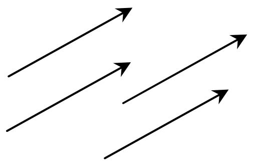
# I. Vektorok, vektorműveletek

## I.1. A vektor fogalma, tulajdonságai.

**Vektor meghatározása**: olyan mennyiség, amelynek „nagysága” és iránya is van. Röviden szokták „irányított szakasznak” is nevezni. A vektor nagyságát szokták a vektor hosszának, abszolút-értékének, vagy normájának is nevezni.

**Jelölések**: a sokféle jelölés közül ezen jegyzetben a következőt használjuk. Az ’a’ vektort $\vec{a}$ -val jelöljük. Egy vektor hosszát általában két függőleges vonallal jelöljük, vagyis $\vec{a}$ vektor hosszát, nagyságát, pontosabban abszolút értékét $|\vec{a}|$ -kel. Később egyszerűen elhagyjuk a vektorjelet a betűjelzés fölött, vagyis röviden $|\vec{a}| = a$ .

**Megjegyzés**: a meghatározásnak fontos része, hogy abban nem rögzített a vektor kezdő, vagy végpontja, csak az iránya. Ez azt jelenti, hogy az alábbiak mind ugyanazon vektort jelentik:



$\vec{a}$

## I.2. Vektorok leírása derékszögű Descartes-koordinátarendszerben

A konkrét számolások, főként a Fizikai alkalmazások során szükség van arra, hogy a vektorokkal elvégzett műveleteket ne szerkesztési feladatként adjuk meg, hanem számokkal és/vagy függvényekkel végrehajtható műveletekkel szeretnénk helyettesíteni. Ehhez valamilyen koordináta-rendszerben érdemes az összefüggéseket leírni, ahol a vektorokkal végzett műveleteket a vektor-komponensekkel (amik számok és/vagy függvények) adjuk meg.

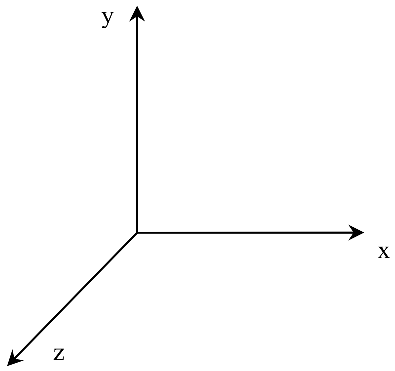
### I.2.1. A derékszögű Descartes-koordinátarendszer

A sok különböző koordináta-rendszer közül a leggyakrabban használt, és talán legegyszerűbb a **derékszögű Descartes-koordinátarendszer**. Ennek a koordinátarendszernek három tengelye van, mindhárom egy-egy hosszúságmértéket jelöl.

A koordinátarendszer három tengelye egymásra merőleges, és az ’x’, az ’y’ és a ’z’ tengelyek ezen sorrendben jobbkéz-rendszert alkotnak, vagyis a három tengely felfektethető ebben a sorrendben a jobb kezünk merőlegesen kinyújtott hüvelyk, mutató és középső ujjára.

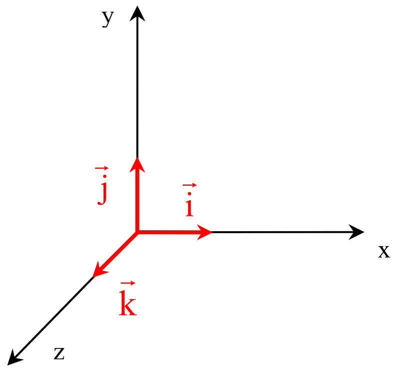
ÁBRA!

Amikor egy problémát ebben a koordinátarendszerben kívánunk megoldani, ki kell választanunk az origó helyét, és két tengely (egymásra egyébként merőleges) irányát. A harmadik tengely ránya a merőlegességből és a jobbkéz-szabályból azonnal adódik.



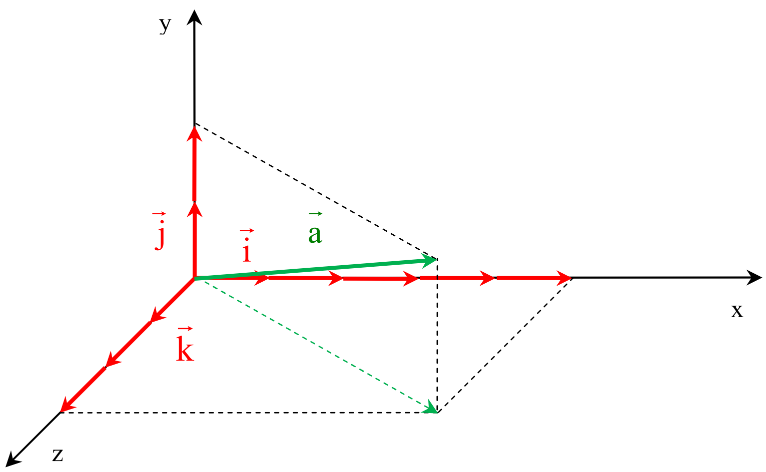

## I.2.2. Egységvektorok derékszögű Descartes-koordinátarendszerben

Ahhoz, hogy ebben a koordinátarendszerben egy tetszőleges vektort le tudjunk írni, szükségünk van három egységvektorra, $\vec{i}$ -re, $\vec{j}$ -re és $\vec{k}$ -ra. Ezek olyan vektorok, amelyek az origóból indulnak, irányuk a választott tengely irányába mutat (lásd ábra), és a hosszúságuk egységnyi (vagyis valamilyen mértékegységben 1).




## I.2.3. Vektorok leírása a derékszögű Descartes-koordinátarendszerben

Ezekkel már könnyedén jellemezni tudunk egy tetszőleges $\vec{a}$ vektort a választott koordináta-rendszerben.



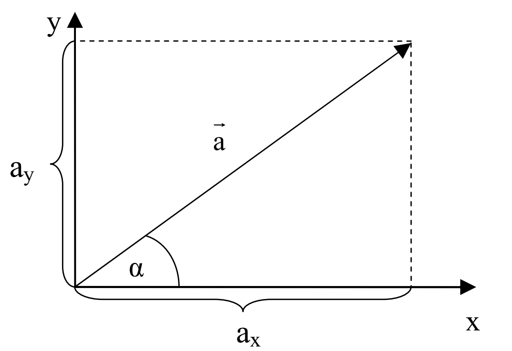
Jól láthatóan $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, ezzel egyenértékű jelölés, hogy $\vec{a} = (5, 2, 3)$.

Általában, ha $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, akkor ehelyett a koordinátarendszerben úgy írjuk fel, mint $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Így a vektorunkat három számmal, vagy ha a vektor változik (mondjuk az időtől függően változik a nagysága és/vagy az iránya), akkor három egyszerű függvénnyel helyettesítettük, így a számolások is könnyebben elvégezhetőek velük.

**Megjegyzés**: $a_x$-t, $a_y$-t és $a_z$-t az $\vec{a}$ vektor 'x', 'y', illetve 'z' irányú komponenseinek nevezzük.

### I.2.4. Vektor komponensekre bontása két dimenzióban

Előfordul, hogy egy vektort nem felrajzolva látunk, hanem a hosszúsága, és az iránya adott, és nekünk ezekből kellene az egyes komponenseit kiszámolni. Ez három dimenzióban nehéz lehet, ezért itt csak két dimenzió esetére mutatjuk be az eljárást. Az alábbiakban egy kétdimenziós derékszögű Descartes-koordinátarendszerben megadunk egy vektort, amelynek ismerjük a hosszát és az 'x' tengellyel bezárt szögét, vagyis




és ebben a helyzetben keressük az $a_x$ és $a_y$ koordinátákat. Az eljárásmód lényege, hogy észrevesszük, hogy a komponenseket mutató segédvonalakkal két derékszögű háromszöget kapunk, amelyek közül az alsónak ismerjük a szögeit, illetve az átfogó hosszát, ami $|\vec{a}|$. Írjuk fel az α szög sinus-át és cosinus-át!

$\sin(\alpha) = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, vagyis a két keresett vektorkomponens

$$a_y = |\vec{a}|\sin(\alpha), \quad a_x = |\vec{a}|\cos(\alpha).$$

**Megjegyzés**: fontos kiemelni, hogy a fenti összefüggések attól függnek, hogy a háromszögnek melyik szögét ismerjük! Ha a vektornak nem az 'x' tengelyhez képesti, hanem az 'y'-hoz mért szöge adott, bár az eljárás ugyanez, az eredmény más lesz (a sinus és a cosinus cserélődik). De az is elképzelhető, hogy valamelyik tengely iránya, vagy elnevezése lesz más (előfordul, hogy a hajításos feladatokban a függőleges irányt a 'z' tengely irányába választják, ahogy az is, hogy ez a tengely lefelé mutat).

Vagyis a fentiekből mindenképpen az eljárásmódot kell elsajátítani, nem a végeredményeket!

## I.3. Vektorok összeadása

A vektorok összeadása olyan művelet, amely két kiindulási vektorból egy vektort képez.

### I.3.1. Két vektor összeadásának értelmezése

Geometriailag két vektor (legyenek ezek most $\vec{a}$ és $\vec{b}$) összege egy olyan $\vec{c}$ vektor, amely úgy jön létre, hogy az összeadásban elől álló vektor végéhez (ahol a nyíl található) illesztjük a másik vektor elejét. Az összegvektor az első vektor elejétől mutat a második végébe.

Animáció a ppt alapján!

### I.3.2. Két vektor összeadása a paralelogramma-módszerrel

Ennek egy másik megoldása a paralelogramma-módszer. Itt a két kiindulási vektort egy pontból indítjuk, az így kapott alakzatot kiegészítjük paralelogrammává. Ennek az átlója határozza meg az eredményvektor irányát, mégpedig az, amelyik a két vektor közös kezdőpontjából indul.

Animáció a ppt alapján!

### I.3.3. Két vektor összeadása derékszögű Descartes-koordinátarendszerben

Amennyiben ezt az összeadást szeretnénk egy derékszögű Descartes-koordinátarendszerben elvégezni, az alábbi módon kell eljárnunk.

1. Meghatározzuk a két kiindulási vektor komponenseit, ezek jelen esetben $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ és $\vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$.
2. Keressük az eredményvektor komponenseit, vagyis $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \left(c_x, c_y, c_z\right)$.
3. Kiszámoljuk az egyes komponenseket az alábbi módon:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix},$$

vagyis ebben a koordinátarendszerben az összeadást külön-külön komponensenként hajthatjuk végre.

## I.4. Vektor szorzása számmal (skalárral)

Egy vektort megszorozhatunk egy számmal, az eredmény egy vektor lesz. Ez a művelet alapvetően a kiindulási vektor hosszát változtatja meg, az irány csak akkor változik, ha a szám, amivel szorzok, negatív (ellenkező irányba fog mutatni az eredmény).

### I.4.1. Vektor számmal történő szorzásának értelmezése

Ha az $\vec{a}$ vektort pozitív $\mu$ számmal szorozzuk meg, akkor a $\vec{c} = \mu\vec{a}$ vektor azonos irányú lesz, mint $\vec{a}$, hossza pedig az eredeti vektor $\mu$-szöröse lesz. Nyilván, ha $\mu > 1$, akkor a hossz nőni fog, ha $\mu = 1$, akkor a hosszúság is ugyanaz marad, ha pedig $0 < \mu < 1$, akkor $\vec{c}$ hossza kisebb lesz, mint $\vec{a}$ hossza.

Ha az $\vec{a}$ vektort $\mu = 0$-val szorozzuk, az eredmény úgynevezett nullvektor lesz (ennek hossza 0, iránya nem meghatározható).

Ha az $\vec{a}$ vektort negatív $\mu$ számmal szorozzuk meg, akkor a $\vec{c} = \mu\vec{a}$ vektor ellentétes irányú lesz (vagyis az eredetivel párhuzamos, de ellentétes irányba mutató), hossza pedig úgy változik, mintha az eredeti vektort $|\mu|$-el szoroznánk (mivel $|\mu|$ pozitív szám, a hossz a fentieknek megfelelően változik).

**Megjegyzés**: ebben a bevezetőben a vektorokat latin betűkkel, a skalárokat görög betűkkel jelöljük, hogy azok így is könnyebben különválaszthatóak legyenek.

Animáció a ppt alapján!

### I.4.2. Vektor szorzása számmal derékszögű Descartes-koordinátarendszerben

Amennyiben az $\vec{a}$ vektort $\mu$ számmal szorozzuk meg, akkor a $\vec{c} = \mu\vec{a}$ vektor komponensei egy derékszögű Descartes-koordinátarendszerben az alábbi módon számolhatóak ki.

1. Meghatározzuk a kiindulási vektor komponenseit, ezek jelen esetben $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$.
2. Keressük az eredményvektor komponenseit, vagyis $\vec{c} = \mu\vec{a} = \left(c_x, c_y, c_z\right)$.
3. Kiszámoljuk az egyes komponenseket az alábbi módon:

$$\vec{c} = \mu\vec{a} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu a_x \\ \mu a_y \\ \mu a_z \end{pmatrix},$$

vagyis ebben az esetben is komponensenként hajthatjuk végre a műveletet.

## I.5. Két vektor kivonása

Két vektor kivonása olyan művelet, amely két kiindulási vektorból egy vektort képez.

### I.5.1. Két vektor kivonásának értelmezése

Geometriailag két vektor (legyenek ezek most $\vec{a}$ és $\vec{b}$) különbségét, mely egy $\vec{c}$ vektor lesz, legegyszerűbben úgy értelmezhetjük, mintha az $\vec{a}$ vektort és a $-\vec{b}$ vektort adnánk össze, vagyis $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Az eljárás tehát az, hogy a kivonandó vektor irányát megfordítjuk, és az így kapott vektort adjuk össze a kivonás első tagjával.

Animáció a ppt alapján!

**Megjegyzés**: míg az összeadás során a két kiindulási vektor felcserélhető, a kivonás során ez természetesen (ahogy a számok esetén is) nem így van, a két vektor nem felcserélhető. Amennyiben az összefüggést mégis ellentétes sorrendben írjuk fel, a végeredmény ellentétes irányú lesz, mint az alapesetben, vagyis

$$\vec{b} - \vec{a} = -(\vec{a} - \vec{b}).$$

### I.5.2. Két vektor kivonása a paralelogramma-módszerrel

Ennek is létezik egy, a paralelogramma-módszeren alapuló eljárásmódja. Itt is a két kiindulási vektort egy pontból indítjuk, az így kapott alakzatot kiegészítjük paralelogrammává. Ennek most az az átlója határozza meg az eredményvektor irányát, amelyik a két végpontot köti össze, az irányítás pedig a „vég mínusz kezdet” mondókával határozható meg. Ez alapján $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ vektor a paralelogrammában $\vec{b}$ vége felől mutat $\vec{a}$ vége felé.

Animáció a ppt alapján!

### I.5.3. Két vektor kivonása derékszögű Descartes-koordinátarendszerben

Ismét elvégezzük a műveletet egy derékszögű Descartes-koordinátarendszerben.

1. Meghatározzuk a két kiindulási vektor komponenseit, vagyis $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ és $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$.
2. Keressük az eredményvektor komponenseit, vagyis $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (c_x, c_y, c_z)$.
3. Kiszámoljuk az egyes komponenseket az alábbi módon:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix},$$

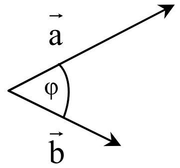
vagyis ebben az esetben is komponensenként hajthatjuk végre a kivonást.

## I.6. Két vektor skaláris szorzata

Két vektor skaláris szorzata olyan művelet, amely a két kiindulási vektorból egy számot, vagyis skalárt képez (ezért is nevezzük skaláris szorzatnak). A skaláris szorzást általában egy ponttal szoktuk jelölni, vagyis $\lambda = \vec{a} \cdot \vec{b}$, de időnként elhagyjuk a pontot, hasonlóan a skalárok szorzásához.

### I.6.1. Két vektor skaláris szorzatának kiszámítása

Két vektor (legyenek ezek ismét $\vec{a}$ és $\vec{b}$) skaláris szorzata az a $\lambda$ szám, amely a két vektor hosszából, és az általuk bezárt szögből számolható ki (ehhez természetesen a két vektor közös kezdőpontba kell párhuzamosan tolni).




A skaláris szorzat ekkor:

$$\lambda = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi).$$

**Megjegyzés**: mivel a cosinus függvény páros, ezért a két vektor által bezárt szöget mindegy, hogy melyik vektortól mérjük. Ezért a skaláris szorzásban a két vektor felcserélhető, vagyis

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

**Megjegyzés**: a cosinus függvény tulajdonságai miatt (és mert a vektorok hossza mindig pozitív), ha a két vektor által bezárt szög hegyes szög, akkor a skaláris szorzat pozitív, amennyiben a bezárt szög tompaszög, a skaláris szorzat negatív lesz.

### I.6.2. Speciális esetek a két vektor helyzetétől függően

A skaláris szorzás esetén fontos három speciális esetet kiemelni, amelyek egyenesen adódnak a cosinus függvény tulajdonságaiból.

1. a két vektor által bezárt szög 0°, vagyis a két vektor párhuzamos, és egy irányba mutatnak.
   Ekkor $\lambda = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$, és két, adott hosszúságú vektor esetén ez a maximális értéke a skaláris szorzatnak.
2. a két vektor által bezárt szög 90°, vagyis a két vektor merőleges egymásra.
   Ekkor $\lambda = \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
3. a két vektor által bezárt szög 180°, vagyis a két vektor párhuzamos, de ellentétes irányba mutatnak.
   Ekkor $\lambda = \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$, és két, adott hosszúságú vektor esetén ez a legkisebb értéke a skaláris szorzatnak.

### I.6.3. Két vektor skaláris szorzata derékszögű Descartes-koordinátarendszerben

Ismét elvégezzük a műveletet egy derékszögű Descartes-koordinátarendszerben.

1. Meghatározzuk a két kiindulási vektor komponenseit, vagyis $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ és $\vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$.
2. Kiszámoljuk a skaláris szorzás eredményét az alábbi módon:

$$\lambda = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Jól látható, hogy a művelet itt már összekeveri egymással a komponenseket.

**Megjegyzés**: a fenti határesetek jó ellenőrzési lehetőséget kínálnak a koordináta-rendszerekben megadott vektorok esetén. Míg a geometriában jól látható, hogy két vektor által bezárt szög hegyesszög, vagy tompaszög, esetleg nulla, vagy derékszög, addig ez a komponenseken nem mindig látszik. Viszont a skaláris szorzás eredménye segít ennek feltárásában.

## I.7. Vektor hossza és iránya

A skaláris szorzás segítségével meghatározható egy vektor hosszúsága, illetve két vektor egymáshoz viszonyított szöge.

### I.7.1. Vektor hossza

Tekintsük az $\vec{a}$ vektor önmagával vett skaláris szorzatát! Mivel önmagával a vektor 0°-os szöget zár be, a skaláris szorzat eredménye:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| = |\vec{a}|^2 ,$$

vagyis egy vektor hossza kiszámítható az alábbi összefüggéssel:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} .$$

Ha a vektort koordinátákkal írjuk fel, akkor azonnal kiszámítható egy vektor hossza

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} ,$$

ami két dimenzióban jól láthatóan a Püthagorasz-tételt adja.

### 1.7.2. Két vektor relatív helyzete

Két vektor által bezárt szöget nem csak lemérni tudjuk, hanem egy adott koordinátarendszerben számolással is. Ugyanis két vektor skaláris szorzata alapján

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

és mind a skaláris szorzatot, mind az egyes vektorok hosszát a komponenseik nagyságából ki tudjuk számítani a fentiek segítségével.

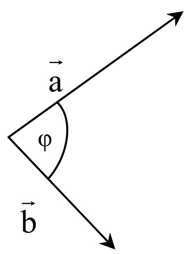
## I.8. Két vektor vektoriális szorzata

Két vektor vektoriális szorzata olyan művelet, amely a két kiindulási vektorból egy harmadik vektort állít elő (ezért is nevezzük vektoriális szorzatnak). Ezt a fajta szorzást általában ×-el szoktuk jelölni, vagyis $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

### I.8.1. Két vektor vektoriális szorzatának meghatározása

Ezen művelet esetén külön foglalkoznunk kell az eredmény (ami jelenleg a $\vec{c}$ jelű vektor) hosszával és irányával.

A két vektor (legyenek ezek ismét $\vec{a}$ és $\vec{b}$) vektoriális szorzatának hossza a két vektor hosszából, és az általuk bezárt szögből számolható ki (ehhez természetesen a két vektor közös kezdőpontba kell párhuzamosan tolni).

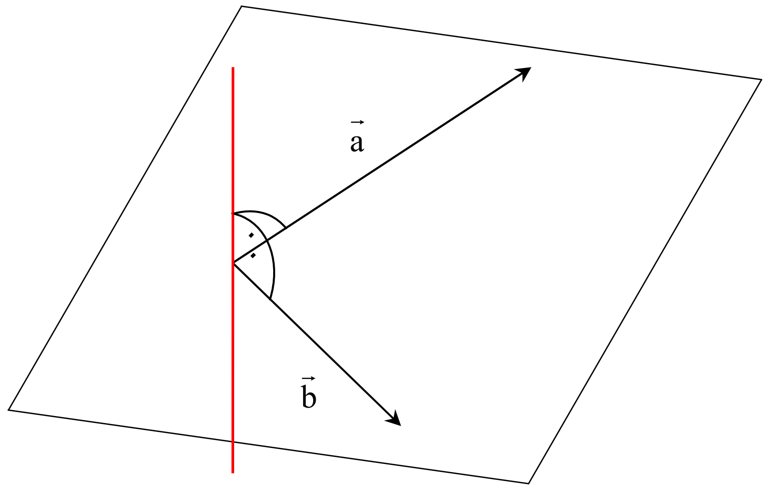



A $\vec{c}$ vektor hossza ekkor:

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\varphi).$$

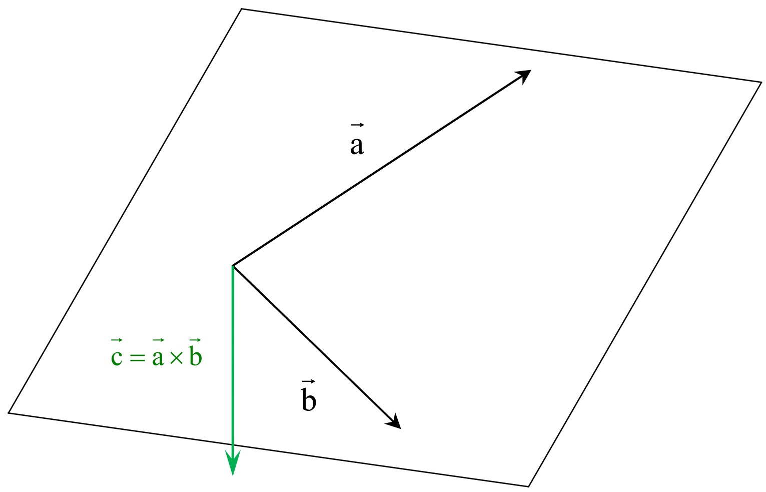
A $\vec{c}$ vektor irányának meghatározásához két feltételnek kell teljesülnie.

1. A $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ vektor merőleges mind $\vec{a}$-ra, mind $\vec{b}$-re. Ennek bemutatásához segítség, hogy két, nem egy irányba mutató vektor kifeszít egy síkot. A $\vec{c}$ vektor iránya ezen síkra merőleges.




Ez azonban még mindig két lehetséges irányt jelöl meg. A kettő közül választja ki az egyiket a második szabály.

2. A vektoriális szorzatban a $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ vektor irányának olyannak kell lennie, hogy a két kiindulási vektor és az eredményvektor iránya megfeleljen a jobbkéz-szabálynak, vagyis sorrendben az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok felfektethetőek legyenek a jobb kéz nyújtott ujjaira, sorrendben a hüvelyk-, a mutató- és a középső ujjra. A jelen esetben ez azt jelenti, hogy a $\vec{c}$ vektor iránya




Ezzel egyértelműen meghatároztuk az eredmény-vektor hosszát és irányát.

**Megjegyzés**: az irányra vonatkozó második szabálynak van egy fontos következménye. Ha a két vektort fordított sorrendben írjuk fel a szorzatban, akkor a jobbkéz-szabályban a két kiindulási vektor fordított sorrendben fog szerepelni. Ezért az eredmény-vektor iránya ellentétes lesz, vagyis

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

### I.8.2. Speciális esetek a két vektor helyzetétől függően

A vektoriális szorzás esetén ismét fontos két speciális esetet kiemelni, amelyek egyenesen adódnak a sinus függvény tulajdonságaiból.

1. ha a két vektor által bezárt szög 0°, vagy 180°, vagyis a két vektor párhuzamos.
   Ekkor $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 0$, vagyis az eredmény nullvektor.

Megjegyzendő, hogy ez már az irány meghatározásakor is érzékelhető, hiszen olyan vektor, amely két, egymással párhuzamos vektorra merőlege, végtelen sok van.
2. a két vektor által bezárt szög 90°, vagyis a két vektor merőleges egymásra.
Ekkor $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$, ami két, adott hosszúságú vektor esetén a legnagyobb érték.

### I.8.3. Két vektor vektoriális szorzata derékszögű Descartes-koordinátarendszerben

Ismét elvégezzük a műveletet egy derékszögű Descartes-koordinátarendszerben.
1. Meghatározzuk a két kiindulási vektor komponenseit, vagyis $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ és $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$.
2. Keressük az eredményvektor komponenseit, vagyis $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (c_x, c_y, c_z)$.
3. Kiszámoljuk az egyes komponenseket az alábbi módon:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

Jól látható, hogy a művelet itt már sokkal bonyolultabb, mint a korábbi esetekben.

**Megjegyzés**: a fenti komponensek alakját nehéz megjegyezni. Van azonban egy egyszerűsítő mód, ahogyan mégis könnyen származtatható az összefüggés. A $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ felírás sorrendjében írjuk fel az összefüggést
$c_{\dots} = a_{\dots} b_{\dots} - a_{\dots} b_{\dots}$
még nem ismerve, hová melyik komponens kerül. A lényegi elem, hogy a pozitív előjelű tag esetén az xyz-xyz-xyz sorrendnek kell teljesülnie. Kiválasztjuk a $\vec{c}$ egyik komponensét, legyen ez most az ’y’ komponens:
$c_y = a_{\dots} b_{\dots} - a_{\dots} b_{\dots}$,
majd a pozitív előjelű taghoz megnézzük, hogy mi a helyes sorrend x-yzx-yzx, vagyis
$c_y = a_z b_x - a_{\dots} b_{\dots}$.
A negatív előjelű tag éppen fordított sorrendű, vagyis a végeredmény
$c_y = a_z b_x - a_x b_z$.
Ugyanígy származtatható a többi komponens is.

**Megjegyzés**: jól látható, hogy a vektorok felcserélésével az eredmény ellentétes irányú lesz. Bár itt a számolás jóval nehezebb, két vektor párhuzamossága, ha azoknak a komponensei vannak megadva, bizonyítható, ha a vektoriális szorzatuk minden komponense 0 értékű.

## I.9. Alkalmazás a fizikai összefüggések származtatásában és ellenőrzésében

Bár vektorokkal még más műveletek is végezhetőek, azok kimutatnak a skalár-vektor kérdéskörből. A Fizika anyagban alapvetően a fenti műveletek alkalmazása az elvárt. Ezeknek a műveleteknek a tulajdonságai egyrészt szabály erejűek egy összefüggés kiszámolásakor, másrészt ellenőrzési lehetőséget adnak lépésről lépésre egy feladat megoldása során.

**A szabályok**

- Egy egyenlet két oldalán az eredményeknek ugyanolyan tulajdonságúnak kell lennie.
    - Vagyis vektor nem lehet egyenlő skalárral.
- Összeadni (egymásból kivonni) vagy két skalárt, vagy két vektort lehet.
    - Vagyis skalárt és vektort egymással sem összeadni, sem egymásból kivonni nem lehet.
- A fentiek alapján két vektor összege (különbsége) mindenképpen vektor, két skalár összege (különbsége) mindenképpen skalár.

- Két skalár összeszorozható, ennek eredménye egy skalár.
- Egy skalárral megszorozható egy vektor, ennek eredménye mindenképpen vektor lesz.
    - Skalár és vektor szorzatából semmiképpen sem lesz skalár.
- Két vektor között (az eddigiek alapján) csak skaláris, vagy vektoriális szorzás lehet. Az előbbinek skalár, az utóbbinak vektor az eredménye.
    - Skalárt nem lehet skalárisan, vagy vektoriálisan szorozni sem vektorral, sem skalárral.
- Vektorral semmilyen formában nem oszthatunk!

Ezeket egy levezetés minden lépésében lehet ellenőrizni, illetve a számolások során ezek mindenképpen betartandóak.

Animáció-féle a ppt alapján!

## I.Int. Interaktív feladatok

Feladatok a ppt alapján (átformázva): Gyakorlat I.

# II. Mértékegységek kezelése

Minden fizikai mennyiségnek van egy mértékegysége, amely tükrözi a mérés tulajdonságait, amellyel mérhető, másrészt tisztázza a többi fizikai mennyiséggel való kapcsolatát. Éppen ezért a fizikai összefüggésekben – a vektorjelleg mellett – a mértékegységeket egyeztetni kell.

Ez ellenőrzési lehetőséget is ad, egy bonyolult összefüggés is gyorsan ellenőrizhető a mértékegységek egyeztetésével, és bár minden hibát nem szűr ki, jó kiindulási alap.

## II.1. Alapszabályok

Tekintsük át a fizikai összefüggésekre vonatkozó szabályokat a mértékegységeket illetően:

- Egy egyenlet két oldalán azonos mértékegységű mennyiségek állhatnak!
- Csak azonos mértékegységű mennyiségek adhatóak össze, vagy vonhatóak ki egymásból!
- A mértékegységek szorzás során összeszorzódnak.
- A mértékegységek osztás során ugyanúgy osztandóak egymással, mint a mennyiségek (ha lehetséges az osztás).
- Egy-egy mennyiség mértékegysége kikövetkeztethető a meghatározásából.
- Egy adott fizikai mennyiség mértékegysége jelölhető úgy is, hogy a mennyiség jelét [ ] rázójelek közé írjuk, például a sebesség (amelynek jele v) mértékegysége m/s, vagy [v].

Kiegészítő anyag
- Differenciálás során a derivált mennyiség mértékegységét osztjuk a változó mértékegységével
- Integrálás során az integrált mennyiség mértékegységét szorozzuk a változó mértékegységével

## II.2. Geometriai összefüggések, és dimenzióik

Az alábbi táblázatban összefoglaljuk azokat a mennyiségeket és összefüggéseket, amelyekre a Fizika tanulása során leginkább szükség lesz. Továbbá ezek fontos szerepet kapnak majd a mértékegységek egyeztetését gyakoroltató feladatokban.

| **Mennyiség** | **Jele, meghatározása** | **Mértékegység** |
|---|---|---|
| Hosszúság, Kerület | *…, K* | m |
| Terület, Felszín | *T, A* | $m^2$ |
| Térfogat | *V* | $m^3$ |
| Kör (r sugár) kerülete | $2r\,\pi$ | m |
| Kör (r sugár) átmérője | $d = 2r$ | m |
| Kör (r sugár) területe | $r^2\,\pi$ | $m^2$ |
| Téglalap (a,b oldalhosszak) kerülete | $2(a+b)$ | m |
| Téglalap (a,b oldalhosszak) területe | $ab$ | $m^2$ |
| Háromszög (a oldal, $m_a$ magasság) területe | $am_a/2$ | $m^2$ |

| | | |
|---|---|---|
| Téglatest (a, b, c oldalhosszak) felszíne | $2(ab + bc + ac)$ | $m^2$ |
| Téglatest (a, b, c oldalhosszak) térfogata | $abc$ | $m^3$ |
| Henger (r sugár, m magasság) felszíne | $2r^2\pi + m2r\pi$ | $m^2$ |
| Henger (r sugár, m magasság) térfogata | $r^2\pi m$ | $m^3$ |
| Gömb (r sugár) felszíne | $4r^2\pi$ | $m^2$ |
| Gömb (r sugár) térfogata | $4r^3\pi/3$ | $m^3$ |

Ezt kicsit átszerkeszteni!

