EGYENESVONALÚ MOZGÁSOK

A tudományban – miként a legtöbb dologban – a legjobb az elején kezdeni.
Lewis Carroll

2.1 Bevezetés

A természetről szerzett legtöbb ismeretünk testek mozgásának megfigyeléséből származik. Ebben a fejezetben egy anyagi pont, vagy részecske mozgásának leírásával foglalkozunk. Ezt a területet **kinematikának** nevezzük. Bár a pont geometriai fogalom, és nagyon különbözik olyan mindennnapi tárgyaktól, mint egy ping-pong labda vagy egy autó, látni fogjuk, hogy a kiterjedt testek általános mozgása is könnyen leírható egyetlen pont, a „tömegközéppont" mozgásával, valamint a test tömegközéppont körüli forgásával. A test rezgést is végezhet, de ez a bonyolult mozgás szintén leírható a tömegközépponthoz viszonyítva. Így tanulmányainkat egy pont vagy egy részecske *egydimenziós*, egyenesvonalú mozgásával kezdjük.

A *részecske* szóról egy kicsiny test, mondjuk egy teniszlabda, vagy egy kis anyagcsomó jut eszünkbe. A szót azonban általánosabb értelemben használjuk; egyaránt jelölheti a teniszlabdát, a Földet vagy akár egy galaxist is! Amennyiben egy test mozgásából csak a tömegközéppont elmozdulása érdekel bennünket (elhanyagolva az estleges a forgásokat, rezgéseket, vagy egyéb belső mozgásokat), akkor a test mindig egyetlen részecskének tekinthető.

2.2 Tér és idő mérése

A kinematika a *hol*? és a *mikor*? kérdésével foglalkozik. Bár ezek a kérdések egyszerűek, a válasz mégis bonyolult lehet, ha hétköznapi tapasztalatainkon kívül eső jelenségeket vizsgálunk. Akár a nagy sebességű mozgások fizikája, akár a galaxisközi vagy a szubmikroszkópikus dimenziókban végbemenő események fizikája teljesen különbözik a megszokott elképzelésünktől. (Ezekkel az izgalmas kérdésekkel azonban csak a későbbi fejezetekben foglalkozunk.) E helyütt a Newton féle tér és idő fogalmat fogadjuk el, ami mindennapi tapasztalatainkból fokozatosan fejlődött ki.

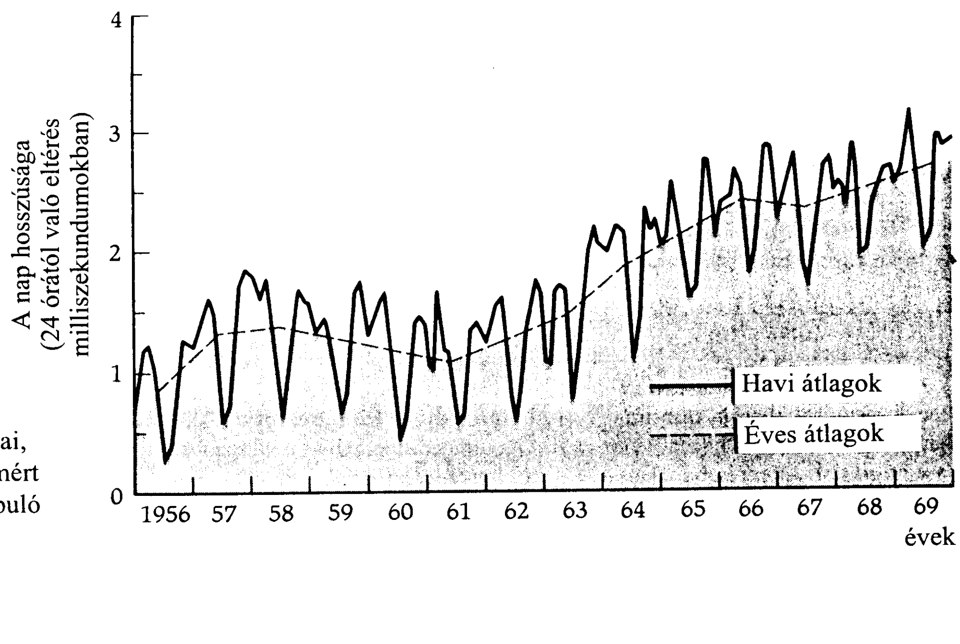
A teret *homogénnek* és *izotropnak* tekintjük. Ez azt jelenti, hogy a tér tulajdonságai nem függnek a helytől és iránytól. Newton szavaival: „Az abszolút tér, mint olyan, nincs kapcsolatban semmiféle külső hatással, mindig ugyanaz és mozdulatlan." Az univerzumban minden test a tér egy adott helyén létezik, és az idő múlásával változtathatja a helyzetét a térben. Egy kiválasztott pontszerű test térbeli helyzetét valamely kiválasztott testhez rögzített *vonatkoztatási rendszerhez* képest adhatjuk meg.

Az idő Newton szerint szintén abszolút, abban az értelemben, hogy egyenletesen telik. Nem gyorsíthatjuk és nem lassíthatjuk. Ismét Newton szavaival élve: „Az abszolút, igazi és matematikai idő önmagától és saját természete szerint egyenletesen folyik bármilyen külső hatás nélkül, s másként folytonosan állandó időnek is nevezzük." Az idő tehát folytonos és állandóan előrehalad, múlása pl. egy óraszerkezettel jelezhető.

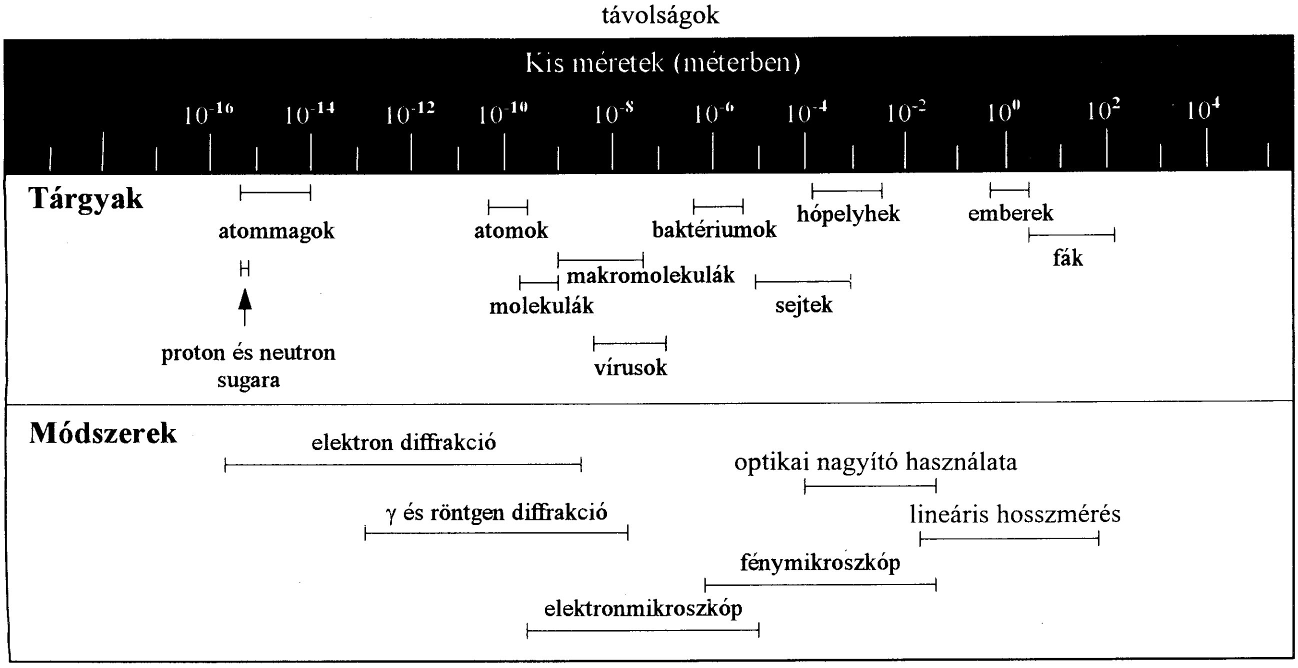
Newton felfogása szerint a tér és az idő tökéletesen független egymástól, bár az nyilvánvaló, hogy minden fizikai objektumnak egyszerre kell léteznie mind a térben, mind pedig az időben. Lehetetlennek látszik, hogy olyan testet képzeljünk el, amely a térben valahol létezik, de időben nem, vagy olyat, amely létezik egy véges időintervallumban, de térbeli helyzete nincsen.

Figyelemreméltó, hogy a térről és időről alkotott hagyományos és józan észen alapuló elképzelések egy részéről kiderült, hogy naiv és hibás. A pontosabb kísérletek egészen mást mutatnak, ugyanis ezek nem egyeztek a kísérleti tényekkel. A világ nagyon különbözik attól, amit hétköznapi tapasztalataink alapján elképzelünk. Bár a tér és az idő olyan fogalmak, amelyeket nehéz, vagy talán lehetetlen is más egyszerűbb fogalmakra visszavezetni, a teret és időt is egyértelműen *mérhetjük.* Ezeknek a mennyiségeknek a mérésére olyan műveleteket határozzunk meg, amelyek során szabványosított tér- és idő egységen alapuló hosszúságmérő eszközöket és órákat alkalmazunk. A szabványosított időmérték hosszú ideig a Föld forgására vonatkozó csillagászati megfigyeléseken alapult. A pontos *atomórák* (ezek bizonyos atomok által kibocsátott elektromágneses sugárzás rezgésszámának állandóságán alapulnak) feltalálása óta kiderült, hogy a Föld forgása bonyolult módon változik $1:10^8$ arányban (ami évente kb. 0,3 másodpercnek felel meg). A 2-1 ábra a nap hosszúságának változását mutatja! A méréseket néhányszor 10^{-13} vagy 10^{-14} pontossággal összeegyeztetett atomórákkal végezték. A Föld forgási sebességét olyan tényezők befolyásolják, mint a sarki jégsapkák időszakos olvadása, a szökőár, a napfolt tevékenység (ez a föld légkörének körforgását befolyásolja) valamint a földrengések. A Föld forgásának változása miatt 1967-ben a 13. Általános eme Súly és Mérésügyi Konferencián résztvevő harmincnyolc ország atomi idő-szabványt fogadott el.

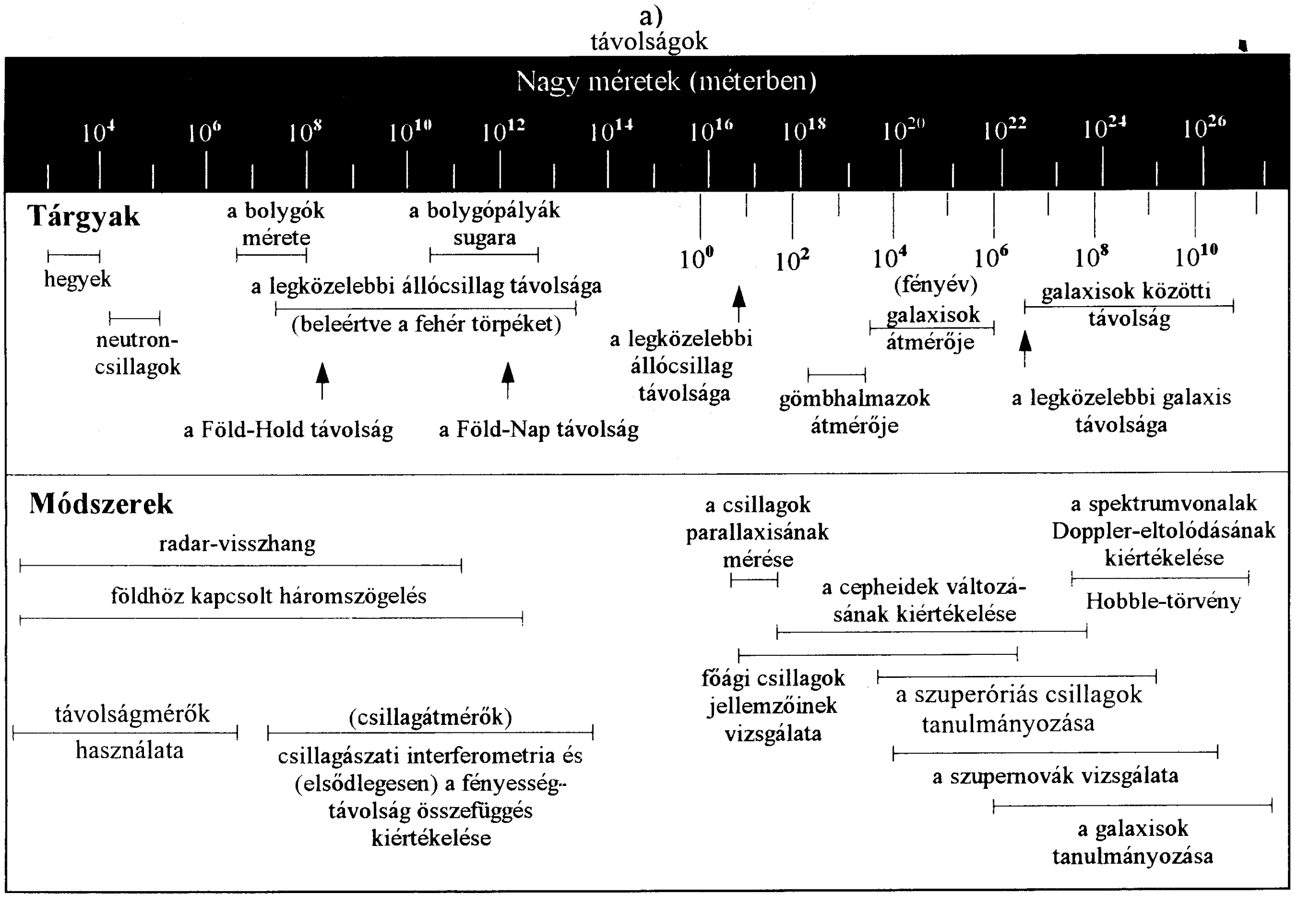
A hosszmérték etalon eredetileg egy, a franciaországi Sèvresben őrzött platina-irídium rúd két jelzése közötti távolság volt. Ezt a méter szabványt úgy választották, hogy a Párizson keresztül haladó délkörnek az északi saroktól az egyenlítőig húzódó szakaszának hossza 10^7 m legyen. A későbbi mérések azonban azt mutatták, hogy a délkörnegyed hosszának tízmilliomod részétől az etalon körülbelül 0,023%-kal eltér.



2-1 ábra
A nap hosszúságának a változásai, összehasonlítva az atomórával mért időtartamot a Föld forgásán alapuló időtartam mérésekkel



a)



b)

2-2 ábra
Távolságok és mérésük módszere.
a) A különlegesen kicsiny távolságok sokkal megbízhatóbban mérhetők, mint a nagyon nagyok, mert a kis méretek tartományában több egymást átfedő módszer létezik.
b) A csillagászati távolságok mérése a távolság növekedésével egyre pontatlanabbá válik. Továbbá a nagy távolságok mérésére szolgáló eljárások kalibrációja (hitelesítése) a kisebb távolságok mérésének helyességén múlik.

Ennél sokkal nagyobb problémát jelentett azonban az, hogy a méter etalon természeti katasztrófák, háborúk, vagy rablótámadás során bármikor megsemmisülhetett volna. További nehézséget okozott a pontos etalonmásolatok elkészítése a felhasználó országok számára. Emiatt 1960-ban a hosszegység szabványt újra meghatározták, és két atomi energiaszint közötti elektronátmenet során kibocsátott fény hullámhosszához kötötték. A legújabb megállapodást 1983-ban fogadták el; eszerint a hosszegységet azzal a távolsággal definiáljuk, amit a vákuumban terjedő fény meghatározott időtartam alatt megtesz. Ily módon a hossz- és időegységként elfogadott hosszúság és időtartam bármikor reprodukálható, ha ismerjük a szükséges berendezések és a megfelelő mérési eljárások leírását. Nem szükséges többé másolatokat készíteni az etalonról! A 2-2 ábra néhány jellegzetes objektum méretének nagyságrendjét és az egyes mérettartományokban használatos mérési módszereket mutatja.

Mértékegységek, mértékrendszerek

Az Általános Súly és Mérésügyi Konferencia rendszeresen tart összejöveteleket, amelyen új mértékegységek elfogadását ajánlja. Ebben a könyvben is többnyire a Súly és Mérésügyi Konferencia által javasolt SI rendszerként (Systeme Internationale d'Unites) ismert mérték és rövidítésrendszert használjuk, amit már az egész világon szinte mindenütt elfogadtak.

A jelölésrendszer a következő: azokat a mértékegységeket, amelyeket tudósok tiszteletére neveztek el, kis kezdőbetűvel írjuk, ha a teljes nevet kiírjuk. Rövidítésül azonban a név nagy kezdőbetűjét használjuk. Például: *newton* (N). Az egyes és a többes számban a rövidítés ugyanaz, és a rövidítés után nem teszünk pontot. Ha két mértékegységet együtt használunk, akkor kötőjellel választjuk el őket, rövidített jelüket azonban ponttal. Például: *newton-méter,* de N·m. A mértékegységek osztását törtvonallal, vagy negatív kitevővel jelöljük. Például: m/s vagy $m{\cdot}s^{-1}$ A több számjegyű mennyiségeket a tizedesvesszőtől jobbra és balra is hármas csoportokra osztva írjuk le. (Pl. 123 456,789 87)

Az idő és hosszúság szabványosított mértékegységei a következők:

Az időtartam egysége: Az időtartam alapegysége a szekundum, vagy másodperc, jele: s. A másodperc, definíció szerint a cézium 133-as izotopjának két meghatározott energiaszintje közötti elektronátmenet során kibocsátott sugárzás periodusidejének 9 192 631 770- szerese.

A hosszúság egysége: A hosszúság alapegysége a méter, jele: m. A méter az a hosszúság, amelyet a vákuumban terjedő fény 1/299 792 458 másodperc alatt megtesz.

