Mátrixműveletek vektorműveletekből

Vektorokon értelmeztük az összeadást és a skalárral szorzást. Az oszlopokat egymás alá írva bármely $n \times k$ méretű mátrixot értelmezhetünk $n \cdot k$ magasságú oszlopvektorként is. Ezzel értelmezni tudjuk az **azonos méretű** mátrixokon az összeadást és a skalárral szorzást.

Példa: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 1 & 606 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 42 \\ 7 & 4242 & 77 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ nem értelmes.

Mátrixműveletek vektorműveletekből

Vektorokon értelmeztük az összeadást és a skalárral szorzást. Az oszlopokat egymás alá írva bármely $n \times k$ méretű mátrixot értelmezhetünk $n \cdot k$ magasságú oszlopvektorként is. Ezzel értelmezni tudjuk az **azonos méretű** mátrixokon az összeadást és a skalárral szorzást.

Megf: Ha $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$, akkor (1) $A + B = B + A$, (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$, (3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, (4) $(\lambda + \kappa)A = \lambda A + \kappa A$, (5) $\lambda(\kappa A) = (\lambda\kappa)A$, továbbá (6) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$, (7) $\lambda \cdot A^\top = (\lambda A)^\top$.

Vektorok egymással történő összeszorzását nem értelmeztük eddig. Most fogjuk, de bizonyos korlátokkal. Ehhez először azonos méretű vektorokat tanulunk meg összeszorozni.

A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok skaláris szorzata

$\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$.

Megf: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$,
(2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ ill. (3) $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda (\underline{u} \cdot \underline{v})$.

Megj: (1) Világos, hogy ha $\underline{u} = \underline{0}$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, ám a fordított következtetés nem igaz, pl $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

(2) A skaláris szorzás segítségével értelmezhető a vektorhossz és a merőlegesség (akár magasabb dimenzióban is).

Megf: A $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vektor hossza az a, b, c oldalakkal rendelkező téglatest testátlójának hossza, ami a Pitagorasz-tétel alapján $\|\underline{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Ugyanez, másképp felírva: $\|\underline{v}\|^2 = \underline{v} \cdot \underline{v}$.

Megj: Az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok merőlegessége azt jelenti, hogy $\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 = \|\underline{u} - \underline{v}\|^2 = (\underline{u} - \underline{v}) \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{u} + \underline{v} \cdot \underline{v} - 2\underline{u} \cdot \underline{v} = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v}$, innen $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ adódik. Tehát $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \iff \underline{u} \perp \underline{v}$.

További vektorszorzások 3D-ben

Megf: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok által feszített paralelepipedon előjeles térfogata kiszámítható oszlop szerinti kifejtéssel:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Megj: (1) A paralelepipedon fent kiszámított előjeles területét szokás az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok $(\underline{uvw})$-vel jelölt vegyes szorzatának is hívni. Könnyen látható, hogy $(\underline{uvw}) = \underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})$, ahol $\underline{v} \times \underline{w}$ a jól ismert vektoriális szorzat amit a jobbkéz-szabály segítségével számíthatunk ki a $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok által feszített paralelogramma területét is felhasználva. A fenti számítással igazolható a vektoriális szorzatot kiszámító determinánsokkal felírt képlet helyessége.

(2) Ez a dia nem kapcsolódik szorosan a tananyaghoz, de érdekes látni a különféle vektorműveleteknek ezt a kapcsolatát is.

Mátrixok szorzása

Az $\mathbb{R}^n$-beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \ldots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \ldots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ill.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ill.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok. (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$

Biz: A skaláris szorzásról tanult azonosság szerint $\lambda(\underline{u} \cdot \underline{v}) = (\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot (\lambda \underline{v})$. Ezért mindhárom szorzatban az i-dik sor j-dik eleme az A i-dik sora és B j-dik oszlopa skaláris szorzatának a λ-szorosa ($\forall i, j$ esetén). $\square$

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1 & -2 & -4\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\end{array}$$

ill.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ & \begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 7\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4 & 2\\ 7 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 7\\ 2 & 4\end{pmatrix} & \end{array}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok. (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$
(2) $A(B+C) = AB + AC$ ill. $(A+B)C = AC + BC$.

