KÖRMOZGÁS

„Newtonnak kell lenni ahhoz, hogy azt észleljük, a Hold lefelé zuhan, midőn mindenki úgy látja, hogy nem esik le."

Paul Valéry

4.1 Bevezetés

A körmozgás az egyik legfontosabb síkmozgás, s így különleges figyelmet érdemel. Körmozgást végeznek pl. a gépek forgórészei, a kanyarodó úton haladó gépkocsi, a Bohr modell szerint a hidrogénatom elektronjai és a Föld körüli pályán keringő mesterséges holdak. Mivel a körmozgás rendkívül gyakori, a következőkben kényelmes és egyszerűen kezelhető jelölési rendszert dolgozunk ki a körpályán mozgó részecskék helyzetének, sebességének és gyorsulásának leírására. Az egyenletes sebességgel körpályán mozgó testek egyik legérdekesebb tulajdonsága az, hogy annak ellenére, hogy a sebességük nagysága nem változik, mégis gyorsulnak. Bár ez az első pillanatban érthetetlennek tűnik, a gyorsulás **a** = dv/dt definíciójából azonnal következik. Ha a sebességvektor nagysága *állandó* is, *iránya* folytonosan változik, s ez a változás van közvetlen kapcsolatban a gyorsulással.

4.2 Síkbeli polárkoordináták

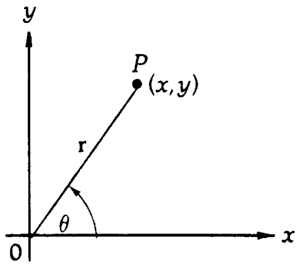
Bár a körmozgás derékszögű koordináták segítségével is leírható, sokkal megfelelőbb a *síkbeli polárkoordinátarendszer* használata (4-1 ábra). Ebben az esetben a P(x,y) pont helyzetét az origótól mért r távolsággal és a pozitív x tengelytől az óramutató járásával ellenkező irányban mért θ szöggel jellemezzük. Körmozgás esetén az r távolság állandó, s a θ szöget *szögkoordinátának* nevezzük. A körmozgásra vonatkozó kinematikai egyenletekben a θ szögkoordinátát mindig radián (rad) egységekben mérjük. Egy szög radiánban mért értéke a szöghöz tartozó körív hosszának és a kör sugarának a hányadosával adható meg.

Szögkoordináta $$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(radiánban)} \qquad \textbf{(4-1)}$$

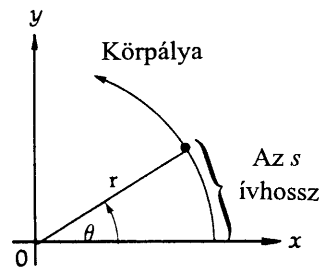
A radiánérték két hosszúság arányaként kapható meg, így a szög mértékének dimenzió nélküli egysége. 1 radián szög alatt látszik a kör középpontjából az az s ív, amelynek hossza a kör sugarával egyenlő. A teljes körívhez tartozó szög, azaz az a szög, amely egy teljes fordulatot jelent az origó körül, 2π radián. Tehát

$$2\pi \text{ rad} = 360^{\circ} \qquad \text{vagy}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{360^{0}}{2\pi} \approx 57{,}3^{0}$$



a) A pont helye.

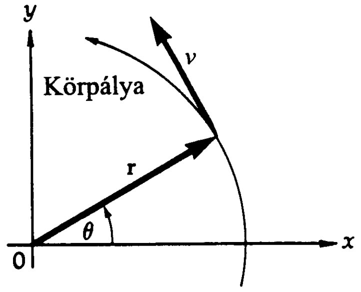


b) Körmozgást végző részecske.

4-1 ábra
Síkbeli polárkoordináták (r, θ).

4.3 A körmozgás sebessége és gyorsulása

Egy körpályán mozgó test sebessége mindig a *kör érintőjének irányába* mutat (4-2 ábra). A sebességvektor nagysága *változhat* (a test gyorsulhat vagy lassulhat), iránya azonban *folytonosan* változik. Általában ez két gyorsuláskomponenst eredményez: egy *érintő mentit* vagy *tangenciálisat* és egy *sugár irányban befelé mutatót* vagy *normálisat.* A gyorsulásnak ezt a felbontását jól használhatjuk a feladatok megoldásakor is.



4-2 ábra
A körmozgást végző test sebessége mindig érintő irányú.

Érintő menti gyorsulás

Az előző fejezetben egyenesvonalú mozgásokkal foglalkoztunk, és megállapítottuk, hogy a mozgó test gyorsulása, ill. lassulása a test mozgásának *irányába* esik. A körmozgás esetén a **tangenciális gyorsulást** (a_t) úgy képzelhetjük el, mintha egy egyenes pályát kör alakúra hajlítanánk, s ennek eredményeként jönne létre a gyorsulásnak a pálya érintője irányába eső komponense a sebesség változása következtében.

Érintő menti gyorsulás
$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad \text{(a pálya érintője mentén)} \qquad \textbf{(4-2)}$$

Vegyük észre, hogy a (4-2) egyenlet nem vektoregyenlet, bár tudjuk, hogy ez a gyorsulásösszetevő mindig a pálya érintőjének irányába mutat. Ha a test gyorsul, a_t a mozgás irányába mutat, ha lassul, akkor ez a gyorsulás továbbra is érintő irányú, de a mozgás irányával ellentétes. Ha a sebesség állandó, akkor az érintő menti, vagy tangenciális gyorsulás zérus.

Centripetális gyorsulás

A másik gyorsuláskomponens merőleges a pályára. Ezt a gyorsulásösszetevőt, amely mindig a kör középpontja felé, azaz sugár irányban befelé mutat, **centripetális** (a_{cp}) **gyorsulásnak** nevezzük. (Az elnevezés a középpont jelentésű latin *centrum* és a befelé irányulni jelentésű *petere* szóból ered.) Ne tévesszük össze ezt a gyorsulást a *centrifugális* (a_{cf}) gyorsulással (ez utóbbi elnevezés második tagja a megszökni jelentésű *fugere* szóból származik), amely radiálisan kifelé mutat. (A centrifugális gyorsulást a 14. fejezetben tárgyaljuk részletesebben.)

