

Gráfelméleti alapfogalmak: **csúcs, él, diagram, fokszám**. Egyszerű gráf, irányított gráf, véges gráf, komplementer gráf, reguláris gráf, él/csúcsstörles, élhozzáadás, (feszítő/feszített) részgráf, izomorfia, élsorozat, séta, út, kör, **összefüggő gráf**, komponens. kézfogás-lemma.

Gráfelméleti alapfogalmak:

• **csúcs, élek:**

- $V$  a  $G$  csúcsainak ((szög) pontjainak) halmaza.
- $E$  pedig  $G$  éleinek halmaza.
- $G=(V,E)$  egyszerű irányítatlan gráf ha  $V \neq \emptyset$  és  $E \leq \binom{V}{2}$ , ahol  $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$

• **Diagram:** A  $G = (V, E)$  gráf **diagramja** egy olyan lerajzolása, melyben a csúcsoknak (síkbeli) pontok felelnek meg, éleknek pedig a két végpontot összekötő, önmagukat nem metsző görbék.

• **Fokszám:**

- $v \in V(G)$  esetén a  $v$ -re illeszkedő élek száma a  $v$  fokszáma.
- A  $G$  gráf csúcsának  $d(v)$  foka a vé végpontú élek száma (hurokél kétszer számít).

• Egyszerű gráf: ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei.

• Irányított gráf: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

• Véges gráf:  $G = (V, E)$  **véges gráf**, ha  $V$  és  $E$  is véges halmazok.

• Komplementer gráf:

- A  $G$  egyszerű gráf **komplementere**  $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E(G))$ .
- Két csúcs pontosan akkor szomszédos  $G$ -ben, ha a fokszámai megegyeznek vagy, ha minden csúcsának foka ugyan annyi.

• Reguláris gráf:  $k$ -reguláris, ha minden csúcsának pontosan  $k$  a fokszáma.

• Él/Csúcsstörles:

**Feszítő részgráf** (éltöréssel kapható gráf),  $G = (V, E)$  gráf  $e \in E$  és  $v \in V$  akkor  $G - e = (V, E \setminus \{e\})$  az éltörés eredménye.

**Feszített részgráf:** (csúcsstörésekkel kapható gráf), csúcsstöréssel keletkező  $G - v$  gráfhoz  $V$ -ből töröljük  $v$ -t,  $E$ -ből pedig a  $v$ -re illeszkedő éleket.

**Részgráf:** él- és csúcsstörésekkel kapható gráf.

• Izomorfia: A  $G$  és  $G'$  gráfok akkor **izomorfak**, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től  $n$ -ig terjedő egész számokkal (alkalmas  $n$  esetén), hogy  $G$  bármely két  $u, v$  csúcsa között pontosan annyi él fut  $G$ -ben, mint az  $u$ -nak és  $v$ -nek megfelelő sorszámu csúcsok között  $G'$ -ben. Jelölése:  $G \cong G'$ .

• Élsorozat:  $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$ , ahol  $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$ . (Tulajdonképp egyik csúcsból eljutunk egy másik csúcsba mindig élek mentén haladva.)

• Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

• Út: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

• Kör:  $u = v$ , ha a kezdő (és vég)pontot nem akarjuk megnevezni, akkor **zárt élsorozatról**, **körsétáról** ill. **köréről** beszélünk.

• **Összefüggő gráf:**

- A  $G$  irányítatlan gráf **összefüggő**, ha  $u \sim v, \forall u, v \in V(G)$  (ha bármely két pontja között vezet séta), ha bármely két csúcsa között vezet út  $G$ -ben (ha egy komponense van).
- A  $G$  irányított gráfot akkor mondjuk **erősen összefüggőnek**, ha  $G$  bármely  $u, v \in V(G)$  esetén van **irányított  $uv$ -út**  $G$ -ben.
- **gyengén összefüggő**, ha a  $G$ -nek megfelelő irányítatlan gráf, összefüggő.

• **Komponens:**

- (1)  $K \subseteq V(G)$  pontosan akkor komponense  $G$ -nek, ha  $K$ -ból nem lép ki éle  $G$ -nek, de  $\forall v, v' \in K$  esetén  $v \sim v'$ . (A komponensen belül el lehet jutni minden csúcsból minden csúcsba.)
- (2) Minden  $G$  irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel  $G$  komponenseinek diszjunkt uniójára.
- A  $G$  komponense alatt sokszor nem csupán a  $G$  csúcsainak egy  $K$  részhalmazát, hanem a  $K$  által feszített részgráfot értjük.
  - $K \leq V(G)$  a  $G$  gráf komponense, ha bármely  $u, v \in K$  között létezik  $G$  séta, de nem létezik  $uv$ -séta, ha  $u \in K, v \in V(G) \setminus K$ . (Minden gráf egyértelműen bontható komponensekre.)
- **Kézfogás-lemma:** Ha  $G = (V, E)$  véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ , azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.
  - **A KFL bizonyítása:** Készítsük a  $G'$  digráfot úgy, hogy  $G$  minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítsük. Ekkor  $\sum_{v \in V} d_G(V) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)|$
  - **Megj:** Úgy is bizonyíthattuk volna a kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be  $G$ -be az éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-vel növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszámösszeget is.
  - **Általánosított kézfogás-lemma:** Tetsz.  $G = (V, E)$  véges irányított gráfra  $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$ , azaz a csúcsok ki- és befokainak összege is az élszámot adja meg. **Megj:** Úgy is bizonyíthattuk volna az általánosított kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be  $G$ -be az éleket. 0-elű (üres)gráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 1-gyel növeli az élszámot is és a ki/befokok összegét is.