13. ESÁ hatása a sor- és oszlopvektorokra, **oszlopvektorok lin.ftn-ségének eldöntése**. **Bázis** fogalma, **altér bázisának előállítása generátorrendszerből** ill. homogén lineáris egyenletendszerrel megadott altér esetén.

1. ESÁ hatása a sor- és oszlopvektorokra, **oszlopvektorok lin.ftn-ségének eldöntése**

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$.

Példa: Döntsük el, hogy lin.ftn. rendszert alkotnak-e az alábbi M mátrix oszlopai. Megoldás: ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{array}{rrrr|} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\begin{array}{rrrr|} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\begin{array}{rrrr|} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\begin{array}{rrrr|} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

A kapott M' mátrixra $\underline{o}'_4 = -7\underline{o}'_1 + 3\underline{o}'_2 + 2\underline{o}'_3$. Így M oszlopaira $\underline{o}_4 = -7\underline{o}_1 + 3\underline{o}_2 + 2\underline{o}_3$ teljesül, ezért M oszlopai a korábbi lemma miatt nem lin. ftn.-ek.

Biz: Feltehető, hogy M'-t egyetlen ESÁ-sal kaptuk M-ből. Bármelyik konkrét ESÁ-t is alkalmaztuk, $S' \subseteq \langle S\rangle$, így $\langle S'\rangle \subseteq \langle S\rangle$. Láttuk, hogy bármely ESÁ megfordítása is kivitelezhető ESÁ-okkal, ezért $\langle S\rangle \subseteq \langle S'\rangle$, és a két megfigyelésből $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$ adódik. □

Biz: Ismét feltehető, hogy M' egyetlen ESÁ-sal keletkezett. Ráadásul elég a $\Rightarrow$: irányt bizonyítani: a $\Leftarrow$: következik abból, hogy minden ESÁ fordítottja megvalósítható legfeljebb három ESÁ-sal. Ezért ha egy lin.összefüggés fennál M'-re akkor az ezt legfeljebb három ESÁ megőrzi, tehát igaz marad M-re is.

Biz: $\Rightarrow$: A fenti lineáris összefüggés M-re pontosan azt jelenti, hogy a $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^k \mu_i x_i$ egyenletnek M minden sora megoldása. Nekünk pedig azt kell igazolni, hogy ugyanezt az egyenletet az ESÁ után kapott M' minden sora is megoldja. Sorcsere esetén pontosan ugyanazokról az egyenlőségekről van szó, skalárral szorzás esetén az egyik egyenletet skalárral kell szorozni, sorösszeadás esetén pedig az új egyenlőség két korábban teljesülő egyenlet összege. □

2. Bázis fogalma

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa a V egy lin.ftn generátorrendszere.
Példa: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok az $\mathbb{R}^n$ standard bázisát alkotják.
Kínzó kérdés: Minden altérnek van bázisa? Ha $\mathbb{R}^n$ egy V altérének van, akkor hogyan lehet előállítani V egy bázisát?

1. módszer: Ha $V = \langle G \rangle$, azaz ha ismert a V egy véges G generátorrendszere, akkor G-t addig ritkítjuk, amíg lin.ftn nem lesz. Konkrétan: ha egy $\underline{g} \in G$ generátorelem előáll a $G \setminus \{\underline{g}\}$ elemeinek alkalmas lin. kombinációjaként, akkor $G \setminus \{\underline{g}\}$ is generálja V-t. Ezért $\underline{g}$-t eldobhatjuk. Ha már nincs ilyen eldobható $\underline{g}$ vektor, akkor G maradéka nem csak generátorrendszer, de lin.ftn is.

2. módszer: Felépíthetjük V bázisát a V egy tetsz. F lin.ftn rendszeréből (akár $F = \emptyset$-ból) kiindulva. Ha $\langle F \rangle = V$, akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor tetsz. $\underline{f} \in V \setminus \langle F \rangle$ esetén $F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn marad. Az FG-egyenlőtlenség miatt F nem tartalmazhat n-nél több elemet, ezért legfeljebb n lépésben megkapjuk V bázisát.

3. <u>Altér bázisának előállítása generátorrendszerből</u>

Példa:
Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{array}{rrrrr|rrrrr|rrrrr|}
3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\
-1 & 3 & 4 & -9 & 2 & -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\
0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\
1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 & 5 & 5 & -10 & -7
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|rrrrr|rrrrr|}
1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\
0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\
0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\
0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|}
\underline{u} & \underline{v} & \underline{w} & \underline{x} & \underline{y} \\
1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Ezek szerint $\underline{w} = \underline{v} - \underline{u}$, $\underline{x} = 3\underline{u} - 2\underline{v}$.
A v1-ek oszlopai lin.ftn generátorrendszer, azaz $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}\}$ a V altér bázisa. $\square$

Példa: Keressük meg az alábbi $V \leq \mathbb{R}^4$ altér egy bázisát!

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, 3x_2 - 2x_4 = 0 \right\}$$

Megoldás: Az altér egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaiból áll. (Homogén: a jobboldalon 0-k állnak, amiket a kib.egyhómx-ból elhagyunk.) A megoldásokat leíró képletből fogjuk meghatározni V egy bázisát.

$$\begin{array}{cccc|} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{array} \begin{array}{cccc|} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \end{array} \begin{array}{cccc|} 1 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}, \\ x_1 = -x_3 - \frac{5}{3}x_4, \\ x_2 = \frac{2}{3}x_4. \end{array}$$

A bázis elkészítéséhez a szp-ek olyan lin.ftn értékadásait keressük, amelyek lin.komb-jaként a szp-ek tetsz. értékadása előáll. Ilyen pl., ha minden lehetséges módon egy szp-nek 1, a többinek 0 értéket adunk. Azaz az $x_3 = 1, x_4 = 0$ ill. $x_3 = 0, x_4 = 1$ értékadásokhoz a

$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, és $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorokból álló bázis tartozik. □

Példa: Írjuk fel a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$ alteret lin.egyrsz megoldásaiként, ha

$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{z}|\underline{x})$ mátrixot RLA-ra (LA-ra) hozzuk.

$$\begin{array}{rrrrr|} 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \end{array} \begin{array}{rrrrr|} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 \end{array} \begin{array}{rrrrr|} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array} \begin{array}{rrrrr|} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|} 1 & 0 & 3 & 1 & x_4 - x_3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & x_1 + 5x_3 - 3x_4 \end{array} \begin{array}{rrrrr|} 1 & 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x_2 + 2x_3 + x_4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3x_1 - x_2 + 13x_3 - 10x_4}{3} \end{array}$$

A kiindulási mátrix 5-dik oszlopa pontosan akkor van V-ben, ha az első 4 oszlop generálja. Ez azzal ekvivalens, hogy az RLA mátrix első 4 oszlopa generálja az 5-diket. Mivel $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ a generáló oszlopok között vannak, ezért csupán $3x_1 - x_2 + 13x_3 - 10x_4 = 0$ a feltétel. □

---

4. homogén lineáris egyenletrendszerrel megadott altér esetén