Gráfok síkba ill. gömbre rajzolhatósága, tartomány, sztereografikus projekció, következményei. Az **Euler-féle poliédertétel**, duális kézfogáslemma és következményei: felső korlátok az élszámra és a minimális fokszáma egyszerű, síkbarajzolható gráfokon.

- **Síkbarajzolhatóság**

Def: Síkbarajzolt (síkbarajzolt) gráf alatt olyan gráfdiagramot értünk, amiven az élek nem keresztezik egymást.

A G gráf síkbarajzolható (síkbarajzolható), ha van síkbarajzolt diagramja.

Síkbarajzolt gráf tartománya (lapja): a diagram komplementerének összefüggő tartománya. A nem korlátos rész neve külső tartomány.

Megj:

(1) A fentieket nem csak egyszerű gráfokra definiáltuk.
(2) A síkbarajzolt gráf nem csupán egy gráf, hanem egy **konkrét** diagram.
(3) Ugyanannak a síkbarajzolható gráfnak nagyon sok lényegesen különböző síkbarajzolt diagramja (lerajzolása) lehet.
(4) A görbe (tóruszra) rajzolhatóság hasonlóan definiálható.

Állítás: (A G gráf síkbarajzolható) $\Longleftrightarrow$ (G gömbre rajzolható)

Biz: A sztereografikus projekcióban az északi-sarkból történő vetítés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a sík pontjai és a síkot a déli-sarkon érintő gömbfelszín pontjai (mínusz északi-sark) között. A síkbarajzolt diagram vetülete gömbre rajzolt lesz ($\Rightarrow$ ✓), és az $É$-t nem tartalmazó gömbre rajzolt diagram pedig síkbarajzolttá válik. A $\Leftarrow$ irány igazolásához csupán annyi kell, hogy úgy rajzoljuk G-t a gömbre, hogy az $É$-n ne menjen át él.

Köv: síkbarajzolt gráf külső tartománynak nincs kitüntetett szerepe.

Biz: Bármely lerajzolás "kifordítható": a diagram átrajzolható úgy, hogy a kiválasztott tartomány legyen a külső tartomány.

1. Vetítsük fel a diagramot a gömbre.
2. Állítsuk az $É$-t a kiválasztott tartománynak megfelelő gömbi tartomány belsejébe.
3. Vetítsük vissza a gömbre rajzolt gráfot a síkra.

Köv: Bármely konvex poliéder élhálója síkbarajzolható gráf.

Biz: A kx poliéder belső pontjából az élháló kivetíthető egy, a poliédert tartalmazó gömbre. Így az élhálóból gömbre rajzolt gráf lesz. Láttuk, hogy minden gömbre rajzolható gráf síkbarajzolható.

Megj: A kx poliéder élgráfjának tartományai a poliéder lapjainak felelnek meg.

Terminológia: síkbarajzolt G gráf esetén n, e, t ill. k jelöli rendre a G csúcsai, élei, tartományai és komponensei számát.

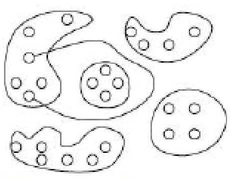
Duális kézfogáslemma (DKFL): Ha G síkbarajzolt gráf, akkor $\sum_{i=1}^{t} l_i = 2e$ ahol l_i az i-dik lapot határoló élek számát jelöli.

Biz: Minden él vagy két különböző lapot határol, vagy ugyanazt a lapot 2-szer. Így minden él 2-vel járul a BO-hoz és a JO-hoz is.

Megj: A DKFL akkor hasznos, ha a síkbarajzolt gráf lapjairól, a KFL pedig akkor, ha a fokszámokról van információnk.

Fáry-Wagner-tétel: Ha G egyszerű síkbarajzolható gráf, akkor olyan síkbarajzolása is van, amiben minden él egyenes szakasz.

- **Az Euler-féle poliéderformula, síkgráfok karakterizációja**



Tétel: Ha G síkbarajzolt gráf, akkor $n + t = e + k + 1$.

