

# A számítástudomány alapjai

KIDOLGOZOTT SZÓBELI TÉTELSOR

*Készítette: Illyés Dávid*

A jegyzetben a "A számítástudomány alapjai" nevű tárgy 2023/24/1 félévében kiadott szóbeli tételsor van (többé-kevésbé) kidolgozva. (Jelenleg inkább csak össze gyűjtögetve, de finomítva még nincs.)

# Tartalomjegyzék

	Oldal
1 Tétel	4
2 Tétel	6
3 Tétel	7
4 Tétel	9
5 Tétel	11
6 Tétel	14
7 Tétel	16
8 Tétel	18
9 Tétel	22
10 Tétel	24
11 Tétel	27

## Tételek:

A **félkövéren** szedett dolgokat tudni kell ismertetni, kimondani, ill. definiálni. Az aláhúzottakat bizonyítottuk, a *dőltten* szedettteket nem. A vizsgán az anyag értő ismeretét kérjük számon, elégségesért nem kell bizonyítást tudni.

- Gráfelméleti alapfogalmak: **csúcs, él, diagram, foksám**. Egyszerű gráf, irányított gráf, véges gráf, komplementer gráf, reguláris gráf, él/csúcstörles, élhozzáadás, (feszítő/feszített) részgráf, izomorfia, élsorozat, séta, út, kör, **összefüggő gráf**, komponens. **kézfogás-lemma**.
- Élhozzáadási lemma** erdő, fa, fák egyszerűbb tulajdonságai: két levél, erdők élszáma. **Feszítőfa létezése**, feszítőfához tartozó alapkörök és alap vágások.
- Minimális költségű feszítőfa**, mkkfák struktúrája, **Kruskal-algoritmus helyessége**, villamos hálózathoz tartozó normál fa keresése.
- Általános gráfbejárás: **a csúcsok állapotváltozása, a bejárás általános lépései**, a bejáráshoz tartozó sorrend ill. az élek osztályozása bejárás után. A **BFS** és tulajdonságai, legrövidebb utak fájának létezése.
- Gráfút hossza, gráfcsúcsok távolsága, nemnegatív és konzervatív hosszfüggvény, triviális és pontos  $(r, l)$ -**felső becslés, élementi javítás**. **Dijkstra-algoritmus működése**, Ford-algoritmus helyessége és lépésszáma. Legrövidebb utak fájának létezése.
- Mélységi keresés** és alkalmazásai (fellépő éltípusok, mélységi- és befejezési számozásból az éltípus meghatározása, irányított kör létezésének eldöntése DFS-sel).
- DAG**, jellemzése, **topologikus sorrend keresése**. Leghosszabb utak keresése, **PERT-módszer**, kritikus utak és tevékenységek.
- Euler-séta és körséta** létezésének szükséges és elégséges feltétele. **Hamilton-kör és út** létezésére szükséges, ill. elégséges feltételek: komponensszám ponttörles után (Petersen-gráf) **Dirac, Ore tételei**, gazdag párok, hízlalási lemma, Chavátal-lezárt.
- Gráfok síkba ill. gömbre rajzolhatósága, tartomány, sztereografikus projekció**, következményei. Az **Euler-féle poliédertétel**, duális kézfogáslemma és következményei: felső korlátok az élszáma és a minimális foksáma egyszerű, síkbarajzolható gráfokon.
- Kuratowski gráfok** síkbarajzolhatósága, **soros bővítés**, **Kuratowski-tétel könnyű iránya**. **Síkbarajzolt gráf duálisa**, a duális paraméterei. Vágás, elvágó él, soros élék. *Kör-vágás dualitása*, különféle élék duálisai. Whitney két tétele, Whitney operációk.
- Lineáris egyenletrendszer, kibővített együtthatómátrix, elemi sorokvivalens átalakítás** és kapcsolata a megoldásokkal. **LA és RLA mátrix, vezéregyes, megoldás leolvasása RLA mátrix esetén**. Tilos sor, kötött változó, szabad paraméter, ezek jelentése a megoldás/megoldhatóság szempontjából. **Gauss-elimináció, összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az egyenletek és ismeretlenek száma között**.
- Az  $\mathbb{R}^n$  **tér**, vektorműveletek azonosságai, (generált) **altér** (példák), (triviális) **lineáris kombináció**, alterek metszete, **generátorrendszer, lineáris függetlenség** (kétféle definíció). Lin.ftn rendszer hízlalása, generátor-rendszer ritkítása, kicserélési lemma, **FG-egyenlőtlenség** és következménye.
- ESÁ hatása a sor- és oszlopvektorokra, **oszlopvektorok lin.ftn-ségének eldöntése**. **Bázis fogalm, altér bázisának előállítás generátorrendszerből** ill. homogén lineáris egyenletrendszerrel megadott altér esetén.
- Generátorrendszerből homogén lin.egyenletrendszer előállítás. **Altér dimenziójának jóldefiniáltsága**,  $\mathbb{R}^n$  **standard bázisa**, bázishoz tartozó koordinátavektor kiszámítása.
- $n$  elem permutációja, a permutáció **inverziószáma**. **Bástyaelhelyezés**, inverzióban álló bástyapárok, **determináns, felső háromszögmátrix determinánsa**.
- Mátrix transzponáltja**, transzponált determinánsa, **ESÁ hatása a determinánssra**, **előjeles alde-termináns, kifejtési téte**.
- Vektorok skaláris szorzásának tulajdonságai. **Mátrixok összeadása és szorzásai**, e műveletek tulajdonságai. **A szorzatmátrix sorainak és oszlopainak különös tulajdonsága**, ESÁ és mátrixszorzás kapcsolata.

18. **Lineáris leképezések és mátrixszorzások kapcsolata. Lineáris leképezés mátrixának meghatározása.** Leképezések egymásutánjának mátrixa, mátrixszorzás asszociativitása.
19. **Mátrix jobb- és balinverze, ezek viszonya. Balinverz kiszámítása ESÁ-okkal** és előjeles aldeterminánsokkal, **reguláris mátrixok** jellemzése determinánssal, sorokkal, oszlopokkal ill. RLA mátrix segítségével.
20. **Sor- oszlop- és determinánsrang, ezek viszonya és kiszámítása.** Összeg és szorzat rangja. **Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja, a megoldhatóság és az oszlopok alterének kapcsolata.** Az egyértelmű megoldhatóság feltétele  $n \times n$  együtthatómátrix esetén.

# 1 Tétel

Gráfelméleti alapfogalmak: **csúcs, él, diagram, foksám.** Egyszerű gráf, irányított gráf, véges gráf, komplementer gráf, reguláris gráf, él/csúcsstörés, élhozzáadás, (feszítő/feszített) részgráf, izomorfia, élsorozat, séta, út, kör, **összefüggő gráf**, komponens. kézfogás-lemma.

Gráfelméleti alapfogalmak:

- **csúcs, élek:**

- $V$  a  $G$  csúcsainak ((szög) pontjainak) halmaza.
- $E$  pedig  $G$  éleinek halmaza.
- $G=(V,E)$  egyszerű irányítatlan gráf ha  $V \neq \emptyset$  és  $E \leq \binom{V}{2}$ , ahol  $\binom{V}{2} = \{\{u,v\} : u,v \in V, u \neq v\}$

- **Diagram:** A  $G = (V, E)$  gráf **diagramja** egy olyan lerajzolása, melyben a csúcsoknak (síkbeli) pontok felelnek meg, éleknek pedig a két végpontot összekötő, önmagukat nem metsző görbék.

- **Foksám:**

- $v \in V(G)$  esetén a  $v$ -re illeszkedő élék száma a  $v$  foksáma.
- A  $G$  gráf csúcsának  $d(v)$  foka a vé végpontú élék száma (hurokél kétszer számít).

- Egyszerű gráf: ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei.

- Irányított gráf: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

- Véges gráf:  $G = (V, E)$  **véges gráf**, ha  $V$  és  $E$  is véges halmazok.

- Komplementer gráf:

- A  $G$  egyszerű gráf **komplementere**  $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E(G))$ .
- Két csúcs pontosan akkor szomszédos  $G$ -ben, ha a foksámái megegyeznek vagy, ha minden csúcsának foka ugyan annyi.

- Reguláris gráf:  $k$ -reguláris, ha minden csúcsának pontosan  $k$  a foksáma.

- Él/Csúcsstörés:

**Feszítő részgráf** (éltöréssel kapható gráf),  $G = (V, E)$  gráf  $e \in E$  és  $v \in V$  akkor  $G - e = (V, E \setminus \{e\})$  az éltörés eredménye.

**Feszített részgráf:** (csúcsstörésekkel kapható gráf), csúcsstöréssel keletkező  $G - v$  gráfhoz  $V$ -ből töröljük  $v$ -t,  $E$ -ből pedig a  $v$ -re illeszkedő éleket.

**Részgráf:** él- és csúcsstörésekkel kapható gráf.

- Izomorfia: A  $G$  és  $G'$  gráfok akkor **izomorfak**, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től  $n$ -ig terjedő egész számokkal (alkalmas  $n$  esetén), hogy  $G$  bármely két  $u, v$  csúcsa között pontosan annyi él fut  $G$ -ben, mint az  $u$ -nak és  $v$ -nek megfelelő sorszámú csúcsok között  $G'$ -ben. Jelölése:  $G \cong G'$ .

- Élsorozat:  $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$ , ahol  $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$ . (Tulajdonképp egyik csúcsból eljutunk egy másik csúcsba mindig élek mentén haladva.)

- Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

- Út: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

- Kör:  $u = v$ , ha a kezdő (és vég)pontot nem akarjuk megnevezni, akkor **zárt élsorozatról**, **körsétáról** ill. **köréről** beszélünk.

- **Összefüggő gráf:**

- A  $G$  irányítatlan gráf **összefüggő**, ha  $u \sim v, \forall u, v \in V(G)$  (ha bármely két pontja között vezet séta), ha bármely két csúcsa között vezet út  $G$ -ben (ha egy komponense van).
- A  $G$  irányított gráfot akkor mondjuk **erősen összefüggőnek**, ha  $G$  bármely  $u, v \in V(G)$  esetén van **irányított  $uv$ -út**  $G$ -ben.
- **gyengén összefüggő**, ha a  $G$ -nek megfelelő irányítatlan gráf, összefüggő.

- **Komponens:**

- (1)  $K \subseteq V(G)$  pontosan akkor komponense  $G$ -nek, ha  $K$ -ból nem lép ki éle  $G$ -nek, de  $\forall v, v' \in K$  esetén  $v \sim v'$ . (A komponensen belül el lehet jutni minden csúcsból minden csúcsba.)
- (2) Minden  $G$  irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel  $G$  komponenseinek diszjunkt uniójára.
  - A  $G$  komponense alatt sokszor nem csupán a  $G$  csúcsainak egy  $K$  részhalmazát, hanem a  $K$  által feszített részgráfot értjük.
  - $K \leq V(G)$  a  $G$  gráf komponense, ha bármely  $u, v \in K$  között létezik  $G$  séta, de nem létezik  $uv$ -séta, ha  $u \in K, v \in V(G) \setminus K$ . (**Minden gráf egyértelműen bontható komponensekre.**)

- **Kézfogás-lemma:** Ha  $G = (V, E)$  véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ , azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

**A KFL bizonyítása:** Készítsük a  $G'$  digráfot úgy, hogy  $G$  minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítsük. Ekkor  $\sum_{v \in V} d_G(V) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)|$

**Megj:** Úgy is bizonyíthattuk volna a kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be  $G$ -be az éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-vel növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszámösszeget is.

- **Általánosított kézfogás-lemma:** Tetsz.  $G = (V, E)$  véges irányított gráfra  $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$ , azaz a csúcsok ki- és befokainak összege is az élszámot adja meg. **Megj:** Úgy is bizonyíthattuk volna az általánosított kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be  $G$ -be az éleket. 0-elű (üres)gráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 1-gyel növeli az élszámot is és a ki/befokok összegét is.

## 2 Tétel

**Élhozzáadási lemma** erdő, **fa**, fák egyszerűbb tulajdonságai: két levél, erdők élszáma. **Feszítőfa** létezése, feszítőfához tartozó alapkörök és alap vágások.