Biz: Tudjuk, hogy $\underline{u}\cdot(\underline{v}+\underline{w}) = \underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{u}\cdot\underline{w}$. Ezért $A(B+C)$ ill. $AB + AC$ i-dik sorának j-dik eleme az A i-dik sorának és B és C j-dik oszlopai összegének skaláris szorzata ($\forall i, j$ esetén). A másik disztributivitás a skaláris szorzás $(\underline{u}+\underline{v})\cdot\underline{w} = \underline{u}\cdot\underline{w} + \underline{v}\cdot\underline{w}$ azonosságából következik. $\square$

Mátrixok szorzása

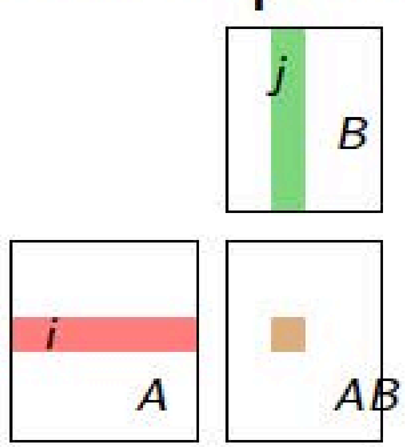
Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

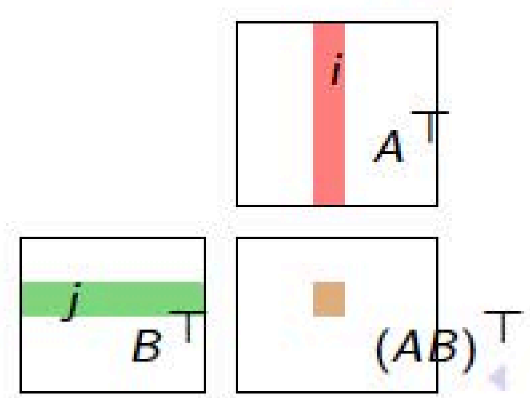
Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{ill.} \quad \begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok.
(1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$
(2) $A(B + C) = AB + AC$ ill. $(A + B)C = AC + BC$.
(3) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Biz: $(AB)^T$ j-dik sorának i-dik eleme az A i-dik sorának és B j-dik oszlopának a skaláris szorzata, ami ugyanaz, mint $B^\top$ j-dik sorának és $A^\top$ i-dik oszlopának a skaláris szorzata ($\forall i, j$ esetén). $\square$





Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ill.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok. (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$
(2) $A(B+C) = AB + AC$ ill. $(A+B)C = AC + BC$.
(3) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Megj: Ha AB és BA is értelmes, akkor $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Ekkor $AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $BA \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Azonban még $k = n$ esetén sem igaz általában, hogy $AB = BA$. A mátrixszorzás nem kommutatív.

Megj: A mátrixszorzás asszociatív (átzárójelezhető), de ezt később bizonyítjuk. (A def.-ból is belátható, de az nem túl elegáns.)

Determinánsok szorzástétele: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow |AB| = |A||B|$.

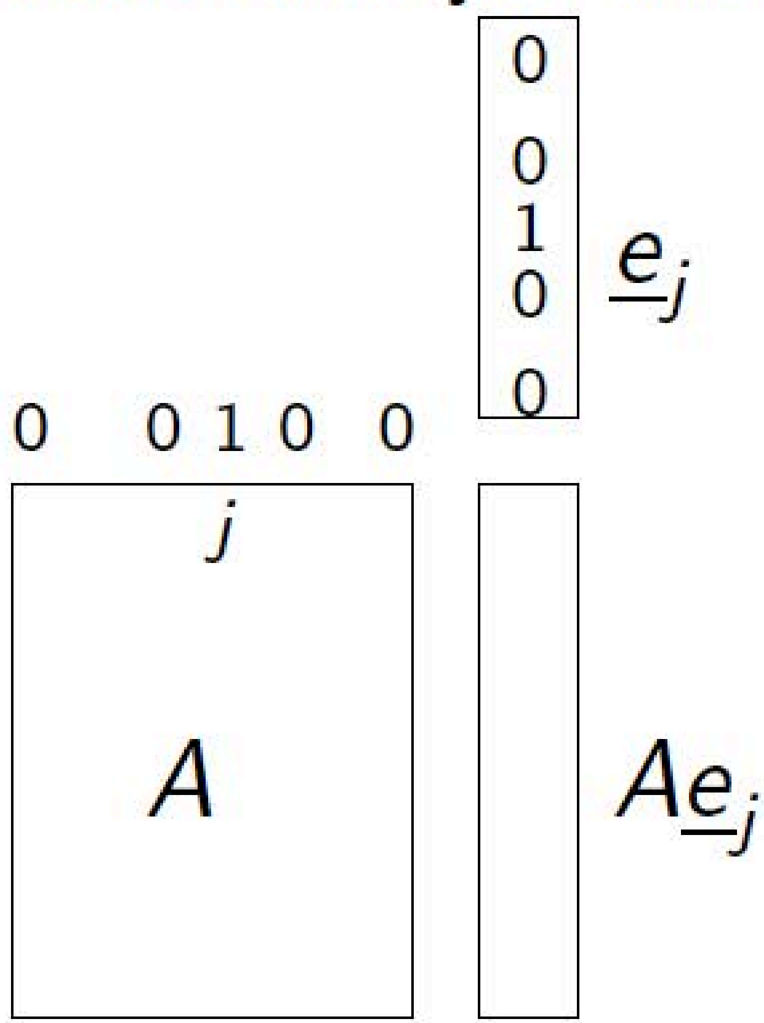
A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.

