Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

A számítástudomány alapjai

Összefoglaló jegyzet

Készítette: Illyés Dávid

Ez a jegyzet nagyon hasonlóan van struktúrálva az előadás jegyzetekhez és fő célja, hogy olyan módon adja át a "A Programozás Alapjai 1" nevű tárgy anyagát, hogy az teljesen kezdők számára is könnyen megérthető és megtanulható legyen.

December 27, 2023

Tartalomjegyzék

Tételek:

A **félkövéren** szedett dolgokat tudni kell ismertetni, kimondani, ill. definiálni. Az aláhúzottakat bizonyítottuk, a *dőlten* szedetteket nem. A vizsgán az anyag értő ismeretét kérjük számon, elégségesért nem kell bizonyítást tudni.

1. Gráfelméleti alapfogalmak: **csúcs, él, diagram, fokszám**. Egyszerű gráf, irányított gráf, véges gráf, komplementer gráf, reguláris gráf, él/csúcstörlés, élhozzáadás, (feszítő/feszített) részgráf, izomorfia, élsorozat, séta, út, kör,**összefüggő gráf**, komponens. **kézfogás-lemma**.

2. **Élhozzáadási lemma** erdő, **fa**, fák egyszerűbb tulajdonságai: két levél, erdők élszáma. **Feszítőfa** létezése, feszítőfához tartozó alapkörök és alap vágások.

3. **Minimális költségű feszítőfa**, mkffák struktúrája, **Kruskal-algoritmus** helyessége, villamos hálózathoz tartozó normál fa keresése.

4. Éltalános gráfbejárás: **a csúcsok állapotváltozása, a bejárás általános lépése**, a bejáráshoz tartozó sorrender ill. az élek osztályozása bejárás után. A **BFS** és tulajdonságai, legrövidebb utak fájának létezése.

5. Gréfút hossza, gráfcsúcsok távolsága, nemnegatív és konzervatív hosszfüggvény, triviális és pontos (r, l)**-felső becslés, élmenti javítás. Dijkstra-algoritmus működése**, Ford-algoritmus helyessége és lépésszáma. Legrövidebb utak fájának létezése.

6. **Mélységi keresés** és alkalmazásai (fellépő éltípusok, mélységi- és befejezési számozásból az éltípus meghatározása, irányított kör létezésének eldöntése DFS-sel).

7. **DAG**, jellemzése, **topologikus sorrend** keresése. Leghosszabb utak keresése, **PERT-módszer**, kritikus utak és tevékenységek.

8. **Euler-séta és körséta** létezésének szükkséges és elégséges feltétele. **Hamilton-kör és út** létezésére szükséges, ill. elégséges feltételek: komponensszám ponttörlés után (Petersen-gráf) **Dirac, Ore tételei**, gazdag párok, hízlalási lemma, Chavátal-lezárt.

9. **Gráfok síkba ill. gömbre rajzolhatósága, tartomény, sztereografikus projekció**, következményei. Az **Euler-féle poliédertétel**, duális kézfogáslemma és következményei: felső korlátok az élszámra és a minimális fokszáma egyszerű, síkbarajzolható gráfokon.

10. **Kuratowski gráfok** síkbarajzolhatósága, **soros bővítés, *Kuratowski-tétel* könnyű iránya**. **Síkbarajzolt gárf duálisa**, a duális paraméterei. Vágás, elvágó él, soros élek. *Kör-vágás duaklitása*, különféle élek duálisai. Whitney két tétele, Whitney operációk.

11. **Lineáris egyenletrendszer, kibővített együtthatómátrix, elemi sorekvivalens átalakítás** és kapcsolata a megoldásokkal. **LA és RLA mátrix, vezéregyes, megoldás leolvasása RLA mátrix esetén**. Tilos sor, kötött változó, szabad paraméter, ezek jelentése a megoldás/megoldhatóság szempontjából. **Gauss-elimináció**, összefüggés az egyértelműmegoldhatóság, az egynletek és ismeretlenek száma között.

12. Az $\mathbb{R}^n$ **tér**, vektorműveletek azonosságai, (generált) **altér** (példák), (triviális) **lineáris kombináció**, alterek metszete, **generátorrendszer**, **lineáris függetlenség** (kétféle definíció). Lin.ftn rendszer hízlalása, generátor-rendszer ritkítása, kicserélési lemma, **FG-egyenlőtlenség** és következménye.

13. ESÁ hatása a sor- és oszlopvektorokra, **oszlopvektorok lin.ftn-ségének eldöntése**. **Bázis** fogalm, **altér bázisának előállítása generátorrendszerből** ill. homogén lineáris egyenletrendszerrel megadott altér esetén.

14. Generátorrendszerből homogén lin.egyenletredszer előállítása. **Altér dimenziójának jóldefiniáltsága**, $\mathbb{R}^n$ **standard bázisa, bázishoz tartozó koordinátavektor kiszámítása**.

