19. **Mátrix jobb- és balinverze**, ezek viszonya. **Balinverz kiszámítása ESÁ-okkal** és előjeles aldeterminánsokkal, **reguláris mátrixok** jellemzése determinánssal, sorokkal, oszkopokal ill. RLA mátrix segítségével.

1. Mátrix jobb- és balinverze

Láttuk, hogy egy mátrixra gondolhatunk úgy is, mint egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lin.lekép-re. Ha egy ilyen leképezés külcsönösen egyértelmű (mint pl. a síkban az origó körüli forgatás, vagy egy origóra illeszkedő egyenesre tükrözés, stb), akkor a leképezés „megfordítása" is lineáris leképezés, amit egy másik mátrix ír le. Ezt a két leképezést egymás után elvégezve minden vektor helyben marad, azaz a két leképezés egymásutánjának mátrixa egyfelől az egységmátrix, másfelől pedig a két leképezés mátrixának szorzata. Nem minden leképezésnek van ilyen megfordítása. A továbbiakban pontosan azt vizsgáljuk, hogy a mátrixok nyelvén hogyan írható le, hogy mikor van ilyen megfordítás, és konkrétan mi is az.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$. Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.

Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.

Biz: $A^B = A^B I_n = A^B(AA^J) = (A^B A)A^J = I_n A^J = A^J$. □

2. ezek viszonya

Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali. Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.

Megf: Ha A balról invertálható, akkor $A^B A = I_n$. Ezért I_n minden sora A sorainak lin.komb-ja, vagyis I_n minden sora benne van az A sorai által generált altérben. Mivel I_n sorai bázist alkotnak, ezért A sorainak is bázist kell alkotniuk, azaz A sorai lin.ftn-ek.

Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.

Biz: Mivel A sorai lineárisan függetlenek, ezért A sorai egy n-dimenziós alteret, konkrétan a teljes $\mathbb{R}^n$ teret generálják. Alakítsuk az A mátrixot ESÁ-ok segítségével RLA mátrixszá! Az így kapott A' mátrix n sora is a teljes $\mathbb{R}^n$ teret generálja. Ezért A' sorai lineárisan függetlenek, így A'-nek nem lehet csupa0 sora. Tehát $A' = I_n$.

Megf: (1) Minden ESÁ egy mátrixszal történő balszorzás.
(2) ESÁ-ok egymásutánja is egy mátrixszal történő balszorzás.
(3) Ha ESÁ-okkal A-ból I_n lesz, akkor A^B-vel szoroztunk balról.

Köv: Ha az $(A|I_n)$ mátrixból ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk, és A helyén megjelenik I_n, akkor I_n helyén A^B jelenik meg. Ha A helyén nem jelenik meg I_n, akkor A-nak nincs balinverze.

3. **Balinverz kiszámítása ESÁ-okkal**

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 3 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

A bal oldalon egységmátrixot kaptunk, ezért $A^B = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 17 & -8 \end{pmatrix}$

Ellenőrzés:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & & & & & & -1 & -8 & 4 \\ & & & & & & 1 & 6 & -3 \\ & & & & & & 2 & 17 & -8 \\ \hline & & & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -8 & 4 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 6 & -3 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 2 & 17 & -8 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}$$

győztünk, sőt: $A^B = A^J$.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 19 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

A bal oldali részben csupa0 sort kaptunk, tehát az A sorai által generált alteret két vektor generálja, így nem lehet benne három független vektor. Ezért A sorai nem generálhatják a standard bázis elemeit, vagyis I_n biztosan nem kapható meg A-ból balszorzással, azaz A-nak nincs balinverze.
Köv: Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix sorai lin.ftn-ek, akkor A-nak van balinverze, ha A sorai nem lin.ftn-ek, akkor A-nak nincs balinverze.

Ugyanez a transzponáltra a jobbinverz létezését karakterizálja:
Köv: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oszlopai lin.ftn-ek, akkor A-nak van jobbinverze, ha pedig A oszlopai nem lin.ftn-ek, akkor nincs.

---

4. és előjeles aldeterminánsokkal

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Biz: Legyen V az A sorai által generált altér, és A' az A-ból ESÁ-okkal kapható RLA mátrix (ami felső háromszögmátrix).
Mivel ESÁ nem változtat a sorok által generált altéren, ezért A' sorai is V-t generálják. Így (A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($\dim V = n$) $\iff$ (A' sorai lin.ftn-ek) $\iff$ (A'-nek nincs csupa0 sora) $\iff$ (A' minden sorában van v1) $\iff$ ($|A'| = 1$) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Az utolsó ekvivalencia azért igaz, mert ESÁ nem változtat a determináns 0 voltán. □

Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Biz: (A-nak van balinverze) $\iff$ (A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$) $\iff$ ($|A^\top| \neq 0$) $\iff$ ($A^\top$ sorai lin.ftn-ek) $\iff$ (A oszlopai lin.ftn-ek) $\iff$ (A-nak van jobbinverze) □

Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.
Biz: Az AB i-dik sorának j-dik eleme az A i-dik sorának és B j-dik oszlopának skaláris szorzata, azaz $a_{i,1}A_{j,1} + a_{i,2}A_{j,2} + \ldots + a_{i,n}A_{j,n}$, ahol $a_{i,k}$ az A mátrix i-dik sorának j-dik elemét jelenti. Ha $i = j$, akkor ez az összeg épp az A i-dik sor szerinti kifejtése, vagyis $|A|$. Ha $i \neq j$, akkor ez az összeg egy ú.n. ferde kifejtés: annak az A' mátrixnak az i-dik sor szerinti kifejtése, amit A-ból úgy kapunk, hogy az i-dik sor helyére a j-diket írjuk. Mivel A' két sora egyforma, ezért $|A'| = 0$. □

j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.

Köv: A fenti tétel jelöléseivel: ha $|A| \neq 0$, akkor $A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$.
Biz: $A \cdot \left(\frac{1}{|A|}B\right) = \frac{1}{|A|}(AB) = \frac{1}{|A|}(|A|I_n) = I_n \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$ □

Köv: Négyzetes mátrix inverzének kiszámítására két módszerünk is van: vagy egy $n \times 2n$ méretű mátrixból RLA mátrixot készítünk ESÁ-okkal, vagy kiszámítjuk $|A|$-t és az összes előjeles aldeterminánst.

5. **reguláris mátrixok jellemzése determinánssal**

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix reguláris (avagy invertálható), ha A-nak van inverze, és szinguláris ha nincs.
Köv: Tfh A négyzetes mátrix. Ekkor (A reguláris) $\iff$ ($|A| \neq 0$) $\iff$ (A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ (A oszlopai lin.ftn-ek) $\iff$ (az A-ból kapott RLA mátrix minden sorában van v1)

Láttuk, hogy egy négyzetes mátrixnak vagy a sorai is és az oszlopai is lin.ftn-ek, vagy se a sorai, se az oszlopai nem azok. Lehet-e általánosítani ezt a megfigyelést nem négyzetes mátrixokra?

Ebben a formában nem.

Ha mondjuk $n < k$ és egy $n \times k$ méretű mátrix sorai függetlenek, akkor az oszlopok n magasságú vektorok, tehát legfeljebb n lehet közülük független, k semmiképp.

Van azonban egy jól használható általánosítása a fenti ténynek. Megmutatjuk, hogy ha egy M mátrixnak van k lin.ftn sora, akkor van k lin.ftn oszlopa is, és viszont.

Ebből következik pl. a négyzetes mátrixok fenti tulajdonsága is.

6. sorokkal ,oszlopokkal, RLA mátrix segítségével
   ?