Biz: Könnyen látszik a definícióból.



Az $\underline{e}_i^\top$-tal szorzás hasonló tulajdonsága következik az oszlopokról szóló fenti állításból és a transzponáltak szorzásáról tanultakból. $\square$

Az itt látható ábra „transzponáltjának" segítségével sem nehéz erről meggyőződni.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

Biz: Az $A \cdot I_k$ mátrix j-dik oszlopa definíció szerint $A \cdot \underline{e}_j$. Ez (1) miatt épp az A mátrix j-dik oszlopa $\forall j$.
Hasonlóan, $I_n \cdot A$ i-dik sora (1) miatt az A i-dik sora $\forall i$. $\square$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{a}_1, \ \underline{a}_2, \dots, \ \underline{a}_k) \quad (\ \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ \dots \ , \underline{a}_k)$$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$
(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak $\underline{v}^\top \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

Biz: Tfh $\underline{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$. Ekkor $\underline{u} = \lambda_1 \underline{e}_1 + \dots + \lambda_k \underline{e}_k$, így aztán
$A \cdot \underline{u} = A \cdot (\lambda_1 \underline{e}_1 + \dots + \lambda_k \underline{e}_k) = \lambda_1 A \cdot \underline{e}_1 + \dots + \lambda_k A \cdot \underline{e}_k$, és (1) miatt $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa $\forall j$.
A $\underline{v} \cdot A$-ra vonatkozó tulajdonság hasonlóan igazolható. $\square$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$
(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak $\underline{v}^\top \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

Köv: Tfh A oszlopai $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^k$ és B sorai $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$. Ekkor
(1) az AB szorzat j-dik oszlopa az $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^k$ oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat a $\underline{b}^j$ oszlop tartamazza.
(2) Hasonlóan, az i-dik sor a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$ sorok lineáris kombinációja, az $\underline{a}_i$ sorban szereplő együtthatókkal.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$
(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak $\underline{v}^\top \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

Köv: Tfh A oszlopai $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^k$ és B sorai $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$. Ekkor
(1) az AB szorzat j-dik oszlopa az $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^k$ oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat a $\underline{b}^j$ oszlop tartamazza.
(2) Hasonlóan, az i-dik sor a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$ sorok lineáris kombinációja, az $\underline{a}_i$ sorban szereplő együtthatókkal.
(3) Ha a C mátrix minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja, akkor C előáll AB alakban. Ha a C mátrix sorai az A sorainak lin.komb-i, akkor C előáll $C = BA$ alakban.

Köv: Ha A' ESÁ-okkal kapható A-ból, akkor $A' = BA$ alakú.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ leképezés, amire $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Példa: Lin.lekép $\mathbb{R}^2$-ből $\mathbb{R}^2$-be (a szokásos helyvektorokon) az origóra tükrözés, az origó körüli forgatás, az x tengelyre vetítés, vagy egy origón átmenő egyenesre tükrözés. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, ha pl. az sík minden (x, y) pontjához a tér $(2x, 0, y/2)$ pontját rendeljük.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ leképezés, amire $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Megf: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ esetén az A-val történő balszorzás lin.leképét definiál $\mathbb{R}^k$-ból $\mathbb{R}^n$-be.

Kínzó kérdés: Minden lin.lekép megadható mátrixszorzással?

