Logikai hálózatok formális specifikációja, grafikus minimalizálás

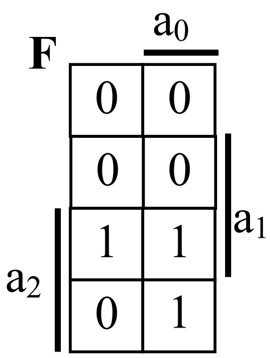
1. feladat

Adott A (a_2,a_1,a_0) három bites előjel nélküli egész szám. Az F(a_2,a_1,a_0) logikai függvény kimenete F=1, ha a bemenetén lévő kombináció, mint bináris szám értéke nagyobb, mint 4. Az $\mathbf{a_2}$ bemenet a legmagasabb helyérték.

- Adjuk meg az igazság táblát, a Karnaugh táblát és írjuk fel a kanonikus algebrai alakokat (konjuktiv, diszjunktiv).
- Adjuk meg a függvény minterm/maxterm indexeit.
- Rajzoljuk fel a diszjunktív kanonikus algebrai alaknak megfelelő elvi logikai rajzot
  a. ÉS/VAGY kapukkal,
  b. kizárólag NAND kapukkal.

Megoldás

a_2	a_1	a_0	F
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	**0**
0	1	1	**0**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

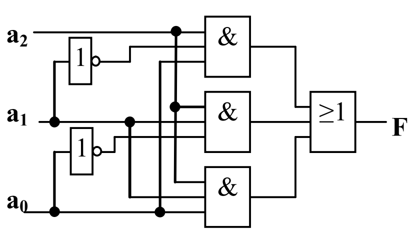


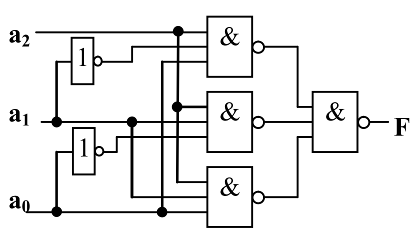
$$F = a_2\overline{a_1}a_0 + a_2a_1\overline{a_0} + a_2a_1a_0$$

$$F = (a_2 + a_1 + a_0)(a_2 + a_1 + \overline{a_0})(a_2 + \overline{a_1} + a_0)(a_2 + \overline{a_1} + \overline{a_0})(\overline{a_2} + a_1 + a_0)$$

$$F(a_2, a_{1,} a_0) = \sum^{3}(5,6,7)$$

$$F(a_2, a_{1,} a_0) = \prod^{3}(3,4,5,6,7)$$

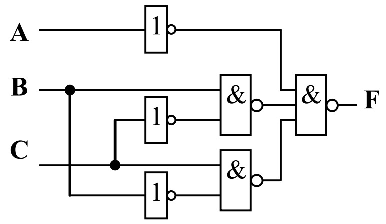




2. feladat

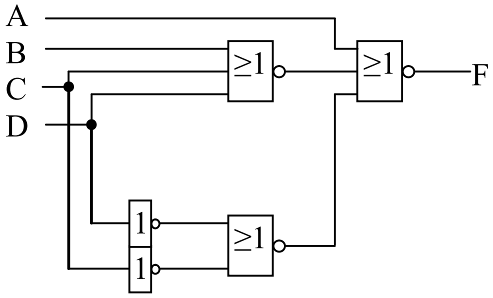
Rajzoljuk fel az $F(ABC) = A + B\overline{C} + \overline{B}C$ logikai függvényt kizárólag NAND kapukkal.

Megoldás



3. feladat

Elvi logikai rajzával adott az F(ABCD) négyváltozós logikai függvény.



- Írjuk fel a rajznak megfelelő konjunktív algebrai alakot és adjuk meg a függvény Karnaugh táblázatát.

Megoldás

$F = \overline{A}(B + C + D)(\overline{C} + \overline{D})$

F

C

0	1	0	1
1	1	0	1
0	0	0	0
0	0	0	0

B

A

D

4. feladat

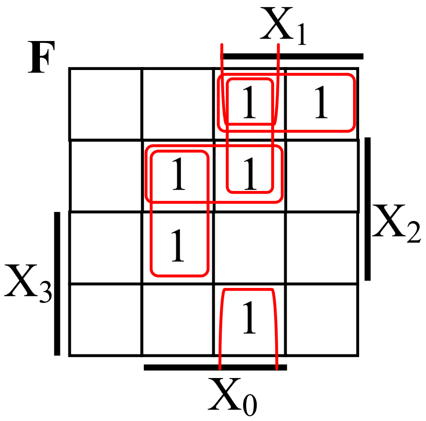
Adott az X négy bites előjel nélküli egész szám. Formálisan specifikáljuk azt a négyváltozós $F(X_3,X_2,X_1,X_0)$ logikai függvényt, amely kimenete F=1, ha a bemenetén lévő bináris szám prímszám.

