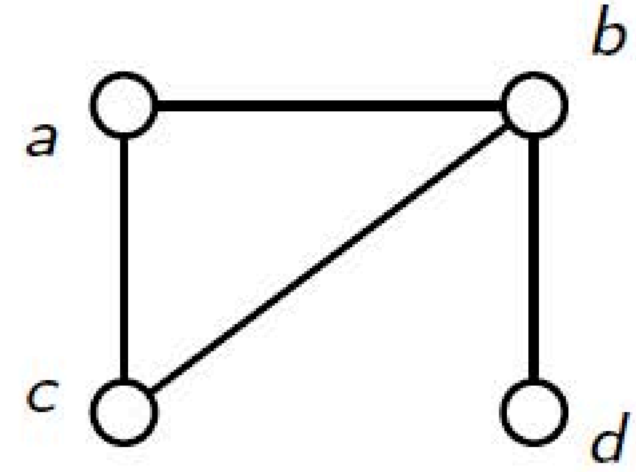
A számítástudomány alapjai

A gráfelmélet alapjai

2023. szeptember 5.

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, **Példa:**
ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,
ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.
V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),
E pedig G éleinek halmaza.



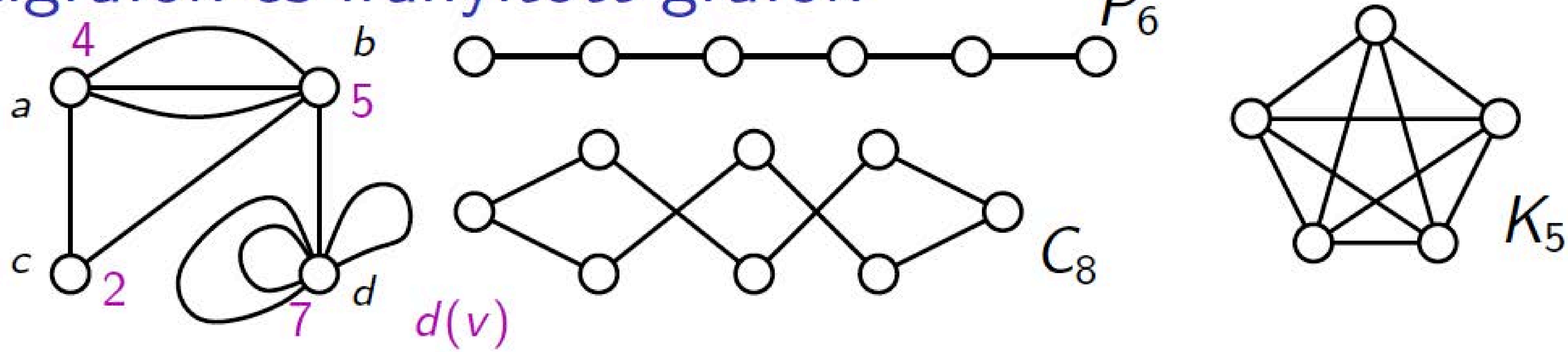
Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf diagramja a G egy olyan lerajzolása, amiben V-nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u-t és v-t összekötő görbe felel meg.

Terminológia & konvenciók: Gráf alatt rendszerint egyszerű, irányítatlan gráfot értünk. Ha G egy gráf, akkor $V(G)$ a G csúcshalmazát, $E(G)$ pedig G élhalmazát jelöli, azaz $G = (V(G), E(G))$. Az $e = \{u, v\}$ élt röviden uv-vel jelöljük. Ekkor e az u és v csúcsokat köti össze. Továbbá u és v az e végpontjai, amelyek az e élre illeszkednek, és e mentén szomszédosak.

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

Def: Az n-pontú út, n-pontú kör, ill. n-pontú teljes gráf jele rendre P_n, C_n ill. K_n. (P_1, C_1, C_2 elfajulók.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $P_2 = C_2$, $C_3 = K_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v-re illeszkedő élek száma a v fokszáma. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít.
(Irányított gráf esetén $\delta(v)$ ill. $\rho(v)$ a v ki- ill. befokát jelöli.)

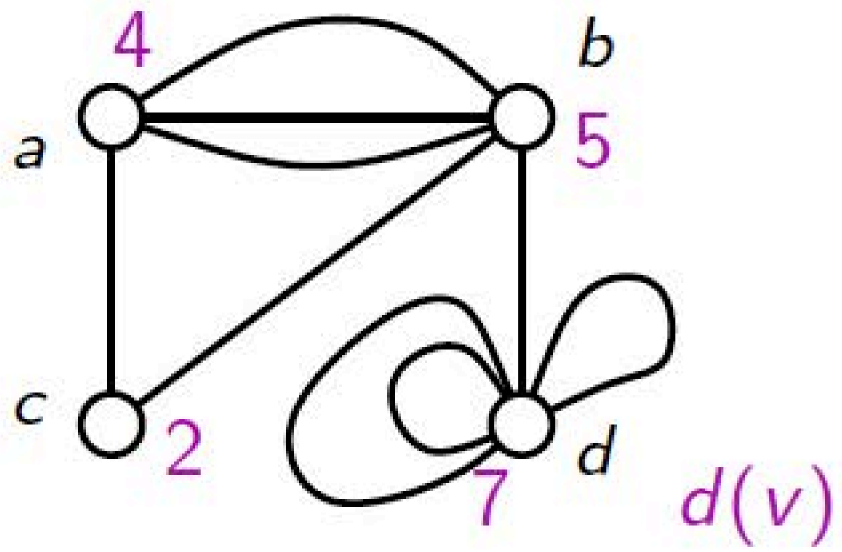
Def: A G gráf maximális ill. minimális fokszáma $\Delta(G)$ ill. $\delta(G)$.
G reguláris, ha minden csúcsának foka ugyanannyi: $\Delta(G) = \delta(G)$, G pedig k-reguláris, ha minden csúcsának pontosan k a fokszáma.

Megf: Minden kör 2-reguláris, a K_n pedig $(n-1)$-reguláris.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Példa:



A handshaking lemma

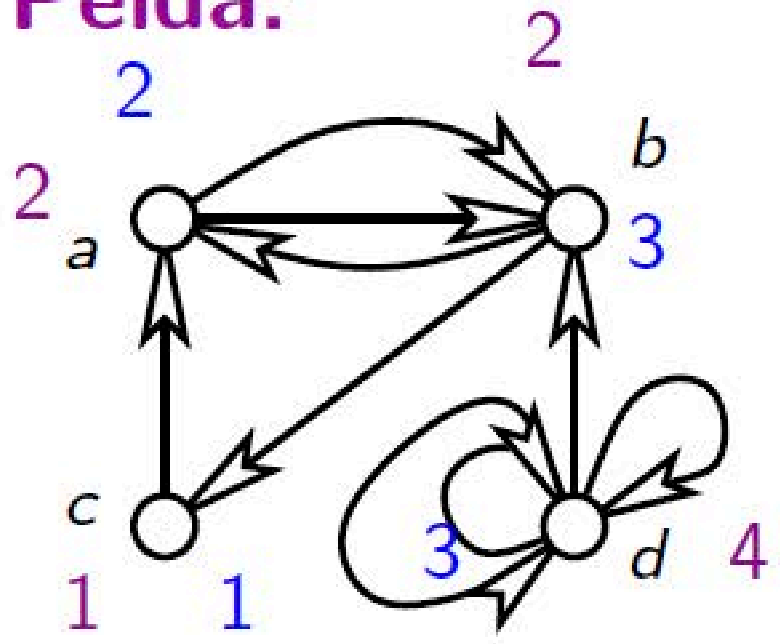
Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszegege az élszám kétszerese.
Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$, azaz a csúcsok ki- és befokainak összege is az élszámot adja meg.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.

Példa:



$\delta(v)$

$\rho(v)$

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.
Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.
Biz: Az egyes csúcsokból kilépő éleket megszámolva G minden irányított élét pontosan egyszer számoljuk meg. Ezért a kifokok összege az élszám. A belépő éleket leszámlálva hasonló igaz, ezért a befokok összege is az élszám. $\square$
Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna az általánosított kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. 0-élű (üres)gráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 1-gyel növeli az élszámot is és a ki/befokok összegét is.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.
Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.
A KFL bizonyítása: Készítsük el a G' digráfot úgy, hogy G minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítjük. Ekkor

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)| \quad \square$$

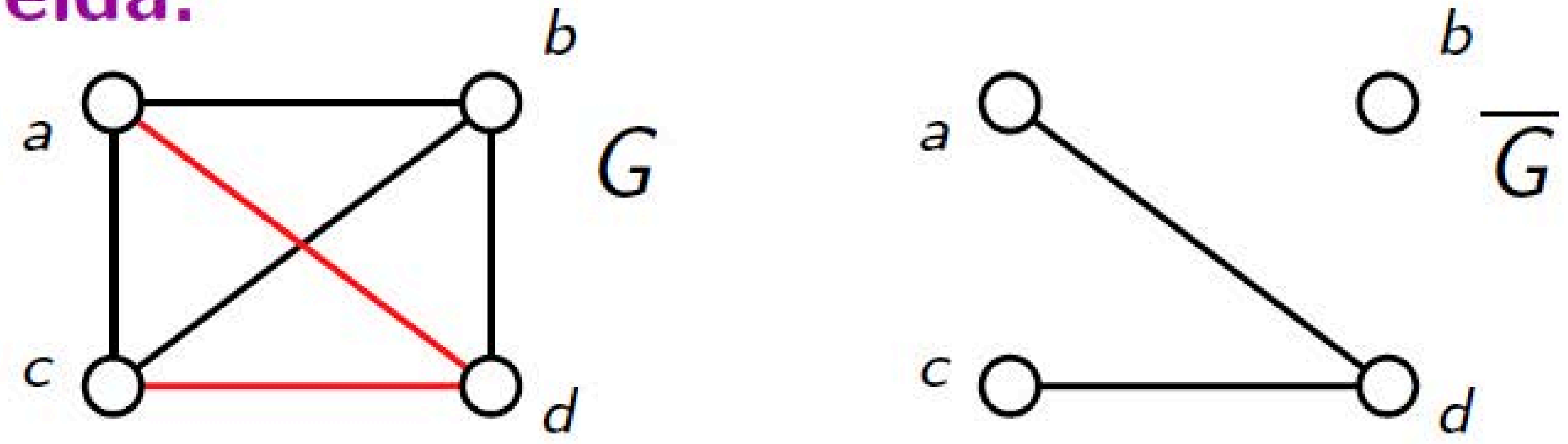
Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna a kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-vel növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszámösszeget is.

Komplementer és izomorfia

Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megj: G és $\overline{G}$ csúcsai megegyeznek, és két csúcs pontosan akkor szomszédos $\overline{G}$-ben, ha nem szomszédosak G-ben.

Példa:



Komplementer és izomorfia

Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Biz: A K_n teljes gráf minden éle a G és $\overline{G}$ gráfok közül pontosan az egyikhez tartozik. Ezért $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v)$ megegyezik a v csúcs K_n-beli fokszámával, ami $n - 1$. $\square$

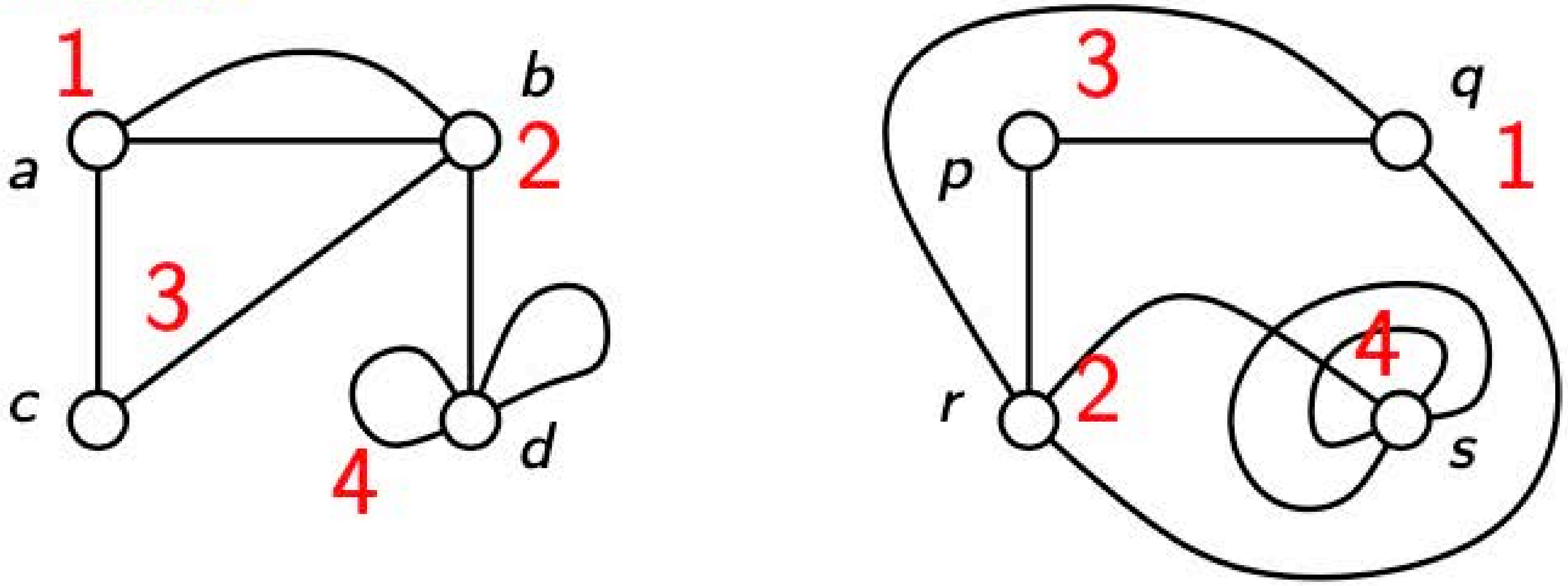
Komplementer és izomorfia

Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Def: A G és G' gráfok akkor izomorfak, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n-ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G-ben, mint az u-nak és v-nek megfelelő sorszámú csúcsok között G'-ben. Jelölése: $G \cong G'$.

