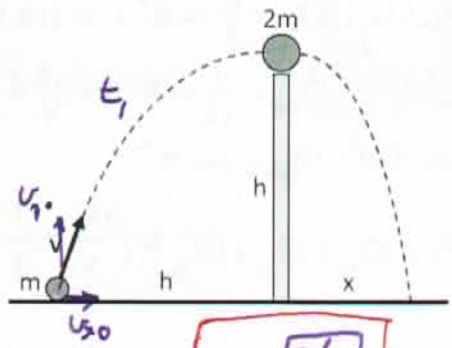
Villamosmérnök alapszak Fizika1 3. vizsga, 2023. jan. 18.	F1	F2	F3	F4	M	E1	E2	E3	E4	E5	Összesen	Bónusz	

NÉV: ____________________

Neptun kód: ____________________

Előadó: Márkus ☐ / Sarkadi ☐ / Vizsgakurzus ☐

1. Egy h magasságú oszlop tetején nyugszik egy $2m$ tömegű golyó. Az oszlop tövétől h távolságra a vízszintes talajról elhajítunk egy m tömegű másik golyót azzal a céllal, hogy vele az oszlop tetején lévőt eltaláljuk.



a) Mekkora nagyságú és irányú kezdősebességgel kell elhajítanunk az m tömegű golyót, ha azt szeretnénk, hogy annak sebessége éppen vízszintes irányú legyen, mikor a $2m$ tömegűt eltalálja? (2) $\bar{v}_0 = [v_{x0}; v_{y0}]$

$x(t_1) = h \rightarrow h = v_{x0} \cdot t_1 \rightarrow t_1 = \frac{h}{v_{x0}}$

$v_y(t_1) = 0 \rightarrow 0 = v_{y0} - g t_1 \rightarrow v_{y0} = g\frac{h}{v_{x0}}$

$y(t_1) = h \rightarrow h = v_{y0} t_1 - \frac{g}{2} t_1^2$

$h = g\frac{h}{v_{x0}}\cdot\frac{h}{v_{x0}} - \frac{g}{2}\cdot\frac{h^2}{v_{x0}^2}$

$h = \frac{gh^2}{2v_{x0}^2} \rightarrow \boxed{v_{x0} = \sqrt{\frac{gh}{2}}}$

$v_{y0} = g\frac{h}{\sqrt{\frac{gh}{2}}} = \boxed{\sqrt{2gh}}$

$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{gh}{2}}} = 2}$

$v = \sqrt{\frac{gh}{2} + 2gh} = \boxed{\sqrt{\frac{5gh}{2}}}$

b) Az m tömegű golyó rugalmasan ütközik az oszlop tetején nyugvó $2m$ tömegűvel, amely nincs az oszlopoz rögzítve. Mekkora sebességre tesz szert a $2m$ tömegű golyó? (2)

$\overset{m\ v_{x0}}{\circ\!\rightarrow}\ \overset{2m}{\bigcirc} \Rightarrow \overset{v_1}{\circ\!\rightarrow}\ \overset{u}{\bigcirc\!\rightarrow}$

Imp.: $m v_{x0} = m v_1 + 2m u \longrightarrow v_1 = v_{x0} - 2u \longrightarrow v_{x0}^2 = (v_{x0} - 2u)^2 + 2u^2$

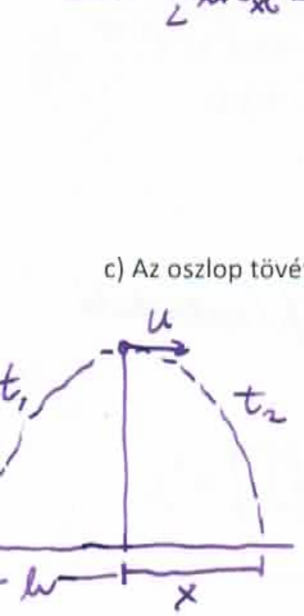
En.: $\frac{1}{2} m v_{x0}^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} 2m u^2 \rightarrow v_{x0}^2 = v_1^2 + 2u^2$