## II.3. A fizikai mennyiségek meghatározása, jele és mértékegysége

Az alábbi táblázatban összefoglalásra kerülnek a Mechanikában használt mennyiségek, meghatározásuk és mértékegységeik. Ezekről a konkrét fejezetekben részletesen lesz szó. Jelen esetben ezek csak a feladatokat készítik elő, illetve bemutatják, hogy egy fizikai mennyiségről mit kell tudni.

| **Mennyiség** | **Jele és vektor/skalár jellemző** | **Meghatározása** | **Mértékegység** |
|---|---|---|---|
| Elmozdulás | $\Delta\vec{r}$ | | m (méter) |
| Idő | t | | s (másodperc) |
| Sebesség | $\vec{v}$ | $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ | m/s |
| Gyorsulás | $\vec{a}$ | $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ | $m/s^2$ |
| Szögelfordulás | φ (kis phi) | | radián, számolásokban ‘1’ |
| Szögsebesség | ω (kis omega) | $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ | 1/s |
| Szöggyorsulás | β (kis beta) | $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ | $1/s^2$ |
| Tömeg | m | | kg (kilogramm) |
| Lendület (impulzus) | $\vec{I}$ (vagy $\vec{p}$) | $\vec{I} = m\vec{v}$ | kg m/s |
| Erő | $\vec{F}$ | $\vec{F} = m\vec{a}$ | N (Newton)<br>$1N = 1kg\ m/s^2$ |
| Perdület | $\vec{L}$ | $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{I}$ | $kg\ m^2/s$ |
| Forgatónyomaték | $\vec{M}$ | $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ | Nm |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Energia (például mozgási energia) | E | $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ | J (Joule)<br>$1J = 1kg\ m^2/s^2$ |
| Munka | W | $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ | J<br>1J = 1Nm |
| Teljesítmény | P | $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$ | W (Watt)<br>1W = 1J/s<br>$1W = 1kg\ m^2/s^3$ |
| Tehetetlenségi nyomaték | Θ (nagy theta) | $\Theta = mr^2$ | $kg\ m^2$ |
| Sűrűség | ρ (kis rho) | $\rho = \frac{m}{V}$ | $kg/m^3$ |
| Nyomás | p | $p = \frac{F}{A}$ | Pa (Pascal)<br>$1Pa = 1N/m^2$ |

Ezt kicsit átszerkeszteni!

## II.4. Prefixumok

Bizonyos jelenségek mérhető mennyiségei nagyon eltérhetnek a mindennapi tapasztalatunk méreteitől. Azért, hogy ezeket megfelelően tudjuk kezelni, és ne kelljen rengeteg 10 hatványt alkalmazni, rövidítő jelölésként bevezetésre kerültek különböző előtagok, vagy idegen néven prefixumok. Az alábbiakban ezek közül csak a legfontosabbak szerepelnek. Ezeket az általunk bemutatott legnagyobbtól a legkisebb felé mutatjuk be.

| **Prefixum** | **Jele** | **Szorzó** | **10 hatvány** |
|---|---|---|---|
| peta- | P | billiárd | $10^{15}$ |
| tera- | T | billió | $10^{12}$ |
| giga- | G | milliárd | $10^{9}$ |
| mega- | M | millió | $10^{6}$ |
| kilo- | k | ezer | $10^{3}$ |
| hekto- | h | száz | $10^{2}$ |
| deka- | d(a) | tíz | $10^{1}$ |
| - | nincs | egy | $10^{0}$ |
| deci- | d | tized | $10^{-1}$ |
| centi- | c | század | $10^{-2}$ |
| milli- | m | ezred | $10^{-3}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| mikro- | μ | milliomod | $10^{-6}$ |
| nano- | n | milliárdod | $10^{-9}$ |
| piko- | p | billiomod | $10^{-12}$ |
| femto- | f | billiárdod | $10^{-15}$ |
| atto- | a | trilliomod | $10^{-18}$ |

Ezt kicsit átszerkeszteni!

## II.5. Egyéb átváltások

A legtöbb mennyiség esetében a fenti prefixumok, illetve a 10 hatványainak megfelelő alkalmazása elegendő az átváltáshoz. Van azonban néhány egyéb átváltási szabály, ami még fontos.

**Az űrmérték átváltása**

1 l (liter) = 1 $dm^3$

**Az idő mérték átváltása**

1 h (óra) = 60 min (perc)
1 min (perc) = 60 s (másodperc)

**Szögek átváltása fok és radián között** (lásd a részleteket később, a körmozgásnál)

1 fok = $\pi/180$ radián, vagyis $1° = \pi/180$
1 radián = $180/\pi$ fok, vagyis $1 = 180°/\pi$

## II.Int. Interaktív feladatok

Feladatok a ppt alapján: Gyakorlat II.-VII.

# III. Néhány alapfogalom (mechanika, kinematika, mérhető mennyiségek, stb.)

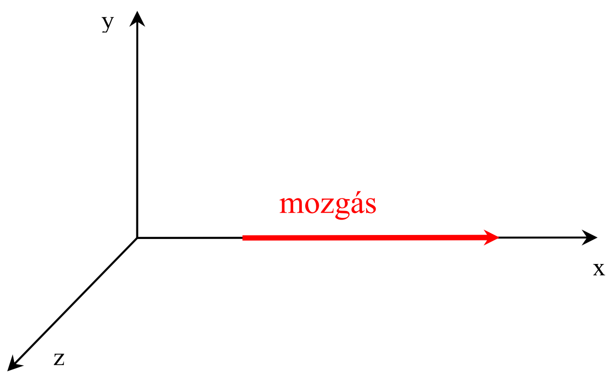
# IV. Tömegpont kinematikája

## IV.1. Alapfogalmak

### IV.1.1. Egy dimenziós mozgások leírása

Az általános fogalmak bevezetése előtt érdemes a legfontosabb fizikai mennyiségeket először egy dimenziós, vagyis egy egyenes mentén történő mozgás esetén bevezetni, ezt fogjuk tudni később a térben történő mozgásokra is általánosítani.

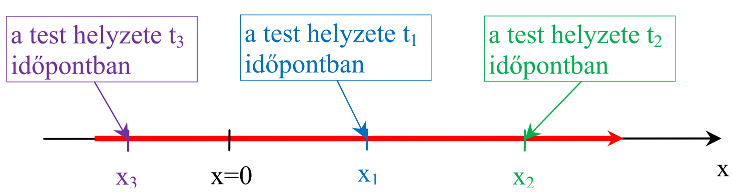
A korrektség kedvéért, illetve azért, hogy később az általános meghatározások könnyebben bevezethetőek legyenek, úgy kezeljük az egy egyenes mentén történő mozgást, mintha az a térben történne, vagyis egy három dimenziós derékszögű Descartes-koordinátarendszerben írjuk le. Azonban ezt a koordinátarendszert úgy állítjuk be, hogy annak ’x’ tengelye a mozgás irányával egyezzen meg. Így az ’y’ és ’z’ koordinátákkal nem foglalkozunk (abban az irányban a test nem mozog), csak az ’x’ irányú egyenleteket vezetjük be.




Animáció: az ’y’ és a ’z’ tengely elhalványul, majd eltűnik.

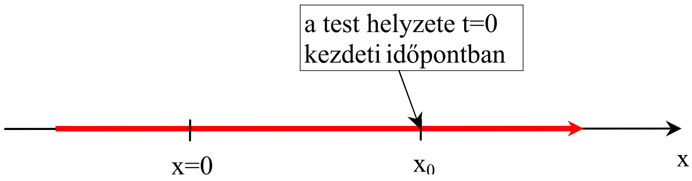
**A) Helyzet, hely koordináta**

A vizsgált tömegpont egy adott ’$t_1$’ időpillanatban az ’$x_1$’ helyen tartózkodik. Egy másik, ’$t_2$’ időpillanatban pedig az ’$x_2$’ helyen, és így tovább.




Látható, hogy minden időpillanatban megadható a test helyzete az ’x’ tengely mentén, és ez természetesen lehet pozitív x érték, de lehet negatív is (ez annyit jelent, hogy az x=0 ponttól balra helyezkedik el a test a vizsgált időpontban, ahogy az $x_3$ pont esetén). Nem feltétlenül egy irányba mozog a test, a lényeg csupán annyi, hogy egy egyenes mentén mozogjon (erre jó példa a rezgőmozgás, ami egy egyenes mentén történik, de a pozitív és negatív irányokban oda-vissza).

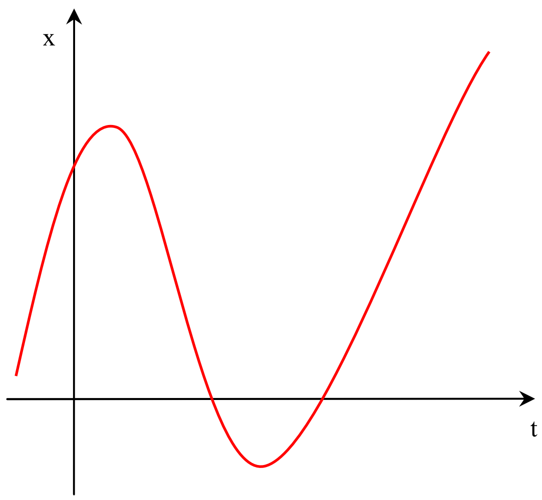
A mozgás kiindulópontját, vagyis azt a pontot, ahol a t=0 időpillanatban található a test, kezdeti helyzetnek hívjuk, és $x_0$-val jelöljük. Fontos kiemelni, hogy ennek nem kell megegyeznie az x=0 ponttal!



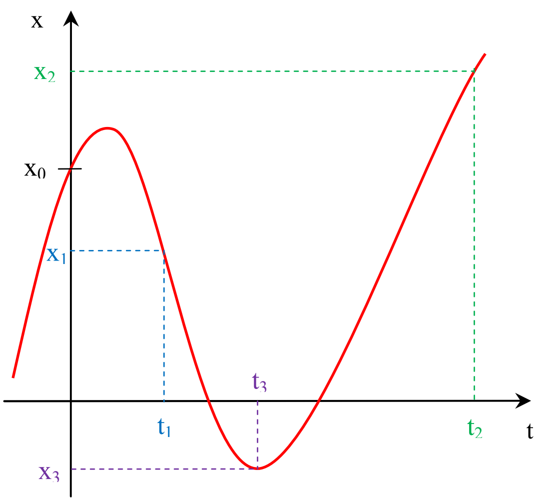

**B) Hely-idő függvény**

A test mozgása során minden időpillanatban megadhatjuk a helyzetét, vagyis a választott koordináta-rendszerben az ’x’ koordinátáját. Ez egy olyan **x(t) függvényt** jelent, amelynek független változója az idő, függő változója a helyzet (jelen esetben az ’x’ koordináta értéke).

Az általunk vizsgált mozgások esetén ezek az összefüggések a középiskolában tanult függvényekkel leírhatóak, vagyis könnyen értelmezhető és kiértékelhető a hely és az idő összefüggése. Amikor ezt a függvényt grafikusan ábrázoljuk, akkor kapjuk a **hely-idő diagram**-ot.




Ez egyetlen grafikonon tartalmazza a korábbi adatokat. Fontos kiemelni, hogy a mozgás továbbra is csak egy irányú, az ’x’ tengely irányában, a másik tengely most az időt mutatja. Rajzoljuk be a korábbi pontok helyét ezen az ábrán!




Így minden időpillanathoz leolvasható a hely koordináta értéke.

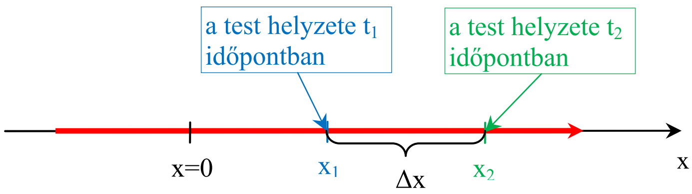
**Fontos** kiemelni, hogy a függvénynek egy adott 't' időpillanatban csak egy értéke lehet 'x'-ben, elvégre egy test egy időpillanatban nem lehet egyszerre két helyen. Ez biztosítja, hogy az x(t) függvény tényleg függvényként legyen kezelhető (lásd a matematikában a függvény, mint leképezés egyértelműségénél).

Felhasználva a hely-idő függvényt, bevezethető egy újabb jelölés $x_1$-re és $x_2$-re, ami jobban tükrözi a mozgás tulajdonságait. Mivel $x_1$ a test helyzete $t_1$- időpillanatban, ezért $x_1 = x(t_1)$. Hasonlóan $x_2 = x(t_2)$.

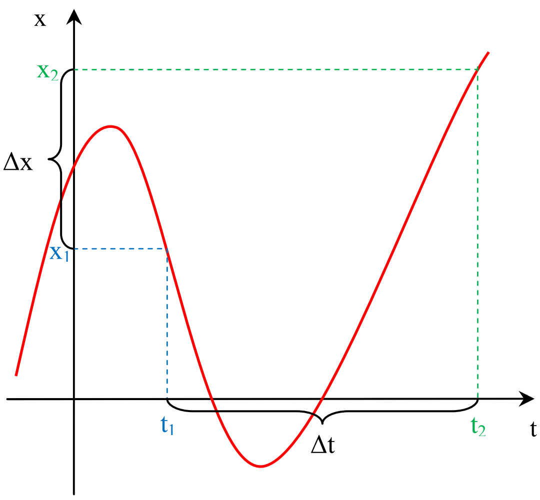
## C) Elmozdulás

Egy adott pont helyzete, vagyis adott pontban az 'x' koordinátájának értéke nagyban függ attól, hogy hogyan választjuk a koordinátarendszert, jelen esetben függ attól, hogy hová választjuk az x=0 helyzetet. Ahhoz, hogy továbbléphjünk, szükségünk van egy olyan mennyiségre, amely nem függ ettől a fajta koordináta-rendszer választástól. Ez lesz számunkra az **elmozdulás**.

Ha a test egy korábbi '$t_1$' időpillanatban az '$x_1$' helyen van, egy későbbi, '$t_2$' időpillanatban pedig az '$x_2$' helyen, akkor az ő elmozdulása $\Delta x = x_2 - x_1$ lesz. Ez már független a koordinátarendszer origójának (vagyis esetünkben x=0-nak) megválasztásától.




Ugyanez a hely-idő diagramon ábrázolva

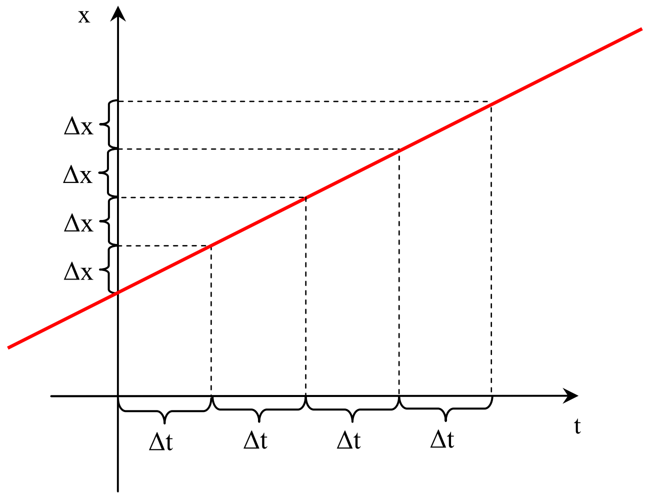



A későbbiekben használni fogjuk a $\Delta t = t_2 - t_1$ jelölést, ami az eltelt időtartamot jelöli. A jelölésnek fontos tartalma, hogy a '$t_2$' időpont később van, mint '$t_1$', vagyis az időtartam meghatározásakor a későbbi időpillanat időbeli értékét vonjuk ki a korábbi időpillanatéból.
Fontos kiemelni, hogy ez általában nem egyezik meg a test által megtett úttal, mint ez a fenti diagramon látszik is, mivel '$t_1$'és '$t_2$' között sokkal nagyobb utat tesz meg a test, mint $\Delta x$. A megtett út kiszámításáról később még lesz szó.

## IV.1.2. Egydimenziós mozgás sebessége

## A) Pillanatnyi sebesség

A pillanatnyi sebesség értelmezéséhez először egy egyszerűbb mozgást vizsgálunk meg, ami az úgynevezett **egyenes vonalú egyenletes mozgás**. Ezen mozgás során a test ugyanannyi idő alatt ugyanakkora elmozdulással rendelkezik, vagyis minden $\Delta t$ időtartam alatt $\Delta x$ -el változik a helyzete.

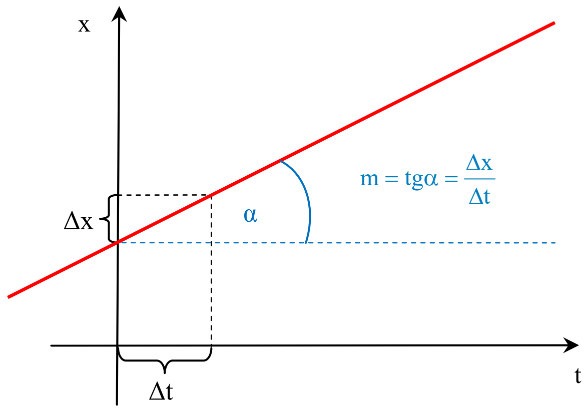



Ez azt jelenti, hogy az időtartam és az elmozdulás egyenesen arányosak, $\Delta x \sim \Delta t$. Az arányossági tényező lesz a test **sebessége**, ami megmondja, hogy adott időtartam alatt mekkora a test elmozdulása, vagyis:

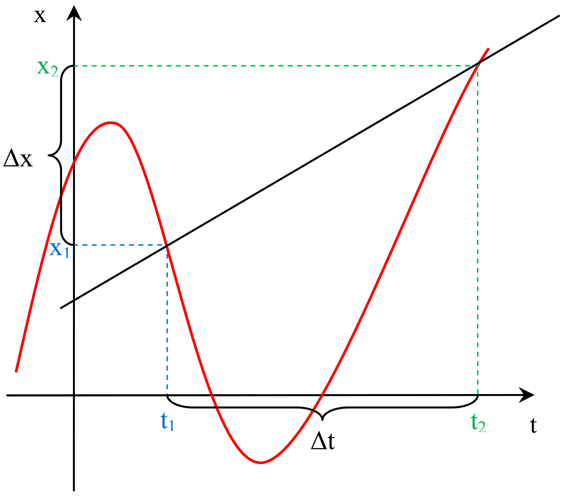
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

A mennyiség mértékegysége könnyedén származtatható (lásd II.1. fejezet), m/s lesz.

A sebességet megadó hányados egy másik, ezzel egyenértékű értelmezése, hogy az a hely-idő diagram egyenesének meredeksége (vagy irány-tangense).



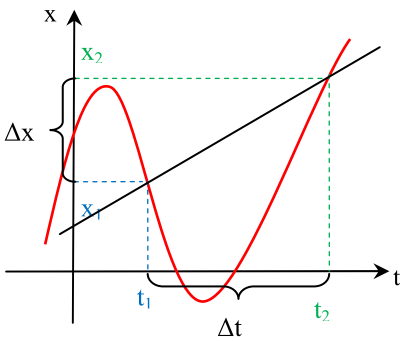

Bonyolultabb mozgás esetén is hasonló módon járunk el, de a fenti képet finomítanunk kell. Az **általános** esetben a módszerünk a következő.

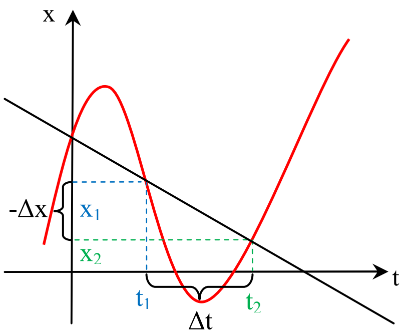


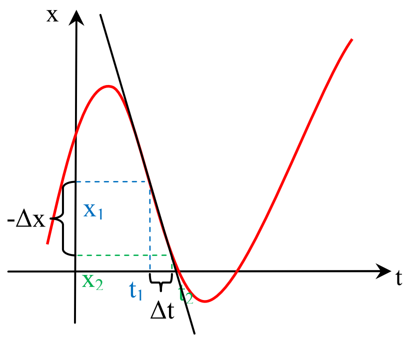

A $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ sebesség ebben az esetben a berajzolt fekete egyenes meredekségét adja meg, ami láthatóan nem egyezik meg a pályagörbével. Ezért módosítunk az eljáráson, de a fentiek lényegét megőrizzük.

Az ábrán látható, hogy a sebesség nagysága változik az időben, vannak olyan időszakok, amikor nagy a sebesség, vannak olyanok, amelyekben majdnem áll, de olyan is előfordul, amikor visszafelé mozog. Ennek a leírására szolgál a pillanatnyi sebesség fogalma, amely minden egyes időpontban meg kívánja határozni a sebesség nagyságát és irányát.

A fenti ábrán látható mozgás során próbáljuk meghatározni minél pontosabban a $t_1$ időpillanatban érzékelhető sebességet! Ehhez a másik időpontot, ’$t_2$’-t egyre közelebb választjuk ’$t_1$’-hez.




Ebből animáció?

A második és harmadik ábrán az elmozdulás kapott egy negatív előjelet. Ez annak köszönhető, hogy az ábrán az $x_1 - x_2$ értéket lehet könnyedén bemutatni, viszont $\Delta x = x_2 - x_1$ minden esetben.

A két időpont tovább közelíthető, de ez a lényegen már nem fog sokat változtatni. Elmondható, tekintve a fekete egyenes meredekségét, hogy a $t_1$ időpillanatban a test nagy, negatív sebességgel rendelkezik (az egyenes meredeksége nagy abszolút-értékű negatív szám). Ez azt jelenti, hogy a választott pozitív ’x’ iránnyal ellentétesen mozog nagy sebességgel.

**Kiegészítés**: azok számára, akik tanultak differenciál-számítást, a fenti módszer matematikailag precízen is kezelhető, és az egyenes vonalú mozgás sebességének általános meghatározásához juthatunk. A ’$t_2$’időt fokozatosan ’$t_1$’-hez közelítve határértékben az alábbi eredményt kapjuk (felhasználva a hely-idő függvényt):

$$v = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{dx}{dt}(t_1),$$

vagyis a sebesség ’$t_1$’ időpontban a hely-idő függvény idő szerinti első deriváltja lesz ebben a pontban. Ennek egy másik felírását adja, ha a ’$t_2$’ időpontot $t_2 = t_1 + \Delta t$ alakban írjuk fel. Ekkor

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}(t_1)$$

alakban kapjuk meg ugyanazt a deriváltat.

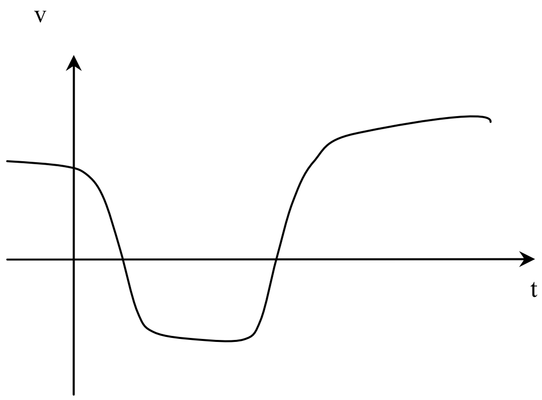
Ennek geometriai megfogalmazása az, hogy a pillanatnyi sebesség a hely-idő diagramon ábrázolt hely-idő függvény adott pontban meghúzott érintőjének a meredeksége. Ez a fenti ábrasoron jól látszik, ha még kisebbre választjuk az időkülönbséget.

**B) Sebesség-idő függvény**

Ha egy időpillanatban meg tudjuk határozni a sebességet (nagyságát és irányát), akkor ezt elvégezve minden időpontban, az eredményeinket itt is összefoglalhatjuk egyetlen függvény segítségével, ami a **v(t) sebesség-idő** függvény lesz. Ennek független változója az idő, függő változója a sebesség, amelynek nagyságát a sebesség abszolút-értéke, irányát pedig az előjele írja le.

Az általunk vizsgált mozgások esetén ezek az összefüggések a középiskolában tanult függvényekkel leírhatóak, vagyis könnyen értelmezhető és kiértékelhető a sebesség és az idő összefüggése. Amikor ezt a függvényt grafikusan ábrázoljuk, akkor kapjuk a **sebesség-idő diagram**-ot.

Például a fenti változó mozgás diagramja körülbelül az alábbi lehet.




Szebb ábra kellene! Esetleg számolt görbe?

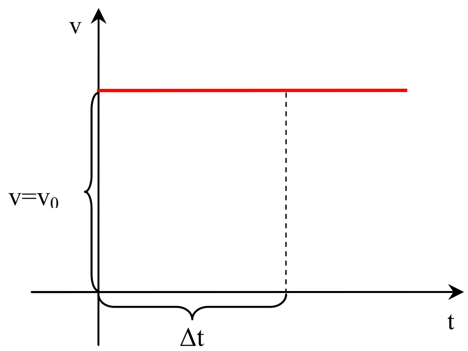
**Kiegészítés**: azok számára, akik tanultak differenciál-számítást, a sebesség-idő függvény ugyanilyen logika mentén határozható meg. Minden pontban kiszámolva a derivált értékét, pontról pontra megkapjuk a sebesség nagyságát és irányát, vagyis:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}.$$

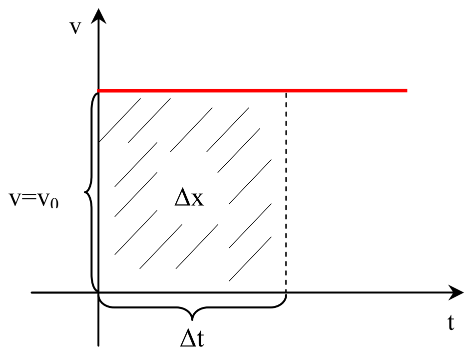
Valójában a konkrét számolások innen indulnak. Ugyanis az x(t) függvény deriválása (ennek szabályai könnyen elsajátíthatóak) után behelyettesítve valamely konkrét időpillanat értékét kapjuk meg az adott időpontban a pillanatnyi sebességet.

**C) Elmozdulás számítása a sebességből**

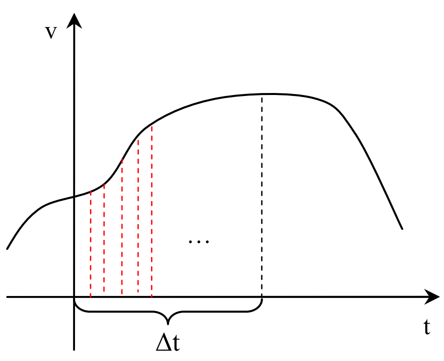
Ennek módszeréhez ismét visszatérünk az **egyenes vonalú egyenletes mozgás**hoz. Ennél a mozgásnál a sebesség értéke állandó, és így a sebesség-idő diagram az alábbi módon rajzolható fel:



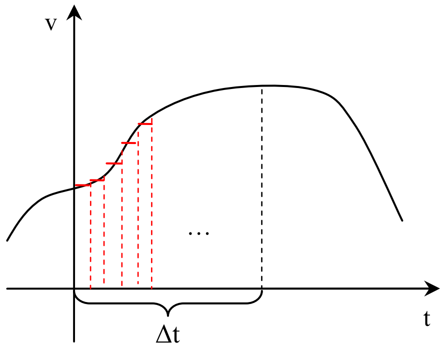

Az egyenletek szintjén a korábbiaknak megfelelően $v_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, amiből a $\Delta x = v_0 \cdot \Delta t$ összefüggéssel számolható az elmozdulás. Ez a fenti ábrát tekintve a piros görbe alatti területnek felel meg, ahol a függőleges oldal $v_0$, a vízszintes oldal pedig $\Delta t$ hosszúságú.




Általános esetben a következőképpen járunk el. Tekintjük a v(t) görbét, és a ’t’ tengely irányában a kérdéses szakaszt felbontjuk kis darabokra.




Ha elegendően kis darabokra bontjuk, akkor az egyes időszakokban majdnem állandónak tekinthető a sebesség.




Ezeken a kis szakaszokon az elmozdulások a téglalapok területeivel lesznek egyelőek, a teljes $\Delta t$ időszakra vonatkozó elmozdulás az összes ilyen kis téglalap területének összege lesz. Ha ezeket a kicsi időintervallumokat elegendően kicsinek választjuk, akkor bár nagyon pici téglalapokat kapunk, de ezek összege pontosan megadják a mozgás során bekövetkező elmozdulást. Röviden ez lesz a függvény alatti terület.

Vagyis **általánosságban** elmondható, hogy egydimenziós mozgás esetén az elmozdulás megegyezik a sebesség-idő diagramra rajzolt v(t) függvény alatti területével.

**Megjegyzés**: Ezt röviden úgy mondjuk, hogy a **görbe alatti terület**, még akkor is, ha ebben a jegyzetben csak egyenesek alatti területeket számolunk ki, a ténylegesen görbe vonalak alatti terület kiszámításához ugyanis integrálni kellene.

Fontos kiemelni, hogy ezzel a módszerrel csupán a $\Delta x$ elmozdulást kapjuk meg, a test konkrét helyzetét nem. Ehhez ugyanis tudnunk kell, hogy a mozgás honnan indul, és az az általunk választott koordinátarendszerben hol található. Vagyis tudnunk kell, hogy mekkora $x(t=0)=x_0$ értéke. Ha ezt tudjuk, akkor felhasználva, hogy $\Delta x = x - x_0$, a függvény alatti terület segítségével megadható a test konkrét helyzete tetszőleges ’t’ időpillanatban.

**Megjegyzés**: a fenti megközelítésnek fontos része, hogy a függvény alatti terület, lévén az ’x’ tengely alatti részeket negatív előjellel vesszük figyelembe, lehet nullánál kisebb. Ez annyit jelent, hogy az elmozdulás az általunk választott pozitív iránnyal ellentétes irányú, és a nagysága a függvény alatti terület abszolút-értékével egyezik meg.

**Kiegészítés**: a fenti függvény alatti terület számításnak van egy komolyabban kidolgozott matematikai háttere, amely lényegében bármilyen folytonos görbe esetén kiszámolhatóvá teszi az elmozdulás értékét. Az elv részletezéséből jól látszik, hogy ez az integrálás művelete lesz. Vagyis elmondható, hogy a ’$t_1$’ és ’$t_2$’ időpontok között megtett út a sebességből kiszámolható, mint

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt,$$

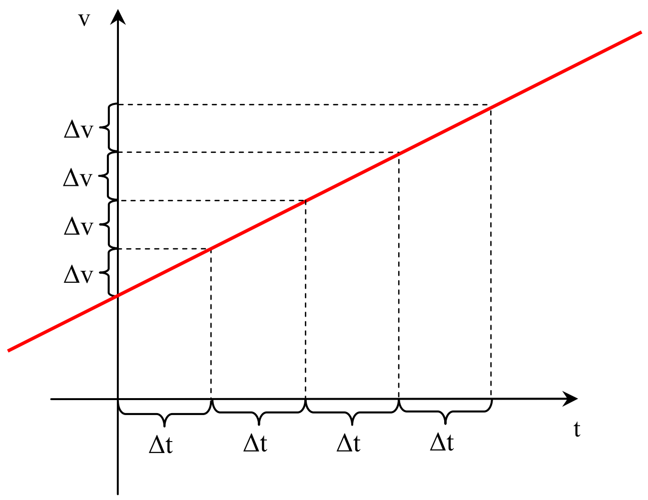
illetve az x(t) függvény előáll, mint a fenti integrál a ’$t_0$’ kezdeti időpont és egy tetszőleges ’t’ pillanat közti integrál eredménye, vagyis

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t')dt' + x_0.$$

### IV.1.3. Egydimenziós mozgás gyorsulása

#### A) Pillanatnyi gyorsulás

A pillanatnyi sebesség értelmezéséhez hasonlóan vezethetjük be a pillanatnyi gyorsulást. Ahogy a sebesség a helyzet megváltozásából kapható meg, úgy a gyorsulás a sebesség megváltozását írja le. Itt is egy egyszerűsített esettel, az úgynevezett **egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás**sal fogunk foglalkozni. Ezen mozgás során a test ugyanannyi idő alatt ugyanakkora sebességváltozást szenved el, vagyis minden $\Delta t$ időtartam alatt $\Delta v$ -vel változik a sebessége.