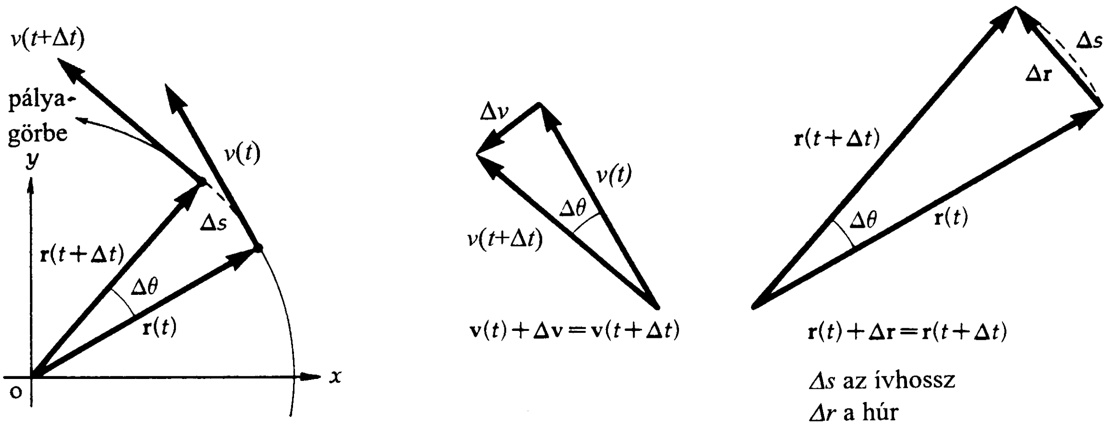
A centripetális gyorsulás tárgyalásához foglalkozzunk először az *egyenletes körmozgással* (azaz amikor egy test *állandó sebességgel* körpályán mozog). Ekkor, bár a sebesség nagysága mindvégig állandó, iránya folytonosan változik. A 4-3a ábra egy körpályán mozgó test egy-egy pontjához tartozó $\mathbf{v}(t+\Delta t)$ ill. $\mathbf{v}(t)$ sebességvektort ábrázolja. A sebességváltozás meghatározásához a 4-3b ábrán közös pontból mértük fel e két sebességvektort. Látható, hogy

$$\mathbf{v}(t) + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) \qquad \textbf{(4-3)}$$

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t) \qquad \textbf{(4-4)}$$

Figyeljük meg, hogy a sebességvektorok által bezárt $\Delta\theta$ szög ugyanakkora, mint a megfelelő pontokhoz vezető $\mathbf{r}(t)$ és $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ helyzetvektorok által bezárt szög (4-3c ábra).[1] Amennyiben $\Delta\theta$ nagyon kicsi, akkor a Δs ívhossz a Δr húr hosszával közelíthető. Ez azt jelenti, hogy a $\Delta\theta \to 0$ (és $\Delta t \to 0$) határesetben Δs és Δr elhanyagolható hibával egyenlőnek vehető.

[1] Ennek nyilvánvalóan az az oka, hogy a sebességvektor merőleges a gyorsulásvektorra. Így ha a sebességvektor **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** szöggel elfordul, akkor ugyanennyivel kell elfordulnia a gyorsulásvektornak is.



a) b) Sebességvektorok c) Helyzetvektorok

4-3 ábra

Az egyenletes körmozgás során a részecske állandó nagyságú sebességgel Δs utat tesz meg egy körív mentén (az ábrán szaggatott vonal jelzi). Ennek során mind a sebességvektor, mind a helyzetvektor iránya ugyanakkora $\Delta\theta$ szöggel változik, nagyságuk azonban állandó marad.

A gyorsulást a $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ határértékkel definiáltuk. Vizsgáljuk meg most figyelmesen $\Delta \mathbf{v}$ irányát. Ha $\Delta\theta \to 0$ akkor $\Delta \mathbf{v}$ radiálisan befelé mutat, és merőleges lesz a $\mathbf{v}$ vektorra. A hasonló háromszögek felhasználásából következik, hogy

$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{\Delta r}{r}\approx\frac{\Delta s}{r} \tag{4-5}$$

vagy

$$\Delta v\approx\left(\frac{v}{r}\right)\Delta s \tag{4-6}$$

Helyettesítsük be ezt a Δv értéket a gyorsulás (2-6) definíciós egyenletébe. Figyelembe véve, hogy v/r állandó:

$$a_{cp}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\approx\left(\frac{v}{r}\right)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{4-7}$$

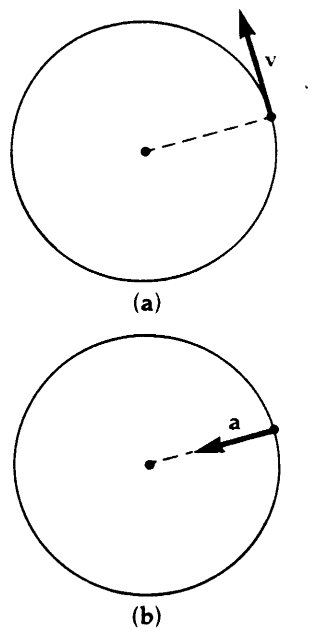
Határértékben a közelítés egyenlőséggé válik és mivel $\lim_{\Delta t\to 0}\Delta s/\Delta t$ definíció szerint a pálya menti pillanatnyi sebesség, azt kapjuk, hogy:

Centripetális gyorsulás

$$a_{cp}=\frac{v^2}{r} \quad \text{(sugár irányban befelé)} \tag{4-8}$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy v^2/r valóban gyorsulás dimenziójú.

$$v^2/r\ \textit{dimenziója:}\quad \frac{\left[\dfrac{L}{T}\right]^2}{[L]}=\left[\frac{L}{T^2}\right]$$

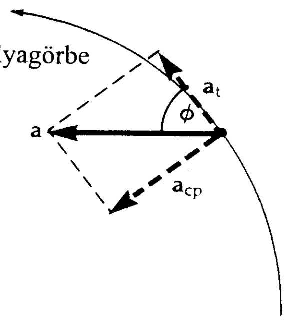


4-4 ábra

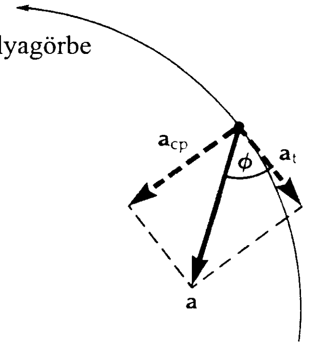
Az *egyenletes* körmozgás során a sebességvektor a) és a gyorsulásvektor b) merőleges egymásra.