$v_{x0}^2 = v_{x0}^2 - 4v_{x0}u + 4u^2 + 2u^2$

$4v_{x0}u = 6u^2$

$\boxed{u = \frac{2}{3} v_{x0}}$

c) Az oszlop tövétől mekkora távolságra ér földet a $2m$ tömegű golyó? (1)



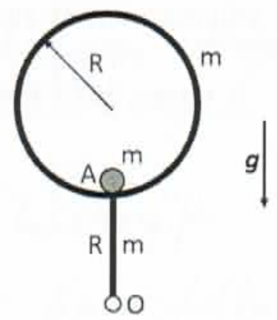
$h = v_{x0} t_1 \qquad x = u \cdot t_2$

$t_1 = t_2$

$\frac{x}{h} = \frac{u t_1}{v_{x0} t_1} = \frac{u}{v_{x0}} = \frac{\frac{2}{3} v_{x0}}{v_{x0}} = \frac{2}{3}$

$\boxed{x = \frac{2}{3} h}$

2. Egy R sugarú, m tömegű, vékony falú gömbhéjat R hosszúságú és m tömegű rúdhoz kötünk mereven az ábra szerint. Az 'A' pontban m tömegű kicsiny test rögzül a gömbhéj belső falához. A rúd végét az 'O' pontban könnyen forgó csuklóhoz rögzítjük.



a) Határozzuk meg a rendszer tehetetlenségi nyomatékát az O pontra vonatkoztatva! Tudjuk, hogy a gömbhéj tehetetlenségi nyomatéka a saját TKP-ján átmenő tengenyre vonatkoztatva $\Theta = {}^2/_3\, mR^2$ A rúd tehetetlenségi nyomatéka a saját TKP-ján átmenő tengelyre vonatkoztatva: $\Theta = {}^1/_{12}\, mR^2$ (2)

Gömbhéj: $\Theta_{10} = \frac{2}{3} mR^2 + m(2R)^2 = \frac{2}{3} mR^2 + \frac{12}{3} mR^2 = \frac{14}{3} mR^2$

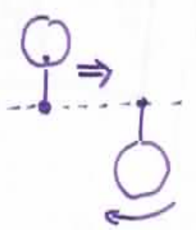
Rúd: $\Theta_{20} = \frac{1}{12} mR^2 + m\left(\frac{1}{2}R\right)^2 = \frac{1}{12} mR^2 + \frac{3}{12} mR^2 = \frac{1}{3} mR^2$

Steiner-tétel

Kis test: $\Theta_{30} = mR^2$

$$\Theta = \Theta_{10} + \Theta_{20} + \Theta_{30} = \left(\frac{14}{3} + \frac{1}{3} + \frac{3}{3}\right) mR^2 = \frac{18}{3} mR^2 = \boxed{6 mR^2}$$

b) A rendszert a felső, instabil egyensúlyi helyzetéből kezdősebesség nélkül elindítjuk. Mekkora szögsebességgel forog az O pont körül a rendszer akkor, amikor az alsó, stabil egyensúlyi helyzetén halad át mozgása során? A disszipatív erőket hanyagoljuk el! (1,5)



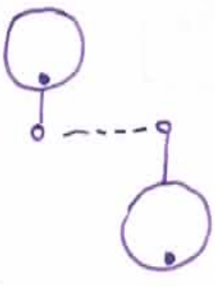
Mech. en.: $E_{pot_1} + E_{kin_1} = E_{pot_2} + E_{kin_2}$

$$\underbrace{mg2R + mg\frac{R}{2} + mgR + 0}_{} = \underbrace{-mg2R - mg\frac{R}{2} - mgR + \frac{1}{2}\Theta\omega^2}_{}$$

$$mgR(4+1+2) = \frac{1}{2} \cdot 6 mR^2 \omega^2$$

$$7g = 3R\omega^2 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{7g}{3R}}}$$

c) A rendszert újból a felső, instabil egyensúlyi helyzetéből indítjuk el kezdősebesség nélkül. Most az A pontban lévő m tömeg NINCS RÖGZÍTVE a gömbhéjhoz, hanem szabadon mozoghat a gömb belsejében. A rendszert magára hagyjuk. Kellően hosszú idő elteltével a rendszer lengését a súrlódás és a közegellenállás megállítja. Összesen mennyi munkát végeztek a disszipatív erők? (1,5)



