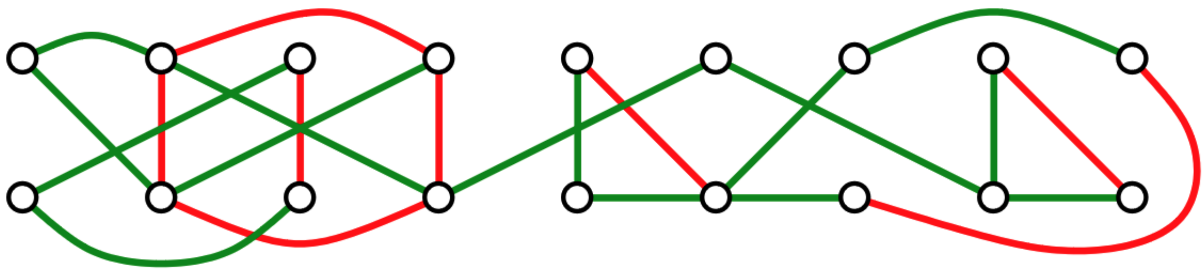
Élhozzáadási lemma erdő, **fa**, fák egyszerűbb tulajdonságai: két levél, erdők élszáma. **Feszítőfa** létezése, feszítőfához tartozó alapkörök és alap vágások.

- **Élhozzáadási lemma (ÉHL):** Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.
  (1) G és G' komponensei megegyeznek, de G'-nek eggyel több köre van, mint G-nek.
  (2) G és G' körei megegyeznek, de G'-nek eggyel kevesebb komponense van, mint G-nek.
- Erdő: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
- **Fa:** Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
  - G erdő $\iff$ G minden komponense fa.
  - G n-csúcsú, k-komponensű erdő $\Rightarrow |E(G)| = n - k$.
  - **Biz:** Építsük fel G-t a $\overline{K_n}$ üresgráfból az élek egyenkénti behúzásával. G körmentes, ezért az ÉHL miatt minden él zöld: behúzásakor 1-gyel csökken a komponensek száma. A $\overline{K_n}$ üresgráfnak n komponense van, G-nek pedig k. Ezért pontosan $n - k$ zöld élt kellett behúzni G felépítéséhez.
- Két levél: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.
  - **Biz:** (Algebrai út) A KFL miatt $\sum_{v \in V(G)}(d(v) - 2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 2n = 2(n-1) - 2n = -2$. F minden v csúcsára $d(v) \geq 1$ teljesül, ezért $d(v) - 2 \geq -1$. A fenti összeg csak úgy lehet -2, ha F-nek legalább 2 levele van.
  - **Biz:** (Kombinatorikus út) Induljunk el F egy tetszőleges v csúcsából egy sétán, és haladjunk, amíg tununk. Ha sosem akadunk el, akkor előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, és kört találunk. Ezért elakadunk, és az csakis egy v-től különböző u levélben történhet. Ha $d(v) = 1$, akkor v egy u-tól különböző levél. Ha $d(v) \geq 2$, akkor sétát indíthatunk v-ből egy másik él mentén. Ekkor egy u-tól különböző levélben akadunk el.
- **Feszítőfa**

  F a G gráf feszítőfája (ffa), ha F egy G-ből éltörésekkel kapható fa. Ha G-nek van feszítőfája $\Leftrightarrow$ (akkor) összefüggő.

  Építsük fel a G gráfot az élek egymás utái behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!



Legyen G' a G gráf piros élei törlésével keletkező feszítő részgráf! G' biztosan körmentes lesz, hiszen a zöld élek sosem alkottak kört a korábbi élekkel. G' minden K' komponense részhalmaza G egy K komponensének. Ha $K' \neq K$, akkor G-nek van olyan éle, ami kilép K'-ből. Ezen élek mind pirosak K' definíciója miatt. Legyen e ezek közül az elsőnek kiszínezett. Az e él nem tudott kört alkotni a korábbn kiszínezettekel, így nem lehet piros: ellentmondás. Ezek szerint G egy G' komponensei megegyeznek.

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel.

Def: F a G gráf feszítőfája (ffája), ha F egy G-ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: (G-nek van feszítőfája) $\iff$ (G összefüggő)

Biz: $\Rightarrow$: Legyen F a G feszítőfája. F összefüggő, és $V(F) = V(G)$, tehát G bármely két csúcsa között vezet F-beli út.

$\Leftarrow$: Építsük fel G-t az álek egyenkénti behúzásával és kiszínezésével. Láttuk, hogy a zöld élek egy F erdőt alkotnak, aminek egyetlen komponense van, hiszen G is egy komponensű. Ezek szerint F olyan fa, ami G-ből éltörlésekkel kapható.

Megj: Ha egy nem feltétlenül összefüggő G gráf éleit a fenti módon kiszínezzük, akkor a zöld élek G minden komponensének egy F feszítőfáját alkotják. Nem összefüggő G esetén a zöld élek alkotta feszítő részgráf neve a G feszítő erdeje.

- Alapvágás, alapkör:

  A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ által létrehozott két komponens között futnak.

  Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tarozó alapkör pedig az $F + e$ köre.

  Megf: Tfh $f \in F$ és $e \in E(G) \setminus E(F)$. Ekkor ($F - f + e$ ffa) $\Longleftrightarrow$ (f benne van e alapkörében) $\Longleftrightarrow$ (e benne van f alap vágásában).