Az egyenletes körmozgást végző test minden pillanatban a pálya középpontja felé mutató v^2/r centripetális gyorsulással rendelkezik (4-4 ábra). *Vegyük észre, hogy a test sohasem kerül közelebb a középponthoz, bár mindig ebben az irányban gyorsul.*

Ha a mozgás *nem egyenletes* (azaz ha a részecske sebessége nő vagy csökken), akkor *dv/dt* tangenciális gyorsulás is fellép (4-2 egyenlet). Így ez esetben mind az $a_t = dv/dt$ *tangenciális gyorsulást*, mind a kör középpontja felé mutató $a_{cp} = v^2/r$ *centripetális* gyorsulást figyelembe kell vennünk. A tangenciális gyorsulás a mozgás irányába mutat, ha a részecske sebessége nő, és azzal ellentétes, ha a részecske sebessége csökken. A centripetális gyorsulás azonban mindig *sugár irányban befelé* mutat. A teljes gyorsulás két, egymásra merőleges komponensét a 4-5 ábra mutatja. A Pitagorasz tétel felhasználásával adódik, hogy az **a** eredő gyorsulás nagysága $a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2}$, iránya pedig az ábrán látható ϕ szöggel adható meg.



a) A részecske *gyorsulva* mozog a körpályán.



b) A részecske *lassulva* mozog a körpályán.

4-5 ábra

Ha a körmozgást végző test sebességének nagysága is változik, akkor az a_{cp} és a_t gyorsulás-összetevők eredője adja a teljes **a** gyorsulásvektort.

4-1 PÉLDA

Mekkora a gyorsulása annak a részecskének, amely egy lemezjátszó állandó, percenként 33,3 fordulatszámmal forgó korongján a középponttól 12 cm-re helyezkedik el?

MEGOLDÁS

Mivel a lemezjátszó állandó sebességgel forog, csak centripetális gyorsulás lép fel:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}$$

Az egy fordulat megtételéhez szükséges T időt **periódusidőnek** nevezzük:

$$T = \left(\frac{1}{33{,}3}\right)[\text{perc}]\underbrace{\left(\frac{60\text{s}}{1[\text{perc}]}\right)}_{\text{Átszámítási tényező}} = 1{,}80 \text{ s}$$

A v sebesség:

$$v = \frac{\text{egy fordulat alatt megtett út}}{\text{egy fordulathoz szükséges idő}} = \frac{2\pi r}{T}.$$

Így
$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2(0{,}12\,\text{m})}{(1{,}80\,\text{s})^2} = 1{,}46\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Vegyük észre, hogy a részecske a kör középpontja felé gyorsul, bár sebessége, amint azt a 4-4 ábra mutatja, a kör érintőjének irányába mutat. Ez azt a tényt is illusztrálja,. hogy görbe vonalú pályán mozgó test gyorsulásvektora sohasem lehet azonos irányú a sebességvektorral. Az a_{cp} irányát **v** vektor irányának változása szabja meg, ami ebben az estben a sugár irányban befelé mutató v sebességre merőleges.

4-2 PÉLDA

Egy gépkocsi 20 m sugarú körpályán mozog és sebességét másodpercenként 0,6 m/s-mal növeli. Határozzuk meg a) gyorsulásának tangenciális komponensét, b) gyorsulásának centripetális komponensét, valamint c) a teljes gyorsulás nagyságát és irányát abban az időpontban, midőn a gépkocsi pillanatnyi sebessége éppen 4 m/s.

MEGOLDÁS

a) A gyorsulás a_t tangenciális összetevője csak a sebesség megváltozásának mértékétől függ, azaz a feladat megfogalmazása szerint

$$a_t = 0{,}600\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

b) A gyorsulás a_{cp} centripetális összetevője a pálya r sugarától és a v pillanatnyi sebességtől függ:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{(20\,\mathrm{m})} = 0{,}800\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

c) A gyorsulás komponenseit a 4-5 ábra mutatja. Ennek alapján a Pitagorasz tétel felhasználásával a teljes gyorsulás nagyságára

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} = \sqrt{\left(0{,}600\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) + \left(0{,}800\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)} = 1{,}00\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

adódik. Az **a** eredő gyorsulás irányát az **a** gyorsulás és valamely ismert irány által bezárt szöggel adhatjuk meg. Ha pl. a mozgás irányát használjuk vonatkoztatási irányként, akkor az **a** vektornak az ezzel bezárt szöge:

$$\phi = \mathrm{arc\,tg}\frac{a_{cp}}{a_t} = \mathrm{arc\,tg}\frac{0{,}800\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}600\,\mathrm{m/s^2}} = 53{,}1^\circ$$

A körpályán mozgó részecskék mozgásának leírására megfelelően alkalmazhatók a 4-6 ábrán látható, egymásra merőleges $\hat{\mathbf{r}}$ és $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ **egységvektorok.**

Egységvektorok ($\hat{\mathbf{r}}$ és $\hat{\boldsymbol{\theta}}$)

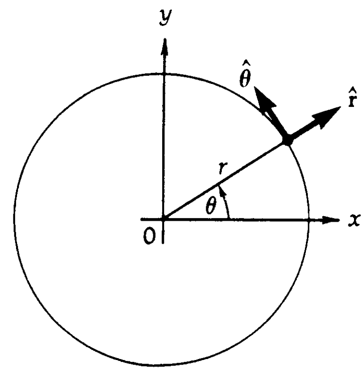
Az $\hat{\mathbf{r}}$ egységvektor mindig radiálisan kifelé mutat

Az $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ egységvektor a pálya érintőjébe esik és a θ szög növekedésének**Error! Objects cannot be created from editing field codes.** az irányába mutat (*a* +*x* tengelytől az óramutató járásával ellenkező irányba haladva).

