0.1 Síkbarajzolhatóság

Def: Síkbarajzolt (SRt) gráf alatt olyan gráfdiagramot értünk, amiven az élek nem keresztezik egymást.

A G gráf síkbarajzolható (SRható), ha van SRt diagramja.

Síkbarajzolt gráf tartománya (lapja): a diagram komplementerének összefüggő tartománya. A nem korlátos rész neve külső tartomány.

Megj: (1) A fentieket nem csak egyszerű gráfokra definiáltuk. (2) A SRt gráf nem csupán egy gráf, hanem egy **konkrét** diagram. (3) Ugyanannak a SRható gráfnak nagyon sok lényegesen különböző síkbarajzolt diagramja (lerajzolása) lehet. (4) A görbe (tóruszra) rajzolhatóság hasonlóan definiálható.

Állítás: (A G gráf SRható) $\iff$ (G gömbre rajzolható)

Biz: A sztereografikus projekcióban az északi-sarkból történő vetítés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a sík pontjai és a síkot a déli-sarkon érintő gömbfelszín pontjai (mínusz északi-sark) között. A síkbarajzolt diagram vetülete gömbre rajzolt lesz ($\Rightarrow$ ✓), és az $\acute{E}$-t nem tartalmazó gömbre rajzolt diagram pedig síkbarajzolttá válik. A $\Leftarrow$ irány igazolásához csupán annyi kell, hogy úgy rajzoljuk G-t a gömbre, hogy az $\acute{E}$-n ne menjen át él. □

Köv: SRt gráf külső tartománynak nincs kitüntetett szerepe.

Biz: Bármely lerajzolás "kifordítható": a diagram átrajzolható úgy, hogy a kiválasztott tartomány legyen a külső tartomány.

1. Vetítsük fel a diagramot a gömbre.
2. Állítsuk az $\acute{E}$-t a kiválasztott tartománynak megfelelő gömbi tartomány belsejébe.
3. Vetítsük vissza a gömbre rajzolt gráfot a síkra. □

Köv: Bármely konvex poliéder élhálója SRható gráf.

Biz: A kx poliéder belső pontjából az élháló kivetíthető egy, a poliédert tartalmazó gömbre. Így az élhálóból göbmre rajzolt gráf lesz. Láttuk, hogy minden gömbre rajzolható gráf SRható. □

Megj: A kx poliéder élgráfjának tartományai a poliéder lapjainak felelnek meg.

Terminológia: SRt G gráf esetén n, e, t ill. k jelöli rendre a G csúcsai, élei, tartományai és komponensei számát.

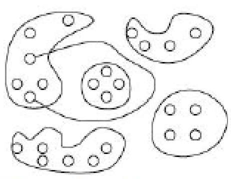
Duális kézfogáslemma (DKFL): Ha G SRt gráf, akkor $\sum_{i=1}^{t} l_i = 2e$ ahol l_i az i-dik lapot határoló élek számát jelöli.

Biz: Minden él vagy két különböző lapot határol, vagy ugyanazt a lapot 2-szer. Így minden él 2-vel járul a BO-hoz és a JO-hoz is. □

Megj: A DKFL akkor hasznos, ha a SRt gráf lapjairól, a KFL pedig akkor, ha a fokszámokról van információnk.

Fáry-Wagner-tétel: Ha G egyerű SRható gráf, akkor olyan síkbarajzolása is van, amiben minden él egyenes szakasz.

0.2 Az Ezler-féle poliéderformula, síkgráfok karakterizációja



Tétel: Ha G SRt gráf, akkor $n + t = e + k + 1$.

Biz: Rajzoljuk meg G-t az n csúcsból kiindulva, az élek egyenkénti behúzásával. Kezdetben $t = 1, e = 0$ és $k = n$, így a bizonyítandó összefüggés fennáll. Tegyük fel, hogy már néhány élt berajzoltunk, még mindig fennáll az összefüggés, és egy éppen az uv élt rajzolunk meg.

$\boxed{1.}$ u és v különböző komponenshez tartoznak. Ekkor k értéke 1-gyel csökken, e-é pedig 1-gyel nő. Az ÉHL miatt nem keletkezik kör, tehát nem zárunk körül új tartományt, vagyis t nem változik. Az összefüggés fennmarad.

$\boxed{2.}$ u és v ugyanahhoz a komponenshez tartoznak. Ekkor k nem változik, e viszont 1-gyel nő. Az ÉHL miatt keletkezik kör, tehát kettévágjuk az uv élt tartalmazó korábbi tartományt. Ezért t is 1-gyel nő, az összefüggés ismét fennmarad. $\square$

Köv: **(1)** Ha G SRható, akkor t nem függ a síkbarajzolástól.

Biz: $t = e + k + 1 - n$, és a JO nem függ a síkbarajzolástól. $\square$

(2) (**Euler-formula**) Ha G összefüggő SRt gráf, akkor $n + t = e + 2$

Biz: Mivel G összefüggő, ezért a fenti Tételben $k = 1$. $\square$

(3) Ha G egyszerű, SRható és $n \geq 3$, akkor $e \leq 3n - 6$.