15. n elem permutációja, a permutáció **inverziószáma**. **Bástyaelhelyezés**, inverzióban álló bástyapárok, **determináns, felső háromszögmátrix determinánsa**.

16. **Mátrix transzponáltja**, transzponált determinánsa, **ESÁ hatása a determinánsra, előjeles aldetermináns, kifejtési téte**.

17. Vektorok skaláris szorzásának tulajdonságai. **Mátrixok összeadása és szorzásai**, e műveletek tulajdonságai. **A szorzatmátrix sorainak és oszlopainak különös tulajdonsága**, ESÁ és mátrixszorzás kapcsolata.

18. **Lineáris leképezések** és mátrixszorzások kapcsolata. **Lineáris leképezés mátrixának meghatározása.** Leképezések egymásutánjának mátrixa, mátrixszorzás asszociativitása.

19. **Mátrix jobb- és balinverze**, ezek viszonya. **Balinverz kiszámítása ESÁ-okkal** és előjeles aldeterminánsokkal, **reguláris mátrixok** jellemzése determinánssal, sorokkal, oszlopokkal ill. RLA mátrix segítségével.

20. **Sor- oszlop- és determinánsrang**, ezek viszonya és **kiszámítása**. Összeg és szorzat rangja. **Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja**, a megoldhatóság és az oszlopok alterének kapcsolata. Az egyértelmű megoldhatóság feltétele $n \times n$ együtthatómátrix esetén.

4. Gráfút hossza, gráfcsúcsok távolsága nemnegatív és konzervatív hosszfüggvény, triviális és pontos (r, l)-felső becslés. !Kép!Adott G=(V,E) (ir.) gráf és egy !Képlet!élhosszfv.Egy G-beli (ir.) út hossza az út éleinek összhossza, diste(n,v) pedig az (ir.)uv-utak közül a legrövidebb hosszát jelöli.Az l hosszfv konzervatív ha nincs G-ben negatív összhosszúságú (ir.) kör. Adott G=(V,E) (ir.) gráf r e v és egy l:E-¿R élhosszfv. Az f: -¿R függvényt (r,l) - felső becslésnek nevezzük, ha f(r)=o és !Képlet! teljesül G minden v csúcsára. Az e=uv élmenti javítás esetén a f (v) értéket a min !Képlet! értékkel helyettesíthetjük. (1) Ha l konzervatív akkor tetsz. (r,l)-f. b. élmenti javítása (r,l)-fb-t ad. (2) Ha az f (r,l) felső becsléshez nincs érdemi élmenti javítás, akkor f(v)=diste(r,v) !Képlet! * Élmenti javítás:!Kép!!Kép!!Kép! * Dijkstra algoritmus működése: * Input: G=(V,E) (ir.) gráf, l. E-¿ R+ nemnegatív hosszfv, !Képlet! gyökér * Output: diste (r,v) minden !Képlet! * Működés. Kezdetben !Képlet! Az algoritmus C-dik fázisában (i=1,2,..., (v) a következő történik. 1. Legyen ui az v csúcs a !Képket! halmazból, amelyre f (r) minimális és legy !Képlet!2. Végezzünk élmenti javításokat minden Ui-ből kivezető uix élen. Az output a (v)-dik fázik utáni f függvény. Szokás megjelölni a végső f (v) értékeket beállító éleket. Ha az output az f (r,l)- felső becslés, akkor (1) f (ui)!Képlet!(2) f (u1) !Képlet! (3) élmentijavítás nem változhat f-n A Dijkstra-algoritmus helyesen működik,azaz diste (r,v)=f(v) !Képlet! teljesül. Az algoritmus során megjelölt élek egy legrövidebb utak fáját alkotják G-ben: az r gyökérből minden r-ből elérhető csúcshoz vezet olyan legrövidebb út is ami csak megjelölt éleket tartalmaz. A Dijkstra-algoritmus lépésszáma legfeljebb. konst. !Képlet!, ahol n=(v) m=(E). !Kép!!Kép!!Kép!!Kép! *Ford-algoritmus: Input: G=(V,E) (ir.) gráf, l:E-¿R konzervatív hosszfv, !Képlet! gyökérpont.Output: diste(r,v) minden !Képlet! Működés: Legyen !Képlet! Kezdetben legy !Képlet! Az i-dik fázis !Képlet! esetén abból áll, hogy elvégezzük az !Képlet! élek menti javításokat. A végén az output !Képlet! minden v-re !Képlet! !Kép! Biz: Ha l konzervatív, akkor diste (r,v)=!Képlet! f1 (v)=dist(r,v) ha !Képlet! legrövidebb rv-út. f2(v)=dist(r,v) ha !Képlet! legrövidebb rv-út. !Képlet!=dist(r,v) ha !Képlet! élű legrövidebb rv-út. Tehát !Képlet! Ha fi=fi-1, akkor a Ford-algoritmust az i-dik fázis után be lehet fejezni, hisz nincs érdemi émj, így fu-1=fi. Az !Képlet! beállító élek legrövidebb utak fáját alkotják. Biz: A Dijkstra esethez hasonló. Tetsz. csúcsból visszafelé követve a végső értéket beállító éleket !Képlet!hosszúságú rv-utat találunk.Lépészám: Ha a !Képlet! akkor minden fázisban !Képlet!, ami konst.m lépés. Ez összesen !Képlet! az algoritmus hatékony. * Floyd-algoritmus: Input: G=(V,E) (ir.) gráf l:E-¿R konzervatív. Output: dist (u,v) !Képlet! Működés: Legyen !Képlet! és !Képlet! a legrövidebb olyan !Képlet! út hossza, aminek belső pontjai csak !Képlet! lehetnek. Kezdetben !Képlet!, különben !Képlet!. A j-dik fázisban !Képlet! alapján a !Képlet! függvényt határozza meg. Az n-dik fázi után dist!Képlet! az output. Ha ez fennáll: tehát helyes a Floyd-algoritmus. OUTPUT !Képlet! dist !Képlet! *Lépésszám: A !Képlet! felírása konst * n2 lépés. Minden fázis konst' *n2. Mivel összesen u fázis van azért a lépésszám legfeljebb konst'*n3 lépés, az algoritmus hatékony.