A történelem során más idő- és hosszegységeket is használtak. Az Egyesült Államokban gyakran használatos mértékegység volt például a hüvelyk (in), láb (ft), jard (yd) és a mérföld (mi). 1959-ben a jardot az

$$1 \text{ yd} = 0{,}9144 \text{ m} \quad \text{(pontosan)}$$

összefüggéssel definiálták. Ez egyenértékű a hüvelyk

$$1 \text{ in} = 2{,}54 \text{ cm} \quad \text{(pontosan)}$$

definíciójával. Ezek a mértékegységek az angol mértékrendszerből erednek. Könyvünkben alapvetően mindenütt SI mértékegységeket használunk. Az Egyesült Államokban és Angliában régebben használatos egységek alkalmazását a mértékegységek közötti átszámítást bemutató példákra korlátozzuk.

A Nemzetközi Mértékegységrendszer prefixumai (előtagjai)

Az SI rendszerben az alapegységek meghatározott többszöröseit a mértékegységek neve elé tett szavacskákkal, előtagokkal vagy prefixumokkal jelöljük. Az előtagok megmutatják, hogy az egységnek tíz melyik hatványá-

2-3 ábra
Céziumóra az USA Állami Mérésügyi Hivatalában (National Bureau of Standards).

val vett szorzatáról van szó. A 2-1 táblázat az SI rendszer prefixumait mutatja. Néhány régi hosszegységet egyes tudományágakban ma is használunk, bár az SI egységek fokozatosan kiszorítják őket. Kettőt említünk:

$$1 \text{ angström } (\text{Å}) = 10^{-10}\text{ m}$$
$$1 \text{ mikron } (\mu) = 10^{-6}\text{ m}$$

Az *angströmöt* a XIX-ik századi svéd fizikusról A. J. Ångstömről nevezték el, a mikron pedig a „nagyon kicsiny" jelentésű görög szóból származik.

A számértékeket gyakran az igen kényelmes, ún. normál alakban írjuk fel, ahol tíz hatványait használjuk az egy és tíz közé eső értékű számok szorzóiként. Az 1926 számot például $1{,}926\times10^{3}$-ként írjuk fel, a 0,000 371-et pedig $3{,}71\times10^{-4}$-ként. (A számítógépes programokban a tíz hatvány kifejezésére az E betűt használjuk, ekkor az előző két számot 1,296 E3 illetve 3,71E–4 -ként adjuk meg.

2.3 Mértékegységek átszámítása

Ha egy egyenletbe numerikus értékeket helyettesítünk be, akkor mindvégig ugyanazokat a mértékegységeket kell használnunk. Egy összefüggés sebesség jellegű tagjának mértékegységét megadhatjuk pl. m/s -ban, de bármely más hosszúság és idő mérték hányadosában is kifejezhetjük. A számítás azonban csak akkor marad logikailag konzisztens, ha az adott problémában mindig *ugyanazokat* a mértékegységeket használjuk. Minden hosszúságot kifejezhetünk méterben és minden időintervallumot másodpercben, nem keverhetjük össze azonban a métert a kilométerrel, ill. a másodpercet a nappal, vagy az órával.

A mértékegységek átszámításának egy egyszerű módszere az, ha a mért értéket az egymásnak megfelelő új és régi mértékegységek hányadosaival szorozzuk.

2-1.Táblázat. Az SI rendszer prefixumai (előtagjai)

Szorzó-tényező	prefixum	jel	Szorzó-tényező	prefixum	jel
10^{18}	exa	E	10^{-1}	deci*	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi*	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	milli	m
10^{9}	giga	G	10^{-6}	mikro	μ
10^{6}	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^{3}	kilo	k	10^{-12}	pico	p
10^{2}	hecto*	h	10^{-15}	femto	f
10^{1}	deka*	da	10^{-18}	atto	a

Példák

10^6 watt = 1 megawatt (1MW)

10^3 méter = 1 kilométer (1 km)

10^{-3} gramm = 1 milligramm (1 mg)

10^{-9} szekundum = 1 nanoszekundum (1ns)

* A legtöbb kitevő három valamely többszöröse, az ettől eltérőket ritkán használjuk. Kivétel ez alól a centi, ami a méterrel kapcsolatban gyakran előfordul.

10^{-2} méter = 1 centiméter (1 cm)

(További adatokat tartalmaz az A függelék)

Így például a percben mért időtartamot úgy számítjuk át másodpercekre, hogy megszorozzuk a $\frac{60\,\text{s}}{1\,\text{min}}$ hányadossal, a lábban mért hosszúságot a $\frac{12\,\text{in}}{1\,\text{ft}}$ hányadossal szorozva kapjuk meg a hosszúságot hüvelykben.

Ha egy hat hüvelyk per óra sebességgel kúszó kígyó sebességét láb per másodpercben kívánjuk megadni, akkor ezt a következő módon kapjuk meg:

$$6\frac{\cancel{\text{in}}}{\cancel{\text{h}}}\underbrace{\left(\frac{1\cancel{\text{h}}}{60\,\cancel{\text{min}}}\right)\left(\frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\,\text{s}}\right)\left(\frac{1\,\text{ft}}{12\cancel{\text{in}}}\right)}_{\text{átszámítási tényezők}}=0{,}000139\frac{\text{ft}}{\text{s}}=1{,}39\times10^{-4}\frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

Hasonló módon számíthatjuk át egy gépkocsi 72 km/ó-s sebességét m/s-ra:

$$72\frac{\text{km}}{\text{h}}\underbrace{\left(\frac{1000\,\text{m}}{1\,\text{km}}\right)\left(\frac{1\,\text{h}}{3600\,\text{s}}\right)}_{\text{átszámítási tényezők}}=\frac{72000}{3600}\frac{\text{m}}{\text{s}}=20\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A jelölések használatában *javasoljuk*, hogy annak ellenére, hogy nyomtatott szövegekben gyakran használják a ferde vonalat az osztás jelölésére (pl. m/s), *ezt a jelölésmódot szigorúan kerüljük el, ha egyenleteket írunk fel.* Ekkor használjunk mindig vízszintes vonalat törtvonalként, mert így sokkal könnyebb megállapítani, hogy mely mennyiségek vannak a számlálóban és melyek a nevezőben. Ez megkönnyíti a mértékegységek egyszerűsítését és a számokkal való műveleteket is.

Pontosság, értékes jegyek

A fizikai mérések eredményeinek felírásakor különbséget szokás tenni pl. a 4,2 m, ill. 4,20 m alakban felírt adatok között. Az első csak két jegyre pontos, míg a második azt jelzi, hogy az adat három értékes jegy pontossággal van megadva. *Az utolsó leírt számjegyet tekintjük az első bizonytalan jegynek.* Bizonyos mértékig azonban még így is előfordulhat kettős értelmezés. Az 1800 m alakban felírt adat esetén például az utolsó helyen álló két zérus jelölhet értékes jegyet, de lehetséges az is, hogy pusztán a tizedesvessző helyét jelöli ki. A normál alak felhasználásával ez a „kétértelműség" elkerülhető. Az $1{,}8 \cdot 10^3$ m alakban felírt szám két értékes jegyet tartalmaz, míg az $1{,}800 \cdot 10^3$ m négyet. A 0,00005 szám – amint az $5 \cdot 10^{-5}$ felírásból azonnal látható – csak egy jegyre pontos, mert a tizedesvesszőt közvetlenül követő zérusok nem értékesek.

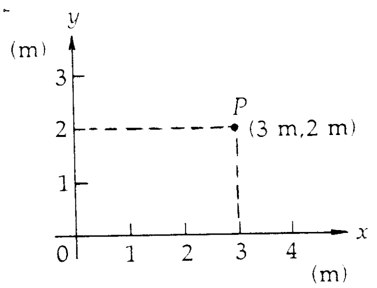
A számok összegében és különbségében a tizedesjegyek számának meg kell egyeznie a *kevesebb* tizedesjegyet tartalmazó tag tizedesjegyeinek számával. Így a 472 + 3,64 összeadás helyes eredménye nem 475,64, hanem a kerekítéssel[1] kapott 476. Hasonlóan általános szabály az, hogy a szorzások és osztások eredménye nem tartalmazhat több értékes jegyet, mint a *kevésbé* pontos tényező. Ezért az 5,7624×2,60 szorzás eredménye nem 14,8824 hanem 14,9 (az értékes jegyek száma ugyanannyi, mint a 2,60 tényezőben). A kerekítéssel azonban célszerű a számolás utolsó lépéséig várni.

Ebben a könyvben az egyszerűség kedvéért gyakorlati szabályt alkalmazzuk. Minden megadott adatot elegendően pontosnak tekintünk ahhoz, hogy a végeredményt három értékes jegyre lehessen kerekíteni. Így pl. a 2 s-ként megadott adatot a számítások során 2,00 s -ként kezeljük.

Tudatában kell lennünk azonban annak, hogy a laboratóriumi mérésekből nyert adatok esetén az értékes jegyeknek a mérési hibák miatt rendkívül nagy jelentősége van, és a mérések kiértékeléséhez a fentieknél sokkal bonyolultabb szabályokat kell elsajátítani. Egyetlen általánosan elfogadott gyakorlatra hívjuk csak fel a figyelmet. Amikor ismerjük a kísérleti eredmények bizonytalanságát, akkor a mérési hibát szokás explicit módon is megadni. Egy távolságadat esetén pl. a következőképpen:7,75 ± 0,04 m. Itt, ha nem használunk más konvenciót, akkor a megjelölt értéktartomány azt jelenti, hogy a valódi érték 66%-os valószínűséggel a megjelölt intervallumba, ill. 34%-os valószínűséggel az intervallumon kívülre esik.

2.4 Koordinátarendszerek és vonatkoztatási rendszerek

Egy térbeli pont helyzetének meghatározásához ismernünk kell egy adott ponttól mért *távolságát*, valamint azt, hogy milyen *irányban* van tőle. Ezek legegyszerűbben úgy adhatók meg, ha először felveszünk egy **koordinátarendszert.** Leggyakrabban a jól ismert *Descartes*[2]*-féle*, vagy derékszögű koordinátarendszert használjuk. A koordinátarendszer felvételéhez ki kell jelölni annak kezdőpontját, az *origót*, és meghatározott irányokat, *a tengelyeket*. Ez lehetővé teszi a térbeli pontok helyzetének azonosítását az origóhoz és a tengelyekhez képest. Kiderül az is, hogy minden koordinátarendszer, amely egymáshoz képest nyugalomban van, igen szoros kapcsolatban van egymással, mert a testek mozgásának fontos jellemzői a különböző koordinátarendszerekben mérve egyenlőek egymással. Egy mozgó test *sebessége* és *gyorsulása* például minden ilyen rendszerben ugyanakkora. Az egymáshoz képest nyugvó koordinátarendszerek összessége **vonatkoztatási rendszert** képez. Vonatkoztatási rendszert kapcsolhatunk például egy atommaghoz, a laborasztalhoz, egy forgó űrállomáshoz, a Naphoz vagy az állócsillagokhoz stb.



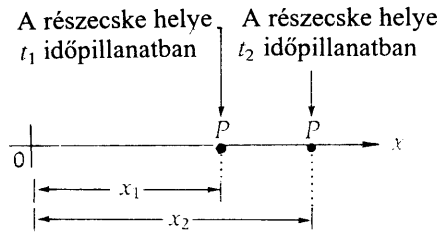
2-4 ábra
Egy P pont helyzetét a síkban Descartes-féle koordinátákkal adjuk meg $(x_1, y_1) = (3\ \mathrm{m}, 2\ \mathrm{m})$

[1] A „kerekítés" azt jelenti, hogy az utolsó megmaradó jegyet változatlanul hagyjuk, ha az elhagyott 5-nél kisebb, de eggyel növeljük, ha az elhagyott jegy 5 vagy nagyobb.

[2] René Descartes (1596-1650) francia matematikus-filozófus, az analitikus geometria kifejlesztője. Ő készített először – a derékszögű koordinátarendszer felhasználásával – grafikonokat függvények ábrázolására.

A 2-4 ábra egy síkbeli Descartes-féle koordinátarendszert mutat be. Tengelyei merőlegesen metszik egymást az origóban, és a tengelyekre egyenlő hosszúságokat (skálát) vittünk fel. Az egységek dimenzióját (többnyire zárójelben) mindkét tengely mellett fel tüntetjük. A tengelyek az origótól indulva kijelölnek egy-egy irányt, amelyeket x-szel és y-nal jelölünk. A koordinátákat a nyíl irányában pozitívnak, az ellentétes irányban pedig negatívnak tekintjük. A sík minden pontja egy számpárral jellemezhető, amelyet x és y *koordinátáknak* nevezünk. Egy pont koordinátái a tengelyektől mért távolságokkal egyenlők. A 2-4 ábrán bejelölt P pont például az y tengelytől 3 m távolságban az x tengelytől pedig 2 m távolságban van; így a P pont x és y koordinátái (3 m, 2 m). Az első szám mindig az x, a második pedig az y koordinátát jelöli.

2.5 Hely, elmozdulás, sebesség és sebességvektor



2-5 ábra
Az egydimenziós koordinátarendszer origójával és tengelyével jelölhető ki. A tengely pozitív irányát a mellé írt x jelzi.

Ahhoz, hogy egy részecske térbeli mozgását leírjuk, azt is meg kell mondanunk, hogy egy adott pillanatban milyen gyorsan és milyen irányban mozog. Az az elképzelés, hogy egy test egy adott térbeli helyen van és közben mozog, kényes és nehezen érthető probléma és a 2000 évvel ezelőtti filozófusokat is rendkívüli módon izgatta. Zenon (i.e. 450–435) görög filozófus például több, azóta híressé vált paradoxont is alapozott a sebességfogalom zavarbaejtő vonásaira. A nehézségek ma már érthetőek, hiszen a sebesség fogalmát a Newton (1642–1727) és Leibniz (1646–1716) által kifejlesztett differenciálszámítás előtt nem is lehetett pontosan definiálni. A következőkben a sebesség fogalmát nagyon gondosan értelmezzük és magyarázzuk, mert egyike a mechanika legalapvetőbb fogalmainak. Itt vezetjük be azokat a szabványos jelöléseket is, amelyeket a következőkben majd folyamatosan használunk.

Vegyünk fel mindenekelőtt egy egydimenziós *koordinátarendszert,* jelöljük ki az origót és a pozitív x tengelyt (2-5 ábra). Tegyük fel, hogy a P részecske a t_1 időpillanatban az x_1 helyen van. Ha a részecske mozog, akkor a t_2 időpillanatban új, x_2 helyre kerül; azt mondjuk, hogy a részecske **elmozdulása** $x_2 - x_1$. Ezt gyakran a görög Δ jellel fejezzük ki, ami általában egy mennyiség *megváltozására* utal. Így az

Elmozdulás $$\Delta x = (x_2 - x_1) \tag{2-1}$$

A Δx kifejezések mindig az adott x mennyiség *végső* és *kezdeti* értékének különbségét jelentik. A pozitív Δx érték pozitív x irányú, a negatív $-x$ irányú elmozdulást jelöl.

Az **átlagsebességet** a pálya mentén megtett teljes út és a megtételéhez szükséges összes idő hányadosa adja.

Átlagsebesség $$\text{Átlagsebesség} = \frac{\text{Összes út}}{\text{Összes idő}} \tag{2-2}$$

Tegyük fel például, hogy 3 óra alatt 150 km távolságba jutottunk el. A teljes útra vett átlagsebesség (megtett út)/(összes idő) = 150 km/3 h = 50 km/h. Figyeljük meg, hogy az átlagsebesség nem ad információt a mozgás részleteiről! Lehetséges, hogy az út egy részét 65 km/h – sebességgel tettük meg, majd megálltunk, hogy fényképfelvételt készítsünk, és a továbbiakban 60 km/h sebességgel haladtunk. A most definiált átlagsebesség természetesen a mozgás irányáról sem mond semmit.

A következőkben az egyenesvonalú mozgás irányának figyelembevételére definiáljuk a $v_{átl}$ átlagsebesség-vektort.

$$v_{\acute{a}tl} = \frac{\text{Elmozdulás}}{\text{Összes idő}}$$

Átlagsebesség
Vektor[3]

$$v_{\acute{a}tl} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} \qquad (2\text{-}3)$$

Itt $v_{\acute{a}tl}$ az elmozdulás előjelétől függően pozitív és negatív is lehet. A pozitív érték azt jelenti, hogy a sebesség a pozitív x irányba mutat, a negatív pedig azt, hogy a sebesség $-x$ irányú. A következő példa segít abban, hogy az átlagsebesség és az átlagsebesség-vektor közötti különbséget világosan megértsük.

2-1 PÉLDA

Egy atléta egyenes úton kocogva 30 perc alatt 6 km-t tesz meg. Ezután megfordul és 20 perc alatt 2 km-t visszagyalogol. Határozzuk meg: a) az atléta elmozdulását a kiinduló helyzethez képest, b) átlagsebességét a teljes úton, c) átlagsebesség-vektorát a teljes úton, d) az átlagsebesség-vektort a futva (kocogva) megtett szakaszon, e) a gyalogolva megtett szakaszra vonatkozó átlagsebesség-vektort.