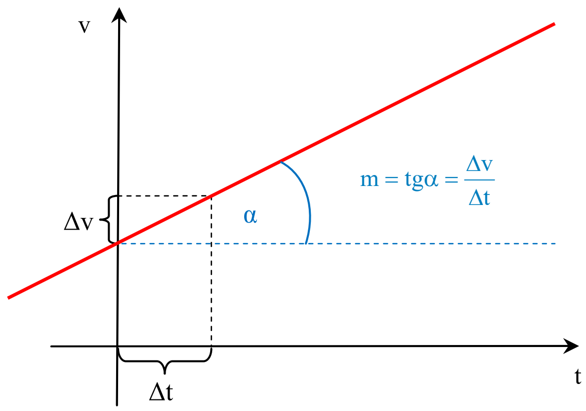



Ez azt jelenti, hogy az időtartam és a sebességváltozás egyenesen arányosak, $\Delta v \sim \Delta t$ . Az arányossági tényező lesz a test **gyorsulás**a, ami megmondja, hogy adott időtartam alatt mekkora a test sebességének megváltozása, vagyis:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

A mennyiség mértékegysége könnyedén származtatható (lásd II.1. fejezet), $m/s^2$ lesz.

A gyorsulást megadó hányados egy másik, ezzel egyenértékű értelmezése, hogy az a sebesség-idő diagram egyenesének meredeksége (vagy irány-tangense).




Bonyolultabb mozgás esetén a sebességhez hasonló módon járunk el. Az **általános** esetben a kiválasztott ’$t_1$’ időpontban a pillanatnyi gyorsulás pontos értékéhez úgy közelítünk, hogy ahhoz egyre közelebb választunk ’$t_2$’-t, és így a

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

mennyiség egyre pontosabban adja meg a gyorsulás pillanatnyi értékét.

Ide hasonló animáció, mint a sebességnél?

Természetesen ebben az esetben is lehet a sebesség változása negatív. Ez jelenthet lassuló mozgást, vagy negatív irányba (az általunk választott pozitív iránnyal ellentétes irányba) gyorsuló mozgást.

Ez segíthet is eldönteni, hogy gyorsuló, vagy lassuló mozgásról van szó. Ha a pillanatnyi gyorsulás és a pillanatnyi sebesség iránya (vagyis egy dimenziós mozgás esetén az előjele) azonos, a test gyorsulni fog. Ha az irány (előjel) ellentétes, akkor lassulni.

**Kiegészítés**: azok számára, akik tanultak differenciál-számítást, a fenti módszer matematikailag precízen is kezelhető, és az egyenes vonalú mozgás gyorsulásának általános meghatározásához juthatunk. A '$t_2$'időt fokozatosan '$t_1$'-hez közelítve határértékben az alábbi eredményt kapjuk (felhasználva a sebesség-idő függvényt):

$$a = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{dv}{dt}(t_1),$$

vagyis a gyorsulás '$t_1$' időpontban a sebesség-idő függvény idő szerinti első deriváltja lesz ebben a pontban. Ennek egy másik felírását adja, ha a '$t_2$' időpontot $t_2 = t_1 + \Delta t$ alakban írjuk fel. Ekkor

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_1 + \Delta t) - v(t_1)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}(t_1)$$

alakban kapjuk meg ugyanazt a deriváltat.

Ennek geometriai megfogalmazása az, hogy a pillanatnyi gyorsulás a sebesség-idő diagramon ábrázolt sebesség-idő függvény adott pontban meghúzott érintőjének a meredeksége.

**B) Gyorsulás-idő függvény**

Ha egy időpillanatban meg tudjuk határozni a gyorsulást (nagyságát és irányát), akkor ezt elvégezve minden időpontban, az eredményeinket itt is összefoglalhatjuk egyetlen függvény segítségével, ami az **a(t) gyorsulás-idő** függvény lesz. Ennek független változója az idő, függő változója a gyorsulás, amelynek nagyságát a gyorsulás abszolút-értéke, irányát pedig az előjele írja le.

Az általunk vizsgált mozgások esetén ezek az összefüggések a középiskolában tanult függvényekkel leírhatóak, vagyis könnyen értelmezhető és kiértékelhető a sebesség és az idő összefüggése. Amikor ezt a függvényt grafikusan ábrázoljuk, akkor kapjuk a **gyorsulás-idő diagram**ot.

**Kiegészítés**: azok számára, akik tanultak differenciál-számítást, a gyorsulás-idő függvény ugyanilyen logika mentén határozható meg. Minden pontban kiszámolva a derivált értékét, pontról pontra megkapjuk a gyorsulás nagyságát és irányát, vagyis:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt}.$$

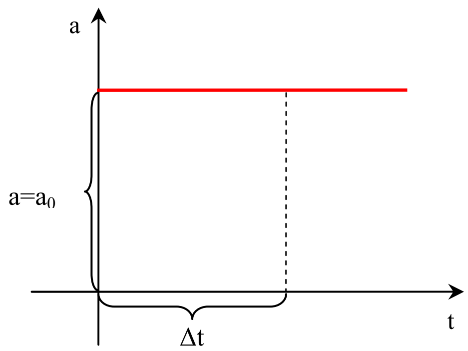
Valójában a konkrét számolások innen indulnak. Ugyanis a v(t) függvény deriválása (ennek szabályai könnyen elsajátíthatóak) után behelyettesítve valamely konkrét időpillanat értékét kapjuk meg az adott időpontban a pillanatnyi gyorsulást.

Még tovább lépve, tudva, hogy a sebesség a hely-idő függvény deriváltjaként adódik, a gyorsulásra az alábbi összefüggést kapjuk:

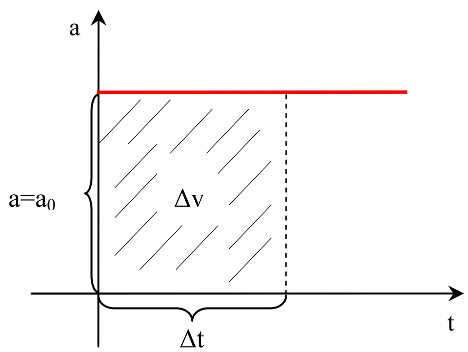
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}.$$

**C) Sebességváltozás számítása a gyorsulásból**

Nagyon hasonlóan fogjuk a módszert felvázolni, mint tettük az elmozdulás sebességből történő kiszámítása során. Jelen esetben viszont ismét az **egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás**hoz térünk vissza. Ennél a mozgásnál a gyorsulás értéke állandó, és így a gyorsulás-idő diagram az alábbi módon rajzolható fel:




Az egyenletek szintjén a korábbiaknak megfelelően $a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, amiből a $\Delta v = a_0 \cdot \Delta t$ összefüggéssel számolható a sebesség-változás. Ez a fenti ábrát tekintve a piros görbe alatti területnek felel meg, ahol a függőleges oldal $a_0$, a vízszintes oldal pedig $\Delta t$ hosszúságú.




Általános esetben ugyanúgy járunk el, mint az elmozdulás számításakor tettük. Vesszük az a(t) görbét, és a ’t’ tengely irányában a kérdéses szakaszt felbontjuk kis darabokra. Ha ezt elegendően finoman tesszük, akkor az egyes időszakokban majdnem állandónak tekinthető a gyorsulás. Ezeken a kis szakaszokon az sebesség-változások a téglalapok területeivel lesznek egyelőek, a teljes Δt időszakra vonatkozó sebesség-változás az összes ilyen kis téglalap területének összege lesz. Ha ezeket a kicsi időintervallumokat elegendően kicsinek választjuk, akkor a sebesség-változást megkapjuk, mint az a(t) függvény alatti területe.

Vagyis **általánosságban** elmondható, hogy egydimenziós mozgás esetén a sebesség-változás megegyezik a gyorsulás-idő diagramra rajzolt a(t) függvény alatti területével.

Ismét fontos kiemelni, hogy ezzel a módszerrel csupán a Δv sebesség-változást kapjuk meg, a test konkrét sebességét így még nem tudjuk kiszámolni. Ehhez ugyanis tudnunk kell, hogy mekkora a kezdeti sebesség, vagyis $v(t=0) = v_0$ értéke. Ha ezt tudjuk, akkor felhasználva, hogy $\Delta v = v - v_0$, a függvény alatti terület segítségével megadható a test konkrét sebessége tetszőleges ’t’ időpillanatban.

**Megjegyzés**: a fenti megközelítésnek továbbra is fontos része, hogy a függvény alatti terület, lévén a ’v’ tengely alatti részeket negatív előjellel vesszük figyelembe, lehet nullánál kisebb. Ez annyit jelent, hogy a sebesség az általunk választott pozitív iránnyal ellentétes irányú, és a nagysága a függvény alatti terület abszolút-értékével egyezik meg.

**Kiegészítés**: ismét felhasználva az integrálás módszerét, a sebesség kiszámítására az alábbi összefüggést kapjuk, ha a ’$t_1$’ és ’$t_2$’ időpontok között bekövetkező sebesség-változást szeretnénk meghatározni:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt\,,$$

illetve a v(t) függvény előáll, mint a fenti integrál a ’$t_0$’ kezdeti időpont és egy tetszőleges ’t’ pillanat közti integrál eredménye, vagyis

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t')dt' + v_0\,.$$

Ebből a függvényből viszont még egy idő szerinti integrálással megkaphatjuk a ’$t_1$’ és ’$t_2$’ időpontok között történő elmozdulást

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t} a(t')dt'\,dt + v_0(t_2 - t_1)\,,$$

sőt, a hely-idő függvényt is (az integrálás során használt idő-mértékeket külön jelöljük, hogy ne legyen ebből probléma).

$$x(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t'} a(t'')dt''\,dt' + v_0 t + x_0\,.$$

### IV.1.4. Kiegészítések, egyszerű mozgások

#### A) A kezdeti értékek szerepe

Bár ezzel később még fogunk foglalkozni, már most fontos kiemelni a kezdeti feltételek szerepének fontosságát. A különböző mozgások típusait a kinematikában az határozza meg, hogy a gyorsulás mekkora, hogyan változik az időben, vagy hogyan viszonyul a többi mennyiséghez. Ez meghatározza a mozgás típusát.

Azonban ahhoz, hogy egy adott konkrét esetben ki tudjuk számolni a sebességek értékét, vagy meg tudjuk határozni azt, hogy a vizsgált test mikor hol található, szükség van további információkra. Jelen esetekben szükségünk van a kezdeti sebesség $v(t=0) = v_0$ és a kezdeti hely $x(t=0) = x_0$ megadására.

**Megjegyzés**: valójában bármelyik pillanatban megadhatnánk a sebességet (nagyságát és irányát), illetve a test helyzetét. Ezekből is kiszámolhatóak a fizikai mennyiségek bármely időpontban. Általában mégis a t=0 időpillanatban igyekszünk megadni ezeket az értékeket, a számolhatóság érdekében.

Elsősorban akkor lehet szükség más időpontbeli feltételek megadására, ha több tömegpont egymáshoz képesti mozgását vizsgáljuk, és eltérés van a róluk tudott információk között (például az egyik test 5 s-mal később indul, és akkor ismerjük a sebességét és helyzetét).

**Kiegészítés**: mivel a gyorsulás függhet általánosságban az időtől, a test sebességétől (például légellenállás), vagy helyzetétől (például rugó rezgőmozgása), a

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

egyenlet helyét egy differenciál-egyenlet kerül,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right).$$

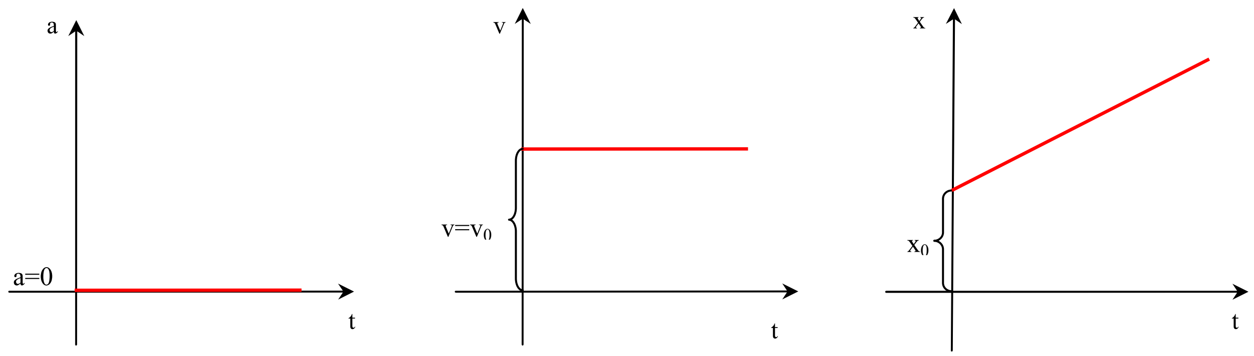
Ez egy másodrendű differenciál-egyenlet, amelynek megoldásához szükség van az első derivált (a sebesség) és a nulladik derivált (a helyzet) konkrét értékére egy adott időpontban. Ezek lesznek a fent említett kezdeti feltételek.

**B) Az egyenes vonalú egyenletes mozgás egy dimenziós leírása**

Az alábbiakban röviden összefoglalásra kerül mindaz, amit az egyenes vonalú egyenletes mozgásról eddig megtudtunk.

A gyorsulás értéke minden időpillanatban zérus, vagyis $a(t) = 0$.
A sebesség értéke állandó, és megegyezik a $v_0$ kezdeti sebességgel, vagyis $v(t) = v_0$.
Az elmozdulás egyenletesen nő az időben, vagyis a helykoordináta értéke, ha a test az $x_0$ helyről indul, $x(t) = v_0 \cdot t + x_0$.

Ezek diagramjai az alábbi módon néznek ki:

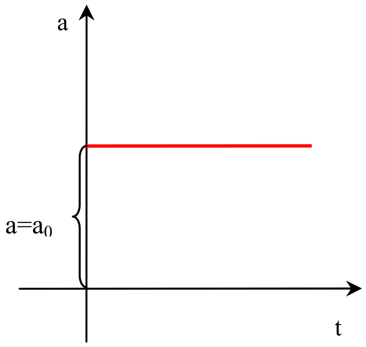


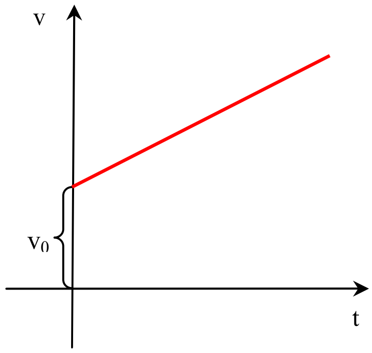

**Megjegyzés**: az egyenes vonalú egyenletes mozgás leírásának van egy speciális esete. Ha a test az origóból indul, vagyis $x_0 = x(t = 0) = 0$, akkor annak 'x' helyzete megegyezik a nullától megtett úttal, amit 's'-sel jelölünk. Ekkor az idő és a megtett út között fennáll az $s = v_0 \cdot t$ összefüggés. De **csak** ezen mozgás esetén, és csak ebben a speciális esetben.

**C) Az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás egy dimenziós leírása**

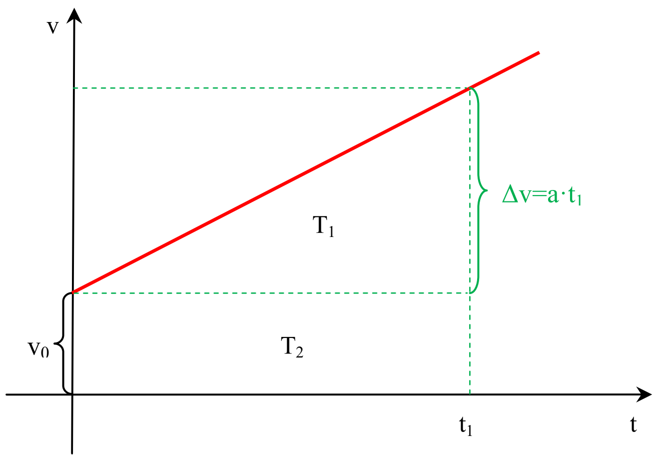
Az alábbiakban röviden összefoglalásra kerül mindaz, amit az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgásról eddig megtudtunk.

A gyorsulás értéke minden időpillanatban állandó, vagyis $a(t) = a_0$.
A sebesség értéke egyenletesen nő az időben, vagyis $v_0$ kezdeti sebesség esetén $v(t) = a_0 \cdot t + v_0$.
Ezek diagramjai az alábbi módon néznek ki:




Az elmozdulás kiszámítása már nem ennyire egyszerű, szükség van arra, hogy a v(t) függvény esetében meghatározzuk a függvény alatti területet. Ehhez nézzük meg a fenti diagramot, és határozzuk meg, hogy $t = 0$ -tól egy általunk választott ’$t_1$’ időpillanatig mekkora lesz a függvény alatti terület!




A függvény alatti területet úgy könnyű kiszámolni, ha a fent látható módon két részre bontjuk a síkidomot.

A felső rész egy olyan derékszögű háromszög, amelynek vízszintes befogója ’$t_1$’-el egyenlő, míg a függőleges befogója $a_0 \cdot t_1$-el. Ennek területe a derékszögű háromszögre vonatkozó összefüggés alapján

$$T_1 = \frac{a_0 \cdot t_1^2}{2}.$$

Az alsó rész egy téglalap, amelynek oldalai ’$t_1$’-el és $v_0$-val egyelőek. Ennek területe $T_2 = v_0 \cdot t_1$.

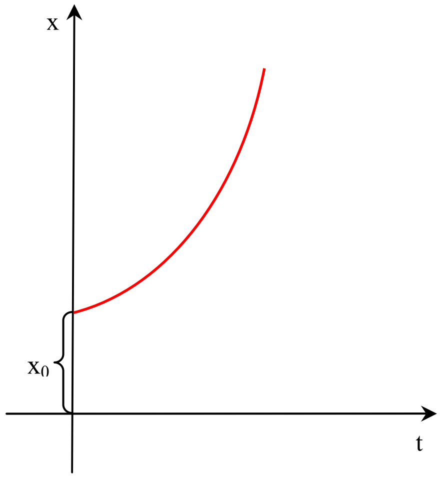
A kettő összegéből kapjuk a végeredményünket, mely szerint az elmozdulás nagysága

$$\Delta x = \frac{a_0 \cdot t_1^2}{2} + v_0 \cdot t_1.$$

Figyelembe véve, hogy a test az $x_0$ pontból indul, ha a fenti összefüggést tetszőleges időpontra alkalmazzuk, megkapjuk a test hely-idő függvényét, ami

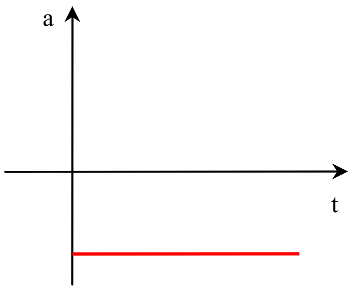
$$x(t) = \frac{a_0 \cdot t_1^2}{2} + v_0 \cdot t_1 + x_0.$$

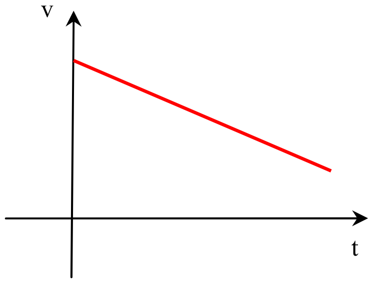
Ennek diagramja:

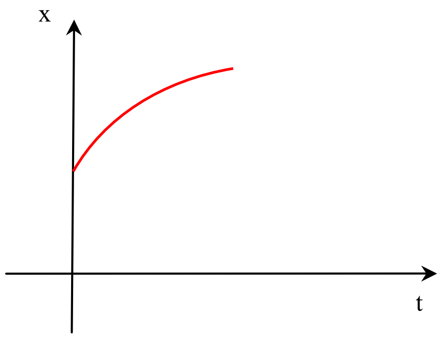



Mint korábban már említettük, a gyorsulás értéke és iránya, a kezdeti feltételek, vagyis a kezdeti sebesség és helyzet iránya változtat a mozgás konkrét megvalósulásán. Nézzünk meg néhány konkrét esetet!

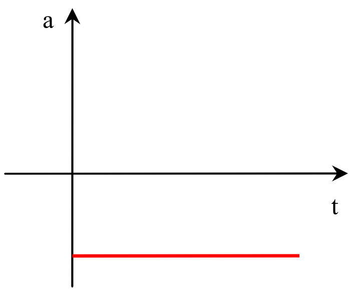
Az első esetben legyen egy pozitív kezdeti sebességű, de negatív gyorsulású esetünk, vagyis egy lassuló mozgásunk!

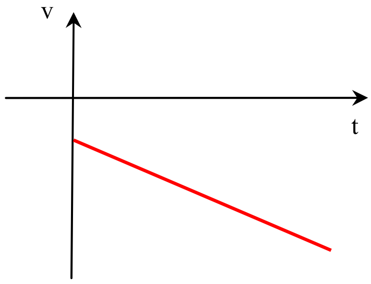


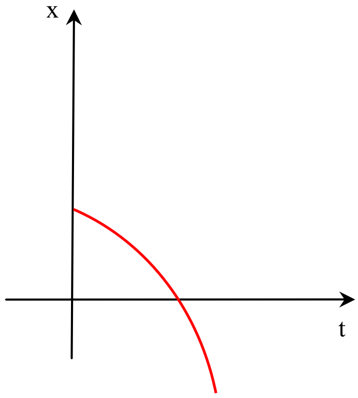



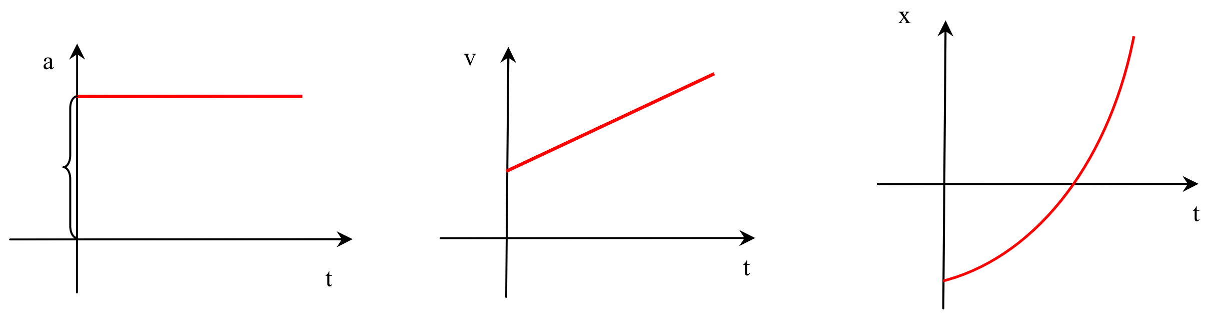

Legyen a következő esetben a kezdeti sebesség is negatív! Ekkor gyorsuló mozgást fogunk kapni, de a mozgás az ’x’ tengely negatív iránya felé történik!




Visszatérve az eredeti esetre, ha a kezdeti helyzetet változtatjuk negatív értékűre, akkor a mozgás jellege nem változik, csak más ’x’ értékről indul.




És így tovább. A különbségek lényege, hogy az ábrázolt mennyiségek nem egyszerűen skalárok, hanem vektor-mennyiségek komponensei, így az irányuk továbbra is kérdés, ezt egy dimenzióban az előjelek határozzák meg.

**IV.1.GY.1. Gyakorló feladatok**

**1.** Egy egyenletesen mozgó autó sebessége 72 km/h. Mennyi utat tesz meg 20 s alatt?

*Megoldás:*
- Adatok: v=72 km/h, $\Delta$t=20 s.
- Az autó sebességének átváltása m/s-ra: 72 km/h = 72/3,6 m/s = 20 m/s.
- Az út kiszámítása: s = v $\Delta$t = 400 m

**2**. Gépkocsi sebessége 5s alatt 15 m/s-ról egyenletesen 25 m/s-ra növekszik. Mennyi a gyorsulása?
*Megoldás:* A gépkocsi gyorsulása:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{25m/s - 15m/s}{5s} = 2\frac{m}{s^2}.$$

**3**. Egy autó 1,2 m/s$^2$ gyorsulással indul. Mekkora sebességet ér el, és milyen messzire jut 2,5 másodperc alatt?

*Megoldás:* A gyorsulás állandó, tehát a sebesség a *t* pillanatban

$$v = v_0 + at = 0 + 1{,}2m/s \cdot 2{,}5s = 3m/s.$$

A négyzetes úttörvényt felhasználva:

$$s = \frac{a}{2}t^2 = \frac{1{,}2\text{m/s}^2}{2} \cdot (3\text{s})^2 = 5{,}4\text{m}$$

utat tesz meg az autó.

**4.** Egy farkas üldözőbe vesz egy őzgidát. Tegyük fel, hogy mindketten ugyanazon egyenes mentén mozognak, a farkas sebessége 36 km/h, a gidáé 21,6 km/h, és utóbbinak 100m előnye van. Mennyi idő múlva éri utol a farkas és mennyit kell futnia?

*Megoldás:* Sebességük m/s-ban: $v_f = 10m/s$ és $v_g = 6m/s$. Mikor a farkas eléri a gidát, pontosan 100m-rel több utat tett meg, mint a gida; így $s_f = s_g + 100$m, és $v_f \cdot t = v_g \cdot t + 100$m.
Behelyettesítve: 10t=6t+100.
Tehát a gidát t=25s alatt éri utol a farkas. A farkasnak $s_f = v_f t = 10\text{m/s} \cdot 25\text{s} = 250\text{m}$ utat kell megtennie.

**5.** Két vonat közelít egymáshoz 480 m távolságból. Az egyik sebessége 14 m/s, a másiké 18 m/s. Egy légy röpköd az egyik vonat szélvédőjéről a másikéra 5 m/s sebességgel. Mennyi utat tesz meg a légy, míg a két vonat találkozik?

*Megoldás*: Ki lehet számolni, hogy mennyi utat tesz meg a légy, amíg először, másodszor, stb. fordul a két vonat között, aztán meg lehet próbálni összegezni a kapott végtelen sort.

Sokkal egyszerűbb azonban, ha észrevesszük, hogy a légy pontosan annyi ideig repül, amennyi ahhoz kell, hogy a vonatok találkozzanak. Erre az ismeretlen $t_{tal}$ időtartamra az alábbi egyenletet lehet felírni:

$$14\frac{m}{s}\cdot t_{tal}+18\frac{m}{s}\cdot t_{tal}=480m$$

A baloldalon a $t_{tal}$-t kiemelve látható, hogy csak a két sebesség összege számít. A két vonat találkozásáig $t_{tal}=15s$ telik el, ez alatt a légy $s=v_{légy}\cdot t_{tal}=75m$ utat tesz meg.

**6.** Két villamosmegálló között 760m a távolság. A kocsi egyenletesen gyorsul, aztán 27 km/h sebességgel egyenletesen mozog, majd állandó lassulással lefékez. A gyorsítás ideje 30s, a fékezésé 20s. Mennyi idő alatt ér a villamos az egyik megállóból a másikba?

*Megoldás*:
- Adatok: s=760m, $v_{vég}$=27 km/h=7,5m/s, $t_1$=30s, $t_3$=20s.
- A megoldás logikája:
    - A mozgás teljes ideje a három szakasz idejének összege, vagyis $t = t_1 + t_2 + t_3$.
    - Ezekből a második szakasz időtartama ismeretlen, lényegében ennek meghatározása a cél. Ennek kulcsa a második szakaszban megtett út kiszámítása.
- Első megoldás: az egyenletrendszer felírásával.

1. szakasz – gyorsuló szakasz

$$v_{vég}=a_1\cdot t_1$$
$$s_1=\frac{a_1}{2}\cdot t_1^2$$

2. szakasz – állandó sebesség

$$s_2=v_{vég}\cdot t_2$$

3. szakasz – lassulás

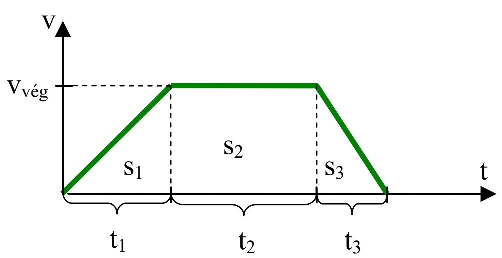
$$0=a_3\cdot t_3+v_{vég}$$
$$s_3=\frac{a_3}{2}\cdot t_3^2+v_{vég}\cdot t_3$$

továbbá

$$s=s_1+s_2+s_3$$
$$t=t_1+t_2+t_3$$

Ezen egyenletekből folyamatában kiszámolhatóak az egyes mennyiségek: először a gyorsulások, azok segítségével az első és utolsó szakasz során megtett utak, abból a második szakasz során megtett út, végül annak az időtartama.

- Második megoldás: grafikusan, felrajzoljuk a sebesség-idő diagramot




Figyelembe véve, hogy az egyes szakaszokon megtett út megegyezik a függvény alatti területtel, geometriai alapon könnyedén kiszámolhatóak az utak, abból az $s_2$, annak felhasználásával pedig a hiányzó időadat.

- Eredmények:

$a_1$=0,25 m/s, ebből $s_1$=112,5 m.

$a_3$=0,375 m/s, ebből $s_3$=75 m.

$s_2$=572,5 m, ebből $t_2$=76,33 s

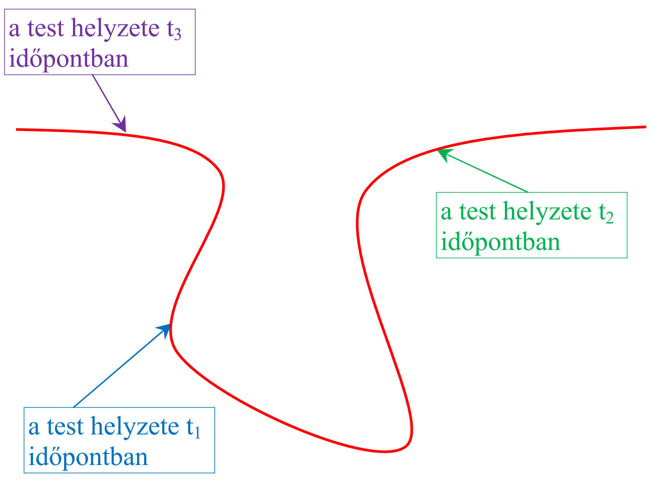
t=<u>126,33s</u>

### IV.1.5. Térbeli mozgások leírása

Korábban a test helyzetének megadására egyetlen számot, illetve, ha minden időpillanatban meg akartuk adni a helyzetet, egy függvényt használtunk. A térben történő mozgások esetén azonban ez kevés: a test a tér mindhárom irányába képes mozogni.

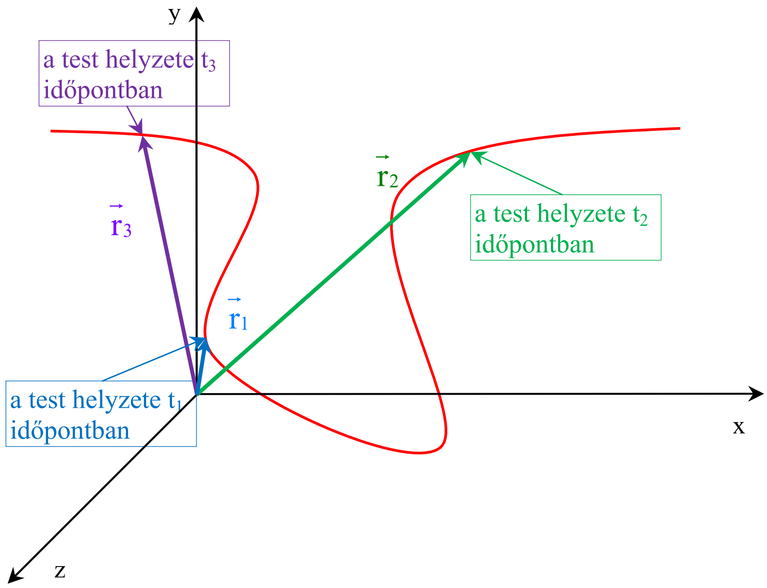
#### A) Helyzet, helyvektor

Mozogjon a test az alábbi görbe mentén (a rajz természetesen két dimenziós, vagyis sík, de némi fantáziával általánosítható térbeli görbére is).