11. *Altér bázisa A !Képlet! altér bázisa a V egy lin.ftn. generátorrendszere. Az e1, e2,...en vektorok az Rn standard bázisát alkotják. Állítás: Minden altérnek van bázisa. Kétféleképp is előállíthatjuk Rn tetsz. V alterének egy bázisát. (1) Generátorrendszer ritkításával, azaz generátorrendszerből a többi által generált elem elhagyásával egész addig, amíg a maradék rendszer egyetlen elemét sem generálja a többi maradék ellen. Az így kapott generátorrendszer lin.ftn. (2) Lin.ftn. rendszer hízlalásával. Ha van az albérben a lin. ftn. rendszer által nem generált vektor, akkor azzal a rendszer úgy bővíthető, hogy a lin. ftn. tulajdonság megmarad. *Bázis előállítása generátorrendszerből: Tfh az M mátrixból az M'RLA mátrix ESA'-okkal kapható és legyen V az M oszlopai által generált altér. Ekkor az M'-ben M-t tartalmazó oszlopoknak megfelelő M-beli oszlopok a V bázisát alkotják. Homogén lineáris egyenletrendszer alatt olyan lineáris egyenletrendszert értünk, amiben minden egyenlet jobb oldalán konstans a 0 konstans áll. * Generátorrendszerből homogén lin. egyr. előállítása: Tetsz. u ismeretlenes homogén lin. egyr. megoldásaiból alkotott oszlopvektorok zártak az összeadásra és skalárral való szorzásra, így az Rn tér egy altért alkotják. Homogén egyenletrendszer segítségével megadott altér bázisát alkotják a kom. lin. egyr. mindazon a megoldásaikhoz tartozó vektorok, amelyekben egy szabad paramétert 1-nek, a többit pedig 0-nak választjuk. Állítás: A Rn tetsz. V alteréhez található olyan kom. lin. egyr., aminek a megoldásaiból képzett oszlopvektorok pontosan a V altér elemei. A fennt leírt egyenletrendszer megkapható úgy, hogy tekintjük V egy G generátorrendszerét (pl. egy bázisát) és a G-beli oszlopvektorok alkotta mátrixot kiegészítjük egy !Képlet! vektorral. ESA'-okkal az utolsó oszlop nélkül RLA mátixot készítünk,és a v1-et nem tartalmazó sorok utolsó elemeit 0-val egyenlővé tesszük. * Altér dimenziójának jóldefiniáltsága:Tétel: Ha B1 ÉS B2 a !Képlet! bázisai, akkor (B1)=(B2). Mivel B1 lin. ftn. és B2 generátorrendszer V-ben, ezért az FG- egyenlőtlenség miatt !Képlet!Az is igaz, hogy B2 lin. ftn. és B1 generátorrendszer V-ben, ezért az FG-

egyenlőtlenség miatt !Képlet! Az előbbi két eredmény összevetéséből (B1)=(B2) adódik.Def.: A !Képlet! altér dimenziója !Képlet!, ha V-nek van k vektorból álló bázisa. A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű. Pl. Az Rn tér dimenziója n. -¿ Ha !Képlet!, akkor !Képlet! Legyen B az U bázisa. Ekkor !Képlet! lin. ftn. ezért a korábban látott módszerrel B-t ki lehet egészíteni V egy B' bázissávú úgy dim !Képlet! Ha !Képlet! és V1,V2 A V alterei, akkor !Képlet!+ !Képlet!