MEGOLDÁS

Első lépésként, vázlatot készítünk a mozgásról, a 2-6/a ábrán bejelöljük, hogy a koordinátarendszer kezdőpontjául az atléta kiindulási helyét választjuk, valamint megjelöltük a mozgás jellegzetes pontjait is. A következőkben a megoldás során felhasznált jelöléseket és adatokat csoportosítjuk:

	hely	idő
kocogás	$x_0 = 0$	$t_1 = 0$
	$x_1 = 6$ km	$t_1 = 30$ perc
gyaloglás	$x_2 = 4$ km	$t_2 = 50$ perc

a) A futó az $x_0 = 0$ pontból indult és az $x_2 = 4$ km pontba jutott el. A Δx elmozdulás a végső és kezdeti érték különbsége:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 4\text{ km} - 0 = 4\text{ km}$$

b) A mozgás során megtett összes út 6 km + 2 km = 8 km, az út megtételéhez szükséges teljes idő pedig 30 perc + 20 perc = 50 perc (2-6/b ábra). A teljes útra vonatkozóan az

$$\text{Átlagsebesség} = \frac{\text{Megtett út}}{\text{Összes idő}} = \frac{8\text{ km}}{50\text{ perc}} = 0{,}160\,\frac{\text{km}}{\text{perc}}$$

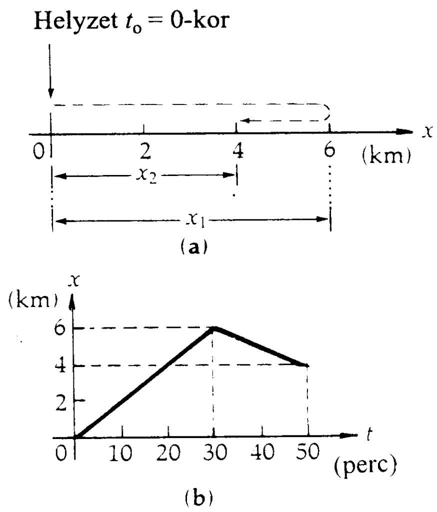
c) A teljes útra vonatkozó átlagsebesség-vektor:

$$v_{\acute{a}tl} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_0}{t_2 - t_0} = \frac{4\text{ km} - 0}{50\text{ perc} - 0} = 0{,}080\,\frac{\text{km}}{\text{perc}}$$

Ismételten felhívjuk a figyelmet arra, hogy a változásokat mindig a *végső és kezdeti érték különbségeként* kell kiszámítani.

d) Az út futva megtett részére számolva; a kezdeti és végső hely- és időkoordináták rendre:

$$x_0 = 0\text{ km},\quad t_0 = 0\text{ perc},\quad x_1 = 6\text{ km},\quad t_1 = 30\text{ perc}\quad .$$



2-6 ábra
A 2-1 példához

[3] Az átlagérték másik jele a betű felett elhelyezett vonás $v_{\acute{a}tl} = \overline{v}$ (olvasd vé felülvonás)

Így az atléta átlagsebesség-vektora erre a szakaszra

$$v_{\text{átl}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{6\,\text{km} - 0}{30\,\text{perc} - 0} = 0{,}200 \frac{\text{km}}{\text{perc}} \quad \text{(kocogás)}$$

e) A gyalogolva megtett szakaszra a kezdeti és végső hely- és időkoordináták rendre:
$x_1 = 6\,\text{km}$, $t_1 = 30\,\text{perc}$, $x_2 = 4\,\text{km}$, $t_2 = 50\,\text{perc}$, így az atléta átlagsebesség-vektora a gyaloglási szakaszon

$$v_{\text{átl}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{4\,\text{km} - 6\,\text{km}}{50\,\text{perc} - 30\,\text{perc}} = \frac{-2\,\text{km}}{20\,\text{perc}} = -0{,}100 \frac{\text{km}}{\text{perc}} \quad \text{(séta)}$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy a sebesség iránya $-x$.

Figyelmeztetés: Az atléta teljes mozgásának átlagsebesség-vektora nem egyszerűen a futási és gyaloglási szakaszra meghatározott sebességek átlaga, hiszen a két mozgásszakasz nem azonos ideig tartott.

A PILLANATNYI SEBESSÉG

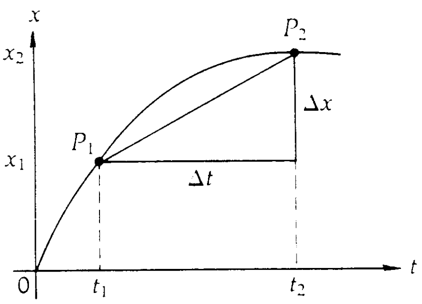
Az előző szakaszban definiált átlagsebesség és átlagsebesség-vektor csak akkor igazán hasznos, ha a mozgást egészében akarjuk jellemezni. A mozgás finomabb részleteire figyelve definiálható a *pillanatnyi sebesség*, ami a mozgást egy adott időpillanatban jellemzi. Mivel ezt a fogalmat legegyszerűbb grafikus úton bevezetni, tekintsük a 2-7/a ábrát, ami egy mozgó pont helyzetét mutatja az idő függvényében. Az ábrán is látható görbevonalú grafikon esetén arra a következtetésre kell jutnunk, hogy a test a mozgás kezdetekor gyorsabban mozgott, mint a végén. (Ezt onnan vehetjük észre, hogy a helykoordináta a mozgás kezdete közelében 1 másodperc alatt többet változott, mint a mozgás végső szakaszán.)

A 2-3 egyenlet szerint a t_1, t_2 időintervallumra az átlagsebesség $v_{\text{átl}} = \Delta x/\Delta t$. Ez az arány a t_1 időpillanathoz tartozó P_1 pontból a t_2 időpillanathoz tartozó P_2 végpontig tartó egyenes meredeksége. Tekintsük most a 2-7/b ábrát. Az egyre rövidebb Δt_2, Δt_3, $\Delta t_4, \cdots$, időintervallumokat véve, a kapott egyenesek meredeksége fokozatosan növekszik. Amennyiben a Δt rendkívűl kicsinnyé válik, akkor a $\Delta x/\Delta t$ meredekség a görbe t_1 időpillanatbeli érintőjének iránytangenséhez közelít. Ebben a határérték-képzési folyamatban az időintervallum rövidülésével a helykoordináta is egyre kisebb lesz és egyenként mind Δx, mind Δt zérushoz tart. A $\Delta x/\Delta t$ *arány* (melyet *különbségi hányados*nak is nevezünk), egy jól meghatározott értékhez, a t_1 időpillanathoz tartozó érintő iránytangenséhez tart. Ezt az értéket nevezzük a t_1-hez tartozó v **pillanatnyi sebességnek.** A fentiekben leírt határérték-képzési folyamatot matematikailag a követezőképpen jelöljük:

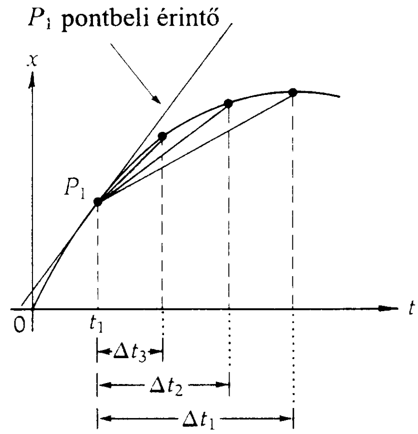
Pillanatnyi sebesség, v (a t időpontban)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Szavakban: „A v pillanatnyi sebesség a $\Delta x/\Delta t$ különbségi hányados határértékével egyenlő, midőn Δt zérushoz tart." A határértéket $\Delta x/\Delta t$ -vel jelöljük és az $x(t)$ függvény t szerinti deriváltjának nevezzük. A t-beli pillanatnyi sebesség geometriai jelentése, mint már említettük, az *$x(t)$ függvény grafikonján a t pillanathoz tartozó pontban húzott érintő iránytangense.* (Ha az $x(t)$ görbe alakja analitikusan is megadható, akkor a deriválás algebrai úton is elvégezhető. Néhány függvény deriváltját a G-I függelék tartalmazza.) Megjegyezzük, hogy a *pillanatnyi sebesség* kifejezés helyett, ha nem érthető félre, gyakran röviden csak *sebességet* mondunk.



a) A P_1 és P_2 pontokat összekötő egyenes szakasz meredeksége $\Delta x/\Delta t$.



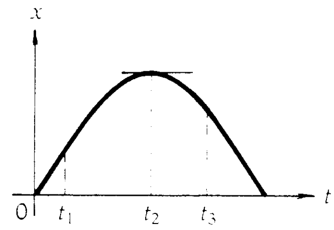
b) A Δt időtartam rövidülésével az adott időtartamhoz tartozó végpontokat összekötő egyenes szakaszok meredeksége a görbe P_1 pontbeli érintőjének iránytangenséhez tart (P_1-et a t_1 időpillanat határozza meg).

2-7 ábra

Egyenes vonalon mozgó részecske hely-idő grafikonja

A 2-8 ábrán a pozitív x tengely mentén mozgó részecske helyzet-idő függvényábrája látható. A részecske először a pozitív x irányba mozog, majd sebességének irányát megváltoztatva visszatér a kiinduló pontba. A t_1 időpontban a görbe meredeksége pozitív, így a pillanatnyi sebesség is pozitív irányba mutat. A t_2 a meredekség 0, ami azt jelzi, hogy (ekkor fordul meg a test) a sebesség zérus. A t_3 időpontban a meredekség negatív, s ez azt mutatja, hogy a sebesség negatív irányú.

A **pillanatnyi sebesség** nagysága megegyezik a *pillanatnyi sebesség abszolút értékével.* A következőkben rövid magyarázatot fűzünk a sebességekkel kapcsolatban gyakran zavart okozó néhány tényhez. A sebesség szót – amint már kiderült – sokféle értelemben használjuk, mert maga a fogalom igen sokrétű. Sebességnek nevezzük a pillanatnyi sebességvektort, de gyakran a pillanatnyi sebesség abszolút értékét is. Hasonlóképpen az átlagsebesség szót használjuk a megtett út és összes idő hányadosának jelölésére, s gyakran az átlagsebesség-vektor helyett is. (Az utóbbit a teljes elmozdulás és az ehhez szükséges idő hányadosával értelmeztük.) A rövidített szóhasználat általában nem okoz gondot, amennyiben azonban az említett fogalmakat egyszerre és egymástól megkülönböztetve kívánjuk használni, akkor mindig a fogalom pontos nevét kell használni.* Felhívjuk továbbá a figyelmet arra, hogy ha a pillanatnyi sebesség definíciójához hasonló eljárást követünk a megtett utakkal, akkor a pillanatnyi sebesség abszolút értékével megegyező skaláris sebességhez jutunk. Az átlagsebességek esetén ez nem teljesül, hiszen az átlagsebesség nem egyezik az átlagsebesség-vektor nagyságával. Az indianapolisi 500-as autóverseny győztese pl. (beleértve a depókban való megállásokat is) 256 km/h átlagsebességet ért el. A verseny célpontja azonban megegyezett a starthellyel, így a teljes elmozdulás és ennek megfelelően az átlagsebesség-vektor is zérus. Nagyon fontos tehát, hogy a megtett útra és az elmozdulásra számított átlagsebességek közötti különbséget biztosan értsük. Szerencsére azonban a következőkben többnyire egy adott időpillanatra vonatkozó sebességértékekkel foglalkozunk, ahol az átlagsebességekkel kapcsolatos probléma nem lép fel.



2-8 ábra
Egyenes vonalon mozgó részecske helyzet-idő függvényábrája

2-2 PÉLDA

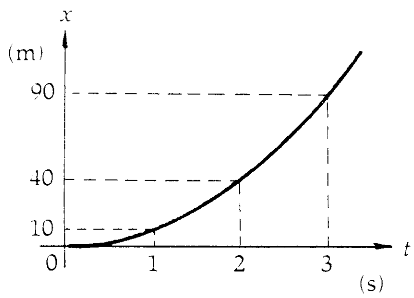
Egy pontszerű test az $x = 10t^2$ függvény szerint változtatja helyzetét, ahol x-et méterekben, t-t pedig másodpercben mérjük. Határozzuk meg; az átlagsebesség-vektort a) 2 s és 3 s közötti időintervallumban, valamint b) a 2,0–2,1 s-ig tartó időintervallumra.

MEGOLDÁS

Vázoljuk fel először az $x(t)$ grafikont (parabolát kapunk). Jelöljünk be néhány jellegzetes hely- és időértéket! (2-9 ábra.) Vezessük be az alábbi jelöléseket:

helyzet	**idő**
$x_1 = 40$ m	$t_1 = 2{,}0$ s
$x_2 = ?$	$t_2 = 2{,}1$ s
$x_3 = 90$ m	$t_3 = 3{,}0$ s

a) A 2 s és 3 s közötti időintervallumban az átlag sebesség-vektor:



2-9 ábra
A 2-2 példához

* Angol nyelven ezek a fogalmak kevésbé téveszthetők össze, mert külön szó jelőli a sebesség abszolút értékét (speed) és a sebesség vektort (velocity) .

$$v_{átl} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1} = \frac{90\,\text{m} - 40\,\text{m}}{3\,\text{s} - 1\,\text{s}} = \frac{50\,\text{m}}{1\,\text{s}} = 50{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) A $t_2 = 2{,}1$ s időpontban a részecske az $x_2 = 10t^2 = 10\cdot(2{,}1)^2 = 44{,}1$ m helyen van. A 2,0 s–2,1 s időtartamra vonatkozó átlagsebesség-vektort a

$$v_{átl} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{44{,}1\,\text{m} - 40\,\text{m}}{2{,}1\,\text{s} - 2{,}0\,\text{s}} = \frac{4{,}1\,\text{m}}{0{,}1\,\text{s}} = 41{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

összefüggés adja.

2-3 PÉLDA

A derivált definíciójában szereplő határérték-képzési eljárás illusztrálására hajtsuk végre a $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ műveletet az előző példában szereplő $x = 10t^2$ függvény szerint mozgó részecske pillanatnyi sebesség – idő függvényének meghatározására. Útmutatás: Vizsgáljuk x_2 helyzetét a t_1 és $t_2 = t_1 + \Delta t$ időpontban.

MEGOLDÁS

Tekintsük a $\Delta x = x_2 - x_1$ kicsiny elmozdulást, amelyet a részecske egy rövid $\Delta t = t_2 - t_1$ időtartam alatt tesz meg. Hajtsuk végre ezután a $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ határérték-képzési műveletet midőn Δt tart zérushoz. A t_1 időpillanatban a részecske a

$$x_1 = 10t_1^2$$

helyen, kis idővel később, a $t_2 = t_1 + \Delta t$ időpontban pedig a

$$x_2 = 10(t_1 + \Delta t)^2 = 10\left[t_1^2 + 2t_1\Delta t + (\Delta t)^2\right]$$

$$\Delta x = 20t_1\Delta t + 10(\Delta t)^2$$

helyen található. A Δt idő alatt bekövetkező Δx elmozdulás a

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 10\left[t_1^2 + 2t_1\Delta t + (\Delta t)^2\right] - 10t_1^2$$

$$\Delta x = 20t_1\,\Delta t + 10(\Delta t)^2$$

alakban adható meg. Következésképpen a $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ különbségi hányados:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 20t_1 + 10(\Delta t)$$

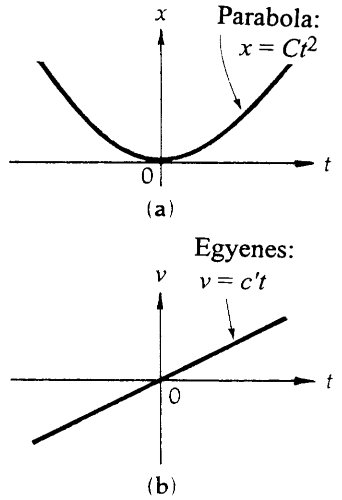
A Δt időtartamot zérushoz közelítve a második tag is zérushoz tart, s eközben az első tag értéke változatlan, így a t_1 időpontban a v_1 pillanatnyi sebesség

$$v_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 20t_1$$

adódik. Mivel a t_1 időpontra vonatkozóan semmilyen kikötést sem tettünk, a kapott összefüggés tetszőleges t időpontban érvényes. Az általános sebesség – idő függvény tehát:

$$v = 20t$$

A $v = v(t)$ grafikon egyenes vonal és pozitív és negatív t értékek esetén egyaránt érvényes. Figyeljük meg, hogy $t = 2$ s esetén $v = 40{,}0$ m/s sebesség adódik. Ez az eredmény igen közel esik az előző példában a 2,0 s – 2,1 s időintervallumra kapott $v_{\text{átl}} = 40{,}1$ m/s értékhez.



2-10 ábra

A b) ábrán látható egyenes vonal minden pontban az a)-ábrán látható parabola érintőjének dx/dt meredekségét adja meg.

A későbbiekben gyakran használjuk majd az előző feladatban kapott általános szabályt, ha x másodfokú függvény (azaz $x = Ct^2$, ahol C állandó), akkor a $v = dx/dt$ derivált $v = C't$ lineáris függvény, ahol C' a C-től különböző állandó. Általában fennáll

$$\text{Ha} \quad x = Ct^n, \quad \text{akkor} \quad \frac{dx}{dt} = nCt^{n-1} \qquad \text{(G-I. függelék 5. szabály)}$$

A 2-10 ábra mutatja a másodfokú függvényekre vonatkozó szabályt. A $v = v(t)$ függvényábra minden pontban az $x = x(t)$ függvényábra megfelelő pontbeli érintőjének meredekségét adja meg. Negatív t értékek esetén a meredekség is negatív és abszolút értékben annál nagyobb, minél meredekebb a görbe. A $t = 0$ pontban az érintő iránytangense zérus. Pozitív t-értékekre pedig pozitívvá válik.

2.6 A gyorsulás

A legérdekesebb mozgásfajták azok, amelyeknek a sebessége változik. Mindenki, aki már vezetett autót, s rálépett a gázra, tudja, hogy mindennapi értelemben a *gyorsulás* a gépkocsi sebességének növekedését jelenti. A fizikában azonban ez a kifejezés általánosabb értelmet nyer és a lassulást is magában foglalja. Ha a $\Delta t = t_2 - t_1$ időtartam alatt egy test pillanatnyi sebessége $\Delta v = v_2 - v_1$-értékkel változik, akkor átlagos gyorsulása definíció szerint

Átlagos gyorsulás
$$a_{\text{átl}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \textbf{(2-5)}$$

A definíció tartalmazza mind a gyorsulást ($a_{\text{átl}}$ pozitív), mind pedig a lassulást ($a_{\text{átl}}$ negatív). A gyorsulás tehát az időegységre eső sebességváltozás. Az SI rendszerben ez m/s osztva másodperccel, azaz m/s^2.

A pillanatnyi gyorsulást a pillanatnyi sebesség definíciójához hasonlóan határértékként értelmezhetjük, azaz a pillanatnyi gyorsulás a $\Delta v/\Delta t$ különbségi hányados határértéke, midőn Δt zérushoz tart[4] .

Pillanatnyi gyorsulás
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad \textbf{(2-6)}$$

Szavakban: „*a* gyorsulás egyenlő a $\Delta v/\Delta t$ különbségi hányados határértékével, midőn Δt zérushoz tart. Ezt a határértéket a sebesség idő szerinti deriváltjának nevezzük és dv/dt-vel jelöljük. a $v = v(t)$ grafikonon a t pillanatbeli a gyorsulást *a sebességgrafikon t időpillanathoz tartozó pontjában meghúzott érintő iránytangense* adja meg. A *gyorsulás* szó az esetek többsé-

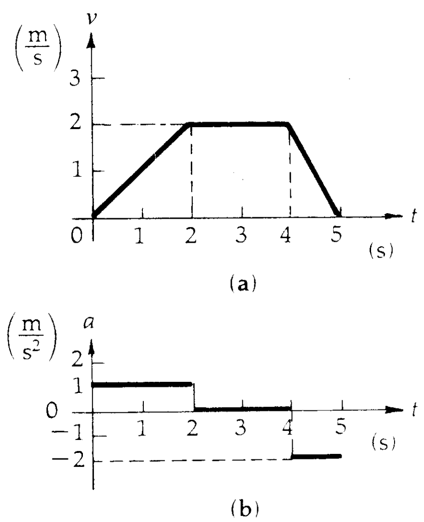
[4] A pillanatnyi gyorsulás második deriváltként is kifejezhető. Mivel

$$a = \frac{dv}{dt}; \quad a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

gében *pillanatnyi gyorsulást* jelent, ha kifejezetten $a_{\text{átl}}$-ról kívánunk beszélni, akkor az *átlagos gyorsulás* kifejezést használjuk.