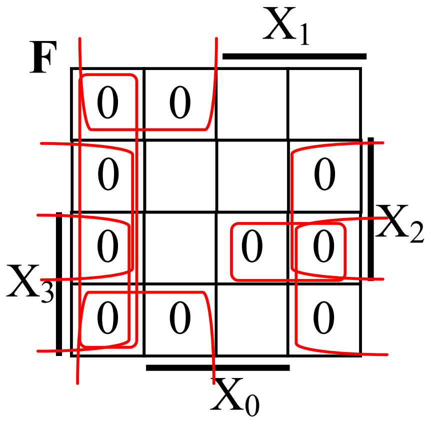
- Melyik definíciós lehetőséget (igazság tábla, Karnaugh tábla, algebrai alak, minterm/maxterm index) célszerű választani?
- Adjuk meg az összes mintermből illetve maxtermből képezhető prímimplikánst.
- Jelöljük meg a lényeges prímimplikánsokat.
- Írjuk fel a legegyszerűbb kétszintű diszjunktív illetve konjunktív algebrai alakot.

Megoldás

A minterm indexeket – elegendő felsorolni a 0 és 15 közé eső prímszámokat.

$$F(X_3,X_2,X_1,X_0)=\sum^{4}(2,3,5,7,11,13)$$





Prímimplikáns	Lényeges
$X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3}$	x
$X_0 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3}$	
$X_0 \cdot X_1 \cdot \overline{X_3}$	
$X_0 \cdot \overline{X_1} \cdot X_2$	x
$X_0 \cdot X_1 \cdot \overline{X_2}$	x

Prímimplikáns	Lényeges
$X_0 + X_1$	
$X_0 + \overline{X_2}$	x
$X_1 + X_2$	x
$X_0 + \overline{X_3}$	x
$\overline{X_1} + \overline{X_2} + \overline{X_3}$	x

$$\mathbf{F} = X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} + X_0 \cdot \overline{X_1} \cdot X_2 + X_0 \cdot X_1 \cdot \overline{X_2} + \left\{ \begin{array}{c} X_0 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \\ \\ X_0 \cdot X_1 \cdot \overline{X_3} \end{array} \right\}$$ 16 kapubemenet

$$\mathbf{F} = (X_0 + \overline{X_2})(X_1 + X_2)(X_0 + \overline{X_3})(\overline{X_1} + \overline{X_2} + \overline{X_3})$$ 13 kapubemenet

5. feladat

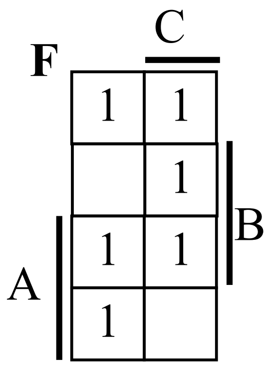
Formálisan specifikáljuk azt a háromváltozós F(A,B,C) logikai függvényt, amely kimenete F=1, ha az **A** bemenete megegyezik a **B** bemenetével vagy a **C** bemenete nem egyezik meg az **A** bemenetével.

- Melyik definíciós lehetőséget (igazság tábla, Karnaugh tábla, algebrai alak, minterm/maxterm index) célszerű választani?
- Határozzuk meg a legegyszerűbb algebrai alakját (diszjunktív vagy konjunktív).

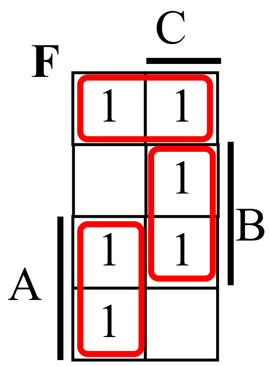
Megoldás

Az algebrai alakot – a feladat szövegéből közvetlenül felírható egy diszjunktív alak.

$$F(A,B,C) = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot C \rightarrow 12 \text{ kapubemenet}$$

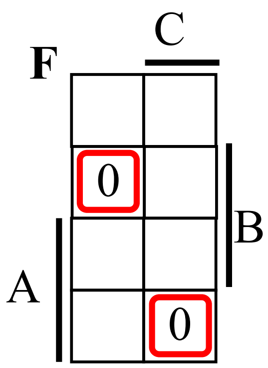


Legtegyszerűbb diszjunktív:



$$F(A,B,C) = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{C} + B \cdot C \rightarrow 9 \text{ kapubemenet.}$$

Legtegyszerűbb konjunktív:



$$F(A,B,C) = (A + \overline{B} + C) \cdot (\overline{A} + B + \overline{C}) \rightarrow 8 \text{ kapubemenet.}$$

A konjunktív alak egyszerűbb!