- **Élhozzáadási lemma (ÉHL):** Legyen  $G$  irányítatlan gráf és  $G' = G + e$ . Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.
  - (1)  $G$  és  $G'$  komponensei megegyeznek, de  $G'$ -nek eggyel több köre van, mint  $G$ -nek.
  - (2)  $G$  és  $G'$  körei megegyeznek, de  $G'$ -nek eggyel kevesebb komponense van, mint  $G$ -nek.
- Erdő: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.
- **Fa:** Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.
  - $G$  erdő  $\iff G$  minden komponense fa.
  - $G$   $n$ -csúcsú,  $k$ -komponensű erdő  $\Rightarrow |E(G)| = n - k$ .
  - **Biz:** Építsük fel  $G$ -t a  $\overline{K_n}$  üresgráfból az élek egyenkénti behúzásával.  $G$  körmentes, ezért az ÉHL miatt minden él zöld: behúzásakor 1-gyel csökken a komponensek száma. A  $\overline{K_n}$  üresgráfnak  $n$  komponense van,  $G$ -nek pedig  $k$ . Ezért pontosan  $n - k$  zöld élt kellett behúzni  $G$  felépítéséhez.
- **Két levél:** Legyen  $F$  egy tetszőleges fa  $n$  csúcson. Ekkor ha  $n \geq 2$ , akkor  $F$ -nek legalább két levele van.
  - **Biz:** (Algebrai út) A KFL miatt  $\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 2n = 2(n - 1) - 2n = -2$ .  $F$  minden  $v$  csúcsára  $d(v) \geq 1$  teljesül, ezért  $d(v) - 2 \geq -1$ . A fenti összeg csak úgy lehet  $-2$ , ha  $F$ -nek legalább 2 levele van.
  - **Biz:** (Kombinatorikus út) Induljunk el  $F$  egy tetszőleges  $v$  csúcsából egy sétán, és haladjunk, amíg tununk. Ha sosem akadunk el, akkor előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, és kört találunk. Ezért elakadunk, és az csakis egy  $v$ -től különböző  $u$  levélben történhet. Ha  $d(v) = 1$ , akkor  $v$  egy  $u$ -tól különböző levél. Ha  $d(v) \geq 2$ , akkor sétát indíthatunk  $v$ -ből egy másik él mentén. Ekkor egy  $u$ -tól különböző levélben akadunk el.
- **Feszítőfa**  $F$  a  $G$  gráf feszítőfája (ffa), ha  $F$  egy  $G$ -ből éltörésekkel kapható fa. Ha  $G$ -nek van feszítőfája  $\iff$  (akkor) összefüggő.
- Alapvágás, alapkör:
 

A  $G$  gráf  $F$  feszítőfájának  $f$  éléhez tartozó **alap vágást**  $G$  azon élei alkotják, amik az  $F - f$  által létrehozott két komponens között futnak.

Az  $e \in E(G) \setminus E(F)$  éléhez tartozó **alapkör** pedig az  $F + e$  köre.

**Megf:** Tfh  $f \in F$  és  $e \in E(G) \setminus E(F)$ . Ekkor  $(F - f + e \text{ ffa}) \iff (f \text{ benne van } e \text{ alapkörében}) \iff (e \text{ benne van } f \text{ alap vágásában})$ .

### 3 Tétel

**Minimális költségű feszítőfa**, mkffák struktúrája, **Kruskal-algoritmus** helyessége, villamos hálózathoz tartozó normál fa keresése.

- **Minimális költségű feszítőfa:** Adott a  $G = (V, E)$  irányítatlan gráf élein a  $k : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  költségfüggvény. Az  $F \subseteq E$  élhalmaz **költsége** az  $F$ -beli élek összköltsége:  $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$ . Az  $F \subseteq E$  élhalmaz  $G$ -ben **minimális költségű feszítőfa** (mkffa), ha

- (1)  $(V, F)$  a  $G$  feszítőfája, és
- (2)  $k(F) \leq k(F')$  teljesül a  $G$  bármely  $(V, F')$  feszítőfájára.

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes.} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

- **Minimális költségű feszítőfa:** olyan  $F \subseteq E$  élhalmaz, amire  $(V, F)$  fa, és  $k(F)$  minimális.
- **Mkffák struktúrája:**  $G = (V, E)$  gráf és  $k : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  költségfüggvény esetén legyen  $G_c$  a legfeljebb  $c$  költségű élek alkotta feszítő részgráfja  $G$ -nak:  $G_c = (V, E_c)$ , ahol  $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$ .

**Megf:** A  $G$  gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza  $G_c$  egy feszítő erdejét minden  $c \geq 0$  esetén.

**Lemma:** Tfh  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_l\}$ ,  $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_l)$  és  $F \cap E_c$  a  $G_c$  egy feszítő erdeje  $\forall c \geq 0$ -ra. Tfh  $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_l\}$  a  $G$  egy feszítő erdejének élei, és  $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_l)$ . Ekkor  $k(f_i) \leq k(f'_i)$  teljesül  $\forall 1 \leq i \leq l$  esetén, így  $k(F) \leq k(F')$ .

**Köv:** (1) A Kruskal-algoritmus outputja a  $G$  gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

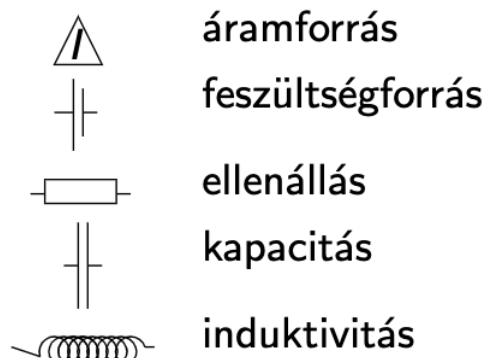
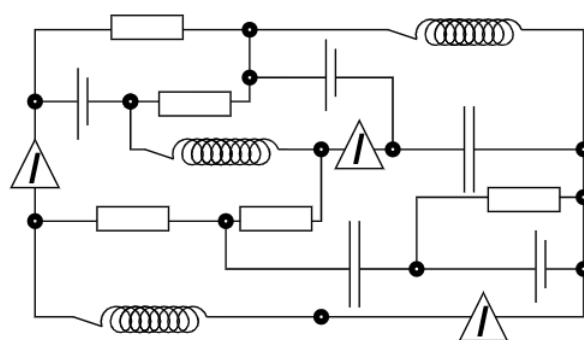
**Köv:** (2) Az  $F'$  élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje  $G$ -nek, ha  $F' \cap E_c$  a  $G_c$  egy feszítő erdeje minden  $c \leq 0$ -ra.

**Biz:** A Lemma bizonyítja az elégségességet.

- **Kruskal algoritmus:**

- Input:  $G = (V, E)$  gráf, és  $k : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  költségfüggvény.
- Output: minimális költségű feszítőfa.
- Működés: minden lépésben megépítjük a legolcsóbb élt, ami nem hoz létre kört. Mohó algoritmus, mert csak azzal törődik, ami éppen a legalacsonyabb költségű. Az így keletkezett fa a  $G$  gráf egy minimális költségű (súlyú) feszítőfája.
- Helyességének bizonyítása: tegyük fel, hogy az algoritmus helytelen, ekkor létezik egy  $f$  él, amit  $e$  helyére bevéve olcsóbb feszítőfát kapunk. Ekkor azonban  $f$  költsége kisebb, mint  $e$  költsége, így  $f$ -et az algoritmussal korábban már ellenőriztük, tehát ellentmondásra jutottunk, azaz a feszítőfa minimális költségű.

- Villamos hálózathoz tartozó normál fa keresése:



- Tegyük fel, hogy egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tulajdonképpen egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Az, hogy mi történik (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcúcsok között a potenciálkülönbségek), a Kirchoff- ill. Ohm-törvényekkel írható le.
- **Csomóponti törvény:** a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.
- **Huroktörvény:** a gráf tetszőleges köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.



- Mikor "értelmes" egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Bizonyítható, hogy ha a fenti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat "értelmes". Ennek a bizonyítéka a **normál fa**:  $G$  olyan feszítőfája, ami minden feszültségforrást tartalmaz, de egyetlen áramforrást sem (és mindemellett a legtöbb kapacitást és a lehető legkevesebb induktivitást tartalmazza).
- **Normál fa keresése:** fesz.forrás (1), kapacitás (2), ellenállás (3), induktivitás (4), áramforrás (5) élköltségekhez keressünk mkffát! Ha ez tartalmaz áramforrást, vagy nem tartalmaz minden feszültségforrást, akkor nincs normál fa, egyébként a mkffa egy normál fa és egyértelmű a megoldás "értelmes" a hálózat.

## 4 Tétel

Általános gráfbejárás: a csúcsok állapotváltozása, a bejárás általános lépései, a bejáráshoz tartozó sorrend ill. az élek osztályozása bejárás után. A BFS és tulajdonságai, legrövidebb utak fájának létezése.

- **Általános gráfbejárás & BFS:** A gráfbejárési algoritmus az inputgráf csúcsait és éleit fedezi fel. Minden csúcs az eléretlen  $\rightarrow$  elért  $\rightarrow$  befejezett állapotokat veszi fel. A bejárás akkor ér véget, amint minden csúcs befejezetté vált.

1. Van elért csúcs. Választunk egyet, mondjuk  $u$ -t.
  - (1a) Ha van olyan  $uv$  él, amire  $v$  eléretlen, akkor  $v$  elérté válik.
  - (1b) Ha nincs ilyen  $uv$  él, akkor  $u$  befejezetté válik.
2. Nincs elért csúcs.
  - (2a) Ha van eléretlen  $u$  csúcs, akkor  $u$ -t elértté tesszük.
  - (2b) Ha nincs eléretlen csúcs (azaz minden csúcs fejezett), akkor END.

### Szélességi bejárás (BFS) szabálya:

Az 1. esetben mindig a legkorábban elért  $u$ -t választjuk.

**Input:**  $G = (V, E)$  (ir/ir.tatlan) gráf, ( $v \in V$  gyökérpont<sup>1</sup>).

### Output:

(1) A csúcsok elérési és befejezési sorrendje.

(2) Az élek osztályozása:

**faél:** Olyan él, ami mentén egy csúcs elértté vált.

**$uv$  előreél:** nem faél, de  $u$ -ból  $v$ -be faélekből irányított út vezet.

**$uv$  visszaél:**  $v$ -ből  $u$ -ba faélekből irányított út vezet.

**keresztél:** minden más él ( $u$  és  $v$  közt nincs leszármazott viszony).

(3) A **bejárás fája:** a faélek alkotta részgráf. (A bejárás fája valójában egy gyökereiből kifelé irányított erdő.)

**Megf:** Irányítatlan esetben az előreél és a visszaél ugyanazt jelenti.

**Terminológia:** Ha a bejárás fájában  $u$ -ból  $v$ -be irányított út vezet, akkor  $u$  a  $v$  őse és  $v$  az  $u$  leszármazottja. A faél és az előreél tehát ősből leszármazottba, a visszaél leszármazottból ősbé vezet.

A bejárás során kialakul a csúcsok egy **elérési** ill. egy **befejezési** sorrendje, továbbá minden csúcshoz feljegyezzük azt is, hogy melyik él mentén értük el (ha van ilyen él). Ez utóbbi élek (faélek) alkotják a **bejárás fáját** (ami egyrészt **irányított**, másrészt pedig **erdő**). A  $G$  gráf további  $uv$  éle **előreél**  $\Rightarrow$ , ha  $u$  a bejárás fájában a  $v$  őse, ha  $u$  a  $v$  **leszármazottja**, akkor **visszaél**. Minden más pedig **keresztél**. (Irányítatlan gráf bejárásakor minden élt oda-vissza irányított élnak tekintünk.)

### • A BFS tulajdonságai

Nézzük meg egy **irányított** gráf BFS bejárását is.

**Állítás:** Tfh  $G = (V, E)$  BFS bejárása után a csúcsok elérési sorrendje  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Ekkor az alábbiak teljesülnek.

(1) Ha  $i < j$ , akkor  $v_i$ -t hamarabb fejezzük be, mint  $v_j$ -t, továbbá  $v_i$  gyerekei megelőzik  $v_j$  gyerekeit az elérési sorrendben.

**Biz:** A  $v_i$ -t befejezésének pillanatában  $v_i$  minden gyereke elért, de  $v_j$ -nek még egy gyereke sem az. Ezért  $v_j$  gyerekeit a  $v_i$  csúcs befejezése után érjük el, majd ezt követően fejezzük be  $v_j$ -t.

(2) Az elérési és befejezési sorrend (BFS esetén) megegyezik.

**Biz:** Ha  $v_i$ -t korábban érjük el, mint  $v_j$ -t, akkor (1) miatt  $v_i$ -t korábban is fejezzük be  $v_j$ -nél. Ezért bármely két csúcs sorrendje ugyanaz az elérési sorrendben mint befejezési sorrendben. Tehát az elérési sorrendnek meg kell egyeznie a befejezési sorrenddel.

(3) **Gráfél nem ugorhat át faélt:** ha  $k < i < j \leq l$  és  $v_i v_j$  faél, akkor  $v_k v_l$  nem lehet gráfél.