A gyorsulás fogalmának megértését segítheti a következő néhány megjegyzés. Ha egy test sebessége és a gyorsulása azonos előjelű, akkor a test gyorsul. Ha mind v mind a pozitív, akkor a test pozitív irányban, ha pedig v és a is negatív akkor negatív irányban gyorsul. Amennyiben a gyorsulás és a sebesség iránya ellentétes, akkor a test lassul. Ha például v pozitív és a negatív, akkor a test pozitív irányban lassulva mozog. Amennyiben a sebesség negatív és a gyorsulás pozitív, akkor a test negatív irányba mozog és lassul.

2-11 ábra
A 2-4 példához



2-4 PÉLDA

Az $x = 0$ pontból induló részecske a 2-11/a ábrán látható sebesség – idő függvény szerint mozog. Vázoljuk fel a pillanatnyi gyorsulást az idő függvényében! Tüntessük fel a mozgás jellegzetes pontjainak megfelelő numerikus értékeket is!

MEGOLDÁS

Az a gyorsulás meghatározására használjuk fel az $a = dv/dt$ összefüggést. A derivált azokban a tartományokban, ahol v lineárisan változik t-vel, megegyezik a $\Delta v/\Delta t$ különbségi hányadossal. A $t_0 = 0$ és $t_1 = 2$ s időintervallumban a függvénygörbe meredeksége pozitív és állandó és az

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(v_1 - v_0)}{(t_1 - t_0)} = \frac{\left(2\dfrac{\text{m}}{\text{s}} - 0\right)}{(2\,\text{s} - 0)} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

összefüggéssel adható meg. A $t_1 = 2$ s és $t_2 = 4$ s közötti időintervallumban a meredekség és így a gyorsulás is zérus. A $t_2 = 4$ s-tól a $t_3 = 5$ s-ig tartó szakaszon a függvénygörbe meredeksége negatív és állandó:

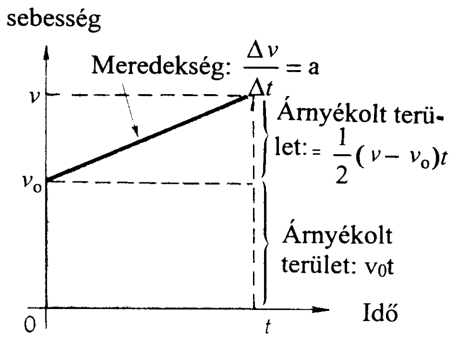
$$a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(v_3 - v_2)}{(t_3 - t_2)} = \frac{\left(0 - 2\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{(5\,\text{s} - 4\,\text{s})} = -2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A 2-11/b ábrán a 2-11/a ábrán megadott sebesség – idő függvénynek megfelelő gyorsulás – idő függvény látható.

2.7 Az egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás kinematikai egyenletei

Miután definiáltuk az egyenes vonalon mozgó pontszerű test *x helyzetét, v sebességét és* a *gyorsulását*, most néhány, a feladatmegoldásban rendkívül hasznos kinematikai összefüggést vezetünk le. Ezek az összefüggések semmi olyan új információval nem szolgálnak, amit a helyzetre, sebességre és gyorsulásra vonatkozó definíciók lényegében ne tartalmaznának. Mégis olyan hasznos összefüggéseket fejeznek ki explicit formában, amelyek az egyenesvonalú mozgással kapcsolatos feladatok megoldásának kiindulópontjául szolgálhatnak.

Kiindulásul vegyünk fel egy egydimenziós koordinátarendszert, amelynek tengelye a vizsgált részecske mozgásának irányába mutat. Bár a későbbiekben általánosabb esetekkel is foglalkozunk, most szorítkozzunk az *állandó gyorsulású* mozgások vizsgálatára. Ez a mozgás elég gyakori, így mozognak például a Föld közelében szabadon eső testek, amelyek *g* gyorsulása állandó (feltéve természetesen, hogy a légellenállás elhanyagolható). A következőkben a jelölések egyszerűsítésére az időmérés $t_0 = 0$ kezdeti időpontot mindig a mozgás kezdetével azonosítjuk. Azért, hogy a megoldás a legáltalánosabb kezdeti feltételeket kielégítse, feltesszük, hogy t_0 kezdeti időpontban adott az x_0 kezdeti elmozdulás és v_0 kezdeti sebesség. Állandó gyorsulású mozgások esetén az *a* pillanatnyi gyorsulás megegyezik az $a_{átl}$ átlagos gyorsulással:



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0} = \frac{v - v_0}{t}$$

amiből átrendezéssel a

$$\boxed{v = v_0 + at \qquad \text{(állandó } a \text{ esetén)}} \qquad \textbf{(2-7)}$$

összefüggéshez jutunk. Ez a kinematikai feladatok megoldásában rendkívül hasznos un. első kinematikai egyenlet. Ha ezt a sebesség – idő összefüggést grafikusan ábrázoljuk (2-12 ábra), akkor a kapott egyenesből geometriai megfontolásokkal megkaphatjuk, hogy hogyan változik a részecske helyzete az időben. Gondolkozzunk a következőképpen. Legyen a $t_0 = 0$ időpontban a kezdősebesség v_0. Egy későbbi t időpontban a sebességet a $v = v_0 + at$ egyenes adja, amelynek meredeksége éppen $a = \Delta v/\Delta t$. Az ábrán az egyenes alatti satírozott terület két részre bontható. Az alsó, sötétebb téglalap területe v_0t, a fölső, enyhébben árnyékolt háromszög területe pedig $1/2(v-v_0)t$. Összeadva ezeket a területeket, azt kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix}\text{Az egyenes alatti} \\ \text{teljes terület}\end{bmatrix} = v_0t + \frac{1}{2}(v - v_0)t = \left(v_0 + \frac{v}{2} - \frac{v_0}{2}\right)t$$

$$\text{Terület} = \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)t$$

Az utóbbi formulában a zárójelben éppen a kezdeti és a végsebesség átlaga szerepel, ami a gyorsulás állandósága miatt a $v_{átl} = \Delta x/\Delta t$ átlagsebesség - vektorral egyenlő. Felhasználva, hogy $t_0 = 0$ következtében fennáll a $\Delta t = t$- összefüggés, a $\Delta x = x - x_0$, valamint a $\Delta x = v_{átl}t$ formulák egybevetéséből azt kapjuk, hogy

$$x - x_0 = \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)t \qquad \text{(állandó } a \text{ esetén)} \qquad \textbf{(2-8)}$$

Összehasonlítva a két utolsó egyenletet, látható, hogy az $x - x_0$ eredő elmozdulás megegyezik a $v = v(t)$ grafikon alatti területtel. Az eredő elmozdulás és a sebesség – idő függvényábra alatti terület[5] egyezése nemcsak állandó gyorsulású mozgásokra, hanem általánosan is igaz, és akkor is felhasználható, ha bonyolult esetekben a sebesség, nem-lineáris függvénye az időnek.

Behelyettesítve a (2-7) egyenletbe a $v = v_0 + at$ összefüggést, majd az eredményt átrendezve megkapjuk a második kinematikai egyenletnek nevezett formulát:

---

[5] A függvényt ábrázoló görbe alatti terület dimenziója a változók által reprezentált fizikai mennyiségek dimenziójának szorzata. Például a 2-11 ábrán *sebességet* szorzunk *idővel*, hogy területet kapjunk, ami most *hosszúság* dimenziójú:

$$\left[\frac{\text{hossz}}{\text{idő}}\right][\text{idő}] = [\text{hossz}]$$

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{(állandó gyorsulás esetén)}} \qquad \textbf{(2-9)}$$

A harmadik szintén nagyon hasznos kinematikai egyenlethez úgy juthatunk el, ha a (2-7) és (2-9) egyenletekből elimináljuk az időt. Eredményül a

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad \text{(állandó } a \text{ esetén)}} \qquad \textbf{(2-10)}$$

formulát kapjuk.
Ez utóbbi összefüggés olyan feladatok lehet hasznos, amelyekben az időt nem ismerjük.

A kinematikai egyenletek tovább egyszerűsíthetők, ha a koordinátarendszer kezdőpontját ott vesszük fel, ahol a részecske a $t_0 = 0$ időpontban tartózkodik. Ekkor $x_0 = 0$ és így két kinematikai egyenlet is egyszerűbbé válik. Természetesen az origó nem mindig választható meg így, amennyiben azonban ez lehetséges, akkor már kezdettől fogva eggyel kevesebb paraméterrel kell dolgoznunk.

Mivel a **kinematikai egyenletek** a továbbiakban rendkívül hasznosak, mégegyszer összefoglaljuk őket. *Minden egyenesvonalú, egyenletesen gyorsuló mozgással kapcsolatos probléma a következő három egyenlet felhasználásával oldható meg:*

Az egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás kinematikai egyenletei

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2a(x - x_0) \end{aligned}\right\} \text{(állandó gyorsulás esetén)} \qquad \begin{aligned} &\textbf{(2-11)} \\ &\textbf{(2-12)} \\ &\textbf{(2-13)} \end{aligned}$$

További hasznos összefüggéseket kaphatunk az átlagsebesség felhasználásával. Ha a gyorsulás állandó, akkor:

$$v_{\text{átl}} = \frac{v_0 + v}{2} \qquad \textbf{(2-14)}$$

$$x = x_0 + v_{\text{átl}} t \qquad \textbf{(2-15)}$$

A fenti egyenletek – mint már hangsúlyoztuk – csak állandó gyorsulás mellett érvényesek. Ha a gyorsulás időben változik, akkor az integrálszámítás felhasználásával nyerhetünk a sebességre és a helykoordinátára vonatkozó összefüggéseket (2-6, 2-7 példa). Megjegyezzük még, hogy bár a helykoordináta jelölésére mindig x-et használtunk, természetesen hasonló egyenletek írhatók fel az y és z irányú egyenesvonalú mozgásokra is.

Megjegyzés az előjelekre vonatkozóan: A kinematikai egyenleteket mindig pontosan a (2-11) – (2-15) formulákkal megadott alakban kell felírni. A kinematikai egyenletek ugyanis bármely koordinátarendszerben azonos formában érvényesek, *tekintet nélkül arra, hogy milyen irányt választottunk pozitívnak, ill. negatívnak.* Egy speciális koordinátarendszer kiválasztása (s ezzel együtt a tengelyirányok kijelölése) tehát nem változtat az általános kinematikai egyenletekben szereplő mennyiségek közötti kapcsolatokon. A koordinátarendszer választás csak az adatok, ill. a paraméterek előjelét befolyásolja.

A szabadon eső testek gyorsulás-vektora például mindig lefelé mutat. E vektor nagyságát mindig g jelöli.

A gravitációs gyorsulás
a föld felszínén[6] $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$
(három értékes jegyre)

Amennyiben a felfelé mutató irányt választjuk pozitívnak, akkor a gravitációs gyorsulás helyére a képletekben $-g$-t kell írni, ha választásunk szerint a lefelé mutató irány a pozitív, akkor a gyorsulás $+g$-vel egyenlő.

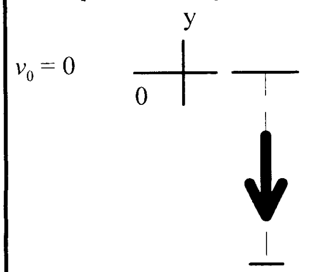
2-5 PÉLDA

Kezdősebesség nélkül elejtettünk egy labdát. A gravitációs gyorsulás 9,81 m/s² · Hol lesz a labda abban a pillanatban, amikor sebessége 4,9 m/s. Oldjuk meg a problémát úgy is, hogy a felfelé mutató irányt választjuk pozitívnak és úgy is, hogy a lefelé mutatót.

MEGOLDÁS

A függőleges mozgások esetén a hely jelölésére az y-t használjuk. A koordinátarendszer origója legyen abban a pontban, ahol a labda a $t_0 = 0$ időpillanatban volt. Ekkor a kezdeti helyzet y_0 koordinátája zérus. A választott pozitív irányt egy rövid, a pozitív irány felé mutató tengelydarabkával jelöljük.

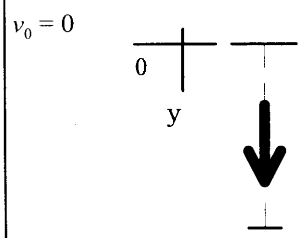
A pozitív irány felfelé mutat



Feltételezve, hogy a *felfelé* mutató irány pozitív, a labda gyorsulása $a_y = -9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

Adatok: $a_y = -9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$
$v_0 = 0$
$v = -4{,}9\ \mathrm{m/s}$
$y = ?$

A pozitív irány lefelé mutat



Feltételezve,hogy a *lefelé* mutató irány pozitív, a labda gyorsulása $a_y = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

Adatok: $a_y = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$
$v_0 = 0$
$v = 4{,}9\ \mathrm{m/s}$
$y = ?$

Összehasonlítva ezeket a mennyiségeket a kinamatikai egyenletekkel észrevehetjük, hogy a (2-13) egyenletben a keresett ismeretlen kivételével minden más mennyiség értékét ismerjük. Így mindkét esetben ugyanazt a kinematikai egyenletet kell felírnunk.

Általános egyenlet

$$v^2 = v_0^{\,2} + 2a(y - y_0)$$

Általános egyenlet

$$v^2 = v_0^{\,2} + 2a(y - y_0)$$

---

[6] Ha másképpen nem rendelkezünk, akkor a tankönyv további részében g-t mindig a fenti értékkel vesszük egyenlőnek. Valójában a Föld forgása miatt g-nek a tenger szintjén mért értéke is változik a földrajzi szélességgel. Ezt a „centrifugális" hatást a 14. fejezetben tárgyaljuk. A g földrajzi szélességgel való változásához az is hozzájárul , hogy a tengerszintnek a Föld középpontjától mért távolsága is változik.

Figyeljük meg, hogy bár előre tudjuk, hogy a baloldali – oszlopban y értéke negatív lesz, mégsem vesszük figyelembe ezt a negatív előjelnek a képletekben való feltüntetésével. A képlet a pozitív irány kiválasztásától függetlenül érvényes. A végeredmény negatív előjelét maga a megoldás adja.

A számértékek behelyettesítése	A számértékek behelyettesítése
$\left(-4{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 0^2 + 2\cdot\left(-9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(y-0)$	$\left(4{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 0^2 + 2\cdot\left(9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(y-0)$
$24{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \left(-19{,}62\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)y$	$24{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \left(19{,}62\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)y$
Megoldva y-ra	**Megoldva y-ra**
$y = \dfrac{24{,}0\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{-19{,}62\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = -1{,}22\,\mathrm{m}$	$y = \dfrac{24{,}0\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{19{,}62\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1{,}22\,\mathrm{m}$
Mivel a *felfelé* mutató irányt választottuk pozitívnak a negatív előjel azt fejezi ki, hogy a labda 1,22 m-rel kiindulópontja *alatt* éri el a megadott sebességet.	Mivel a *lefelé* mutató irányt választottuk pozitívnak a pozitív eredmény azt jelenti hogy a labda 1,22 m-rel kiindulópontja *alatt* éri el a megadott sebességet.

2.8 A kinematikai egyenletek levezetése differenciálszámítással

A kinematikai egyenletek az differenciál- és integrálszámítás felhasználás nagyon egyszerűen kaphatók meg. Ez a levezetés azonban csak azok számára lesz érthető, akik az integrál fogalmával és néhány műveleti szabállyal tisztában vannak. (A könyvünkben felhasznált integrálási formulákat a G függelék tartalmazza.)

A

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad \text{és} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

definiáló egyenletek a deriválási művelet megfordításával az integrálással a

$$x = \int v dt \qquad \text{és} \qquad v = \int a dt$$

alakban is kifejezhetők. *Állandó gyorsulás* esetén a sebességre

$$v = \int a dt = a\int dt = at + C_1$$

adódik, ahol a C_1 integrálási állandó a „kezdeti feltételek" figyelembevételével határozható meg, azaz $t = 0$ időpontban a sebesség $v = v_0$. Behelyettesítve a kezdeti feltételt a,

$$v = at + C_1$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$v_0 = (a)\cdot(0) + C_1$$

ahonnan $C_1 = 0$. Ezzel éppen az első kinematikai egyenlethez jutottunk:

$$\boxed{v = v_0 + at \qquad \text{(állandó } a \text{ esetén)}}$$

Tovább léphetünk a levezetésben, ha a sebességre kapott kifejezést behelyettesítjük a helykoordinátát meghatározó integrálba.

$$x = \int v dt = \int (v_0 + at) dt$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 + C_2$$

A C_2 integrálási állandót ismét a kezdeti feltételekből határozhatjuk meg, azaz abból, hogy $t = 0$ időpontban a mozgó test az x_0 helyen van. Ebből azonnal adódik a második kinematikai egyenlet:

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad \text{(állandó gyorsulás esetén).}}$$

Az első tag a részecske kezdeti helyzete, azaz a helykoordináta a $t = 0$ időpontban, a másik két tag összege pedig éppen a $(0, t)$ időintervallum alábbi eredő elmozdulás. Az eredmény megegyezik a geometriai megfontolások alapján levezetett 2-12 egyenlettel. Ezen nem is csodálkozhatunk, mert a kétféle levezetés – a grafikus és az analitikus – lényegében egyenértékű, hiszen az integrál geometriai jelentése éppen a görbe alatti terület. A harmadik kinematikai egyenlet az első kettőből pusztán algebrai átalakítással adódott, ezért a differenciálszámítás alkalmazása itt nem szükséges.

