

## 0.1 Mi a gráf?

**Def:**  $G = (V, E)$  egyszerű, irányítatlan gráf

**Példa:** Ha  $V \neq \emptyset$  és  $E \subseteq \binom{V}{2}$ , ahol  $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ .  $V$  a  $G$  csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),  $E$  pedig  $G$  éleinek halmaza.

**Példa:**  $G = (\{a, b, c, d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\})$

**Def:** A  $G = (V, E)$  gráf diagramja a  $G$  egy olyan lerajzolása, amiben  $V$ -nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és  $G$  minden  $\{u, v\}$  élének egy  $u$ -t és  $v$ -t összekötő görbe felel meg.

**Terminológia & konvenciók:** Gráf alatt rendszerint egyszerű, irányítatlan gráfot értünk. Ha  $G$  egy gráf, akkor  $V(G)$  a  $G$  csúchalmazát,  $E(G)$  pedig  $G$  élhalmazát jelöli, azaz  $G = (V(G), E(G))$ . Az  $e = \{u, v\}$  élt röviden  $uv$ -vel jelöljük.

Ekkor  $e$  az  $u$  és  $v$  csúcsokat köti össze. Továbbá  $u$  és  $v$  az  $e$  végpontjai, amelyek az  $e$  élre illeszkednek, és  $e$  mentén szomszédosak.

## 0.2 Multigráfok és irányított gráfok

**Megj:** Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

**Def:** Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

**Def:**  $G = (V, E)$  véges gráf, ha  $V$  és  $E$  is véges halmazok.

**Def:** Az  $n$ -pontú út,  $n$ -pontú kör, ill.  $n$ -pontú teljes gráf jele rendre  $P_n$ ,  $C_n$ , ill.  $K_n$ . ( $P_1, P_2, P_3$  elfajulók.) **Megf:**  $K_1 = P_1, P_2 = C_2, C_3 = K_3$

**Def:**  $c \in V(G)$  esetén a  $v$ -re illeszkedő élek száma a  $v$  fokszáma. Jelölése  $d_g(v)$  vagy  $d(v)$ , a hurokél kétszer számít. (Irányított gráf esetén  $\delta(v)$  (Delta) ill.  $\rho(v)$  (Rho) a  $v$  ki- ill. befokát jelöli.)

**Def:** A  $G$  gráf maximális ill. minimális fokszáma  $\Delta(G)$  ill.  $\delta(G)$ .  $G$  reguláris, ha minden csúcsának foka ugyanannyi:  $\Delta(G) = \delta(G)$ ,  $G$  pedig  $k$ -reguláris, ha minden csúcsának pontosan  $k$  a fokszáma.

**Megf:** Minden kör 2-reguláris,  $K_n$  pedig  $(n - 1)$ -reguláris.

## 0.3 Handshaking lemma

**Kézfogás-lemma (KFL):** Ha  $G = (V, E)$  véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ , azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

**Általánosított kézfogás-lemma:** Tetsz.  $G = (V, E)$  véges irányított gráfra  $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$ , azaz a csúcsok ki- és befokainak összege is az élszámot adja meg.

**Biz:** Az egyes csúcsokból kilépő éleket megszámlálva  $G$  minden irányított élét pontosan egyszer számoljuk meg. Ezért a kifokok összege az élszám. A belépő éleket leszámolva hasonló igaz, ezért a befokok összege is az élszám.  $\square$

**A KFL bizonyítása:** Készítsük el a  $G'$  digráfot úgy, hogy  $G$  minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítsük. Ekkor

$$\sum_{v \in V} d_G(V) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)| \quad \square$$

**Megj:** Úgy is bizonyíthattuk volna az általánosított kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be  $G$ -be az éleket. 0-elű (üres)gráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 1-gyel növeli az élszámot is és a ki/befokok összegét is.

**Megj:** Úgy is bizonyíthattuk volna a kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be  $G$ -be az éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-vel növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszámösszeget is.

## 0.4 Komplementer és izomorfia

**Def:** A  $G$  egyszerű gráf **komplementere**  $\overline{G} = (V, (G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$ .

**Megj:**  $G$  és  $\overline{G}$  csúcsai megegyeznek, és két csúcspontosan akkor szomszédos  $\overline{G}$ -ben, ha nem szomszédosak  $G$ -ben.

**Példa:**

**Megf:** Ha  $G = (V, E)$  egyszerű gráf és a  $|V(G)| = n$ , akkor  $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$  teljesül  $G$  bármely  $v$  csúcsra.