Ezek az egységvektorok „együtt mozognak" a részecskével, így a nyugvó koordinátarendszerhez képest irányuk a mozgás során változik. Ezekkel az egységvektorokkal az **a** teljes gyorsulás kifejezhető a következőképpen:

Teljes gyorsulás (a) (körmozgás)

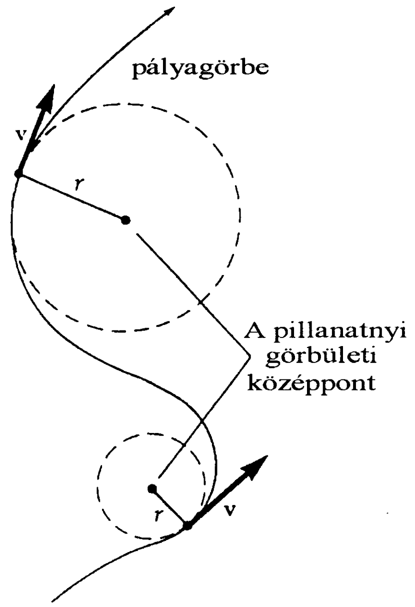
$$a = \underbrace{-\frac{v^2}{r}}_{\substack{a_{cp}\\ \text{(sugár}\\ \text{irányban}\\ \text{befelé)}}}\hat{\mathbf{r}} + \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\substack{a_t\\ \text{(érintő}\\ \text{irányban)}}}\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad \textbf{(4-9)}$$



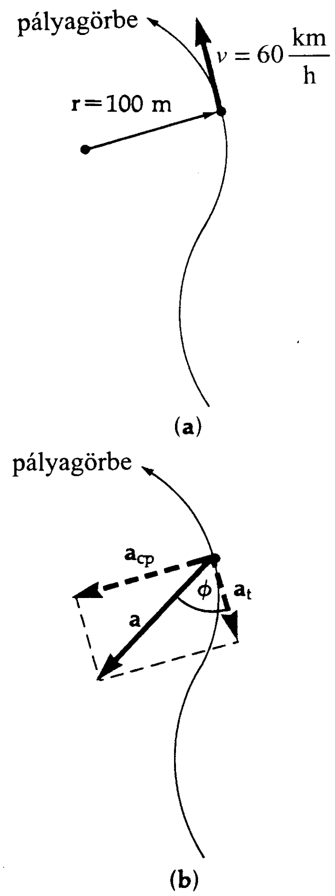
4-6 ábra

Az $\hat{\mathbf{r}}$ és $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ egységvektor

Az a_{cp} centripetális összetevő előtti negatív előjel azt mutatja, hogy az a_{cp} centripetális komponens a kifelé mutató $\hat{\mathbf{r}}$ egységvektor irányával ellentétes, mindig befelé mutat. Ha a részecske lassul, akkor az érintő menti a_t komponens is negatívvá válik.



4-7 ábra
Tetszőleges görbevonalú pályán mozgó részecske



4-8 ábra
A 4-4 példához. Egy gépkocsi görbevonalú pályán lassít. Mivel az autó lassít, a_t érintőmenti gyorsulása a mozgás irányával ellentétes.

4-3 PÉLDA

Fejezzük ki az előző feladatban leírt gépkocsi gyorsulását az $\hat{\theta}$ és $\hat{\mathbf{r}}$ egységvektorok segítségével.

MEGOLDÁS

Feltételezve, hogy a gépkocsi a pozitív **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** irányban mozog, akkor a gyorsulás érintő irányú komponense negatív.

Így $$\mathbf{a} = -\left(1{,}39\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\hat{\theta} - \left(2{,}78\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\hat{\mathbf{r}}$$

4.4 Általános görbe vonalú mozgás

Az előzetesen tárgyaltak némi kiterjesztésével tetszőleges görbe vonalú pályán, változó sebességgel haladó részecske mozgása is tárgyalható (4-7 ábra). Ilyen pálya bármely pontjában definiálható egy ún. görbületi kör, amelynek r sugarát a pálya pillanatnyi görbületi sugarának, középpontját pedig a pálya pillanatnyi görbületi középpontjának nevezzük.* Ha ismerjük a pillanatnyi r, v és dv/dt értékeket, akkor az a_{cp} és a_t összetevőket a megszokott módon számíthatjuk ki. Általános esetben természetesen ezeknek az összetevőknek a nagysága és iránya folytonosan változik, de a pillanatnyi értékek ismeretében a számítások egyszerűen elvégezhetők.

4-4 PÉLDA

Egy gépkocsi görbe vonalú úton halad. Amint egy 100 m görbületi sugarú szakaszra ér, a vezető másodpercenként 5 km/órával csökkenti sebességét (4-8 ábra). Mekkora a gépkocsi gyorsulása abban a pillanatban, amikor 60 km/óra sebességgel mozog?

MEGOLDÁS

A szokásos módon, a tangenciális és centripetális gyorsulás összetevőket külön-külön határozzuk meg. Először számítsuk ki a tangenciális összetevőt:

$$a_t = \left(\frac{5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{1\,\text{s}}\right)\underbrace{\left(\frac{1000\,\text{m}}{1\,\text{km}}\right)\left(\frac{1\,\text{h}}{60\,\text{perc}}\right)\left(\frac{1\,\text{perc}}{60\,\text{s}}\right)}_{\text{átszámítási tényező}} = 1{,}39\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Mivel az autó lassul, a gyorsulás tangenciális komponensének iránya az autó mozgásának irányával ellentétes. A centripetális gyorsulás-összetevő meghatározásához először számítsuk át a sebesség mértékegységét m/s-ra.