2-6 PÉLDA

Egy a $t = 0$ időpillanatban a koordinátarendszer origójából induló részecske a pozitív x tengely mentén mozog. Helyzete az idő függvényében az

$$x = 4t^3$$

függvény szerint változik, ahol x értékét méterben t értéket másodpercben mérjük. Határozzuk meg a) a v sebességet, b) és az a gyorsulást a $t = 2$ s időpontban.

MEGOLDÁS

a) Mivel $v = dx/dt$, deriváljuk az $x = x(t)$ összefüggést az idő szerint. (A deriválási szabályokat a G függelék tartalmazza.)

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4t^3\right) = 12t^2$$

ahol v értékét m/s-ban, t értékét másodpercben mérjük.
Vegyük észre, hogy a 12 együttható mértékegysége m/s^3, ami abból adódik, hogy az egyenletnek dimenzióra nézve helyesnek kell lennie. A $t = 2$ s időpontban a sebesség behelyettesítésével:

$$v = \left(12\frac{\text{m}}{\text{s}^3}\right)(2\,\text{s})^2 = \boxed{48{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

b) A gyorsulást a sebesség-idő függvény deriváltja adja.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(12t^2\right) = 24t$$

ahol a értéket m/s^2-ben, t értéket másodpercben mérjük
Az egyenletben szereplő 24 együttható mértékegysége m/s^3, ami szintén abból következik, hogy az egyenletnek dimenzióra helyesnek kell lennie. A gyorsulás értéke a $t = 2$ s időpontban:

$$a = \left(24\frac{\text{m}}{\text{s}^3}\right)(2\,\text{s}) = 48\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

2-7 PÉLDA

Egy szánkón csúszó, nagy gyorsulások hatásának vizsgálatára szolgáló kísérleti rakéta az

$$a = 3t + 5$$

összefüggés szerint gyorsul. Milyen messzire jut el $t = 2$ s időtartam alatt?

MEGOLDÁS

A koordinátarendszer origóját vegyük fel a szán kiinduló helyzetében, azaz $t = 0$ időpontban $x_0 = 0$ és $v_0 = 0$. Az $a = \frac{dv}{dt}$ összefüggésből következik, hogy

$$dv = adt$$

Helyettesítsük be az $a = (3t+5)$ összefüggést és integráljuk[7] az egyenlet mindkét oldalát:

$$\int_0^v dv = \int_0^t (3t+5)\,dt,$$

$$v_0^v = \left[\frac{3t^2}{2} + 5t\right]_0^t$$

$$v - 0 = \left(\frac{3t^2}{2} + 5t\right) - \left(\frac{3(0)^2}{2} - 5(0)\right) \qquad \textbf{(2-16)}$$

$$v = \frac{3t^2}{2} - 5t\,.$$

A sebesség $v = \frac{dx}{dt}$ definíciójából adódik, hogy $dx = vdt$. Írjuk be az utóbbi összefüggésbe a v függvényre kapott (2-16) eredményt és integráljuk az egyenletet a $t = 0$, $x_0 = 0$ kezdeti feltétellel!

$$\int_0^x dx = \int_0^t \left(\frac{3t^2}{2} + 5t\right)dt,$$

$$[x]_0^x = \left[\frac{3t^3}{6} + \frac{5t^2}{2}\right]_0^t$$

$$x - 0 = \left(\frac{t^3}{2} + \frac{5t^2}{2}\right) - \left(\frac{(0)^3}{2} + \frac{5(0)^2}{2}\right)$$

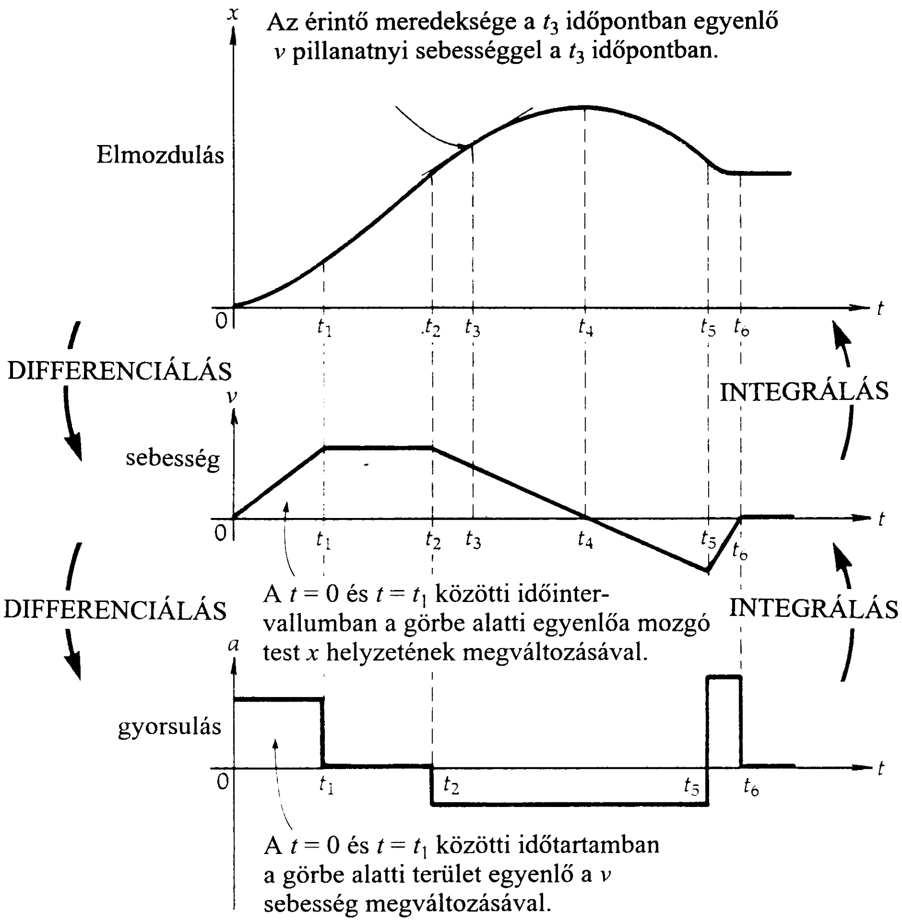
$$x(2) = \frac{t^3}{2} - \frac{5t^2}{2}$$

$t = 2$ esetén

$$x = \frac{(2)^3}{2} - \frac{5(2)^2}{2} = \boxed{14{,}0\,\mathrm{m}}$$

[7] A hatványfüggvény integrálási szabálya(G-II Függelék)

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$$



2-13 ábra

Az ábra bemutatja az origóból a zérus kezdősebességgel induló és a pozitív x tengely mentén mozgó test elmozdulás-, sebesség- és gyorsulás- idő függvényét. A $t = 0$ és $t = t_1$ közötti időtartamban az elmozdulás-időgörbe meredeksége egyenletesen nő, és ennek megfelelően nő a sebesség is. A t_1 és t_2 intervallumban a görbe meredeksége állandó, ezért a sebesség is konstans. A t_4 időpontban az elmozdulás-időgörbe meredeksége zérus, így a sebesség is zérus. A $(t_4–t_5)$ időintervallumban az elmozdulás- időgörbe meredeksége negatív, így itt a sebesség is negatív. Végül t_6 időpont után a test nyugalomba kerül, tehát a sebesség is zérus. Az ábra jól mutatja, hogy a sebesség az elmozdulás-idő függvényábra meredekségével egyenlő ($\Delta x/\Delta t = v$). A sebesség-idő görbe meredeksége pedig a gyorsulás ($\Delta v/\Delta t$) = 0.

Integrálással fordított irányban végezhetjük a műveleteket. Kezdetben a gyorsulás állandó. Az idő múlásával a gyorsulás-idő ábra alatti terület adja a sebességet (amelynek értéke kezdetben zérus). Mivel a terület egyenletesen nő, a sebesség változását egy egyenes szemlélteti. Hasonlóképpen a sebességgörbe alatti terület növekedése meghatározza a elmozdulás-idő függvényt. (Ez utóbbi szintén zérusról indul. Megmutatható, hogy mivel a sebesség-idő görbe egyenes vonal, az elmozdulás parabolikusan változik az idővel.) A t_4 és t_6 közötti időtartamban a sebességgörbe az y tengely alá kerül, így a görbe alatti terület negatív, ez azt jelenti, hogy az elmozdulás csökken. Példánkban a sebességgörbe alatti teljes terület pozitív, ezért az elmozdulás végső értéke is pozitív. A gyorsulásgörbe alatti összterület zérus, azaz a végsebesség – miként a kezdeti is – zérus.

2.9 Az elmozdulás, sebesség és gyorsulás közötti összefüggés grafikus értelmezése

Az $x(t)$, $v(t)$ és $a(t)$ mennyiségek grafikus ábrázolása érdekes és hasznos összefüggések felismerésére vezet. Tegyük fel, hogy ismerjük egy adott mozgás $x(t)$ elmozdulás-idő függvényét. A sebesség, mint megállapítottuk, az $x(t)$ függvény időszerintideriváltja, azaz minden pillanatban megegyezik az $x(t)$ függvénygörbéhez húzott *érintő meredekségével* (2-13 ábra). Hasonlóképpen a gyorsulást egy adott pillanatban a sebesség-idő függvénygörbe *érintőjének meredeksége* adja meg. Ezek az összefüggések lehetővé teszik a sebesség – idő és gyorsulás – idő függvények görbéinek grafikus meghatározását a hely – idő függvénygörbe alapján.

Az eljárás azonban fordítva is működik. Egy függvény integrálása geometriailag a *függvénygörbe alatti terület meghatározása*. Így adott v(t) sebesség-idő függvény esetén az elmozdulás-idő függvényt úgy kaphatjuk meg, hogy a sebesség-idő görbe alatti területet a $t = 0$ időponttól kezdve ábrázoljuk az idő függvényében. (Ez az eljárás nem adja meg a kezdő pont x_0 koordinátáját, hiszen ez a kezdeti feltételekből adódó integráiási állandó. Fizikailag x_0 értéke a koordinátarendszer kezdőpontjának megválasztásától függ.) Az $a(t)$ gyorsulás-idő függvényből a fentiekhez hasonlóan kaphatjuk meg a sebesség-idő függvényt.

2.10 A dimenzióanalízis

Alapvetően a fizikai egyenletek csak akkor teljesülhetnek, ha a bennük szereplő tagok **dimenziója** azonos. Ennek alapján egy egyenlet „összhangja" ellenőrizhető. Mit jelentenek a dimenziók? A sebesség dimenzióját például úgy kapjuk, hogy hosszúságot osztunk idővel. Ezt [v] = [L/T] összefüggéssel jelöljük. Vegyük észre, hogy a dimenzió nem azonos a mértékegységgel! A *hosszúság* és *idő* dimenziót jelent, amelyek mértékegysége pl. méter, kilométer, ill. másodperc, óra, év stb. Ahogyan a hétköznapi életben almákat nem adhatunk össze autókkal, ugyanúgy a fizikai egyenletekben sem adhatók össze nem „összeillő" tagok. Az egyenletekben csak *azonos dimenziójú tagok szerepelhetnek.*

Példaként vizsgáljuk meg a dimenziók egyezése szempontjából a következő kinematikai egyenletet.

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Dimenziók: $$[L] = [L] + \left[\frac{L}{T}\right][T] + \frac{\left[\frac{L}{T}\right]}{[T]}\left[T^2\right]$$

Az egyenletben szereplő numerikus együtthatóknak (a jobb oldal utolsó tagjában 1/2) nincs dimenziójuk, így a dimenzióanalízis szempontjából nincs jelentőségük, elhagyhatók. A dimenziókkal az algebrai mennyiségekhez hasonlóan számolhatunk. Az azonos dimenziókkal, pl. törtet egyszerűsíthetünk, így adott esetben azt kell kimutatnunk, hogy az egyenlet minden tagja hosszúság dimenziójú.

$$[L] = [L] + \left[\frac{L}{T}\right][T] + \left[\frac{L}{T^2}\right]\left[T^2\right]$$

$$[L] = [L] + [L] + [L]$$

A dimenzióanalízis a feladatmegoldás során a számolási és egyes esetekben az elvi hibák felderítésének hasznos módszere. Amennyiben egy egyenletben nem összeillő dimenziók szerepelnek, hibát követtünk el. Természetesen a dimenzióbeli egyezés még nem biztosíték arra, hogy helyesen számoltunk, hiszen a dimenzió nélküli számértékekben tévedhettünk.

2.11 Példák – magyarázattal

A fizika tankönyvek példái első pillantásra gyakran unalmasnak és együgyűnek tűnnek. Semmi izgalmat nem érzünk, ha azt kell kiszámítanunk, hogy hová jut el 2 s alatt egy elhajított tárgy, vagy mennyi idő alatt csúszik le a lejtőn egy jégdarab. Az adott feladatok mögött azonban figyelmet lekötő gondolatok, rejlenek. A newtoni mechanika az alkotó emberi szellem egyik csúcsteljesítménye. A mechanika tanulás kezdetén azonban – ahhoz, hogy a fizikai gondolat élesen kirajzolódjék – egyszerű, a lényegtelen részletek özönétől mentes problémákkal kell foglalkoznunk. Így mindig rá tudunk mutatni az adott probléma leírása mögött húzódó *gondolkozási módszerre* is. Ez az a módszer, ami pl. lehetővé tette, hogy ember lépjen a Holdra!

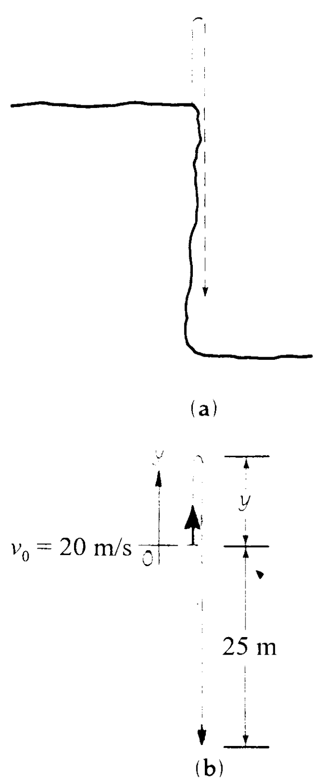
Ebben a fejezetben olyan példákat választottunk, amelyek megoldási módszere tetszőleges kinematikai feladat megoldására alkalmazható. A megoldások elkerülhetetlenül hosszadalmasak és részletesek, hiszen „hangosan gondolkozunk", hogy megmutassuk a mechanikai problémák megoldására használható általános módszereket. Természetesen az olvasótól (diáktól) nem várunk hasonló részletességgel kidolgozott feladatmegoldásokat. A „jó matematikai stílus" azonban éppoly természetes követelmény, mint az irodalmi esszékben a szép magyar fogalmazás. Gyakran néhány magyarázó szó elegendő ahhoz, hogy egy feladat gondolatmenete könnyen követhető legyen. Alkalmazzuk ezeket a magyarázatokat. (Emlékeztetünk arra a sok bosszúságra, amit a túlságosan tömören megírt tankönyvek megértése okoz.) Legyen a megoldás minden lépése kristálytiszta! *Különösen fontos, hogy a kezdeti lépés világos legyen, s biztosan kiderüljön, hogy a megoldás milyen alapelvre épül fel.* Ez azzal a további előnnyel is jár majd, hogy a tanulás során mindenki egyre logikusabban rendezi gondolatait, s a házifeladatok megoldása is könnyebbé válik.

2-8 PÉLDA

Egy labdát a 2-14/a ábrán látható módon 20 m/s sebességgel felfelé hajítottunk egy szakadék széléről. A nehézségi gyorsulás értékét vegyük 10 m/s^2-nek! a) Milyen magasra emelkedik a kiinduló ponttól a labda? b) Mennyi idő múlva lesz a labda 25 m-rel kezdeti helyzete alatt?

MEGOLDÁS

1. Ismerjük fel a *feladattípust*; a labda egyenesvonalú, egyenletesen gyorsuló mozgást végez, tehát alkalmazhatók a kinematikai egyenletek!
2. Készítsünk *vázlatot* a feladathoz ! (2-13/b ábra) Vegyünk fel egy függőlegesen felfelé mutató y tengelyű koordinátarendszert! Az origó legyen a labda elhajítási helye!
3. Állítsuk össze az ismert adatokat és az ismeretleneket! (Ügyeljünk arra, hogy összeillő mértékegységeket használjunk! Ez most nem okoz gondot, mert az adatok SI-mértékben vannak megadva.)



2-14 ábra
2-8 példához

a) Határozzuk meg először, hogy milyen magasra jut a labda! „Részproblémaként" a pályájának csúcspontján zérus végsebességet elérő, felfelé hajított labda problémájával kell foglalkoznunk.

$y_o = 0$

$v_o = 20$ m/s

$a = -10\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (Az y irányt felfelé választottuk pozitívnak, ezért a lefelé mutató gyorsulás negatív.)

$v = 0$

$y = ?$

4. *Hasonlítsuk össze az adatokat és az ismeretleneket a kinematikai egyenletekben szereplő mennyiségekkel!* Megállapítható, hogy a (2-13) egyenletben a keresett távolság kivételével minden más paramétert ismerünk. Írjuk fel az általános képletet, oldjuk meg y-koordinátára, majd helyettesítsük be az adatokat[8]!

$$v^2 = v_0^{\ 2} + 2a(y - y_0)$$

$$y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} + y_0 = \frac{0 - (20)^2\ \dfrac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2\left(-10\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} + 0 = 20\,\text{m}$$

b) Most azt a teljes időtartamot keressük, amit a labda a levegőben tőlt, mindaddig amíg 25 m-rel a kiindulásipont alá érkezik. Vegyük észre, hogy a mozgást nem szükséges két részre bontani. Nem kell tehát először meghatározni azt az időtartamot, amíg a labda a csúcspontra ér, majd ehhez hozzáadni a csúcspontból való esés idejét. *A kinematikai egyenletek, függetlenül attól, hogy a labda felfelé vagy lefelé mozog, mindaddig változatlan formában érvényesek, amíg a labda pusztán a gravitáció hatására mozog.* Így a kezdő- és véghelyzet koordinátáját a képletbe beírva a kapott egyenletből meghatározható a mozgás időtartama anélkül, hogy bármilyen közbülső idő tartamot figyelembe kellene venni. A b) kérdés természetesen új problémát vet fel, ekkor a végsebesség már nem zérus az $y = -25$ m helyzetben, s a meghatározandó ismeretlen a t idő.

$y_o = 0$

$v_o = 20$ m/s

$a = -10$ m/s²

$y = -25$ m

$t = ?$

$v = ?$

(Ha ezt az új adatsort hasonlítjuk össze a kinematikai egyenletekkel, akkor megállapíthatjuk, hogy a (2-12) egyenletben a t idő az egyetlen ismeretlen paraméter. Mint mindig, ismét az általános egyenlettel kezdjük.)

Az általános egyenlet: $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Az egyenlet másodfokú, ezért először t csökkenő hatványai szerint rendezzük, majd behelyettesítjük az adatok számértékeit:

$$y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0$$

[8] Ezt a lépést illetően két iskola létezik. A tanárok egy része amellett van, hogy a feladatot először paraméteresen oldjuk meg, s a számértékeket csak a végén helyettesítsük be. („Kevesebb a hiba, ha betűkkel számolunk, mint ha numerikusan.") Mások azt javasolják, hogy a számértékeket azonnal helyettesítsük be a kiinduló egyenletekbe. („Szabaduljunk meg azonnal a zérus értékű tagoktól, és szerezzünk gyakorlatot a hibátlan numerikus számolásban!") E módszerek között a könyvet tanító tanárok bizonyára választanak majd.

$$\frac{1}{2}(-10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})(t^2)+(20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})(t)+[0-(-25\ \mathrm{m})]=0$$

Egyszerűsítve, majd tényezőkre bontva az egyenletet[9], azt kapjuk, hogy

$$t^2-4t-5=0 \quad \text{(ahol } t\text{-t másodpercben mérjük)}$$
$$(t-5)(t+1)=0$$
$$t=5\ \mathrm{s} \quad \text{és} \quad t=-1\mathrm{s}.$$

Mivel a kinematikai egyenlet a mozgást csak $t > t_0$ esetére írja le, ebben a példában az egyenlet negatív gyökének nincs fizikai értelme. A megoldás tehát

$$\boxed{t=5{,}00\ \mathrm{s}.}$$

Hamis gyökök

A kinematikai feladatok megoldásakor – amint az előző példában adódó $t = -1$ is mutatja – gyakran kapunk olyan megoldást, amelynek nincs fizikai értelme. A másodfokú egyenlet negatív gyöke fizikailag a következő feladat megoldásaként értelmezhető. Egy labdát az $y = 0$ pont alatt 25 m-rel függőlegesen felfelé hajítottunk. A labda a $t = 0$ időpillanatban 20 m/s sebességgel érkezett az $y = 0$ pontba. Mennyi idővel ezelőtt hajítottuk el a labdát? Ilyen és hasonló problémák általában másodfokú egyenletre vezető feladatok megoldásakor merülnek fel. (A kinematikában többnyire akkor, ha az idő az ismeretlen.) A $t = 0$ időpontnak, mint a mozgás kezdetének a megválasztásával rögzítjük azokat a kezdeti feltételeket, amelyek mellett a kinematikai egyenletek meghatározzák a mozgás lefolyását. A kinematikai egyenletek azonban a *t = 0 időpillanat előtt, azaz a múltra vonatkozóan is teljesülhetnek – ha az egyéb feltételek változatlanok.* A 2-8 példában azonban ezek nem teljesülnek.

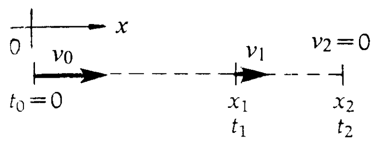
Egyes feladatokban azonban mindkét megoldás *értelmes lehet.* Ha például azt kérdeztük volna, hogy mikor lesz a labda 9,5 m magasan az elhajítás helye felett, akkor két megoldást kaptunk volna, amelyek mindegyike helyes és kielégíti a feladat feltételeit. A labda ugyanis felfelé haladva és visszafelé esve is átmegy ezen a ponton, s ez két különböző időpillanatban következik be. *Minden olyan feladatban, amelynek megoldása során több végeredményt kapunk, a fizikai feltételeket kell megvizsgálnunk, s ennek alapján kell elfogadni vagy elvetni a megoldásokat.*

2-9 PÉLDA

Egy gépkocsi 54 km/ó sebességről 4 m/s² lassulással egyenletesen lefékez. a) Mekkora utat tesz meg a fékezés első két másodpercében? b) Mekkora sebességgel mozog a 2 s időtartam végén az autó? c) Mennyi idő alatt áll meg a gépkocsi? d) Mekkora a teljes fékút?

MEGOLDÁS

A gépkocsi mozgása egyenesvonalú, egyenletesen gyorsuló mozgás, tehát alkalmazhatók a kinematikai egyenletek. Készítsünk először



2-15 ábra
2-9 példához

[9] Ha a szorzattá alakítás „ránézésre" nem megy, akkor a másodfokú egyenlet általános megoldóképletét használjuk a gyökök meghatározására (E Függelék).

Ha $ax^2+bx+c=0$, akkor $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

vázlatot a mozgásról, vegyünk fel olyan koordinátarendszert, melynek kezdőpontjában van a gépkocsi $t = 0$ időpontban. (2-15 ábra) Két különböző távolságot kell bejelölnünk, az a) és b) kérdés az első két másodpercben megtett úttal, a c) és d) pedig a teljes fékúttal kapcsolatos. A továbbiakban az „1" index az első, a „2" index pedig a második szakaszra vonatkozik.

a) Legyen x_1 a $t_1 = 2$ s alatt megtett út. A mértékegységek egyeztetésére az 54 km/ó kezdősebességet m/s-egységekre számítjuk át. Ehhez az (1 m/s)(3,6 km/ó) átszámítási tényezővel kell megszorozni az 54 km/ó sebességet.

$$v_o = 54\ \frac{\text{km}}{\text{ó}} \underbrace{\left(\frac{1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{ó}}} \right)}_{\text{átszámítási tényező}} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A gépkocsi lassul, tehát gyorsulása negatív. Állítsuk össze az ismert adatokat és az ismeretleneket:

$a = -5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$t_1 = 2$ s

$x_o = 0$

$x_1 = ?$

(Látható, hogy a (2-12) egyenletből a keresett távolság meghatározható. Így induljunk ki ebből a képletből és helyettesítsük be az adatokat!)

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x_1 = 0 + (15\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}})(2\,\cancel{\text{s}}) + \frac{1}{2}\left(-5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(4\ \text{s}^2) = 30\ \text{m} - 10\ \text{m} = 20\ \text{m}$$

b) Az első 2 s elteltével az autó sebességét a (2-10) egyenletből határozhatjuk meg. Behelyettesítve az adatokat:

$$v_1 = v_0 + a t_1$$

$$v_1 = 15\frac{\text{m}}{\text{s}} + (-5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(2\,\cancel{\text{s}}) = (15 - 10)\frac{\text{m}}{\text{s}} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) A megállás pillanatára vonatkozóan (c) és d) kérdés) a következő adatokkal és ismeretlenekkel kell dolgoznunk:

$v_o = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$v_2 = 0$

$a = -5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$t_2 = ?$

$x_o = 0$

$x_2 = ?$

A kinematikai egyenleteket áttekintve látható, hogy (2-11)-ből a kérdéses idő meghatározható. A

$$v_2 = v_o + a t_2$$

képletből indulva, s kifejezve t_2-t behelyettesíthetjük az adatok számértékét:

$$t_2 = \frac{v_2 - v_o}{a} = \frac{0 - 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{-5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3\ \text{s}$$

d) Minthogy a fékezési időt már meghatároztuk, az x_2 fékutat akár a (2-12), akár a 2-13 képletből kifejezhetjük. Példaként a (2-13) képletet írjuk fel. Kifejezve x_2-t és behelyettesítve az adatokat, azt kapjuk, hogy:

$$v_2^{\,2} = v_0^{\,2} + 2a(x_2 - x_0)$$

$$x_2 = \frac{v_2^2 - v_o^2}{2a} - x_o = \frac{0-\left(15\ \frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}}\right)^2}{2\left(-5\ \frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}^2}\right)} - 0 = 22{,}5\ \mathrm{m}$$

2-10 PÉLDA

Egy motoros 180 km/ó sebességgel száguld az autópályán, ahol a maximális megengedett sebesség 120 km/ó. Egy útjelző tábla mögött álló rendőrmotoros észleli ezt, és abban a pillanatban, amint a száguldó motoros a tábla mellett elhalad, nyugalomból indulva egyenletes gyorsulással utána ered. Mennyi idő alatt éri utol, ha gyorsulása 5 $\mathrm{m/s^2}$?

MEGOLDÁS

A megoldás első lépéseként vegyünk fel egy koordinátarendszert, melynek kezdőpontja az útjelző táblánál van és *x* tengelye a mozgás irányába mutat. (2-16 ábra). Az *M* index a motoros, a *P* index pedig a rendőr mozgásának adatait jelöli.

A következő feladat a sebesség értékegységének átszámítása $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ egységre.

$$(v_{\mathrm{M}})_o = \left(180\ \frac{\cancel{\mathrm{km}}}{\cancel{\mathrm{ó}}}\right)\underbrace{\left(\frac{1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3{,}6\ \frac{\cancel{\mathrm{km}}}{\cancel{\mathrm{ó}}}}\right)}_{\text{átszámítási tényező}} = 50\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Csoportosítsuk az ismert adatokat és az ismeretleneket:

Motoros	Rendőr
$(v_{\mathrm{M}})_o = 50\ \mathrm{m/s}$	$(v_{\mathrm{P}})_o = 0$
$a_M = 0$	$a_P = 5\ \mathrm{m/s^2}$
$v_M = 50\ \mathrm{m/s}$	$v_{\mathrm{P}} = ?$
$x_M = ?$	$x_P = ?$
$t_M = ?$	$t_P = ?$

A 2-16 ábra vázlata jól mutatja, hogy a motoros és a rendőr ugyanakkora utat tesz meg a találkozásig, s a két mozgás időtartama is egyenlő. Így a t idő esetén az indexeket elhagyhatjuk. Mindkét esetben a (2-12) egyenlet alkalmazható, és mivel az elmozdulások egyenlők

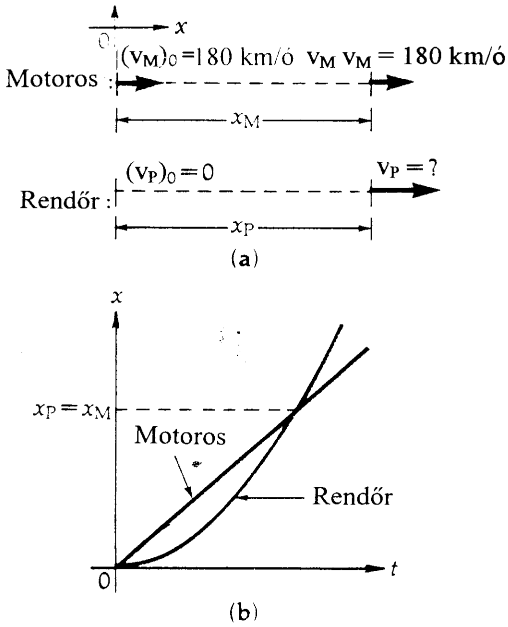
$$x_m = x_p\,;$$

$$(v_{\mathrm{m}})_0 t + \frac{1}{2}a_m t^2 = (v_{\mathrm{P}})_0 + \frac{1}{2}a_p t^2$$

összefüggés adódik. Rendezve, majd *t*-re megoldva az egyenletet, az adatok behelyettesítésével a

$$\frac{1}{2}(a_M - a_P)t^2 = \left((v_{\mathrm{P}})_0 - (v_{\mathrm{M}})_0\right)t$$

2-16 ábra
2-10 példához



$$t = \frac{\left[(v_P)_O - (v_M)_O\right]}{\frac{1}{2}(a_M - a_P)} = \frac{0 - 50\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{1}{2}\left(0 - 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} = 20\ \text{s}$$

eredményt kapjuk.

A fenti példán jól megfigyelhetjük, hogy a vázlat milyen hasznos segítséget ad a megoldás kulcsának felismeréséhez! A vázlat kiemeli a probléma döntő pontját, „a találkozást", azaz azt, hogy mindkét személy ugyanoda és ugyanabban a pillanatban érkezik. Az adott esetben még az is fennáll, hogy ugyanonnan és ugyanakkor indultak. Ezeken a tényeken – amelyek a megoldásban döntő szerepet játszanak – a vázlat nélkül esetleg könnyen átsiklanánk. Általában *a fizika feladatok megoldásának fontos kezdő lépése, hogy jó vázlatot készítsünk, amelyen a jelöléseket, s emellett annyi további információt rögzítünk, amennyit csak lehetséges.* A jó ábra segíti gondolkozásunkat! Egyszerű lehetőséget ad a jelölések bevezetésére, s alkalmas lehet arra, hogy váratlan, s a probléma egyszerű megoldására vezető összefüggéseket fedezzünk fel.

Összefoglalás

Az egyenesvonalú mozgások leírásakor bevezettük az egydimenziós koordinátarendszert, kijelöltük az origót és az x (vagy y, ill. z) tengely pozitív irányát. Ezután definiáltuk a következő mennyiségeket:

Helyzet: x

Elmozdulás: $\Delta x = x_2 - x_1$

Átlagsebesség-vektor: $v_a = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)}$

Átlagos gyorsulás: $a_a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{(v_2 - v_1)}{(t_2 - t_1)}$

Az így bevezetett mennyiségeknek *nagyságuk* (a mértékegységgel együtt) és pozitív, ill. negatív irányuk van. A Δ szimbólum a szóban forgó mennyiség megváltozását jelzi. Pl. $\Delta v = v_2 - v_1$. (Figyeljük meg, hogy a változást mindig az adott mennyiség végső és *kezdeti értékeinek különbsége* adja meg!)

A kinematikai jellemzők *pillanatnyi értékének* definíciója a következő:

Helyzet: x

Sebesség: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$

Gyorsulás: $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt}$

A megtett út segítségével képzett *ds/dt időderivált* megegyezik a *pillanatnyi sebesség* abszolút értékével. (Az átlagsebességekre vonatkozó analóg állítás nem igaz, hiszen az *s/t* átlagsebesség többnyire nem egyenlő az átlagsebesség-vektorral.)

A fenti definíciókból néhány, a feladatmegoldásban rendkívül hasznos **kinematikai egyenlet** vezethető le. Ezek a következők:

Kinematikai egyenletek (állandó gyorsulás esetén):

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Az állandó gyorsulású mozgások esetén hasznos lehet az alábbi két összefüggés is:

$$v_{\text{átl}} = \frac{v_0 + v}{2}$$

$$x = x_0 + v_{\text{átl}}\, t$$

Ezek az összefüggések csak állandó gyorsulás mellett érvényesek. Ha a gyorsulás az időben változik, akkor a

$$v = \int a\,dt \qquad \text{és} \qquad x = \int v\,dt$$

összefüggéseket kell használni.

A formulák egyszerübbé válnak, ha a koordinátarendszer origóját a $t_0 = 0$ és a $x_0 = 0$ feltételeknek megfelelően választjuk meg. Az y és z irányú mozgásra hasonló kinematikai összefüggések írhatók fel.

A mozgásokkal kapcsolatos feladatok a következő, szabványos módszerrel oldhatók meg:

(1) *Megállapítjuk, hogy milyen típusú feladattal van dolgunk.* Ha a gyorsulás állandó, a kinematikai egyenleteket alkalmazzuk.
(2) *Vázlatot készítünk.* Kijelöljük a kezdőpontot és a pozitív tengelyirányokat, valamint feltüntetjük az alkalmazott jelöléseket. Az ábrára annyi információ kerüljön amennyi világossá teszi a feladatok különböző részei közötti összefüggéseket.
(3) *Csoportosítsuk az ismert adatokat és a keresett mennyiségeket.* Ügyeljünk arra, hogy azonos mértékrendszert használjunk – ha szükséges számítsuk át az adatokat.
Hasonlítsuk össze az adatsort a kinematikai egyenletekben szereplő mennyiségekkel. Ha lehetséges, akkor az origót a $t = 0$ időponthoz tartozóan vegyük fel, hogy x_0 ne szerepeljen a kinematikai egyenletekben.
(4) A megoldás után vizsgáljuk meg, hogy a kapott eredménynek van-e „értelme". A furcsának tűnő eredmény arra utalhat, hogy hibát követtünk el.

A gravitációs gyorsulás nagyságát g-vel jelöljük ($g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$). A Föld felszíne közelében g lefelé mutat. Az, hogy előjele pozitív vagy negatív, attól függ, hogy a pozitív irányt felfelé vagy lefelé vesszük fel.

A *dimenzióanalízis* az egyenletek mérték szerinti összehasonlításának megállapítására szolgál. Csak azonos mértékegységben kifejezett mennyiségeket szabad összeadni.

Kérdések

1. Ha olyan vonalzóval rendelkezünk, amellyel interpoláció alkalmazásával a milliméter tized részéig tudunk mérni, akkor hány százalékos hibával mérhető meg e könyv egy lapjának hossza és vastagsága? Az utóbbi esetben érdemes egy kicsit elgondolkozni, mert található olyan módszer, amellyel a mérés hibája nagymértékben csökkenthető.
2. Tárgyaljuk meg azokat a módszereket, amelyekkel a Föld-Hold távolság mérhető.
3. Soroljon fel néhány ismétlődő jelenséget, amely az idő mérésére szolgálhat!
4. Tudjuk, hogy ha egy egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük, akkor az egyenlőség továbbra is fennáll. Hol a hiba a következő okoskodásban: 10 fillér = 0,1 Ft. 100 fillér = 0,01 Ft. (Megjegyzés: Próbáljuk ki a 10 cm = 0,1 m egyenlőséggel is!)
5. Alapozható-e mértékrendszer a tömeg, hosszúság és sebesség alapmennyiségekre?
6. Robinson Crusoe a lakatlan szigeten nem rendelkezett hossz, tömeg és idő mérésére szolgáló eszközökkel. Hogyan dolgozhatott volna ki mérési eljárásokat és mértékrendszert?
7. Mozoghat egy tárgy észak felé, ha gyorsulása délre mutat?
8. Megfordulhat-e egy test mozgásának iránya, ha gyorsulása mindvégig állandó?
9. Ellenkezőjére változhat-e egy test gyorsulásának iránya, ha közben mozgásának iránya nem változik?
10. Filmfelvételt készítettünk különböző, pusztán a gravitáció hatására mozgó testekről (a légellenállás befolyása itt elhanyagolható). A filmet fordított irányban játsszuk le. Érvényesek-e a kinematikai egyenletek a filmen látható mozgásra? (Az eljárás a $t \to -t$ cserének felel meg.)
11. Soroljunk fel néhány olyan jelenséget, amely akkor is valóságosnak tűnne, ha a róla készült filmet fordítva játszanánk le! Gyűjtsünk olyan jelenségeket is, amelyek esetén könnyen felismerhető lenne, hogy a filmet fordítva vetítettük! Milyen általános különbségek állapíthatók meg a két jelenségcsoport között?
12. Egy szabadon eső testről készült film szerint a test lefelé mozog és lefelé is gyorsul. Felfelé vagy lefelé gyorsulna a fordítva vetített filmen látható tárgy[10] ?

[10] Átvéve a „*Gondolkodtató fizika*" I. kötet L.Epstein és P.Hewitt (1979) 14. old., Insight Kiadó, 614 Vermont Street, San Francisco, USA 94107

Feladatok

2.3 Mértékegységek átszámítására

2A-1 A legközelebbi csillag 4×10^3 km távolságban van tőlünk. Ha Napunkat (a Nap átmérője $1{,}4 \times 10^9$ m) egy 7 mm átmérőjű cseresznyemaggal szemléltetjük, akkor milyen távol lesz a szomszédos cseresznyemag?

2A-2 Diszkosz alakú galaxisunk átmérője 10^5 fényév. Legközelebbi galaxis szomszédunk, az Androméda, mintegy 2 millió fényév távolságban van tőlünk. Galaxisunkat egy 25 cm átmérőjű kistányérral jelképezzük. Milyen távolságra tegyük tőle a következő kistányért?

2A-3 Az égbolton a távolságok oly nagyok, hogy a csillagászok a következő speciális távolságegységeket is bevezették:

1 fényév: Az a távolság, amit a vákuumban terjedő fény 1 év alatt megtesz (a fény sebessége 300×10^8 m/s).

1 csillagászati egység (AU): A Földpálya átlagos sugara. A Nemzetközi Csillagászati Egyesülés definíciója szerint

$1\,\text{AU} \equiv 149600 \times 10^6\,\text{m}$.

1 parsec (pc): Az a távolság, amelyből 1 AU hosszúságú szakasz 1 szögmásodperces látószögben látható.

Fejezzük ki a fényévet és a parsec-et méterben!

2A-4 Az atomok átmérője körülbelül 10^{-10} m, az atommagoké pedig kb. 10^{-15} m. Hány mm lenne az atommag átmérője, ha az atom átmérőjét 2 m-re nagyítanánk?

2A-5 Érdemes megjegyezni, hogy egy évben körülbelül $\pi \times 10^7$ másodperc van. Hány százalékos hibát jelent ez a közelítés?

2A-6 Anélkül, hogy az átszámítási tényezőknek utánanézne, határozza meg, hogy hány másodpercből áll egy év! Az eredményt fejezze ki tudományos jelölésrendszerben! (Érdemes észrevenni, hogy az értékes jegyek 0,5%-os pontossággal megegyeznek π-vel. Így könnyebb megjegyezni az év és a másodperc közötti fontos átszámítási tényezőt.)

2A-7 Hány Hold méretű test térfogata lenne egyenlő a Föld térfogatával? (A szükséges adatok az L Függelékben találhatók meg.)

2B-8 A távoli galaxisok fényének vörös eltolódásából a fizikusok arra következtettek, hogy minden galaxis távolodik tőlünk, és a távolodás sebessége arányos a galaxis távolságával. Ezt fejezi ki a $v = Hr$ *Hubble-törvény*, ahol v az r távolságban elhelyezkedő galaxis távolodási sebessége, H pedig az ún. *Hubble-konstans*. H értékét nem ismerjük pontosan, a jelenlegi becslések szerint értéke 50 és 90 km/s/Mpc (Mpc=megaparsec) közé esik. a) Tegyük fel, hogy $H = 55$ km/s/Mpc! Számítsuk át ezt az értéket m/s per 10^6 fényévre! b) Gondolatban fordítsuk meg minden galaxis sebességének irányát, de tegyük fel, hogy a sebesség nagysága a továbbiakban változatlan! Ennek alapján megbecsülhetjük, hogy mennyi idővel ezelőtt volt minden galaxis egy pontban. Az „Univerzum korát" ekkor a

$$t = \frac{\text{elmozdulás}}{\text{sebesség}} \quad \text{összefüggés alapján} \quad \frac{r}{Hr} = \frac{1}{H} \quad \text{-ra}$$

becsülhetjük. (A becslés természetesen önkényes és sok tekintetben pontatlan. Ez az eredmény valószínűleg túlbecsült, mert az Univerzum kezdeti tágulási sebessége a testek közötti kölcsönös vonzás miatt bizonyára sokat csökkent, míg jelenlegi értékét elérte.) Határozzuk meg az univerzum így becsült korát billió években! c) Mennyi lenne ez a kor, ha a Hubble-konstans értékét $H = 90$ km/s/Mpc-nek választanánk?

2B-9 Határozzuk meg percekben az egy óra és az egy mikroévszázadnyi időtartam közötti eltérést! Melyik hosszabb?

2B-10 Bizonyos olajok a víz felszínén molekula-vastagságnyi rétegben terülnek szét. Becsüljük meg egy olajmolekula méretét, ha egy 2,5 mm átmérőjű csepp szétterülve 9 cm átmérőjű, kör alakú foltot alkot a víz felszínén!

2.5 Helyzet, elmozdulás, sebesség és sebességvektor

2A-11 A fény terjedési sebessége közel 3×10^8 m/s. Határozzuk meg, hogy mennyi idő alatt teszi meg a fény az egy atommag átmérőjével (2×10^{-15} m) egyenlő távolságot!

2A-12 Egy gépkocsi 28 km-es utat tett meg végcéljáig. Az út első 9 km-es szakasza városi utakon vezetett, ahol az autó 27 km/ó átlagsebességgel mozgott. Az út fennmaradó részén a gépkocsi autópályán haladt. A teljes menetidő 41 perces volt. Mekkora volt a kocsi átlagsebessége az autópályán?

2A-13 A kaliforniai San Andreas törésvonal két oldalának összeillő alakzataiból a geológusok arra a következtetésre jutottak, hogy a két, eredetileg folytonosan illeszkedő sziklafal mintegy 20 milló év alatt 325 km-t csúszott el egymáshoz képest. Határozzuk meg az elmozdulás átlagsebességét centiméter per évben! Megjegyzés: A Hollister közelében fekvő területen az elcsúszás sebessége jelenleg körülbelül 6 cm/év, körülbelül ilyen sebességgel nőnek a körmeink.

2A-14 Határozzuk meg, km/s-ben, hogy milyen sebességgel mozog a Föld Nap körüli pályáján. (Az adatokat vegyük az L függelékből.)

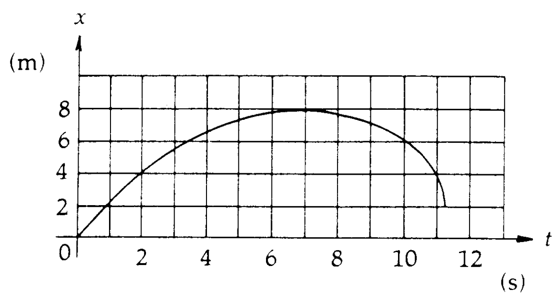
2A-15 Egyes amerikai autópályákon kb. 1,6 kilométerenként (mérföldenként) számozott oszlopokat helyeznek el, hogy segítsék az autósokat sebességmérő órájuk ellenőrzésében. Mekkora idő telik el két oszlop közötti távolság megtétele során, ha a gépkocsi sebessége 110 km/óra?

2A-16 A Los Angeles és San Francisco közötti kb. 680 km-es távolságot egy gépkocsi 8 óra alatt teszi meg. Mekkora az átlagsebessége? Fejezzük ki az eredményt km/ó-ban és m/s-ben is!

2B-17 Egy autós 1 km-t 15 km/ó sebességgel tett meg. Mekkora sebességgel kell megtennie a következő kilométert, hogy a teljes két kilométeres útszakaszon az átlagsebessége 30 km/ó legyen?

2B-18 Egy futó a 100 m-es vágtaszámot 10,3 s-os eredménnyel nyerte meg. Egy másik futó 10,8-as idővel futott be. Feltéve, hogy az atléták a teljes távon egyenletesen futottak, határozzuk meg, hogy milyen távol volt a második futó a céltól, amikor a győztes átszakította a célszalagot!

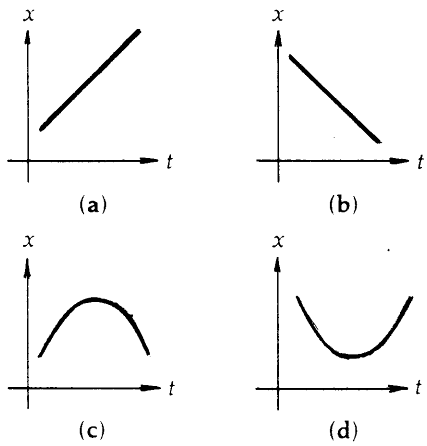
2B-19 A 2-17 ábra egy egyenes vonalú pályán mozgó részecske elmozdulás-idő függvényábráját mutatja. a) Határozzuk meg a mozgás átlagsebességét a $t_1 = 2$s és $t_2 = 5$s időintervallumra! b) Melyik időpillanatban zérus a mozgás sebessége? c) Mekkora a $t = 10$s időpontban a pillanatnyi sebesség?



2-17 ábra
A 2B-19 feladathoz

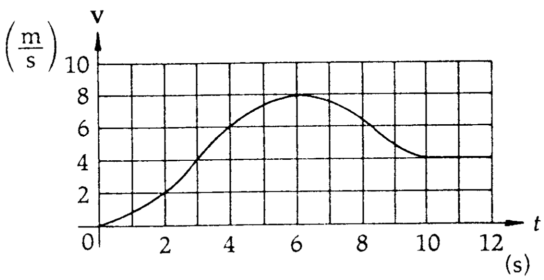
2.6 Gyorsulás

2A-20 Egy motorkerékpár 5 s alatt gyorsul fel 0-ról 97 km/ó értékre. a) Mekkora az átlagos gyorsulása m/s^2-ben? b) Hányadrésze ez a gyorsulás a nehézségi gyorsulásnak?
2A-21 Egy baseball-labda 10 m/s-os végsebességgel röpül ki a dobó kezéből. Mekkora volt a labda átlagos gyorsulása, ha tudjuk, hogy a dobó keze 0,8 m hosszú szakaszon egyenes vonalban gyorsította a labdát?
2B-22 A 2-18 ábra négy különböző mozgás hely-idő függvényábráját mutatja. Állapítsuk meg minden esetben, hogy a gyorsulás pozitív, negatív vagy zérus!



2-18 ábra
A 2B-22 feladathoz

2A-23 Egy golfütés során a kezdetben nyugvó labda 31 m/s-os sebességgel repült el. Mekkora volt a labda átlagos gyorsulása, ha az ütő 1,17 ms időtartamig érintkezett a labdával?
2A-24 A 2-19 ábra egy egyenes úton nyugalomból induló motorkerékpáros sebesség-idő függvényábráját mutatja. a) Mekkora a motorkerékpáros átlagos gyorsulása a $t_0 = 0$ és $t = 6$ s időtartamban? b) Állapítsuk meg (közelítőleg), hogy mikor éri el a gyorsulás maximális értékét és mekkora a gyorsulás ebben a pillanatban! c) Mikor zérus a gyorsulás? d) Mikor veszi fel a gyorsulás legnagyobb negatív értékét és mekkora ez az érték?

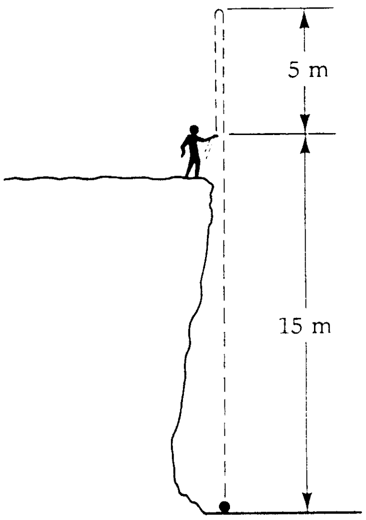


2-19 ábra
A 2A-24 feladathoz

2A-25 Egy asztronauta leejtett egy kalapácsot a Holdon. A kalapács 1,55 s alatt ért a talajra. Az L Függelékben megtalálható a Hold vonzása miatt fellépő gravitációs gyorsulás. Határozzuk meg ennek felhasználásával a kalapács végsebességét!
2B-26 Egy gépkocsi sebessége 9 s alatt 4 m/s-ról egyenletesen 7 m/s-ra növekszik. a) Mekkora a kocsi gyorsulása? b) Ezután az autó egyenletesen lassulva 12 s alatt megáll. Mekkora a gyorsulás ezen a szakaszon? c) Mekkora az átlagos gyorsulás a mozgás teljes 21 s időtartama alatt?

2.7 Az egyenesvonalú, egyenletesen gyorsuló mozgás

2A-27 Leejtettünk egy követ 2 m magasról. Mennyi idő alatt érkezik a talajra?
2A-28 Egy 10 m/s sebességgel haladó teherautó 10 s alatt egyenletesen gyorsulva megkétszerezi sebességét. a) Határozzuk meg a gyorsulását! b) Mekkora utat tesz meg ezalatt a teherautó?
2A-29 Egy labdát 16 m/s sebességgel felfelé hajítottunk. a) Mennyi idő alatt ér pályájának csúcspontjára? b) Mekkora a labda sebessége abban a pillanatban, amikor 8 m-rel van az elhajítási hely felett és felfelé mozog? c) Határozzuk meg a labda maximális magasságát!
2A-30 Egy labdát 20 m/s kezdősebességgel feldobtunk. a) Mennyi idő alatt éri el pályájának csúcspontját? b) Milyen magasan van ekkor? c) Mekkora sebességgel érkezik vissza a labda kiinduló helyére?
2A-31 Egy 20 m/s sebességgel haladó gépkocsi egyenletesen felére csökkenti sebességét $a = 2$ m/s^2 értéknek megfelelően. a) Mennyi idő szükséges ehhez? b) Mekkora utat tesz meg ezalatt?
2A-32 Egy labdát 12 m/s sebességgel függőlegesen felfelé hajítottunk. Hol van, mekkora és milyen irányú sebességgel rendelkezik a) 1 s és b) 2 s időpontban az elhajítás után?
2B-33 Egy követ 50 m mély kútba ejtettünk. Határozzuk meg, hogy mennyi idő múlva halljuk a kő csobbanását! (A hang terjedési sebessége 330 m/s.)
2B-34 Egy gépkocsi 15 m/s-os egyenletes sebességgel egyenes úton halad. Abban a pillanatban, amikor egy parkoló motoros rendőr mellé ér, a rendőr 2 m/s^2 állandó gyorsulással üldözni kezdi: a) Mennyi idő alatt éri utol a rendőr az autót? b) Mennyi utat tesz meg ezalatt a rendőr és mekkora a sebessége a találkozás pillanatában?
2B-35 Egy érmét 4 m/s sebességgel dobtunk fel. Mennyi idő alatt ér 0,50 m magasra? Miért kapunk két eredményt?
2B-36 Egy labdát a 2-20 ábrának megfelelően egy szakadék széléről felfelé hajítottunk. A labda 5 m magasra emelkedik, majd 15 m mélyen ér talajt a szakadék alján. a) Mekkora volt a labda kezdősebessége? b) Mekkora sebességgel csapódik a talajba? c) Mennyi ideig tartózkodik a labda a levegőben?
2B-37 Egy mozgó pont 4 m/s sebességgel a pozitív x irányban mozogva halad át a koordinátarendszer origóján. Bizonyos idő elteltével, az $x = 4$ m pontban, sebessége -2 m/s (azaz negatív x irányban mozog). Tegyük fel, hogy a gyorsulás állandó. a) Mekkora a gyorsulás? b) Mennyi idő telik el míg a mozgó pont az origóból az $x = 4$ m koordinátájú pontot negatív irányban haladva eléri? c) Milyen távolságra jut el a mozgó pont a pozitív x irányban?



2-20 ábra
A 2B-36 feladathoz

2B-38 Egy csapból egyenletesen csöpög a víz a 30 cm-rel lejjebb elhelyezett mosogatóba. A csepegés üteme olyan, hogy amikor egy csepp becsapódik, akkor a következő már a levegőben van és a harmadik éppen leszakad a csapról. Határozzuk meg, hogy hány csepp esik le percenként.

2.8 A kinematikai egyenletek levezetése differenciálszámítás felhasználásával

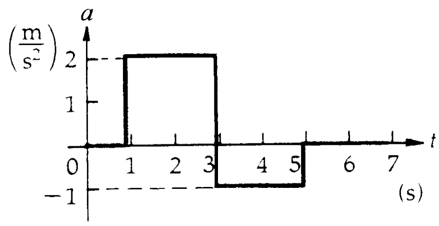
2B-39 Egy részecske az $a = 12t$ (SI-egységekben) összefüggésnek megfelelő gyorsulással mozog az x tengely mentén. A $t = 0$ időpontban a részecske nyugalomban van és az origóban található. Határozzuk meg a) a pillanatnyi sebesség-idő függvényt és b) a hely-idő függvényt.

2B-40 Egy, az x tengelyen mozgó részecske sebesség-idő függvényét a $v = 4 + 2t - 3t^2$ egyenlet adja meg. A $t = 0$ időpillanatban a részecske az $x = 8$ m helyen $v = +5$ m/s sebességgel halad át. a) Határozzuk meg a mozgás elmozdulás-idő függvényét! b) Mekkora a részecske legnagyobb sebessége $+x$ irányban?

2B-41 Egy, az x tengely mentén mozgó részecske helyzetét SI-egységekben az $x = 2 + 3t - 4t^2$ összefüggés adja meg. a) Mi az egyes tagok együtthatóinak a dimenziója? b) Vezessük le a sebesség-idő és c) a gyorsulás-idő függvényt! Határozzuk meg továbbá d) a részecske maximális x irányú elmozdulását és e) azt az időpontot, amikor ez bekövetkezik!

