges változtatások nélkül alkalmas maxterm indexekből kiindulva a legegyszerűbb konjunktív algebrai alak előállítására. Az egyetlen különbség az eljárás legvégén, a segédfüggvény meghatározása után van. A kiválasztott prímimplikánsok ugyanis maxtermeket fednek le, ezért a maxterm index képzésénél tanultak szerint kell a prímimplikánsok algebrai alakját felírni, majd ÉS művelettel összekapcsolni. Nézzünk erre is egy rövid példát.

$$F(A,B,C)=\prod^{3}\left[(5,6)+(0,7)\right]$$

Első lépésben előállítjuk a maxtermekből képezhető prímimplikánsokat.

I.	II.	Algebrai alakok:
0 → (a)	5,7 (2) → (b)	(a) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$
	6,7 (1) → (c)	(b) $A+C$
5 ✓		(c) $A+B$
6 ✓		
7 ✓		

Prímimplikáns \ **Minterm**	**5**	**6**
(a) 0		
(b) 5,7 (2)	x	
(c) 6,7 (1)		x

Segédfüggvény: S=bc

A kereset legegyszerűbb kétszintű konjunktív algebrai alak: $F(A,B,C)=(A+C)\cdot(A+B)$

A kapott eredményt három változós Karnaugh táblában is megmutatjuk: