MŰEGYETEM 1782

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

Dr. Pilászy György

Digitális technika 1
02. előadás

(Logikai változó, logikai függvény)

Lektorálta: Dr. Horváth Tamás

Logikai változó, logikai függvény

Az előző fejezetben megismertük a logikai érték fogalmát, konkrét példákat láttunk a logikai értékek megvalósítására. Könnyen beláthatjuk, hogy nincs értelme ezekkel a fizikai paraméterekkel közvetlenül aritmetikai műveleteket (pl.: összeadás, kivonás) végezni, hiszen az eredményként kapott paraméter értékeknek a logikai feladat szempontjából nincs jelentésük, ráadásul a feszültségszinteknek üzemszerűen az előírt tartományokon belül kell maradniuk a helyes működés érdekében.

A logikai műveletekben a logikai érték viselkedése hasonló az aritmetikai műveletekben alkalmazott számértékekhez, azonban amíg az aritmetikai értékek végtelen sokasága létezik, addig a logikai érték esetében csak véges számú érték fordul elő. A továbbiakban kétértékű logikával foglalkozunk, az „igaz” értéket 1-el, a „hamis” értéket 0-val fogjuk jelölni.

Az aritmetikai kifejezésekben használt betűjelek aritmetikai változókat jelölnek, melyekhez hasonlóan a logikai kifejezésekben logikai változókat fogunk használni. A logikai építőelemek, logikai hálózatok bemeneti és kimeneti pontjait is egy-egy logikai változóval jelölhetjük. A logikai változók kizárólag 0 vagy 1 értéket vehetnek fel. Azokat a függvényeket, amelyekben a függő és a független változók is logikai változók, logikai függvényeknek nevezzük.

Logikai alapműveletek

Az előző pontban már láttuk, hogy a logikai változók között nincs értelme aritmetikai műveletek használatának. A következőkben definiáljuk a logikai változókon értelmezett logikai alapműveleteket. Mivel a függő és a független változók is mindössze két értéket vehetnek fel, ezért a továbbiakban táblázatos formában adjuk meg az egyes műveleteket.

Logikai szorzás

Konjunkció, ÉS kapcsolat, (AND), jele: ·

A	B	F = A·B	értelmezés
0	0	0	0·0 = 0
0	1	0	0·1 = 0
1	0	0	1·0 = 0
1	1	1	1·1 = 1

Az ÉS kapcsolat végeredmény akkor „1” értékű, ha az összes benne szereplő független változó „1” értékű. Az ÉS művelet kommutatív tulajdonságú, a független változók sorrendje felcserélhető. Érdemes megfigyelni, hogy az ÉS művelet szabálya formálisan megegyezik az aritmetikai szorzással, azonban a benne szereplő változóknak logikai jelentésük van.

Logikai összeadás

Diszjunkció, VAGY kapcsolat (OR), jele: +

A	B	F = A+B	értelmezés
0	0	0	0+0 = 0
0	1	1	0+1 = 1
1	0	1	1+0 = 1
1	1	1	1+1 = 1

A VAGY kapcsolat eredménye akkor „1” értékű, ha legalább egy független változó logikai értéke „1”.
A VAGY művelet kommutatív tulajdonságú, a független változók sorrendje felcserélhető.

Tagadás

Invertálás, negálás, komplementálás, ellentett képzés, jele: felülvonás

A	$F=\overline{A}$	értelmezés
0	1	$\overline{0}=1$
1	0	$\overline{1}=0$

Az invertálás a logikai értékhez az ellentettjét rendeli hozzá. Páros számú invertálás alkalmazása esetén a kiinduló logikai értéket kapjuk vissza. A későbbiekben, ha szeretnénk egy invertálás nélküli logikai változóról vagy annak invertáltjáról nyilatkozni akkor a „ponált” és „negált” kifejezéseket fogjuk használni.

Logikai algebrai kifejezés

Az előzőekben megismert logikai értékek (mint konstansok), logikai változók és logikai alapműveletek együttesen matematikai értelemben logikai algebrának vagy Boole algebrának nevezhetők. Mindezek együttes felhasználásával az alábbi azonosságokhoz jutunk. Az azonosságot $\equiv$ szimbólummal jelöljük és így olvassuk: „azonosan egyenlő”.