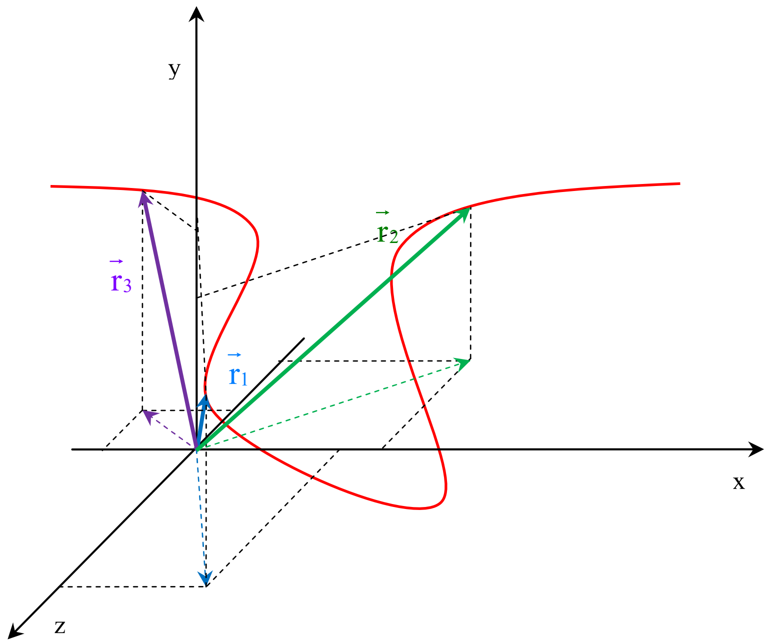



Ahhoz, hogy a három helyzetet le tudjuk írni valamilyen matematikai eszköztárral, választanunk kellene egy koordinátarendszert. Erre rengeteg különböző lehetőségünk van az egyszerűbb koordinátarendszerektől (derékszögű, gömbi, henger) az egészen bonyolultakig (természetes koordinátarendszer).

Mi a lehető legegyszerűbb, derékszögű Descartes-koordinátarendszert választjuk, és abban a három időpillanatban a test helyzetét három, úgynevezett **helyvektor** fogja megadni.




Ebben a koordinátarendszerben az egyes vektorok komponensei is könnyedén megadhatóak (lásd I.2.3. fejezet), ezt most grafikusan ábrázoljuk




Természetesen térben is fontos információ, hogy a test honnan kezdi a mozgását, vagyis hogy az általunk választott t=0 időpillanatban hol tartózkodik. Ez azonban most nem egyetlen számmal, hanem egy vektorral írható le, amit $\vec{r}_0$ -lal jelölünk.

Ha a vizsgált tömegpont helyzetét minden időpillanatban meg tudjuk határozni, ami ugye egy vektorként írható le, akkor írhatjuk fel röviden az elmozdulás időfüggését, mint $\vec{r}(t)$. A derékszögű Descartes-koordinátarendszerben ez

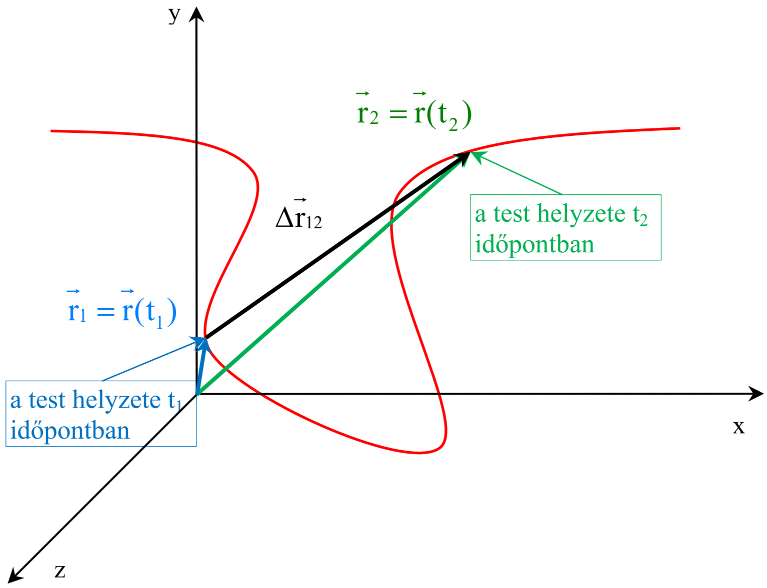
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \\ r_z(t) \end{pmatrix}, \text{ vagy rövidebben } \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

A három koordinátát az idő köti össze, vagyis az a pont van a pályagörbén, amelynek a helyvektorára igaz, hogy annak mindhárom komponense ugyanahhoz az időpillanathoz tartozik.

**Megjegyzés**: ebben az esetben a hely-idő diagram nem felrajzolható, hiszen ahhoz 4 dimenzióban kellene tudnunk rajzolni. Megoldás lehet erre, ha az időfüggést valamilyen animációval írjuk le, vagy ha a választott koordinátarendszerben minden komponens időbeli megváltozását külön-külön ábrázoljuk.

## B) Elmozdulás

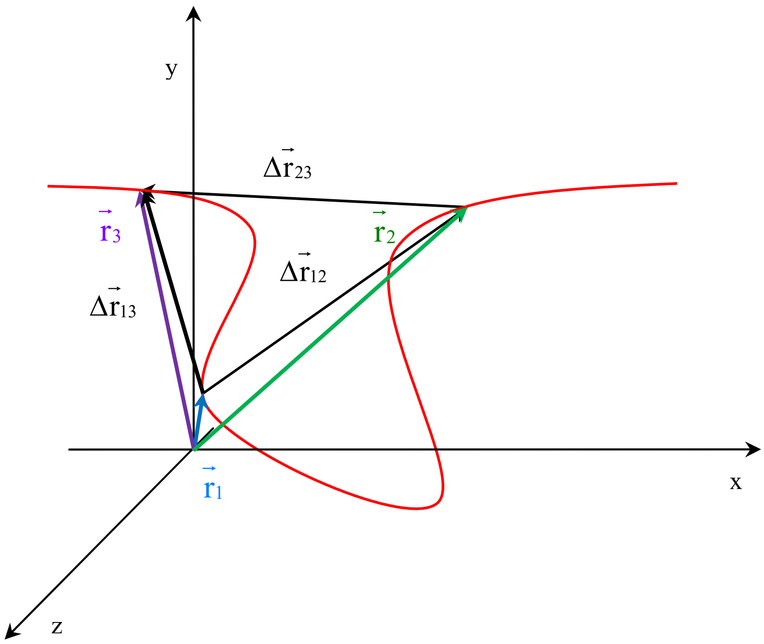
Egy adott pont helyzete ebben az esetben függ attól, hogy hová választjuk a koordinátarendszer origóját. Térbeli mozgásoknál is az **elmozdulás** lesz az a mennyiség, amely független ettől a választástól. A fenti ábrán a ’$t_1$’ és ’$t_2$’ időpontok közötti $\Delta\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ elmozdulás az alábbi lesz.




**Megjegyzés**: bár később még lesz erről szó, már most fontos kiemelni, hogy a megtett út és az elmozdulás között most még látványosabb a különbség! Mert nem csak a helyzet időbeli változásától, de a pályagörbétől is függ, hogy mennyire egyezik meg az elmozdulás nagysága és a megtett út.

## C) Elmozdulások összeadása

Az elmozdulások, mivelhogy vektor-mennyiségek, vektorként adandóak össze. A fenti ábrán a test $\vec{r}_1$- ből $\vec{r}_2$ -be mozog, majd onnan $\vec{r}_3$ -ba (az időfüggés alapján sokféleképpen mozoghat a test a fenti görbén, ácsoroghat egyik, vagy másik pontban, mozoghat előre-hátra, a fenti görbe csak azt mondja meg, hogy a mozgása során mindenképpen a görbe valamelyik pontjában található, vagyis a megadott görbe mentén mozog!). Nézzük meg, hogy így merre mutat a $\Delta\vec{r}_{13} = \Delta\vec{r}_{12} + \Delta\vec{r}_{23}$ elmozdulás-vektor!




**IV.1.6. Térbeli mozgások sebessége**

**A) Pillanatnyi sebesség**

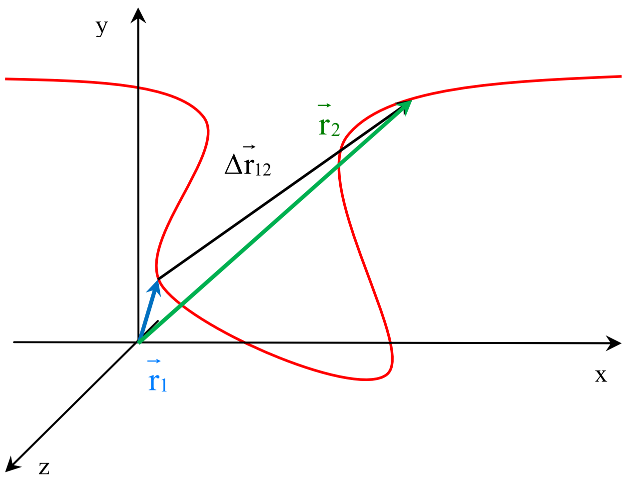
A pillanatnyi sebesség fogalmának kialakításakor az egydimenziós mozgásoknál bevezetett logikát követjük. Természetesen az eredményünk ez esetben egy vektor lesz, a **pillanatnyi sebesség vektora**.

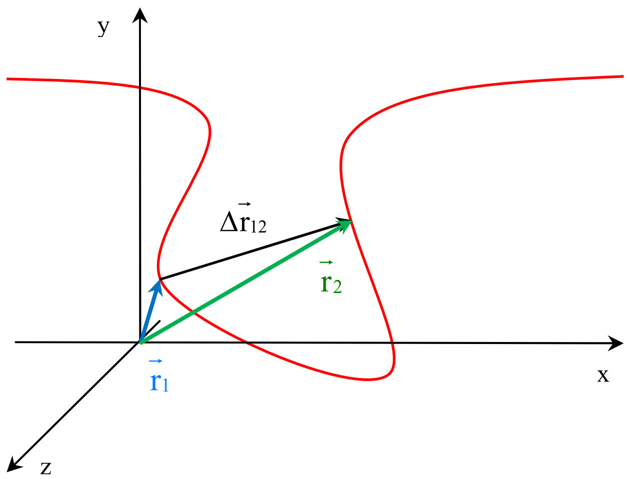
Ha a test ’$t_1$’ időpontban az $\vec{r}_1$ helyen található, majd ’$t_2$’ időpontban az $\vec{r}_2$ helyen, akkor a kettő közötti $\Delta\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ elmozdulás-vektor segítségével a sebességvektor definiálható, mint

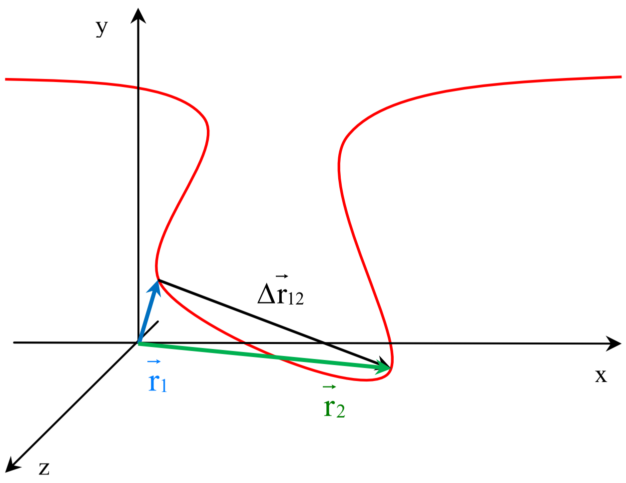
$$\vec{v}(t_1) = \frac{\Delta\vec{r}_{12}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1},$$

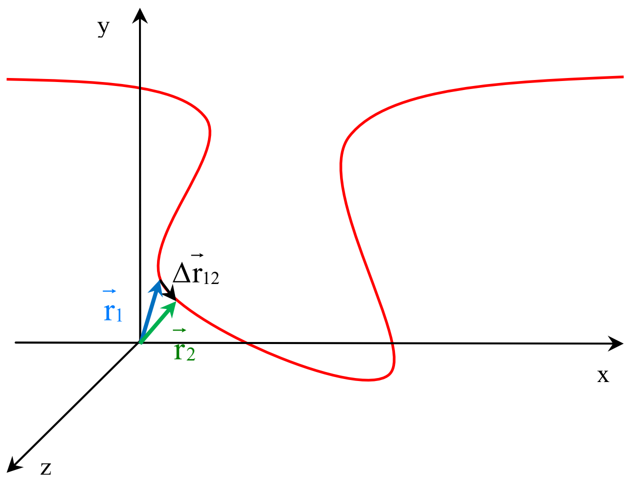
ha a két időpontot elegendően közelre választjuk egymáshoz.

Hogy ekkor mi történik a térben és időben egyszerre, nem tudjuk ábrázolni, viszont a térbeli görbe esetében érdemes megnézni, hogy a későbbi időpont közelítése ’$t_1$’-hez milyen eredményre vezet.



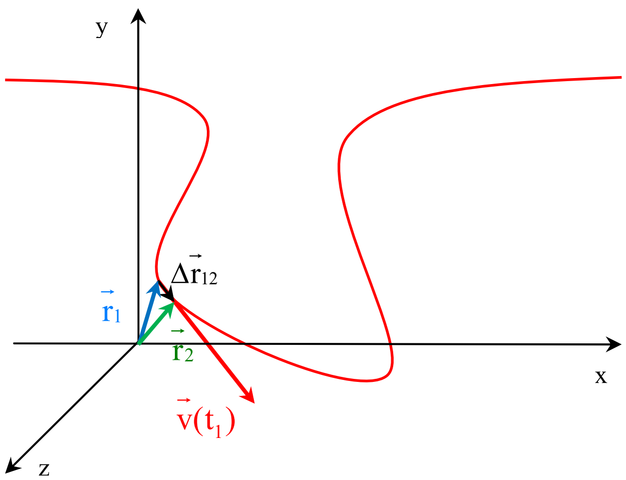






Ebből animáció?

Ezt a $\Delta\vec{r}_{12}$ vektort osztjuk egy kis $\Delta t$ időtartammal. Ez azt jelenti, hogy a sebességvektorunk párhuzamos lesz az elmozdulás-vektorral, a hossza viszont megnő.




Egy tipikus feladatban természetesen nem ennyire általános görbe a mozgás pályája, hanem egyenes, parabola, kör, stb., tehát olyan pályák, amelyekkel el fogunk tudni bánni, és nem kell majd a fenti közelítéses módszert alkalmaznunk.

Ha a fenti eljárást minden időpillanatban elvégezzük, akkor megkapjuk a sebességvektor időfüggésének leírását, vagyis a $\vec{v}(t)$ -t.

**B) Pillanatnyi sebesség derékszögű Descartes-koordinátarendszerben**

A fenti műveletet természetesen a már meglévő koordinátarendszerben elvégezhetjük, és mivel csak vektorok összeadását-kivonását, illetve számmal való szorzását ('$1/\Delta t$'-vel szorzunk) végezzük el, ezek komponensenként is ugyanígy számolhatóak. Vagyis, ha a helyvektor koordinátáit

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ alakba írjuk, a sebességvektor komponensei az alábbiak lesznek:

$$\vec{v}(t_1)=\begin{pmatrix} v_x(t_1) \\ v_y(t_1) \\ v_z(t_1) \end{pmatrix}=\frac{\Delta\vec{r}_{12}}{\Delta t}=\begin{pmatrix} \dfrac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1} \\ \dfrac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1} \\ \dfrac{z(t_2)-z(t_1)}{t_2-t_1} \end{pmatrix}.$$

Így külön-külön komponensenként számolhatjuk ki a sebesség egyes komponenseit.

**Megjegyzés**: a fenti módszerrel a sebességvektor komponensei számolhatóak ki. Ebből még további számolásokkal lehet a vektor nagyságát (vagyis a sebesség nagyságát) és irányát kiszámolni (I.7.1. fejezet).

**Kiegészítés**: azok számára, akik tanultak differenciál-számítást, a fenti módszer matematikailag precízen is kezelhető az egydimenziós esethez hasonlóan.

$$\vec{v}=\lim_{t_2\to t_1}\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{t_2-t_1}=\lim_{t_2\to t_1}\frac{\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{d\vec{r}}{dt}(t_1).$$

Lévén továbbra sem végzünk olyan műveletet, amely összekeverné a vektor-komponenseket, ezért derékszögű Descartes-koordinátarendszerben a műveletek, és így a deriválás is elvégezhető komponensenként. Vagyis

$$\vec{v}(t_1)=\begin{pmatrix} v_x(t_1) \\ v_y(t_1) \\ v_z(t_1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt}(t_1) \\ \dfrac{dy}{dt}(t_1) \\ \dfrac{dz}{dt}(t_1) \end{pmatrix}.$$

Külön érdemes megjegyezni, hogy mivel a keresett határátmenettel az infinitezimális elmozdulás a pályagörbe érintőjével párhuzamos, a sebességvektor is az lesz. Vagyis elmondható, hogy a sebességvektor minden esetben a pályagörbe érintőjének irányába mutat.

Fontos kiemelni, hogy az egydimenziós esetben ez egyértelműen teljesült, csak olyan mozgásokkal foglalkoztunk, amelyekben az elmozdulás és így a sebesség is mindig egyirányú volt. Az ott tárgyalt „érintő" tulajdonság a hely-idő diagramra vonatkozott, amit jelen esetben nem tudunk értelmezni.

Tudjuk ezt azonban értelmezni akkor, ha az egyes komponenseket külön-külön rajzoljuk fel egy-egy hely-idő diagramra. Ekkor ugyanis azt látjuk, hogy derékszögű Descartes-koordinátarendszerben az egyes komponensek időfüggés-görbék érintőinek a meredekségei lesznek az adott irányú sebességkomponensek.

A fenti eljárást ismét minden 't' időpillanatban elvégezve kapjuk a sebességvektort, ami így

$$\vec{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}(t)}{dt},$$

ami komponensenként

$$\vec{v}(t)=\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

### C) Sebességek összeadása és kivonása

Technikailag a sebességek összeadása és kivonása, lévén a sebesség vektor-mennyiség, vektorok közötti összeadás és kivonás. Ebből a szempontból ugyanaz a helyzet, mint az elmozdulás esetén.

Azonban ott jól érthető, hogy „valaki elmegy egy pontból egy másodikba, majd onnan egy harmadikba”, és a teljes elmozdulás a két elmozdulás összegeként áll elő. Fontos kérdés, és fontos érteni, hogy a sebességeket mikor adjuk össze, vagy vonjuk ki egymásból. Vagyis, hogy a műveletnek mi a konkrét fizikai tartalma.

Két test sebességének összeadására jellemző módon akkor van szükségünk, ha az egyik test mozgás a másik, mozgó test mozgásához képest van megadva. Például, ha a vonat $\vec{v}_{vonat}$ sebességgel mozog, és rajta egy ember a vonathoz képest $\vec{v}_{séta}$ sebességgel sétál a vonaton, egy külső megfigyelő azt látja, hogy ez az ember $\vec{v}_{ember}=\vec{v}_{vonat}+\vec{v}_{séta}$ sebességgel mozog. Mivel a sebességeket vektorként adjuk össze, a leírás pontosan ad eredményt akkor is, ha az ember hátrafelé mozog a vonat haladási irányához képest, vagy ha ahhoz képest ferdén.

Két sebesség kivonását tipikusan akkor szoktuk elvégezni, ha két sebesség egymáshoz való viszonyát szeretnénk kiszámítani. Például, ha két pontszerű(nek tekinthető) test mozog valamilyen irányba, valamekkora sebességgel, akkor az egymástól való távolodásuk sebességvektora a két sebességvektor különbsége.

Azonban egy kiterjedt test esetén is fontos lehet több pont sebességét összehasonlítani. Például egy merev test (lásd később) minden két pontjának sebességét, ha összehasonlítjuk, akkor kiderül, hogy a test csak haladó mozgást végez, vagy forog is (ha minden sebességvektor azonos nagyságú, és irányú, akkor csak haladó mozgást végez). Ezt a sebességvektorok kivonásával tudjuk ellenőrizni.

Összességében tehát két sebesség kivonása két test, vagy egy test két pontjának az egymáshoz viszonyított sebességét adja meg.

### D) Elmozdulás számítása a sebességből

Ez az a pont, ahol nagyon megnehezednek a konkrét számolások. Az általunk vizsgált „egyszerű” mozgások esetén az eredményeket vagy visszavezetjük egydimenziós mozgások esetére, vagy megadjuk a konkrét elmozdulás-idő összefüggést.

Viszont, ha követjük a korábbi menetrendet, azért el tudunk mondani néhány dolgot. A sebesség meghatározásából, amennyiben a sebesség nagysága és iránya állandó, megkaphatjuk az alábbi összefüggést

$$\Delta\vec{r}=\vec{v}\cdot\Delta t\,,$$

vagyis ebben az esetben (ami az egyenes vonalú egyenletes mozgás) a sebesség segítségével meg tudjuk határozni az elmozdulást. Ha a vizsgált időintervallumot elegendően kicsi $\Delta t$-kre bontjuk (ami azt jelenti, hogy az adott szakaszban állandónak tekinthető a sebességvektor), az egyes kis időszakokra vonatkozó elmozdulás-vektorokat a fenti egyenlettel kiszámoljuk, akkor ezen kis elmozdulások összege majdnem pontosan a teljes elmozdulást fogja megadni.

Ez nem rajzolható fel egyetlen ábrán, mint az egydimenziós esetben (függvény alatti terület), de az elv ugyanaz. Azonban nézzük most meg, mi történik, ha komponensenként írjuk fel a fenti egyenletet.

$$\Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \vec{v}\cdot\Delta t = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}\cdot\Delta t = \begin{pmatrix} v_x\Delta t \\ v_y\Delta t \\ v_z\Delta t \end{pmatrix},$$

vagyis az összefüggés az egyes komponensekre külön-külön is igaz derékszögű Descartes-koordinátarendszerben. Ez azt jelenti, hogy ha az elmozdulás-vektor egyes komponenseit akarjuk kiszámolni, akkor a sebességvektor megegyező komponensére már alkalmazható a „függvény alatti terület" megközelítés, mivel ahhoz már fel tudjuk rajzolni a három sebességkomponens-idő függvényt. Az így kapott vektor hosszúsága és iránya már kiszámolható (lásd I.7. fejezet).

Ebben az esetben is fontos kiemelni, hogy ezzel a módszerrel csupán a $\Delta\vec{r}$ elmozdulást kapjuk meg, a test konkrét helyzetét nem. Ehhez ugyanis itt is tudnunk kell, hogy a mozgás honnan indul, és az az általunk választott koordinátarendszerben hol található. Vagyis tudnunk kell, hogy melyik a kezdeti hely vektora, vagyis $\vec{r}(t=0)=\vec{r}_0$. Ha ezt tudjuk, akkor felhasználva, hogy $\Delta\vec{r}=\vec{r}-\vec{r}_0$, a test konkrét helyzete tetszőleges 't' időpillanatban megadható.

**Megjegyzés**: a fenti megközelítésnek fontos része, hogy az egyes elmozdulásokat vektorként adjuk össze, így a teljes elmozdulás bármilyen irányú is lehet.

**Kiegészítés**: a fenti elmozdulás-származtatási módszernek van egy komolyabban kidolgozott matematikai háttere, amely lényegében bármilyen folytonos pályagörbe esetén kiszámolhatóvá teszi az elmozdulás-vektort. Ehhez felhasználjuk, hogy a „függvény alatti terület" koncepciója komponensenként érvényes, így

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v_x(t)dt,\ \Delta y = \int_{t_1}^{t_2} v_y(t)dt, \text{ illetve } \Delta z = \int_{t_1}^{t_2} v_z(t)dt.$$

Mivel az integrálás során vektorokat szorzunk számmal (amikor a pillanatnyi sebesség-vektort szorozzuk az infinitezimális időtartammal), majd vektorokat adunk össze (a szorzatok eredményei infinitezimális elmozdulások), a komponensenkénti számolás azonnal felírható vektor-alakban is,ami így már független lesz a koordináta-rendszer megválasztásától. Így

$$\Delta\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)dt.$$

Ezt egy kezdeti időtől indítva egy tetszőleges időpontig, és az origó helyének ismeretében a kezdeti hely felhasználásával kapjuk az alábbi összefüggést a helyvektor időfüggésére:

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' + \vec{r}_0.$$

### IV.1.7. Térbeli mozgások gyorsulása

#### A) Pillanatnyi gyorsulás

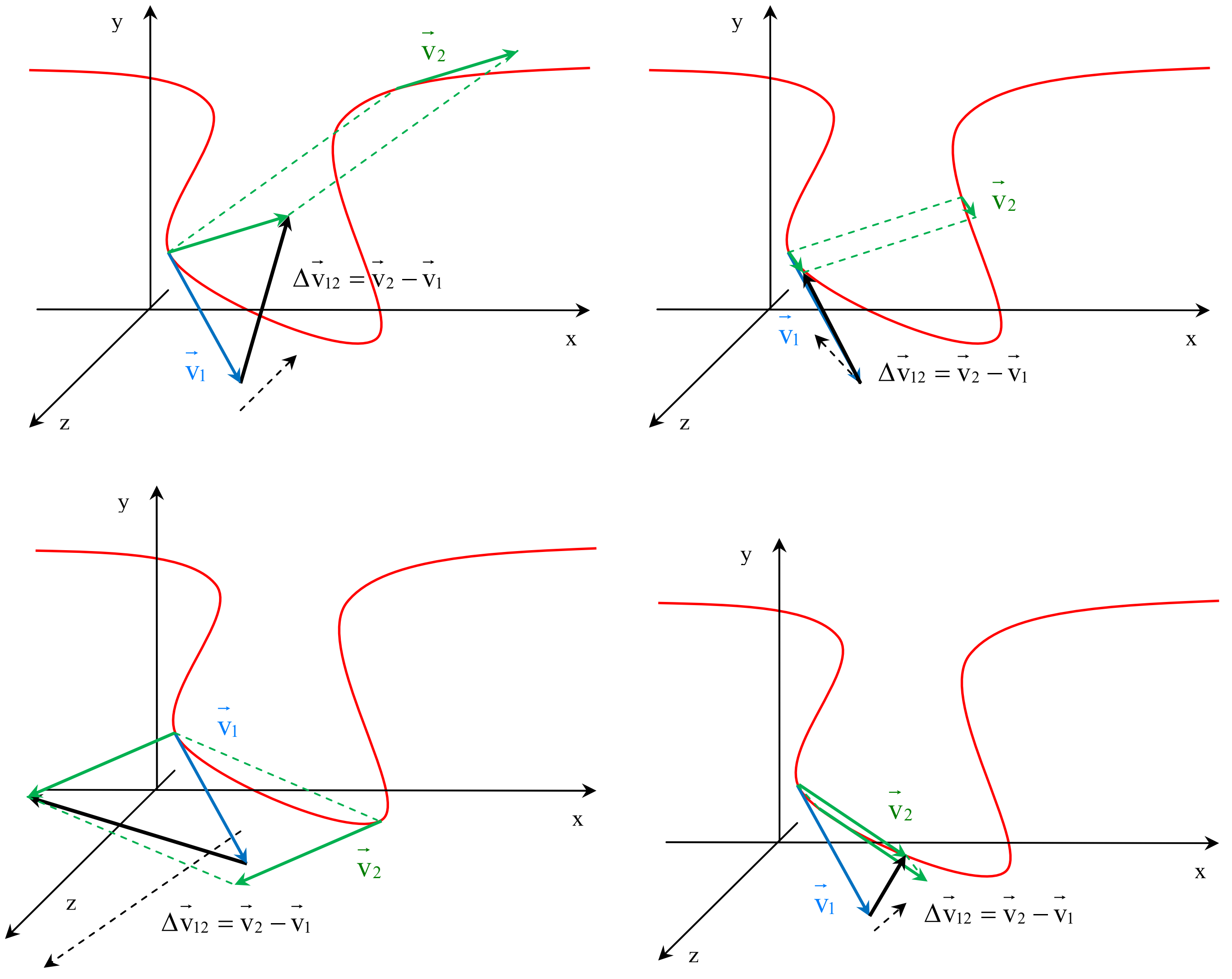
A pillanatnyi gyorsulás meghatározásakor ugyanazokat az elveket követjük, mint a sebességek származtatása során. Azonban az egyes vektormennyiségek most mást jelentenek, és ezeket a különbségeket szeretnénk minél pontosabban bemutatni az alábbiakban. Elsőként a **pillanatnyi gyorsulás vektorá**t írjuk le.

Ha a test sebessége ’$t_1$’ időpontban az $\vec{v}_1$, majd ’$t_2$’ időpontban $\vec{v}_2$, akkor a gyorsulás az alábbi összefüggéssel definiálható

$$\vec{a}(t_1) = \frac{\Delta\vec{v}_{12}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1},$$

ha a két időpontot elegendően közelre választjuk egymáshoz.

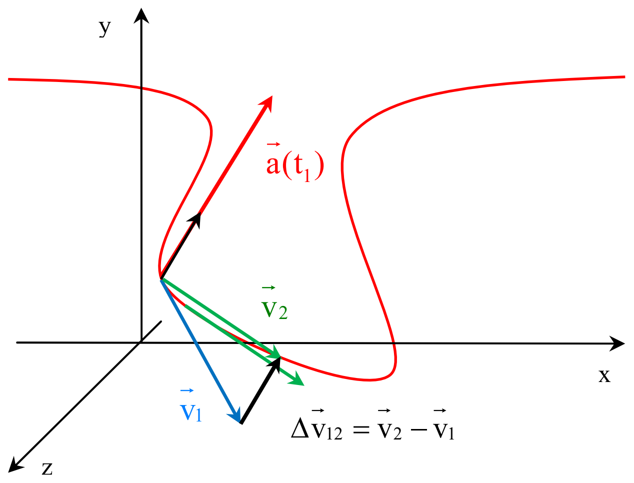
Hogy ekkor mi történik a sebességgel és idővel egyszerre, nem tudjuk ábrázolni, viszont a térbeli pályagörbe esetén meg tudjuk mutatni, hogy a sebességkülönbség $\Delta\vec{v}_{12}$ vektora mit jelent. A későbbi időpontot itt is egyre közelebb visszük a vizsgált ’$t_1$’ időpillanathoz.




Ebből animáció?

Az ábrákon bejelöltük a kivonáshoz szükséges párhuzamos eltolás segédszakaszait, illetve jelöltük a különbség-vektor vetületét az x-z síkon, így annak jobban érzékelhető a térbeli elhelyezkedése.

Ezt a $\Delta\vec{v}_{12}$ vektort osztjuk egy kis $\Delta t$ időtartammal. Ez azt jelenti, hogy a gyorsulásvektorunk párhuzamos lesz a sebességvektorral, a hossza viszont megnő.




Egy tipikus feladatban természetesen nem ennyire általános görbe a mozgás pályája, hanem egyenes, parabola, kör, stb., tehát olyan pályák, amelyekkel el fogunk tudni bánni, és nem kell majd a fenti közelítéses módszert alkalmaznunk.

Ha a fenti eljárást minden időpillanatban elvégezzük, akkor megkapjuk a gyorsulásvektor időfüggésének leírását, vagyis a $\vec{a}(t)$ -t.

**B) Pillanatnyi gyorsulás derékszögű Descartes-koordinátarendszerben**

A fenti műveletet ismét elvégezhetjük derékszögű Descartes-koordinátarendszerben, és mivel továbbra is olyan műveleteket hajtunk végre, amik ebben a koordinátarendszerben külön-külön koordinátánként elvégezhető, a gyorsulásvektor meghatározható:

$$\vec{a}(t_1) = \begin{pmatrix} a_x(t_1) \\ a_y(t_1) \\ a_z(t_1) \end{pmatrix} = \frac{\Delta\vec{v}_{12}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \dfrac{v_x(t_2) - v_x(t_1)}{t_2 - t_1} \\ \dfrac{v_y(t_2) - v_y(t_1)}{t_2 - t_1} \\ \dfrac{v_z(t_2) - v_z(t_1)}{t_2 - t_1} \end{pmatrix}.$$

**Megjegyzés**: a fenti módszerrel a gyorsulásvektor komponensei számolhatóak ki. Ebből még további számolásokkal lehet a vektor nagyságát (vagyis a gyorsulás nagyságát) és irányát kiszámolni (lásd I.7. fejezet).