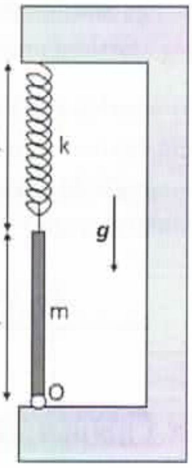
$$E_1 = mg2R + mg\frac{R}{2} + mgR = \frac{7}{2} mgR$$

$$E_2 = -mg2R - mg\frac{R}{2} - mg \cdot 3R = -\frac{11}{2} mgR$$

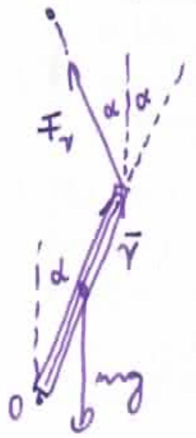
A potenciális energia csökkenésekor felszabaduló energiamennyiség disszipálódik.

$$W = \Delta E = -\frac{11}{2} mgR - \frac{7}{2} mgR = \boxed{-9 mgR}$$

3. Egy *m* tömegű, homogén, *L* hosszúságú merev rudat egyik végénél könnyen forgó csuklóhoz erősítünk. A rúd másik végéhez *k* direkciójú rugó csatlakozik. A rugó nyújtatlan állapotban elhanyagolható hosszúságú, azonban az ábrán vázolt helyzetben, mikor a rúd függőleges, a rugó hossza éppen *L*. A rúd O ponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{3} mL^2$



a) A rudat függőleges helyzetéből kicsiny α szögben kitérítjük. Írja fel a rúdra ható erők forgatónyomatékainak eredőjét α függvényében! Használja a $\sin(\alpha) \approx \alpha$ $\cos(\alpha) \approx 1$ közelítéseket! (2)



$$F_r' = k \cdot l' = k \cdot \frac{l}{\cos\alpha} \approx kl$$

$$|\bar{M}_r| = |\bar{r} \times \bar{F}_r| = |\bar{r}||\bar{F}_r| \cdot \sin 2\alpha \approx l \cdot kl \cdot 2\alpha$$

$$\circlearrowright |\bar{M}_r| = 2l^2 k \alpha$$

$$\circlearrowleft |\bar{M}_g| = \left|\frac{\bar{r}}{2} \times m\bar{g}\right| = \frac{l}{2} \cdot mg \sin\alpha \approx \frac{l}{2} mg \alpha$$

$$\boxed{\Sigma M = \frac{l}{2} mg\alpha - 2l^2 k\alpha}$$

b) Legalább mekkora legyen a rugó *k* direkciós állandója, ha azt szeretnénk, hogy a rúd magára hagyva függőleges helyzetben legyen stabil egyensúlyi állapotban? (1)

Egyensúly stabil, ha $\circlearrowright |M_r| > |M_g| \circlearrowleft$

$$2l^2 k\alpha > \frac{l}{2} mg\alpha$$

$$\boxed{k > \frac{mg}{4l}}$$

c) Mekkora periódusidejű rezgést végez a rendszer kis kitérések esetén, ha a b) feladatban leírt feltétel teljesül? (2)

$$M = \Theta\beta \Rightarrow \left(\frac{l}{2} mg - 2l^2 k\right)\alpha = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\alpha}$$

