<u>Élhozzáadási lemma</u> erdő, **fa**, fák egyszerűbb tulajdonságai: <u>két levél</u>, <u>erdők élszáma</u>. **Feszítőfa** <u>létezése</u>, feszítőfához tartozó alapkörök és alap vágások.

- **<u>Élhozzáadási lemma (ÉHL):</u>** Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.

  (1) G és G' komponensei megegyeznek, de G'-nek eggyel több köre van, mint G-nek.

  (2) G és G' körei megegyeznek, de G'-nek eggyel kevesebb komponense van, mint G-nek.

- Erdő: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.

- **Fa:** Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
  - G erdő $\iff$ G minden komponense fa.
  - G n-csúcsú, k-komponensű erdő $\Rightarrow |E(G)| = n - k$.
  - **Biz:** Építsük fel G-t a $\overline{K_n}$ üresgráfból az élek egyenkénti behúzásával. G körmentes, ezért az ÉHL miatt minden él zöld: behúzásakor 1-gyel csökken a komponensek száma. A $\overline{K_n}$ üresgráfnak n komponense van, G-nek pedig k. Ezért pontosan $n - k$ zöld élt kellett behúzni G felépítéséhez.

- **Két levél:** Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.
  - **Biz:** (Algebrai út) A KFL miatt $\sum_{v \in V(G)}(d(v) - 2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 2n = 2(n-1) - 2n = -2$. F minden v csúcsára $d(v) \geq 1$ teljesül, ezért $d(v) - 2 \geq -1$. A fenti összeg csak úgy lehet -2, ha F-nek legalább 2 levele van.
  - **Biz:** (Kombinatorikus út) Induljunk el F egy tetszőleges v csúcsából egy sétán, és haladjunk, amíg tununk. Ha sosem akadunk el, akkor előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, és kört találunk. Ezért elakadunk, és az csakis egy v-től különböző u levélben történhet. Ha $d(v) = 1$, akkor v egy u-tól különböző levél. Ha $d(v) \geq 2$, akkor sétát indíthatunk v-ből egy másik él mentén. Ekkor egy u-tól különböző levélben akadunk el.

- **Feszítőfa** F a G gráf feszítőfája (ffa), ha F egy G-ből éltörésekkel kapható fa. Ha G-nek van feszítőfája $\Leftrightarrow$ (akkor) összefüggő.

- Alapvágás, alapkör:

  A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ által létrehozott két komponens között futnak.

  Az $e \in E(G) \backslash E(F)$ éléhez tarozó alapkör pedig az $F + e$ köre.

  Megf: Tfh $f \in F$ és $e \in E(G) \backslash E(F)$. Ekkor ($F - f + e$ ffa) $\iff$ (f benne van e alapkörében) $\iff$ (e benne van f alap vágásában).