**Kiegészítés**: azok számára, akik tanultak differenciál-számítást, a fenti módszer matematikailag precízen is kezelhető az egydimenziós esethez hasonlóan, akárcsak a sebesség esetén. Így

$$\vec{a} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d\vec{v}}{dt}(t_1).$$

Ugyanez komponensenként derékszögű Descartes-koordinátarendszerben:

$$\vec{a}(t_1) = \begin{pmatrix} a_x(t_1) \\ a_y(t_1) \\ a_z(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt}(t_1) \\ \frac{dv_y}{dt}(t_1) \\ \frac{dv_z}{dt}(t_1) \end{pmatrix}.$$

A fenti eljárást ismét minden ’t’ időpillanatban elvégezve kapjuk a gyorsulásvektor időfüggését, ami így

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt},$$

ami komponensenként

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

Továbbá, lévén a sebesség a helyvektor deriváltja,

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2},$$

illetve derékszögű Descartes-koordinátarendszerben

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2z(t)}{dt^2} \end{pmatrix}.$$

**C) Gyorsulások összeadása és kivonása**

Akárcsak a sebességek esetében, a gyorsulásokat is vektorként adjuk össze, és vonjuk ki egymásból. Itt is jellemző, hogy az egymáshoz képesti gyorsulásokat szoktunk számolni így.

Fontos azonban megjegyezni, hogy ha egy gyorsuló mozgás végző testhez képest gyorsuló mozgást végző másik test mozgásának tulajdonságait akarjuk leírni egy „külső”, álló (vagy egyenes vonalon, egyenletes sebességgel haladó) megfigyelő nézőpontjából, óvatosnak kell lennünk. Ebben az esetben ugyanis a dinamika egyenleteiben számolnunk kell az úgynevezett tehetetlenségi erők hatásával is (lásd később).

**D) Sebesség számítása a gyorsulásból**

Ez az a pont, ahol nagyon megnehezednek a konkrét számolások. Az általunk vizsgált „egyszerű” mozgások esetén az eredményeket vagy visszavezetjük egydimenziós mozgások esetére, vagy megadjuk a konkrét sebesség-idő összefüggést.

Viszont, ha követjük a korábbi menetrendet, azért el tudunk mondani néhány dolgot. A gyorsulás meghatározásából, amennyiben a gyorsulás nagysága és iránya állandó, megkaphatjuk az alábbi összefüggést

$$\Delta\vec{v} = \vec{a} \cdot \Delta t \,,$$

vagyis ebben az esetben a gyorsulás segítségével meg tudjuk határozni a sebességváltozást. Ha a vizsgált időintervallumot elegendően kicsi $\Delta t$ -kre bontjuk (ami azt jelenti, hogy az adott szakaszban állandónak tekinthető a gyorsulásvektor), az egyes kis időszakokra vonatkozó sebességváltozás-vektorokat a fenti egyenlettel kiszámoljuk, akkor ezen kis sebességváltozások összege majdnem pontosan a sebesség teljes megváltozását fogja megadni.

Ez nem rajzolható fel egyetlen ábrán, mint az egydimenziós esetben (függvény alatti terület), de az elv ugyanaz. Azonban nézzük most meg, mi történik, ha komponensenként írjuk fel a fenti egyenletet.

$$\Delta\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{pmatrix} = \vec{a} \cdot \Delta t = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \Delta t = \begin{pmatrix} a_x \Delta t \\ a_y \Delta t \\ a_z \Delta t \end{pmatrix},$$

vagyis az összefüggés az egyes komponensekre külön-külön is igaz derékszögű Descartes-koordinátarendszerben. Ez azt jelenti, hogy ha a sebesség megváltozását leíró vektor egyes komponenseit akarjuk kiszámolni, akkor a gyorsulásvektor megegyező komponensére már alkalmazható a „függvény alatti terület” megközelítés, mivel ahhoz már fel tudjuk rajzolni a három gyorsuláskomponens-idő függvényt. Az így kapott vektor hosszúsága és iránya már kiszámolható (lásd I.7. fejezet).

Ebben az esetben is fontos kiemelni, hogy ezzel a módszerrel csupán a $\Delta\vec{v}$ sebességváltozást kapjuk meg, a test konkrét sebességét nem. Ehhez ugyanis itt is tudnunk kell, hogy a mozgás mekkora sebességgel indul, vagyis ismernünk kell a kezdeti sebességvektort $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$. Ha ezt tudjuk, akkor felhasználva, hogy $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$, a test konkrét sebessége tetszőleges ’t’ időpillanatban megadható.

A sebesség időfüggésének ismeretében pedig a fentiekben leírtak szerint ki tudjuk számolni a test helyzetének időfüggését. Ez azonban roppant nehéz feladat, csak a legegyszerűbb mozgások esetében fogjuk tudni ezeket levezetni, a többi helyen következtetni fogunk arra, hogy adott gyorsulás milyen helyzetváltozáshoz vezet.

**Kiegészítés**: a fenti elmozdulás-származtatási módszernek van egy komolyabban kidolgozott matematikai háttere, amely lényegében bármilyen folytonos pályagörbe esetén kiszámolhatóvá teszi a sebességváltozás-vektort. Ehhez felhasználjuk, hogy a „függvény alatti terület” koncepciója komponensenként érvényes, így

$$\Delta v_x = \int_{t_1}^{t_2} a_x(t)dt \,,\ \Delta v_y = \int_{t_1}^{t_2} a_y(t)dt \,, \text{ illetve } \Delta v_z = \int_{t_1}^{t_2} a_z(t)dt \,.$$

Mivel az integrálás során vektorokat szorzunk számmal (amikor a pillanatnyi gyorsulás-vektort szorozzuk az infinitezimális időtartammal), majd vektorokat adunk össze (a szorzatok eredményei infinitezimális sebességváltozások), a komponensenkénti számolás azonnal felírható vektor-alakban is,ami így már független lesz a koordináta-rendszer megválasztásától. Így

$$\Delta\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt \,.$$

Ezt egy kezdeti időtől indítva egy tetszőleges időpontig, és az origó helyének ismeretében a kezdeti sebesség felhasználásával kapjuk az alábbi összefüggést a sebességvektor időfüggésére:

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' + \vec{v}_0 \, .$$

Ezen az úton továbbhaladva ki tudjuk számolni a test helyzetét leíró helyvektor időfüggését is. Fontos megjegyezni, hogy ezt csak így, az integrálás segítségével lehet három dimenzióban megfelelően végrehajtani, integrálás nélkül ez roppant nehéz feladat.

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' + \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \left[ \int_{t_0}^{t'} \vec{a}(t'')dt'' + \vec{v}_0 \right] dt' + \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \left[ \int_{t_0}^{t'} \vec{a}(t'')dt'' \right] dt' + \vec{v}_0 (t' - t_0) + \vec{r}_0$$

### IV.1.GY.2. Gyakorló feladatok

**1.** Egy hajó északra halad 20km/h sebességgel, egy másik keletre 15km/h-val. Milyen távol lesznek egymástól 4 óra múlva?

*Megoldás:* 4 óra alatt az észak felé tartó hajó $s_é = v_é \cdot t = 20km/h \cdot 4h = 80km$ utat tesz meg, míg a keletre tartó $s_k = v_k \cdot t = 15km/h \cdot 4h = 60km$-rel kerül odébb. Távolságukat Pitagorasz-tétellel számolhatjuk ki:

$$d = \sqrt{s_k^2 + s_é^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100\text{km} \, .$$

**2.** Egy vektor hossza h=2m, a vízszintes komponense $h_v$=1,2m. Mekkora a $h_f$ függőleges komponens és mekkora φ szöget zár be a vektor a függőlegessel?

*Megoldás:* A sin definíciójából: sinφ=$h_v$/h=0,6. Emiatt φ=36,87° a vektor függőlegessel bezárt szöge. A vektor függőleges komponense (Pitagorasz-tétellel):

$$h_f = \sqrt{h^2 - h_v^2} = \sqrt{2^2 - 1{,}2^2} = 1{,}6m.$$

Megjegyezzük, hogy utóbbit szögfügvénnyel is ki lehet számolni.

**3.** Egy test t=0-ban a Descartes-koordináta rendszer (3,2,1) pontjában volt, t=3-ban pedig a (5,5,-1) pontban. Mekkora az átlagsebessége?

*Megoldás:* Az elmozdulás-vektor x,y és z komponense szintén ezen koordináta-rendszerben rendre (2,3,-2). Mivel derékszögű koordináta-rendszerről beszélünk, az elmozdulás-vektor nagysága (Pitagorasz-tétellel): $\sqrt{2^2 + 3^2 + (-2)^2} = 4{,}12$. Emiatt a mozgás során a test átlagsebessége az elmozdulás-vektor nagysága, illetve az idő hányadosával: $v_{átl} = 4{,}12/3 = 1{,}37$.

**4.** Egy hajó $v_h$=20km/h sebességgel halad kelet felé. A raktérben egy patkány a hajóhoz képest északkeleti irányban szalad $v_p$=15km/h sebességgel. Mekkora a patkány sebessége a Földhöz képest és milyen szöget zár be a keleti iránnyal?

*Megoldás:*
- Adatok: $v_h$=20km/h, $v_p$=15km/h, a patkány sebessége a keleti irányhoz képest α=45°.
- Koordinátarendszer választása: x tengely a keleti irányba, y tengely az északi irányba mutasson.
- Vektorkomponensek: $v_{hx}$=20km/h; $v_{hy}$=0km/h

$v_{px}=v_p \cos\alpha=10{,}61$ km/h; $v_{py}=v_p \sin\alpha=10{,}61$ km/h

- A partról nézve a két sebességvektor összegét lehet látni, vagyis $\vec{v}=\vec{v}_h+\vec{v}_p$.

A vektor koordinátái: $\vec{v}=\vec{v}_h+\vec{v}_p=\begin{pmatrix}20\dfrac{km}{h}\\ 0\dfrac{km}{h}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10{,}61\dfrac{km}{h}\\ 10{,}61\dfrac{km}{h}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30{,}61\dfrac{km}{h}\\ 10{,}61\dfrac{km}{h}\end{pmatrix}$.

- A sebességvektor hossza: $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\underline{32{,}39\,\text{km/h}}$.
- A sebességvektor iránya, vagyis a keleti iránnyal bezárt β szöge:

$$\mathrm{tg}\beta=\frac{v_y}{v_x}=0{,}347 \quad\Rightarrow\quad \underline{\beta=19{,}1°}.$$

### IV.1.8. Kiegészítések az általános fogalmakhoz

#### A) Megtett út és elmozdulás

Az egydimenziós elmozdulás bevezetésekor már volt szó arról, hogy a megtett út és az elmozdulás egymástól nagyon különböző lehet. Ez még inkább igaz görbe vonalú mozgások esetén. Például egy köríven haladva az elmozdulás a kör átellenes pontjáig az átmérővel egyenlő, a megtett út pedig a kerület fele. Az utóbbi jó másfélszerese az előbbinek. Egy másik példa lehet a harmonikus rezgőmozgás, ahol a test egy periódusnyi idő után visszatér az eredeti helyére, vagyis az elmozdulása összességében nulla. Viszont eközben megtesz négy amplitúdónyi utat.
Az általunk tanult mozgások esetében ezek a különbségek jó láthatóak, és ahol szükség van rá, ezek kiszámítására és megkülönböztetésére külön ki fogunk térni. Általánosságban azonban nem adjuk meg a számolási módszereket, mivel azok magasabb szintű matematikai képzettséget igényelnek.

Amit viszont fontos kiemelni, hogy míg az elmozdulás vektormennyiség, addig a megtett út skalár. Még egy egydimenziós mozgás esetében is van értelme annak, hogy ha az elmozdulás negatív, az egyszerűen annyit jelent, hogy az általam választott pozitív iránnyal ellentétes az elmozdulás iránya. Azonban a megtett út minden esetben egy nem-negatív számmal, vagy monoton növő függvénnyel írható le.

**Kiegészítés**: akinek a szükséges képzettsége megvan, annak a számára a megfelelően meghatározott integrálás adja a megkülönböztetés alapját. Mint korábban már jeleztük, az elmozdulás-vektor kiszámítható, mint

$$\Delta\vec{r}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{v}(t)\,dt.$$

A megtett út ezzel szemben

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\left|\vec{v}(t)\right|dt.$$

#### B) Átlagsebesség

Bár a pillanatnyi sebesség fogalmát általánosan is bevezettük (lásd … IV.1.6.A hivatkozás), van még egy fontos, gyakran használt sebesség-fogalom. Ez pedig az átlagsebesség. Ez egy hosszabb ideig tartó mozgás egészére vonatkozó mennyiség, ami

$$\overline{v} = \frac{s_{összes}}{\Delta t},$$

ahol a számlálóban a mozgás során megtett összes út szerepel (nem elmozdulás, hanem megtett út!), míg a nevezőben az ezenközben eltelt idő. Az átlagolást a mennyiség fölé rajzolt vonással jelöljük.

### IV.1.GY.3. Gyakorló feladat

**1.** Két hegyi falu közötti autóbuszjáraton a buszok átlagsebessége egyik irányban 30 km/óra, a másik irányban 60 km/óra. Mekkora az átlagsebesség egy teljes fordulót figyelembe véve? Mi lenne akkor az átlagsebesség, ha a busz egy órán át menne 30, egy órán át pedig 60km/h sebességgel?

*Megoldás*:

- A busz az első feladatrészben A és B falu között közlekedik, az átlagsebességei $\overline{v}_{AB} = 60 km/h$ és $\overline{v}_{BA} = 30 km/h$. Tudjuk továbbá, hogy $s_{AB} = s_{BA}$. Ezt az utat röviden jelöljük ’s’-sel.
- Mindkét irányra igaz, hogy átlagsebessége alapján kiszámolható a megtett út, vagyis $s_{AB} = \overline{v}_{AB} \cdot t_{AB}$, illetve $s_{BA} = \overline{v}_{BA} \cdot t_{BA}$.
- Az átlagsebesség ekkor

$$\overline{v} = \frac{s_{összes}}{\Delta t} = \frac{s_{AB} + s_{BA}}{t_{AB} + t_{BA}} = \frac{s_{AB} + s_{BA}}{\frac{s_{AB}}{\overline{v}_{AB}} + \frac{s_{BA}}{\overline{v}_{BA}}} = \frac{2s}{\frac{s}{\overline{v}_{AB}} + \frac{s}{\overline{v}_{BA}}} = \frac{2}{\frac{1}{\overline{v}_{AB}} + \frac{1}{\overline{v}_{BA}}} = 40 km/h.$$

- Feladat második részében a mozgás első szakaszában $\overline{v}_1 = 60 km/h$, és a második szakaszában $\overline{v}_2 = 30 km/h$ az átlagsebesség, illetve tudjuk, hogy $t_1 = t_2$, amit röviden ’t’-vel fogunk majd jelölni.
- Mindkét irányra igaz, hogy átlagsebessége alapján kiszámolható a megtett út, vagyis $s_1 = \overline{v}_1 \cdot t_1$, illetve $s_2 = \overline{v}_2 \cdot t_2$.
- Az átlagsebesség ekkor

$$\overline{v} = \frac{s_{összes}}{\Delta t} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{\overline{v}_1 \cdot t_1 + \overline{v}_2 \cdot t_2}{t_1 + t_2} = \frac{\overline{v}_1 \cdot t + \overline{v}_2 \cdot t}{2t} = \frac{\overline{v}_1 + \overline{v}_2}{2} = 45 km/h.$$

## IV.1.9. Speciális esetek, egyszerű mozgások

### A) Egyenes vonalú mozgás

Egyenes vonalú mozgásnak természetesen azt nevezzük, amely egy egyenes mentén történik (ezen belül akárhogyan).

Ennek feltétele az, hogy a $\vec{v}(t)$ sebességvektor minden időpillanatban ugyanolyan irányú legyen. Ennek előfeltétele, hogy az $\vec{a}(t)$ gyorsulásvektor mindig párhuzamos legyen a sebességvektorral (azonos irányú, vagy ellentétes, az mindegy). Ellenkező esetben görbe-vonalúvá válik a mozgás.

### B) Egyenletes mozgás

Egyenletesnek nevezhetjük a mozgást, ha időegység alatt mindig ugyanannyi utat tesz meg, vagyis, ha a megtett út egyenesen arányos az idővel.

Ennek feltétele, hogy a sebesség nagysága állandó legyen. Az iránya nem feltétlenül kell ugyanaz legyen, de a nagyságának igen (lásd egyenletes körmozgás később). Ennek előfeltétele a gyorsulás szintjén, hogy a gyorsulás sebességgel párhuzamos (tangenciális) komponense minden pillanatban nulla legyen. Az ilyen mozgásokra elmondható, hogy

$s = \left|\vec{v}(t)\right| \Delta t$ .

Fontos kiemelni, hogy nem az elmozdulásról, hanem a megtett útról nyilatkoztunk.

## C) Egyenes vonalú egyenletes mozgás

Ez a mozgástípus egy olyan egyenes vonalú mozgás, ami egyenletes is.
A két feltételrendszer eredménye az, hogy a gyorsulásvektor minden komponense nulla kell legyen, vagyis vektorként értelmezve nullvektor, vagyis $\vec{a}(t) = \vec{0}$. Ekkor a többi mennyiséget az alábbi módon vezethetjük le három dimenzióban:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 ,$$

mivel $\Delta\vec{v} = \vec{a}(t) \cdot t = \vec{0}$, és $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}_0$ .

Az elmozdulás kiszámításának eredménye

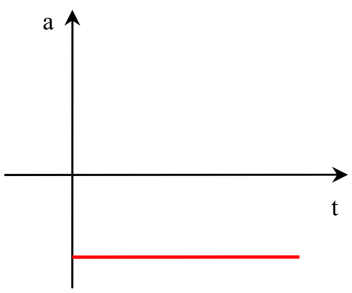
$$\vec{r}(t) = \vec{v} \cdot t + \vec{r}_0 ,$$

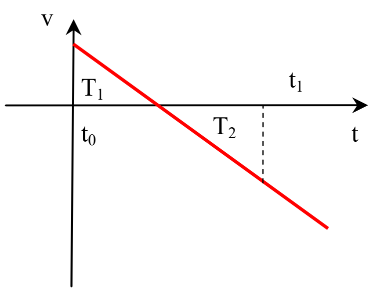
mivel $\Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \vec{v} \cdot t = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \cdot t = \begin{pmatrix} v_x t \\ v_y t \\ v_z t \end{pmatrix}$, és $\Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) - x_0 \\ y(t) - y_0 \\ z(t) - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$ .

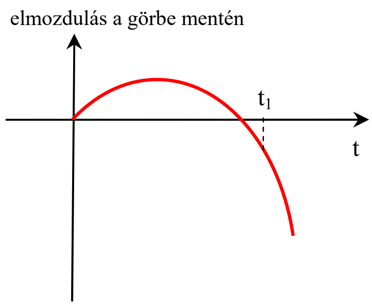
## D) Egyenletesen változó mozgás

Egyenletesen változónak nevezhetjük a mozgást, ha időegység alatt mindig ugyanannyit változik a sebesség nagysága, vagyis, ha a sebesség nagyságának a változása egyenesen arányos az idővel.
Ennek feltétele, hogy a gyorsulásvektor sebességgel párhuzamos (tangenciális) komponense állandó értékű legyen a mozgás során. A gyorsulásvektor iránya nem feltétlenül kell ugyanaz legyen, de az érintőirányú komponens nagyságának igen (lásd egyenletesen változó körmozgás később).

Egyenletesen változó mozgás esetén külön fontos foglalkozni azzal az esettel, amikor a mozgás először lassul, majd megáll, és visszafelé elindulva gyorsuló mozgást kell végezni. Egy végig gyorsuló, vagy egy adott időpillanatig lassuló mozgás leírásával szemben ennek a speciális esetnek van egy fontos módszertani specialitása.
Rajzoljuk fel ennek a mozgásnak a gyorsulás-idő és sebesség-idő függvényét (ha ezt a pályagörbével párhuzamos komponensekre írjuk fel, teljesen általánosak maradhatunk)!

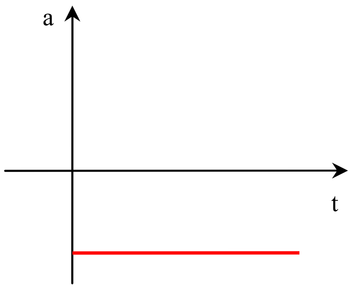


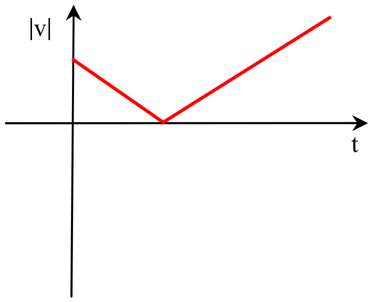



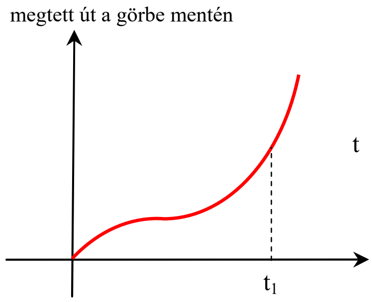



Jól látható, hogy a sebesség először pozitív, a test lassul, sebessége nullára csökken, vagyis megáll, majd a sebesség nagysága elkezd nőni, de az ellentétes irányba kezd mozogni a test. A sebességből az elmozdulást a görbe alatti terület kiszámításával kapjuk (az előjeleket figyelembe véve!), és jól látható, hogy az elmozdulás a sebesség nulla pontjáig nő a görbe mentén (bár egyre kisebb ütemben), utána elkezd csökkenni (visszafelé mozog), egészen addig, amíg nullára nem csökken (visszaér az eredeti helyére). Ezután az ellenkező irányba mozog tovább.

Más azonban a görbe mentén megtett út időfüggése. Azt a sebesség abszolút értékének függvény alatti területével számolhatjuk ki.




A fenti képek alapján elmondható, hogy két olyan időpont között, amely a nulla sebességű pont két oldalán helyezkedik el (az ábrán ’$t_0$’ és ’$t_1$’), az elmozdulás a pozitív és a negatív „irányú” háromszög területének különbségével számolható ($T_1$ - $T_2$), a megtett út pedig a két háromszög területének összegeként ($T_1 + T_2$).

**E) Egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás**

Az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás egy olyan egyenes vonalú mozgás, ami egyenletesen változó is.

A két feltételrendszer összegzéseként elmondható, hogy a gyorsulásvektor mindig párhuzamos a sebességgel, és mivel így csak sebességgel párhuzamos (tangenciális) komponense van, és annak állandónak kell lennie, a gyorsulásvektor állandó vektor (nagysága és iránya nem változik), és a mozgás irányával párhuzamos, vagyis $\vec{a}(t) = \vec{a}_0$. Az alábbiakban származtatjuk a sebességre és helyzetre vonatkozó egyenleteket is térben. Fontos azonban kiemelni, hogy itt a szorzás helyett komponensenként már a „függvény alatti terület” koncepcióját kell alkalmaznunk.

A sebességre vonatkozó összefüggés

$$\vec{v}(t) = \vec{a} \cdot t + \vec{v}_0,$$

$$\text{mivel } \Delta\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{pmatrix} = \vec{a} \cdot t = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot t = \begin{pmatrix} a_x t \\ a_y t \\ a_z t \end{pmatrix}, \text{ és } \Delta\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) - v_{0x} \\ v_y(t) - v_{0y} \\ v_z(t) - v_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix} = \vec{v}(t) - \vec{v}_0.$$

A helyzetre vonatkozó összefüggés pedig

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{a}_0}{2} \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0,$$

mivel $\Delta\vec{r}=\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a_{0x}}{2}\cdot t^2+v_{0x}\cdot t\\ \frac{a_{0y}}{2}\cdot t^2+v_{0y}\cdot t\\ \frac{a_{0z}}{2}\cdot t^2+v_{0z}\cdot t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a_{0x}}{2}\cdot t^2\\ \frac{a_{0y}}{2}\cdot t^2\\ \frac{a_{0z}}{2}\cdot t^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_{0x}\cdot t\\ v_{0y}\cdot t\\ v_{0z}\cdot t\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}a_{0x}\\ a_{0y}\\ a_{0z}\end{pmatrix}\cdot t^2+\begin{pmatrix}v_{0x}\\ v_{0y}\\ v_{0z}\end{pmatrix}\cdot t=\frac{\vec{a}_0}{2}\cdot t^2+\vec{v}_0\cdot t$, és

$$\Delta\vec{r}=\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(t)-x_0\\ y(t)-y_0\\ z(t)-z_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}=\vec{r}(t)-\vec{r}_0.$$

**F) Állandó gyorsulású mozgások**

Bár az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás is ebbe a kategóriába tartozik, maga a kategória ennél tágabb. Megkötés, hogy a gyorsulásvektor állandó vektor legyen, vagyis se a nagysága, se az iránya ne változzon az időben.

Nem adunk viszont ebben az esetben megkötés a sebesség és a gyorsulás irányának tekintetében. Emiatt két csoportra bonthatjuk ezeket a mozgásokat:

- A gyorsulásvektor iránya párhuzamos a sebességével – ez az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás.
- A gyorsulásvektor nem párhuzamos a sebességgel. Ebben az esetben a sebességnek a gyorsulással párhuzamos komponense időben lineárisan nő, az arra merőleges komponensek nem változnak az időben. Így egy parabolaszerű pályát kapunk.

Az állandó gyorsulású mozgások legjellemzőbb képviselői a hajítások, ahol a gyorsulásvektor nagysága mindig állandó, iránya pedig függőlegesen lefelé mutat. A gyorsulás és a kezdeti sebességvektor iránya alapján beszélhetünk függőleges, vízszintes és ferde hajításokról (lásd alább).

## IV.1.Int. Interaktív feladatok

**1**. Egy biciklis t=0-ban A-ból C-be indul a B ponton keresztül egyenes vonalban állandó 15km/h sebességgel. Egy gyalogos t=0-ban B-ből indul, 5km/h sebességgel. A biciklis 3 óra alatt éri utol a gyalogost és további 2 óra múlva ér C-be. Mikor ér a gyalogos C-be és mekkora az AB távolság?

K: Mennyi ideig ment összesen a biciklis és mekkora utat tett meg ez alatt?
V: A biciklis 5 óra alatt ért A-ból C-be és ez alatt $s=v\cdot t=15km/h\cdot 5h=75km$ utat tett meg, tehát ekkora az AC távolság. (hivatkozás: **IV.1.9. B**)

K: Mekkora utat tett meg a gyalogos, mire utolérte a biciklis?
V: $s=v\cdot t=5km/h\cdot 3h=15km$

K: Mekkora utat tett meg a biciklis az első 3 óra alatt és mekkora ebből az AB távolság?
V: $s=v\cdot t=15km/h\cdot 3h=45km$ és ebből 45km-15km=30km esett az AB szakaszra, vagyis a BC szakasz 45km hosszú.

K: Mennyi idő kellett a gyalogosnak a BC szakasz megtételéhez?
V: $t=\frac{s}{v}=\frac{45km}{5\frac{km}{h}}=9h$. Tehát a gyalogos t=9h-nál ért a C pontba.

**2**. Három test ugyanabban az időpontban kezd gyorsulni. Az első és a második gyorsulása $a = 0,4\frac{m}{s^2}$ , a harmadiké csak $a = 0,1\frac{m}{s^2}$. Az első kezdősebesség nélkül, a második 2m/s, a harmadik 4m/s kezdősebességgel indul. Melyik ér el nagyobb végsebességet és melyik jut legmesszebbre 10s alatt és hányszor annyi utat tesz meg ez, mint a leglassabb?

K.: Mennyi volt az egyes testek sebessége a 10. másodperc végén?
V: A $\Delta v = a \cdot \Delta t$ képlettel számított sebességváltozásokat hozzá kell adni a kezdeti sebességekhez (hivatkozás: **IV.1.3. B**), vagyis:

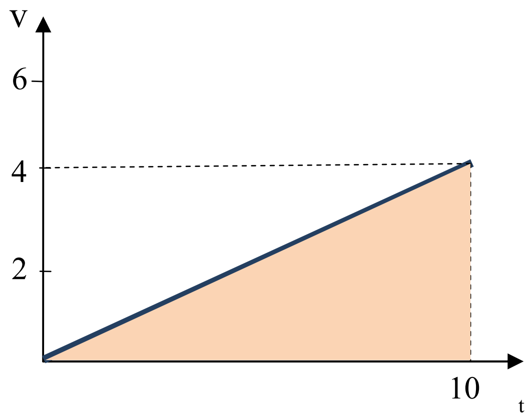
$$v_1(\mathrm{t}=10\,\mathrm{s}) = 0 + 0,4\frac{m}{s^2}\cdot 10s = 4\frac{m}{s}$$

$$v_2(\mathrm{t}=10\,\mathrm{s}) = 2\frac{m}{s} + 0,4\frac{m}{s^2}\cdot 10s = 6\frac{m}{s}$$

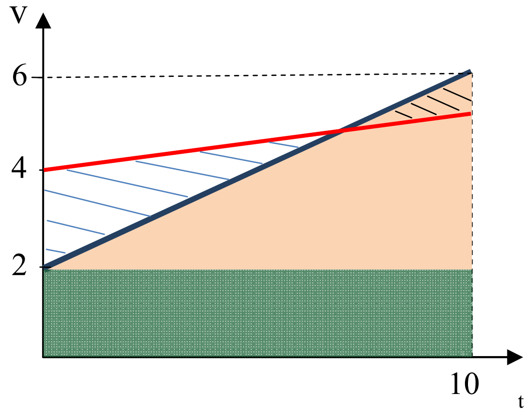
$$v_3(\mathrm{t}=10\,\mathrm{s}) = 4 + 0,1\frac{m}{s^2}\cdot 10s = 5\frac{m}{s}$$

K: Hogyan számolhatjuk ki a testek által megtett utakat?
V.: Az első test esetében a kezdősebesség nulla, ezért egy háromszög területekén kaphatjuk az utat (hivatkozás: **IV.1.4. C**):

$$\mathrm{s}_1 = \frac{\mathrm{a}_1}{2}\Delta\mathrm{t}^2 = \frac{0,4\mathrm{m}/\mathrm{s}^2}{2}\cdot(10\mathrm{s})^2 = 20\mathrm{m}$$




A második és a harmadik esetben a kezdősebesség nem nulla, ezért a $\mathrm{s} = \frac{\mathrm{a}}{2}\Delta\mathrm{t}^2 + \mathrm{v}_0\Delta\mathrm{t}$ összefüggést kell használnunk. A második test esetében sötétkék vonallal felrajzoltuk a v(t) függvényt. A sötétzöld téglalap területe $\mathrm{v}_0\Delta\mathrm{t} = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 10\mathrm{s} = 20\mathrm{m}$, a világoszöld háromszög területe pedig $\frac{1}{2}\mathrm{a}\cdot\Delta\mathrm{t}^2 = \frac{1}{2}\cdot 0,4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(10\mathrm{s})^2 = 20\mathrm{m}$, vagyis összesen 40m utat tesz meg a második test.



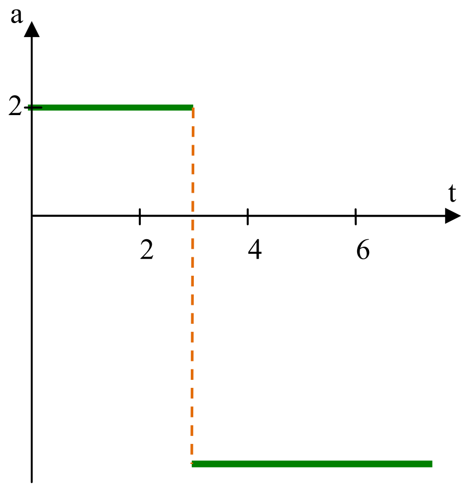

A harmadik test által megtett út hasonlóan számolható, $s_3$=45m. Ez azt jelenti, hogy a harmadik test jut legmesszebbre 10s alatt. Ez látszik az ábrából is, ahol a piros vonal a harmadik test sebességének időfüggését ábrázolja. Amíg a piros vonal van magasabban, addig a harmadik test gyorsabb és a kékkel vonalkázott háromszög területe fele meg annak az útnak, amennyivel többet ez idő alatt megtesz a második testhez képest. Az ábra jobb oldalán a kék vonal van magasabban, itt a feketével vonalkázott háromszög területe adja azt, amennyivel a második test tesz meg több utat a harmadikhoz képest, miután elérte annak sebességét. A kékkel vonalkázott terület nagyobb, mint a feketével vonalkázott, tehát a harmadik test tesz meg több utat.