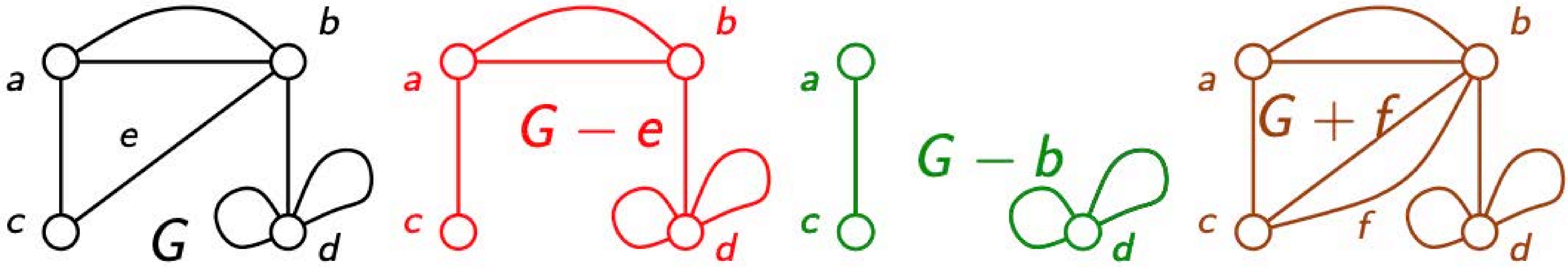
Példa:



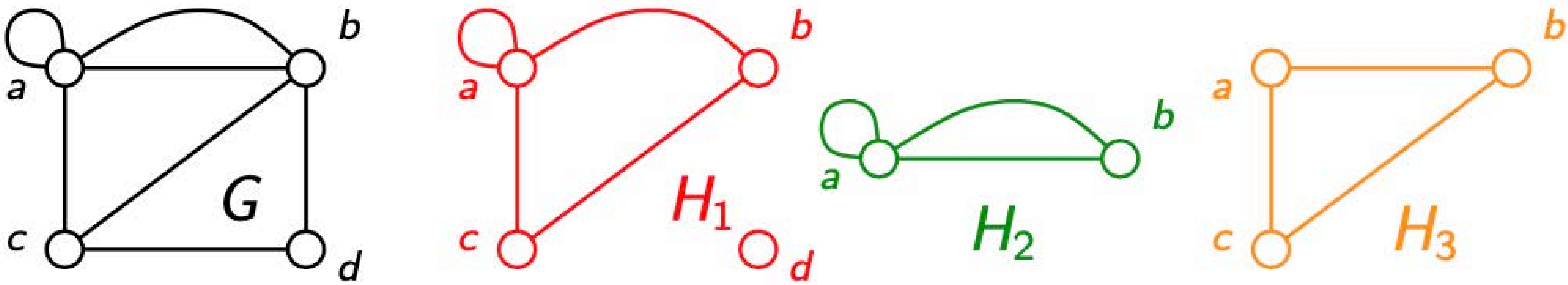
Megf: Ha $G \cong G'$, akkor G és G' lényegében ugyanúgy néznek ki. Így például minden fokszám ugyanannyiszor lép fel G-ben mint G'-ben, ugyanannyi C_{42} kör található G-ben, mint G'-ben, stb.

Gráfoperációk

Def: Éltörlés, csúcstörlés, élhozzáadás.

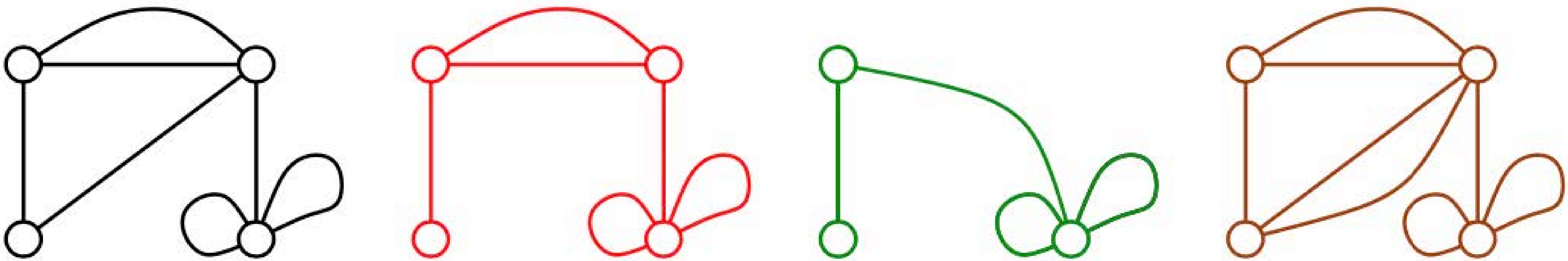


Def: Feszítő részgráf: éltörlésekkel kapható gráf.
Feszített részgráf: csúcstörlésekkel kapható gráf.
Részgráf: él- és csúcstörlésekkel kapható gráf.
Példa: H_1, H_2, H_3: a G feszítő, feszített és jelzőnélküli részgráfjai.



Megf: H a G részgráfja $\iff$ $V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$.
H a G feszítő részgráfja $\iff$ $V(H) = V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$.
H a G feszített részgráfja $\iff$ $V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H)$ a H csúcsai közt futó G-beli élekből áll.

Furfangos kérdés

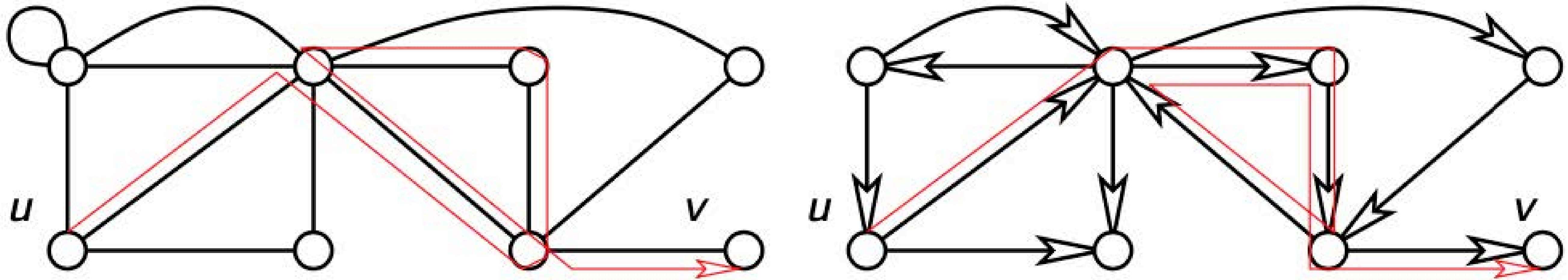


Hány gráf látható az ábrán? Természetesen egy.
(Miért is ne lehetnének egy gráf csúcsai és élei többféle színűek?)

Megj: A gráf definíciója megengedi, hogy a gráf egyik részéből egyáltalán ne vezessen él a gráf maradék részébe, azaz a gráf egyik csúcsából ne lehessen éleken keresztül eljutni a gráf egy másik csúcsába. Ez történik pl az üresgráf (alias $\overline{K_n}$) esetén.