6. feladat

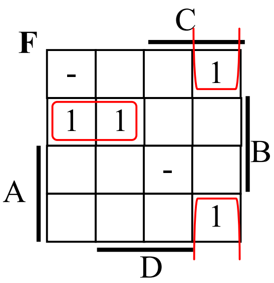
Formálisan specifikáljuk azt a négyváltozós F(A,B,C,D) logikai függvényt, amely kimenete F=0, ha a bemenetén lévő bináris kombinációra igaz az AB+C = CD+B logikai kifejezés. A specifikáció során vegyük figyelembe, hogy azok a bemeneti kombinációk nem fordulhatnak elő, ahol minden bemenet azonos értékű.

- Melyik definíciós lehetőséget (igazság tábla, Karnaugh tábla, algebrai alak, minterm/maxterm index) célszerű választani?
- Határozzuk meg a legegyszerűbb algebrai alakját (diszjunktív vagy konjunktív).

<u>Megoldás</u>

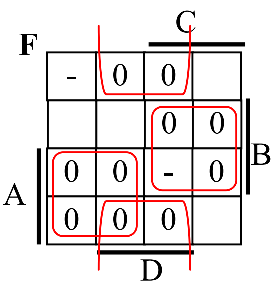
Az igazság táblázatot – a felírt bemeneti kombinációkra egyszerű ellenőrizni a feltételek teljesülését.

A	B	C	D	AB+C	CD+B	F
0	0	0	0	**0**	**0**	**-**
0	0	0	1	**0**	**0**	**0**
0	0	1	0	**1**	**0**	**1**
0	0	1	1	**1**	**1**	**0**
0	1	0	0	**0**	**1**	**1**
0	1	0	1	**0**	**1**	**1**
0	1	1	0	**1**	**1**	**0**
0	1	1	1	**1**	**1**	**0**
1	0	0	0	**0**	**0**	**0**
1	0	0	1	**0**	**0**	**0**
1	0	1	0	**1**	**0**	**1**
1	0	1	1	**1**	**1**	**0**
1	1	0	0	**1**	**1**	**0**
1	1	0	1	**1**	**1**	**0**
1	1	1	0	**1**	**1**	**0**
1	1	1	1	**1**	**1**	**-**



$F(A,B,C,D) = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$

8 kapubemenet



$F(A,B,C,D) = (\overline{A} + C) \cdot (\overline{C} + \overline{B}) \cdot (B + \overline{D})$

9 kapubemenet

7. feladat

Egy szoba világítását 4 kapcsoló (A,B,C,D) szabályozza. A szobában világít a lámpa (F=1), ha

az **A** és **B** kapcsoló be van kapcsolva, amikor a **C** és **D** kapcsoló nincs,

vagy

az **A** kapcsoló be van kapcsolva, amikor a C és D kapcsoló különböző állásban áll,

vagy

a **B** kapcsoló nincs bekapcsolva, amikor az **A** kapcsoló állása megegyezik a **D** kapcsoló állásával.

- Írjuk fel a világítást vezérlő logikai függvényt algebrai alakban.
- Írjuk fel a diszjunktív kanonikus algebrai alakját.
- Adjuk meg az igazság táblázatát, a Karnaugh tábláját, minterm és maxterm indexeit. (az indexek felírásakor az A kapcsolót a legmagasabb helyérték és a bekapcsolt állapotú kapcsoló 1 értékű)
- Határozzuk meg a függvény legegyszerűbb algebrai alakját (diszjunktív vagy konjunktív).

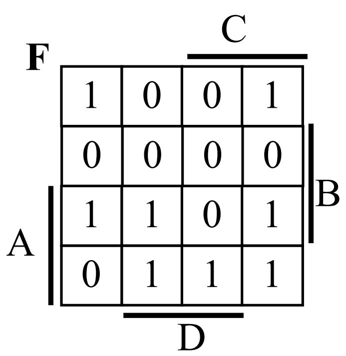
Megoldás

$$F = A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + A\cdot C\cdot\overline{D} + A\cdot\overline{C}\cdot D + \overline{B}\cdot A\cdot D + \overline{B}\cdot\overline{A}\cdot\overline{D}$$

$$F = AB\overline{C}\,\overline{D} + ABC\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}CD + \cancel{A\overline{B}\,\overline{C}D} + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