$$A\cdot 0\equiv 0 \qquad A+0\equiv A$$

$$A\cdot 1\equiv A \qquad A+1\equiv 1$$

$$A\cdot A\equiv A \qquad A+A\equiv A$$

$$A\cdot\overline{A}\equiv 0 \qquad A+\overline{A}\equiv 1$$

$$\overline{\overline{A}}\equiv A$$

A Boole algebra kommutativitását (felcserélhetőség) írja le az alábbi két összefüggés:

$$A+B\equiv B+A$$

$$A\cdot B\equiv B\cdot A$$

A Boole algebra asszociatív (csoportosítható) tulajdonságát szemléltetik az alábbi összefüggések:

$$A+(B+C)\equiv A+B+C$$
$$A\cdot(B\cdot C)\equiv A\cdot B\cdot C$$

A disztributivitás tulajdonságait pedig az alábbi összefüggések mutatják:

$$A\cdot(B+C)\equiv A\cdot B+A\cdot C$$
$$A+(B\cdot C)\equiv(A+B)\cdot(A+C)$$

Számunkra a későbbiekben fontos lesz még az alábbi két összefüggés, melyet **De-Morgan** azonosságnak is hívnak és az ÉS - VAGY műveletek közötti dualitást fejezik ki.

$$\overline{A+B}\equiv\overline{A}\cdot\overline{B}$$
$$\overline{A\cdot B}\equiv\overline{A}+\overline{B}$$

Ezeknek az azonosságoknak a helyességéről magunk is meggyőződhetünk, ha az A és B logikai változók helyébe behelyettesítjük a „0”, illetve az „1” logikai értékeket.

Logikai függvények

Azokat a függvényeket, amelyekben mind a függő, mind a független változó logikai változó, logikai függvénynek nevezzük. Minden kimeneti változó értéke a bemeneti változók értékétől függ. Ha n bemenete és m kimenete van egy logikai rendszernek, akkor az m számú n változós logikai függvénykapcsolattal megadható.

A következőkben határozzuk meg az összes két változós logikai függvényt. A korábbiakban láttuk, hogy a logikai algebra diszkrét értékeinek köszönhetően véges sok variációja létezik a bemeneti változóknak ezért táblázatos formában is megadhatjuk az összes lehetséges kombinációt. Jelölje A és B a két bemeneti változót. A logikai változók kétértékűsége miatt összesen 2^2=4 különböző kombinációnk lehetséges, ezért készítsünk egy négy soros táblázatot. A kimenetre vonatkozó előírásokat az egyes oszlopokban jelenítsük meg. Egy adott logikai függvény esetén összesen 4 cella kitöltése szükséges. Figyelembe véve az összes variációs lehetőséget 2^4=16 különböző logikai függvényt tudunk megadni. Ezeket a következő táblázatban $f_0 \dots f_{15}$ jelöléssel adtuk meg. Az alábbi táblázatos megadási formát szokás a függvény igazságtáblázatának is hívni.

független változó kombinációk		Függvényértékek															
A	**B**	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Az összes lehetséges kétváltozós logikai függvény igazságtáblázata

Nézzük meg a kapott $f_0 \dots f_{15}$ függvényeket, próbáljuk meg felírni a logikai függvények egy-egy algebrai alakját. Mivel mindössze két logikai érték létezik, ezért a függvény megadásához elegendő azokat a független változókombinációkat megadni, amelyekhez „1” függvényérték tartozik. Ugyanígy egyértelműen megadja a függvényt az összes „0” függvényértéket eredményező független változó kombinációk megadása.

A fenti táblázatban található f_0 és f_{15} függvények kimeneti értéke független az A,B logikai változóktól, ezek konstans értékek.

$f_0(A,B)=0$, $f_{15}(A,B)=\overline{f_0(A,B)}=1$

Az f_1 függvénykapcsolat csak akkor „1” értékű, ha minden változója „1” értékű. Ez megfelel a logikai szorzat definíciójával, vagyis

$$f_1(A,B)=A\cdot B$$

Az f_2 függvény akkor ad „1” értéket, ha A=„1” és B=„0” vagyis $\overline{B}=1$. Ezt algebrai alakban így fogalmazhatjuk meg:

$$f_2(A,B)=A\cdot\overline{B}$$

Az f_3 függvény két különböző kombináció esetén ad „1” értéket, az A=„1”, B=„0” és az A=„1” B=„1” esetén. Ezt algebrai alakban a következőképpen írhatjuk:

$$f_3(A,B)=A\cdot\overline{B}+A\cdot B$$

A logikai algebra fentebb megismert szabályait alkalmazva ezt a kifejezést átalakíthatjuk az alábbiak szerint:

$$f_3(A,B)=A\cdot\overline{B}+A\cdot B=A\cdot(\overline{B}+B)=A$$

Vagyis megállapíthatjuk, hogy az f3 függvény független a B változótól.