12. *n elem permutációja, inverziószám:!Képlet! n elem permutációja alatt egy !Képlet! kölcsönösen egyértelmű leképezést értünk. Ezek halmazát Sn jelöli. AZ !Képlet! vektorok egy sorrendjéhez az a !Képlet! permutáció tartozik, amire!Képlet! sorszáma az adott sorrendben minden értelmes i-re. Az !Képlet! tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik Ez a csoportokra osztás egyértelmű -¿ a fent csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai. Az !Képlet! vektorok tetsz. sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik. Az f: A-¿B függvény bikekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képenként áll elő. A !Képlet! bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza Sn. Az !Képlet! vektorok tetsz sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű o permutáció, amelyre !Képlet!, ha !Képlet!a sorban. A !Képlet! permutációban az (i,j)pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított !Képlet! nagyságú viszonyához képest. A !Képlet! permutáció I(o)-val jelölt inverziószáma a o szerint inverzióban álló párok száma (1) Szomszédos vektorok cseréjekor I (o) 1-gyel változik. (2) Két tetsz. vektorok cseréjekor I (o) mindig páratlanul változik. * Bástyaelhelyezések:Az !Képlet! vektorok egy sorrendjéhez tartozó bástyaelhelyezés a nxn mátrixnak azon pozícióit jelenti, ahol 1-esek állnak fenti sorrendben felírt egységvektorok alkotta mátrixban. A bástyaelhelyezéshez tartozó permutáció inverziószáma megegyezik az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számával. !Kép! *Determináns: * Transzponált * Felső ? mátrix !Kép!!Kép!!Kép! Biz.: (1) Az előiző állítás (2) részét alkalmazzuk AT transzponálra. (2) Az előző állítás (4) részét alkalmazzuk az AT transzponálra. (3) Az előző állítás (1) részét alkalmazva a transzponálra a lecserélt sorú determináns megkapható (A)+(A') összegként, ahol A'-nek két egyforma sora van. A korábban látottal és az előző állítás (3) része miatt (S')=I (A')T=0 (2) F háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemi sorozata. Biz.: Minden kif. tag tartalmaz 0 tényezőt, kivéve a főátlóbeli szorzata, aminek az előjele pozitív. * Előjeles aldetermináns. Az !Képlet!mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó Ai,j előjeles aldeterminváns az i-dik sor is j-dik oszlop elhagyásával keletkező (n-1) x (n-1) méretű mátrix determinánsának !Képlet! szerese. * Kifejtési tétel. Tfg, !Képlet! és ai,j jelöli A i-dik sorának j-dik elemét. Ekkor (1) (A) !Képlet! (oszlop szerinti kifejtés) (2) (A) !Képlet! (sor szerinti kifejtés)

13. * Vektorok skaláris szorzásának tul.: !Kép! * Mátixok összeadása és szorzása: Azonos méretű mátrixok összeadása és mátrix skalárral szorzása a vektorokhoz hasonlóan koordinátánként történik. !Kép!!Képl! * ESA'és mátrixszorzás kapcsolata: (1) Ha AB értelmes, akkor AB i-dik sora a B sorainak lin. kombja, A i-dik sora szerinti együtthatókkal vet lin. kombja. (2) C pontosan akkor áll elő AB alakban rögzített B-re, ha C minden sora B sorainak lin. kombja. (3) C pontosan akkor áll elő AB alakban rögzített A-ra, ha C minden oszlopa A oszlopainak lin. kombja. (4) Ha A' Az A mátrixból ESA'-okkal áll elő, akkor A'=BA alkalmas B-re. * Lineáris leképezések: !Kép! * A MÁTRIXSZORZÁS egy különös tulajdonsága: !Kép! * Lemma: Tfh !Képlet!. Ekkor f: U-¿V lin. lekép. ¡-¿ f zárt a lin. kombra azaz !Képlet!. Mivel f additív és homogén, ezért !Képlet! azaz f zárt a lin. kombra.Ha f zárt a lin. kombra, akkor !Képlet!, hisz !Képlet! az a lin. kombja, továbbá !Képlet!, tehát f homogén is additív, más szóval f lineáris leképezés. Köv.: Ha f: U-¿v lin. lekép. !Képlet! az U bázis és !Képlet!, akkor !Képlet! azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin. lekép-t.Lemma: Tfh !Képlet!, !Képlet!, f:U-¿V lin. lekép. !Képlet! az U-bázisa és !Képlet! tetsz. vektorok. Ekkor van olyan !Képlet! mátrix, amire !Képlet!teljesül !Képlet! esetén. Köv.: Tetsz. f: K-¿V lin. lekép. esetén !Képlet!teljesül a Lemmában definiált (f) mátrixra !Képlet! esetén, azaz minden lineáris leképzés előáll mátix-al történő balszorzással. !Kép! * Lineáris leképzés mátrixra: !Kép! Lemma. Tfh !Képlet! és !Képlet! lin. lekép-ek. Ekkor !Képlet! is lin. lekép., ahol !Képlet!és !Képlet!. Biz.: Először igazoljuk gof linearitását.!Képlet!=!Képlet! homogén, ill. !Képlet!=!Képlet!=!Képlet! linerális. Tehát gof csakugyan lineáris leképezés. A tanultak szerint [gof] i-dik oszlopa !Képlet!. Láttuk, hogy !Képlet! az [f] i-dik oszlopa így !Képlet! mátrix szorzata az [f] mátrix i-dik oszlopával. Ez pedig nem más, minta az [g] [f] szorzatmátrix i-dik oszlopa. Ezek szerint [gof]=[g] [f]. köv.: Ha értelmesek a műveletek, akkor A (BC)=(AB)C !Kép!