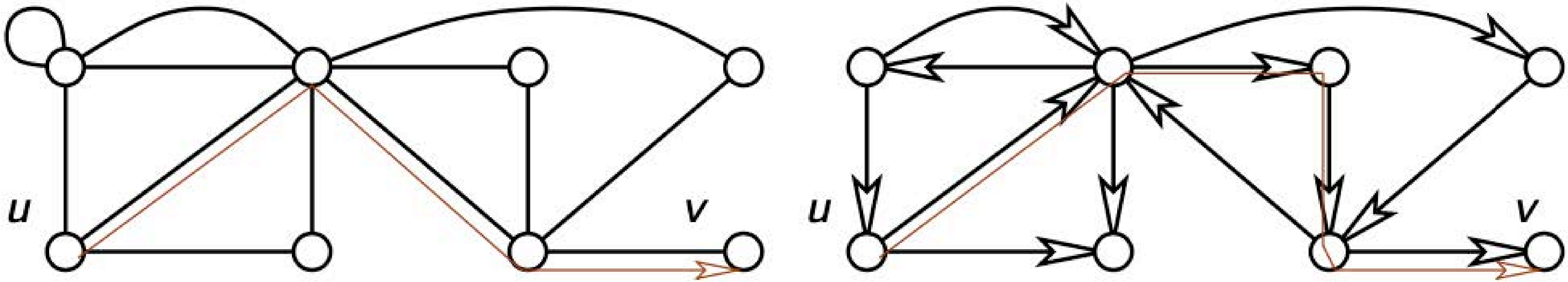
A továbbiakban a gráf csúcsainak „elérhetőségi struktúráját" vizsgáljuk.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.
(Tkp egyik csúcsból eljutunk egy másik csúcsba mindig élek mentén haladva.)

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

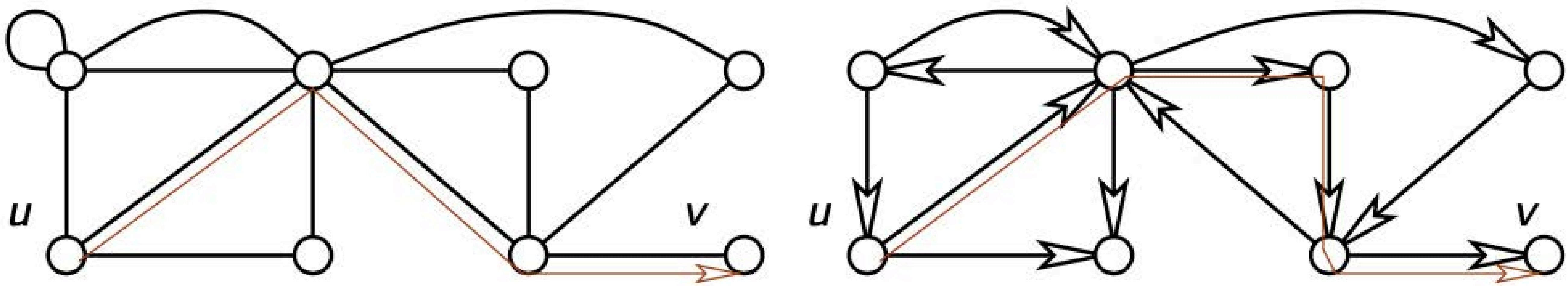
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Terminológia: Ha a kezdőpont u, a végpont v, akkor uv-élsorozatról, uv-sétáról, ill. uv-útról beszélünk. Ha hangsúlyozni szeretnénk, hogy $u = v$, de a kezdő (és vég)pontot nem akarjuk megnevezni, akkor zárt élsorozatról, körsétáról ill. körről beszélünk.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat □

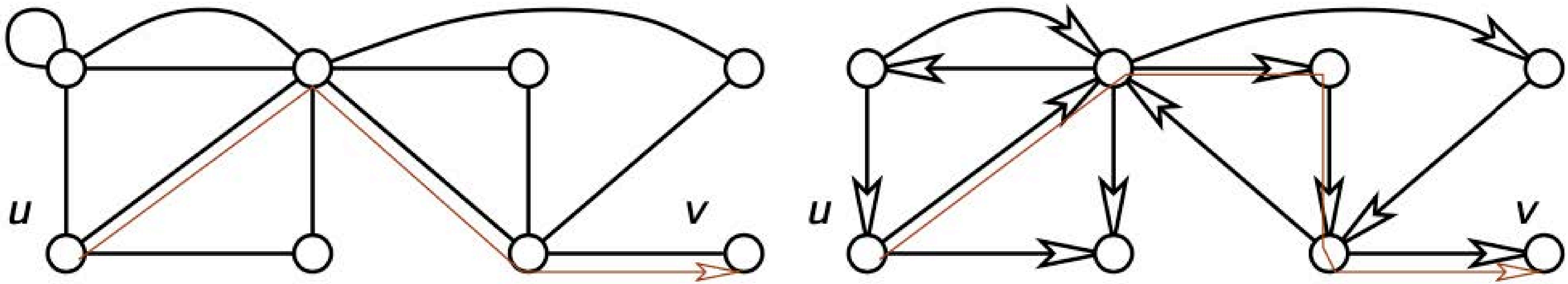
Állítás: G-ben $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út □

Def: G ir.tatlan gráf. u-ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists$ uv-út G-ben.

Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v$ $\forall u, v \in V(G)$.

Megj: (1) Az összefüggőség szokásos definíciója nem a $\sim$ reláció segítségével történik, hanem valahogy így:
a G irányítatlan gráfot akkor mondjuk összefüggőnek, ha G bármely két csúcsa között vezet út G-ben.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat $\square$

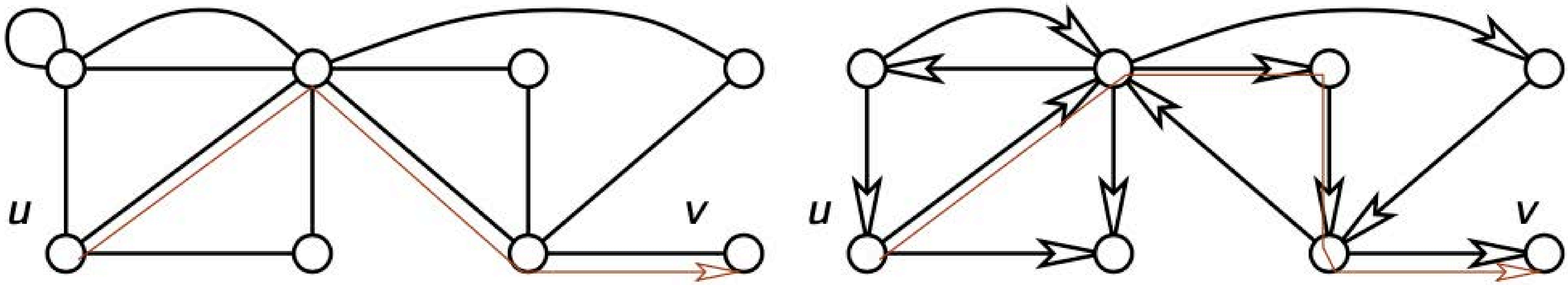
Állítás: G-ben $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út $\square$

Def: G ir.tatlan gráf. u-ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists$ uv-út G-ben.

Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v$ $\forall u, v \in V(G)$.