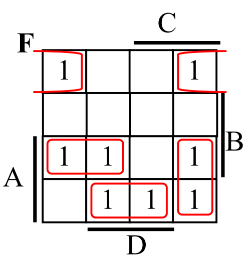
$$F = AB\overline{C}\,\overline{D} + ABC\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

A	**B**	**C**	**D**	**F**
0	0	0	0	**1**
0	0	0	1	**0**
0	0	1	0	**1**
0	0	1	1	**0**
0	1	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**
0	1	1	0	**0**
0	1	1	1	**0**
1	0	0	0	**0**
1	0	0	1	**1**
1	0	1	0	**1**
1	0	1	1	**1**
1	1	0	0	**1**
1	1	0	1	**1**
1	1	1	0	**1**
1	1	1	1	**0**



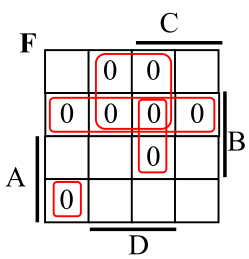
$$F(ABCD) = \sum^{4}(0,2,9,10,11,12,13,14)$$

$$F(ABCD) = \prod^{4}(0,7,8,9,10,11,12,14)$$



$$F = A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B}\cdot D + A\cdot C\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{D}$$

16 kapubemenet



$$F = (A+\overline{B})\cdot(A+\overline{D})\cdot(\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})\cdot(\overline{A}+B+C+D)$$

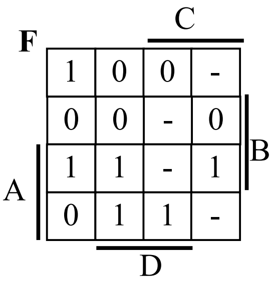
15 kapubemenet

8. feladat

Adjuk meg az előző feladat Karnaugh tábláját, minterm és maxterm indexeit, ha tudjuk, hogy a B és D kapcsoló soha nem állhat azonos állásban, amikor a C kapcsoló be van kapcsolva.

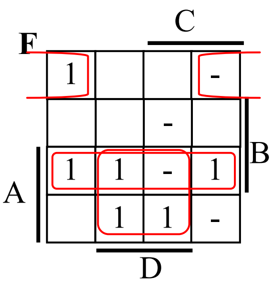
- Íruk fel a legegyszerűbb kétszintű diszjunktív illetve konjunktív algebrai alakot.

<u>Megoldás</u>



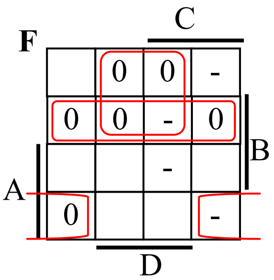
$$F(ABCD) = \sum^{4}[(0,9,11,12,13,14) + (2,7,10,15)]$$

$$F(ABCD) = \prod^{4}[(7,9,10,11,12,14) + (0,5,8,13)]$$



$$F(ABCD) = A \cdot B + A \cdot D + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{D}$$

10 kapubemenet



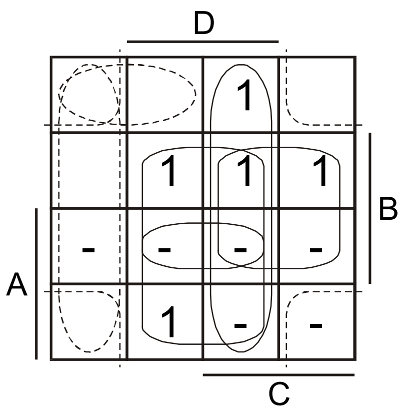
$$F(ABCD) = (A + \overline{B}) \cdot (A + \overline{D}) \cdot (\overline{A} + B + D)$$

10 kapubemenet

9. feladat

Határozzuk meg a legegyszerűbb kétszintű realizációját annak a logikai hálózatnak, amelynek kimenete F = 1, ha a bemeneten az 1-esek száma legalább annyi, mint a 0-ák száma, de a bemeneten csak BCD számok fordulhatnak elő. (Közömbös)

<u>Megoldás</u>



Ha az 1-eseket fedjük le:

$$F = AD + BD + BC + CD$$

12 kapubemenet

4 db 2 bemenetű ÉS
1 db 4 bemenetű VAGY

Ha a 0-ákat fedjük le:

$$F = (C + D)(B + D)(A + B + C)$$

10 kapubemenet

2 db 2 bemenetű VAGY
1 db 3 bemenetű VAGY
1 db 3 bemenetű ÉS