

## 0.1 Alapkörrendszer, alap vágás rendszer

Adott egy  $G$  gráf és  $G$ -nek egy  $F$  rögzített feszítőfája. Ekkor  $G$  minden éléhez  $F$  meghatározza  $G$  éleinek egy fontos részhalmazát. Attól függően, hogy az adott él  $F$ -hez tartozik-e vagy sem, különböző fajta részhalmazról van szó.

**Def:** A  $G$  gráf  $F$  feszítőfájának  $f$  éléhez tartozó **alap vágást**  $G$  azon élei alkotják, amik az  $F - f$  két komponense között futnak. Az  $e \in E(G) \setminus E(F)$  éléhez tartozó **alapkör** pedig az  $F + e$  köre.

**Megf:** Tfh  $f \in F$  és  $e \in E(G) \setminus E(F)$ . Ekkor  $(F - f + e \text{ ffa}) \iff (f \text{ benne van } e \text{ alapkörében}) \iff (e \text{ benne van } f \text{ alap vágásában}).$

**Köv:** Az  $e \in E(G) \setminus E(F)$  alapkörét  $e$  mellett azon  $F$ -beli élek alkotják, amelyek alapvágása  $e$ -t tartalmazza. Az  $f \in F$  alapvágást  $f$  mellett a  $G$  azon élei alkotják, amelyek alapköre  $f$ -t tartalmazza.

## 0.2 Minimális költségű feszítőfa

**Def:** Adott a  $G = (V, E)$  irányítatlan gráf élein a  $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  költségfüggvény. Az  $F \subseteq E$  élhalmaz **költsége** az  $F$ -beli élek összköltsége:  $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$ .

Az  $F \subseteq E$  élhalmaz  $G$ -ben **minimális költségű feszítőfa** (mkffa), ha

- (1)  $(V, F)$  a  $G$  feszítőfája, és
- (2)  $k(F) \leq k(F')$  teljesül a  $G$  bármely  $(V, F')$  feszítőfájára.

Az  $F \subseteq E$  élhalmaz  $G$ -ben **minimális költségű feszítő erdeje**, ha

- (1)  $(V, F)$  a  $G$  feszítő erdeje, és
- (2)  $k(F) \leq k(F')$  teljesül a  $G$  bármely  $(V, F')$  feszítő erdejére.

**Cél:** Hatékony eljárás mkffa keresésére.

**Ötlet:** Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élk egyenkénti behúzásával, az ÉHL szerint zöldre színezett élek halmazaként.

Zöld él: olyan él, ami nem alkot kört a korábban felépített élekkel.

**Mohó stratégia:** A feszítőfa építéskor költség szerint növekvő sorrendben döntünk az élekről, hátha mkffát kapunk a végén.

**Kruskal-algoritmus:** Input:  $G = (V, E)$  és  $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  költségfüggvény. Output:  $F \subseteq E$   
Működés: Tfh  $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \dots \leq k(e_m)$ , ahol  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Legyen  $F_0 = \emptyset$ , és  $i = 1, 2, \dots, m$ -re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes.} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

## 0.3 Minimális költségű feszítőfák struktúrája

$G = (V, E)$  gráf és  $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  költségfüggvény esetén legyen  $G_c$  a legfeljebb  $c$  költségű élek alkotta feszítő részgráfja  $G$ -nak:  $G_c = (V, E_c)$ , ahol  $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$ .

**Megf:** A  $G$  gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza  $G_c$  egy feszítő erdejét minden  $c \geq 0$  esetén.