---

* Egy görbe adott pontjához tartozó görbületi kör másodrendűen érinti a görbét, ami azt jelenti, hogy az adott pontban első és második deriváltjuk megegyezik. *(Fordító megjegyzése)*

$$v = \left(60\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\underbrace{\left(\frac{1000\,\text{m}}{1\,\text{km}}\right)\left(\frac{1\,\text{h}}{60\,\text{perc}}\right)\left(\frac{1\,\text{perc}}{60\,\text{s}}\right)}_{\text{átszámítási tényezők}} = 16{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ekkor

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(16{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{100\,\text{m}} = 2{,}78\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ez az összetevő merőleges a pályára és a pillanatnyi görbületi középpont felé mutat.
A teljes gyorsulás nagysága

$$a = \sqrt{a_x + a_y} = \sqrt{\left(1{,}39\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 + \left(2{,}78\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2} = 3{,}11\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A gyorsulás irányát a pálya érintőjétől mért ϕ szöggel a 4-8b ábrán látható módon határozzuk meg.

$$\phi = \text{arc tg}\left(\frac{a_{cp}}{a_t}\right) = \text{arc tg}\left(\frac{2{,}78\,\text{m}/\text{s}^2}{1{,}39\,\text{m}/\text{s}^2}\right) = 63{,}4^\circ$$

Összefoglalás

A körmozgást végző testnek a kör középpontjától mért helyzetvektorát **r**-rel jelöljük.

Helyzetvektor: $\mathbf{r}$

Sebességvektor: $v = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$

Gyorsulásvektor: $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$

A **v** sebességgel körpályán mozgó részecske a kör középpontja felé mutató centripetális gyorsulással rendelkezik.

Centripetális gyorsulás (a kör középpontja felé mutat) $a_{cp} = \dfrac{v^2}{r}$ (a sebesség irányának változása miatt lép fel)

Vegyük észre, hogy a körmozgást végző test, bár mindig a kör középpontja felé gyorsul, ahhoz sohasem kerül közelebb.

A *nem egyenletes* körmozgást végző test (a test sebessége nő vagy csökken) az a_{cp} centripetális gyorsulás mellett a_t tangenciális gyorsulással is rendelkezik.

Tangenciális gyorsulás (a pálya érintőjében fekszik) $a_t = \dfrac{dv}{dt}$ (a sebesség nagyságának változását jelzi)

Ha a test sebességének nagysága nő, akkor az a_t tangenciális gyorsulás a *mozgás irányába* mutat, ha csökken, akkor a_t a *mozgás irányával ellentétes.*

A teljes (eredő) gyorsulás nagysága:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2}\,.$$

Az eredő gyorsulás irányát egy adott – ismert iránnyal (pl. a pálya érintőjével) bezárt szöggel, vagy az $\hat{\mathbf{r}}$ és $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ egységvektorokkal adjuk meg.

Tetszőleges, görbevonalú mozgás a pálya minden pontjában a görbületi körével jellemezhető, amelynek középpontja a pillanatnyi *görbületi középpont* és sugara a pillanatnyi *görbületi sugár* folytonosan változik. Ha r, v és $\dfrac{dv}{dt}$ minden időpontban ismert, akkor a gyorsulás összetevői a körmozgásnál tárgyalt módon számíthatók ki.

Kérdések

1. Milyen mozgást végez az a gépkocsi, amely gyorsul, de sebessége sem nem nő, sem nem csökken?
2. Lehetséges-e, hogy egy test pillanatnyi sebessége zérus, pillanatnyi gyorsulása azonban nem? Lehetséges-e, hogy a gyorsulás zérus, de a sebesség nem?
3. Változhat-e egy test sebessége úgy, hogy közben a sebesség nagysága állandó marad?
4. A függőleges zuhanórepülést végző gépet a pilóta kihúzza a zuhanásból. Mit jelent az, hogy a pilóta g többszörösének megfelelő gyorsulást érez?

5. Az automata mosógép centrifugálása során mennyire becsülhető a ruha gyorsulása? Az eredményt adjuk meg g egységekben!
6. A Föld forgása következtében az egyenlítő egy pontja kb. 1600 km/h sebességgel mozog. Írjuk le, hogy pontosan milyen vonatkoztatási rendszerben érvényes ez az állítás!
7. Lehetséges-e, hogy egy görbevonalú pályán mozgó test eredő gyorsulása a) sugár irányban kifelé mutasson; b) érintő irányú legyen; c) bármilyen más irányú legyen, mint a sugár irányú befelé mutató vektor.

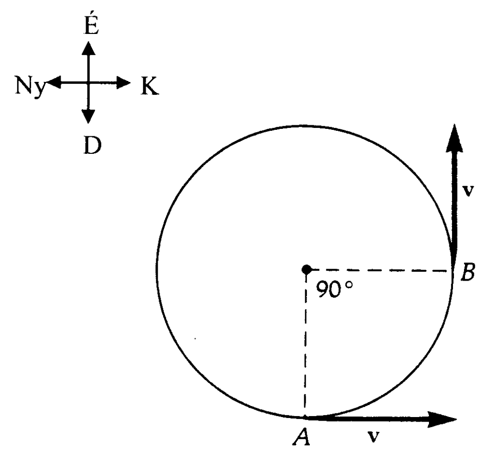
Feladatok

4.2 Polárkoordináták

4A-1 A Földről nézve a Nap és a Hold látószöge egyaránt kb. 0,5°. a) Mekkora ez a szög radiánban? b) Mekkora a látószöge egy 25 mm átmérőjű tízforintos érmének, ha kartávolságból (kb. 60 cm) nézzük?

4A-2 A Földről nézve a Nap 0,5°-os látószögben látszik. Milyen távol kell tartani szemünktől a 25 mm átmérőjű tízforintost, hogy teljesen eltakarja a Napkorongot?

4B-3 Egy versenypálya két egyenes szakaszát 500 m sugarú, körív alakú, 800 m hosszú kanyar köti össze. Határozzuk meg az egyenes szakaszok által bezárt kisebbik szöget!



4-9 ábra
A 4A-4 feladathoz

4.3 A körmozgást végző test sebessége és gyorsulása
4.4 Általános görbevonalú mozgás

4A-4 Egy gépkocsi a 4-9 ábrának megfelelően 12 m/s állandó sebességgel halad egy 40 m sugarú körív alakú pályán a vízszintes síkban. Határozzuk meg a sebességvektor Δv változását azon idő alatt, míg az A pontból kelet felé haladva a B pontba jut (ahol észak felé indul). Rajzoljunk Δv meghatározására vektorábrát!

