Gráfelméleti alapfogalmak: **csúcs, él, diagram, fokszám**. Egyszerű gráf, irányított gráf, véges gráf, komplementer gráf, reguláris gráf, él/csúcstörlés, élhozzáadás, (feszítő/feszített) részgráf, izomorfia, élsorozat, séta, út, kör,**összefüggő gráf**, komponens. **kézfogás-lemma**.

Gráfelméleti alapfogalmak:

- **csúcs, élek:**
  - G=(V,E) egyszerű irányítatlan gráf ha $V \neq \emptyset$ és $E \leq \binom{V}{2}$, ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$
  - V a G csúcsainak ((szög) pontjainak) halmaza.
  - E pedig G éleinek halmaza.
- **Diagram:** A $G = (V, E)$ gráf diagramja egy olyan lerajzolása, melyben a csúcsoknak (síkbeli) pontok felelnek meg, éleknek pedig a két végpontot összekötő, önmagukat nem metsző görbék.
- **Fokszám:**
  - $v \in V(G)$ esetén a v-re illeszkedő élek száma a v fokszáma.
  - A G gráf csúcsának d (v) foka a vé végpontú élek száma (hurokél kétszer számít).
- Egyszerű gráf: ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei.
- Irányított gráf: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.
- Véges gráf: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.
- Komplementer gráf:
  - A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V,(G), \binom{v}{2} \backslash E(G))$.
  - Két csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a fokszámai megegyeznek vagy, ha minden csúcsának foka ugyan annyi.
- Reguláris gráf: k-reguláris, ha minden csúcsának pontosan k a fokszáma.
- Él/Csúcstörlés: Ha $G = (V, E)$ gráf $e \in E$ és $v \in E$ akkor $G - e = (V, E \backslash \{e\})$ az éltörés eredménye $\rightarrow$ Feszítő részgráf (éltöréssel kapható gráf), a csúcstörléssel keletkező $G - v$ gráfhoz V-ből töröljük v-t, E-ből pedig a v-re illeszkedő éleket. Feszített részgráf: (csúcstörlésekkel kapható gráf) $\Rightarrow$ Részgráf: él- és csúcstörlésekkel kapható gráf. (jelzőnélküli részgráf) $\rightarrow$ élhozzáadás: $G(V, E)$ gráfban az $E + 1$ nő.
- Izomorfia: A G és G' gráfok akkor izomorfak, ha mindekét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n-ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G-ben, mint az u-nak és v-nek megfelelő sorszámú csúcsok között G'-ben. Jelölése: $G \cong G'$.
- Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$. (Tulajdonképp egyik csúcsból eljutunk egy másik csúcsba mindig élek mentén haladva.)
- Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.
- Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.
- Kör: $u = v$, de a kezdő (és vég)pontot nem akarjuk megnevezni, akkor zárt élsorozatról, körsétáról ill. körről beszélünk.
- **Összefüggő gráf:**
  - A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$ (ha bármely két pontja között vezet séta), ha bármely két csúcsa között vezet út G-ben (ha egy komponense van).
  - A G irányított gráfot akkor mondjuk **erősen összefüggő**nek, ha G bármely $u, v \in V(G)$ esetén van **irányított** uv-út G-ben.
  - **gyengén összefügő**, ha a G-nek megfelelő irányítatlan gráf összefüggő.
- **Komponens:**

  (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in$ esetén $v \sim v'$.

(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára.

- A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.
- $K \leq V(G)$ a G gráf komponense, ha bármely $u, v \in K$ között létezik G séta, de nem létezik uv-séta, ha $u \in K, v \in V(G) \backslash K$. (Minden gráf egyértelműen bontható komponensekre)

- **Kézfogás-lemma:** Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.
  A KFL bizonyítása: Készítsükel a G' digráfot úgy, hogy G minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítjük. Ekkor $\sum_{v \in V} d_G(V) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)|$
  Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna a kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-vel növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszámösszeget is.

- **Általánosított kézfogás-lemma:** Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(V) = |E|$, azaz a csúcsok ki- és befokainak összege is az élszámot adja meg. **Megj:** Úgy is bizonyíthattuk volna az általánosított kéfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. 0-elű (üres)gráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 1-gyel növeli az élszámot is és a ki/befokok összegét is.