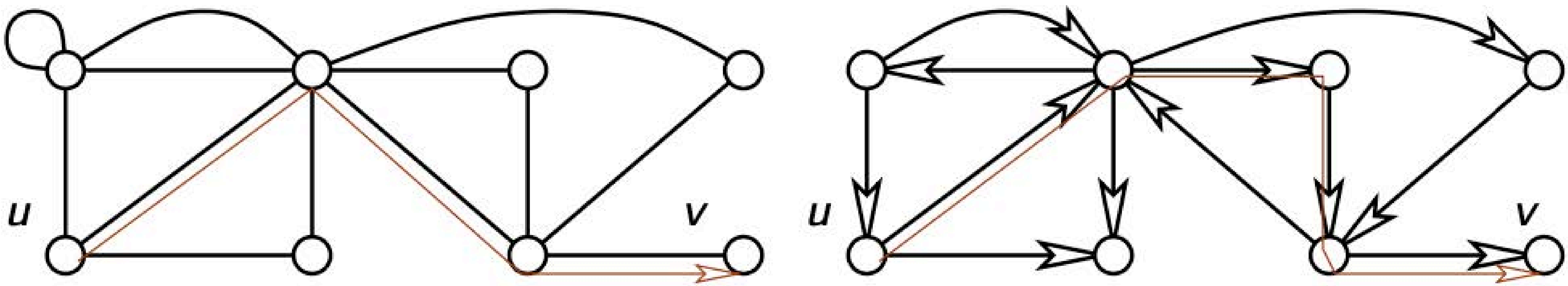
Megj: (2) Az előző definíció irányított gráfokra is kiterjeszthető: a G irányított gráfot akkor mondjuk erősen összefüggőnek, ha G bármely $u, v \in V(G)$ esetén van **irányított** uv-út G-ben.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.
Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.
Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.
Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat $\square$
Állítás: G-ben $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út $\square$
Def: G ir.tatlan gráf. u-ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists$ uv-út G-ben.
Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v$ $\forall u, v \in V(G)$.
Megj: (3) Irányított gráf másfajta összefüggősége is értelmezhető: a G irányított gráfot akkor mondjuk gyengén összefüggőnek, ha a G-nek megfelelő irányítatlan gráf összefüggő.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat $\square$

Állítás: G-ben $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út $\square$

Def: G ir.tatlan gráf. u-ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists$ uv-út G-ben.

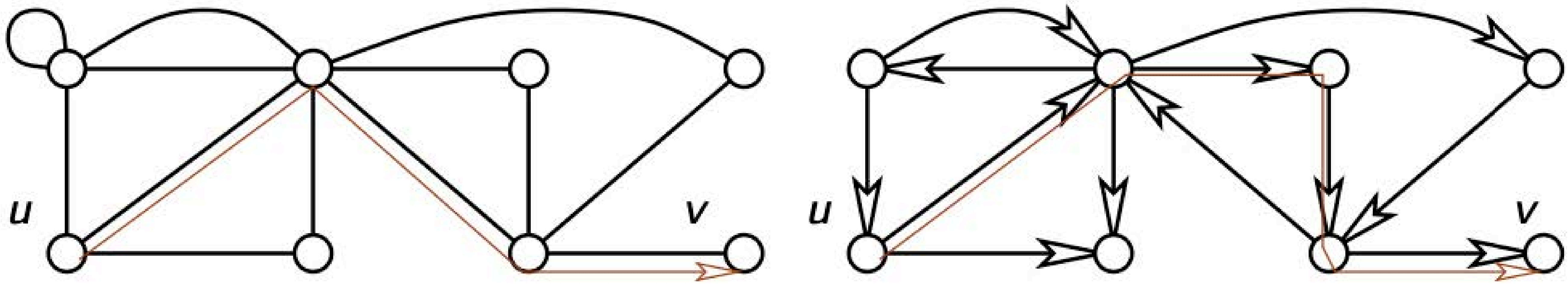
Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v$ $\forall u, v \in V(G)$.

Köv: Ha G irányítatlan gráf, akkor $\sim$ ekvivalenciareláció:

(1) $\forall u \in V(G): \ u \sim u$, (2) $\forall u, v \in V(G): \ u \sim v \Rightarrow v \sim u$, és

(3) $\forall u, v, w \in V(G): \ u \sim v \sim w \Rightarrow u \sim w$. $\square$

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat $\square$

Állítás: G-ben $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út $\square$

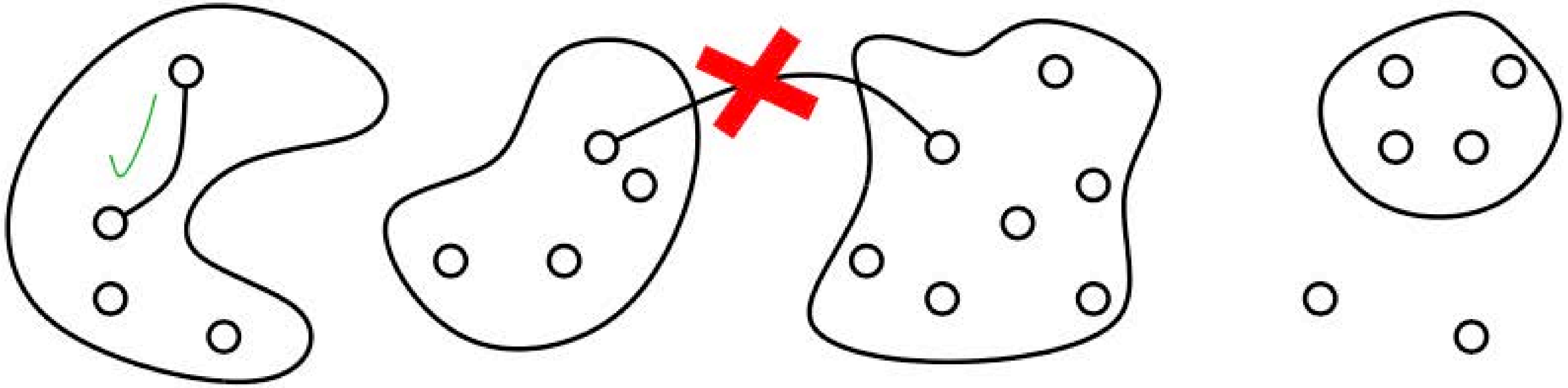
Def: G ir.tatlan gráf. u-ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists$ uv-út G-ben.

Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v$ $\forall u, v \in V(G)$.

Köv: Ha G irányítatlan gráf, akkor $\sim$ ekvivalenciareláció:
(1) $\forall u \in V(G):\ u \sim u$, (2) $\forall u, v \in V(G):\ u \sim v \Rightarrow v \sim u$, és
(3) $\forall u, v, w \in V(G):\ u \sim v \sim w \Rightarrow u \sim w$. $\square$

Def: A G gráf (összefüggő) komponense a $\sim$ ekvivalenciaosztálya.
Az egyelemű kompnens neve izolált pont.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban

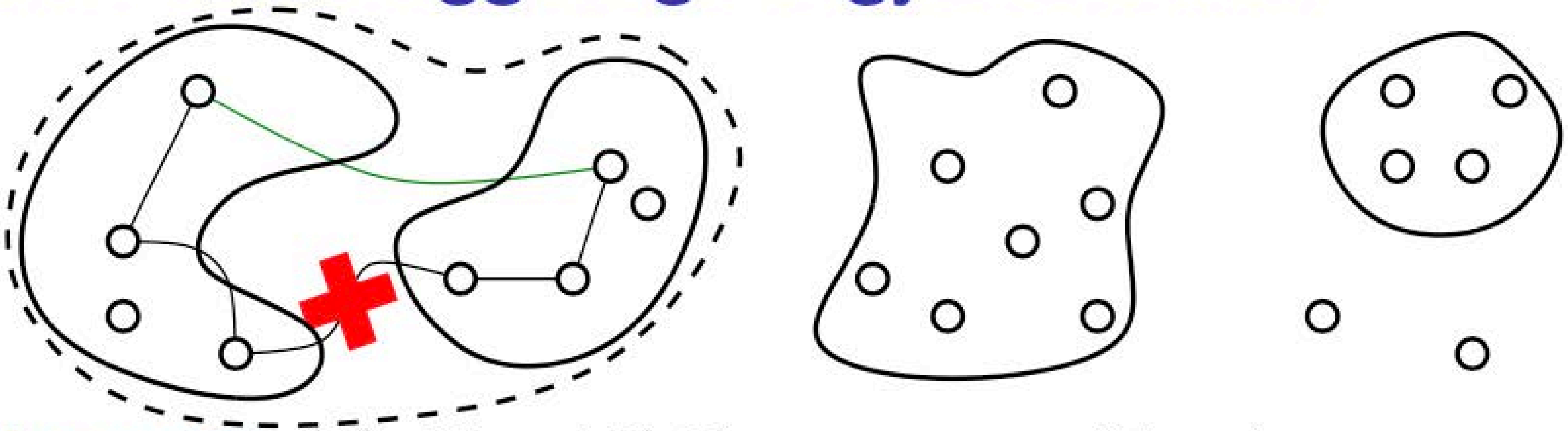


Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.
(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. $\square$

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. $\square$

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.
(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

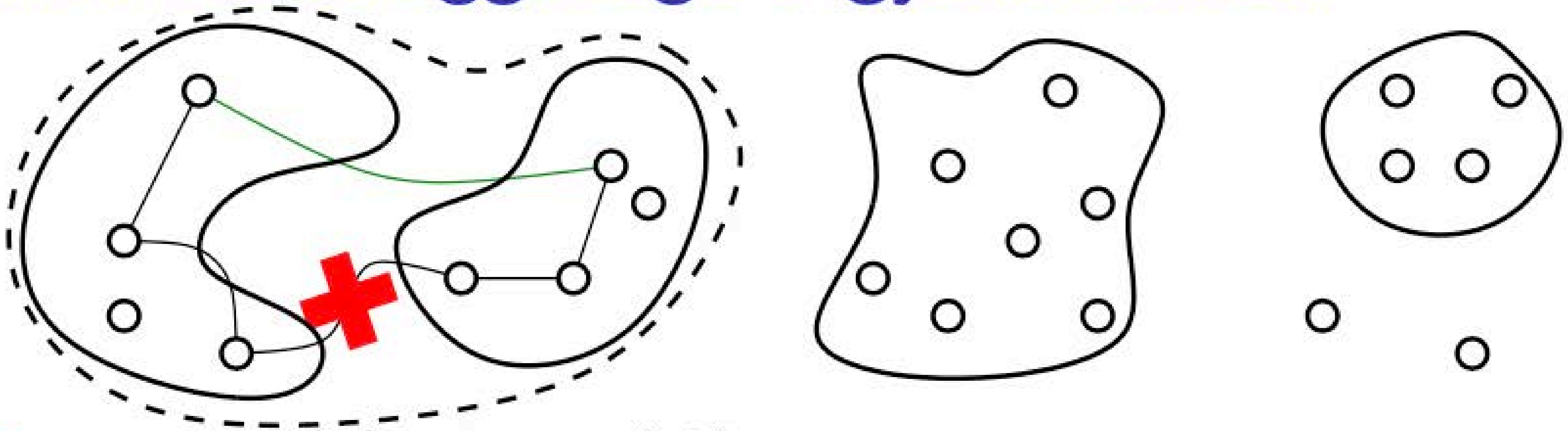
Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Kínzó kérdés: Mi történik, ha G-be behúzunk egy $e = uv$ élt?

I. eset: Az e él végpontjai G ugyanazon komponensbe esnek.

II. eset: Az e él végpontjai G különböző komponenseiben vannak.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.
(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

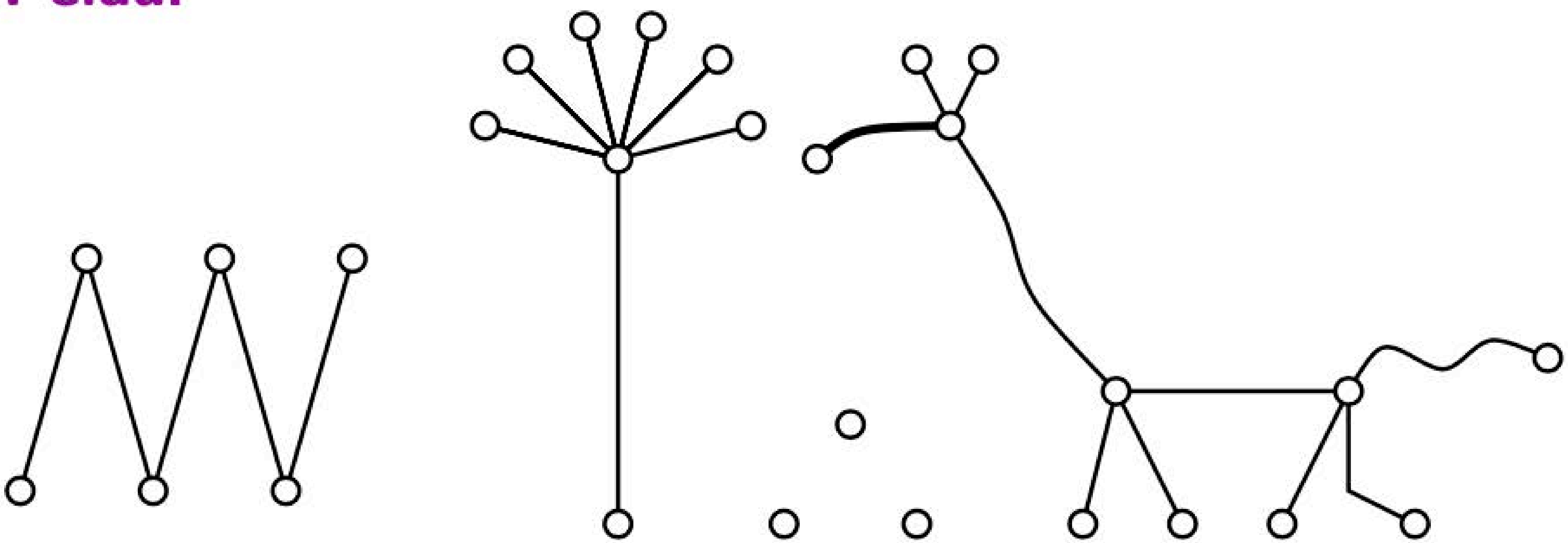
Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