Biz: Rajzoljuk meg G-t az n csúcsból kiindulva, az élek egyenkénti behúzásával. Kezdetben $t = 1, e = 0$ és $k = n$, így a bizonyítandó összefüggés fennáll. Tegyük fel, hogy már néhány élt berajzoltunk, még mindig fennáll az összefüggés, és egy éppen az uv élt rajzolunk meg.

$\boxed{1.}$ u és v különböző komponenshez tartoznak. Ekkor k értéke 1-gyel csökken, e-é pedig 1-gyel nő. Az ÉHL miatt nem keletkezik kör, tehát nem zárunk körül új tartományt, vagyis t nem változik. Az összefüggés fennmarad.

$\boxed{2.}$ u és v ugyanahhoz a komponenshez tartoznak. Ekkor k nem változik, e viszont 1-gyel nő. Az ÉHL miatt keletkezik kör, tehát kettévágjuk az uv élt tartalmazó korábbi tartományt. Ezért t is 1-gyel nő, az összefüggés ismét fennmarad.

Köv: **(1)** Ha G síkbarajzolható, akkor t nem függ a síkbarajzolástól.

Biz: $t = e + k + 1 - n$, és a JO nem függ a síkbarajzolástól.

(2) (**Euler-formula**) Ha G összefüggő síkbarajzolt gráf, akkor $n + t = e + 2$

Biz: Mivel G összefüggő, ezért a fenti Tételben $k = 1$.

(3) Ha G egyszerű, síkbarajzolható és $n \geq 3$, akkor $e \leq 3n - 6$.

Biz: Ilyenkor G minden lapját legalább 3 él határolja, így a DKFL miatt $2e = \sum_{i=1}^{t} l_i \geq 3t$. A Tétel alapján $3n + 2e \geq 3n + 3t = 3e + 3k \geq 3e + 3 + 3 = 3e + 6$, amit rendezve $e \leq 3n - 6$ adódik.

(4) G egyszerű, síkbarajzolható, C_3-mentes és $n \geq 3 \Rightarrow e \leq 2n - 4$.

Biz: Ilyenkor G minden lapját legalább 4 él határolja. A DKFL miatt $2e = \sum_{i=1}^{t} l_i \geq 4t$, így $e \geq 2t$. A Tétel miatt $2n + e \geq 2n + 2t = 2e + 2k + 2 \geq 2e + 2 + 2 = 2e + 4$ Ezt rendezve $e \leq 2n - 4$ adódik.

(5) Ha G egyszerű, síkbarajzolható, akkor $\delta(G) \ \leq 5$ (azaz $\exists v : d(v) \leq 5$).

Biz: A KFL és **(3)** miatt $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e \leq 6n - 12$. Ezért van olyan csúcs, amire $d(v) \leq \frac{6n-12}{n} < 6$.

(6) A K_5 és $K_{3,3}$ gráfok egyike sem síkbarajzolható.

Biz: A K_5 gráf egyszerű, de nem teljesül **(3)**, hiszen $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10 \not\leq 9 = 3 \cdot 5 - 6$. Ezért K_5 nem síkbarajzolható. A $K_{3,3}$ gráf egyszerű és C_3-mentes, de nem teljesül rá **(4)**, u.i. $|E(K_{3,3})| = 9 \not\leq 8 = 2 \cdot 6 - 4$. Ezért $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható.

Megj: Könnyen látható, hogy ha G síkbarajzolható, akkor $G + e$ tóruszra rajzolható bármely e él behúzása esetén. Nem nehéz látni, hogy K_6 is tóruszra rajzolható. Sőt: még K_7 is az, de K_8 már nem.

Def: Élfelosztás: az élre egy új, másodfokú csúcs ültetése. Élösszehúzás: az él törlése és két végpontjának azonosítása. Topologikus G (soros bővítés): G-ből élfelosztásokkal képzett gráf.

Megf: Az éltörlés, csúcstörlés, élfelosztás, élösszehúzás operációk mindegyike megőrzi a gráf síkbarajzolható tulajdonságát.

Köv: (1) Top. K_5 top. $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható. (2) Ha G síkbarajzolható, akkor G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja.

Kuratowski tétele: (G síkbarajzolható) $\Longleftrightarrow$ (G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja)

Példa: Petersen-gráf