14. * Mátrix jobb és bal inverze: Az AB mátrix az !Képlet! mátrix balinverze, ha !Képlet!, AZ AJ mátrix pedig az A jobbinverze, ha !Képlet!. Ha AB ÉS AJ az A bal- ill. jobbinverze, akkor AB=AJ. Ha A-nak van balinverze, akkor. (1) AB előáll ESA'-okkal (2) az (A'In) mátrixokból ESA'-okkal kapott RLA mátrix !Képlet! Ha A-nak nincs balinverze, akkor az RLA mátrixban van v1 az n-dik oszloptól jobbra. Tfh. A négyzetes mátrix. Ekkor (A-nak van balinverze) ¡-¿ (A sorai lin. ftn-ek) ¡-¿ !Képlet!¡-¿ (A oszlopai lin. ftnek) ¡-¿ (A-nak van jobbinverze) * Előjeles abdeterminváns: !Kép! Tetsz. A négyzetes mátrix esetén akkor !Képlet! jelöli inverzét (ha van). Ha A-nak van inverze, akkor Aa reguláris (invertálható). Ha A-nak nincs inverze, akkor A szinguláris. Tfh !Képlet! és a B mátrix i-dik sorának j-dik eleme az Aj,i előjeles aldeterminváns.!Képlet!,!Képlet! Ekkor !Képlet! Köv. : Ha A reguláris, akkor !Képlet!, ahol B az előző állításban definiált mátrix. * Sor, oszlop, determináns rang. !Kép!ESA' során a sorrang és oszloprang sem változik. Láttuk, hogy ESA' során a sorok által generált altér nem változik, így a dimenziója is ugyanannyi marad. ESA' hatására az oszlopok közti lineáris összefüggések sem változnak, ezért oszlopok egy halmaza pontosan akkorlin. ftn.ESA' előtt, ha ugyanezen oszlophalmaz ln.

ftn. ESA' után. Ha A RLA mátrix akkor !Képlet! száma. A v1-ekhez tartozó oszlopok az oszlopok által generált altér bárisát alkotják, így !Képlet! száma. RLA mátrix csupa 0 sorait elhagyva a maradék (v1-t tartalmazó) sorok lin. ftn-ek,hisz egyikse áll elő a többi lin. kombjaként. Ezért S (A) is a v1-ek száma, tehát !Képlet!.Tetsz. A mátrix esetén !Képlet!. Legyen A' Az A-ból ESA'-okkal kapott RLA mátrix. Ekkor !Képlet!. !Képlet! Tetsz. A mátrixra !Képlet!. Ha s (A)=k, akkor az előző állítás miatt !Képlet!. Ha pedig d (A)=k akkor !Képlet! Ezért s(A)=d (A). AZ !Képlet! mátrix rangja r(A)=d(A) Rang meghatározása: ESA'-okkal képzett RLA mátrix v1-ei száma. (1) A transzponált sorai a mátrix oszlopainak felelnek meg. (2) A sorok által generált altér egy bázisát választhatjuk a sorvektorokból. Ez a bázis a sorok egy maximális méretű lin. ftn. részhalmaza. Ezért ennek a bázisnak az elemszáma s(A), vagyis a sorvektorok által generált altér dimenziója. Az oszlopokra vonatkozó állítást hasonló érvelés igazolja. !Kép!!Kép!!Kép!

1

Gráfelméleti alapfogalmak: **csúcs, él, diagram, fokszám**. Egyszerű gráf, irányított gráf, véges gráf, komplementer gráf, reguláris gráf, él/csúcstörlés, élhozzáadás, (feszítő/feszített) részgráf, izomorfia, élsorozat, séta, út, kör,**összefüggő gráf**, komponens. **kézfogás-lemma**.