**Biz:** Ha  $v_k v_l \in E(G)$ , akkor  $v_l$  szülője  $v_k$  vagy egy  $v_k$ -t megelőző csúcs. (1) miatt  $v_j$  szülője sem következhet  $v_k$  után, vagyis  $v_i$  nem lehet  $v_j$  szülője.

<sup>1</sup>A gyökérben kezdetben elért állapotú, ezért kivétel az általános szabály alól.

(4) **Nincs előreél.** (Írányítatlan eset: csak faél és keresztél van.)

**Biz:** Indirekt: ha  $v_i v_j$  előreél lenne, akkor  $v_i$ -ből  $v_j$ -be irányított út vezetne a BFS-fában, és  $v_i v_j$  ennek a faélékből álló útnak az utolsó élét átugraná.

(5) Ha a BFS-fában  $k$ -élű irányított út vezet  $u$ -ból  $v$ -be, akkor  $G$ -ben nincs  $k$ -nál kevesebb élű  $uv$ -út.

**Biz:** Ha lenne a BFS fa-beli útnál kevesebb élű út  $G$ -ben, akkor lenne olyan gráfél, ami faélt ugrik át.

(6) **A BFS-fa egy legrövidebb utak fája:** a BFS-fa  $v_1$  gyökeréből bármely  $v_i$  csúcsba vezető faút a  $G$  egy legkevesebb élű  $v_1 v_i$ -útja.

#### • Legrövidebb utak

**Def:** Adott  $G$  (ir) gráf és  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény esetén egy  **$P$  út hossza** a  $P$  éleinek összhossza:  $l(P) = \sum_{e \in E(P)} l(e)$ .

Az  $u$  és  $v$  csúcsok **távolsága** a legrövidebb  $uv$ -út hossza:  $dist_l(u, v) := \min\{l(P) : P \text{ } uv\text{-út}\}$  ( $\nexists uv$ -út  $\Rightarrow dist_l(u, v) = \infty$ .) Az  $l$  hosszfüggvénye **nemnegatív**, ha  $l(e) \geq 0$  teljesül minden  $e$  élre. Az  $l$  hosszfüggvény **konzervatív**, ha  $G$ -ben  $\nexists$  negatív összhosszú ir. kör.

**Cél:** Legrövidebb út keresése irányított/írányítatlan gráfban.

**Megf:** Ha  $l(e) = 1$  a  $G$  minden  $e$  élére, akkor  $l(P)$  a  $P$  élszáma. Ezért a BFS-fa minden gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből, azaz a szélességi bejárás tekinthető egy legrövidebb utat kereső algoritmusnak is.

**Def:** Adott  $G$  (ir) gráf,  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény és  $r \in V(G)$ .  **$(r, l)$ -felső becslés** olyan  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, ami felülről becsli minden csúcs  $r$ -től mért távolságát:  $dist_l(r, v) \geq f(v) \forall v \in V(G)$ .

**Triviális**  $(r, l)$ -felső becslés:  $f(v) = \begin{cases} 0 & v = r \\ \infty & v \neq r \end{cases}$

**Pontos**  $(r, l)$ -felső becslés:  $f(v) = dist_l(r, l) \forall v \in V(G)$ .

## 5 Tétel

Gráfút hossza, gráfcsúcsok távolsága, nemnegatív és konzervatív hosszfüggvény, triviális és pontos  $(r, l)$ -felső becslés, élmenti javítás. Dijkstra-algoritmus működése, Ford-algoritmus helyessége és lépésszáma. Legrövidebb utak fájának létezése.

- **Def:** Adott  $G$  (ir) gráf és  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény esetén egy  $P$  út hossza a  $P$  éleinek összhossza:  $l(P) = \sum_{e \in E(P)} l(e)$ .

Az  $u$  és  $v$  csúcsok **távolsága** a legrövidebb  $uv$ -út hossza:  $dist_l(u, v) := \min\{l(P) : P \text{ } uv\text{-út}\}$  ( $\nexists uv\text{-út} \Rightarrow dist_l(u, v) = \infty$ .) Az  $l$  hosszfüggvénye **nemnegatív**, ha  $l(e) \geq 0$  teljesül minden  $e$  élre. Az  $l$  hosszfüggvény **konzervatív**, ha  $G$ -ben  $\nexists$  negatív összhosszú ir. kör.

**Cél:** Legrövidebb út keresése irányított/irányítatlan gráfban.

**Megf:** Ha  $l(e) = 1$  a  $G$  minden  $e$  élére, akkor  $l(P)$  a  $P$  élszáma. Ezért a BFS-fa minden gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből, azaz a szélességi bejárás tekinthető egy legrövidebb utat kereső algoritmusnak is.

**Def:** Adott  $G$  (ir) gráf,  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény és  $r \in V(G)$ .  $(r, l)$ -felső becslés olyan  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, ami felülről becsli minden csúcs  $r$ -től mért távolságát:  $dist_l(r, v) \geq f(v) \forall v \in V(G)$ .

**Triviális**  $(r, l)$ -felső becslés:  $f(v) = \begin{cases} 0 & v = r \\ \infty & v \neq r \end{cases}$

**Pontos**  $(r, l)$ -felső becslés:  $f(v) = dist_l(r, l) \forall v \in V(G)$ .

- Adott  $G = (V, E)$  irányított gráf és egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  élhosszfv. Egy  $G$ -beli irányított út hossza az út éleinek összhossza,  $dist_l(n, v)$  pedig az irányított  $uv$ -utak közül a legrövidebb hosszát jelöli.

Az  $l$  hosszfv konzervatív ha nincs  $G$ -ben negatív összhosszúságú irányított kör.

Adott  $G = (V, E)$  irányított gráf  $r \in v$  és egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  élhosszfv. Az  $f : v \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt  $(r, l)$ -felső becslésnek nevezzük, ha  $f(r) = 0$  és  $f(v) \leq dist_l(r, v)$  teljesül  $G$  minden  $v$  csúcsára. Az  $e = uv$  élmenti javítás esetén a  $f(v)$  értéket a  $\min\{f(v), f(u) + l(uv)\}$  értékkel helyettesíthetjük.

(1) Ha  $l$  konzervatív akkor tetsz.  $(r, l)$ -fb. élmenti javítása  $(r, l)$ -fb-t ad.

(2) Ha az  $f(r, l)$  felső becsléshez nincs érdemi élmenti javítás, akkor  $f(v) = dist_l(r, v) \forall v \in V$ .

- **Az élmenti javítás**

**Def:** Tfh  $f$  egy  $(r, l)$ -felső becslés és  $uv \in E(G)$ . Az  $f$   **$uv$ -elméleti javítása** az az  $f'$ , amire  $f'(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq v \\ \min\{f(v), f(u) + l(uv)\} & z = v \end{cases}$

**Megf:** Tfh az  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény konzervatív és  $f(r) = 0$ .

Ekkor (1) Az  $f(r, l)$ -felső becslés élmenti javítása mindig  $(r, l)$ -felső becslést ad.

**Biz:** Azt kell megmutatni, hogy van olyan  $rv$ -út, aminek a hossza legfeljebb  $f(u) + l(uv)$ . Ha egy legrövidebb  $ru$ -utat kiegészítünk az  $uv$  éllel, akkor olyan  $rv$ -élsorozatot kapunk, aminek az összhossza  $dist_l(r, u) + l(uv) \leq f(u) + l(uv)$ . „Könnyen” látható, hogy az élhosszfüggvény konzervativitása miatt ha van  $x$  összhosszúságú  $rv$ -élsorozat, akkor van legfeljebb  $x$  összhosszúságú  $rv$ -út is. Ezek szerint van legfeljebb  $f(u) + l(u, v)$  hosszúságú  $uv$ -út is, azaz az érdemi élmenti javítás után szintén  $(r, l)$ -felső becslést kapunk.

(2)  $f(r, l)$ -felső becslés (pontosan)  $\iff$  ( $f$ -en  $\nexists$  érdemi élmenti javítás).

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Ha  $f$  pontos, akkor biztosan nincs rajta érdemi élmenti javítás: ha volna, akkor egy felső becslés a pontos érték alá csökkenne, így az élmenti javítás nem  $(r, l)$ -felső becslést eredményezne.  $\Leftarrow$ : Legyen  $v \in V(G)$  tetsz, és legyen  $P$  egy legrövidebb  $rv$ -út. A  $P$  egyik éle mentén sincs érdemi élmenti javítás, ezért  $P$  minden  $u$  csúcsára pontos a felső becslés:  $f(u) = dist_l(r, u)$ . Ez igaz az út utolsó csúcsára, a tetszőlegesen választott  $v$ -re is.

- Dijkstra algoritmus működése:

- **Input:**  $G = (V, E)$  irányított gráf,  $l : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  nemnegatív hosszfüggvény,  $r \in V$  gyökér
- **Output:**  $dist_l(r, v)$  minden  $v \in V$ -re.
- **Működés:** Kezdetben  $U_0 = \emptyset$ ,  $f(r) = 0$  és  $f(v) = \infty$ , ha  $v \neq r$ .  
Az algoritmus  $i$ -dik fázisában ( $i = 1, 2, \dots, |v|$ ) a következő történik.

1. Legyen  $u_i$  a  $v$  csúcs a  $v \setminus u_{i-1}$  halmazból, amelyre  $f(r)$  minimális és legyen  $u_{i-1} \cup u_i$ .
2. Végezzünk élelmenti javításokat minden  $u_i$ -ből kivezető  $u_i x$  élen.

Az output a  $|v|$ -dik fázis utáni  $f$  függvény. Szokás megjelölni a végső  $f(v)$  értékeket beállító éleket. Ha az output az  $f(r, l)$ -felső becslés, akkor

- (1)  $f(u_i) \leq f(u_{i+1}) \forall 1 \leq i \leq n$ .
- (2)  $f(u_1) \leq f(u_2) \leq \dots \leq f(u_n)$
- (3) élelmentijavítás nem változhat  $f$ -n.

- A Dijkstra-algoritmus helyesen működik, azaz  $dist_l(r, v) = f(v) \forall v \in V$  teljesül. Az algoritmus során megjelölt élek egy legrövidebb utak fáját alkotják  $G$ -ben: az  $r$  gyökérből minden  $r$ -ből elérhető csúcshoz vezet olyan legrövidebb út is, ami csak megjelölt éleket tartalmaz.
- A Dijkstra-algoritmus lépésszáma legfeljebb  $konst \cdot (n^2 + m)$ , ahol  $n = |V|$   $m = |E|$ .

- **Dijkstra-algoritmus:** Input:  $G = (V, E), l : E \rightarrow \mathbb{R}_+, r \in V$ . Output:  $dist_l(r, v) \forall v \in V$  Működés:  $U_0 := \emptyset, f_0$  a triviális.  $(r, l)$ -felső becslés.

Az  $i$ -dik fázis:

1. Legyen  $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$ , ahol  $u_i$  olyan csúcs a  $V \setminus U_{i-1}$  halmazból, amelyre  $f_{i-1}(v)$  minimális.
2.  $f_i : f_{i-1}$  élelmenti javítása minden  $U_i$ -ből kivezető  $u_i x$  élen. Output:  $f_{|V|}$ . Megjelöljük a végső  $f_{|V|}(V)$  értékeket beállító éleket.

**Megf:** Ha a  $v$ -be vezet megjelölt él, akkor vezet  $r$ -ből  $v$ -be megjelölt éleken út, és ennek hozzá megegyezik  $f_{|V|}(v)$ -vel.

**Biz:**  $f_{|V|}(r) = 0$ , és a megjelölt élek mentén haladva az  $f_{|V|}$  érték az élhosszal növekszik.

- **Dijkstra helyessége**

**Megf:** Tfh  $u_1, u_2, \dots, u_n$  a  $G$  csúcsainak sorrendje a Dijkstra-algoritmus végrehajtása után.

- (1) Ekkor  $f_{|V|}(u_i) \leq f_{|V|}(u_{i+1})$  teljesül  $\forall 1 \leq i \leq n$ .

**Biz:** Az  $i$ -dik fázisban  $f_i(u_i) \leq f_i(u_{i+1})$  teljesült az  $u_i$  választása miatt. Ezek után  $f_i(u_i)$  már nem változott:  $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i)$ . Ugyan  $f_i(u_{i+1})$  még csökkenhetett, de csak az  $u_i u_{i+1}$  él mentén történt javítás miatt, hiszen az  $(i+1)$ -dik fázisban  $u_{i+1}$  bekerült az  $U_i$  halmazba, és a hozzá tartozó  $(r, l)$ -fb már nem csökken tovább. Ekkor  $f_{i+1}(u_{i+1}) = \min\{f_i(u_{i+1}), f_i(u_i) + l(u_i u_{i+1})\} \geq f_i(u_i)$ , mivel  $l(u_i u_{i+1}) > 0$ . Ezért  $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i) \leq f_{i+1}(u_{i+1}) = f_{|V|}(u_{i+1})$

- (2)  $f_{|V|}(u_1) \leq f_{|V|}(u_2) \leq \dots \leq f_{|V|}(u_n)$

- (3) A Dijkstra-algoritmus outputjaként kaptt  $f_{|V|}$ -n élelmenti javítás nem tud változtatni.

**Biz:** Tegyük fel, hogy  $u_i u_j \in E(G)$  a  $G$  egy tetszőleges éle. Ha  $i > j$ , akkor (2) miatt  $f_{|V|}(u_i) \geq f_{|V|}(u_j)$ , ezért az  $u_i u_j$  mentén történő javítás nem tudja  $f_{|V|}(u_j)$ -t csökkenteni, hisz  $l(u_i u_j)$  pozitív. Ha pedig  $i < j$ , akkor az  $i$ -dik fázisban megtörtént az  $u_i u_j$  mentén történő javítás, és ezt követően  $f(u_i)$  nem változott, azaz  $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i)$ . A másik  $(r, l)$ -felső becslés pedig csak tovább csökkenhetett a későbbi élmj-ok során  $f_{|V|}(u_j) \leq f_i(u_j)$ . Ezért az  $u_i u_j$  él mentén sem az  $i$ -dik fázisban, sem később nincs érdemi javítás.

**Tétel:** A Dijkstra-algoritmus helyesen működik, azaz  $G$  minden csúcsára igaz, hogy  $dist(r, v) = f_{|V|}(v)$ .

**Biz:** A Dijkstra-algoritmus az  $f_0$  triviális  $(r, l)$ -felső becslésből indul ki, és élelmenti javításokat alkalmaz. Így minden  $f_i$  (speciálisan  $f_{|V|}$  is)  $(r, l)$ -felső becslés lesz. A fenti (3)-as megfigyelés miatt  $f_{|V|}$ -n nem végezhető érdemi élelmenti javítás. Ezért egy korábbi (2)-es megfigyelés miatt  $f_{|V|}$  pontos  $(r, l)$ -felső becslés, azaz  $f_{|V|}(v) = dist_l(r, v) \forall v \in V(G)$ .

- Könnyű olyan példát találni, ahol a Dijkstra-algoritmus konzervatív hosszfüggvény esetén hibás eredményt ad. Azonban konzervatív hosszfüggvény esetén is igaz, hogy
  - $(r, l)$ -fb élelmenti javítása  $(r, l)$ -fb-t eredményez, ill.
  - ha egy  $(r, l)$ -fb-ben nem végezhető érdemi élelmenti javítás, akkor pontos.

konzervatív hosszfüggvény esetén is hasonló startégiát követünk: Élelmenti javításokat végzünk a triviális  $(r, l)$ -fb-en, míg van érdemi javítás.

#### Ford-algoritmus:

Input:  $G = (V, E)$  irányított,  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  konzervatív hosszfüggvény,  $r \in V$  gyökérpont.

Output:  $dist_l(r, l)$  minden  $v \in V$

Működés: Legyen  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Kezdetben legy  $f(r) = 0$  és  $v \neq r$  esetén  $f(v) = \infty$ , Az  $i$ -dik fázis

$i = 1, 2, \dots, n-1$  esetén abból áll, hogy elvégezzük az  $e_1, e_2, \dots, e_m$  élek menti javításokat. A végén az OUTPUT:  $dist_l(r, v) = f(v)$  minden  $v$ -re. ( $dist_l(r, v) = f_{n-1}(v) \forall v \in V$ )

**Állítás:** Ha  $l$  konzervatív, akkor  $dist_l(v)$   $v \in V$ -re.

**Biz:**  $f_1(v) = dist_l(r, v)$  ha  $\exists \leq 1$ -élű legrövidebb  $rv$ -út.  $f_2(v) = dist_l(r, v)$  ha  $\exists \leq 2$ -élű legrövidebb  $rv$ -út.  $\dots$   $f_{n-1}(v) = dist_l(r, v)$  ha  $\exists \leq (n-1)$ -élű legrövidebb  $rv$ -út. Tehát  $f_{n-1}(v) = dist_l(r, v) \forall v \in V$ .

**Megf:** Ha  $f_i = f_{i-1}$ , akkor a Ford-algoritmust az  $i$ -dik fázis után be lehet fejezni, hisz nincs érdemi élmenti javítás, így  $f_{n-1} = f_i$ .

**Megj:** Az  $f_{n-1}(v)$ -t beállító élek legrövidebb utak fáját alkotják.

**Biz:** A Dijkstra esethez hasonló. Tetszőleges  $v$  csúcsból visszafelé követve a végső értékeket beállító éleket  $f_{n-1}(v)$  hosszúságú  $rv$ -utat találunk.

**”Lépésszámanalízis”:** Ha a  $|V(G)| = n$  és  $|E(G)| = m$ , akkor minden fázisban  $\leq m$  élmenti javítás, ami  $konst \cdot m$  lépés. Ez összesen  $\leq konst \cdot (n-1) \cdot m \leq konst \cdot n^3$  lépés, az algoritmus hatékony.

## 6 Tétel

**Mélységi keresés** és alkalmazásai (fellempő éltípusok, mélységi- és befejezési számozásból az éltípus meghatározása, irányított kör létezésének eldöntése DFS-sel).

### • Depth First Search (DFS)

(A mélységi bejárás avagy DFS alatt olyan gráfbejárást értünk, amikor mindig a legutolsónak elért csúcsból kerül elérésre a soron következőnek elért csúcs. Az elérési illetve befejezési sorrendből adódik minden  $v$  csúcsra egy  $m(v)$  mélységi ill.  $b(v)$  befejezési szám.)

**”Mélységi bejárás (DFS):** A bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az  $[1]$  esetben.

**Mélységi és befejezési számozás:** DFS után  $m(v)$  ill.  $b(v)$  a  $v$  csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

**Megj:** A BFS konkrét megvalósításában szükség van arra, hogy az **elért** csúcsokat úgy tároljuk, hogy könnyű legyen kiválasztani az **elért** csúcsok közül a legkorábban elértet. Erre egy célszerű adatstruktúra a *sor* (avagy *FIFO lista* (First In First Out)). Ha a BFS megvalósításában ezt az adatstruktúrát *veremre* (más néven *LIFO listára* (Last In First Out)) cseréljük, akkor a DFS egy megvalósítása adódik.

**Megf:** Tegyük fel, hogy a  $G$  gráf éleit DFS után osztályoztuk.

(1) Ha  $uv$  **faél**, akkor  $m(u) < m(v)$  és  $b(u) > b(v)$ .

**Biz:**  $v$ -t  $u$ -ból értük el, ezért  $m(u) < m(v)$ . A  $v$  elérésekor  $u$  és  $v$  elért állapotúak. A DFS szerint  $v$ -t  $u$  előtt fejezzük be.

(2) Ha  $uv$  **előreél**, akkor  $m(u) < m(v)$  és  $b(u) > b(v)$ .

**Biz:**  $u$ -ból  $v$ -be faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, befejezési csökken.

(3) Ha  $uv$  **visszaél**, akkor  $m(u) > m(v)$  és  $b(u) < b(v)$ .

**Biz:**  $v$ -ből  $u$ -ba faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, a befejezési csökken.

(4) Ha  $uv$  **keresztél**, akkor  $m(u) > m(v)$  és  $b(u) > b(v)$ .

**Biz:**  $m(u) < m(v)$  esetén a DFS miatt  $v$  az  $u$  leszármazottja lenne. Ezért  $m(u) > m(v)$ . Ha  $u$ -t a  $v$  befejezése előtt értenék el, akkor  $u$  a  $v$  leszármazottja lenne. Ezért az alábbi sorrendben történik  $u$  és  $v$  evolúciója:  **$v$  elérése,  $v$  befejezése,  $u$  elérése,  $u$  befejezése**.

(5) Irányítatlan gráf DFS bejárása után nincs keresztél.

**Biz:** Indirekt. Ha  $uv$  keresztél, akkor (4) miatt  $m(u) > m(v)$ , továbbá  $vu$  is keresztél, ezért  $m(v) > m(u)$ . Ellentmondás.

(6) Ha DFS után van visszaél, akkor  $G$  tartalmaz irányított kört.

**Biz:** A DFS fa visszaélhez tartozó alapköre a  $G$  egy irányított köre.

(7) Ha DFS után nincs visszaél, akkor  $G$ -ben nincs irányított kör.

**Biz:** Bármely irányított körnek van olyan  $uv$  éle, amire  $b(u) < b(v)$ . Ez az él csak visszaél lehet.

A mélységi bejárás lépésszáma lineáris, azaz van olyan  $c$  konstans, hogy tetszőleges  $u$  csúcsú,  $m$  élű gráf DFS-éhez legfeljebb  $c(n + m)$  lépés szükséges.

### • Directed Acyclic Graphs

**Def:** A  $G = (V, E)$  irányított gráf **aciklikus** (más néven **DAG**), ha  $G$  nem tartalmaz irányított kört.

**Példa:** DAG-ot úgy kaphatunk, hogy egy  $G$  irányítatlan gráf csúcsait csupa különböző számmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobbba irányítunk.

Ha ugyanis lenne az így megirányított gráfban irányított kör, akkor az élei mentén a számok végig növekednének, ami lehetetlen. Azt fogjuk igazolni, hogy a fenti példa minden DAG-ot leír.

**Def:** A  $G = (V, E)$  irányított gráf csúcsainak **topologikus sorrendje** alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba. ( $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, v_i v_j \in E \Rightarrow i < j$ )

**Tétel:** ( $G$  irányított gráf DAG)  $\Leftrightarrow$  ( $V(G)$ -nek  $\exists$  topologikus sorrendje).

**Biz:** Tegyük fel, hogy  $\exists$  topologikus sorrend. Láttuk, hogy  $G$  ekkor DAG. ✓

**Biz:** Most tegyük fel, hogy  $G$  DAG, és futtassunk rajra egy DFS-t. Láttuk, hogy a DFS után nem lesz visszaél, ezért minden  $uv$  irányított élre  $b(u) > b(v)$  teljesül. Ezért a csúcsok befejezési sorrendjének megfordítása a  $G$  csúcsainak egy topologikus sorrendje.

**Köv:** Irányított gráf aciklikussága DFS-sel gyorsan eldönthető: ha van visszaél, akkor a visszaél DFS-fabeli alapköre  $G$  egy irányított köre, így  $G$  nem DAG. Ha pedig nincs visszaél, akkor a fordított befejezési sorrend a  $G$  egy topologikus sorrendje,  $G$  tehát DAG.

**Megj:** DAG-ban topologikus sorrendet forráskeresések és forrástörlések alkalmazásával is találhatunk.



## 7 Tétel

**DAG**, jellemzése, **topologikus sorrend** keresése. Leghosszabb utak keresése, **PERT-módszer**, kritikus utak és tevékenységek.

### • Direct Acyclic Graphs

**Def:** A  $G = (V, E)$  irányított gráf **aciklikus** (más néven **DAG**), ha  $G$  nem tartalmaz irányított kört.

**Példa:** DAG-ot úgy kaphatunk, hogy egy  $G$  irányítatlan gráf csúcsait csupa különbözőszámmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobbba irányítunk.

Ha ugyanis lenne az így megirányított gráfban irányított kör, akkor az élei mentén a számok végig növekednének, ami lehetetlen. Azt fogjuk igazolni, hogy a fenti példa minden DAG-ot leír.

**Def:** A  $G = (V, E)$  irányított gráf csúcsainak **topologikus sorrendje** alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba.  $(V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, v_i v_j \in E \Rightarrow i < j)$

**Tétel:**  $(G \text{ irányított gráf DAG}) \Leftrightarrow (V(G)\text{-nek } \exists \text{ topologikus sorrendje}).$

**Biz:** Tegyük fel, hogy  $\exists$  topologikus sorrend. Láttuk, hogy  $G$  ekkor DAG. ✓

**Biz:** Most tegyük fel, hogy  $G$  DAG, és futtassunk rajra egy DFS-t. Láttuk, hogy a DFS után nem lesz visszaél, ezért minden  $uv$  irányított élre  $b(u) > b(v)$  teljesül. Ezért a csúcsok befejezési sorrendjének megfordítása a  $G$  csúcsainak egy topologikus sorrendje. □

**Köv:** Irányított gráf aciklikussága DFS-sel gyorsan eldönthető: ha van visszaél, akkor a visszaél DFS-fabeli alapköre  $G$  egy irányított köre, így  $G$  nem DAG. Ha pedig nincs visszaél, akkor a fordított befejezési sorrend a  $G$  egy topologikus sorrendje,  $G$  tehát DAG.