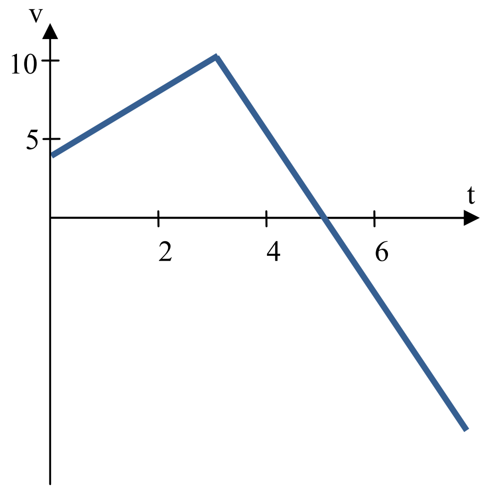
**3**. Egy test, melynek kezdősebessége 4m/s, 3s alatt egyenletesen gyorsul 10m/s-ra. Ez után egyenletesen lassul, miközben $a = -5\frac{m}{s^2}$. Rajzoljuk fel a gyorsulás-idő és a sebesség-idő grafikont. Mikor maximális a sebesség? Mennyi utat tesz meg a test megállásig?

K: Mekkora a gyorsulás az első szakaszban?
V: $a_1 = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t} = \frac{10m/s - 4m/s}{3s} = 2\frac{m}{s^2}$. (hivatkozás: **IV.1.3. A**)

K: A második szakasznál mikor csökkent a sebesség nullára?
V: $\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{10m/s}{5\frac{m}{s^2}} = 2s$. Tehát t=5s-nál áll meg a test.

K: Rajzoljuk fel a gyorsulás-idő és a sebesség-idő grafikont és olvassuk le róla, mikor maximális a sebesség.
V:




A sebesség t=3s-nál maximális

K: Számoljuk ki az első szakaszban megtett utat.

V: $s_1 = \frac{a_1}{2}\Delta t^2 + v_0\Delta t = \frac{2m/s^2}{2}\cdot(3s)^2 + 4\frac{m}{s}\cdot 3s = 21m$ (hivatkozás: **IV.1.4. C**)

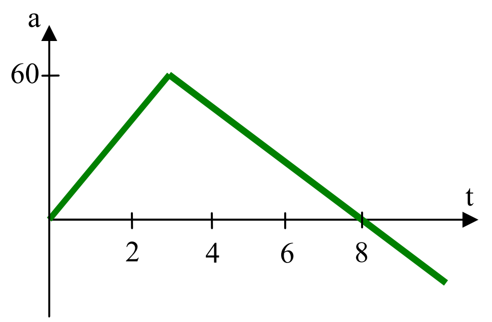
K: Számoljuk ki a második szakaszban megtett utat.

V: $s_2 = \frac{a_2}{2}\Delta t^2 + v_1\Delta t = \frac{-5m/s^2}{2}\cdot(2s)^2 + 10\frac{m}{s}\cdot 2s = 10m$. Tehát a test 31 méter utat tett meg a megállásig.

**4**. (*Nehéz feladat*) Egy test kezdősebessége 10m/s, kezdeti gyorsulása nulla. A test a t=0 időpillanatban egyenletesen növekvő gyorsulással kezd gyorsulni, a gyorsulása t=3s-nál $60m/s^2$. A gyorsulás ekkor egyenletesen csökkenni kezd, másodpercenként $12m/s^2$ –tel. Ábrázoljuk a gyorsulás-idő függvényt. Mikor éri el a test a maximális sebességét és mekkora ez a sebesség?

K: Első ránézésre ez a feladat nagyon hasonlít az előzőhöz, valójában azonban lényegesen nehezebb, mivel most a gyorsulás változik, tehát nem alkalmazhatjuk a szokásos képleteket. A „görbe alatti terület" módszerrel viszont itt is célba érhetünk.
Először számoljuk ki, hogy mennyi idő alatt csökken le nullára a gyorsulás a második szakaszban, majd rajzoljuk fel a gyorsulás-idő grafikont.

V: $\Delta t = \frac{60\frac{m}{s^2}}{12\frac{m}{s^3}} = 5s.$ Tehát t=8s-nál lesz megint nulla a gyorsulás.




K: Mekkora a sebességváltozás az első szakaszban?
V: Ezt a gyorsulás-idő grafikonon az első szakasz alatti terület adja meg:

$\Delta v = \frac{a\cdot\Delta t}{2} = \frac{60\frac{m}{s^2}\cdot 3\frac{m}{s}}{2} = 90\frac{m}{s}.$ Ebben a szakaszban a sebesség négyzetesen nő az idővel.

K: Mennyit változik a sebesség a második szakasz 5 másodperce alatt?

V: $\Delta v = \frac{a\cdot\Delta t}{2} = \frac{60\frac{m}{s^2}\cdot 5\frac{m}{s}}{2} = 150\frac{m}{s}.$

Azonban ezen a szakaszon is nő a sebesség, mivel a gyorsulás még pozitív. t=8s-tól viszont a gyorsulás már negatív lesz, a sebesség csökkenni fog. Ebből az következik, hogy t=8s-nál maximális a sebesség és értéke ekkor $v = 90\frac{m}{s} + 150\frac{m}{s} = 260\frac{m}{s}.$

**Kiegészítés**: Megjegyezzük, hogy a megtett utat ebben a feladatban másodfokú görbék (nem pedig egyenes szakaszok) alatti terület kiszámításával, azaz integrálással lehetne kiszámolni.

## IV.2. Hajítások

A hajítások leírásakor a nehézségi erő hatását leszámítva minden más erőhatást elhanyagolunk (ezek közül a legfontosabb a légellenállás). Így egy könnyen leírható két dimenziós mozgást kapunk. Ezekkel az elhanyagolásokkal a hajítások olyan mozgások lesznek, amelyekben egy állandó nagyságú és irányú $\vec{g}$ jelű gyorsulásvektor hat, ezt nevezzük **gravitációs gyorsulás**nak, vagyis ahol $\vec{a}_0 = \vec{g}$.

Ennek a gyorsulásnak a nagysága $g = 9,81\frac{m}{s^2}$, iránya mindig függőlegesen lefelé mutat. Ezzel a hajítások állandó gyorsulású mozgások (lásd IV.1.9.F. alfejezet).

**Megjegyzés**: a feladatok megoldásakor itt elegendő a $g \approx 10\,m/s^2$ közelítő értékkel számolni.

**Megjegyzés**: a légellenállás hatásait is figyelembe vevő számítások eredményei az ún. ballisztikus pályák.

### IV.2.1. A szabadesés és a függőleges hajítás

A **szabadesés** a hajítások speciális változata. Ebben az esetben a kezdeti sebesség nulla, így a mozgás egy dimenziós, függőleges. Az általános összefüggések ez esetben

$$\vec{v}(t) = \vec{g} \cdot t \qquad \text{és} \qquad \vec{r}(t) = \frac{\vec{g}}{2} \cdot t^2 + \vec{r}_0$$

lesznek.

Egy derékszögű Descartes-koordinátarendszerben elegendő egyetlen tengelyt használni, ami a függőleges mozgást jól leírja. Ha az origót a talajra helyezzük, és a tengelyt felfelé irányítjuk, a testet h magasságból ejtjük, az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$v_z(t) = -g \cdot t \quad \text{és} \qquad z(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + h\,.$$

Lehetséges más koordinátarendszert választani, erről később még lesz szó.

A **függőleges hajítás** egy másik speciális eset, amikor a kezdeti sebesség függőleges, ekkor ugyanis (lévén csak függőlegesen hat a gyorsulás is) a mozgás megmarad egy dimenziósnak, vagyis egyetlen koordináta felírása elegendő a mozgás teljes leírásához. Az általános összefüggések ebben az esetben

$$\vec{v}(t) = \vec{g} \cdot t + \vec{v}_0 \qquad \text{és} \qquad \vec{r}(t) = \frac{\vec{g}}{2} \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0$$

lesznek.

Ha a fentihez hasonlóan választjuk a koordinátarendszert, és a **kezdeti sebesség**vektor **felfelé** mutat, nagysága $v_0$, a testet pedig h magasságból hajítjuk, a ’z’ koordinátára vonatkozó egyenletek a következők lesznek:

$$v_z(t) = -g \cdot t + v_0 \qquad \text{és} \qquad z(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h\,,$$

ha viszont a **kezdeti sebesség**vektor **lefelé** mutat, akkor ugyanezek az egyenletek a

$$v_z(t) = -g \cdot t - v_0 \qquad \text{és} \qquad z(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 - v_0 \cdot t + h$$

alakot öltik. A fentiek alapján továbbá tudható, hogy amikor a test földet ér, akkor a $z = 0$ koordinátánál lesz található.

Írjuk most le a függőleges hajítást egy **másik koordinátarendszer**ben! Válasszuk az origót a hajítás kezdőpontjába, és a tengely mutasson lefelé. Ekkor **felfelé** mutató **kezdeti sebesség** esetén az egyenleteink

$$v_z(t) = g \cdot t - v_0 \qquad \text{és} \qquad z(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2 - v_0 \cdot t,$$

ha viszont a **kezdeti sebesség**vektor **lefelé** mutat, akkor

$$v_z(t) = g \cdot t + v_0 \qquad \text{és} \qquad z(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

lesznek. Ebben az esetben a földet érés pontja $z = h$ lesz.

Látható, hogy ebben az esetben a hely kezdeti értéke és a vektorok előjele változik. Ebből azonnal megfogalmazható, hogy adott koordinátarendszer választása után az egyenletben

1. Egyeztetni kell a gyorsulás és a sebesség irányát a választott tengely pozitív irányával (ha azonos irányúak, akkor a tag pozitív előjellel írandó, ha ellentétes, akkor negatívval).
2. Az origóhoz mérten kell meghatározni a hely kezdeti értékét.

Egy feladat megoldásakor előfordulhat, hogy nincs minden kezdeti feltétel megadva, vagy a pálya valamelyik jellemző pontjára vonatkozik a kérdés. A feladat az alábbi módokon oldható meg ilyen kérdések esetén:

1. A pálya végpontja az, ahol a test földet ér. Ennek (a koordinátarendszer felvétele után) ismerjük a 'z' koordinátáját, ez behelyettesíthető a fenti z(t) egyenletek valamelyikébe (a koordinátarendszer felvételétől függően).
2. A pálya csúcspontján van a test a legmagasabban, jellemzően itt a sebesség értéke zérus (amikor visszafordul), vagyis a $v_z(t) = 0$ egyenletből lehet kiindulni. Lefelé hajításnál és szabadesésnél a kiindulópont van a legmagasabban.
3. Ha egy tetszőleges pontban a test helyét megadjuk, akkor a 'z' koordinátára vonatkozó egyenletből számolhatunk a $z(t)$ helyére helyettesítve az értéket, ha pedig a sebesség értéke van megadva, $v_z(t)$ helyére helyettesítünk be.

Megjegyzés: a szabadesés és a függőleges hajítás egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgások (lásd IV.1.9.E. alfejezet).

## IV.2.2. A vízszintes hajítás

A **vízszintes hajítás** már egy két dimenziós mozgás, jellemzője, hogy a kezdeti sebesség vízszintes. Függőlegesen egy gyorsuló mozgás egyenleteit kell alkalmaznunk, vízszintesen pedig most egy egyenletes mozgás egyenleteit fogjuk tudni felhasználni.

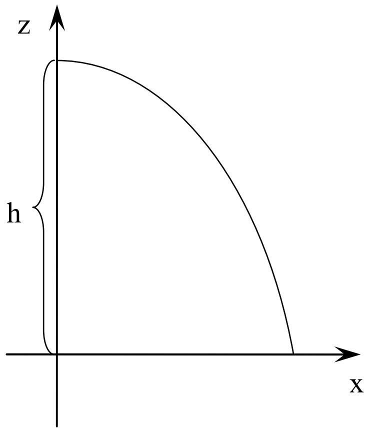
**Megjegyzés**: természetesen egy hajítás három dimenzióban, térben történik. A leírás során (mivel a pálya egy síkban van) azonban úgy fordítjuk a koordináta-tengelyeket, hogy azok egy függőleges és egy vízszintes tengelyt jelöljenek ki, a harmadik tengely irányában nincs mozgás.

Az általános vektor-összefüggések jelen esetben is

$$\vec{v}(t) = \vec{g} \cdot t + \vec{v}_0 \qquad \text{és} \qquad \vec{r}(t) = \frac{\vec{g}}{2} \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0$$

lesznek. Azonban most több irányt is figyelembe kell vennünk. Ez azonban függ a koordinátarendszer-választástól. Amit tudunk, hogy vízszintes $v_0$ kezdősebességgel hajítjuk a testet a felszíntől h magasságból.

Legyen a koordinátarendszerünk egy olyan Descartes-koordinátarendszer, amelynek a függőleges tengelye 'z' felfelé mutat, nulla szintje a talajon van. A vízszintes 'x' tengely mutasson a hajítás vízszintes irányába, nulla szintje legyen a hajítás kezdeténél.




Levezetés külön dobozban!

Ebben a koordinátarendszerben a jellemző vektormennyiségek a következők lesznek:

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix},$$

és ebből az egyes komponensekre vonatkozó egyenletek már megadhatóak. Megjegyzendő, hogy az 'y' komponenssel nem kell foglalkozni, mindegyik kiindulási adatunk nulla, ebben az irányban nem történik elmozdulás.

Levezetés vége

Az egyenletek:

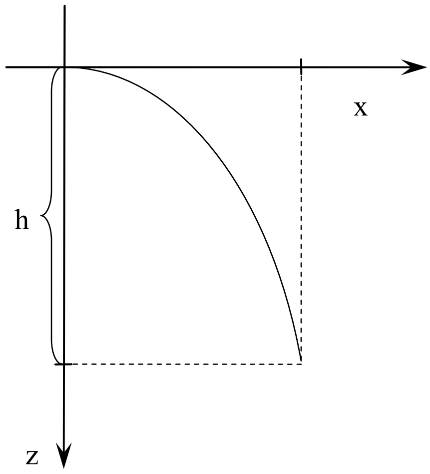
$$v_z(t) = -g \cdot t \quad \text{és} \qquad z(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + h\,,$$

illetve

$$v_x(t) = v_0 \qquad \text{és} \qquad x(t) = v_0 \cdot t\,.$$

Ekkor a földet érés pontja $z = 0$ -nál lesz.

Ha viszont a koordinátarendszerünk origóját a mozgás kezdőpontjába választjuk, így a függőleges tengely lefelé mutat, az alábbiakat kapjuk.




Levezetés külön dobozban!
Ebben a koordinátarendszerben a jellemző vektormennyiségek a következők lesznek:

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

és ebből az egyes komponensekre vonatkozó egyenletek már megadhatóak. Megjegyzendő, hogy az 'y' komponenssel nem kell foglalkozni, mindegyik kiindulási adatunk nulla, ebben az irányban nem történik elmozdulás.
Levezetés vége

Az egyenletek:

$$v_z(t) = g \cdot t \quad \text{és} \quad z(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2,$$

illetve

$$v_x(t) = v_0 \quad \text{és} \quad x(t) = v_0 \cdot t.$$

Ekkor a földet érés pontja $z = h$ -nál lesz.

Egy feladat megoldásakor itt is fontosak a mozgás „tipikus” pontjai. Amikor számolunk, akkor a két irány egyenleteivel külön számolhatunk. Ami összeköti a 'z' és 'x' irányú mozgásokat, az az idő. A test pályájának egy pontja (és annak tulajdonságai) akkor adható meg, ha a két irányra vonatkozó egyenletekbe ugyanazt az időt helyettesítjük be. Általánosságban is jó stratégia (bár lehetnek kivételek), ha egy ilyen feladatban először a kiszemelt ponthoz tartozó időt számoljuk ki, és a többi egyenletbe ezt helyettesítjük be.

A tipikus pontok lehetnek:

1. A pálya végpontja az, ahol a test földet ér. Ennek (a koordinátarendszer felvétele után) ismerjük a 'z' koordinátáját, ez behelyettesíthető a fenti z(t) egyenletek valamelyikébe (a koordinátarendszer felvételétől függően). Az 'x' koordináta kiszámolható, vagy abból kiindulva visszafelé is számolhatunk.
2. A pálya csúcspontjának ebben az esetben nem sok értelme van, a vízszintes hajításnál ez a hajítás kezdőpontja.
3. Ha egy tetszőleges pontban a test helyét függőlegesen megadjuk, akkor a 'z' koordinátára vonatkozó egyenletből számolhatunk a $z(t)$ helyére helyettesítve az értéket, ha pedig a sebesség értéke van megadva, $v_z(t)$ helyére helyettesítünk be. Ha a vízszintes irányú helyzete adott, akkor az $x(t)$ egyenletből indulhatunk ki.

**IV.2.3. A ferde hajítás**

A **ferde hajítás** két dimenziós mozgás, ehhez tartozik a legáltalánosabb leírása a hajításoknak. A sebesség ebben az esetben bármilyen irányú lehet (vagyis a ferde hajítás általánosságban tartalmazza a korábbi eseteket is). Függőlegesen egy gyorsuló mozgás egyenleteit kell alkalmaznunk, vízszintesen pedig egy egyenletes mozgásét.

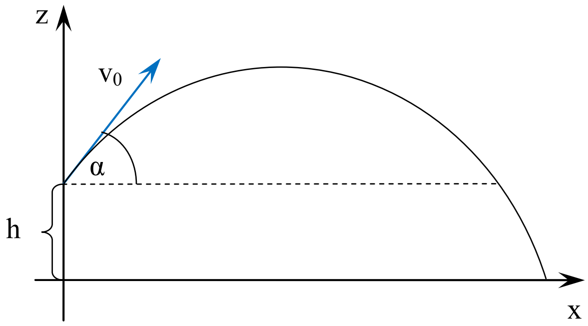
**Megjegyzés**: természetesen a hajítás itt is három dimenzióban, térben történik. Viszont ebben az esetben is úgy fordítjuk a koordináta-tengelyeket, hogy azok egy függőleges és egy vízszintes tengelyt jelöljenek ki, a harmadik tengely irányában nincs mozgás.

Az általános vektor-összefüggések jelen esetben is

$$\vec{v}(t) = \vec{g} \cdot t + \vec{v}_0 \qquad \text{és} \qquad \vec{r}(t) = \frac{\vec{g}}{2} \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0$$

lesznek. Ebben az esetben is választhatunk több koordinátarendszer közül, de az általános esetben van egy olyan standard, ami a legáltalánosabban alkalmazható, ebben a fejezetben mi is csak ezt mutatjuk be.

Legyen a koordinátarendszerünk egy olyan Descartes-koordinátarendszer, amelynek a függőleges tengelye ’z’ felfelé mutat, nulla szintje a talajon van. A vízszintes ’x’ tengely mutasson a hajítás vízszintes irányába, nulla szintje legyen a hajítás kezdeténél. A hajítást $\vec{v}_0$ kezdősebességgel indítjuk, h magasságból.




**Megjegyzés**: a legtöbb középiskolai feladatban a hajítás indítása a talajról, vagyis az origóból történik. Az alábbiakból ez az eset egyszerűen a $h = 0$ behelyettesítéssel származtatható.

Levezetés külön dobozban!

Ebben a koordinátarendszerben a jellemző vektormennyiségek a következők lesznek:

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ v_{0z} \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix},$$

és ebből az egyes komponensekre vonatkozó egyenletek már megadhatóak. Megjegyzendő, hogy az ’y’ komponenssel nem kell foglalkozni, mindegyik kiindulási adatunk nulla, ebben az irányban nem történik elmozdulás.

Levezetés vége

Az egyenletek:

$$v_z(t) = -g \cdot t + v_{0z} \qquad \text{és} \qquad z(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_{oz} \cdot t + h\,,$$

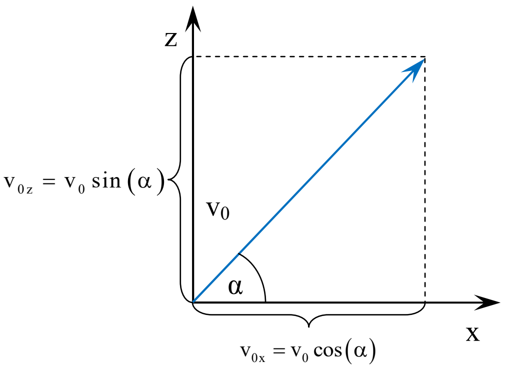
illetve

$v_x(t) = v_{0x}$ és $x(t) = v_{0x} \cdot t$.

Megjegyzés: ezek az egyenletek általánosságban is érvényesek, a különböző típusú hajítások is értelmezhetőek ebben a leírási keretben.

1. A **függőleges hajítás** esetén a gyorsulás és a kezdeti sebességvektor párhuzamosak (vagyis a kezdősebesség is függőleges). Röviden $v_{0x} = 0$. Ennek speciális esete a **szabadesés**, amelynél a kezdősebesség nagysága zérus, vagyis a másik komponens is nulla lesz $v_{0z} = 0$.
2. A **vízszintes hajítás**ok esetén a kezdeti sebesség merőleges a gyorsulásra, vagyis vízszintes. Röviden a függőleges sebességkomponens zérus $v_{0z} = 0$.
3. Szűkebben értelmezve minden más esetet hívunk **ferde hajítás**nak.

Jól látható, hogy a fenti ábrán nem a kezdeti sebességvektor $v_{0x}$ és $v_{0z}$ komponensei vannak megadva, hanem a sebesség nagysága, illetve a vízszintes iránnyal bezárt szöge. Az így kapott síkbeli vektort komponensekre kell bontani (lásd I.2.4.). Ennek eredménye




**Megjegyzés**: Ahogy a vektor komponensekre bontásánál kiemeltük, itt is fontos figyelni, melyik szög a megadott. Ha például a függőleges irányhoz képesti szöget adjuk meg, az eredmények mások lesznek.

Az így felbontott vektorkomponensekkel, a fenti koordinátarendszerben az egyenleteink

$v_z(t) = -g \cdot t + v_0 \sin(\alpha)$ és $z(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \sin(\alpha) \cdot t + h$,

illetve

$v_x(t) = v_0 \cos(\alpha)$ és $x(t) = v_0 \cos(\alpha) \cdot t$.

Megjegyzés: A hajítás történhet valamilyen szögben lefelé is. Ebben az esetben is a fenti egyenletekkel kell számolni, viszont figyelembe kell venni, hogy az $\alpha$ szög negatív értékű, így $v_{0z}$ negatív lesz, viszont $v_{0x}$ továbbra is pozitív marad ebben a koordináta-rendszerben.

Egy feladat megoldásakor itt is fontosak a mozgás „tipikus” pontjai. Amikor számolunk, akkor a két irány egyenleteivel külön számolhatunk. Ami összeköti a ’z’ és ’x’ irányú mozgásokat, az az idő. A test pályájának egy pontja (és annak tulajdonságai) akkor adható meg, ha a két irányra vonatkozó egyenletekbe ugyanazt az időt helyettesítjük be. Általánosságban is jó stratégia (bár lehetnek kivételek), ha egy ilyen feladatban először a kiszemelt ponthoz tartozó időt számoljuk ki, és a többi egyenletbe ezt helyettesítjük be.

A tipikus pontok lehetnek:

1. A pálya végpontja az, ahol a test földet ér. Ennek (a koordinátarendszer felvétele után) ismerjük a ’z’ koordinátáját, ez behelyettesíthető a fenti $z(t)$ egyenletek valamelyikébe (a koordinátarendszer felvételétől függően). A fenti koordinátarendszer-választás esetén az egyenlet $z = 0$. Az ’x’ koordináta kiszámolható, vagy ha az van megadva, abból kiindulva visszafelé is számolhatunk.

2. A pálya csúcspontján van a test a legmagasabban, jellemzően itt a sebesség értéke zérus (amikor visszafordul), vagyis a $v_z(t)=0$ egyenletből lehet kiindulni. Lefelé hajításnál és szabadesésnél a kiindulópont van a legmagasabban.
3. Az eredeti magasságba való visszatérés a $z=h$ egyenlet alapján számolható. Megjegyzendő, hogy ebben az esetben az egyenletek egyik megoldása a $t=0$ lesz, ami a kezdőpontja a mozgásnak. Bár a megoldás során a másik megoldás lesz a fontos, ennek az a szerepe, hogy segít ellenőrizni a megoldást. Ha nem jön ki a kezdőpont ennél a feltételnél, akkor valahol hiba van a számolásban.
4. Ha egy tetszőleges pontban a test helyét függőlegesen megadjuk, akkor a 'z' koordinátára vonatkozó egyenletből számolhatunk a $z(t)$ helyére helyettesítve az értéket, ha pedig a sebesség értéke van megadva, $v_z(t)$ helyére helyettesítünk be. Ha a vízszintes irányú helyzete adott, akkor az $x(t)$ egyenletből indulhatunk ki.

## ANIMÁCIÓS TERV: Ferde hajítás

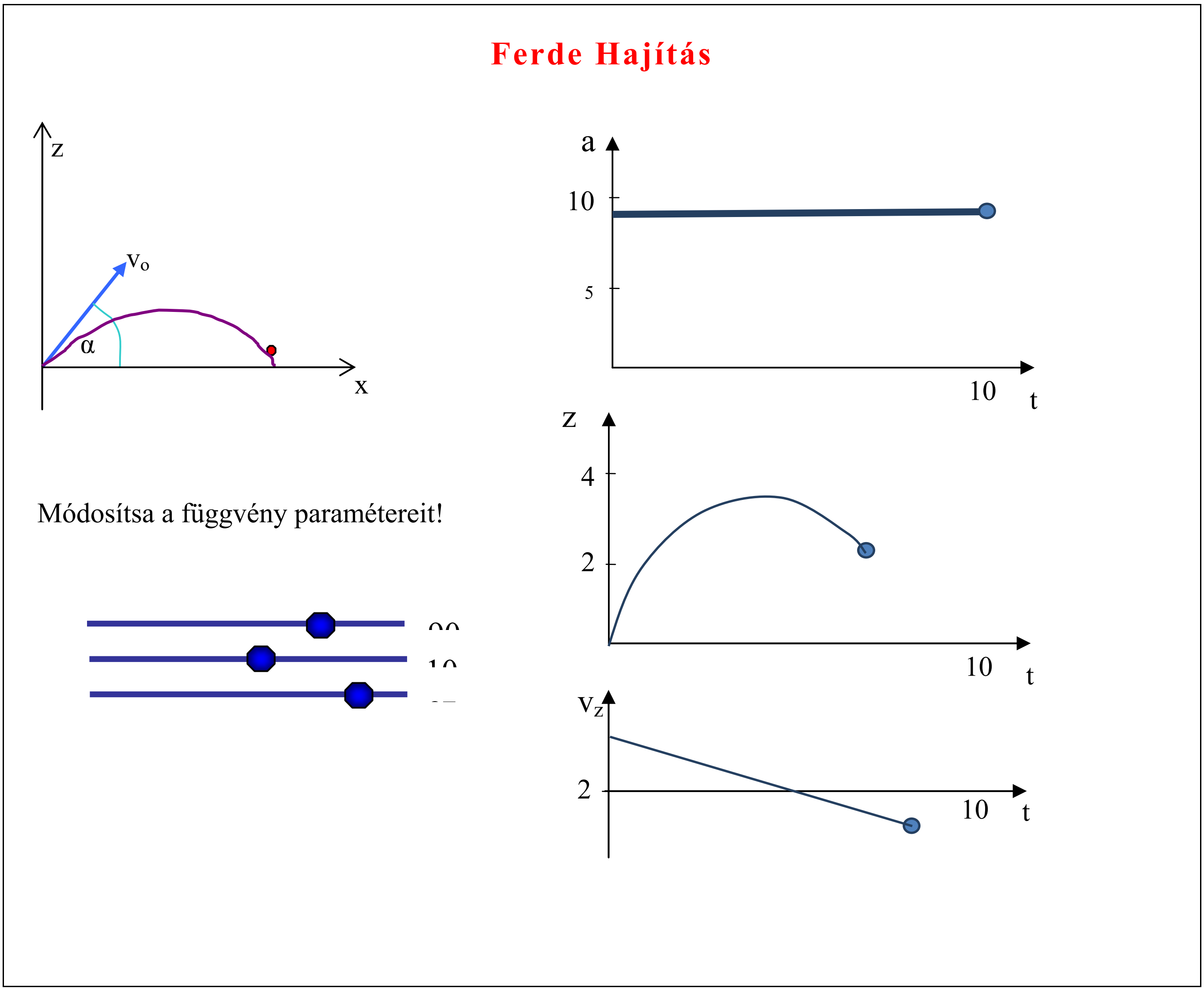
( **interaktív animáció** )

Jellemzők felsorolása *(pl. felépítés, hangok)*:
- Az animáció egyetlen felületből és egy táblázatból áll, nem tartalmaz hangot
- Valós időben módosított adatok alapján változó animáció.

Működés *(pl. vezérlők elhelyezése, funkciója)*:
- A felületen egy kétdimenziós függvény látható koordináta rendszerben ábrázolva. Alatta vezérlők paraméter-módosításhoz, valamint látható még maga a képlet is.
- Az idő egyenletesen változik
- A vízszintes tengelyen az x koordináta van. A függőleges tengelyen a z koordinátának nevezett magasság van. Mindkettőt külön egyenlet írja le.
- A függvény értékénél egy kis pötty mozog és „csíkot húz maga után", amely kirajzolja a függvényt, egy parabolát. Amikor a test becsapódik a talajba (a z koordináta másodszor is felveszi a nullát), a mozgás leáll.
- A felhasználó változtathatja nemcsak az alfát (a hajítás szögét, 0 és $90^0$ között), hanem a $v_0$ kezdősebességet (0 és pl. 10 között) és a hajítás kezdő $h=z_0$ magasságát is, (úgy, hogy a max sebességnél és magasságnál az ábra másik oldaláig jusson el a test) egy-egy kis grafikus csúszó potméterrel, amely a paraméter számértékét is mutatja.
- A becsapódáskor a táblázatban megjelenik a két kezdőérték, az ábrázolás színe, a hajítás ideje, távolsága, magassága.
- Ezzel párhuzamosan a grafikonokon hasonló pötty mutatja a felhasználó által kiválasztott fizikai mennyiségek épp aktuális értékeit (x és z koordináta, sebesség nagysága, sebesség függőleges és vízszintes komponense, gyorsulás és elmozdulás értékeket, valamint a mozgó pötty kirajzolja a függvényeket. A vízszintes tengelyen minden esetben az idő van. A grafikonok fejlécében az a képlet látható, amellyel az ábrázolt mennyiség számolható. Két megoldást is elképzelhetőnek tartunk: vagy az összes mennyiség (7db) számára külön grafikon van, és ezek mindig látszanak, vagy csak 2-4 grafikon van, és a felhasználó választja ki, épp mely mennyiségeket szeretné látni rajtuk.
- Ha új paramétereket ad a hallgató, az új görbe és golyó új színnel jelenik meg, a táblázatban új sor jelenik meg, a régi görbe (halványabban, vékonyabban?) ott marad, a grafikon meglévő görbéi és a táblázat már kitöltött sorai is maradnak, hogy össze lehessen hasonlítani a korábbiakkal (pl. max. 8 vagy 10 hajítási lehetőség). Kell egy „Clear All" gomb, ami az összes régit eltünteti (görbék, grafikonok és táblázat) és tiszta lapot nyit.
- A működéshez használandó képletek: $x(t)=v_0 t\cos\alpha$, $z(t)=v_0 t\sin\alpha-\frac{g}{2}t^2$, a=g=10.