Megnyugtató válasz: Igen. Ezt fogjuk most igazolni.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Biz: $\Rightarrow$: Mivel f additív és homogén, ezért
$f(\lambda_1 \underline{u}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{u}_k) = f(\lambda_1 \underline{u}_1) + \ldots + f(\lambda_k \underline{u}_k) =$
$\lambda_1 f(\underline{u}_1) + \ldots + \lambda_k f(\underline{u}_k)$, azaz f zárt a lin.komb-ra.
$\Leftarrow$: Ha f zárt a lin.komb-ra, akkor $f(\lambda \underline{u}) = \lambda f(\underline{u})$, hisz λu az u lin.komb-ja, továbbá
$f(\underline{u} + \underline{v}) = f(1\underline{u} + 1\underline{v}) = 1f(\underline{u}) + 1f(\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$, tehát f homogén és additív, más szóval f lin.lekép. $\square$

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.lekép-t.

Annak az igazolásához, hogy minden f lin.lekép előáll mátrixszal történő balszorzással csupán azt kell megmutatni, hogy van olyan $[f]$ mátrix, amire $f(\underline{b}_i) = [f]\underline{b}_i$ teljesül minden $\underline{b}_i$ báziselemre. Ekkor ugyanis az $[f]$-fel való balszorzás lin.lekép, továbbá a fenti Következmény miatt $f(\underline{v}) = [f]\underline{v}$, azaz minden vektor f szerinti képe megkaphato az $[f]$ mátrixszal történő balszorzással.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u}+\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.lekép-t.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $f : U \to V$ lin.lekép,$\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $[f] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $[f]\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Biz: Legyen $B = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m)$. B oszlopai lin.ftn-ek, ezért a B ESÁ-okkal RLA mátrixszá transzformált alakja $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m)$, azaz I_m áll az RLA mátrix tetején. Minden m oszlopból álló mátrix, így $F = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m)$ is megkapható I_m sorainak lin.komb-jaként. Tehát F sorai előállnak B sorainak lin.komb-jaként, vagyis van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f]B = F$, azaz $[f]\underline{b}_i = \underline{v}_i$ $\forall i$. $\square$

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.lekép‑t.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $f : U \to V$ lin.lekép $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $[f] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $[f]\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Köv: Tetsz. $f : U \to V$ lin.lekép‑esetén $[f]\underline{u} = f(\underline{u})$ teljesül a Lemmában definiált $[f]$ mátrixra $\forall \underline{u} \in U$ esetén, azaz minden lineáris leképezés előáll mátrixszal történő balszorzással.

Azt fogjuk most megfigyelni, hogyan is kell az f lineáris leképezés $[f]$ mátrixát kiszámítani a báziselemek képeinek segítségével.

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.leképez az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ egységvektort $\underline{a}_i$-be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Biz: $A \cdot \underline{e}_i$ az A i-dik oszlopa, vagyis $\underline{a}_i$ $\forall i$. $\square$