**Megj:** DAG-ban topologikus sorrendet forráskeresések és forrástörlések alkalmazásával is találhatunk.

### • Leghosszabb út keresése

**Ötlet:** Az  $l'(uv) = -l(uv)$  élhosszokkal a leghosszabb utak legrövidebbekké válnak. Olyanokat pedig tudunk keresni.

**Gond:** A módszerünk csak konzervatív élhosszokra működik. Irányítatlan gráfon ez nemnegatív élhosszokat jelent, ezért ez az ötlet itt nem segít. Irányított esetben nem baj a negatív élhossz, feltéve, hogy  $G$  DAG. Ekkor Ford, Floyd bármelyike használható.

**Jó hír:** Van egy még gyorsabb módszer: a dinamikus programozás. Ennek segítségével tetszőleges  $G$  DAG minden  $v$  csúcsához ki tudjuk számítani a  $v$ -be vezető leghosszabb utat. (Sőt! ...)

#### Leghosszabb út DAG-ban:

Input:  $G = (V, E) \text{ DAG}, l : E \rightarrow \mathbb{R}.$

Output:  $\max\{l(P) : Pv\text{-be vezető út}\}$  minden  $v \in V$  csúcsra.

Működés:

- 1  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  topologikus sorrend meghatározása.
- 2  $i = 1, 2, \dots, n : f(v_i) = \max\{\max\{f(v_j) + l(v_j v_i) : v_j v_i \in E\}, 0\}$

Output:  $f(v) \forall v \in V$

**Helyesség:** Ha a  $v_i$ -be vezető leghosszabb út utolsó előtti csúcsa  $v_j$ , akkor  $f(v_i) = f(v_j) + l(v_j v_i)$ .

**Megj:** Ha a fenti algoritmusban minden csúcsra megjelöljük az  $f(v)$  értéket beállító élt (éleket), akkor a megjelölt élek minden  $v$  csúcsba megadnak egy leghosszabb utat. Sőt: minden  $v$ -be vezető leghosszabb megkapható így.

### • A PERT probléma

Egy  $a, b, \dots$  tevékenységekből álló projektet kell végrehajtunk.

**Precedenciafeltételek:** bizonyos  $(u, v)$  párok esetén előírás, hogy az  $u$  tevékenységet a  $v$  előtt kell elvégezni, ezért  $v$  az  $u$  kezdetét követően  $c(uv)$  időkorlát elteltével kezdhető.

**Cél:** minden  $v$  tevékenységhez olyan  $k(v) \geq 0$  kezdési időpont meghatározása, ami nem sérti a precedenciafeltételeket, és a projekt végrehajtási ideje (a legnagyobb  $k(v)$  érték) minimális.

$G$  **irányított gráf** csúcsai a tevékenységek, élei pedig a precedenciafeltételek, az  $uv$  él hossza  $c(uv)$ .

**Megf:**

(1) Ha  $G$  nem DAG, akkor a projekt nem hajtható végre.

(2) Ha  $G$  DAG, akkor minden  $v$  tevékenység legkorábbi kezdési időpontja a  $v$ -be vezető leghosszabb út hossza.

**Köv:** A PERT probléma megoldása nem más, mint a  $G$  DAG minden csúcsára az oda vezető leghosszabb út meghatározása.

**Terminológia:**  $G$  leghosszabb útja **kritikus út**, amiből több is lehet. Kritikus út csúcsai a **kritikus tevékenységek**.

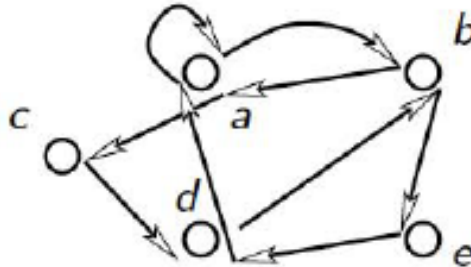
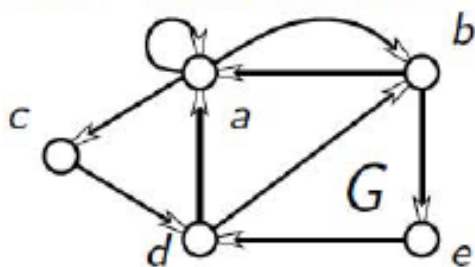
**Megf:** Ha egy kritikus tevékenység nem kezdődik el a lehető legkorábbi időpontban, akkor az egész projekt végrehajtása csúszik.

## 8 Tétel

**Euler-séta és körséta** létezésének szükséges és elégséges feltétele. **Hamilton-kör és út** létezésére szükséges, ill. elégséges feltételek: komponensszám ponttörölés után (Petersen-gráf) **Dirac, Ore tételei**, gazdag párok, hízlalási lemma, Chavátal-lezárt.

### • Euler-séták

**Def:** A  $G$  gráf **Euler-(kör)sétája** a  $G$  egy olyan (kör)sétája, ami  $G$  minden élét tartalmazza.



**Megj:**

- (1) A fenti definíció  $2 \times 2$  fogalmat definiál: az Euler-sétát és az Euler-körsétát irányítatlan és irányított gráfokra is.
- (2) Szokás a definíciót abban a formában kimondani, hogy az Euler-(kör)séta  $G$  minden élét **pontosan** egyszer tartalmazza. Tekintettel arra, hogy egy séta nem mehet át kétszer ugyanazon az élen, ez redundáns kíváncsi, hiszen következménye az általunk használt definíciónak. Használatos ezen kívül az Euler-kör ill. Euler-út megnevezés is a fenti fogalmakra.
- (3) Irányítatlan Euler-séta: " $G$  egy vonallal lerajzolható".

**Cél:** Gyors módszer az Euler-(kör)séta megtalálására, létezésének ellenőrzésére.

**Megf:** (1) Ha a  $G$  irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

- (a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
- (b) minden  $v$  csúcsára  $\rho(v) = \delta(v)$  teljesül.

**Biz:** (a) Ha  $G$  két különböző gyenge komponense is tartalmaz élt, akkor  $G$ -nek nem lehet Euler-körsétája, hisz egyetlen séta sem tartalmazhat élt két különböző gyenge komponensből. ✓

(b) Ha végighaladunk az Euler-körsétán, akkor a  $v$  csúcsba pontosan annyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk onnan. A körséta  $G$  minden élét pontosan egyszer érinti:  $\rho(v) = \delta(v)$

**Megf:** (2) Ha a  $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor

- (a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
- (b)  $G$ -ben minden fokszám páros.

**Biz:** Az irányított esethez hasonló. (a) Egy (kör)séta nem tartalmazhatja két különböző komponensnek is  $1-1$  élét, és (b) az Euler-körsétát követve tetszőleges  $v$  csúcsba ugyanannyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk belőle. Ezért  $d(v)$  páros.

**Megf:** (3) Ha a  $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor

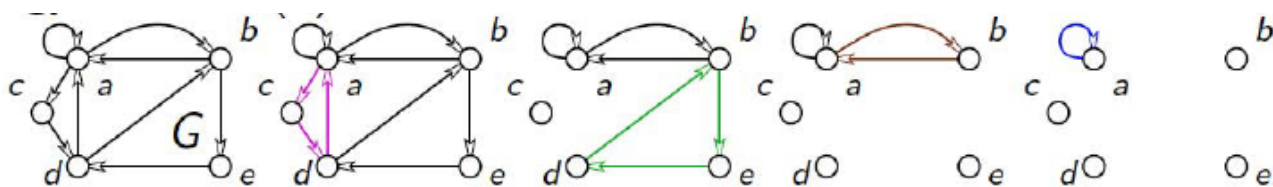
- (a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
- (b)  $G$ -nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

**Biz:** (a) ✓. (b): Tegyük fel, hogy  $G$  Euler-sétája egy  $uv$ -séta. Ekkor minden  $w \neq u, v$  csúcsra  $d(w)$  kétszer annyi, mint ahányszor az Euler-séta  $w$ -n áthalad, vagyis  $d(w)$  páros. Ha  $u = v$ , akkor az Euler-séta körséta, így  $d(u)$  is páros (2b) miatt. Ha pedig  $u \neq v$ , akkor  $u$ -ból 1-gyel többször lépünk ki, mint be,  $v$ -be 1-gyel többször lépünk be, mint ki, vagyis  $d(u)$  és  $d(v)$  páratlanok.

**Megj:** A fenti megfigyelés segítségével bizonyos esetekben azonnal látszik, hogy  $G$ -nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

$G$  **irányítatlan Euler-gráf**, ha  $G$  minden  $v$  csúcsra  $d(v)$  páros.

**Lemma:** Ha  $G$  Euler-gráf, akkor  $G$  élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (irányított) kört alkossanak minden színre.

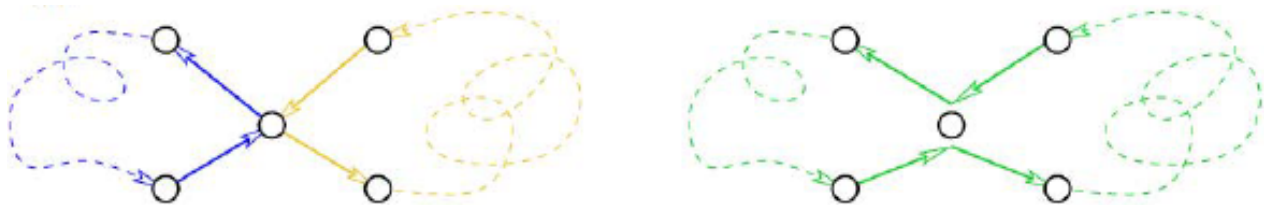


**Biz:** Induljunk el  $G$  egy éle mentén, és haladjunk tovább az (irányított) élek mentén. Mivel  $G$  Euler, ezért sosem akadunk el: előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, így találunk egy  $C_1$  kört.  $C_1$  éleit törölve  $G - C_1$  Euler-gráf marad. Ismételjük meg ezt a  $G - C_1$  gráfon. Így  $G$  minden éle előbb-utóbb sorra kerül és megkapja a  $C_2, C_3, \dots$  köröket. Ezért  $E(G) = C_1 \cup C_2 \cup \dots$  diszjunkt körök uniójára bomlik fel. Színezzük ki a  $C_1$  kör éleit az  $i$ -dik színnel.

**Tétel:** (1) ( $G$  irányított gráfnak van Euler-körsétája)  $\iff$  ( $G$  Euler-gráf és  $G$  izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő)

(2) ( $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája)  $\iff$  ( $G$  Euler-gráf és  $G$  izolált pontoktól eltekintve összefüggő)

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Láttuk.  $\Leftarrow$ : A Lemma miatt  $E(G)$  felbontható körökre, tehát körsétákra is. Ha a körséták száma legalább 2, akkor választunk két körsétát, aminek van közös csúcsa és  $e$  csúcs mentén "összevarjuk" azokat. Mindezt addig végezzük, amíg egyetlen körséta marad.



**Tétel:** (3) ( $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-sétája)  $\iff$  ( $G$  izolált pontoktól eltekintve összefüggő és 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.)

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Láttuk.  $\Leftarrow$ : Ha  $G$  Euler-gráf, akkor (2) miatt van Euler-körsétája, ami Euler-séta is egyúttal. Ha  $G$  nem Euler-gráf, akkor legyenek  $u$  és  $v$  a  $G$  páratlan fokú csúcsai. Ekkor  $G + uv$  Euler-gráf, és (2) miatt van Euler-körsétája. Feltehető, hogy  $e$  körséta utolsó éle  $uv$ . Ezt az  $uv$  élt elhagyva a körsétából,  $G$  Euler-sétáját kapjuk.

**Euler-körséta keresése Euler-gráfban:**  $E(G)$ -t felbontjuk körsétákra, amiket összevarrunk. Körsétát a felbontáshoz pl. úgy is kereshetünk, hogy addig követünk egy sétát, amíg tudunk. Előbb-utóbb elakadunk, de ez csakis a séta kiindulási pontjában történhet meg. Ezért a bejárt séta egy körséta, amit a felbontásban felhasználunk.

## • Hamilton-körök és -utak

**Def:** A  $G$  gráf **Hamilton-köre** (**Hamilton-útja**) a  $G$  olyan köre (útja), ami  $G$  minden csúcsát tartalmazza.