Gráfelméleti alapfogalmak:

- **csúcs, élek:**
  - G=(V,E) egyszerű irányítatlan gráf ha $V \neq \emptyset$ és $E \leq \binom{V}{2}$, ahol $\binom{V}{2} = \{\{u,v\} : u,v \in V, u \neq v\}$
  - V a G csúcsainak ((szög) pontjainak) halmaza.
  - E pedig G éleinek halmaza.
- **Diagram:** A $G = (V,E)$ gráf diagramja egy olyan lerajzolása, melyben a csúcsoknak (síkbeli) pontok felelnek meg, éleknek pedig a két végpontot összekötő, önmagukat nem metsző görbék.
- **Fokszám:**
  - $v \in V(G)$ esetén a v-re illeszkedő élek száma a v fokszáma.
  - A G gráf csúcsának d (v) foka a vé végpontú élek száma (hurokél kétszer számít).
- **Egyszerű gráf:** ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei.
- **Irányított gráf:** Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.
- **Véges gráf:** $G = (V,E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.
- **Komplementer gráf:**
  - A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V,(G), \binom{v}{2} \backslash E(G))$.
  - Két csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a fokszámai megegyeznek vagy, ha minden csúcsának foka ugyan annyi.
- **Reguláris gráf:** k-reguláris, ha minden csúcsának pontosan k a fokszáma.
- **Él/Csúcstörlés:** Ha $G = (V,E)$ gráf $e \in E$ és $v \in E$ akkor $G - e = (V, E \backslash \{e\})$ az éltörés eredménye $\rightarrow$ Feszítő részgráf (éltöréssel kapható gráf), a csúcstörléssel keletkező $G - v$ gráfhoz V-ből töröljük v-t, E-ből pedig a v-re illeszkedő éleket. Feszített részgráf: (csúcstörlésekkel kapható gráf) $\Rightarrow$ Részgráf: él- és csúcstörlésekkel kapható gráf. (jelzőnélküli részgráf) $\rightarrow$ élhozzáadás: $G(V,E)$ gráfban az $E + 1$ nő.
- **Izomorfia:** A G és G' gráfok akkor izomorfak, ha mindekét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n-ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u,v csúcsa között pontosan annyi él fut G-ben, mint az u-nak és v-nek megfelelő sorszámú csúcsok között G'-ben. Jelölése: $G \cong G'$.
- **Élsorozat:** $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$. (Tulajdonképp egyik csúcsból eljutunk egy másik csúcsba mindig élek mentén haladva.)
- **Séta:** olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.
- **Út:** olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.
- **Kör:** $u = v$, de a kezdő (és vég)pontot nem akarjuk megnevezni, akkor zárt élsorozatról, körsétáról ill. körről beszélünk.
- **Összefüggő gráf:**
  - A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$ (ha bármely két pontja között vezet séta), ha bármely két csúcsa között vezet út G-ben (ha egy komponense van).
  - A G irányított gráfot akkor mondjuk **erősen összefüggő**nek, ha G bármely $u, v \in V(G)$ esetén van **irányított** uv-út G-ben.
  - **gyengén összefügő**, ha a G-nek megfelelő irányítatlan gráf összefüggő.
- **Komponens:**

  (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in$ esetén $v \sim v'$.

(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára.
   - A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.
   - $K \leq V(G)$ a G gráf komponense, ha bármely $u, v \in K$ között létezik G séta, de nem létezik uv-séta, ha $u \in K, v \in V(G) \backslash K$. (Minden gráf egyértelműen bontható komponensekre)

- **Kézfogás-lemma:** Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

- **Általánosított kézfogás-lemma:**: Tetszőleges G=(G,V) véges irányított gráfra KÉPLET A KFL bizonyítása. irányítsuk G éleit tetszőlegesen. Ekkor. KÉPLET Megj.: úgy is bizonyíthattuk volna, hogy egyenként húzunk be G-be éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszám összegét is.

- **Élhozzáadási lemma (ÉHL):** Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.
  (1) G és G' komponensei megegyeznek, de G'-nek több köre van, mint G-nek.
  (2) G és G' körei megegyeznek, de G'-nek eggyel keveseb komponense van, mint G-nek.

- **Erdő:** A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.

- **Fa:** Az öszefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
  - G erdő $\iff$ G minden komponense fa.
  - G n-csúcsú, k-komponensű erdő $\Rightarrow |E(G)| = n - k$.
  - **Biz:** Építsük fel G-t a $\overline{K_n}$ üresgráfból az élek egyenkénti behúzásával. G körmentes, ezért az ÉHL miatt minden lé zöld: behúzásakor 1-gyel csökken a komponensek száma. A $\overline{K_n}$ üresgráfnak n komponense van, G-nek pedig k. Ezért pontosan $n - k$ zöld élt kellett behúzni G felépítéséhez.

