16. **Mátrix transzponáltja**, transzponált determinánsa, **ESÁ hatása a determinánsra**, **előjeles aldeterminánsa**, **kifejtési tétel**.

1. Mátrix transzponáltja

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| = = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme. A $(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, aminek az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

Példa: $\begin{pmatrix} 42 & 4^2 & 4,2 \\ 42^{42} & 42! & \sqrt[42]{\sqrt[42]{42}} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 42 & 42^{42} \\ 4^2 & 42! \\ 4,2 & \sqrt[42]{\sqrt[42]{42}} \end{pmatrix}$

2. transzponált determinánsa

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.
Biz: Az A mátrix bármely bástyaelhelyezését meghatározó elemek $A^\top$-ban is bástyaelhelyezést alkotnak. Két bástya pontosan akkor alkot ÉK-DNy párt A-ban, ha $A^\top$-ban is ÉK-DNy-i párt alkotnak. Ezért $\det(A)$-ban ugyanazokat a kifejtési tagokat (ugyazzal az előjellel) kell összeadni, mint $\det(A^\top)$-ban.

3. **ESÁ hatása a determinánsra**

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.
(2) F.háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemei szorzata.

Biz: Minden kif.tag tartalmaz 0 tényezőt, kivéve a főátlóbeliek szorzata, aminek az előjele pozitív.

4. **előjeles aldetermináns**

Sakktábla-szabály

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

minden mátrix bal felső sarka pozítív ,és felváltva változik az előjel.

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.
A fenti megfigyeléssel másképp is kiszámítható a detereminváns.

5. **<u>kifejtési tétel</u>**

Megf: Tfh $\underline{e}_j$ az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix j-dik oszlopa, továbbá, hogy A első $i-1$ sora az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal az A_1 ill. A_2, az utolsó $n-i$ sor az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal pedig az A_3 ill. A_4 mátrixokat alkotja. Ekkor $j-1$ sor- és $i-1$ oszlopcserével adódik:

$$\begin{vmatrix} & 0 & \\ A_1 & \vdots & A_2 \\ & 0 & \\ ??? & 1 & ??? \\ & 0 & \\ A_3 & \vdots & A_4 \\ & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & \\ \vdots & A_1 A_2 \\ 0 & \\ 1 & ????? \\ 0 & \\ \vdots & A_3 A_4 \\ 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1+i-1} \begin{vmatrix} 1 & ????? \\ 0 & \\ \vdots & A_1 A_2 \\ \vdots & A_3 A_4 \\ 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = A_{i,j}$$

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):
$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ □

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a detereminány így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot 7 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(9-11) + 14(3-1) - (6-2) + (9-11) - (6-22) = 4 + 28 - 4 - 2 + 16 = 42$$