**Biz:** A Kruskal-algoritmus a legfeljebb  $c$  költségű ( $E_c$ -beli) éleket hamarabb dolgozza fel, mint a  $c$ -nél drágábbakat. Ezért  $E_c$  összes élének feldolgozása után pontosan azt az állapotot érjük el, mintha a Kruskal-algoritmust a  $G_c$  frágon futtattunk volna. Korábban (az ÉHL előtt) láttuk, hogy az utóbbi algoritmus outputja  $G_c$  egye feszítő erdeje.  $\square$

**Lemma:** Tfh  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_l\}$ ,  $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_l)$  és  $F \cap E_c$  a  $G_c$  egy feszítő erdeje  $\forall c \geq 0$ -ra. Tfh  $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_l\}$  a  $G$  egy feszítő erdejének élei, és  $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_l)$ . Ekkor  $k(f_i) \leq k(f'_i)$  teljesül  $\forall 1 \leq i \leq l$  esetén, így  $k(F) \leq k(F')$ .

**Biz:** Indirekt: tfh  $k(f_i) > k(f'_i) = c$ . Ekkor  $|E_c \cap F| < i$ , így a feltevés miatt  $E_c \cap F$  a  $G_c$  egy  $i$ -nél kevesebb élű feszítő erdeje. Az  $f'_1, f'_2, \dots, f'_i$  élek is mind  $E_c$ -beliek, és többen vannak az  $E_c \cap F$  feszítő erdő élszámánál. Tehát  $f'_1, f'_2, \dots, f'_i$  nem lehet körmentes, így  $f'_1, f'_2, \dots, f'_i$  sem. Ez ellentmondás. Tehát  $k(f_i) \leq k(f'_i) \forall i$ . Ezért  $k(F) = \sum_{i=1}^l k(f_i) \leq \sum_{i=1}^l k(f'_i) = k(F')$ .  $\square$

**Köv:** (1) A Kruskal-algoritmus outputja a  $G$  gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

**Biz:** Legyen  $F$  a Kruskal-algoritmus outputja. A megfigyelés miatt  $F \cap E_c$  a  $G_c$  feszítő erdeje  $\forall c \geq 0$ -ra, ezért a Lemma szerint  $k(F) \leq k(F')$  teljesül  $G$  tetszőleges  $F'$  feszítő erdejére.

$\square$

**Köv:** (2) Az  $F'$  élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje  $G$ -nek, ha  $F' \cap E_c$  a  $G_c$  egy feszítő erdeje minden  $c \leq 0$ -ra.

**Biz:** A Lemma bizonyítja az elégtételt.

**Biz:** A szükségességhez tfh  $F' \cap E_c$  nem feszítő erdeje  $G_c$ -nek, és legyen  $F$  a Kruskal-algoritmus outputja. Mivel  $F \cap E_c$  a  $G_c$  feszítő erdeje, ezért  $|F \cap E_c| > |F' \cap E_c|$ , így  $k(f_i) < k(f'_i)$  teljesül legalább egy  $i$ -re, és minden  $j$ -re  $k(f_j) \leq k(f'_j)$ . Innen  $k(F) < k(F')$ .  $\square$

**Köv:** (3) Ha a  $G$  gráf összefüggő, akkor  $G$  feszítő erdeje a  $G$  feszítő fája, így a Kruskal-algoritmus mkffát talál. A (2) következmény pedig  $G$  mkffáit karakterizálja.

## 0.4 Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:

Input  $\checkmark$ , Output  $\checkmark$ , Működés  $\checkmark$ , Helyesség  $\checkmark$ , Lépésszám.

Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.

Tfh  $n$  ill.  $m$  a  $G$  csúcsai ill. élei száma.

A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Élek költség szerinti sorbarendeze
2. Döntés az egyes élekről a fenti sorrendben.

1.  $m$  szám sorbarendezéséhez a buborékrendezés legfeljebb  $\binom{m}{2}$  összehasonlítást használ.

1.  $n$  csúcsú  $G$  gráf esetén egy élről döntés megoldható  $konst \cdot \log_2 n$  lépésben az adatstruktúra karbantartásával együtt is. Az összes döntéshez tehát elegendő  $konst \cdot n \cdot \log_2 n$  lépés. A Kruskal-algoritmus lépésszáma ezért felülről becsülhető  $konst \cdot (n + m) \cdot \log_2(n + m)$ -mel.