- **Két levél:** Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.
  - **Biz:**: (Algebrai út) A KFL miatt $\sum_{v \in V(G)}(d(v) - 2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 2n = 2(n-1) - 2n = -2$. F minden v csúcsára $d(v) \geq 1$ teljesül, ezért $d(v) - 2 \geq -1$. A fenti összeg csak úgy lehet -2, ha F-nek legalább 2 levele van.
  - **Biz:**: (Kombinatorikus út) Induljunk el F egy tetszőleges v csúcsából egy sétán, és haladjunk, amíg tunk. Ha sosem akadunk el, akkor előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, és kört találunk. Ezért elakadunk, és az csakis egy v-től különböző u levélben történhet. Ha $d(v) = 1$, akkor v egy u-tól különböző levél. Ha $d(v) \geq 2$, akkor sétát indulhatjuk v-ből egy másik él mentén. Ekkor egy u-tól különböző levélben akadunk el.

2

<u>Élhozzáadási lemma</u> erdő, **fa**, fák egyszerűbb tulajdonságai: <u>két levél</u>, <u>erdők élszáma</u>. **Feszítőfa** <u>létezése</u>, feszítőfához tartozó alapkörök és alap vágások.

2. !KÉPLET! *Feszítőfa: F a G gráf feszítőfája (ffa), ha F egy G-ből éltörésekkel kapható fa. ha G-nek van feszítőfája ¡-¿ összefüggő. * Alapvágás, Alapkör: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó alap vágást G azon élei alkotják, amik az F-f két komponense között futnak. Az !KÉPLET! éléhez tartozó alapkör pedig az !KÉPLET! köre. Megf.: Tegyük fel hogy !KÉPLET! Ekkor !KÉPLET! ¡-¿ f benne e alapkörében ¡-¿ e benne van f alap vágósávban. *Minimális költségű ffa: olyan !KÉPLET! élhalmaz, amire (V, F) fA, É Sk (F) minimális. * Kruskal (mohó) algoritmus: !KÉPLET! ahol !KÉPLET! 1. Élek költség szerinti sorba rendezése 2. Döntés az egyes élekről a fenti sorrendben. - Legyen !KÉPLET! egy gráf, és k: E-¿R egy tetsz költségfüggvény, (V,F) pedig a G egy ffa F pontosan akkor mkffa, ha minden C-re teljesül, F tartalmazza a G legfeljebb c költségű !KÉPLET! gráf egy feszítő erdejét. - Az algoritmus által kiszámított F élhalmaz a G egy min költségű feszítő erdeje. Mkffák struktúrája. G=(V, E)gráf és !KÉPLET! esetén legyen !KÉPLET! legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: !KÉPLET! A G gráfon folytatott Kruskal- algoritmus outpontja tartalmazza !KÉPLET! egy feszítő erdejét minden !KÉPLET! esetén. * Villamos hálózathoz tartozó normál fa keresése: normál fa: G olyan feszítőfája, ami minden feszültségforrást tartalmaz, de egyetlen áramforrást sem (és mindemellett a legtöbb kapacitást és a lehető legkevesebb induktivitást tartalmazza). Normál fa keresése. fesz.forrás (1.) kapacitás (2.) ellenállás (3.) induktivitás (4.) , áramforrás (5.) élköltségekhez keressünk mkffát!Ha ez tartalmaz áramforrást, vagy nem tartalmaz minden feszültségforrást, akkor nincs normál fa, egyébként a mkffa egy normál fa és egyértelmű a megoldás ”értelmes” a hálózat.

•

3

Minimális költségű feszítőfa, mkffák struktúrája, **Kruskal-algoritmus** helyessége, villamos hálózathoz tartozó normál fa keresése.

3. * Általános gráfbejárás: A bejárás során kialakul a csúcsok egy elérési il. egy befejezési sorrendje, továbbá minden csúcsban feljegyezzük azt is, hogy melyik él mentén értük el (ha van ilyen él). Ez utóbbi élek (faélek) alkotják a bejárás fáját (ami egyrészt irányított, másrészt pedig erdő).A G gráf további uv éle elő!KÉPLET! -¿ha u a bejárás fájába a v őse ha u a v leszármazottja, akkor visszaél. Minden más pedig keresztél. (Irányítatlan gráf bejáráskor minden élt oda-vissza irányított élenek tekintjük) !KÉP! *BFS és tulajdonságai. A szélességi bejárás imputja a G= (V,E) gráf és egy r gyökércsúcs. A szélességi bejárás során az r csúcsot már a legelején elértnek tekintjük, valamint az 1. esetben mindig a lehető legkorábban elért u csúcsot választjuk. !Kép! A szélességi fa (BFS) a szélességi bejárás fája Tulajdonságok: (BSF) !Kép!, !Kép! * Legrövidebb utak fája: Tetsz G gráf u és v csúcsainak !képlet! távolsága a legrövidebb G-beli w-út élszáma. A BFS bejárás fája az r csúcsból minden más csúcsba a G gráf egy legrövidebb (legkevesebb élből álló) útját tartalmazza, azaz tetszőleges v csúcs G-beli távolsága r-től megegyezik az r gyökerű F szélességi fán mért távolsággal. !Képlet!