4A-5 Felszállás előtt egy helikopter motorját percenként 300 fordulattal járatják be. Mekkora sebességgel mozog a 4 m hosszú légcsavarszárny csúcspontja?

4B-6 Egy részecske 10 m/s állandó sebességgel körpályán mozog. Határozzuk meg a sebességvektor változásának nagyságát és irányát mialatt a részecske a kör kerületének a harmadát befutja.

4A-7 A Hold jó közelítéssel körpályán mozog a Föld körül. Mekkora a centripetális gyorsulása? (Használjuk fel az L függelék adatait!)

4A-8 A Bohr modell szerint a hidrogénatom elektronja $5{,}29\times10^{-11}$ m sugarú pályán $2{,}19\times10^{6}$ m/s sebességgel mozog a magot alkotó proton körül. Mekkora az elektron gyorsulása?

4A-9 Vidámparki körhinta vízszintes síkú, 5 m-es sugarú pályán mozog. Mekkora lehet az utasok maximális sebessége, ha a centripetális gyorsulásuk nem haladja meg a 0,4 g értéket?

4A-10 Egy lemezjátszó percenként 33 1/3 fordulatszámmal forgó korongján a tengelytől 10 cm távolságban ül egy hangya. Mekkora a hangya gyorsulása?

4A-11 A nagy gyorsulásoknak az emberi testre gyakorolt hatását úgy tanulmányozzák, hogy az űrhajósokat egy 15 m hosszú rúd végéhez rögzített kabinban vízszintes síkú körpályán megforgatják. a) Mekkora az űrhajós gyorsulása, ha a kabin 23 fordulatot tesz meg percenként? b) Hányszorosa ez a gyorsulás a nehézségi gyorsulásnak?

4A-12 A modern ultracentrifugákkal $10^9\,g$ nagyságú centripetális gyorsulást lehet előállítani. Ezekben az eszközökben a szokásos mechanikai csapágyazás helyett mágneses felfüggesztést használnak a forgás súrlódásmentessé tételére. A nagy sebességű ultracentrifugákkal az 50 atomi tömegegységtől a dohány mozaikvírus durván 100 millió atomi tömegegységéig terjedő tartományban 1 %-os pontossággal határozható meg a molekulák atomtömege. A centrifugákban a vizsgált anyagot kicsiny, 10^{-2} mm-es sugáron forgatják. a) Mekkora az ultracentrifuga maximális fordulatszáma? b) Mekkora sebességgel mozog ekkor a vizsgált anyag? (Megjegyzés: Hasonló sugarú kicsiny acélgolyók a centrifugális hatások következtében 1000 m/s kerületi sebesség körül már szétrobbannak.)

4B-13 A tipikus pulzárokról úgy hisszük, hogy kb. 40 km sugarú, másodpercenként 1 fordulatot tevő, különlegesen sűrű neutroncsillagok. a) Mekkora a neutroncsillag egyenlítőjén elhelyezkedő részecske gyorsulása? b) Mekkora a 45. szélességi körön (azaz az egyenlítő és a pólus között félúton) lévő részecske gyorsulása? c) Milyen irányban gyorsul a b) kérdés szerint mozgó részecske?

4B-14 Chicago az északi szélesség 41,9°-án helyezkedik el. Mekkora a város centripetális gyorsulása a Föld forgása következtében?

4B-15 Légturbinával hajtott nagysebességű fogorvosi fúrógép 350 000 fordulat/perc fordulatszámmal forog. A fúrófej átmérője 1 mm. a) Mekkora a fej egy kerületi pontjának sebessége? b) Mekkora egy kerületi pont gyorsulása? Hányszorosa ez a nehézségi gyorsulásnak?

c) Mekkora egy kerületi pont tangenciális gyorsulása, ha a fúrót 1,2 s alatt egyenletesen lassulva leállítjuk?

4B-16 Az L függelék adataira támaszkodva a) határozzuk meg az egyenlítő egy pontjának a Föld forgása következtében fellépő gyorsulását. b) Határozzuk meg a Föld Nap körüli keringése miatt fellépő centripetális gyorsulását!

4B-17 Vidámparki 25 m átmérőjű, függőleges síkú óriáskerék 5 fordulat/perc fordulatszámmal forog. A kereket 9 s alatt lefékezik. Mekkora egy utasnak a gyorsulása (nagyság és irány szerint) a fékezés után 6 másodperccel? Készítsünk vázlatot, amely feltünteti az óriáskerék forgásirányát, az utas **a** gyorsulásvektorát és a gyorsulásvektornak a radiálisan befelé mutató iránnyal alkotott ϕ szögét!

4B-18 Egy sólyom 12 m sugarú, vízszintes síkú íven 4 m/s sebességgel repül. a) Mekkora a centripetális gyorsulása? b) Mekkora a sólyom gyorsulásának nagysága és iránya, ha pályájának síkja és íve nem változik, de 1,2 m/s^2 gyorsulással növelni kezdi sebességét?

4B-19 Egy gépkocsi 10 m/s állandó sebességgel mozog a 80 m sugarú kanyarban. a) Mekkora a gyorsulása? b) Mekkora a tangenciális gyorsulás, ha a kocsi 6 s alatt megáll a kanyarban? Hogyan változik a teljes gyorsulás iránya és nagysága ezalatt? A gyorsulásvektor szemléltetésére készítsünk rajzos vázlatot is!

4B-20 A gyorsulás mérésére gyorsulásmérő eszközöket készítenek. Egy gyorsulásmérővel felszerelt gépkocsi vezetője megfigyelte, hogy mialatt állandó, 72 km/ó sebességgel mozog, a gyorsulásmérő jobbra mutató, 0,15 g gyorsulást jelez. (A gyorsulásmérők skálája gyakran g egységekben mutatja az eredményt.) a) Határozzuk meg a kanyar görbületi sugarát! b) Jobbra vagy balra fordul az autó?

4B-21 Egy versenyautó 1,6 km kerületű körpályán állandó gyorsulással 64 km/óráról 128 km/órára növeli sebességét, és közben 1,2 km utat tesz meg. a) Mekkora az érintő menti gyorsulás? b) Mekkora a gépkocsi centripetális gyorsulása, amikor a sebesség 128 km/ó?