$$f_3(A,B)=A$$

Az f_4 függvény akkor ad „1” értéket, ha A=„0” és B=„1” vagyis $\overline{A}=1$. Ezt algebrai alakban így fogalmazhatjuk meg:

$$f_4(A,B)=\overline{A}\cdot B$$

Az f_3 függvényhez hasonlóan az f_5 független az A változótól, ezért az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$f_5(A,B)=B$$

Az f6 függvény akkor ad „1” értéket, ha a két változó közül csak az egyik „1” értékű. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy akkor „1” értékű, ha különbözik a két változó, ezért ezt a függvénykapcsolatot szokták antivalencia vagy „KIZÁRÓ VAGY” kapcsolatnak is hívni. Ezt a függvénykapcsolatot külön műveleti jellel is szokták jelölni: ⊕.

$$f_6(A,B)=\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}=A\oplus B$$

Az f_7 függvény megegyezik a VAGY műveletnél tanultakkal, ezért a következő alapban írhatjuk fel:

$$f_7(A,B)=A+B$$

Ugyanerre az alakra juthatunk, ha az f_7 függvény „1” értéket adó kombinációit egymással VAGY kapcsolatba hozzuk és alkalmazzuk a megismert azonosságokat:

$$f_7(A,B)=\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}+A\cdot B=(A\cdot\overline{B}+A\cdot B)+(\overline{A}\cdot B+A\cdot B)=$$
$$=(A\cdot(\overline{B}+B))+(B\cdot(\overline{A}+A))=A+B$$

A fenti átalakítás során kihasználtuk, hogy az AB logikai szorzatot többször is hozzávehetjük a kifejezéshez.

Az $f_8 \ldots f_{15}$ függvények értékeit megnézve megfigyelhetjük, hogy az $f_0..f_7$ függvények ellentettjeit adják. Az f8 függvény csak akkor ad „1" értéket, ha egyidejűleg az A és a B változó is „0" értékű ezért az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$f_8(A,B) = \overline{f_7(A,B)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Az f_9 függvény az antivalencia ellentettje. Ez akkor ad „1" értéket, ha a két logikai változó azonos értékű, ezért szokás ekvivalencia függvénynek is hívni. Az ekvivalencia műveletet külön jellel is szokás jelölni: ⊗

$$f_9(A,B) = \overline{f_6(A,B)} = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B = A \otimes B$$

A következő függvények esetében használjuk ki azt a felismerésünket, hogy az $f_{10} \ldots f_{14}$ függvények az $f_5 \ldots f_1$ függvények ellentettjeiként előállíthatók.

$$f_{10}(A,B) = \overline{f_5(A,B)} = \overline{B}$$

Alkalmazzuk a De-Morgan összefüggést a korábban meghatározott algebrai alakok ellentettjeire.

$$f_{11}(A,B) = \overline{f_4(A,B)} = \overline{\overline{A} \cdot B} = A + \overline{B}$$

$$f_{12}(A,B) = \overline{f_3(A,B)} = \overline{A}$$

$$f_{13}(A,B) = \overline{f_2(A,B)} = \overline{A \cdot \overline{B}} = \overline{A} + B$$

$$f_{14}(A,B) = \overline{f_1(A,B)} = \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Logikai függvények megadási módjai

A kombinációs hálózatok tervezésének első lépése, hogy egy szöveges specifikáció (informális leírás) alapján formálisan, későbbi tervezési módszerek alkalmazásához alkalmas módon specifikáljuk a kívánt logikai hálózatot. Az előző pontban megismertük a logikai függvények **igazságtáblázatát** és láttunk példákat a függvények **algebrai alakjára** is. A függvények algebrai alakjainak felírásánál VAGY kapcsolatba hoztuk azokat a szorzatokat, amelyek esetén a függvény „1" értéket ad. A szorzatokban ponáltan (invertálás nélkül) szerepelt az „1" értékű és negáltan a „0" értékű változó.

Az igazságtáblázat egyértelmű megadását jelenti a logikai függvényeknek, azonban nagy számú független változó alkalmazása esetén a hatalmas mérete miatt nem minden esetben célszerű ilyen módon megadni a hálózatot. Az algebrai alak jó lehet, azonban több, látszólag nem azonos algebrai alakja is lehet ugyanazon függvénynek, ami nehézkessé teszi a különböző megoldások ellenőrzését, összehasonlítását. Vizsgáljuk meg például a következő két algebrai alakot:

$$F_1 = B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \qquad F_2 = (A + B) \cdot (\overline{B} + \overline{C})$$

Ránézésre különbözőek, hiszen az F_1 két szorzat VAGY kapcsolatából áll, az F_2 viszont két VAGY kapcsolat szorzata. F1 alakját diszjunktív algebrai alaknak, F2 alakját konjunktív algebrai alaknak nevezzük.

