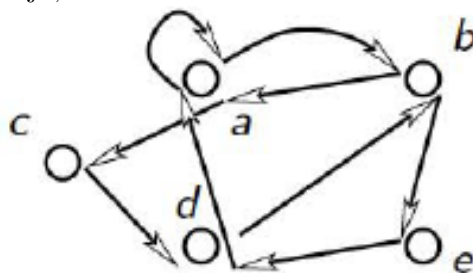
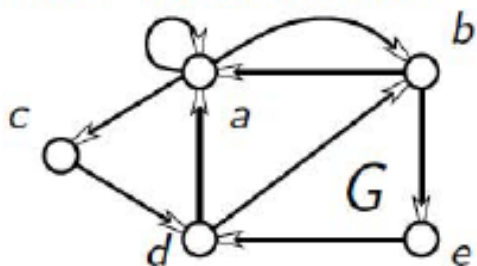


0.1 Euler-séták

Def: A G gráf **Euler-(kör)sétája** a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.



Megj: (1) A fenti definíció 2×2 fogalmat definiál: az Euler-sétát és az Euler-körsétát irányítatlan és irányított gráfra is. (2) Szokás a definíciót abban a formában kimondani, hogy az Euler-(kör)séta G minden élét **pontosan** egyszer tartalmazza. Tekintettel arra, hogy egy séta nem mehet át kétszer ugyanazon az élen, ez redundáns kiváncsálgatás, hiszen következménye az általunk használt definíciónak. Használatos ezen kívül az Euler-kör ill. Euler-út megnevezés is a fenti fogalmakra. (3) Irányítatlan Euler-séta: " G egy vonallal lerajzolható".

Cél: Gyors módszer az Euler-(kör)séta megtalálására, létezésének ellenőrzésére.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

- (a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
- (b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(b) Ha végighaladunk az Euler-körsétán, akkor a v csúcsba pontosan annyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk onnan. A körséta G minden élét pontosan egyszer érinti: $\rho(v) = \delta(v)$

□

Megf: (2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor

- (a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
- (b) G -ben minden fokszám páros.

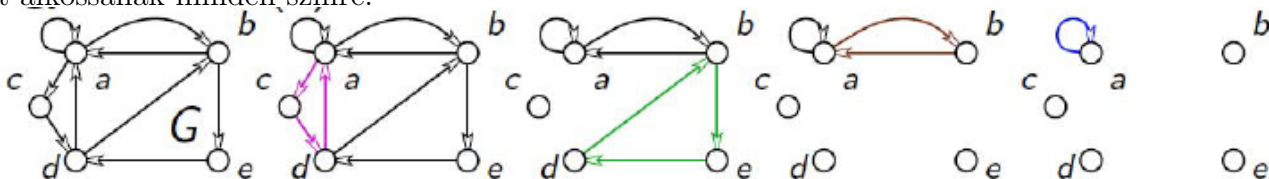
Megf: (3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor

- (a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
- (b) G -nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Megj: A fenti Megfigyelés segítségével bizonyos esetekben azonnal látszik, hogy G -nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

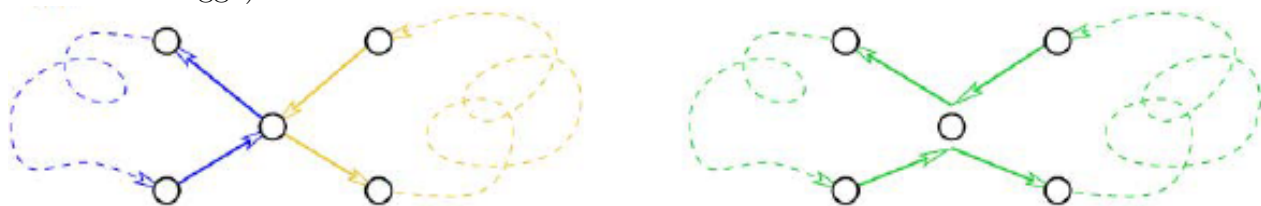
G **irányítatlan Euler-gráf**, ha G minden v csúcsra $d(v)$ páros.

Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (irányított) kört alkotnak minden színre.



Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) \iff (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő)

(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) \iff (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve összefüggő)



Tétel: (3) $(G \text{ irányítatlan gráfnak van Euler-sétája}) \iff (G \text{ izolált pontoktól eltekintve összefüggő és } 0 \text{ vagy } 2 \text{ páratlan fokú csúcsa van.})$

Euler-körséta keresése Euler-gráfban: $E(G)$ -t felbontjuk körsétákra, amiket összevarrunk. Körsétát a felbontáshoz pl. úgy is kereshetünk, hogy addig követünk egy sétát, amíg tudunk. Előbb-utóbb elakadunk, de ez csakis a séta kiindulási pontjában történhet meg. Ezért a bejárt séta egy körséta, amit a felbontásban felhasználunk.