Biz: Ilyenkor G minden lapját legalább 3 él határolja, így a DKFL miatt $2e = \sum_{i=1}^{t} l_i \geq 3t$. A Tétel alapján $3n + 2e \geq 3n + 3t = 3e + 3k \geq 3e + 3 + 3 = 3e + 6$, amit rendezve $e \leq 3n - 6$ adódik. $\square$

(4) G egyszerű, SRható, C_3-mentes és $n \geq 3 \Rightarrow e \leq 2n - 4$.

Biz: Ilyenkor G minden lapját legalább 4 él határolja. A DKFL miatt $2e = \sum_{i=1}^{t} l_i \geq 4t$, így $e \geq 2t$. A Tétel miatt $2n + e \geq 2n + 2t = 2e + 2k + 2 \geq 2e + 2 + 2 = 2e + 4$ Ezt rendezve $e \leq 2n - 4$ adódik. $\square$

(5) Ha G egyszerű, SRható, akkor $\delta(G) \ \leq 5$ (azaz $\exists v : d(v) \leq 5$).

Biz: A KFL és **(3)** miatt $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e \leq 6n - 12$. Ezért van olyan csúcs, amire $d(v) \leq \frac{6n-12}{n} < 6$. $\square$

(6) A K_5 és $K_{3,3}$ gráfok egyike sem SRható.

Biz: A K_5 gráf egyszerű, de nem teljesül **(3)**, hiszen $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10 \nleq 9 = 3 \cdot 5 - 6$. Ezért K_5 nem SRható. A $K_{3,3}$ gráf egyszerű és C_3-mentes, de nem teljesül rá **(4)**, u.i. $|E(K_{3,3})| = 9 \nleq 8 = 2 \cdot 6 - 4$. Ezért $K_{3,3}$ nem SRható. $\square$

Megj: Könnyen látható, hogy ha G SRható, akkor $G + e$ tóruszra rajzolható bármely e él behúzása esetén. Nem nehéz látni, hogy K_6 is tóruszra rajzolható. Sőt: még K_7 is az, de K_8 már nem.

Def: Élfelosztás: az élre egy új, másodfokú csúcs ültetése. Élösszehúzás: az él törlése és két végpontjának azonosítása. Topologikus G (soros bővítés): G-ből élfelosztásokkal képzett gráf.

Megf: Az éltörlés, csúcstörlés, élfelosztás, élösszehúzás operációk mindegyike megőrzi a gráf SRható tulajdonságát.

Köv: (1) Top. K_5 top. $K_{3,3}$ nem SRható. (2) Ha G SRható, akkor G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja.

Kuratowski tétele: (G SRható) $\iff$ (G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja) **Példa:** Petersen-gráf

0.3 Síkgráfok duálisa

Def: A G SRt gráf duálisa a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A SRt G gráf G^* duálisa SRható. (n^*, e^*, t^*, k^*) (2) $n^* = t, e^* = e, k^* = 1$. (3) Ha v az i-dik laphoz tartozó duális csőcs, akkor $d_{G^*}(v) = l_i$.

Köv: KFL a duálisra $\sum_{i=1}^{t} l_i = \sum_{v \ \in V(G^*)} d_{G^*}(v) = 2e^* = 2e$.

Def: A $Q \subseteq E(G)$ élhalmaz a G gráf vágása, ha $G - Q$ szétesik (több komponense van, mint G-nek), de $Q' \subsetneq Q$ esetén $G - Q'$ nem esik szét. Elvágó él: egyélű vágás. Soros élek: kétélű vágás.

Kör-vágás dualitása: Tegyük fel, hogy G^* a G SRt gráf duálisa. Ekkor (C a G köre) $\iff$ (C^* a G^* vágása) ill. (Q a G vágása) $\iff$ (Q^* a G^* köre).

Köv: Hurokél duálisa elvágó él, soros élpáré párhuzamos élpár.

0.4 Whitney

Whitney tétele: Tegyük fel, hogy G^* a G SRt gráf duálisa. Ekkor H pontosan akkor duálisa a G egy alkalmas síkbarajzolásának, ha H előáll G^*-ból a fenti Whitney-operációk alkalmas egymásutánjával.

Def: A $\varphi : E(G) \to E(H)$ kölcsönös egyenértékű leképezés kör-vágás dualitás G és H között, ha C pontosan akkor G köre, ha $\varphi(C) H$ vágása.

Whitney másik tétele: Tegyük fel, hogy G és H között kör-vágás dualitás van. Ekkor G SRható, és H a G egy alkalmas síkbarajzolásának duálisa.

Megj: Egy G gráf által leírt villamos hálózat viselkedését az Ohm-él Kirchhoff-törvények írják le. Ezek a G gráf éleire, köreire és vágásaira vonatkoznak. Ha G és H közt kör-vágás dualitás van, akkor H-n elkészíthető az előző hálózat duálisa. Az eredeti hálózat megoldásában ha az I és U értékeket felcseréljük, az utóbbi hálózat megoldását kapjuk. Whitney másik tétele miatt ez a különös szimmetria csak SRható gráfok által leírt hálózatokon lehetséges.