Végezzük el az F2 kifejezésben a zárójelek felbontását:

$$F_2 = (A + B) \cdot (\overline{B} + \overline{C}) = A\overline{B} + A\overline{C} + B\overline{B} + B\overline{C}$$

A kapott kifejezést bővítsük az alábbiak szerint:

$$A \cdot \overline{B} = A \cdot \overline{B} \cdot (C + \overline{C}) = A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

$$A \cdot \overline{C} = A \cdot \overline{C} \cdot (B + \overline{B}) = A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

$$B \cdot \overline{C} = B \cdot \overline{C} \cdot (A + \overline{A}) = A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$$

Ezt behelyettesítve és elhagyva az azonos tagokat a következő eredményre jutunk:

$$F_2 = A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} = A \cdot \overline{B} \cdot (C + \overline{C}) + B \cdot \overline{C} \cdot (A + \overline{A}) = A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{C}$$

Vagyis algebrai átalakításokkal sikerült az F2-t F1-el megegyező algebrai alakra hoznunk, tehát igazoltuk, hogy a két kifejezés ugyanazt az igazságtáblát adja meg.

Adjuk meg most ennek az F1=F2=F logikai függvénynek az igazságtáblázatát. Állítsunk elő szisztematikusan olyan szabályos algebrai alakokat, amelyek egyértelműen megadják az F függvényt.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	**1**	**0**	**1**
0	1	1	0
1	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**
1	1	1	0

A fenti azonosság igazolása során alkalmazott bővítést felhasználva és kihasználva a logikai függvények kétértékű tulajdonságát, állítsuk elő az F függvényt logikai szorzatok összegeként úgy, hogy minden szorzatban szerepeljen a függvény összes független változója.

$$F = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C}$$

Figyeljük meg, hogy ennek a logikai összegben minden egyes szorzat pontosan egy bemeneti kombinációra ad „1” értéket. Mivel a fenti igazságtáblában összesen négy ilyen hely van, ezért az összegben négy szorzat került VAGY kapcsolatba. Úgy is mondhatjuk, hogy a függvényt „1”-esenként raktuk össze. Ezt az algebrai alakot **diszjunktív kanonikus algebrai alaknak** nevezzük.

<u>A diszjunktív kanonikus algebrai alak tulajdonságai:</u>

- mindegyik szorzat olyan független változó kombinációt képvisel, ahol a függvényérték „1”
- minden szorzatban az összes független változó szerepel,
- pontáltan szerepelnek azok a független változók, melyekhez „1” bemeneti érték tartozik,
- negáltan szerepelnek azok a független változók, melyekhez „0” bemeneti érték tartozik.

A fenti tulajdonságok alapján megállapíthatjuk, hogy a diszjunktív kanonikus algebrai alak speciális elemi logikai függvények összege. Ezeket az elemi függvényeket mintermeknek nevezzük.

A mintermek jelölésére vezessük be az alábbi jelölést:

$$m_i^n$$

ahol n jelöli a független változók darabszámát, i pedig az illető mintermnek megfelelő változó kombináció decimális értéke (minterm index). A minterm index képzése úgy történik, hogy a mintermhez tartozó ponált változókat „1”, a negált változókat „0” bináris számjeggyel helyettesítjük, majd a kapott n bites bináris számot átváltjuk decimális alakba. A későbbiekkel összhangban, ha A, B, C,…. jelöléssel látjuk el a független változókat, akkor mindig az A változót tekintjük a legmagasabb helyi értékűnek.

Ezek alapján a fenti F függvény a következőképpen írható fel:

$$F(A,B,C)=\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}$$

$$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\to 010\to m_2^3$$

$$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\to 100\to m_4^3$$

$$A\cdot\overline{B}\cdot C\to 101\to m_5^3$$

$$A\cdot B\cdot\overline{C}\to 110\to m_6^3$$

$$F(A,B,C)=m_2^3+m_4^3+m_5^3+m_6^3$$

A fenti mintermes alakot egyszerűbben is leírhatjuk, ha a mintermek közötti logikai összegeket egy ∑ betűvel helyettesítjük, felsőindexként megadjuk a független változók darabszámát, majd felsoroljuk a függvényhez tartozó minterm indexeket.

$$F(A,B,C)=m_2^3+m_4^3+m_5^3+m_6^3=\sum^3(2,4,5,6)$$

Ezt a megadási módot nevezzük minterm indexes megadásnak.

Vegyük elő újra a kiindulási függvényünk igazságtáblázatát.