**Megj:** A célunk hasonló, mint az Euler-(kör)séta esetén, azaz gyors módszer, amivel el lehet dönteni egy gráfról, hogy van-e Hamilton-köre ill. -útja. Sajnos jól használható szükséges és elégséges feltételt nem tudunk adni erre a problémára, és jó oka van annak, hogy nem is számíttunk ilyen feltétel létezésére. Tudunk viszont jól használható szükséges, és jól használható elégséges feltételt adni, de ezek csak bizonyos gráfok esetén hasznosak.

### Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

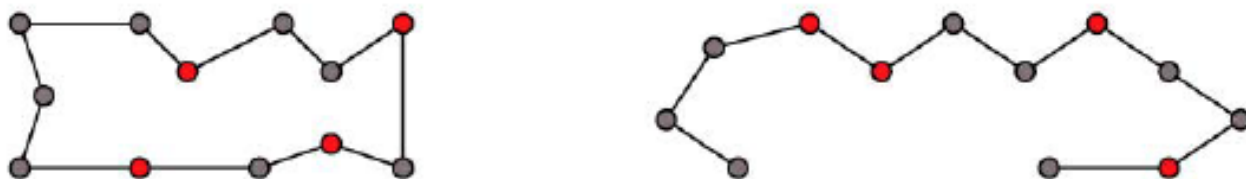
(1) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-köre, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U|$ .

(2) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-útja, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U| + 1$ .

**Megj:** A fenti feltétel, miszerint  $k$  csúcs törlésétől a gráf legfeljebb  $k$  (ill.  $k + 1$ ) komponensre eshet szét feltétlenül **szükséges** ahhoz, hogy  $G$ -nek legyen Hamilton-köre ill. -útja. Abból azonban, hogy  $G$  teljesíti a fenti feltételt, nem következik, hogy  $G$ -nek csakugyan van Hamilton-köre vagy útja. A szükséges feltételt úgy tudjuk alkalmazni, hogy a segítségével igazoljuk egy konkrét grárról, hogy nincs Hamilton-köre (vagy -útja). Ha pl. azt látjuk, hogy  $G$ -ből 42 csúcsot elhagyva 43 komponens keletkezik, akkor  $G$ -nek nincs Hamilton-köre. Ha a komponensszám legalább 44, akkor  $G$ -nek Hamilton-útja sincs.

**Biz:** (1,2)  $G$ -t tekinthetjük úgy, mint egy kör (ill. út), amihez még további éleket adunk hozzá. Könnyű látni, hogy egy kör (ill. út)  $k$  pont elhagyásától legfeljebb  $k$  ( $k + 1$ ) komponensre eshet szét. A további élek

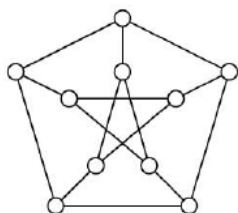
(amit a körhöz ill. úthoz hozzá kell adni, hogy  $G$ -t kapjunk) csak csökkenteni tudják a komponensszámot, növelni nem. Ezért  $G$ -ből  $k$  csúcsot törölve legfeljebb  $k$  ( $k + 1$ ) komponens keletkezhet.



**Megj:** Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

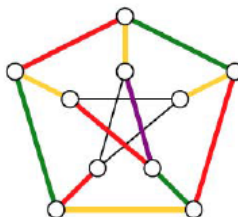
1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.

- (a) Tegyük fel, hogy külső körből  $k_1$ , a belsőből  $k_2$  csúcsot hagyunk el. Ha  $k_1 = 0$  vagy  $k_2 = 0$ , akkor a gráf összefüggő marad. Különben a külső kör legfeljebb  $k_1$ , a belső pedig legfeljebb  $k_2$  részre esik szét, vagyis összesen legfeljebb  $k_1 + k_2$  komponens létezik.



2. Nincs Hamilton-köre.

- (a) Ha lenne Hamilton-köre, akkor a Hamilton-kör éleit felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, sárga ill. zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet.



A továbbiakban elégséges feltételeket fogunk látni Hamilton-kör létezésére. Ezek segítségével (szerencsés esetben) gyorsan és kétséget kizáróan tudjuk bizonyítani, hogy egy adott gráfnak van Hamilton-köre. Az elégséges feltétel vizsgálata azonban nem alkalmas arra, hogy egy gráf a Hamilton-körének hiányát igazoljuk.

**Def:** Legyen  $G$   $n$ -csúcsú, egyszerű gráf.

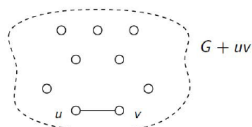
Az  $u, v \in V(G)$  csúcspár **gazdag**, ha  $d(u) + d(v) \geq n$ . A  $G$  gráfra teljesül a **Dirac-feltétel**, ha  $d(v) \geq \frac{n}{2} \forall v \in V(G)$ -re.  $G$ -re igaz az **Ore-feltétel**, ha  $G$  bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot.

**Dirac tétele:**  $G$ -re igaz a Dirac-feltétel  $\Rightarrow G$ -nek van H-köre.

**Ore tétele:**  $G$ -re igaz az Ore-feltétel  $\Rightarrow G$ -nek van H-köre.

**Megj:** A Dirac-feltétel erősebb (többet kíván), mint az Ore. Ezért az Ore-tétel erősebb, mint a Dirac: gyengébb feltételtől igazolja ugyanazt. Ezért az Ore-tétel bizonyítása a Dirac-tételt is igazolja.

#### • A Chvátal-lezárt



**Hízlalási lemma:** Tegyük fel, hogy  $G$  egyszerű gráf, és  $(u, v)$  gazdag pár. ( $G$ -nek van Hamilton-köre)  $\iff (G + uv$ -nek van Hamilton köre).

**Megj:** A hízlalási lemma jelentősége az, hogy segít eldönteni azt, hogy van-e  $G$ -ben Hamilton-kör. Azt mondja ki ugyanis, hogy a gazdag párok közé  $G$ -be "ingyen" behúzhatunk éleket, u.i. ez nem változtat azon a tényen, hogy van vagy nincs Hamilton-kör a vizsgált gráfban. Megtehetjük tehát, hogy a lemma

segítségével addig húzunk be éleket a gráfba, amíg lehet. Ha az így adódó  $\overline{G}$  Chvátal-lezártban találunk Hamilton-kört, akkor  $G$ -nek is bizonyosan van Hamilton-köre. Ha pedig  $\overline{G}$  nem tartalmaz Hamilton-kört, akkor persze  $G$ -nek nincs Hamilton-köre.

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Láttuk.  $\checkmark \Leftarrow$ : Legyen  $C$  a  $G + uv$  Hamilton-köre. Ha  $uv \notin C$ , akkor  $C$  a  $G$ -nek is Hamilton-köre, kész vagyunk. Ha viszont  $uv \in C$ , akkor  $C - uv$  a  $G$  egy Hamilton-útja. Legyen ez a Hamilton-út  $u = v_1, v_2, \dots, v_n = v$ . Legyen  $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$  a  $v$  szomszédainak halmaza, és legyen  $B := \{v_{i-1} : uv_i \in E(G)\}$  az  $u$  szomszédait a Hamilton-úton megelőző csúcsok halmaza.

Világos, hogy  $v \notin A$  és  $v \notin B$ , így  $|A \cup B| \leq n - 1$ . Mivel  $(u, v)$  gazdag pár, ezért  $|A| + |B| = d(u) + d(v) \geq n$ . Ezek szerint  $A \cap B \neq \emptyset$ , legyen pl.  $v_i \in A \cap B$ . Ekkor  $v_1, v_2, \dots, v_i, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}, v_1$  a  $G$  egy Hamilton-köre.

**Ore tétele:** Ha  $G$  bármely két nemszomszédos csúcsa gazdag párt alkot, akkor  $G$ -nek van Hamilton-köre.

**Biz:** A hízlalási lemma alapján  $G$  bármely két nemszomszédos csúcsát "ingyen" összeköthetjük. Így  $G$  Chátal-lezártja a  $\overline{G} = K_n$  teljes gráf. Mivel  $K_n$ -nek van H-köre, ezért  $G$ -nek is van.

**Dirac-tétele:** Ha  $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$ , akkor  $G$ -nek van Hamilton-köre.

**Biz:**  $G$  bármely két csúcsa gazdag párt alkot, ezért  $G$ -re teljesül az Ore-feltétel. Az Ore-tétel miatt  $G$ -nek van Hamilton-köre.

## 9 Tétel

**Gráfok síkba ill. gömbre rajzolhatósága, tartomány, sztereografikus projekció, következményei.**  
 Az **Euler-féle poliédertétel**, duális kézfogáslemma és következményei: felső korlátok az élszámról és a minimális fokszáma egyszerű, síkbarajzolható gráfokon.

### • Síkbarajzolhatóság

**Def:** **Síkbarajzolt** (síkbarajzolható) gráf alatt olyan gráfdiagramot értünk, amiben az élek nem keresztezik egymást.

A  $G$  gráf **síkbarajzolható** (síkbarajzolható), ha van síkbarajzolt diagramja.

Síkbarajzolt gráf **tartománya** (lapja): a diagram komplementerének összefüggő tartománya. A nem korlátos rész neve **külső tartomány**.

**Megj:**

- (1) A fentieket nem csak egyszerű gráfokra definiáltuk.
- (2) A síkbarajzolt gráf nem csupán egy gráf, hanem egy **konkrét** diagram.
- (3) Ugyanannak a síkbarajzolható gráfnak nagyon sok lényegesen különböző síkbarajzolt diagramja (lerajzolása) lehet.
- (4) A görbe (tóruszra) rajzolhatóság hasonlóan definiálható.

**Állítás:**  $(A \ G \text{ gráf síkbarajzolható}) \iff (G \text{ gömbre rajzolható})$

**Biz:** A sztereografikus projekcióban az északi-sarkból történő vetítés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a sík pontjai és a sítot a déli-sarkon érintő gömbfelszín pontjai (mínusz északi-sark) között. A síkbarajzolt diagram vetülete gömbre rajzolt lesz ( $\Rightarrow \checkmark$ ), és az  $\hat{E}$ -t nem tartalmazó gömbre rajzolt diagram pedig síkbarajzolttá válik. A  $\Leftarrow$  irány igazolásához csupán annyi kell, hogy úgy rajzoljuk  $G$ -t a gömbre, hogy az  $\hat{E}$ -n ne menjen át él.

**Köv:** síkbarajzolt gráf külső tartománynak nincs kitüntetett szerepe.

**Biz:** Bármely lerajzolás "kifordítható": a diagram átrajzolható úgy, hogy a kiválasztott tartomány legyen a külső tartomány.

1. Vetítsük fel a diagramot a gömbre.
2. Állítsuk az  $\hat{E}$ -t a kiválasztott tartománynak megfelelő gömbi tartomány belsejébe.
3. Vetítsük vissza a gömbre rajzolt gráfot a síkra.

**Köv:** Bármely konvex poliéder élhálójá síkbarajzolható gráf.

**Biz:** A  $kx$  poliéder belső pontjából az élháló kivetíthető egy, a poliédert tartalmazó gömbre. Így az élhálóból gömbre rajzolt gráf lesz. Láttuk, hogy minden gömbre rajzolható gráf síkbarajzolható.

**Megj:** A  $kx$  poliéder élgráfjának tartományai a poliéder lapjainak felelnek meg.

**Terminológia:** síkbarajzolt  $G$  gráf esetén  $n, e, t$  ill.  $k$  jelöli rendre a  $G$  csúcsai, élei, tartományai és komponensei számát.

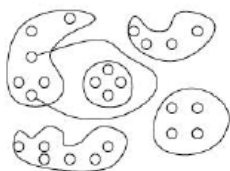
**Duális kézfogáslemma (DKFL):** Ha  $G$  síkbarajzolt gráf, akkor  $\sum_{i=1}^t l_i = 2e$  ahol  $l_i$  az  $i$ -dik lapot határoló élek számát jelöli.

**Biz:** Minden él vagy két különböző lapot határol, vagy ugyanazt a lapot 2-szer. Így minden él 2-vel járul a BO-hoz és a JO-hoz is.

**Megj:** A DKFL akkor hasznos, ha a síkbarajzolt gráf lapjairól, a KFL pedig akkor, ha a foksámról van információnk.

**Fáry-Wagner-tétel:** Ha  $G$  egyszerű síkbarajzolható gráf, akkor olyan síkbarajzolása is van, amiben minden él egyenes szakasz.