**Biz:** A  $K_n$  teljes frág minden éle a  $G$  és  $\overline{G}$  gráfok közül pontosan az egyikhez tartozik. Ezért  $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v)$  megegyezik a  $v$  csúcs  $K_n$ -beli fokszámával, ami  $n - 1$ .  $\square$

**Def:** A  $G$  és  $G'$  gráfok akkor **izomorfak**, ha mindeket gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től  $n$ -ig terjedő egész számokkal (alkalmas  $n$  esetén), hogy  $G$  bármely két  $u, v$  csúcsa között pontosan annyi él fut  $G$ -ben, mint az  $u$ -nak és  $v$ -nek megfelelő sorszámú csúcsok között  $G'$ -ben. Jelölése:  $G \cong G'$ .

**Példa:**

**Megf:** Ha  $G \cong G'$ , akkor  $G$  és  $G'$  lényegében ugyanúgy néznek ki. Így például minden fokszám ugyanannyiszor lép fel  $G$ -ben mint  $G'$ -ben, ugyan annyi  $C_4$  kör található  $G$ -ben, mint  $G'$ -ben, stb.

## 0.5 Gráfoperációk

**Def:** Éltörlés, csúcs törlés, élhozzáadás.

**Def:** Feszítő részgráf: éltörlésekkel kapható gráf.

**Feszített részgráf:** csúcs törlésekkel kapható gráf.

**Részgráf:** él- és csúcs törlésekkel kapható gráf.

**Példa:**  $H_1, H_2, H_3$ : a  $G$  feszítő, feszített, jelzőnélküli részgráfjai.

**Megf:**  $H$  a  $G$  részgráfja  $\iff V(H) \subseteq V(G)$  és  $E(H) \subseteq E(G)$ .

$H$  a  $G$  feszítő részgráfja  $\iff V(H) = V(G)$  és  $E(H) \subseteq E(G)$ .

$H$  a  $G$  feszített részgráfja  $\iff V(H) \subseteq V(G)$  és  $E(H) = E(G) \cap E(H)$ .

**Megj:** A gráf definíciója megengedi, hogy a gráf egyik részéből egyáltalán ne vezessen él a gráf maradék részébe, azaz a gráf egyik csúcsából ne lehessen eleken keresztül eljutni a gráf egy másik csúcsába. Ez történik pl. az üresgráf (alias  $\overline{K}_n$ ) esetén.

## 0.6 Háromféle elérhetőség, összefüggőség

**Def:** Legyen  $G = (V, E)$  (irányított vagy irányítatlan) gráf.

**Élsorozat:**  $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$ , ahol  $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$ . (Tulajdonképp egyik csúcsból eljutunk egy másik csúcsba mindig élek mentén haladva.)

**Séta:** olyan élsorozat, amelyikben nincsen ismétlődő él.

**Út:** olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

**Terminológia:** Ha a kezdőpont  $u$ , a végpont  $v$ , akkor  **$uv$ -élsorozatról**,  **$uv$ -sétáról**, ill.  **$uv$ -útról** beszélünk. Ha hangsúlyozni szeretnénk, hogy  $u = v$ , de a kezdő (és vég)pontot nem akarjuk megnevezni, akkor **zárt élsorozatról**, **körsétáról** ill. **körrel** beszélünk.

**Megf:**  $G$ -ben  $\exists uv$ -út  $\Rightarrow G$ -ben  $\exists uv$ -séta  $\Rightarrow G$ -ben  $\exists uv$ -élsorozat  $\square$

**Állítás:**  $G$ -ben  $\exists uv$ -élsorozat  $\Rightarrow G$ -ben  $\exists uv$ -út  $\square$

**Def:**  $G$  irányítatlan gráf  $u$ -ból  $v$  **elérhető** ( $u \sim v$ ), ha  $\exists uv$ -út  $G$ -ben.

**Def:** A  $G$  irányítatlan gráf **összefüggő**, ha  $u \sim v \forall u, v \in V(G)$ .

**Megj:** (1) Az összefüggőség szokásos definíciója nem a  $\sim$  reláció segítségével történik, hanem valahogy így: a  $G$  irányítatlan gráfot akkor mondjuk összefüggőnek, ha  $G$  bármely két csúcsa között vezet út  $G$ -ben.

**Megj:** (2) Az előző definíciót irányított gráfokra is kiterjeszthetők: a  $G$  irányított gráfot akkor mondjuk **erősen összefüggőnek**, ha  $G$  bármely  $u, v \in V(G)$  esetén van **irányított**  $uv$ -út  $G$ -ben.

**Megj:** (3) Irányított gráf másfajta összefüggősége is értelmezhető: a  $G$  irányított gráfot akkor mondjuk **gyengén összefüggőnek**, ha a  $G$ -nek megfelelő irányítatlan gráf összefüggő.