A	B	C	F
0	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**
0	1	0	1
0	**1**	**1**	**0**
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	**1**	**1**	**0**

Próbáljuk most előállítani az F logikai függvényt az F=”0” értékeinek felhasználásával.

$$F=(A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

Figyeljük meg, hogy ennek a logikai szorzatban minden egyes összeg pontosan egy bemeneti kombinációra ad „0” értéket. Mivel a fenti igazságtáblában összesen négy ilyen hely van, ezért az szorzatban négy összeg került ÉS kapcsolatba. Úgy is mondhatjuk, hogy a függvényt „0”-nként raktuk össze. Ezt az algebrai alakot **konjunktív kanonikus algebrai alaknak** nevezzük.

<u>A konjunktív kanonikus algebrai alak tulajdonságai:</u>

- mindegyik összeg olyan független változó kombinációt képvisel, ahol a függvényérték „0”
- minden összegben az összes független változó szerepel,
- pontáltan szerepelnek azok a független változók, melyekhez „0” bemeneti érték tartozik,
- negáltan szerepelnek azok a független változók, melyekhez „1” bemeneti érték tartozik.

A fenti tulajdonságok alapján megállapíthatjuk, hogy a konjunktív kanonikus algebrai alak speciális elemi logikai függvények összege. Ezeket az elemi függvényeket maxtermeknek nevezzük.

A maxtermek jelölésére vezessük be az alábbi jelölést:

$$M_i^n$$

ahol n jelöli a független változók darabszámát, i pedig az illető maxtermek megfelelő változó kombináció decimális értéke (maxterm index). A maxterm index képzése úgy történik, hogy a maxtermhez tartozó algebrai alakban szereplő ponált változókat „1”, a negált változókat „0” bináris számjeggyel helyettesítjük, majd a kapott n bites bináris számot átváltjuk decimális alakba. A későbbiekkel összhangban, ha A, B, C,…. jelöléssel látjuk el a független változókat, akkor mindig az A változót tekintjük a legmagasabb helyi értékűnek. Ezek alapján a fenti F függvény a következőképpen írható fel:

$$F(A,B,C) = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

$$(A+B+C) \to 111 \to M_7^3$$

$$(A+B+\overline{C}) \to 110 \to M_6^3$$

$$(A+\overline{B}+\overline{C}) \to 100 \to M_4^3$$

$$(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}) \to 000 \to M_0^3$$

$$F(A,B,C) = M_0^3 \cdot M_4^3 \cdot M_6^3 \cdot M_7^3$$

A fenti maxtermes alakot egyszerűbben is leírhatjuk, ha a maxtermek közötti logikai szorzatokat egy Π betűvel helyettesítjük, felsőindexként megadjuk a független változók darabszámát, majd felsoroljuk a függvényhez tartozó maxterm indexeket.

$$F(A,B,C) = M_0^3 \cdot M_4^3 \cdot M_6^3 \cdot M_7^3 = \prod^{3}(0,4,6,7)$$

Ha elég bátornak érezzük magunkat, akkor megpróbálhatjuk algebrai átalakításokkal is előállítani a diszjunktív kanonikus algebrai alakból a konjunktív kanonikus algebrai alakot. Ehhez vegyük elő az eredeti F függvény negáltjának diszjunktív kanonikus algebrai alakját. Ebben azok a mintermek szerepelnek, melyek az eredeti F függvényben nem szerepeltek, hiszen most az eredeti „0” helyek lettek az „1”-esek.

$$\overline{F(A,B,C)} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot C + A\cdot B\cdot C$$

Alkalmazzuk a De-Morgan szabályt a VAGY műveletekre:

$$\overline{\overline{F(A,B,C)}} = (\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}})\cdot(\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C})\cdot(\overline{\overline{A}\cdot B\cdot C})\cdot(\overline{A\cdot B\cdot C})$$

Alkalmazzuk a De-Morgan szabályt a zárójelben lévő kifejezésekre:

$$\overline{\overline{F(A,B,C)}} = (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

végeredményként megkaptuk az előbb meghatározott konjunktív kanonikus algebrai alakot. A kapott eredményünket alkalmazhatjuk a minterm indexes-maxterm indexes alakok közvetlen átalakítására is.

$$F(A,B,C) = \sum^{3}(2,4,5,6)$$

Első lépésben állítsuk elő az F függvény minterm indexeinek komplemens halmazát, ezek lesznek ugyanis az F negált függvény minterm indexei:

$$\overline{F(A,B,C)} = \sum^{3}(0,1,3,7)$$

Alkalmazzuk a De-Morgan szabályt az indexekre és a műveleti jelre. Az indexek „negálása” bitenkénti invertálást jelent, ami jelen esetben a 7-ből kivonást jelenti a három változó miatt (7-0→7; 7-1→6; 7-3→4; 7-7→0).