-

4

Éltalános gráfbejárás: **a csúcsok állapotváltozása, a bejárás általános lépése**, a bejáráshoz tartozó sorrender ill. az élek osztályozása bejárás után. A **BFS** és tulajdonságai, legrövidebb utak fájának létezése.

-

5

Gréfút hossza, gráfcsúcsok távolsága, nemnegatív és konzervatív hosszfüggvény, triviális és pontos (r,l)**-felső becslés, élmenti javítás. Dijkstra-algoritmus működése**, Ford-algoritmus helyessége és lépésszáma. Legrövidebb utak fájának létezése.

-

6

Mélységi keresés és alkalmazásai (fellépő éltípusok, mélységi- és befejezési számozásból az éltípus meghatározása, irányított kör létezésének eldöntése DFS-sel).

-

7

DAG, jellemzése, **topologikus sorrend** keresése. Leghosszabb utak keresése, **PERT-módszer**, kritikus utak és tevékenységek.

-

8

Euler-séta és körséta létezésének szükkséges és elégséges feltétele. **Hamilton-kör és út** létezésére szükséges, ill. elégséges feltételek: komponensszám ponttörlés után (Petersen-gráf) **Dirac, Ore tételei**, gazdag párok, hízlalási lemma, Chavátal-lezárt.

-

9

Gráfok síkba ill. gömbre rajzolhatósága, tartomány, sztereografikus projekció, következményei. Az **Euler-féle poliédertétel**, duális kézfogáslemma és következményei: felső korlátok az élszámra és a minimális fokszáma egyszerű, síkbarajzolható gráfokon.

-

10

Kuratowski gráfok síkbarajzolhatósága, **soros bővítés,** ***Kuratowski-tétel*** **könnyű iránya**. **Síkbarajzolt gárf duálisa**, a duális paraméterei. Vágás, elvágó él, soros élek. *Kör-vágás duaklitása*, különféle élek duálisai. Whitney két tétele, Whitney operációk.

-

11

Lineáris egyenletrendszer, kibővített együtthatómátrix, elemi sorekvivalens átalakítás és kapcsolata a megoldásokkal. **LA és RLA mátrix, vezéregyes, megoldás leolvasása RLA mátrix esetén**. Tilos sor, kötött változó, szabad paraméter, ezek jelentése a megoldás/megoldhatóság szempontjából. **Gauss-elimináció**, összefüggés az egyértelműmegoldhatóság, az egynletek és ismeretlenek száma között.

-

12

Az $\mathbb{R}^n$ **tér**, vektorműveletek azonosságai, (generált) **altér** (példák), (triviális) **lineáris kombináció**, alterek metszete, **generátorrendszer**, **lineáris függetlenség** (kétféle definíció). Lin.ftn rendszer hízlalása, generátor-rendszer ritkítása, kicserélési lemma, **FG-egyenlőtlenség** és következménye.

-

13

ESÁ hatása a sor- és oszlopvektorokra, **oszlopvektorok lin.ftn-ségének eldöntése**. **Bázis** fogalm, **altér bázisának előállítása generátorrendszerből** ill. homogén lineáris egyenletrendszerrel megadott altér esetén.

•

14

Generátorrendszerből homogén lin.egyenletredszer előállítása. **Altér dimenziójának jóldefiniáltsága**, $\mathbb{R}^n$ **standard bázisa, bázishoz tartozó koordinátavektor kiszámítása**.

-

15

n elem permutációja, a permutáció **inverziószáma**. **Bástyaelhelyezés**, inverzióban álló bástyapárok, **determináns, felső háromszögmátrix determinánsa**.

-

16

Mátrix transzponáltja, transzponált determinánsa, **ESÁ hatása a determinánsra, előjeles aldetermináns, kifejtési téte**.

-

17

Vektorok skaláris szorzásának tulajdonságai. **Mátrixok összeadása és szorzásai**, e műveletek tulajdonságai. **A szorzatmátrix sorainak és oszlopainak <u>különös tulajdonsága</u>**, ESÁ és mátrixszorzás kapcsolata.

-

18

Lineáris leképezések és mátrixszorzások kapcsolata. **Lineáris leképezés mátrixának meghatározása.** Leképezések egymásutánjának mátrixa, mátrixszorzás asszociativitása.

-

19

Mátrix jobb- és balinverze, ezek viszonya. **Balinverz kiszámítása ESÁ-okkal** és előjeles aldeterminánsokkal, **reguláris mátrixok** jellemzése determinánssal, sorokkal, oszlopokkal ill. RLA mátrix segítségével.

-

20

Sor- oszlop- és determinánsrang, ezek viszonya és **kiszámítása**. Összeg és szorzat rangja. **Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja**, a megoldhatóság és az oszlopok alterének kapcsolata. Az egyértelmű megoldhatóság feltétele $n \times n$ együtthatómátrix esetén.

-