### • Az Euler-féle poliéderformula, síkgráfok karakterizációja





**Tétel:** Ha  $G$  síkbarajzolt gráf, akkor  $n + t = e + k + 1$ .

**Biz:** Rajzoljuk meg  $G$ -t az  $n$  csúsból kiindulva, az élek egyenkénti behúzásával. Kezdetben  $t = 1, e = 0$  és  $k = n$ , így a bizonyítandó összefüggés fennáll. Tegyük fel, hogy már néhány élt berajzoltunk, még mindig fennáll az összefüggés, és egy éppen az  $uv$  élt rajzolunk meg.

1.  $u$  és  $v$  különböző komponenshez tartoznak. Ekkor  $k$  értéke 1-gyel csökken,  $e$ -é pedig 1-gyel nő. Az ÉHL miatt nem keletkezik kör, tehát nem zárunk körül új tartományt, vagyis  $t$  nem változik. Az összefüggés fennmarad.
2.  $u$  és  $v$  ugyanahhoz a komponenshez tartoznak. Ekkor  $k$  nem változik,  $e$  viszont 1-gyel nő. Az ÉHL miatt keletkezik kör, tehát kettévágjuk az  $uv$  élt tartalmazó korábbi tartományt. Ezért  $t$  is 1-gyel nő, az összefüggés ismét fennmarad.

**Köv: (1)** Ha  $G$  síkbarajzolható, akkor  $t$  nem függ a síkbarajzolástól.

**Biz:**  $t = e + k + 1 - n$ , és a JO nem függ a síkbarajzolástól.

**(2) (Euler-formula)** Ha  $G$  összefüggő síkbarajzolt gráf, akkor  $n + t = e + 2$

**Biz:** Mivel  $G$  összefüggő, ezért a fenti Tételben  $k = 1$ .

**(3)** Ha  $G$  egyszerű, síkbarajzolható és  $n \geq 3$ , akkor  $e \leq 3n - 6$ .

**Biz:** Ilyenkor  $G$  minden lapját legalább 3 él határolja, így a DKFL miatt  $2e = \sum_{i=1}^t l_i \geq 3t$ . A Tétel alapján  $3n + 2e \geq 3n + 3t = 3e + 3k \geq 3e + 3 + 3 = 3e + 6$ , amit rendezve  $e \leq 3n - 6$  adódik.

**(4)**  $G$  egyszerű, síkbarajzolható,  $C_3$ -mentes és  $n \geq 3 \Rightarrow e \leq 2n - 4$ .

**Biz:** Ilyenkor  $G$  minden lapját legalább 4 él határolja. A DKFL miatt  $2e = \sum_{i=1}^t l_i \geq 4t$ , így  $e \geq 2t$ . A Tétel miatt  $2n + e \geq 2n + 2t = 2e + 2k + 2 \geq 2e + 2 + 2 = 2e + 4$ . Ezt rendezve  $e \leq 2n - 4$  adódik.

**(5)** Ha  $G$  egyszerű, síkbarajzolható, akkor  $\delta(G) \leq 5$  (azaz  $\exists v : d(v) \leq 5$ ).

**Biz:** A KFL és **(3)** miatt  $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e \leq 6n - 12$ . Ezért van olyan csúcs, amire  $d(v) \leq \frac{6n-12}{n} < 6$ .

**(6)** A  $K_5$  és  $K_{3,3}$  gráfok egyike sem síkbarajzolható.

**Biz:** A  $K_5$  gráf egyszerű, de nem teljesül **(3)**, hiszen  $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10 \not\leq 9 = 3 \cdot 5 - 6$ . Ezért  $K_5$  nem síkbarajzolható. A  $K_{3,3}$  gráf egyszerű és  $C_3$ -mentes, de nem teljesül rá **(4)**, u.i.  $|E(K_{3,3})| = 9 \not\leq 8 = 2 \cdot 6 - 4$ . Ezért  $K_{3,3}$  nem síkbarajzolható.

**Megj:** Könnyen látható, hogy ha  $G$  síkbarajzolható, akkor  $G + e$  tóruszra rajzolható bármely  $e$  él behúzása esetén. Nem nehéz látni, hogy  $K_6$  is tóruszra rajzolható. Sőt: még  $K_7$  is az, de  $K_8$  már nem.

**Def: Élfelosztás:** az élre egy új, másodfokú csúcs ültetése. **Élösszehúzás:** az él törlése és két végpontjának azonosítása. **Topologikus  $G$  (soros bővítés):**  $G$ -ből élfelosztásokkal képzett gráf.

**Megf:** Az éltörlés, csúcsörlés, élfelosztás, élösszehúzás operációk mindegyike megőrzi a gráf síkbarajzolható tulajdonságát.

**Köv: (1)** Top.  $K_5$  top.  $K_{3,3}$  nem síkbarajzolható. **(2)** Ha  $G$  síkbarajzolható, akkor  $G$ -nek nincs se topologikus  $K_5$ , se topologikus  $K_{3,3}$  részgráfja.

**Kuratowski tétele:** ( $G$  síkbarajzolható)  $\iff$  ( $G$ -nek nincs se topologikus  $K_5$ , se topologikus  $K_{3,3}$  részgráfja)

**Példa:** Petersen-gráf



## 10 Tétel

**Kuratowski gráfok síkbarajzolhatósága, soros bővítés, Kuratowski-tétel könnyű iránya.** Síkbarajzolt gráf duálisa, a duális paraméterei. Vágás, elvágó él, soros élek. Kör-vágás dualitása, különféle élek duálisai. Whitney két tétele, Whitney operációk.

### • Síkbarajzolhatóság

**Def:** **Síkbarajzolt** (síkbarajzolt) gráf alatt olyan gráfdiagramot értünk, amiven az élek nem keresztezik egymást.

A  $G$  gráf **síkbarajzolható** (síkbarajzolható), ha van síkbarajzolt diagramja.

Síkbarajzolt gráf **tartománya** (lapja): a diagram komplementerének összefüggő tartománya. A nem korlátos rész neve **külső tartomány**.

**Megj:** (1) A fentieket nem csak egyszerű gráfokra definiáltuk. (2) A síkbarajzolt gráf nem csupán egy gráf, hanem egy **konkrét** diagram. (3) Ugyanannak a síkbarajzolható gráfnak nagyon sok lényegesen különböző síkbarajzolt diagramja (lerajzolása) lehet. (4) A görbe (tóruszra) rajzolhatóság hasonlóan definiálható.

**Állítás:**  $(G \text{ gráf síkbarajzolható}) \iff (G \text{ gömbre rajzolható})$

**\*\*\*Biz:** A sztereografikus projekcióban az északi-sarkból történő vetítés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a sík pontjai és a sítot a déli-sarkon érintő gömbfelszín pontjai (mínusz északi-sark) között. A síkbarajzolt diagram vetülete gömbre rajzolt lesz ( $\Rightarrow \checkmark$ ), és az  $\acute{E}$ -t nem tartalmazó gömbre rajzolt diagram pedig síkbarajzolttá válik. A  $\Leftarrow$  irány igazolásához csupán annyi kell, hogy úgy rajzoljuk  $G$ -t a gömbre, hogy az  $\acute{E}$ -n ne menjen át él.  $\square$

**Köv:** síkbarajzolt gráf külső tartománynak nincs kitüntetett szerepe.

**Biz:** Bármely lerajzolás "kifordítható": a diagram átrajzolható úgy, hogy a kiválasztott tartomány legyen a külső tartomány.

1. Vetítsük fel a diagramot a gömbre.
2. Állítsuk az  $\acute{E}$ -t a kiválasztott tartománynak megfelelő gömbi tartomány belsejébe.
3. Vetítsük vissza a gömbre rajzolt gráfot a síkra.  $\square$

**Köv:** Bármely konvex poliéder élhálójá síkbarajzolható gráf.

**Biz:** A  $kx$  poliéder belső pontjából az élháló kivetíthető egy, a poliédert tartalmazó gömbre. Így az élhálóból gömbre rajzolt gráf lesz. Láttuk, hogy minden gömbre rajzolható gráf síkbarajzolható.  $\square$

**Megj:** A  $kx$  poliéder élgráfjának tartományai a poliéder lapjainak felelnek meg.

**Terminológia:** síkbarajzolt  $G$  gráf esetén  $n, e, t$  ill.  $k$  jelöli rendre a  $G$  csúcsai, élei, tartományai és komponensei számát.

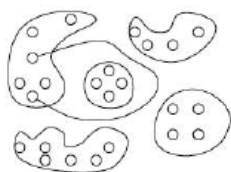
**Duális kézfogáslemma (DKFL):** Ha  $G$  síkbarajzolt gráf, akkor  $\sum_{i=1}^t l_i = 2e$  ahol  $l_i$  az  $i$ -dik lapot határoló élek számát jelöli.

**Biz:** Minden él vagy két különböző lapot határol, vagy ugyanazt a lapot 2-szer. Így minden él 2-vel járul a BO-hoz és a JO-hoz is.  $\square$

**Megj:** A DKFL akkor hasznos, ha a síkbarajzolt gráf lapjairól, a KFL pedig akkor, ha a fokszámról van információnk.

**Fáry-Wagner-tétel:** Ha  $G$  egyerű síkbarajzolható gráf, akkor olyan síkbarajzolása is van, amiben minden él egyenes szakasz.

### • Az Euler-féle poliéderformula, síkgráfok karakterizációja



**Tétel:** Ha  $G$  síkbarajzolt gráf, akkor  $n + t = e + k + 1$ .

**Biz:** Rajzoljuk meg  $G$ -t az  $n$  csúcsból kiindulva, az élek egyenkénti behúzásával. Kezdetben  $t = 1, e = 0$  és  $k = n$ , így a bizonyítandó összefüggés fennáll. Tegyük fel, hogy már néhány élt berajzoltunk, még mindig fennáll az összefüggés, és egy éppen az  $uv$  élt rajzolunk meg.

1.  $u$  és  $v$  különböző komponenshez tartoznak. Ekkor  $k$  értéke 1-gyel csökken,  $e$ -é pedig 1-gyel nő. Az ÉHL miatt nem keletkezik kör, tehát nem zárunk körül új tartományt, vagyis  $t$  nem változik. Az összefüggés fennmarad.

2.  $u$  és  $v$  ugyanahhoz a komponenshez tartoznak. Ekkor  $k$  nem változik,  $e$  viszont 1-gyel nő. Az ÉHL miatt keletkezik kör, tehát kettévágjuk az  $uv$  élt tartalmazó korábbi tartományt. Ezért  $t$  is 1-gyel nő, az összefüggés ismét fennmarad.  $\square$

**Köv:** (1) Ha  $G$  síkbarajzolható, akkor  $t$  nem függ a síkbarajzolástól.

**Biz:**  $t = e + k + 1 - n$ , és a JO nem függ a síkbarajzolástól.  $\square$

(2) (**Euler-formula**) Ha  $G$  összefüggő síkbarajzolt gráf, akkor  $n + t = e + 2$

**Biz:** Mivel  $G$  összefüggő, ezért a fenti Tételben  $k = 1$ .  $\square$

(3) Ha  $G$  egyszerű, síkbarajzolható és  $n \geq 3$ , akkor  $e \leq 3n - 6$ .

**Biz:** Ilyenkor  $G$  minden lapját legalább 3 él határolja, így a DKFL miatt  $2e = \sum_{i=1}^t l_i \geq 3t$ . A Tétel alapján  $3n + 2e \geq 3n + 3t = 3e + 3k \geq 3e + 3 + 3 = 3e + 6$ , amit rendezve  $e \leq 3n - 6$  adódik.  $\square$

(4)  $G$  egyszerű, síkbarajzolható,  $C_3$ -mentes és  $n \geq 3 \Rightarrow e \leq 2n - 4$ .

**Biz:** Ilyenkor  $G$  minden lapját legalább 4 él határolja. A DKFL miatt  $2e = \sum_{i=1}^t l_i \geq 4t$ , így  $e \geq 2t$ . A Tétel miatt  $2n + e \geq 2n + 2t = 2e + 2k + 2 \geq 2e + 2 + 2 = 2e + 4$  Ezt rendezve  $e \leq 2n - 4$  adódik.  $\square$

(5) Ha  $G$  egyszerű, síkbarajzolható, akkor  $\delta(G) \leq 5$  (azaz  $\exists v : d(v) \leq 5$ ).

**Biz:** A KFL és (3) miatt  $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e \leq 6n - 12$ . Ezért van olyan csúcs, amire  $d(v) \leq \frac{6n-12}{n} < 6$ .  $\square$

(6) A  $K_5$  és  $K_{3,3}$  gráfok egyike sem síkbarajzolható.