$$\overline{\overline{F(A,B,C)}} = \prod^{3}(7,6,4,0)$$

Megfigyelhetjük, hogy a korábbi módon meghatározott maxterm indexeket kaptuk. Természetesen a maxterm indexekből kiindulva ugyanilyen módon visszakaphatjuk a függvény minterm indexeit is.

$$F(A,B,C) = \prod^{3}(7,6,4,0) \rightarrow \overline{F(A,B,C)} = \prod^{3}(1,2,3,5)$$

$$\overline{\overline{F(A,B,C)}} = \sum^{3}(6,5,4,2)$$

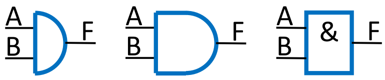
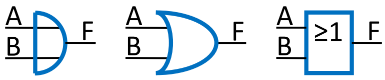
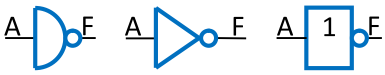
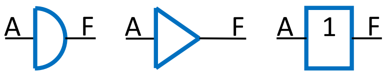
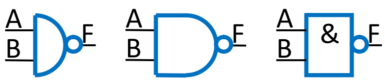
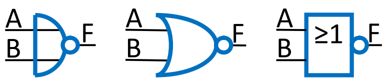
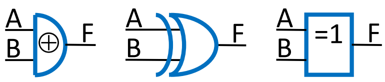
Az eddigiek alapján tehát az alábbi logikai függvény megadási módokat ismertük meg:

- Igazságtáblázat
- Algebrai alak
- Diszjunktív kanonikus algebrai alak
- Konjunktív kanonikus algebrai alak
- Mintermes alak
- Minterm indexes alak
- Maxtermes alak
- Maxterm indexes alak

A következőkben még egy gyakran használt ábrázolási módot ismertetünk.

Logikai függvény megadása elvi logikai rajzzal

Az integrált áramkörök megjelenésével lehetőség nyílt nagy tömegben elérhető áron gyártani elemi kombinációs hálózatokat. Ezeket az elemi műveleteket megvalósító vagy elemi műveletekből felépített hálózatokat logikai kapuknak nevezzük. Ezeknek a kapuáramköröknek több elterjedt rajzjele van, melyekből a leggyakrabban használtakat a következő táblázatban foglalunk össze.

Megnevezés	Rajzjelek	Logikai függvény
ÉS, AND		$F = A \cdot B$
VAGY, OR		$F = A + B$
Inverter		$F = \overline{A}$
Buffer		$F = A$
NEM-ÉS, NAND		$F = \overline{A \cdot B}$
NEM-VAGY, NOR		$F = \overline{A + B}$
KIZÁRÓVAGY, XOR		$F = \overline{A}B + A\overline{B} = A \oplus B$

Elvi logikai rajzjelek

Megjegyezzük, hogy a VAGY kapuk rajzjelében korábban ’1’ bejegyzés szerepelt, ez később módosították ’≥1’ feliratra. Ez utóbbi felirat úgy is értelmezhető, hogy a kapu kimenete akkor „1”, ha legalább egy bemenete „1” értékű. Ehhez hasonlóan az XOR műveletben szereplő ’=1’ bejegyzést tekinthetjük úgy, hogy akkor „1” a kapu kimente, ha pontosan egy bemenete „1” értékű. A fenti táblázatban kétbemenetű függvényeket ábrázoltunk. Az elvi logikai rajzokon elvileg tetszőlegesen sok bemenete lehet egy szimbólumnak, azonban a kereskedelemben is kapható kapuáramkörökből csak néhány létezik.

Az első három sorban a jól ismert alapműveleteket láthatjuk. A negyedik sorban szereplő BUFFER áramkör látszólag vezetékként funkcionál, azonban a gyakorlatban jelerősítő szereppel bír. A NEM-ÉS, NEM-VAGY kapuáramkörök nem alapműveletek, azonban a későbbiekben látni fogjuk, hogy ezekkel is bármilyen logikai alapművelet megvalósítható.

A kapuáramkörök és rajzjeleik felhasználásával is megadhatjuk a kombinációs hálózatokat. Ez az elvi logikai rajz már konkrét építőelemeknek is megfeleltethető, így a kapcsolási rajzok alapját képezi. Az építőelemek bal oldalán találhatók a logikai bemenetek, míg jobb oldalon az építő elem kimenete. A be- és kimenetek közötti jeltovábbítást vezetékek segítségével valósítjuk meg. Ezeket az összeköttetéseket folytonos vonallal ábrázoljuk az elvi logikai rajzon. Az egymást keresztező vonalakat nem tekintjük összekötöttnek, csak ha külön csomóponttal jelöltük.