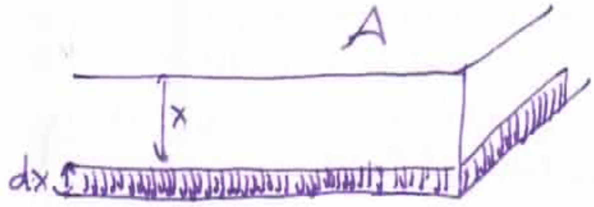
$$\ddot{\alpha} = -\underbrace{\frac{3\left(-\frac{mg}{2} + 2lk\right)}{ml}}_{\omega_0^2} \cdot \alpha$$

$$\omega_0^2 = 3\left(\frac{2k}{m} - \frac{g}{2l}\right)$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{3\left(\frac{2k}{m} - \frac{g}{2l}\right)}}}$$

4. Egy A felületű tó felszínén x vastagságú jégtakaró van. A jég felett a levegő hőmérséklete T_1=-5°C, a jég alatt a víz hőmérséklete T_0=0°C.

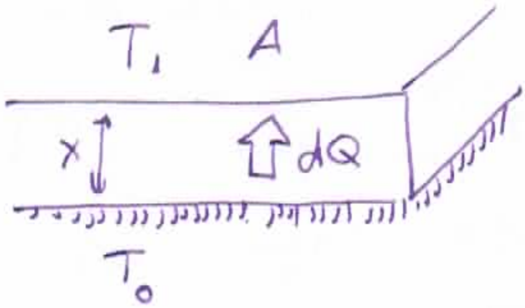
a) Mekkora dQ hőmennyiség áramlik ki a jégpáncélon keresztül, miközben a jég vastagsága kicsiny dx mértékben megnő? A víz olvadáshője L, sűrűsége ρ. (A vastagodó jég hőmérséklet-eloszlásának megváltozásához szükséges hő mértékét hanyagoljuk el, csupán a halmazállapot-változással foglalkozzunk!)(1,5)



$$\Delta m = A \cdot dx \cdot \rho$$

$$dQ = L \cdot dm = \boxed{L \cdot A \cdot dx \cdot \rho}$$

b) Mennyi dt idő szükséges ahhoz, hogy a kezdetben x vastagságú jég kicsiny dx vastagsággal hízzon? A jég hővezetési tényezője λ. A T_1 és T_0 hőmérséklet mindvégig állandó. (2)

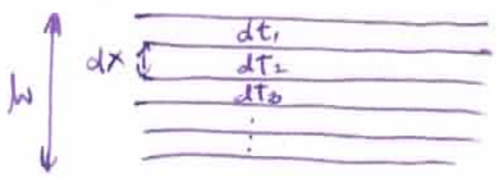


$$\frac{dQ}{dt} = \lambda \cdot \frac{A}{x} \cdot (T_0 - T_1)$$

$$dt = \frac{dQ\, x}{\lambda A \cdot (T_0 - T_1)} = \frac{L A \cdot dx \cdot \rho \cdot x}{\lambda A (T_0 - T_1)}$$

$$\boxed{dt = \frac{L \rho x}{\lambda (T_0 - T_1)} dx}$$

c) Mennyi idő szükséges ahhoz, hogy a kezdetben jégtakaró nélküli tó felszínén egy adott h vastagságú jégpáncél alakuljon ki? (1,5)



$$t = \sum dt_i \rightarrow t = \int_0^h \frac{L \rho x}{\lambda (T_0 - T_1)} dx$$

$$t = \frac{L \rho}{\lambda (T_0 - T_1)} \int_0^h x\, dx = \frac{L \rho}{\lambda (T_0 - T_1)} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^h$$

$$t = \frac{L \rho}{\lambda (T_0 - T_1)} \left(\frac{h^2}{2} - 0 \right)$$

$$\boxed{t = \frac{L \rho h^2}{2 \lambda (T_0 - T_1)}}$$

Kiegészítendő mondatok

Egészítse ki az alábbi hiányos mondatokat úgy a megfelelő szavakkal, szókapcsolatokkal, matematikai kifejezésekkel (skalár-vektor megkülönböztetés), hogy azok a Fizika I tantárgy színvonalának megfelelő, fizikailag helyes állításokat fogalmazzanak meg!