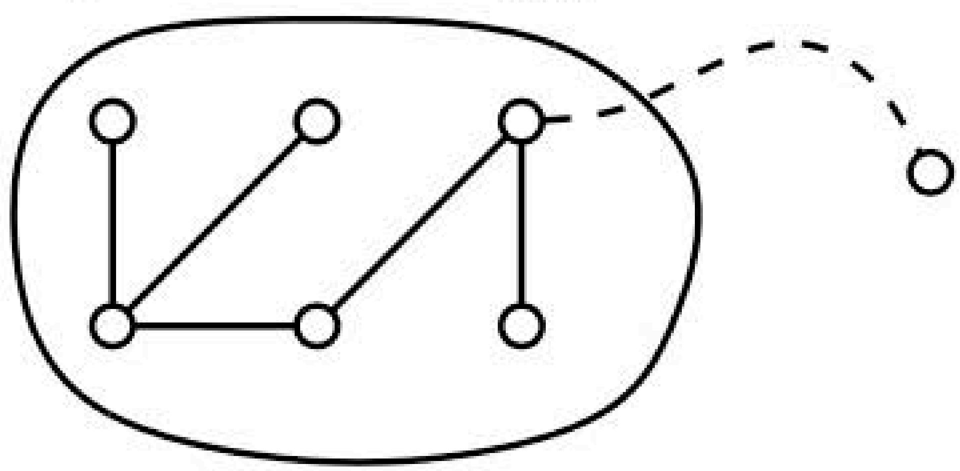
Élhozzáadási lemma (ÉHL): Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.
(1) G és G' komponensei megegyeznek, de G'-nek több köre van, mint G-nek. (A kör elfajuló is lehet.)
(2) G és G' körei megegyeznek, de G'-nek eggyel kevesebb komponense van, mint G-nek. □

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa
Példa:



Megf: (1) P_n fa minden $n \geq 1$ egész esetén.
(2) Fához egy új csúcsot egy éllel bekötve fát kapunk:



Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.
Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa
Lemma: G n-csúcsú, k-komponensű erdő$\Rightarrow |E(G)| = n - k$.
Biz: Építsük fel G-t a $\overline{K_n}$ üresgráfból az élek egyenkénti behúzásával. G körmentes, ezért az ÉHL miatt minden él zöld: behúzásakor 1-gyel csökken a kompnensek száma. A $\overline{K_n}$ üresgráfnak n kompnense van, G-nek pedig k. Ezért pontosan $n - k$ zöld élt kellett behúzni G felépítéséhez. $\square$

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.

Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa

Lemma: G n-csúcsú, k-komponensű erdő$\Rightarrow |E(G)| = n - k$.

Köv: Ha F egy n-csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.

Biz: F egy 1-komponensű erdő, így az előző Lemma alkalmazható $k = 1$ helyettesítéssel. $\square$

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa
Lemma: G n-csúcsú, k-komponensű erdő$\Rightarrow |E(G)| = n - k$.
Köv: Ha F egy n-csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.
Állítás: Tetsz. n-csúcsú G gráf esetén az alábbi három tulajdonság közül bármely kettőből következik a harmadik.
(a) G körmentes. (b) G összefüggő. (c) $|E(G)| = n - 1$.
Biz: (a)+(b)$\Rightarrow$ (c): ✓
(a)+(c)$\Rightarrow$ (b): Építsük fel G-t élek egyenkénti behúzásával. $n-1$ él egyikének behúzása se hoz létre kört, ezért az ÉHL miatt minden él zöld, és 1-gyel csökkenti a komponensszámot. Végül $n-(n-1)=1$ komponens marad, tehát G öf.
(b)+(c)$\Rightarrow$ (a): Építsük fel G-t élek egyenkénti behúzásával. Mivel a komponensek száma végül 1 lesz, ezért $n-1$ zöld élt kellett behúzni. (c) miatt G összes éle zöld, piros éle nincs. Az ÉHL miatt G körmentes. $\square$

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor
(1) $(F-e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.
(2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.
(3) $(F+e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re.
(4) Ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa levél, ha $d(v) = 1$.

Biz: (1): $F - e$ erdő, hisz körmentes. $F = (F-e) + e$, és mivel F is körmentes, e zöld az ÉHL miatt. Ezért F-nek 1-gyel kevesebb komponense van, mint $(F-e)$-nek. Mivel F-nek 1 komponense van, $(F-e)$-nek 2. $\square$

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor
(1) $(F - e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.
(2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.
(3) $(F + e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re.
(4) Ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa levél, ha $d(v) = 1$.

Biz: (2): F öf, ezért van (legalább egy) uv-útja, mondjuk P. Ezen P út bármely e élét elhagyva, a kapott $F - e$ gráfnak (1) miatt két komponense van, melyek közül az egyik u-t, a másik v-t tartalmazza. Ezért $(F - e)$-ben nincs uv-út. Azt kaptuk, hogy P minden éle benne van F minden uv-útjában, ezért F-ben P-n kívül nincs más uv-út. $\square$

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor
(1) $(F - e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.
(2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.
(3) $(F + e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re.
(4) Ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.
Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa levél, ha $d(v) = 1$.
Biz: (3): Tfh $e = uv$. Mivel F körmentes, ezért $F + e$ minden köre e-ből és F egy uv-útjából tevődik össze. Ezért $F + e$ köreinek száma megegyezik az F fa uv-útjainak számával, ami (2) miatt pontosan 1. $\square$

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor
(1) $(F - e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.
(2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.
(3) $(F + e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re.
(4) Ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa levél, ha $d(v) = 1$.

Biz: (4): (Algebrai út) A KFL miatt
$\sum_{v \in V(G)}(d(v) - 2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 2n = 2(n-1) - 2n = -2$.
F minden v csúcsára $d(v) \geq 1$ teljesül, ezért $d(v) - 2 \geq -1$. A fenti összeg csak úgy lehet -2, ha F-nek legalább 2 levele van. $\square$

Fák további tulajdonságai

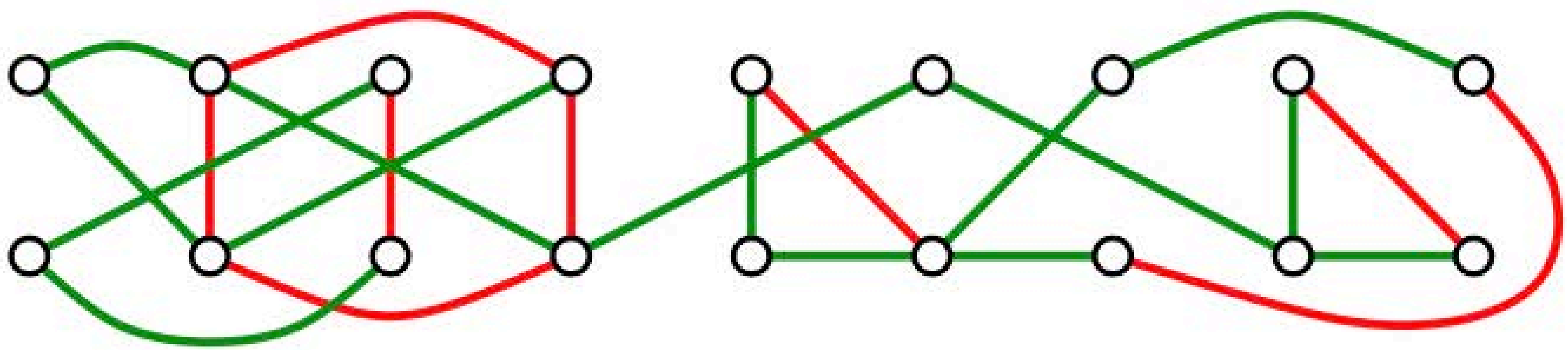
Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor
(1) $(F - e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.
(2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.
(3) $(F + e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re.
(4) Ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.