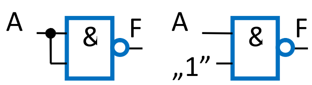
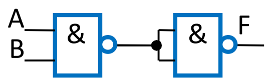
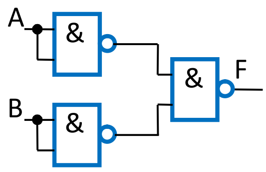
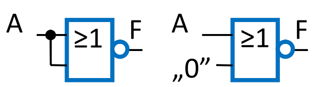
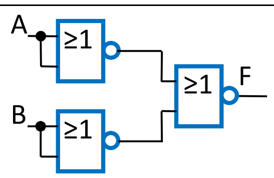
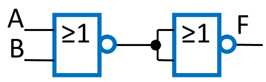
Ábrázoljuk a korábban megismert F_1 és F_2 logikai függvényt a most megismert szimbólumok felhasználásával.

$F_1 = B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B}$ $\qquad$ $F_2 = (A + B) \cdot (\overline{B} + \overline{C})$

Az F1 és F2 logikai függvények ábrázolása elvi logikai rajzzal

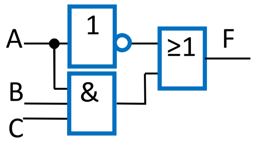
Invertált kimenetű kapuk használata

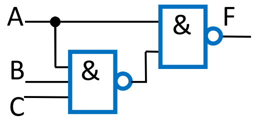
A logikai építőelemek ismertetése kapcsán találkoztunk a NEM-ÉS (NAND) és NEM-VAGY (NOR) kapukkal. A következőkben nézzük meg, hogy kizárólag egyféle kapu felhasználásával hogyan lehet előállítani bármelyik tanult alapműveletet.

Alapművelet **Megvalósítás**	**Invertálás**	**ÉS**	**VAGY**
NAND			
NOR			

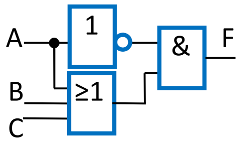
Logikai alapműveletek megvalósítása NAND, illetve NOR kapukkal

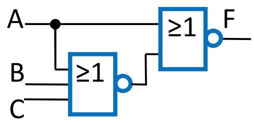
Ábrázoljuk ÉS-VAGY, majd kizárólag NAND kapukkal a következő diszjunktív algebrai alakot: $F(A,B,C)=\overline{A}+ABC$. A megoldás algebrai levezetéséhez a De-Morgan szabályt alkalmazzuk a diszjunktív alakban szereplő VAGY műveletre: $F(A,B,C)=\overline{A}+ABC=\overline{(\overline{\overline{A}})\cdot(\overline{ABC})}=\overline{A\cdot\overline{ABC}}$. Figyeljük meg, hogy a második szinten lévő NAND kapu VAGY műveletet végez. A második szintre „direktbe” csatlakozó független változó invertálódik.





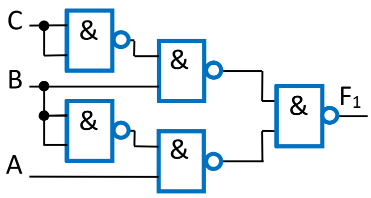
Ábrázoljuk VAGY-ÉS, majd kizárólag NOR kapukkal a következő konjunktív algebrai alakot: $F(A,B,C)=\overline{A}\cdot(A+B+C)$. A megoldás algebrai levezetéséhez a De-Morgan szabályt alkalmazzuk a konjunktív alakban szereplő ÉS műveletre: $F(A,B,C)=(\overline{A})\cdot(A+B+C)=\overline{(\overline{\overline{A}})+(\overline{A+B+C})}=\overline{A+(\overline{A+B+C})}$. Figyeljük meg, hogy a második szinten lévő NOR kapu ÉS műveletet végez. A második szintre „direktbe” csatlakozó független változó invertálódik.