---

1. Az erő mértékegysége az SI alapmennyiségek egységével kifejezve ......$kg\,m/s^2$.....
2. Két test kölcsönhatása során a testek ....azonos............ nagyságú, ...ellentétes irányú erővel hatnak egymásra.
3. 20 m/s kezdősebességgel függőlegesen lefelé elhajított test sebessége körülbelül ......2 s....... múlva megduplázódik.
4. A tapadási súrlódási erő ....maximális értéke........ arányos a felületeket összenyomó erővel.
5. Egy lejtőn csúszó testre ható nehézségi erő kétszer akkora, mint a rá ható tartóerő. A lejtő hajlásszöge ....60°..............
6. Leejtünk két testet. Az egyiken a nehézségi erő kétszer annyi idő alatt végez ugyanannyi munkát, mint a másikon egységnyi idő alatt. A két test tömegének aránya ....1:4.....................
7. Pontszerű test gravitációs terébe helyezett tömegpont potenciális energiája arányos a vonzócentrumtól mért távolság ....reciprokával.......................
8. Egy forgó kerék szögsebességét megduplázzuk. Impulzusmomentuma ....2........ szeresére nő.
9. Egy ellipszispályán keringő bolygó mozgása során háromszor távolabb került a naptól. A bolygó nap középpontjára vonatkoztatott impulzusmomentuma ....nem..................... változott.
10. Egy krumplit kötőtűvel átszúrunk, majd a tűt vízszintes helyzetben rögzítjük úgy, hogy az tengelye körül könnyen elfordulhasson. A tengely és a krumpli tömegközéppontja közti távolság x. Minél kisebb x értéke, a krumpli-inga lengésideje annál ....nagyobb....................
11. Kényszerrezgés amplitúdója rezonancia esetén adott gerjesztés mellett annál nagyobb, minél kisebb a rezgő rendszer ...csillapítása
12. A Föld forgásának kimutatására alkalmas nagy lengésidejű, kis csillapítású inga neve ....Foucault-inga.........
13. Ha egy ideális gázzal végrehajtott állapotváltozás során a gáz nyomása arányos a hőmérséklettel, a folyamat .....izochor..........
14. A kinetikus gázelmélet szerint a gáz ......nyomása........ az edény falával ütköző gázrészecskék impulzusváltozásából származik.
15. Egy gázt eredeti térfogatának felére összenyomtuk, a nyomása négyszeresére nőtt. A gáz hőmérséklete ....2..............-szorosa/-szerese eredeti hőmérsékletének.

Kifejtendő kérdések

Tömör, lényegre törő, vázlatszerű, fizikailag és matematikailag pontos válaszokat várunk.
Ha szükséges, rajzoljon magyarázó ábrákat!

---

1. Nevezze meg az egyenletes körmozgást végző vonatkoztatási rendszerekben fellépő tehetetlenségi erőket! (1) Milyen összefüggésekkel határozhatóak meg a fenti erők? Nevezze meg a bevezetett fizikai mennyiségeket! (2)

- Centrifugális erő: $\bar{F}_{cf} = -2m\,\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$
- Coriolis-erő $\bar{F}_{cor} = -m\,\bar{\omega}\times\bar{v}'$