**Biz:** A  $K_5$  gráf egyszerű, de nem teljesül (3), hiszen  $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10 \not\leq 9 = 3 \cdot 5 - 6$ . Ezért  $K_5$  nem síkbarajzolható. A  $K_{3,3}$  gráf egyszerű és  $C_3$ -mentes, de nem teljesül rá (4), u.i.  $|E(K_{3,3})| = 9 \not\leq 8 = 2 \cdot 6 - 4$ . Ezért  $K_{3,3}$  nem síkbarajzolható.  $\square$

**Megj:** Könnyen látható, hogy ha  $G$  síkbarajzolható, akkor  $G + e$  tóruszra rajzolható bármely  $e$  él behúzása esetén. Nem nehéz látni, hogy  $K_6$  is tóruszra rajzolható. Sőt: még  $K_7$  is az, de  $K_8$  már nem.

\*\*\***Def: Élfelosztás:** az élre egy új, másodfokú csúcs ültetése. **Élüsszehúzás:** az él törlése és két végpontjának azonosítása. **Topologikus G (soros bővítés):**  $G$ -ből élfelosztásokkal képzett gráf.

**Megf:** Az éltörlés, csúcstörlés, élfelosztás, élösszehúzás operációk mindegyike megőrzi a gráf síkbarajzolható tulajdonságát.

**Köv:** (1) Top.  $K_5$  top.  $K_{3,3}$  nem síkbarajzolható. (2) Ha  $G$  síkbarajzolható, akkor  $G$ -nek nincs se topologikus  $K_5$ , se topologikus  $K_{3,3}$  részgráfja.

\*\*\***Kuratowski tétele:** ( $G$  síkbarajzolható)  $\iff$  ( $G$ -nek nincs se topologikus  $K_5$ , se topologikus  $K_{3,3}$  részgráfja) **Példa:** Petersen-gráf

## • Síkgráfok duálisa

**Def:** A  $G$  síkba rajzolt gráf **duálisa** a  $G^*$  gráf, ha  $G^*$  csúcsai  $G$  tartományainak,  $G^*$  élei  $G$  éleinek felelnek meg. Az  $uv \in E(G)$  élnek megfelelő duális él az  $uv$  él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

**Megf:** (1) A síkbarajzolt  $G$  gráf  $G^*$  duálisa síkbarajzolható.  $(n^*, e^*, t^*, k^*)$  (2)  $n^* = t, e^* = e, k^* = 1$ . (3) Ha  $v$  az  $i$ -dik laphoz tartozó duális csőcs, akkor  $d_{G^*}(v) = l_i$ .

**Köv:** KFL a duálisra  $\sum_{i=1}^t l_i = \sum_{v \in V(G^*)} d_{G^*}(v) = 2e^* = 2e$ .

**Def:** A  $Q \subseteq E(G)$  élhalmaz a  $G$  gráf **vágása**, ha  $G - Q$  szétesik (több komponense van, mint  $G$ -nek), de  $Q' \subsetneq Q$  esetén  $G - Q'$  nem esik szét. **Elvágó él:** egyélű vágás. **Soros él:** kétélű vágás.

**Kör-vágás dualitása:** Tegyük fel, hogy  $G^*$  a  $G$  síkbarajzolt gráf duálisa. Ekkor  $(C$  a  $G$  köre)  $\iff$  ( $C^*$  a  $G^*$  vágása) ill.  $(Q$  a  $G$  vágása)  $\iff$  ( $Q^*$  a  $G^*$  köre).

**Köv:** Hurokél duálisa elvágó él, soros élpáré párhuzamos élpár.

## • Whitney

**Whitney tétele:** Tegyük fel, hogy  $G^*$  a  $G$  síkbarajzolt gráf duálisa. Ekkor  $H$  pontosan akkor duálisa a  $G$  egy alkalmas síkbarajzolásának, ha  $H$  előáll  $G^*$ -ból a fenti Whitney-operációk alkalmas egymásutánjával.

**Def:** A  $\varphi : E(G) \rightarrow E(H)$  kölcsönös egyenértékű leképezés **kör-vágás dualitás**  $G$  és  $H$  között, ha  $C$  pontosan akkor  $G$  köre, ha  $\varphi(C)H$  vágása.

**Whitney másik tétele:** Tegyük fel, hogy  $G$  és  $H$  között kör-vágás dualitás van. Ekkor  $G$  síkbarajzolható, és  $H$  a  $G$  egy alkalmas síkbarajzolásának duálisa.

**Megj:** Egy  $G$  gráf által leírt villamos hálózat viselkedését az Ohm-él Kirchhoff-törvények írják le. Ezek a  $G$  gráf éleire, köreire és vágásaira vonatkoznak. Ha  $G$  és  $H$  közt kör-vágás dualitás van, akkor  $H$ -n elkészíthető az előző hálózat duálisa. Az eredeti hálózat megoldásában ha az  $I$  és  $U$  értékeket felcseréljük, az utóbbi hálózat megoldását kapjuk. Whitney másik tétele miatt ez a különös szimmetria csak síkbarajzolható gráfok által leírt hálózatokon lehetséges.

## 11 Tétel

Lineáris egyenletrendszer, kibővített együtthatómátrix, elemi sorkvivalens átalakítás és kapcsolata a megoldásokkal. LA és RLA mátrix, vezéregyes, megoldás leolvasása RLA mátrix esetén. Tilos sor, kötött változó, szabad paraméter, ezek jelentése a megoldás/megoldhatóság szempontjából. Gauss-elimináció, összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az egyenletek és ismeretlenek száma között.
--

- Lineáris egyenletrendszer

**Def: Lineáris egyenlet:** Ismeretlenek konstansszorosainak összege konstans. **Lineáris egyenletrendszer:** Véges sok lineáris egyenlet. **Megoldás:** Olyan érték adás, ami minden egyenletet igazgá tesz.

- Kibővített együtthatómátrix

**Def: Lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixa:** a sorok az egyenletek, az oszlopok az ismeretleneknek ill. az egyenletek jobb oldalainak felelnek meg, az egyes mezőkben pedig a megfelelő együttható ill. jobb oldali konstans áll.

- Elemi sorkvivalens átalakítás

**Megoldás módszere** Ekvivalens átalakításokat végzünk. Ezek során a megoldások halmaza nem változik. Konkrétan: egyenleteket felcserélünk, egyenletet nemnullával vigigszorzunk ill. az  $i$ -dik egyenletet kicseréljük az  $i$ -dik és  $j$ -dik egyenletek összegére.

**Def:** A kibővített együtthatómátrix **elemi sorkvivalens átalakítása (ESÁ):** (1) sorcsere, (2) sor nemnulla konstanssal végigszorzása, (3) az  $i$ -dik sor helyettesítése az  $i$ -dik és  $j$ -dik sorok (koordinátánkénti) összegével (az  $i$ -dik sor helyettesítése az  $i$ -dik sor és a  $j$ -dik sor konstansszorosának összegével, csupa 0 sor hozzáadása/elhagyása).

- Elemi sorkvivalens átalakítás és kapcsolata a megoldásokkal

**Biz:** Minden ESÁ előtti megoldás megoldás marad az ESÁ után is. Minen ESÁ fordítottja megkapható ESÁ-ok egymásutánjaként is. Ezért minden ESÁ utáni megoldás megoldja az ESÁ előtti előtti rendszert is.

**Megj:** A kibővített együtthatómátrix a lineáris egyenletrendszer felírásának egy tömör módja: elkerüljük vele a műveleti- és egyenlőségjelekkel piszmogást, mégis teljesen áttekinthető módon tartalmaz minden lényeges információt.

- LA és RLA mátrix

**Def:** Az  $M$  mátrix **lépcsős alakú (LA)**, ha

- (1) minden sor első nemnulla eleme 1-es (ú.n. **vezér 1-es**, avagy **v1**)
- (2) minden v1 feletti sorban van ettől a v1-től balra eső másik v1.

Az  $M$  mátrix **redukált lépcsős alakú (RLA)**, ha

- (3)  $M$  LA és (2)  $M$ -ben minden v1 felett csak nullák állnak.

**Példa:** LA mátrix

RLA mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ill. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Megoldás leolvasása RLA mátrix esetén

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \end{array} \mapsto \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 1 \\ x_3 + 5x_4 = 7 \end{array} \mapsto \begin{array}{l} x_2, x_4 \in \mathbb{R} \\ x_1 = 1 - 3x_2 + 2x_4 \\ x_3 = 7 - 5x_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \mapsto \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 1 \\ x_3 + 5x_4 = 7 \\ 0 = 1 \\ 0 = 0 \end{array} \mapsto \text{⚡}$$

- **Tilos sor**

**Def:** Kibővített együtthatómátrix **tilos sora**:  $0 \dots 0|x$  alakú sor, ha  $x \neq 0$ .

- **Kötött változó és szabad változó**

**Def:** A RLA kibővített együtthatómátrix  $v_1$ -hez tartozó változója **kötött** a többi változó (amihez nem tartozik  $v_1$ ) **szabad** (vagy **szabad paraméter**).

**Megf:** Ha kibővített együtthatómátrix RLA, akkor (1) minden sor vagy a  $v_1$ -hez tartozó változó értékadása, vagy tilos sor, vagy csupa 0 sor.

(2) Ha van tilos sor, akkor nincs megoldás.

(3) Ha nincs tilos sor, a szabad paraméterek tetszőleges, értékadásához egyértelmű megoldás tartozik.

**Megf:** A lineáris egyenletrendszer megoldása tekinthető úgy, hogy a lineáris egyenletrendszeregy RLA kibővített együtthatómátrixal van megadva.

**Cél:** Olyan eljárás, ami ESÁ-okkal tetszőleges mátrixot RLA-vá alakít.

- **Gauss elimináció**

**Gauss-elimináció:**

Input:  $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrix.

Output: Egy  $M$ -ből ESÁ-okkal kapható  $M' \in \mathbb{R}^{n \times k}$  LA mátrix.

Működés: Az algoritmus fázisokból áll. Az  $i$ -dik fázisban keresünk egy nemnulla elemet az  $(i-1)$ -dik sor alatt a lehet legkisebb sorszámú oszlopban. Ha nincsen elem, az algoritmus véget ér. Sorcserével ezt a nemnulla elemet az  $i$ -dik sorban visszük. Az  $i$ -dik sor konstanssal szorzásával ezt az elemet  $v_1$ -sé alakítjuk. Az  $i$ -dik sor alatti sorokhoz az  $i$ -dik sor konstansszorosát hozzáadva kinullázuk a kapott  $v_1$  alatti elemeket.

- összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az egyenletek és ismeretlenek száma között

**Megj:** (1) A Gauss-elimináció outputja LA. Az RLA-hoz további lépésekre van szükség: minden  $v_1$  felett kinullázhatók az elemek, ha a  $v_1$  sorának konstansszorosait a  $v_1$  feletti sorokhoz adjuk.

(2) Ha csupán LA (vagy RLA) a cél, eltérhetünk a Gauss-eliminációtól, feltéve, hogy ESÁ-okkal dolgozunk.

(3) A Gauss-elimináció megvalósítható rekurzív algoritmusként is.

A  $GE(M)$  (az  $M$  mátrixot lépcsős alakra hozó eljárás):

[1.] Ha  $M$  első oszlopa csupa 0, akkor  $M'$  az első oszlop törlésével keletkező mátrix. Output:  $GE(M')$  elé írunk egy csupa 0 oszlopot.

[2.] Ha  $M$  első oszlopa tartalmaz nemnulla elemet, sorcserével és az első sor konstanssal szorzásával az első sor első elemét  $v_1$ -sé tesszük, majd a  $v_1$  alatti elemeket ESÁ-okkal kinullázunk. Legyen  $M'$  az első sor és első oszlop törlésével keletkező mátrix. Output:  $GE(M')$  elé írunk egy csupa 0 oszlopot és az így kapott mátrix fölé a korábban törölt első sort.

1. Lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixként is magadható.

2. ESÁ nem változtat a megoldásokon.

3. ESÁ-okkal elérhető a RLA.

4. A RLA-ból azonnal adódik a megoldás

– Ha az utolsó oszlopban van  $v_1$ , akkor nincs megoldás.

– Ha az utolsó kivételével minden oszlopban van  $v_1$ , akkor egyetlen megoldás van.

– Ha az utolsón kívül más oszlopban nincs  $v_1$ , akkor van szabad paraméter, így végtelen sok különböző megoldás van.

**Köv:** Ha a lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor legalább annyi egyenlet van, mint ahány ismeretlen.

**Biz:** Az RLA-ra hozás után nincs szabad paraméter, tehát minden változóhoz tartozik  $v_1$ . Ezért a kibővített együtthatómátrixnak legalább annyi sora van, mint a változók száma.

**Megj:** A fenti következmény fordított irányban nem igaz, és lényegében nincs más összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az ismeretlenek és egyenletek száma között.