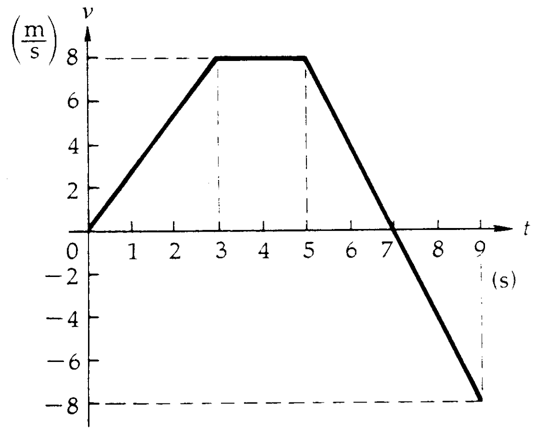
2.9 Az elmozdulás, sebesség és gyorsulás grafikus szemléltetése

2B-42 Egy részecske az $x = 2$ m helykoordinátájú pontból indul és a 2-21 ábra gyorsulás-idő függvénygörbéjének megfelelően mozog. Vázoljuk fel a fontosabb numerikus értékek feltüntetésével a) a sebesség-idő, b) a hely-idő grafikont a mozgás első 7 másodpercére!



2-21 ábra
A 2B-42 feladathoz

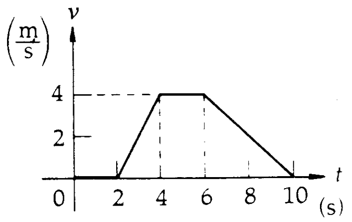
2B-43 A 2-22 ábrán egy egyenes úton haladó rendőrmotoros pályájának sebesség-idő függvényábrája látható. Másoljuk át ezt az ábrát egy papírlap közepére. a) Rajzoljuk meg az elmozdulás-idő függvényábrát pontosan az előző ábra fölé úgy, hogy az időtengely éppen a sebesség-idő függvény időtengelye fölé essen. b) Rajzoljuk meg ehhez hasonlóan a gyorsulás-idő függvényábrát a sebesség-idő ábra alatt. Az ábrákon tüntessük fel az elmozdulás- ill. gyorsuláskoordináta nagyságát a jellegzetes pontokban. c) Mekkora a motoros pillanatnyi gyorsulása a $t = 6$ s időpontban? d) Határozzuk meg a motoros helyzetének a koordinátáját a $t = 6$ s időpontban. e) Mi lesz a végső helyzete a motorosnak a $t = 9$ s időpontban?



2-22 ábra
A 2B-43 feladathoz

2B-44 Egy motoros nyugalomból indul és egyenletesen gyorsulva 8 s alatt 24 m/s sebességet ér el. Ezután 12 másodpercig ezzel a sebességgel mozog, majd fékezni kezd és 6 másodperc alatt megáll. Készítsünk vázlatot a hely-idő, sebesség-idő és gyorsulás-idő függvényről! A függvényábrák törés- és inflexiós pontjain tüntessük fel a megfelelő koordinátaértékeket is! A függvényábrákat a 2-13 ábrához hasonlóan rendezve, egymás fölött párhuzamos időtengelyekkel rajzoljuk meg!

2B-45 A 2-23 ábra egy egydimenziós mozgást végző test sebességét mutatja. Vázoljuk fel az elmozdulás-idő és a gyorsulás-idő függvényábrákat. Tüntessük fel a megfelelő numerikus értékeket is azokon a pontokon, ahol a sebességfüggvény meredeksége megváltozik! A $t = 0$ időpillanatban a test az $x = 2$ m helyen van. A függvényábrákat rendezzük a 2-13 ábrához hasonló módon!



2-23 ábra
A 2B-45 feladathoz

2.10 Dimenzióanalízis

2A-46 Ellenőrizzük a $v^2 = v_o^2 + 2ax$ kinematikai egyenletben a dimenziók egyezését!

2B-47 A fonálinga T periódusidejének azt az időt nevezzük, ami alatt a mozgás egy teljes ciklusa lezajlik. A fonálinga lengésideje az inga l hosszától és a g nehézségi gyorsulástól függ. A periódusidő ennek megfelelően T= (konstans) l^a, g^b alakban adható meg. Állapítsuk meg az a és b kitevők értékét dimenzióanalízis segítségével! (Gondosan fogalmazzunk, a megoldás jól érthető legyen!)

2B-48 Ha a légellenállás elhanyagolható, akkor az elhajított testek R vízszintes hajítási távolsága csak a θ hajítási szögtől, a v_0 kezdősebességtől és a g nehézségi gyorsulástól függ. a) Határozzuk meg dimenzióanalízissel, hogy adott hajítási szög mellett hogyan függ a hajítási távolság a kezdősebességtől és a nehézségi gyorsulástól! Emlékeztetünk arra, hogy a fizikában a szöget többnyire a dimenzió nélküli radiánban mérjük. b) Hányszorosára nő a hajítási távolság, ha a kezdeti sebességet megkétszerezzük? c) Hogyan változna a hajítási távolság a Holdon, ahol a gyorsulás 1/9-ed része a földinek?

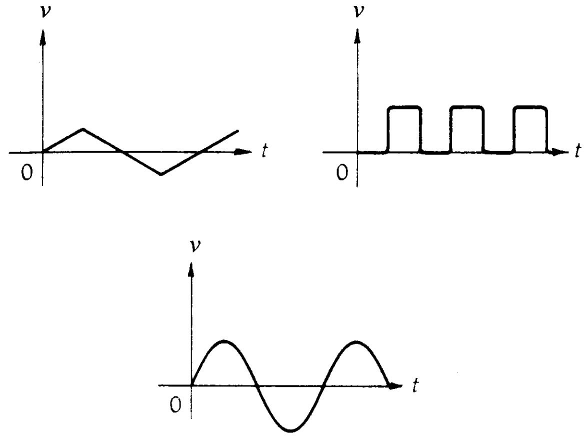
További feladatok

2C-49 Egy 3 m/s sebességgel süllyedő hőlégballonból homokzsákot ejtenek ki. a) Határozzuk meg a homokzsák sebességét a Földhöz képest a kiejtés után 1 másodperccel. b) Milyen távolságba jut egy másodperc alatt a homokzsák a ballontól, ha a zsák kiejtésének pillanatában a ballon süllyedési sebessége 2 m/s-ra csökken?

2C-50 Egy lift 0,2 m/s^2 gyorsulással indul és ugyanekkora lassulással áll meg az egymástól 4 m távolságban lévő emeletek között. Mekkora az a minimális időtartam ami szükséges két szomszédos emelet közötti távolság megtételéhez?

2C-51 Egy 45 m magas hídról követ ejtettünk egy folyóba. Mekkora v kezdeti sebességgel hajítottuk utána 1 másodperc múlva a következő kavicsot, ha egyszerre érkeztek a vízbe?

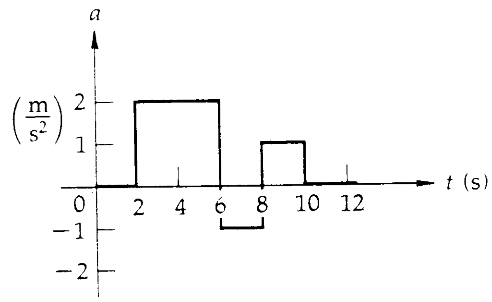
2C-52 Másoljuk le a 2-24 ábrán látható sebesség-idő függvényábrákat! Közvetlenül az átmásolt grafikonok alatt rajzoljuk meg a megfelelő elmozdulás-idő és gyorsulás-idő függvényábrákat! Az $x = 0$ helyzetet a $t = 0$ időpontban vegyük fel és minden időtengelyen használjuk ugyanazt a léptéket!



2-24 ábra
A 2C-52 feladathoz

2C-53 Egy felfelé dobott könnyű labda helykoordinátája az $y = 7t - 49t^2$ függvény szerint változik, ahol y-t méterben, t-t pedig másodpercben mérjük. Határozzuk meg a) a labda v_o kezdősebességét a $t_o = 0$,pillanatban b) sebességét a t = 1,26 s időpillanatban, valamint c) a gyorsulását!

2C-54 Egy, az origóból induló test a 2-25 ábra szerinti gyorsulással egyenesvonalú mozgást végez. Rajzoljuk meg a mozgás sebesség-idő és elmozdulás-idő függvényábráját. Tüntessük fel a t = 2, 6, 8 és 10 időpontokhoz tartozó sebesség- és helykoordináták értékét!



2-25 ábra
A 2C-54 feladathoz

2C-55 Egy földalatti vasút a tervek szerint maximálisan 1,5 m/s^2 gyorsulással, ill. lassulással mozoghat. a) Határozzuk meg, hogy minimálisan mekkora idő szükséges két állomás közötti 800 m távolságú út megtételéhez! b) Határozzuk meg, hogy ennek során milyen maximális sebességet ér el a szerelvény!

2C-56 Egy épület tetőpárkányáról lehulló tégla 0,2 s idő alatt halad el egy 2 m magas ablak előtt. Milyen magasan van a párkány az ablak felső széle felett?

2C-57 Idegen égitestekről érkezett betolakodók ellen vívott űrütközetben a földi űrhajó (A űrhajó) 300 m/s sebességgel üldözi az idegeneket (B űrhajó), akik 270 m/s sebességgel menekülnek. A két űrhajó ugyanazon egyenes mentén mozog és a sebességeket ugyanahhoz az inerciarendszerhez képest ismerjük. Amikor a két űrhajó távolsága 8000 m-re csökken, az *A* hajó parancsnoka 75 m/s^2 gyorsulással mozgó rakétát lő ki. Mennyi idő alatt éri el a rakéta a betolakodót? (A számításokat a már felhasznált inerciarendszerben végezzük!)

2C-58 Egy forgalmi lámpa olyan kereszteződésben áll, ahol 40 km/ó sebességkorlátozás érvényes. A kereszteződés felé a maximálisan megengedett sebességgel gépkocsi közeledik. A kocsi maximális lassulása 2 m/s^2, a vezető reflexideje 0,5 s. a) Tegyük fel, hogy a gépkocsi maximális sebességgel haladt és 3 m/s^2 egyenletes lassulással fékezett. Milyen messzire volt a lámpától a fékezés megkezdésének pillanatában (amikor a lámpa éppen sárgára váltott), ha éppen a stop-vonalon állt meg. b) Milyen hosszú volt a sárga jelzés időtartama, ha a lámpa pontosan a kocsi megállásának pillanatában váltott pirosra?

2C-59 A 42 km és 194 méter hosszú Los Angeles-i maratoni távot 1987-ben Art Boileau nyerte 2 óra 13 perc és 9 másodperces idővel. a) Mennyi volt Art Boileau átlagsebessége? b) A 34 km-es jelzésnél Boileau 2,5 perccel vezetett a második helyen futó ellenféllel szemben, aki a célvonalon 30 másodperccel a győztes után haladt át. Tegyük fel, hogy Boileau a távot végig egyenletes sebességgel tette meg, valamint, hogy amikor a győztes a 34 km-es jelhez érkezett, akkor a második helyen futó is vele azonos sebességgel futott. Mekkora átlagos gyorsulással kellett ezután a második helyen futó atlétának mozognia?

2C-60 Két autó vakmerően frontálisan rohan egymás felé ütközési próbapályán. Sebességük rendre 25 m/s és 35 m/s. A két vezető ugyanabban az időpontban lép a fékre és megállásig egymással egyenlő és egyenletes lassulással mozog. Ezzel a lassulással 20 m/s kezdősebességről indulva 4,7 s alatt tudnának megállni. Milyen távol voltak egymástól a gépkocsik a fékezés megkezdésének pillanatában, ha éppen a frontális összeütközés elött tudtak megállni?

2C-61 Egy kődarabka válik le a kút pereméről és a vízbe hull. a) Milyen mély a kút, ha a kő csobbanását a leválás után 2,4 másodperccel halljuk meg? (A hang sebessége az adott hőmérsékleten 336 m/s.) Mekkora hibát követünk el a mélység meghatározásában, ha a hang terjedéséhez szükséges időt elhanyagoljuk?

2C-62 Egy elkésett utas 3 m/s sebességgel rohan az állomásról éppen indulni készülő vonat után. Az utas a sínek mentén fut és még x_0 távolságban van a hátsó ajtótól, amikor a szerelvény 0,5 m/s^2 gyorsulással elindul. a) Rajzoljuk meg az utas $x_c(t)$ hely-idő grafikonját a $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ kezdőfeltételekkel! Ugyanezen az ábrán rajzoljuk meg a szerelvény végének $x_T(t)$ görbeseregét különböző szabadon választott x_0 értékek mellett! Ábrázoljunk olyan eseteket is, amikor az utas eléri, és olyanokat is, amikor lekési a vonatot! b) Határozzuk meg a legnagyobb x_0 távolságot, amikor az utas még eléri a vonatot!

2C-63 Két szomszédos metróállomás távolsága 430 m. A földalatti szerelvény gyorsulása 1 m/s^2. Határozzuk meg a) a két megálló közötti út megtételéhez szükséges minimális időtartamot. b) az ilyen mozgás során elért maximális sebességet és c) a mozgás átlagsebességét! Készítsünk vázlatot az elmozdulás-idő, sebesség-idő és gyorsulás-idő függvényről. Jelöljük be a grafikonokon azon pontok koordinátáit, amikor a vezető a gyorsításról átkapcsol a fékezésre.

2C-64 Galilei egy ún. „páratlan szám" szabályt állapított meg a szabadon eső testek mozgására vonatkozóan. A szabály a következő: Ha egy nyugalomból induló test az első másodpercben 5 m-t tesz meg, akkor a következőben 3×5 m-t, a harmadikban 5×5 m, a negyedikben 7×5 m és így tovább. Mutassuk meg, hogy ebből a szabályból az $x = 5t^2$ út-idő összefüggés adódik, ahol x a teljes utat, t pedig a teljes eltelt időt jelöli!

$$\text{(Útmutatás: } \sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$$

2C-65 Egy nyugalomból induló, komputer vezérelt metrószerelvényt a robotpilóta a mozgás első 5 másodpercében az $x = At^3$ törvény szerint gyorsít. Határozzuk meg a) a sebességet, valamint b) a gyorsulást az idő függvényében! c) Mekkora az A együttható értéke (beleértve a dimenziót is) ha a nyugalomból induló szerelvény sebessége az indulás után 5 másodperccel 4 m/s?

2C-66 Egy leejtett kődarab útjának a talajra érkezés előtti utolsó harmadát 1,0 s alatt teszi meg. Milyen magasról esett le a hó le a kő?

AZ 1–23 FEJEZETEK PÁRATLAN SZÁMOZÁSÚ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

II. Fejezet

2A-1 200 km
2A-3 1 fényév = $9{,}46 \times 10^{15}$ m; 1 pc = $3{,}09 \times 10^{16}$ m
2A-5 0,447%
2A-7 49,4
2B-9 7,40 perc; az óra hosszabb
2A-11 $6{,}67 \times 10^{-22}$ s
2A-13 1,63 cm/év
2A-15 55,4 s
2B-17 lehetetlen
2B-19 a) 1,20 m/s b) 7,00 s c) –1,54 m/s (közelítőleg)
2B-21 62,5 m/s^2
2B-23 $2{,}65 \times 10^4$ m/s^2
2A-25 2,59 m/s
2A-27 0,639 s
2A-29 a) 1,63 s b) 9,96 m/s c) 13,1 m
2A-31 a) 5,00 s b) 75,0 m
2B-33 3,34 s
2B-35 0,804 s; 0,0127 s
2B-37 a) –1,5 m/s^2 b) 4 s c) 5,33 m
2B-39 a) $6t^2$ b) $3t$
2B-41 a) 2 m; 3 m/s; 4 m/s^2 b) $v = 3 - 8t$
c) –8 m/s^2 d) 0,375 s e) 2,56 m
2B-43 c) –4 m/s d) 34,0 m
2B-45 $x(2) = 2$ m; $x(4) = 6$ m; $x(6) = 14$ m; $x(10) = 22$ m
2B-47 $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}$
2C-49 a) 12,8 m/s b) 5,90 m
2C-51 12,2 m/s
2C-53 a) 7 m/s b) –5,35 m/s c) –9,8 m/s^2
2C-55 a) 46,2 s b) 34,6 m/s
2C-57 14,2 s
2C-59 $4{,}83 \times 10^{-3}$ m/s^2
2C-61 a) 26,4 m b) 6,89%
2C-63 a) 41,5 s b) 20,7 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ c) 10,4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
2C-65 a) $v = 3At^2$ b) $\alpha = 6At$ c) 0,0533 m/s^3

III. Fejezet

3A-1 a) 7 osztásrészt b) 36,9°; 5 osztásrész
3A-3 a) $C = 6\hat{x} + 5\hat{y}; D = -2\hat{x} + 7\hat{y}$
b) C = 7,81; 39,8°; D = 7,28; 106°
3B-5 C = 5,39; 21,8°; D = 6,08; 80,5°; E = 10,8; 248,2°
3A-7 a) $C = \hat{y} - 2\hat{z}$; 2,24 m
b) $D = 4\hat{x} + 5\hat{y} - 6\hat{z}$; 8,78 m
3B-9 2,50 m/s
3B-11 a) 4,87 km; 61,4° délnyugatra b) 23,3 m/s
c) 13,5 m/s; 61,4° délnyugatra
3B-13 16,1° a horizont alatt
3A-15 13,6 m
3B-17 24,7 m/s
3B-19 55,4 m/s
3B-21 a) 11,1 m/s b) 24,7 m/s; 26,5° a függőlegestől
3B-23 a) 21,9 m b) 2,74 s c) 14,1 m
d) 21,4 m/s; 13,9° a függőlegestől
3C-25 a) $6\hat{x} - 2\hat{y} + 2\hat{z}$ b) $2\hat{x} + 4\hat{y} - 6\hat{z}$
c) $6\hat{x} + 5\hat{y} - 8\hat{z}$
3C-27 (2,44 m, 11,9 m)
3C-29 $R = \dfrac{v_o^{\,2} \sin 2\theta}{g}$
3C-31 A válasz adott.
3C-33 $Y_m = \dfrac{v_0^{\,2} \sin^2 \theta}{2g}$
3C-35 A válasz adott.
3C-37 $y = (\operatorname{tg} \theta)x - \left[\dfrac{g}{2(v_o \cos\theta)^2}\right]x^2$
3C-39 $\phi = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}\theta}{2}\right)$

IV. Fejezet

4A-1 a) $8{,}73 \times 10^{-3}$ rad b) 0,030 rad
4B-3 91,7°