$\bar{\omega}$: vonatkoztatási rendszer szögsebessége

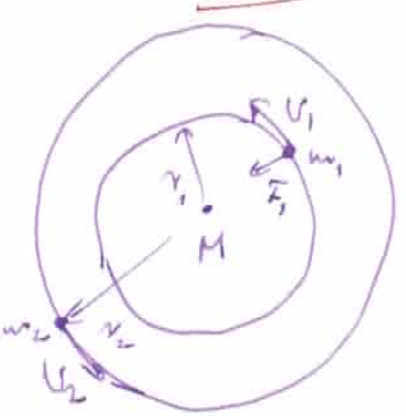
$\bar{r}$: test helyvektora

$\bar{v}'$: test sebessége a forgó rendszerhez viszonyítva

2. Írja le egy mondatban, valamint egy matematikai összefüggés segítségével Kepler III. törvényét! (1) Ábra és levezetés segítségével igazolja a tételt körpályán keringő bolygókra vonatkoztatva! (2)

A bolygópályák nagytengelyeinek köbei úgy arány-lanak egymáshoz, mint a keringési idők négyzetei.

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$$



$$\sum F_1 = m_1 a_{cp1}$$

$$\gamma \frac{m_1 M}{r_1^2} = m_1 \frac{v_1^2}{r_1} \Rightarrow v_1^2 = \frac{\gamma M}{r_1}$$

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2 r_1^2}{v_1^2} = \frac{4\pi r_1^2}{\frac{\gamma M}{r_1}} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}\cdot r_1^3$$

$$\Downarrow$$

$$T^2 \sim r^3 \Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

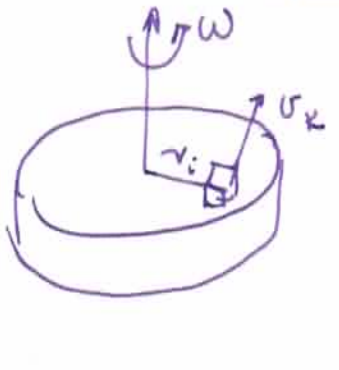
3. Írja fel matematikai alakban, valamint egy mondatban a pontrendszerekre vonatkozó impulzusmomentum-tételt! (2) Milyen feltétel mellett marad meg egy pontrendszer impulzusmomentuma? (1)

Egy pontrendszer impulzusmomentumának idő szerinti deriváltja egyenlő a pontrendszerre ható külső erők forgatónyomatékainak eredőjével. $\sum \bar{M}_k = \dot{\bar{N}}$

Ha $\sum M_k = 0$ akkor $\dot{\bar{N}} = 0 \Rightarrow \bar{N} =$ állandó

---

4. Ábra, valamint levezetés segítségével mutassa meg, hogy rögzített, szimmetriatengely körül forgó merev testek esetén az impulzusmomentum és a szögsebesség közt egyenes arányosság van, az arányossági tényező a tehetetlenségi nyomaték! (1,5) Az impulzusmomentum tétel ismeretében vezesse le a merev testek forgómozgásának ismert alapegyenletét! $M=\Theta\beta$ (1,5)



$v_k = r_i \omega$

$I_i = m_i \cdot v_k = r_i \cdot m_i \cdot \omega$

$\bar{N}_i = \bar{r}_i \times \bar{I}_i$ $\quad \bar{r}_i \perp \bar{I}_i \quad \bar{N}_i \parallel \bar{\omega}$

$|N_i| = r_i \bar{I}_i = r_i^2 m_i \cdot \omega$

$N = \sum N_i = \omega \underbrace{\sum m_i r_i^2}_{\Theta} = \Theta \omega$

$\sum \bar{M} = \dot{\bar{N}} \Rightarrow M = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\Theta \Delta \omega}{\Delta t} = \Theta \overbrace{\frac{\Delta \omega}{\Delta t}}^{\beta} = \Theta \beta$

5. Írja fel három, egymástól független megfogalmazásban a termodinamika II. főtételét! (3)

- Külső beavatkozás nélkül a hő mindig a melegebb test felől a hidegebb felé áramlik.
- Nem készíthető olyan ciklikusan működő hőerőgép, mely adott hőtartályok között nagyobb hatásfokkal működne, mint egy carnot-gép.
- Külső beavatkozás nélkül egy rendszer entrópiája nem csökken.