0.2 Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf **Hamilton-köre** (**Hamilton-útja**) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

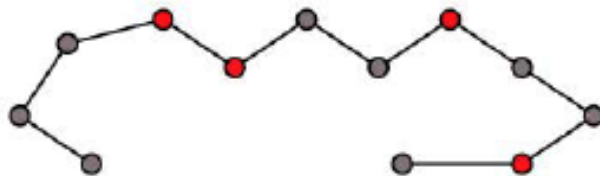
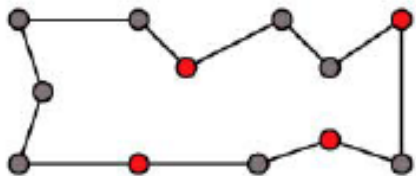
Megj: A célunk hasonló, mint az Euler-(kör)séta esetén, azaz gyors módszer, amivel el lehet dönteni egy gráfról, hogy van-e Hamilton-köre ill. -útja. Sajnos jól használható szükséges és elégséges feltételt nem tudunk adni erre a problémára, és jó oka van annak, hogy nem is számítunk ilyen feltétel létezésére. Tudunk viszont jól használható szükséges, és jól használható elégséges feltételt adni, de ezek csak bizonyos gráfok esetén hasznosak.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

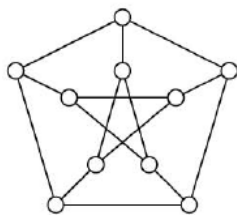
Megj: A fenti feltétel, miszerint k csúcs törlésétől a gráf legfeljebb k (ill. $k + 1$) komponensre eshet szét feltétlenül **szükséges** ahhoz, hogy G -nek legyen Hamilton-köre ill. -útja. Abból azonban, hogy G teljesíti a fenti feltételt, nem következik, hogy G -nek csakugyan van Hamilton-köre vagy útja. A szükséges feltételt úgy tudjuk alkalmazni, hogy a segítségével igazoljuk egy konkrét grárról, hogy nincs Hamilton-köre (vagy -útja). Ha pl. azt látjuk, hogy G -ből 42 csúcsot elhagyva 43 komponens keletkezik, akkor G -nek nincs Hamilton-köre. Ha a komponensszám legalább 44, akkor G -nek Hamilton-útja sincs.



Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.

- (a) Tegyük fel, hogy külső körből k_1 , a belsőből k_2 csúcsot hagytunk el. Ha $k_1 = 0$ vagy $k_2 = 0$, akkor a gráf összefüggő marad. Különben a külső kör legfeljebb k_1 , a belső pedig legfeljebb k_2 részre esik szét, vagyis összesen legfeljebb $k_1 + k_2$ komponens

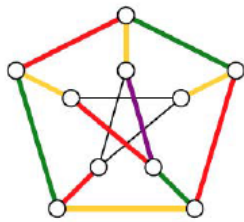


létezik.

2. Nincs Hamilton-köre.

- (a) Ha lenne Hamilton-köre, akkor a Hamilton-kör éleit felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból

pontosan egy piros, sárga ill. zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni,



kiderül, hogy nem lehet.

A továbbiakban elégséges feltételeket fogunk látni Hamilton-kör létezésére. Ezek segítségével (szerencsés esetben) gyorsan és kétséget kizáróan tudjuk bizonyítani, hogy egy adott gráfnak van Hamilton-köre. Az elégséges feltétel vizsgálata azonban nem alkalmas arra, hogy egy gráf a Hamilton-körének hiányát igazoljuk.

Def: Legyen G n -csúcsú, egyszerű gráf.

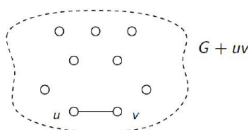
Az $u, v \in V(G)$ csúcspár **gazdag**, ha $d(u) + d(v) \geq n$. A G gráfra teljesül a **Dirac-feltétel**, ha $d(v) \geq \frac{n}{2} \forall v \in V(G)$ -re. G -re igaz az **Ore-feltétel**, ha G bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot.

Dirac tétele: G -re igaz a Dirac-feltétel $\Rightarrow G$ -nek van H-köre.

Ore tétele: G -re igaz az Ore-feltétel $\Rightarrow G$ -nek van H-köre.

Megj: A Dirac-feltétel erősebb (többet kíván), mint az Ore. Ezért az Ore-tétel erősebb, mint a Dirac: gyengébb feltételből igazolja ugyanazt. Ezért az Ore-tétel bizonyítása a Dirac-tételt is igazolja.

0.3 A Chvátal-lezárt



Hízlalási lemma: Tegyük fel, hogy G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G -nek van Hamilton-köre) $\iff (G + uv$ -nek van Hamilton köre).

Megj: A hízlalási lemma jelentősége az, hogy segít eldönteni azt, hogy van-e G -ben Hamilton-kör. Azt mondja ki ugyanin, hogy a gazdag párok közé G -be "ingyen" behúzhatunk éleket, u.i. ez nem változtat azon a tényen, hogy van vagy nincs Hamilton-kör a vizsgált gráfban. Megtehetjük tehát, hogy a lemma segítségével addig húzunk be éleket a gráfba, amíg lehet. Ha az így adódó \overline{G} Chvátal-lezártban találunk Hamilton-kört, akkor G -nek is bizonyosan van Hamilton-köre. Ha pedig \overline{G} nem tartalmaz Hamilton-kört, akkor persze G -nek nincs Hamilton-köre.

Világos, hogy $v \notin A$ és $v \notin B$, így $|A \cup B| \leq n - 1$. Mivel (u, v) gazdag pár, ezért $|A| + |B| = d(u) + d(v) \geq n$. Ezek szerint $A \cap V \neq \emptyset$, legyen pl. $v_i \in A \cap B$. Ekkor $v_1, v_2, \dots, v_i, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}, v_1$ a G egy Hamilton-köre. \square

Ore tétele: Ha G bármely két nemszomszédos csúcsa gazdag párt alkot, akkor G -nek van Hamilton-köre.

Dirac-tétele: Ha $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$, akkor G -nek van Hamilton-köre.