4B-22 A vidámpark egy járatán, a 6 m átmérőjű, nagyméretű, vizszintes forgó korong peremén ül egy asszony. Nyugalmi helyzetéből kiindulva egyenletes gyorsulással 6 s alatt 0,5 fordulat/s fordulatszámot ér el. a) Mekkora a szöggyorsulása radián/s^2-ben? b) Mekkora az asszony érintő menti és sugár irányú gyorsulása 3 s-mal az indulás után? c) Mekkora ebben az időpontban a teljes gyorsulás? A gyorsulás szemléltetésére készítsünk vázlatot.

További feladatok

4C-23 A mesterséges holdak körpályán való egyenletes sebességű mozgása akkor stabilis, ha centripetális gyorsulásuk a pálya sugarának négyzetével fordítottan arányos. a) Mutassuk meg, hogy a műhold tangenciális sebessége a pályasugár négyzetgyökével fordítva arányos. b) Mutassuk meg, hogy az egy fordulat megtételéhez szükséges idő a pályasugár 3/2-ik hatványával arányos.

4C-24 Egy 10 m sugarú körpálya elhelyezkedését derékszögű (x, y) koordinátákkal adjuk meg. A $t = 0$ pillanatban egy motoros a $+x$ irányban állandó, 3 m/s sebességgel éppen az origón halad át. a) Határozzuk meg, hogy mennyi idő alatt teszi meg a motoros a pálya 1/4 részét! b) Határozzuk meg a motoros x és y koordinátáját 8 s-mal az origón való áthaladás után! c) Határozzuk meg, hogy mekkora a motoros elmozdulása irány és nagyság szerint a mozgás 8. és 12. másodperce között! d) Mekkora a c) ben jelzett időintervallum kezdetén és végén a motoros pillanatnyi sebessége nagyság és irány szerint? e) Válaszoljunk a d) kérdésre sebesség helyett a pillanatnyi gyorsulást illetően!

4C-25 Egy versenyautó 210 km/ó sebességgel mozog a 2 km kerületű körpályán, majd egy teljes kört megtéve egyenletesen lassítva megáll. a) Mekkora az autó tangenciális gyorsulása? b) Mekkora a centripetális gyorsulás 1 km-rel a megállás előtt? c) Mekkora ebben a pillanatban az eredő gyorsulás? (Adjuk meg a gyorsulás irányát és nagyságát is, az irány jelölésére készítsünk vázlatot, ami világosan mutatja a gyorsulás iránya és az autó mozgása közötti kapcsolatot.)

4C-26 Egy 300 m-es állandó görbületi sugarú úton haladó autó 1,2 m/s^2 gyorsulással fékezni kezd. a) Határozzuk meg az autó gyorsulásának irányát és nagyságát abban az időpontban, amikor sebessége 15 m/s. Készítsünk vázlatot a gyorsulásvektor irányának jelzésére.

4C-27 Egy fonalra kötött labdát 0,3 m sugarú, a talaj felett 1,2 m magasban levő, vízszintes síkú körpályán állandó sebességgel pörgetünk. A fonal hirtelen elszakad és a labda attól a ponttól 2 m távolságban ér talajt, amelyet úgy kapunk, hogy az elszakadás pillanatában elfoglalt helyzetét függőlegesen a talajra vetítjük. Mekkora volt a labda centripetális gyorsulása, amíg körmozgást végzett?

4C-28 Egy lövedéket a vízszintes síkhoz képest θ szög alatt v_0 sebességgel lövünk ki. Fejezzük ki a röppálya tetőpontjához tartozó görbületi kör r sugarát a v_0, θ_0 és g függvényében.

AZ 1–23 FEJEZETEK PÁRATLAN SZÁMOZÁSÚ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

II. Fejezet

2A-1 200 km
2A-3 1 fényév = $9{,}46 \times 10^{15}$ m; 1 pc = $3{,}09 \times 10^{16}$ m
2A-5 0,447%
2A-7 49,4
2B-9 7,40 perc; az óra hosszabb
2A-11 $6{,}67 \times 10^{-22}$ s
2A-13 1,63 cm/év
2A-15 55,4 s
2B-17 lehetetlen
2B-19 a) 1,20 m/s b) 7,00 s c) –1,54 m/s (közelítőleg)
2B-21 62,5 m/s^2
2B-23 $2{,}65 \times 10^4$ m/s^2
2A-25 2,59 m/s
2A-27 0,639 s
2A-29 a) 1,63 s b) 9,96 m/s c) 13,1 m
2A-31 a) 5,00 s b) 75,0 m
2B-33 3,34 s
2B-35 0,804 s; 0,0127 s
2B-37 a) –1,5 m/s^2 b) 4 s c) 5,33 m
2B-39 a) $6t^2$ b) $3t$
2B-41 a) 2 m; 3 m/s; 4 m/s^2 b) $v = 3 - 8t$ c) –8 m/s^2 d) 0,375 s e) 2,56 m
2B-43 c) –4 m/s d) 34,0 m
2B-45 $x(2) = 2$ m; $x(4) = 6$ m; $x(6) = 14$ m; $x(10) = 22$ m
2B-47 $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}$
2C-49 a) 12,8 m/s b) 5,90 m
2C-51 12,2 m/s
2C-53 a) 7 m/s b) –5,35 m/s c) –9,8 m/s^2
2C-55 a) 46,2 s b) 34,6 m/s
2C-57 14,2 s
2C-59 $4{,}83 \times 10^{-3}$ m/s^2
2C-61 a) 26,4 m b) 6,89%
2C-63 a) 41,5 s b) 20,7 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ c) 10,4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
2C-65 a) $v = 3At^2$ b) $\alpha = 6At$ c) 0,0533 m/s^3