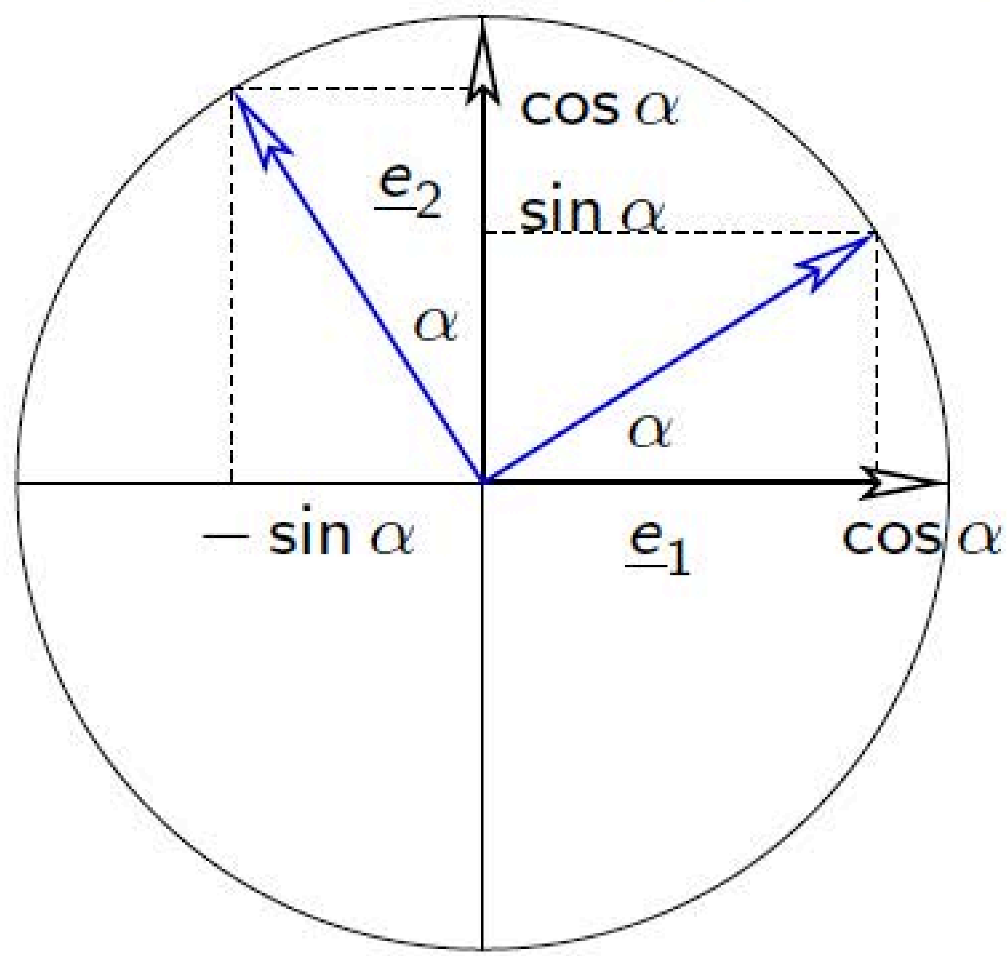
Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ egységvektort $\underline{a}_i$-be viszi ($\forall 1 \le i \le k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az f lineáris leképezés mátrixa.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.



Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.leképez az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ egységvektort $\underline{a}_i$-be viszi ($\forall 1 \le i \le k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az f lineáris leképezés mátrixa.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Biz: Először igazoljuk $g \circ f$ linearitását.

$g(f(\lambda\underline{u})) = g(\lambda f(\underline{u})) = \lambda g(f(\underline{u}))$ homogén, ill.

$g(f(\underline{u} + \underline{v})) = g(f(\underline{u}) + f(\underline{v})) = g(f(\underline{u})) + g(f(\underline{v}))$ lineáris.

Tehát $g \circ f$ csakugyan lineáris leképezés.

Végül a kompozíciómátrixról szóló képlet helyességét bizonyítjuk.

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ egységvektort $\underline{a}_i$-be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az f lineáris leképezés mátrixa.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Biz: A tanultak szerint $[g \circ f]$ i-dik oszlopa $g(f(\underline{e}_i)) = [g]([f]\underline{e}_i)$. Láttuk, hogy $[f]\underline{e}_i$ az $[f]$ i-dik oszlopa, így $[g]([f]\underline{e}_i)$ a $[g]$ mátrix szorzata az $[f]$ mátrix i-dik oszlopával.
Ez pedig nem más, mint az $[g][f]$ szorzatmátrix i-dik oszlopa.
Ezek szerint $[g \circ f] = [g][f]$. $\square$

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ egységvektort $\underline{a}_i$-be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az f lineáris leképezés mátrixa.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Köv: Ha értelmesek a műveletek, akkor $A(BC) = (AB)C$.

Biz: Legyen f, g és h az A, B ill. C mátrixokhoz tartozó lin.lekép. Ekkor $A(BC)$ az $f \circ (g \circ h)$, $(AB)C$ pedig az $(f \circ g) \circ h$ leképezés mátrixa. Márpedig $f \circ (g \circ h)(\underline{v}) = f(g(h(\underline{v}))) = (f \circ g) \circ h(\underline{v})$ miatt e két leképezés megegyezik, így a mátrixaik is azonosak. $\square$

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ egységvektort $\underline{a}_i$-be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az f lineáris leképezés mátrixa.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Köv: Ha értelmesek a műveletek, akkor $A(BC) = (AB)C$.

Köv: A fenti példában szereplő elforgatásokra igaz, hogy $f_{\alpha+\beta} = f_\alpha \circ f_\beta$, így $\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = [f_{\alpha+\beta}] = [f_\alpha][f_\beta] =$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

Ebből pedig $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ ill. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$ adódik.