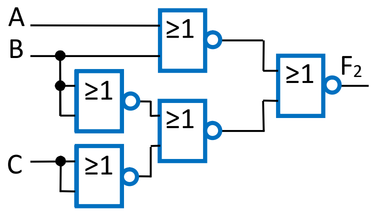


Ábrázoljuk a korábban megismert F_1 függvényt kizárólag NAND, az F_2 logikai függvényt kizárólag NOR kapuk felhasználásával. A megoldás helyességének algebrai igazolásához alkalmazzuk a De-Morgan azonosságot az F1 függvény esetében a VAGY műveletre, az F2 függvény esetében pedig az ÉS műveletre:

$$F_1=B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\rightarrow\overline{\overline{(B\cdot\overline{C})}\cdot\overline{(A\cdot\overline{B})}}$$



$$F_2=(A+B)\cdot(\overline{B}+\overline{C})\rightarrow\overline{\overline{(A+B)}+\overline{(\overline{B}+\overline{C})}}$$



Az F1 és F2 logikai függvények ábrázolása NAND illetve NOR kapukkal

Figyeljük meg a hasonlóságot az F1 függvény esetében az ÉS-VAGY kapus és a NAND kapus megoldás között. Láthatjuk, hogy az építőelemek közötti összekötések pontosan ugyanúgy alakulnak, csak a kapuk lettek kizárólag NAND kapukra cserélve. Ugyanígy viselkedik az F2 függvény VAGY-ÉS kapus megoldása és a kizárólag NOR kapus realizáció. Ezt a megfigyelésünket a későbbiekben fel fogjuk használni.

Közömbös bejegyzések

A logikai feladatok megfogalmazása, specifikálása során előfordulhat, hogy bizonyos bemeneti kombinációk nem fordulhatnak elő a hálózat bemenetén. Könnyen beláthatjuk, hogy a bemeneten fel nem lépő kombinációkra tetszőleges előírást tehetünk, hiszen a működés során sosem lép fel. Ezeket a bejegyzéseket **közömbös bejegyzéseknek** hívjuk és az igazságtáblázatban „-” bejegyzéssel jelöljük. Amennyiben szükséges, a számjegyes vagy algebrai felírásoknál ezeket a termeket is megjeleníthetjük, de elkülönítve a határozott bejegyzésektől. A közömbös bejegyzések gyakorlati hasznát a később ismertetett minimalizálási eljárások során fogjuk megmutatni, most csak annyit jegyzünk meg, hogy bizonyos esetekben ezek megfelelő értékű rögzítésével egyszerűbb függvényalak állítható elő.

A közömbös bejegyzést tartalmazó logikai hálózatot **nem teljesen specifikált logikai hálózatnak** nevezzük. Ha egyetlen közömbös bejegyzést sem tartalmaz, akkor a hálózatot **teljesen specifikált logikai hálózatnak** nevezzük.

A következőkben nézzünk egy háromváltozós példát nem teljesen specifikált logikai függvény megadására az eddig tanult megadási módokban.

Egy logikai hálózat bemenetére három kapcsoló csatlakozik (A,B,C). A hálózat kimenete F=1, ha az A kapcsoló „1” értéke mellett a B és C különböző értékű. A megadáskor vegyük figyelembe, hogy nem állhat mindhárom kapcsoló azonos állásban.

Adjuk meg az F függvény igazságtáblázatát, diszjunktív és konjunktív kanonikus algebrai alakját, mintermes és maxtermes alakját, valamint a minterm indexes és maxterm indexes alakját.

A függvény igazságtáblája:

A	**B**	**C**	**F**
0	0	0	-
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	-

Diszjunktív kanonikus algebrai alak:

$$F = A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C)$$

Mintermes alak:

$$F(A,B,C) = m_5^3 + m_6^3 + (m_0^3 + m_7^3)$$

Minterm indexes alak:

$$F(A,B,C) = \sum^3 \left[(5,6) + (0,7)\right]$$

Konjunktív kanonikus algebrai alak:

$$F = (A + B + \overline{C}) \cdot (A + \overline{B} + C) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + B + C) \cdot \left((A + B + C) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})\right)$$

Maxtermes alak:

$$F(A,B,C) = M_6^3 + M_5^3 + M_4^3 + M_3^3 + (M_7^3 + M_0^3)$$

Maxterm indexes alak:

$$F(A,B,C) = \prod^3 \left[(3,4,5,6)(0,7)\right]$$

A feladat leírásában vegyük észre, hogy a legutolsó mondat a közömbös bejegyzéseket határozza meg. Emiatt az igazságtábla legelső és legutolsó sorába közömbös bejegyzések kerültek. Az algebrai alakok felírásánál a közömbös bejegyzéseket elkülönítve, külön zárójelben tüntettük fel. A közömbös bejegyzéseket hasonlóan jelöltük a mintermes és maxtermes alakoknál is. Az indexes alakok megadásánál szintén külön zárójelek közé kerültek a közömbösöket jelölő indexek.