$v_x(t)=v_0\cos\alpha$ , $v_z(t)=v_0\sin\alpha-g\cdot t$ , $v(t)=\sqrt{v_x(t)^2+v_z(t)^2}$ $\Delta r=\sqrt{\left(x(t)-x_0\right)^2+\left(z(t)-z_0\right)^2}$

Látványterv




| alfa (°) | h | $v_0$ | szín | Hajítás ideje $t=\frac{2v_o}{g}\sin\alpha$ | Hajítás magassága $z_{max}=\frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha$ | Hajítás távolsága $x_{max}=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0 | 3 | ▬ | | | |
| | | | | | | |

**IV.2.4. Javasolt feladat-megoldási folyamat**

1. lépés: javasolt a feladat megoldását ábra rajzolásával kezdeni.
2. lépés: a koordinátarendszer megválasztása, vagyis az origó helyének kiválasztása, a tengelyek irányának meghatározása. Javasolt az egyik ('x') tengelyt vízszintesen, a másikat ('z') függőlegesen felvenni.
3. lépés: az állandó gyorsulású mozgásokra vonatkozó általános egyenletek komponenseinek felírása a koordinátarendszerben.
4. lépés: az egyenletrendszer megoldása a megadott adatok alapján.
5. lépés: a feladat megoldásának kiértékelése, a nem fizikai megoldások kiszűrése.

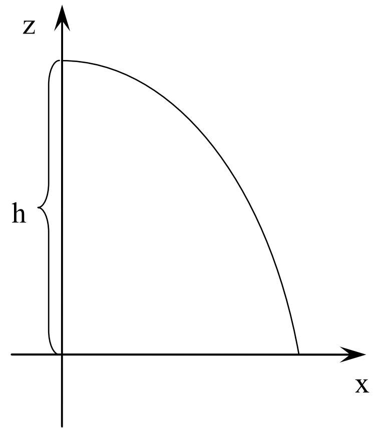
Itt fontos bemutatni néhány jellemző „nem fizikai" megoldást, amit a feladat megoldása során ki lehet szűrni, a végeredményben pedig nem szerepelhetnek. Ezek fellépésének elsődleges oka az, hogy másodfokú egyenlet is szerepel a megoldandó összefüggések között.
1. A hajítás talajszint alatt végződik, vagyis a talaj szintjének megfelelő $z(t)$-nél kisebb értékű nem lehet a z koordináta értéke. Hasonló igaz a vízszintes irányra is, előre irányuló hajításnál nem jöhet ki olyan megoldás, ami ezzel ellentétes irányú hajítást jelez.
2. Ha az időt 0-tól mérjük, és a feladat megoldás közben negatív időértéket kapunk, az nem vezet jó megoldásra. Ilyenkor a másik megoldás választandó.
3. Külön érdemes megemlíteni a t=0 megoldást. Ebben az esetben olyan alapfelvetésből indulunk ki, amely a hajítás kezdőpontjára is igaz. Ebben az esetben viszont fontos ellenőrzési lehetőség ennek a megoldásnak a megléte.

Ellenkező irányból nézve egy negatív sebességérték nem okoz problémát, az csupán annyit jelent, hogy a sebesség az általunk választott tengelyiránnyal ellentétes irányú.

### IV.2.5. A pályagörbe alakja

Külön kérdés lehet egy hajítás kiértékelésénél a pályagörbe alakja. Ehhez keressük a $z(x)$ függvényt, ami leírja a pálya alakját a síkon. A hajítások esetén az eljárás egyszerű, mivel az $x(t)$ függvény alakja egyszerű, könnyen invertálható.

Első példaként tekintsünk egy vízszintes hajítást a IV.2.2. fejezetben bevezetett első koordinátarendszerben.




Ekkor az $x(t)$ függvény invertálásának eredménye:

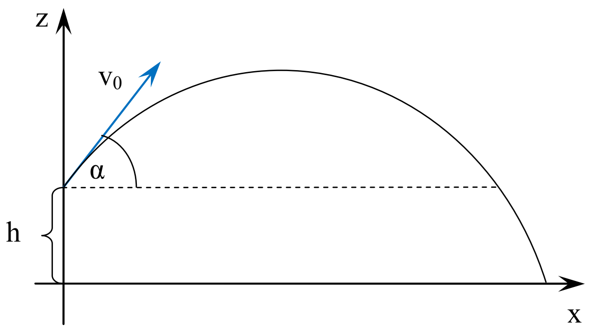
$$t(x) = \frac{x}{v_0},$$

és ebből számolva a pályagörbére vonatkozó egyenletet a

$$z(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + h$$

lesz, ami egy fordított állású parabolát ír le, ami függőlegesen h-val el van tolva. A függvény értelmezési tartománya x-ben 0-tól a földet érés x koordinátájáig terjed.

Általánosabban, tekintsük most a ferde hajítás esetét, a IV.2.3. alfejezetnek megfelelő koordinátarendszer-választással.




Ekkor az $x(t)$ függvény invertálásának eredménye:

$$t(x)=\frac{x}{v_0\cos(\alpha)}.$$

Ezt behelyettesítve a $z(t)$ függvénybe kapjuk meg a pályagörbe egyenletét, ami

$$z(x)=-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2(\alpha)}x^2+\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}x+h,$$

ami szintén egy fordított állású parabolát ír le, de ez nem csak függőlegesen, hanem vízszintesen is el van tolva az origóhoz képest. Ahhoz, hogy meghatározzuk, mennyivel lett eltolva, illetve megnyújtva a parabola, az egyenletet az alábbi alakra kell transzformálnunk:

$$z(x)=-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2(\alpha)}\left(x-\frac{{v_0}^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g}\right)^2+\frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}+h.$$

Így látható, hogy egy fordított állású, $\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2(\alpha)}$-el nyújtott, x irányban jobbra $\frac{{v_0}^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g}$-el, és z irányban $\frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}+h$-val felfelé eltolt paraboláról van szó.

Levezetés külön dobozban!
Ahhoz, hogy a parabola tulajdonságait meghatározzuk, a következő lépéseket kell tennünk! A fenti egyenletet szeretnénk valamilyen $z(x)=A(x+B)^2+C$ alakba hozni. Ennek első lépése az A meghatározása, ami az $x^2$-es tag együtthatója, vagyis láthatóan

$$A=-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2(\alpha)},$$

amit kiemelve az egyenletünk a következő lesz:

$$z(x)=A\left(x^2-\frac{2{v_0}^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g}x\right)+h.$$

Ezután keressük a zárójelnek a teljes négyzet alakját, felhasználva a különbség négyzetére vonatkozó szabályt. Észrevehető, hogy mintha az egyik tag x lenne, a másik pedig

$$B = -\frac{v_0^2 \cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g},$$

amiből

$$(x+B)^2 = x^2 - \frac{2v_0^2 \cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g} x + \frac{v_0^4 \cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha)}{g^2},$$

amiből az első két tag az eredeti összefüggésben szerepel, de a harmadik nem. Sebaj, ezt a négyzet-kifejezésből később kivonjuk. Így

$$z(x) = A\left[(x+B)^2 - \frac{v_0^4 \cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha)}{g^2}\right] + h.$$

Ha a zárójelben szereplő utolsó tagot beszorozzuk A-val, és hozzáadjuk a 'h'-t, akkor megkapjuk a keresett C értéket, ami így

$$C = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} + h.$$

Levezetés vége

**IV.2.GY. Gyakorló feladatok**

A feladatok megoldása közben hanyagoljuk el a közegellenállást, és a gravitációs gyorsulás értékét vegyük 9,8 $m/s^2$-nek.

**1**. Pistike egy labdával szeretné leverni a fa lombjába akadt másik labdát 4 méter magasról. A labda helye alól függőlegesen dobja meg a másik labdát 12 m/s sebességgel. Milyen sebességgel csapódik a labda a másiknak?

*Megoldás:*

A példa függőleges hajításra vonatkozik, melynek során a test állandó gyorsulással mozog.

Az ilyen mozgást leíró általános egyenlet, ha a mozgás a *z* tengely irányában történik:

$$v_z = v_{z0} + a_z t$$
$$z = z_0 + v_{z0} t + \frac{a_z}{2} t^2$$

Vegyük fel a *z* tengelyt függőlegesen felfelé.
Ekkor a példára jellemző ismert paraméterek: $a_z = -9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_{z0} = 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $z_0 = 0$, $z_1 = 4\mathrm{m}$
Kiszámolhatjuk mennyi idő, amíg a labda eléri a 4 méteres magasságot:

$$z_1 = z_0 + v_{z0} t_1 + \frac{a_z}{2} {t_1}^2$$
$$4\mathrm{m} = 0 + 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t_1 + 4{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot {t_1}^2$$
$$4{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot {t_1}^2 - 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t_1 + 4\mathrm{m} = 0$$

$$t_{1ab} = \frac{12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \pm \sqrt{\left(12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 4 \cdot 4{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4\mathrm{m}}}{9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \frac{12 \pm 8{,}1}{9{,}8}\mathrm{s} \qquad t_{1a} = 0{,}398\mathrm{s}\,, t_{1b} = 2{,}051\mathrm{s}$$

Itt a $t_{1a}$ idő a felfelé haladó részre, míg a $t_{1b}$ a lefelé eső részre vonatkozik.
A labda felfelé haladva találkozik a másikkal, tehát az eddig eltelt idő: $t_1 = 0{,}398\mathrm{s}$. Ekkor a sebesség:

$$v_{z1} = v_{z0} + a_z t_1 = 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}398\mathrm{s} = \mathbf{8{,}1\frac{m}{s}}$$

**2.** János a hőmérőt rázza éppen le, amikor az 1,2 m-es magasságban, lefelé irányuló 3m/s sebességgel kicsúszik a kezéből. János a lábával próbálja tompítani az esést. Milyen magasan kapta el a hőmérőt, ha annak sebessége az elkapás pillanatában 5,4 m/s?

*Megoldás*:

A feladatban egyenes vonalú egyenes vonalú egyenletesen változó mozgásról van szó, $9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ lefelé irányuló gyorsulással.
Ha a mozgás irányában az *x* tengelyt vesszük fel, akkor a sebességre és helyre az alábbi általános egyenletek érvényesek:

$$v_x = v_{x0} + a_x t$$
$$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{a_x}{2} t^2$$

Ha az origót János kezénél vesszük fel és az *x* tengelyt lefelé irányítjuk, akkor a feladat adatai meghatározzák a következő paramétereket:

$$x_0 = 0\,,\ v_{x0} = 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,,\ v_{x1} = 5{,}4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,,\ a_x = g = 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,,\ \text{Kérdés: } x_1$$

A sebességre vonatkozó egyenletből meghatározhatjuk az időt, az idővel pedig a hőmérő helyét.

$$v_{x1} = v_{x0} + a_x t_1$$
$$5{,}4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t_1$$
$$t_1 = 0{,}245\mathrm{s}$$

$$x_1 = x_0 + v_{x0} t_1 + \frac{a_x}{2} {t_1}^2 = 0 + 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}245\mathrm{s} + 4{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0{,}245\mathrm{s})^2 = 1{,}03\mathrm{m}$$

Ez még nem a végeredmény, hanem a távolság János kezétől lefelé irányba mérve. Mivel János keze 1,2 méter magasan van, a hőmérő magassága elkapáskor:

$$h_1 = h_0 - x_1 = 1{,}2\mathrm{m} - 1{,}03\mathrm{m} = 0{,}17\mathrm{m} = \mathbf{17cm}$$

**3.** Egy helikopter vízszintesen repül 25 méter magasan, 20 m/s sebességgel, amikor ledobnak egy segélycsomagot.
a) Milyen messze a cél előtt kell kidobni a csomagot (vízszintes távolságot tekintve)?
b) Mekkora sebességgel érkezik a földre a csomag?
c) Mekkora szöget zár be becsapódáskor a sebességvektor a vízszintessel?

*Megoldás:*

A példában egy vízszintes hajításról van szó, ami azt jelenti, hogy a kezdeti sebességnek csak vízszintes irányú komponense van. A mozgás két dimenzióban történik egy parabola mentén. Ha a vízszintes tengelynek *x*-et, a függőleges tengelynek pedig *z*-t választjuk, akkor a példában használható általános egyenletek a sebességre és helyre:

$$v_x = v_{x0} + a_x t$$
$$v_z = v_{z0} + a_z t$$
$$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{a_x}{2} t^2$$
$$z = z_0 + v_{z0} t + \frac{a_z}{2} t^2$$

Ha az origót a kioldás helye alatt a földön vesszük fel, a *z* tengelyt pedig felfelé irányítjuk, akkor a feladatra jellemző paraméterek:

$$a_x = 0\,,\ a_z = -g = -9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,,\ v_{x0} = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,,\ v_{z0} = 0\,,\ x_0 = 0\,,\ z_0 = 25\mathrm{m}\,,\ z_1 = 0$$

a) Felhasználjuk, hogy annyival előbb kell elengedni a csomagot, mint amennyit az a levegőben az elengedés helyétől földet érés előtt megtesz. Tehát $x_1$-et keressük, amely a vízszintes távolság az elengedés helyétől.
Először a *z* egyenletből kiszámíthatjuk a földet éréshez szükséges időt, majd ezt az *x* egyenletbe helyettesítve megkapjuk a keresett távolságot:

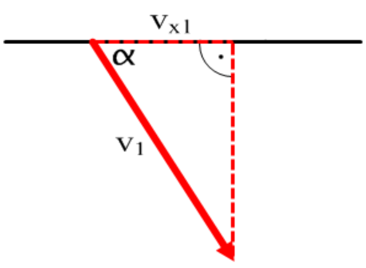
$$z_1 = z_0 + v_{z0} t_1 + \frac{a_z}{2} {t_1}^2$$
$$0 = 25\mathrm{m} + 0 \cdot t_1 - 4{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot {t_1}^2$$
$$t_1 = 2{,}259\mathrm{s}$$

$$x_1 = x_0 + v_{x0} t_1 + \frac{a_x}{2} {t_1}^2 = 0 + 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 2{,}259\mathrm{s} + 0 \cdot (0{,}245\mathrm{s})^2 = \mathbf{45{,}2m}$$

b) A sebesség nagyságát a Pitagorasz-tétel segítségével számíthatjuk ki. Ehhez ismerni kell a sebesség két komponensét:

$$v_{x1} = v_{x0} + a_x t_1 = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0 \cdot 2{,}259\mathrm{s} = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$v_{z1} = v_{z0} + a_z t_1 = 0 - 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2{,}259\mathrm{s} = -22{,}14\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$v_1 = \sqrt{{v_{x1}}^2 + {v_{z1}}^2} = \sqrt{\left(20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(-22{,}14\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = \mathbf{29{,}8\frac{m}{s}}$$

c) A szöget például a $v_1$ átfogó és a $v_{x1}$ szög melletti befogó segítségével határozhatjuk meg:




$$\cos\alpha = \frac{v_{x1}}{v_1} = \frac{20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{29{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0{,}671$$

$$\alpha = \arccos 0{,}671 = \mathbf{47{,}8°}$$

**4.** Egy lovászíjász 2,5 méter magasságból 30º-os szögben lő ki egy nyilat, 90 m/s kezdősebességgel.
a) Mekkora maximális magasságot ér el a nyílvessző?
b) Milyen távolságban ér földet?
c) Át tudja-e így lőni a nyílvesszőt egy 500 méterre álló 55 méter magas várfal fölött?

*Megoldás:*

A kialakuló mozgás egy ferde hajítás, a nyílvessző egy kétdimenziós parabola alakú pályát ír le (lásd 4.2.3). Ha az *x* tengelyt vízszintesen, a mozgás irányába vesszük fel, a *z* tengelyt pedig függőlegesen felfelé, akkor az alábbi általános egyenleteket használhatjuk a sebességre és helyre:

$$v_x = v_{x0} + a_x t$$
$$v_z = v_{z0} + a_z t$$
$$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{a_x}{2} t^2$$
$$z = z_0 + v_{z0} t + \frac{a_z}{2} t^2$$

A példában megadott adatok a következő paramétereket határozzák meg, amennyiben az origót a talaj szintjébe veszem (így a *z* koordináta megegyezik a magassággal):

$a_x = 0$ , $a_z = -9{,}8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ , $x_0 = 0$ , $z_0 = 2{,}5\mathrm{m}$

Emellett ismert még a kezdeti sebesség, és a kilövés szöge: $v_0 = 90 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ és $\alpha = 30°$
Ebből a két adatból meghatározhatjuk a $v_{x0}$ és $v_{z0}$ értékeket, ha sebességet komponenseire bontjuk (lásd I.2.4):

$$v_{x0} = v_0 \cos 30° = 90 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 77{,}94 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$v_{z0} = v_0 \sin 30° = 90 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1}{2} = 45 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

a) Rá kell jönnünk, hogy az egyenleteinkben szereplő paraméterek szempontjából mit is jelent az, hogy a nyílvessző a legmagasabb ponton jár. Egy kis idővel ezelőtt még emelkedett, egy kis idővel ezután pedig már süllyedni fog. Tehát a $v_z$ éppen előjelet vált, mi azt a pillanatot keressük, amikor a $v_z = 0$. Ha az idő megvan, akkor ezt beírhatjuk a *z* egyenletbe, hogy megkapjuk a magasságot:

$$v_{z1} = v_{z0} + a_z t_1$$
$$0 = 45 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 9{,}8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t_1$$
$$t_1 = 4{,}59\mathrm{s}$$

$$z_1 = z_0 + v_{z0} t_1 + \frac{a_z}{2} {t_1}^2 = 2{,}5\mathrm{m} + 45 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 4{,}59\mathrm{s} - 4{,}9 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (4{,}59\mathrm{s})^2 = \mathbf{105{,}8m}$$

b) A nyílvessző addig repül, amíg földet nem ér, tehát amíg a *z* koordinátája nem lesz nulla. Ha ezt az időt meghatározzuk, akkor az *x* egyenletből megkapjuk a horizontális távolságot, vagyis a hatótávot:

$$z_2 = z_0 + v_{z0} t_2 + \frac{a_z}{2} {t_2}^2$$
$$0 = 2{,}5\mathrm{m} + 45 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t_2 - 4{,}9 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot {t_2}^2$$
$${t_2}^2 - 9{,}184\mathrm{s} \cdot t_2 - 0{,}51\mathrm{s}^2 = 0$$

$$t_{2ab} = \frac{9{,}184\text{s} \pm \sqrt{(9{,}184\text{s})^2 + 4 \cdot 1 \cdot 0{,}51\text{s}^2}}{2} = \frac{9{,}184 \pm 13{,}117}{9{,}8}\text{s}$$
$$t_{2a} = -1{,}967\text{s}\,, t_{2b} = 11{,}151\text{s}$$

A negatív megoldásnak fizikailag nincs értelme, így a $t_2 = 11{,}151\text{s}$ értékkel számolunk tovább:

$$x_2 = x_0 + v_{x0}t_2 + \frac{a_x}{2}{t_2}^2 = 77{,}94\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 11{,}15\text{s} = \mathbf{869m}$$

c) Itt azt kell meghatároznunk, hogy amikor horizontálisan 500 métert megtesz a nyílvessző ($x$), milyen magasan van ($z$):

$$x_3 = x_0 + v_{x0}t_3 + \frac{a_x}{2}{t_3}^2$$
$$500\text{m} = 77{,}94\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t_3$$
$$t_3 = 6{,}415\text{s}$$

$$z_3 = z_0 + v_{z0}t_3 + \frac{a_z}{2}{t_3}^2 = 2{,}5\text{m} + 45\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6{,}415\text{s} - 4{,}9\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (6{,}415\text{s})^2 = \mathbf{89{,}5m}$$

Ez nagyobb, mint az 55m, tehát átrepül felette.

## IV.2.Int. Interaktív feladatok

**1.** Egy szárazjeges kísérlet során a műanyag flakon 15 m/s felfelé irányuló sebességgel kilövi a kupakját. Milyen magasan lesz a kupak, amikor a sebesség 10 m/s-ra csökken?

*Interaktív megoldás:*

I. Milyen mozgásról van szó a példában?

Válasz: Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás $9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ lefelé irányuló gyorsulással.
Segítő hivatkozás: IV.1.1

II. Milyen általános egyenletek használhatók a sebességre és helyre, ha a mozgás irányába a $z$ tengelyt vesszük fel?

Válasz:
$$v_z = v_{z0} + a_z t$$
$$z = z_0 + v_{z0}t + \frac{a_z}{2}t^2$$

Segítő hivatkozás: IV.2.1

III. Mely paramétereket ismerjük a feladatban megadott adatok alapján, és mi a kérdés?

Válasz: $z_0 = 0$ , $v_{z0} = 15\frac{\text{m}}{\text{s}}$ , $a_z = -g = -9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , $v_{z1} = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$ , Kérdés: $z_1$

Segítő hivatkozás: IV.2.1

IV. Mi a megoldás menete?

Válasz: A $v_z$ egyenletből kifejezzük az időt, majd a $z$ egyenletből a $z_1$-t.

*Egyenletek megoldása:* [kattintással kibontható]

$$v_{z1} = v_{z0} + a_z t_1$$

$$10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t_1$$

$$t_1 = 0{,}51\mathrm{s}$$

$$z_1 = z_0 + v_{z0}t_1 + \frac{a_z}{2}{t_1}^2 = 0 + 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}51\mathrm{s} - 4{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0{,}51\mathrm{s})^2 = \mathbf{6{,}38m}$$

**2.** A Halálos iram című filmben az egyik bérházból átugratnak autóval egy másik bérházba. A két bérház egymástól 45 méteres távolságban van, és a két épületben az emeletek egyaránt 3 méteres magasságúak.
a) Mekkora sebességgel kellett kiugratniuk az ablakon, hogy éppen 3 emelettel lejjebb landoljanak a padlón?
b) Mekkora az autó sebessége éppen a talajfogás előtt?
c) Milyen szögben fog talajt az autó a vízszinteshez képest?

*Interaktív megoldás:*

I. Milyen mozgásról van szó a példában?
Válasz: Vízszintes hajítás.
Segítő hivatkozás: IV.1.2

II. Ha az *x* tengelyt vízszintes irányba, a *z* tengelyt pedig függőlegesen felfelé vesszük fel, akkor milyen egyenletek írják le a sebességet és helyet az idő függvényében?

Válasz:

$$v_x = v_{x0} + a_x t$$

$$v_z = v_{z0} + a_z t$$

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{a_x}{2}t^2$$

$$z = z_0 + v_{z0}t + \frac{a_z}{2}t^2$$

Segítő hivatkozás: IV.2.2

III. Mely paramétereket ismerjük a feladatban megadott adatok alapján, és melyik paraméter a kérdés az a) részben, ha az érkezés magasságát vesszük a *z* nullhelyének?

Válasz: $a_x = 0$ , $a_z = -9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ , $v_{z0} = 0$ , $x_0 = 0$ , $z_0 = 9\mathrm{m}$ , $x_1 = 45\mathrm{m}$ , $z_1 = 0$ , Kérdés: $v_{x0}$
Segítő hivatkozás: IV.2.2

IV. Mely egyenleteket használhatjuk fel, hogy a $v_{x0}$ értékét meghatározzuk?

Válasz: A $z$ egyenletből kifejezzük az időt, majd az $x$ egyenletből a $v_{x0}$-t.

*Egyenletek megoldása:* [kattintással kibontható]

$$z_1 = z_0 + v_{z0}t_1 + \frac{a_z}{2}{t_1}^2$$

$$0 = 9\mathrm{m} + 0 \cdot t_1 - 4{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot {t_1}^2$$

$$t_1 = 1{,}355\text{s}$$

$$x_1 = x_0 + v_{x0}t_1 + \frac{a_x}{2}{t_1}^2$$

$$45\text{m} = 0 + v_{x0} \cdot 1{,}355\text{s} + 0 \cdot (1{,}355\text{s})^2$$

$$v_{x0} = \mathbf{33,2\frac{m}{s}}$$

V. Hogyan határozhatjuk meg a sebesség nagyságát a földet éréskor?

Válasz: Először a sebesség egyenleteiből meg kell határozni a komponenseket, majd pedig Pitagorasz-tétellel kiszámolni a vektor hosszát.
Segítő hivatkozás: IV.7.1

*Egyenletek megoldása:* [kattintással kibontható]

$$v_{x1} = v_{x0} + a_x t_1 = 33{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}} + 0 \cdot 1{,}355\text{s} = 33{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

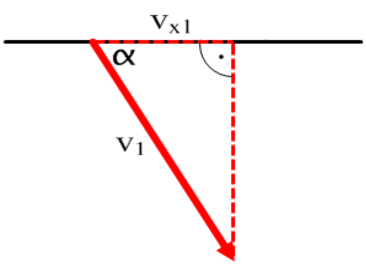
$$v_{z1} = v_{z0} + a_z t_1 = 0 - 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}355\text{s} = -13{,}28\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_1 = \sqrt{{v_{x1}}^2 + {v_{z1}}^2} = \sqrt{\left(33{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(-13{,}28\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = \mathbf{35,8\frac{m}{s}}$$

VI. Hogyan kell meghatározni a sebességvektornak a vízszintes iránnyal bezárt szögét?

Válasz: A vektor vízszintes komponensét a vektor nagyságával elosztva megkapjuk a vízszintessel bezárt szög koszinuszát.
Segítő hivatkozás:1.7.2

*Egyenletek megoldása:* [kattintással kibontható]




$$\cos\alpha = \frac{v_{x1}}{v_1} = \frac{33{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}}}{35{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0{,}927$$

$$\alpha = \arccos 0{,}927 = \mathbf{22°}$$

**3.** Józsika az iskola emeleti ablakából vizes lufikat hajigál. Az ablak 9 méter magasan van, a tanító néni pedig 170 cm magas és az épülettől 5 méter távolságra áll, az ablak alatt.
a) Milyen sebességgel kell eldobnia a lufit Józsikának, ha 30º-os szögben lefelé céloz, hogy pont fejen találja a tanító nénit?
b) Mekkora sebességgel találja el a lufi a tanító nénit?

*Interaktív megoldás:*

I. Milyen típusú mozgásról van szó a példában?

Válasz: Ferde hajítás
Segítő hivatkozás: IV.2.3

II. Milyen egyenletek alkalmazhatók a sebességre és helyre, ha az *x* tengelyt vízszintesen, a *z* tengelyt pedig függőlegesen felfelé vesszük fel?

Válasz:

$$v_x = v_{x0} + a_x t$$

$$v_z = v_{z0} + a_z t$$

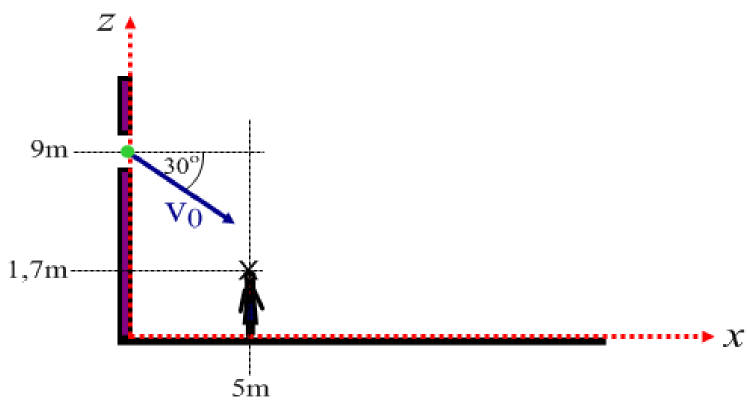
$$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{a_x}{2} t^2$$

$$z = z_0 + v_{z0} t + \frac{a_z}{2} t^2$$

Segítő hivatkozás: IV.2.3

III. Az egyenletekben mely paramétereket tudjuk közvetlenül meghatározni a példa szövege alapján, ha a *z* nullpontját a talaj szintjén, az *x* nullpontját pedig az ablaknál vesszük fel?

Válasz:




$$a_x = 0\ ,\ a_z = -9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ ,\ x_0 = 0\ ,\ z_0 = 9\mathrm{m}\ ,\ x_1 = 5\mathrm{m}\ ,\ z_1 = 1{,}7\mathrm{m}$$

Segítő hivatkozás: IV.2.3

IV. Hogyan kell felbontani a sebességet vízszintes és függőleges komponensekre?

Válasz:

$$v_{x0} = v_0 \cos 30° = v_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v_{z0} = -v_0 \sin 30° = -v_0 \cdot \frac{1}{2}$$

Mivel a dobás lefelé irányul, a függőleges komponens már kezdetben is negatív!
Segítő hivatkozás: I.2.4

V. Mely egyenleteket használhatjuk fel a kezdősebesség meghatározásához?

Válasz: Mivel a cél eléréséhez egy meghatározott *x* és *z* koordinátaérték teljesülése szükséges, ezeket a feltételeket felhasználhatjuk az *x* és *z* egyenletekben.
Segítő hivatkozás: IV.2.3

*Egyenletek megoldása:* [kattintással kibontható]

$$x_1 = x_0 + v_{x0}t_1 + \frac{a_x}{2}{t_1}^2$$

$$5\text{m} = v_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}t_1$$

$$t_1 = \frac{10\text{m}}{\sqrt{3} \cdot v_0}$$

$$z_1 = z_0 + v_{z0}t_1 + \frac{a_z}{2}{t_1}^2$$

$$1{,}7\text{m} = 9\text{m} - \frac{v_0}{2}t_1 - 4{,}9\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot {t_1}^2$$

Behelyettesítve a $t_1$-re kapott kifejezést a *z* egyenletbe:

$$1{,}7\text{m} = 9\text{m} - \frac{v_0}{2} \cdot \frac{10\text{m}}{\sqrt{3} \cdot v_0} - 4{,}9\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{10\text{m}}{\sqrt{3} \cdot v_0}\right)^2$$

$$v_0 = \mathbf{6{,}08\frac{m}{s}}$$

VI. Mik a sebesség kezdőértékének vízszintes és függőleges komponensei?

Válasz: Az előzőekben az ismeretlen $v_0$ felbontásaiba most beírjuk a $v_0$ értékét.
Segítő hivatkozás: I.2.4

*Egyenletek megoldása:* [kattintással kibontható]

$$v_{x0} = v_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6{,}08\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5{,}265\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{z0} = -v_0 \cdot \frac{1}{2} = -6{,}08\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{2} = -3{,}04\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

VII. Hogyan határozhatjuk meg a sebesség komponenseit a becsapódáskor?

Válasz: Az előzőleg $v_0$ függvényében kifejezett időt most már ki tudjuk számolni, és annak segítségével a sebesség komponenseit kiszámolhatjuk.
Segítő hivatkozás: IV.2.3

*Egyenletek megoldása:* [kattintással kibontható]

$$t_1 = \frac{10\text{m}}{\sqrt{3}\cdot v_0} = \frac{10\text{m}}{\sqrt{3}\cdot 6{,}08\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0{,}95\text{s}$$

$$v_{x1} = v_{x0} + a_x t_1 = 5{,}265\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{z1} = v_{z0} + a_z t_1 = -3{,}04\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0{,}95\text{s} = -11{,}88\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

VIII. Hogyan határozhatjuk meg a komponensekből a sebesség nagyságát?

Válasz: Mivel a komponensek merőleges vetületek (egy derékszögű háromszöget alkotnak, melynek a komponensek a befogói és maga a vektor az átfogója), így használhatjuk a Pitagorasz-tételt.
Segítő hivatkozás: I.7.1

*Egyenletek megoldása:* [kattintással kibontható]

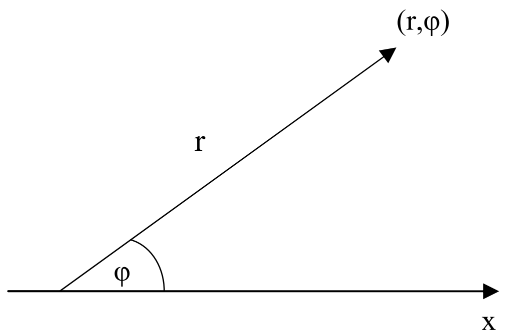
$$v_1 = \sqrt{{v_{x1}}^2 + {v_{z1}}^2} = \sqrt{\left(5{,}265\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(-11{,}88\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = \mathbf{13\,\frac{m}{s}}$$

# IV.3. Körmozgás

Körmozgásról beszélünk akkor, ha a mozgó tömegpont egy körpálya mentén halad, azaz létezik olyan pont (a kör középpontja), amelytől a mozgás során mindig ugyanolyan r távolságra van. A körmozgásokat síkpolár koordináta-rendszerben célszerű leírni.