III. Fejezet

3A-1 a) 7 osztásrészt b) 36,9°; 5 osztásrész
3A-3 a) $C = 6\hat{x} + 5\hat{y}; D = -2\hat{x} + 7\hat{y}$
b) C = 7,81; 39,8°; D = 7,28; 106°
3B-5 C = 5,39; 21,8°; D = 6,08; 80,5°; E = 10,8; 248,2°
3A-7 a) $C = \hat{y} - 2\hat{z}$; 2,24 m
b) $D = 4\hat{x} + 5\hat{y} - 6\hat{z}$; 8,78 m
3B-9 2,50 m/s
3B-11 a) 4,87 km; 61,4° délnyugatra b) 23,3 m/s
c) 13,5 m/s; 61,4° délnyugatra
3B-13 16,1° a horizont alatt
3A-15 13,6 m
3B-17 24,7 m/s
3B-19 55,4 m/s
3B-21 a) 11,1 m/s b) 24,7 m/s; 26,5° a függőlegestől
3B-23 a) 21,9 m b) 2,74 s c) 14,1 m
d) 21,4 m/s; 13,9° a függőlegestől
3C-25 a) $6\hat{x} - 2\hat{y} + 2\hat{z}$ b) $2\hat{x} + 4\hat{y} - 6\hat{z}$
c) $6\hat{x} + 5\hat{y} - 8\hat{z}$
3C-27 (2,44 m, 11,9 m)
3C-29 $R = \dfrac{v_o^2 \sin 2\theta}{g}$
3C-31 A válasz adott.
3C-33 $Y_m = \dfrac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$
3C-35 A válasz adott.
3C-37 $y = (\operatorname{tg}\theta)x - \left[\dfrac{g}{2(v_o\cos\theta)^2}\right]x^2$
3C-39 $\phi = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}\theta}{2}\right)$

IV. Fejezet

4A-1 a) $8{,}73 \times 10^{-3}$ rad b) 0,030 rad
4B-3 91,7°

4A-5 126 m/s
4A-7 $2{,}72 \times 10^{-1}$ m/s^2
4A-9 4,43 m/s
4A-11 a) 87,0 m/s^2 b) 8,88g
4B-13 a) $7{,}90 \times 10^5$ m/s^2 b) $5{,}58 \times 10^5$ m/s^2
4B-15 a) 18,3 m/s b) $6{,}85 \times 10^4$g
4B-17 0,821 m/s^2;62,4°
4B-19 a) 1,25 m/s^2 az út görbületi középpontja felé
b) −1,67 m/s^2
c) 1,85 m/s^2;64,4° a radiális irányhoz képest hátrafelé
4B-21 a) 2,37 m/s^2 b) 4,96 m/s^2
4C-23 A válasz adott.
4C-25 0,851 m/s^2 b) 5,34 m/s^2
c) 5,41 m/s^2;9,04° a radiális irányhoz képest hátrafelé
4C-27 54,4 m/s^2

V. Fejezet

5A-1 a) 720 N b) 72 kg c) 200 N
d) 20 kg e) 720 N f) 200 N
5A-3 282 kg
5A-5 a) 4,00 m/s^2 b) 8,00 m
5A-7 a) 90 N b) 3 s
5A-9 a) 31,25 m b) 12,5 m/s
5A-11 14,8°
5A-13 1,63 m/s^2
5B-15 a) 26,53 N b) 53,1°a horizont alatt
c) egyenes vonalban
5B-17 b) 359 N
5B-19 a) 0,102 s b) 0,0255 m
5B-21 a) 6 m/s^2 b) 8100 N c) 5400 N
5A-23 a) 170 N b) 170 N
5A-25 1350 N
5A-27 6,39 N
5A-29 a) 0,300 m/s^2 b) 0,900 N
5B-31 $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\theta}{g}}$
5B-33 a) 2,05 kg b) 16,0 N
5B-35 a) 3,33 m/s^2 b) 24 N c) 0,55 m/s
5B-37 a) 4,90 m/s^2 b) 1,96 m/s^2
5B-39 4,70 kg
5A-41 a) 8,40 N b) 15,7 N
5A-43 7,00 s
5A-45 0,364
5A-47 0,732
5B-49 28,7 m
5B-51 35,25 N
5B-53 a) 0,204 b) 90,8 N
5B-55 20113 N
5B-57 b) gR/v^2
5B-59 A válasz adott.
5B-61 31,4 N
5B-63 a) 600 N b) 1100 N
5C-65 a) 4,92 N b) 16,7 N
5C-67 0,143 m
5C-69 A válasz adott.
5C-71 a) 1984 N b) 12,43° c) 1448 N
5C-73 A válasz adott.
5C-75 0,209 fordulat/s

VI. Fejezet

6A-1 $1{,}8 \times 10^5$ joule
6A-3 270 joule
6A-5 960 J
6A-7 a) 417 N/m b) 3,00 J
6B-9 b) $k_1/(k_1 + k_2)$
6A-11 38,5 m
6B-13 a) 60 J b) 10 J c) 7,75 m/s d) 3,16 m/s
6B-15 a) $2{,}25 \times 10^4$ N b) $1{,}33 \times 10^{-4}$ s
6A-17 a) $9{,}75 \times 10^4$ N/m b) 3,12 J
6A-19 1390 J
6A-21 0,029 J
6B-23 a) 6,86 m/s^2 b) 6,41 m/s
6A-25 124 J
6A-27 115 J
6B-29 a) 980 J b) 355 J
6B-31 1,68 m/s
6B-33 a) 104 J b) 88,2 J c) 15,8 J d) 1,98 N
6A-35 1,154 kW
6B-37 403,2 Ft
6A-39 12 kW
6B-41 141 kW
6A-43 39,2 kW
6A-45 42,92 kW
6B-47 35,26 kW
6A-49 4
6A-51 egyetlen csiga
6B-53 $1{,}76 \times 10^4$ N
6B-55 280 N
6C-57 22,0 J
6C-59 a) $mg\cos\left(\dfrac{s}{R}\right)$ b) mgR
6C-61 A válasz adott.
6C-63 $\dfrac{k_1 l_1 + k_2(L - l_2)}{k_1 + k_2}$
6C-65 $9{,}6 \times 10^5$ N/m^2
6C-67 0,303 m/s
6C-69 c) $k_2/(k_1 + k_2)$
6C-71 A válasz adott.
6C-73 242 J
6C-75 A válasz adott.

VII. Fejezet

7A-1 a) N·m^3 b) 2C/r^3
7A-3 a) $-3ax^2 + 2bx$ b) $x = b/3a$