Def: Lineáris egyenlet: Ismeretlenek konstansszorosainak összeges konstans.
Def: Lineáris egyenletrendszer: Véges sok lineáris egyenlet.
Példa:

$$\begin{aligned} 3x - 4z &= 666 \\ 33x - y + 77z &= 42 \\ \sqrt[3/2]{5}y - (\ln(\cos 42)) \cdot z &= \pi^{e^\pi} \end{aligned}$$

0.1 Elemi sorekvivalens átalakítások

Def: Lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixa: a sorok az egyenletek, az oszlopok az ismeretlenek ill. az egyenletek jobb oldalainak felelnek meg, az egyes mezőkben pedig a megfelelő együttható ill. jobb oldali konstans áll.
Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \qquad \longmapsto \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 0 & -3 & 5 & -6 \\ 7 & 2 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -2 & 11 \end{array}\right)$$

Megj: A kibővített együtthatómátrix a lineáris egyenletrendszer felírásának egy tömör módja: elkerüljük vele a műveleti- és egyenlőségjelekkel piszmogást, mégis teljesen áttekinthető módon tartalmaz minden lényeges információt.
Def: A kibővített egyhómx elemi sorekvivalens átalakítása (ESÁ): (1) sorcsere, (2) sor nemnulla konstanssal végig szorzása, (3) az i-dik sor helyettesítése az i-dik és j-dik sorok (koordinátánkánti) összegével.
Állítás: ESÁ hatására a megoldások halmaza nem változik.
Biz: Minden ESÁ előtti megoldás megoldás marad a ESÁ után is. Minden ESÁ fordítottja megkapható ESÁ-ok egymásutánjaként is. Ezért minden ESÁ utáni megoldás megoldja az ESÁ előtti előtti rendszert is.

0.2 (Redukált) lépcsős alak

Def: Az M mátrix lépcsős alakú (LA), ha

(1) minden sor első nemnulla eleme 1-es (ú.n. vezért1-es, avagy v1)

(2) minden v1 feletti sorban van ettől a v1-től balra eső másik v1.

Az M mátrix redukált lépcsős alakú (RLA), ha

(3) M LA és (2) M-ben minden v1 felett csak nullák állnak.

Példa: LA mátrix ill. RLA mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ill. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \end{array} \mapsto \begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_4 &= 1 \\ 2x_3 + 5x_4 &= 7 \end{aligned} \mapsto \begin{aligned} &x_2, x_4 \in \mathbb{R} \\ &x_1 = 1 - 3x_2 + 2x_4 \\ &x_3 = 7 - 5x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \mapsto \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= 1 \\ x_3 + 5x_4 &= 7 \\ 0 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \mapsto \lightning$$

Def: Kibővített egyhómx tilos sora: $0 \dots 0 \mid x$ alakú sor, ha $x \neq 0$.

Def: A RLA kibővített egyhómx v1-hez tartozó változója kötött, a többi változó (amihez nem tartozik v1) szabad (vagy szabad paraméter).

Megf: Ha a kibővített egyhómx RLA, akkor (1) minden sor vagy a v1-hez tartozó változó értékadása, vagy tilos sor, vagy csupa0 sor. (2) Ha van tilos sor, akkor nincs megoldás. (3) Ha nincs tilos sor, a szabad paraméterek tetszőleges értékadásához egyértelmű megoldás tartozik.

Megf: A lineáris egyenletrendszer megoldása tekinthető úgy, hogy a lineáris egyenletrendszeregy RLA kibővített egyhómx-szal van megadva.

0.3 Gauss-elimináció

Gauss-elimináció:

Input: $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix.

Output: Egy M-ből ESÁ-okkal kapható $M' \in \mathbb{R}^{n \times k}$ LA mátrix.

Működés: Az algoritmus fázisokból áll. Az i-dik fázisban keresünk egy nemnulla elemet az $(i-1)$-dik sor alatt a lehető legkisebb sorszámú oszlopban. Ha nincs ilyen elem, az algoritmus véget ér. Sorcserével ezt a nemnulla elemet az i-dik sorba visszük. Az i-dik konstanssal szorzásával ezt az elemet v1-sé alakítjuk. Az i-dik sor alatti sorokhoz az i-dik sor konstansszorosát hozzáadva kinullázuk a kapott v1 alatti elemeket.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & -6 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 \end{array} \to \begin{array}{ccccc} 3 & 6 & -6 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 \end{array} \to \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 \end{array} \to \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -7 \end{array} \to$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -7 \end{array} \to \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 13 \end{array} \to \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \checkmark$$

Megj: (1) A Gauss-elimináció outputja LA. Az RLA-hoz további lépésekre van szükség: minden v1 felett kinullázhatók az elemek, ha a v1 sorának konstansszorosait a v1 feletti sorokhoz adjuk.

Példa:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \to \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \to \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \checkmark$$

(2) Ha csupán LA (RLA) a cél, eltérhetünk a Gauss-eliminációtól, feltéve, hogy ESÁ-okkal dolgozunk.

Példa:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & \sqrt{42} & \sqrt[e]{\pi} \end{array} \to \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -2 & -\sqrt{42} & 3 - \sqrt[e]{\pi} \\ 2 & 1 & 0 & \sqrt{42} & \sqrt[e]{\pi} \end{array} \checkmark$$

(3) A Gauss-elimináció megvalósítható rekurzív algoritmusként is. A GE(M) (az M mátrixot lépcsős alakra hozó eljárás):

$\boxed{1.}$ Ha M első oszlopa csupa0, akkor M' az első oszlop törlésével keletkező mátrix. Output: GE(M') elé írunk egy csupa0 oszlopot.

$\boxed{2.}$ Ha M első oszlopa tartalmaz nemnulla elemet, sorcserével és az első sor konstanssal szorzásával az első sor első elemét v1-sé tesszük, majd a v1 alatti elemeket ESÁ-okkal kinullázzuk.

Legyen M' az első sor és első oszlop törlésével keletkező mátrix. Output: GE(M') elé írunk egy csupa0 oszlopot és az így kapott mátrix fölé a korábban törölt első sort.

(4) Az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ Gauss-eliminációja során minden fázisában legfeljebb egy sorcserét, legfeljebb $2n$ sorszorzást és legfeljebb n sorösszeadást hajtunk végre. Ezért minden fázis legfeljebb $konst \cdot nk$ lépést igényel, az összlépésszám legfeljebb $konst \cdot n^2k$. Az input M mátrix $n \cdot k$ elemet tartalmaz, az eljárás hatékony.

0.4 Lineáris egyenletrendszer megoldásszáma

Láttuk:

1. Lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixként is megoldható.
2. ESÁ nem változtat a megoldásokon.
3. ESÁ-okkal elérhető a RLA.
4. A RLA-ból azonnal adódik a megoldás.
    - Ha az utolsó oszlopban van v1, akkor nincs megoldás.
    - Ha az utolsó kivételével minden oszlopban van v1, akkor egyetlen megoldás van.
    - Ha az utolsón kívül más oszlopban sincs v1, akkor van szabad paraméter, így végtelen sok különböző megoldás van.

Köv: Ha a lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor legalább annyi egynelet van, mint ahány ismeretlen.

Biz: Az RLA-ra hozás után nincs szabad paraméter, tehát minden változóhoz tartozik v1. Ezért a kibővített együtthatómátrixnak legalább annyi sora van, mint a változók száma.

Megj: A fenti következmény fordított irányban nem igaz, és lényegében nincs más összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az ismeretlenek és egyenletek száma között.