## IV.3.1. Síkpolár koordináta rendszer

Kétdimenziós mozgások leírására alkalmas koordináta rendszer. A koordináták: r és φ, ahol r az origótól mért távolság, (körmozgásnál a kör sugara), φ a tengelytől mért szög.




***Példa síkpolár koordináta rendszerre***

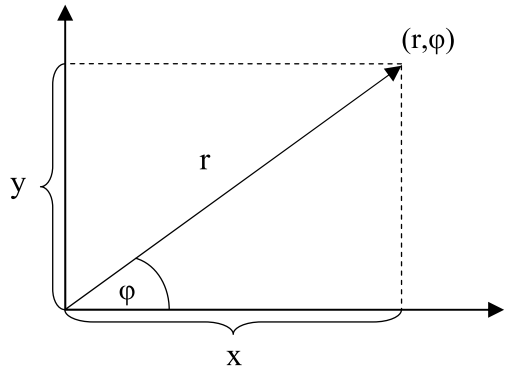
A síkpolár koordináta rendszer különösen körmozgás leírásánál előnyös, ha az origót a kör közepén vesszük fel, mivel ekkor az r koordináta állandó és csak a φ koordináta változik.
Határozzuk meg a Descartes-koordinátákkal való kapcsolatot az ábra alapján. Ha adva van x és y, akkor a síkpolár koordinátákat a következőképp számítjuk ki:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{és} \quad tg\varphi = \frac{y}{x}$$

Fordítva, ha r és φ van megadva, a Descartes-koordinátákat az

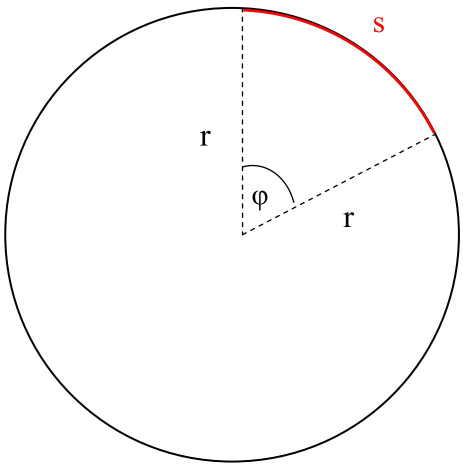
$x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$

képletekkel kapjuk az alábbi ábra alapján



**IV.3.2. A szögelfordulást leíró mennyiségek**

A **radián** v. ívmérték a szögek (pontosabban síkszögek) egyik mértékegysége, amelyet időnként a *rad* szimbólummal jelölnek. Egy radián az a szög, amelyhez mint középponti szöghöz a kör sugarával egyenlő hosszúságú körív tartozik (nem véletlenül hasonlít a radius=sugár latin szóhoz), s=r.




Tehát egy szög annyi radián, ahány szorosa a szöghöz tartozó körív hossza a kör sugarának.

A radián fizikai dimenzió nélküli mértékegység, mivel egy arányszám, azaz két hosszúság hányadosa. Mivel a kör kerülete 2π-szerese a sugárnak, ezért $360^{o}$ fok átszámítva 2π radián, vagyis egy radián

$$1\,rad = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,296^\circ .$$

A **Szögsebesség** definíciója: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, (**Kiegészítés**: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$) a szög változási gyorsasága (a szöget radiánban mérve). Ez azt jelenti, hogy ha körmozgás esetén a szögsebesség $1\frac{1}{s}$, akkor egy sugárnyit, ha a szögsebesség $3,14159\frac{1}{s}$, akkor egy fél kört halad a test másodpercenként.

**Szöggyorsulás**: $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ (**Kiegészítés**: $\beta = \frac{d\omega}{dt}$) azaz milyen gyorsan változik a szögsebesség.

**IV.3.3. Egyenletes körmozgás**

A szögsebesség állandó, azaz β=0. Ekkor a $\Delta\varphi$ szögelfordulás egyenesen arányos az idővel:

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t .$$

Legyen T az egy kör megtételéhez szükséges idő, tehát T idő alatt a φ szög 2π-vel változik. Ekkor

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} .$$

A T idő alatt megtett út a kör kerülete, s(T)= 2π·r. A sebesség állandó, tehát

$$v=\frac{s(T)}{T}=\frac{2\pi\cdot r}{T}=r\cdot\omega,$$

**kerületi sebesség**nek is nevezik. Megjegyezzük, hogy a $v=r\cdot\omega$ összefüggés nem csak egyenletes, hanem tetszőleges körmozgás esetén fennáll a pillanatnyi sebesség és szögsebesség között,de a levezetés csak egyenletes körmozgás esetén érvényes.

Bár a test mindig ugyanolyan gyorsan megy, mégis van gyorsulás. Ez azért van, mert a sebesség nem skalár, hanem vektormennyiség. Vagyis hiába állandó a sebesség nagysága, ha a pont nem egyenes vonalon mozog, gyorsulása semmiképp nem mindig nulla. A centripetális gyorsulás a sebesség **irányának** megváltozását adja. Kiszámítási módja:

$$a_{cp}=\frac{v^2}{r}=r\cdot\omega^2=v\cdot\omega\ .$$

A gyorsulás centripetális komponense merőleges a sebességre, ezért normális gyorsulásnak is hívják.

### IV.3.4. Egyenletesen változó körmozgás

A szöggyorsulás $\beta$=állandó.
A szögsebesség lineárisan változik:

$$\omega(t)=\beta\cdot t+\omega_0\ .$$

A szögelfordulást hasonlóan számolhatjuk a szögsebességből, mint az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgásnál az x koordinátát a sebességből (hivatkozás: **IV.1.4. B**):

$$\varphi(t)=\frac{\beta\cdot t^2}{2}+\omega_0\cdot t+\varphi_0$$

A sebességet a szögsebességből a $v=r\cdot\omega$ összefüggés felhasználásával kapjuk:

$$v(t)=\beta\cdot t\cdot r+\omega_0\cdot r=\beta\cdot t\cdot r+v_0\ .$$

A tangenciális (más néven pályamenti) gyorsulás a gyorsulás érintőirányú komponense:

$$a_t=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$ (**Kiegészítés**: $a_t=\frac{dv}{dt}$)

Ez a sebesség **nagyságának** megváltozását jellemzi. Ha a sebesség növekszik, akkor a sebesség irányába, ha a sebesség csökken, akkor a sebességgel ellentétes irányba mutat.
A tangenciális gyorsulás egyenesen arányos a szöggyorsulással:

$$a_t=r\cdot\beta$$

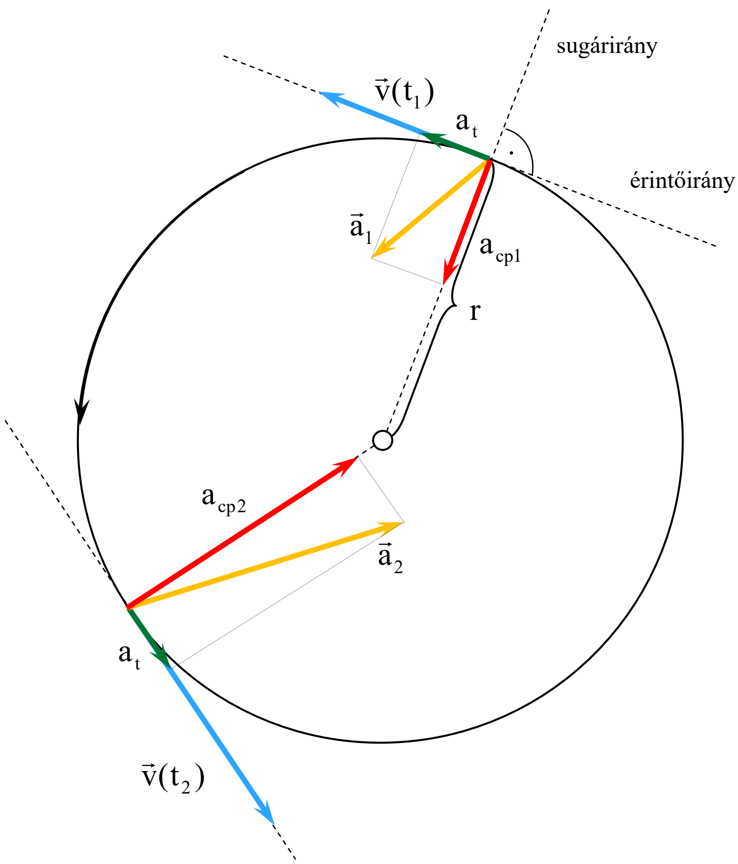
(**Kiegészítés**: Ezt a $v=r\omega$ összefüggés deriválásával kapjuk, mivel az r konstans.)
Ezt felhasználva kapjuk, hogy a sebesség nagysága a következő módon függ az időtől:

$$v(t)=a_t\cdot t+v_0$$

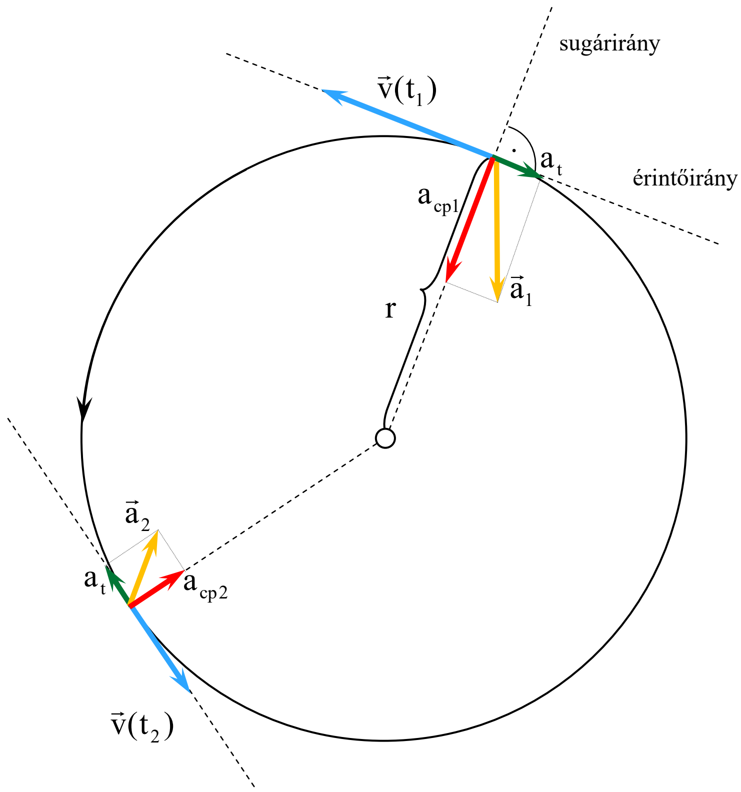
Ez lényegében ugyanaz a képlet, mint az egyenletesen változó egyenes vonalú mozgás esetén (hivatkozás: **IV.1.4. C**), csak éppen itt kör alakú pályán mozog a test.
A gyorsulás nagyságát, mivel a két komponens merőleges, Pitagorasz tétellel kapjuk (hivatkozás: **I.7.1.**):

$$a = \sqrt{a_{cp}{}^2 + a_t{}^2}$$

Gyorsuló körmozgásnál a sebesség nagysága és így a centripetális gyorsulás is növekszik. Ekkor a tangenciális gyorsulás a sebességgel megegyező irányba mutat. Az ábrán ezt szemléltetjük két, egymást követő időpillanatban.




Lassuló körmozgásnál fordítva van, a sebesség nagysága és így a centripetális gyorsulás is csökken. Ekkor a tangenciális gyorsulás a sebességgel ellentétes irányba mutat. Egy ábrán ezt ismét szemléltetjük.




Számoljuk ki most a megtett utat. Induljunk ki abból, itt csak a sebesség nagysága számít, az iránya nem. Tudjuk, hogy a centripetális gyorsulás a sebesség irányát változtatja, tehát ennek nem lehet köze a megtett úthoz. Emiatt az utat hasonlóan számoljuk ki, mint az egyenes vonalú mozgásnál (hivatkozás: **IV.1.4. C**) viszont most csak a tangenciális gyorsulást kell beírni a képletbe, mivel az okozza a sebesség megváltozását. Tehát ha a sebesség nem vált előjelet, akkor a

$$s = \left| \frac{1}{2} a_t t^2 + v_0 t \right|,$$

képletet lehet használni, ha pedig előjelet vált, akkor ezzel a képlettel külön ki kell számolni a megállás előtt és után megtett utat (utóbbinál $v_0=0$) és ezeket összeadni.

## ANIMÁCIÓS TERV: Egyenletesen változó körmozgás

**(interaktív animáció)**

Az animáció egyetlen felületből áll, nem tartalmaz hangot

- Valós időben módosított adatok alapján változó animáció.

Működés *(pl. vezérlők elhelyezése, funkciója)*:

- A felületen egy kis pötty látható, amely körmozgást végez. Mellette grafikonok, alatta vezérlők paraméter-módosításhoz, valamint a képletek is.
- A kis pötty mozog és „csíkot húz maga után”, amely kirajzolja a kört, egy teljes kör megtétele után a pötty a körvonalon mozog. Az idő egyenletesen változik.
- A pötty mozgásának irányában (mindig érintőlegesen) egy $a_t$ nagyságú vektor mutat, a tangenciális gyorsulás. Rá merőlegesen, mindig a kör középpontja felé, $a_{cp}$ nagyságú vektor mutat. A kettő vektori összege egy nyíl, a gyorsulás (a). Ez utóbbit lehet, hogy úgy kellene, hogy ki lehessen kapcsolni, hogy ne ábrázolja a nyilat.
- Ezzel párhuzamosan a grafikonokon hasonló pötty mutatja a felhasználó által kiválasztott fizikai mennyiségek épp aktuális értékeit (sebesség, centripetális gyorsulás, gyorsulás, megtett út, szög, szögsebesség) értékeket, valamint a mozgó pötty kirajzolja a függvényeket. A vízszintes tengelyen minden esetben az idő van. A grafikonok fejlécében az a képlet látható, amellyel az ábrázolt mennyiség számolható. Két megoldást is elképzelhetőnek tartunk: vagy az összes mennyiség (6db)

számára külön grafikon van, és ezek mindig látszanak, vagy csak 2-4 grafikon van és a felhasználó választja ki, épp mely mennyiségeket szeretné látni rajtuk.

- A felhasználó változtathatja a tangenciális gyorsulást egy kis grafikus csúszó potméterrel (pl. -2 és 2 között $cm/s^2$-ben), amely a paraméter számértékét is mutatja. Az alapértelmezett kezdősebesség pl. $v_0$=1 (cm/s) pozitív irányban, r legyen pl. 5 cm.
- Ha a keringés már szemmel követhetetlen (pl. $v > 50 cm/s$), leáll a mozgás. Emellett egy pause gombbal is le lehet állítani. Érdemes egy időgyorsítás gombot is készíteni, hogy túl nagy/kicsi sebességek esetén át lehessen skálázni az időt.

A működéshez használandó képletek:

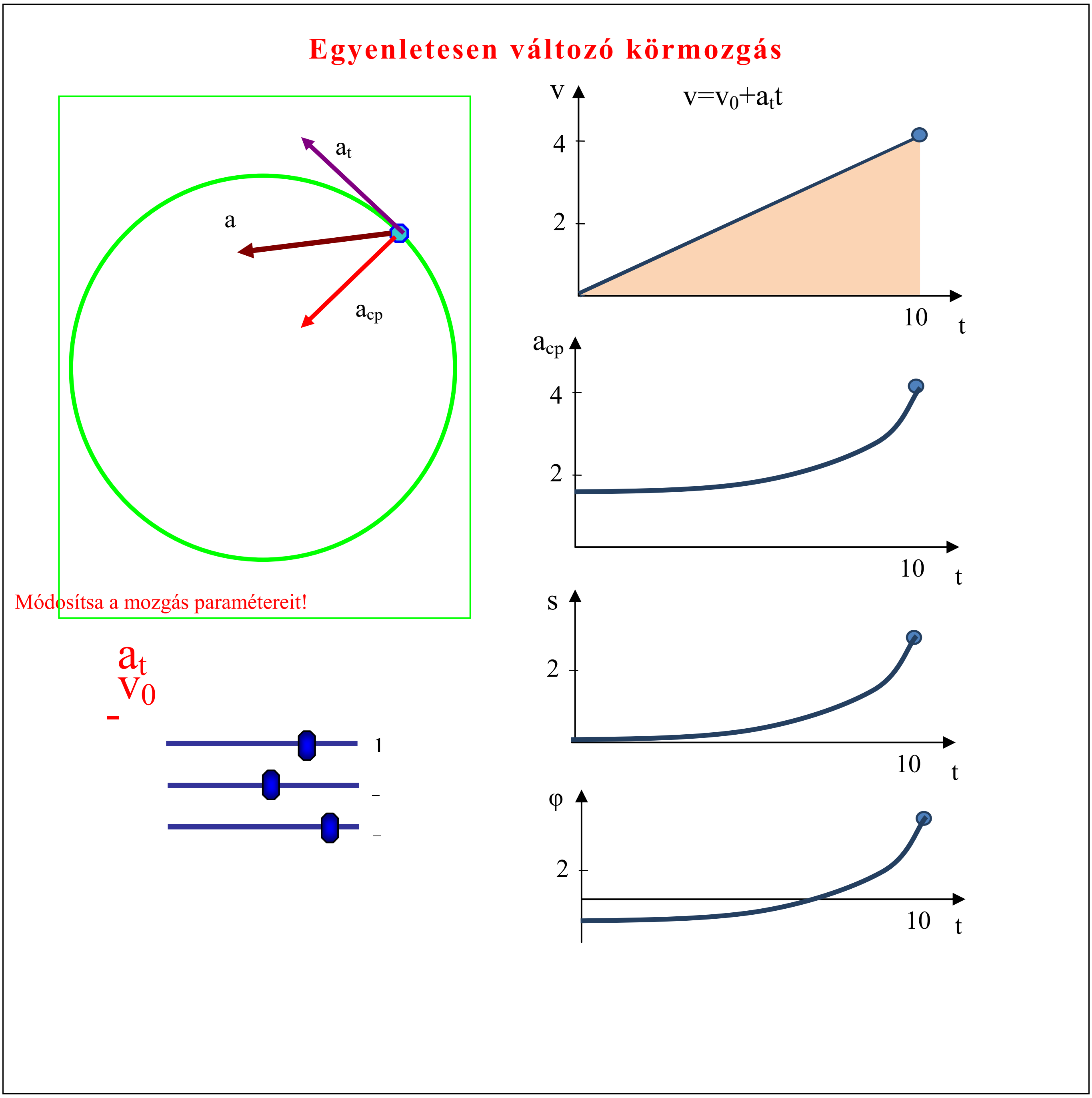
$$v = v_0 + a_t t, \quad \omega = \frac{v}{r} \quad \beta = \frac{a_t}{r} \quad \varphi(t) = \frac{\beta \cdot t^2}{2} + \omega_0 \cdot t + \varphi_0 \quad a_{cp} = \frac{v^2}{r}, \quad a = \sqrt{a_{cp}{}^2 + a_t{}^2}$$

Tehát ha a sebesség nem vált előjelet, akkor a

$$s = \left| \frac{1}{2} a_t t^2 + v_0 t \right|,$$

képletet lehet használni, ha pedig előjelet vált, akkor ezzel a képlettel külön ki kell számolni a megállás előtt és után megtett utat és ezeket összeadni.

Látványterv



**IV.3.T. Ellenőrző teszt-feladatok**

<u>**Körmozgás**</u> tesztek több választási lehetőséggel:

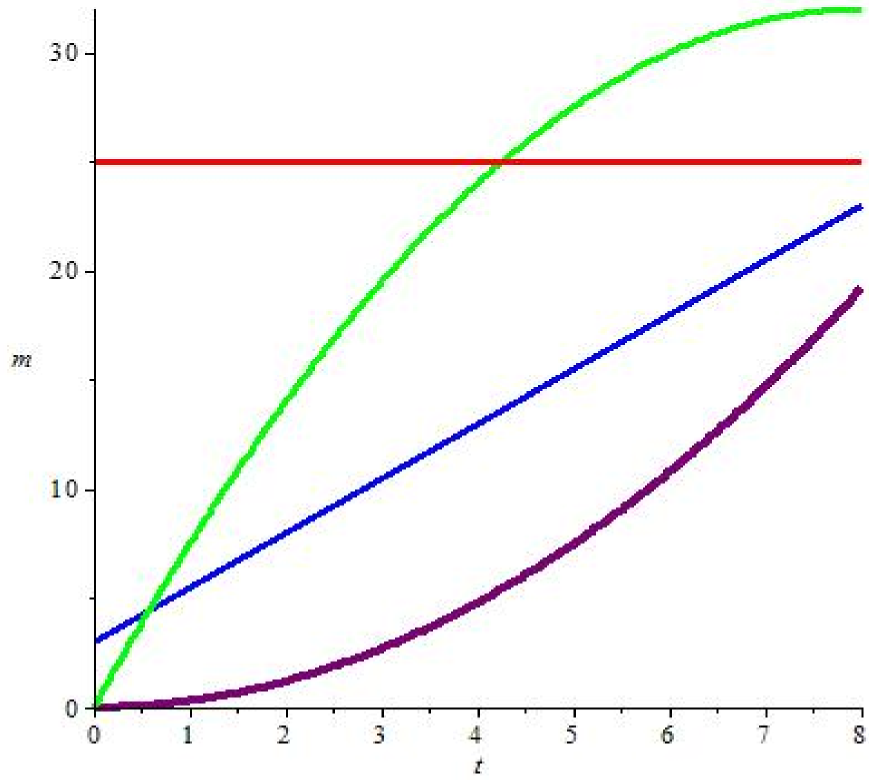
I. Az alábbi mozgások közül melyiknél használható a v=s/t képlet?

szabadesés
ferde hajítás
egyenletes körmozgás  (itt)
egyenletesen gyorsuló körmozgás
egyiknél sem használható

II. Párosítsuk össze, hogy melyik görbe alatti terület kiszámításával melyik mennyiséget kapjuk meg.

| | |
|---|---|
| szöggyorsulás-idő | szögsebesség megváltozása |
| gyorsulás-idő | sebesség megváltozása |
| sebesség-idő | megtett út |
| szögsebesség-idő | szögelfordulás |

III. Párosítsuk össze, hogy egy körmozgást végző pont mely jellemzőit és milyen típusú körmozgás esetén ábrázolhatják az alábbi grafikonon a görbék?




szög egyenletes körmozgásnál  (kék)
megtett út egyenletesen lassuló körmozgásnál  (zöld)
centripetális gyorsulás egyenletes körmozgásnál  (piros)
centripetális gyorsulás egyenletesen gyorsuló körmozgásnál (lila)

**IV.3.GY. Gyakorló feladatok**

**1.** Egy tömegpont álló helyzetből indulva egyenletesen gyorsuló körmozgást végez. A pont sebessége a 4. másodpercben 6m/s, a szögsebessége a 6. másodpercben $18\frac{1}{s}$. Mekkora a szöggyorsulás? Mekkora a kör sugara? Mekkora a pont szögsebessége a 10. másodpercben?

*Megoldás:* Az egyenletesen gyorsuló körmozgás miatt a szöggyorsulás és a tangenciális (érintő irányú) gyorsulás állandó. Mindkettőt könnyen kiszámolhatjuk:

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{t_2} = \frac{18\frac{1}{s}}{6s} = 3\frac{1}{s^2}$$

$$a_t = \frac{\Delta v}{t_1} = \frac{6m/s}{4s} = 1{,}5\frac{m}{s^2}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy a 6. másodpercben a sebesség

$$v(t_2 = 6\,s) = a_t \cdot t_2 = 1{,}5\frac{m}{s^2} \cdot 6s = 9\frac{m}{s}$$

Ebből a $v=r\cdot\omega$ összefüggéssel kapjuk a kör sugarát:

$$r = \frac{v_2}{\omega_2} = \frac{9\frac{m}{s}}{18\frac{1}{s}} = 0{,}5m.$$

Most már (ellenőrzésképpen) másképp is ki tudjuk számolni a szöggyorsulást:

$$\beta = \frac{a_t}{r} = \frac{1{,}5\frac{m}{s^2}}{0{,}5m} = 3\frac{1}{s^2}.$$

A pont szögsebessége a mozgás 10. másodpercében: $\omega_2 = \beta t_2 = 3\frac{1}{s^2} \cdot 10s = 30\frac{1}{s}$.

IV.3.Int. Interaktív feladatok

**1**. Egy test R=9m sugarú körpályán egyenletesen változó mozgást végez. t=1s-tól t=2s-ig a centripetális gyorsulása 100-szorosára nőtt, a szögsebessége pedig $2\frac{1}{s}$ -mal lett nagyobb. Mekkora lesz a test sebessége a t=4s időpillanatban?

K: Hogyan számoljuk ki a centripetális gyorsulást a szögsebességből és az R sugárból?
V: $a_{cp}=R\cdot\omega^2$ (hivatkozás: **IV.3.3.** )

K: Írjuk fel az összefüggést a T=1s és t=2s időpontokban megadott centripetális gyorsulások között.
V: $a_{cp}(2)=100\cdot a_{cp}(1)$ azaz $R\cdot\omega_2^2=100\cdot R\cdot\omega_1^2$

K: Írjuk fel az ebből és a szögsebességek különbségére megadott összefüggésből a szögsebességekre vonatkozó két egyenletet.
V: $\omega_2=10\cdot\omega_1$ és $\omega_2=\omega_1+2$

K: Oldjuk meg az egyenletrendszert.
V: Mivel $\omega_2$ már ki van fejezve az első egyenletnél, csak be kell helyettesíteni a második egyenletbe és rögtön kapjuk, hogy

$$\omega_1+2=10\cdot\omega_1$$

$$9\omega_1=2$$

$$\omega_1=\frac{2}{9}\frac{1}{s} \quad \text{és} \quad \omega_1=\frac{20}{9}\frac{1}{s}$$

K: Hogyan számolunk ebből sebességeket:
V: a $v=r\cdot\omega$ képlet segítségével (hivatkozás: **IV.3.3.** ):

$$v_1=2\frac{m}{s} \quad \text{és} \quad v_2=20\frac{m}{s}$$

K: Mekkora a tangenciális gyorsulás?
V: $a_t=\frac{\Delta v}{\Delta t}=18\frac{m}{s^2}$ (hivatkozás: **IV.3.4.** )

K: Hogyan számoljuk ki ebből a sebességet a t=4s időpillanatban?
V: $v_3=v_2+a_t\cdot\Delta t=56\frac{m}{s}$ (hivatkozás: **IV.3.4.** )

**2**. Kör alakú, 600m sugarú versenypályán két autó indul egyszerre egy pontból ellenkező irányba. Az A autó állandó 50m/s sebességgel halad, a B autó kezdősebessége csak 40m/s, de a mozgás első 4 másodpercében $5m/s^2$ tangenciális gyorsulása van. Mennyi idő telik el az első találkozásukig és mennyivel nagyobb a gyorsabb autó szögelfordulása a lassabbénál?

K: Mekkora lesz a B autó végsebessége?
V: $\Delta v=a_t\cdot\Delta t=20\frac{m}{s}$, vagyis $v_{B2}$=60m/s lesz a végsebesség (hivatkozás: **IV.3.4.** ).

K: Mennyi utat tesz meg a gyorsuló szakaszban a B autó?
V: $s=\frac{1}{2}a_t t^2+v_0 t=\frac{1}{2}\cdot 5\frac{m}{s^2}\cdot(4s)^2+40\frac{m}{s}\cdot 4s=200m$ (hivatkozás: **IV.3.4.** )

K: A találkozásik eltelt t időt ismeretlennek véve írjunk fel egyenletet a két autó által összesen megtett útra.
V: a két autó összesen annyi utat tesz meg, amennyi a körpálya kerülete, azaz K=2πr=3770m.
Az első autó $s_A = v_A \cdot t$, a második $s_B = 200m + v_{B2} \cdot (t-4s)$ utat tesz meg, ezek összege egyenlő a kör kerületével. Behelyettesítve:

$$3770m = 50\frac{m}{s} \cdot t + 200m + 60\frac{m}{s} \cdot (t-4s)$$

$$3570m = 110\frac{m}{s} \cdot t - 240m$$

Vagyis t=34,6s.

K: Mekkora utat tett meg az A autó?
V: $s_A = v_A \cdot t = 1731{,}8m$

K: Mekkora szögelfordulásnak felel ez meg?
V: Egyenes arányossággal kapuk, hogy ha 3770m felel meg $360^o$-nak, akkor 1731m $165{,}4^o$-nak felel meg. A B autó szögelfordulása $360^o$ - $165{,}4^o$ = $194{,}6^o$, ez $29{,}2^o$-kal több, mint az A autóé.

**3**. Egy test az origó körül egyenletesen lassuló körmozgást végez. Sebessége a t=0 időpillanatban 10m/s. Ekkor a test a (0,5) pontban tartózkodik. A test szögsebessége t=2s-nál 0,4 $\frac{1}{s}$. Mekkora a szöggyorsulás? Mekkora utat tesz meg a test megállásig? Mekkora az elmozdulás-vektor?

K: Mekkora a kör sugara?
V: Mivel a körpálya középpontja az origó, a kör egyik pontja pedig ettől 5m-re van, a kör sugara R=5m.

K: Mekkora a test (kerületi) sebessége t=2s-nál.
V: $v = R\omega = 5m \cdot 0{,}4\frac{1}{s} = 2\frac{m}{s}$ (hivatkozás: **IV.3.3. )**

K: Mekkora a tangenciális gyorsulás?
V: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s}}{2\frac{m}{s^2}} = -4\frac{m}{s^2}$. (hivatkozás: **IV.3.4. )**

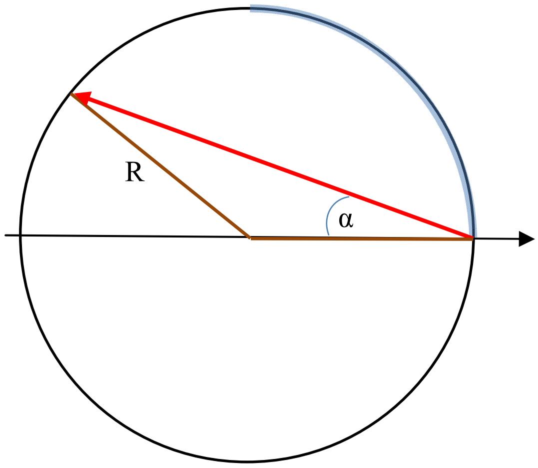
K: Mekkora a szöggyorsulás?
V: $\beta = \frac{a}{R} = \frac{-4\frac{m}{s^2}}{5m} = -0{,}8\frac{1}{s^2}$. (hivatkozás: **IV.3.4. )**

K: Mennyi idő alatt csökken a sebesség nullára?
V: $\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{-10m/s}{-4\frac{m}{s^2}} = 2{,}5s$. Tehát t=2,5s-nál áll meg a test.

K: Mekkora utat tesz meg ez alatt a test?
V: $s_1 = \frac{a_t}{2}\Delta t^2 + v_0\Delta t = \frac{-4m/s^2}{2} \cdot (2{,}5s)^2 + 10\frac{m}{s} \cdot 2{,}5s = 12{,}5m$ (hivatkozás: **IV.3.4. )**

K: Mekkora a $\Delta\varphi$ szögelfordulás?
V: Ezt legegyszerűbb az útból kiszámolni:
$\Delta\varphi = \frac{s}{R} = \frac{12,5m}{5m} = 2,5$ radián, azaz $143,2^{\circ}$ . (hivatkozás: **IV.3.2.** )

K: Rajzoljuk fel a pályát és rajzoljuk be az elmozdulás-vektort.




K: Mekkora az elmozdulás-vektor?
V: Az ábrán egy egyenlőszárú háromszöget látunk, amelynek két oldala R=5m, a harmadik, pirossal jelölt oldala az elmozdulás-vektor ismeretlen hossza, jelöljük x-szel. A háromszög legnagyobb szöge $\Delta\varphi = 143,2^{\circ}$ és a két kisebb szöge egyaránt $\alpha = 18,4^{\circ}$ .
Ekkor a szinusztételből:

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = x = \frac{\sin\Delta\varphi}{\sin\alpha} R = 9,48m$$