**Köv:** Ha  $G$  irányítatlan gráf, akkor  $\sim$  ekvivalenciareláció:

(1)  $\forall u \in V(G) : u \sim u$ , (2)  $\forall u, v \in V(G) : u \sim v \Rightarrow v \sim u$ , és (3)  $\forall u, v, w \in V(G) : u \sim v \sim w \Rightarrow u \sim w$ .  $\square$

**Def:** A  $G$  gráf **(összefüggő) komponense** a  $\sim$  ekvivalenciaosztálya. Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

## 0.7 Gráfok összefüggősége a gyakorlatban

**Lemma:** (1)  $K \subseteq V(G)$  pontosan akkor komponense  $G$ -nek, ha  $K$ -ból nem lép ki éle  $G$ -nek, de  $\forall v, v' \in$  esetén  $v \sim v'$ .

(2) Minden  $G$  irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel  $G$  komponenseinek diszjunkt uniójára.  $\square$

**Megj:** A  $G$  komponense alatt sokszor nem csupán a  $G$  csúcsainak egy  $K$  részhalmazát, hanem a  $K$  által feszített részgráfot értjük.

**Megf:**  $G$  pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van.  $\square$

**Élhozzáadási lemma (ÉHL):** Legyen  $G$  irányítatlan gráf és  $G' = G + e$ . Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.

(1)  $G$  és  $G'$  komponensei megegyeznek, de  $G'$ -nek több köre van, mint  $G$ -nek.

(2)  $G$  és  $G'$  körei megegyeznek, de  $G'$ -nek egyvel kevesebb komponense van, mint  $G$ -nek.

## 0.8 Fák és erdők

**Def:** A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük. Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

**Megf:**  $G$  erdő  $\iff G$  minden komponense fa.

**Példa:**

**Megf:** (1)  $P_n$  fa minden  $n \geq 1$  egész esetén. (2) Fához egy új csúcsot egy éllel bekötve fát kapunk:

**Lemma:**  $G$   $n$ -csúcsú,  $k$ -komponensű erdő  $\Rightarrow |E(G)| = n - k$ .

**Biz:** Építsük fel  $G$ -t a  $\overline{K_n}$  üresgráfból az élek egyenkénti behúzásával.  $G$  körmentes, ezért az ÉHL miatt minden él zöld: behúzásakor 1-gyel csökken a komponensek száma. A  $\overline{K_n}$  üresgráfnak  $n$  komponense van,  $G$ -nek pedig  $k$ . Ezért pontosan  $n - k$  zöld élt kellett behúzni  $G$  felépítéséhez.  $\square$

**Köv:** Ha  $F$  egy  $n$ -csúcsú fa, akkor élszáma  $|E(F)| = n - 1$ .

**Biz:**  $F$  egy 1-komponensű erdő, így az előző Lemma alkalmazható  $k = 1$  helyettesítéssel.

**Állítás:** Tetsz.  $n$ -csúcsú  $G$  gráf esetén az alábbi három tulajdonság közül bármely kettőből következik a harmadik. (a)  $G$  körmentes. (b)  $G$  összefüggő. (c)  $|E(G)| = n - 1$ .

**Biz:** (a) + (b)  $\Rightarrow$  (c) :  $\checkmark$

(a) + (c)  $\Rightarrow$  (b): Építsük fel  $G$ -t élek egyenkénti behúzásával.  $n - 1$  él egyikének behúzása se hoz létre kört, ezért az ÉHL miatt minden él zöld, és 1-gyel csökkenti a komponensszámot. Végül  $n - (n - 1) = 1$  komponens marad, tehát  $G$  összefüggő.

(b) + (c)  $\Rightarrow$  (a): Építsük fel  $G$ -t élek egyenkénti behúzásával. Mivel a komponensek száma végül 1 lesz, ezért  $n - 1$  zöld élt kellett behúzni. (c) miatt  $G$  összes éle zöld, piros éle nincs. Az ÉHL miatt  $G$  körmentes.  $\square$

## 0.9 Fák további tulajdonságai

**Állítás:** Legyen  $F$  egy tetszőleges fa  $n$  csúcson. Ekkor

- (1)  $(F - e)$ -nek pontosan két komponense van  $\forall e \in E(F)$ -re.
- (2)  $F$ -nek pontosan egy  $uv$ -útja van  $\forall u, v \in V(F)$ -re.
- (3)  $(F + e)$ -nek pontosan egy köre van  $\forall e \notin E(F)$ -re.
- (4) Ha  $n \geq 2$ , akkor  $F$ -nek legalább két levele van.