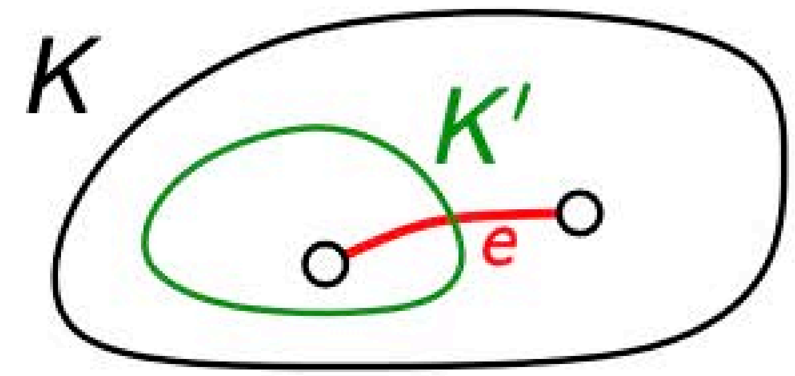
Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa levél, ha $d(v) = 1$.

Biz: (4): (Algebrai út) A KFL miatt
$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 2n = 2(n-1) - 2n = -2.$
F minden v csúcsára $d(v) \geq 1$ teljesül, ezért $d(v) - 2 \geq -1$. A fenti összeg csak úgy lehet -2, ha F-nek legalább 2 levele van. □

(4): (Kombinatorikus út) Induljunk el F egy tetsz. v csúcsából egy sétán, és haladjunk, amíg tudunk. Ha sosem akadunk el, akkor előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, és kört találunk. Ezért elakadunk, és az csakis egy v-től különböző u levélben történhet. Ha $d(v) = 1$, akkor v egy u-tól különböző levél. Ha $d(v) \geq 2$, akkor sétát indulhatjuk v-ből egy másik él mentén. Ekkor egy u-tól különböző levélben akadunk el. □

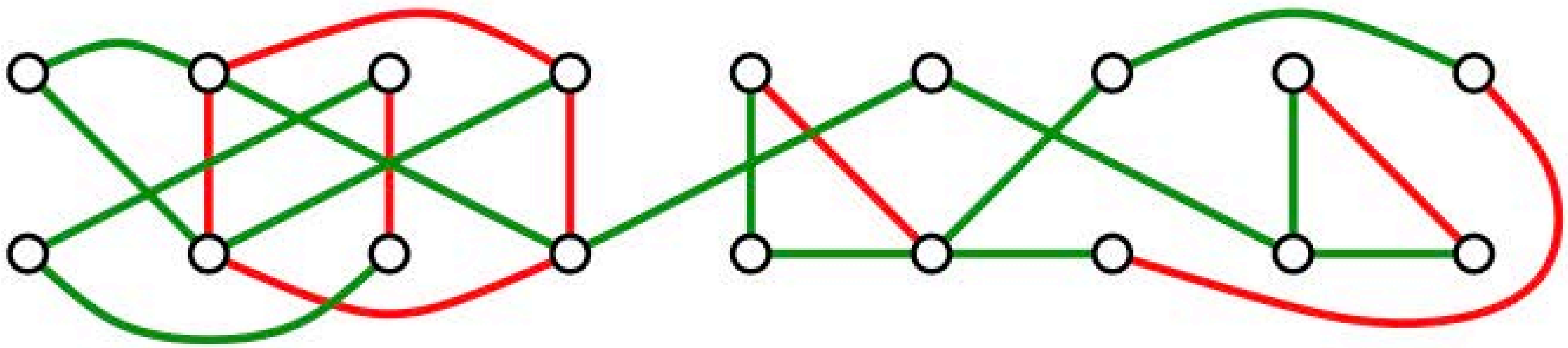
Feszítőfák

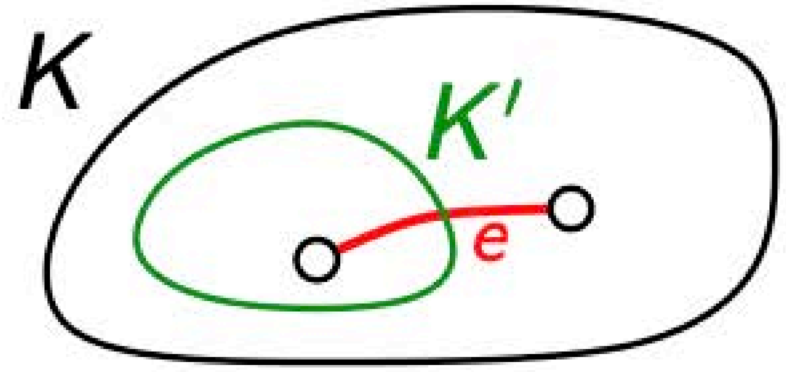




Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!
Legyen G' a G gráf piros élei törlésével keletkező feszítő részgráf!
G' biztosan körmentes lesz, hiszen a zöld élek sosem alkottak kört a korábbi élekkel.
G' minden K' komponense részhalmaza G egy K komponensének.
Ha $K' \neq K$, akkor G-nek van olyan éle, ami kilép K'-ből. Ezen élek mind pirosak K' definíciója miatt. Legyen e ezek közül az elsőnek kiszínezett. Az e él nem tudott kört alkotni a korábban kiszínezettekkel, így nem lehet piros: ellentmondás. Ezek szerint G és G' komponensei megegyeznek.

Feszítőfák





Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. □

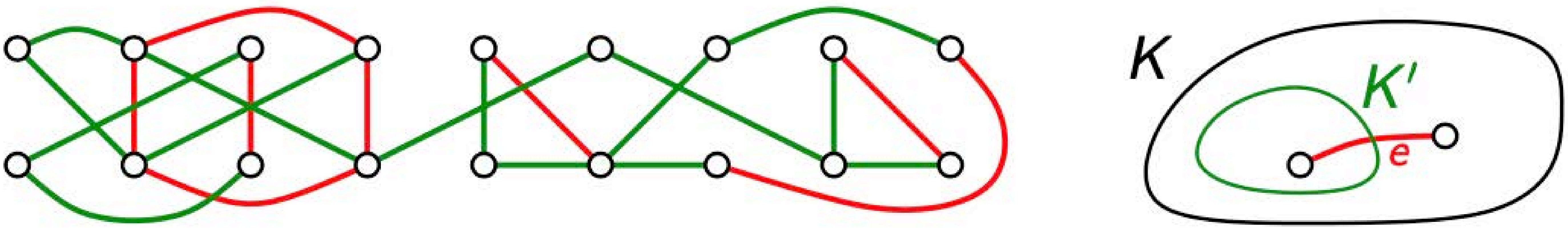
Def: F a G gráf feszítőfája (ffája), ha F egy G-ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: (G-nek van feszítőfája) $\iff$ (G öf.)

Biz: $\Rightarrow$: Legyen F a G ffája. F öf, és $V(F) = V(G)$, tehát G bármely két csúcsa között vezet F-beli út.

$\Leftarrow$: Építsük fel G-t az élek egyenkénti behúzásával és kiszínezésével. Láttuk, hogy a zöld élek egy F erdőt alkotnak, aminek egyetlen kompnense van, hiszen G is egykomponensű. Ezek szerint F olyan fa, ami G-ből éltörlésekkel kapható. □

Feszítőfák



Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. □

Def: F a G gráf feszítőfája (ffája), ha F egy G-ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: (G-nek van feszítőfája) $\iff$ (G öf.)

Megj: Ha egy nem feltétlenül összefüggő G gráf éleit a fenti módon kiszínezzük, akkor a zöld élek G minden komponensének egy F feszítőfáját alkotják. Nem összefüggő G esetén a zöld élek alkotta feszítő részgráf neve a G feszítő erdeje.