**Def:** A  $G$  irányítatlan gráf  $v$  csúcsa **levél**, ha  $d(v) = 1$ .

**Biz:** (1):  $F - e$  erdő, hisz körmentes.  $F = (F - e) + e$ , és mivel  $F$  is körmentes,  $e$  zöld az ÉHL miatt. Ezért  $F$ -nek 1-gyel kevesebb komponense van, mint  $(F - e)$ -nek. Mivel  $F$ -nek 1 komponense van,  $(F - e)$ -nek 2.  $\square$

**Biz:** (2):  $F$  összefüggő, ezért van (legalább egy)  $uv$ -útja, mondjuk  $P$ . Ezen  $P$  út bármely  $e$  élét elhagyva, a kapott  $F - e$  grágnak (1) miatt két komponense van, melyek közül az egyik  $u$ -t, a másik  $v$ -t tartalmazza. Ezért  $(F - e)$ -ben nincs  $uv$ -út. Azt kaptuk, hogy  $P$  minden éle benne van  $F$  minden  $uv$ -útjában, ezért  $F$ -ben  $P$ -n kívül nincs más  $uv$ -út.  $\square$

**Biz:** (3): Tfh  $e = uv$ . Minden  $F$  körmentes, ezért  $F + e$  minden köre  $e$ -ből és  $F$  egy  $uv$ -útjából tevődik össze. Ezért  $F + e$  köreinek száma megegyezik az  $F$  fa  $uv$ -útjainak számával, ami (2) miatt pontosan 1.  $\square$

**Biz:** (4): (Algebrai út) A KFL miatt  $\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 2n = 2(n - 1) - 2n = -2$ .  $F$  minden  $v$  csúcsára  $d(v) \geq 1$  teljesül, ezért  $d(v) - 2 \geq -1$ . A fenti összeg csak úgy lehet  $-2$ , ha  $F$ -nek legalább 2 levele van.  $\square$

**Biz:** (4): (Kombinatorikus út) Induljunk el  $F$  egy tetszőleges  $v$  csúcsából egy sétán, és haladjunk, amíg tununk. Ha sosem akadunk el, akkor előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, és kört találunk. Ezért elakadunk, és az csakis egy  $v$ -től különböző  $u$  levélben történhet. Ha  $d(v) = 1$ , akkor  $v$  egy  $u$ -tól különböző levél. Ha  $d(v) \geq 2$ , akkor sétát indulhatjuk  $v$ -ből egy másik él mentén. Ekkor egy  $u$ -tól különböző levélben akadunk el.  $\square$

## 0.10 Feszítőfák

Építsük fel a  $G$  gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével! Legyen  $G'$  a  $G$  gráf piros élei törlésével keletkező feszítő részgráf!  $G'$  biztosan körmentes lesz, hiszen a zöld élek sosem alkottak kört a korábbi élekkel.  $G'$  minden  $K'$  komponense részhalmaza  $G$  egy  $K$  komponensének. Ha  $K' \neq K$ , akkor  $G$ -nek van olyan éle, ami kilép  $K'$ -ből. Ezen élek mind pirosak  $K'$  definíciója miatt. Legyen  $e$  ezek közül az elsőnek kiszínezett. Az  $e$  él nem tudott kört alkotni a korábban kiszínezettekkel, így nem lehet piros: ellentmondás. Ezek szerint  $G$  egy  $G'$  komponensei megegyeznek.

**Köv:** A  $G$  gráf zöld élei olyan  $G'$  feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek  $G$  komponenseivel.  $\square$

**Def:**  $F$  a  $G$  gráf **feszítőfája** (**ffája**), ha  $F$  egy  $G$ -ből éltörlésekkel kapható fa.

**Állítás:**  $(G\text{-nek van feszítőfája}) \iff (G \text{ összefüggő})$

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Legyen  $F$  a  $G$  feszítőfája.  $F$  összefüggő, és  $V(F) = V(G)$ , tehát  $G$  bármely két csúcsa között vezet  $F$ -beli út.

$\Leftarrow$ : Építsük fel  $G$ -t az élek egyenkénti behúzásával és kiszínezésével. Láttuk, hogy a zöld élek egy  $F$  erdőt alkotnak, aminek egyetlen komponense van, hiszen  $G$  is egykomponensű. Ezek szerint  $F$  olyan fa, ami  $G$ -ből éltörlésekkel kapható.  $\square$

**Megj:** Ha egy nem feltétlenül összefüggő  $G$  gráf éleit a fenti módon kiszínezzük, akkor a zöld élek  $G$  minden komponensének egy  $F$  feszítőfáját alkotják. Nem összefüggő  $G$  esetén a zöld élek alkotta feszítő részgráf neve a  $G$  **feszítő erdeje**.