

# A számítástudomány alapjai

KIDOLGOZOTT SZÓBELI TÉTELSOR

*Készítette: Illyés Dávid*

A jegyzetben a "A számítástudomány alapjai" nevű tárgy 2023/24/1 félévében kiadott szóbeli tételsor van (többé-kevésbé) kidolgozva. (Jelenleg inkább csak össze gyűjtögetve, de finomítva még nincs.) **Minden a jegyzetben található információ (beleértve az ábrákat) a BME tulajdonát képezik és az eredeti előadás diákból, ill. azok alapján van megírva. Nem hivatalos BME által kiadott dokumentum!**

# Tartalomjegyzék

	Oldal
1 Tétel	4
2 Tétel	6
3 Tétel	7
4 Tétel	9
5 Tétel	11
6 Tétel	14
7 Tétel	16
8 Tétel	17
9 Tétel	21
10 Tétel	23

## Tételek:

A félkövéren szedett dolgokat tudni kell ismertetni, kimondani, ill. definiálni. Az aláhúzottakat bizonyítottuk, a dőlten szedettteket nem. A vizsgán az anyag értő ismeretét kérjük számon, elégségesért nem kell bizonyítást tudni.

- Gráfelméleti alapfogalmak: **csúcs, él, diagram, foksám**. Egyszerű gráf, irányított gráf, véges gráf, komplementer gráf, reguláris gráf, él/csúcstörítés, élhozzáadás, (feszítő/feszített) részgráf, izomorfia, élsorozat, séta, út, kör, **összefüggő gráf**, komponens. **kézfogás-lemma**.
- Élhozzáadási lemma** erdő, fa, fák egyszerűbb tulajdonságai: két levél, erdők élszáma. **Feszítőfa létezése**, feszítőfához tartozó alapkörök és alap vágások.
- Minimális költségű feszítőfa**, mkkfák struktúrája, **Kruskal-algoritmus helyessége**, villamos hálózathoz tartozó normál fa keresése.
- Általános gráfbejárás: **a csúcsok állapotváltozása, a bejárás általános lépése**, a bejáráshoz tartozó sorrender ill. az élek osztályozása bejárás után. A **BFS** és tulajdonságai, legrovidebb utak fájának létezése.
- Gráfút hossza, gráfcsúcsok távolsága, nemnegatív és konzervatív hosszfüggvény, triviális és pontos  $(r, l)$ -**felső becslés, élementi javítás**. **Dijkstra-algoritmus működése**, Ford-algoritmus helyessége és lépésszáma. Legrovidebb utak fájának létezése.
- Mélységi keresés** és alkalmazásai (fellépő éltípusok, mélységi- és befejezési számozásból az éltípus meghatározása, irányított kör létezésének eldöntése DFS-sel).
- DAG**, jellemzése, **topologikus sorrend keresése**. Leghosszabb utak keresése, **PERT-módszer**, kritikus utak és tevékenységek.
- Euler-séta és körséta** létezésének szükséges és elégséges feltétele. **Hamilton-kör és út** létezésére szükséges, ill. elégséges feltételek: komponensszám ponttörlesztés után (Petersen-gráf) **Dirac, Ore tételei**, gazdag párok, hízlalási lemma, Chavátal-lezárt.
- Gráfok síkba ill. gömbre rajzolhatósága, tartomány, sztereografikus projekció**, következményei. Az **Euler-féle poliédertétel**, duális kézfogáslemma és következményei: felső korlátok az élszáma és a minimális foksáma egyszerű, síkbarajzolható gráfokon.
- Kuratowski gráfok síkbarajzolhatósága, soros bővítés, Kuratowski-tétel könnyű iránya**. **Síkbarajzolt gráf duálisa**, a duális paraméterei. Vágás, elvágó él, soros élék. *Kör-vágás dualitása*, különféle élék duálisai. Whitney két tétele, Whitney operációk.
- Lineáris egyenletrendszer, kibővített együtthatómátrix, elemi sorokvivalens átalakítás és kapcsolata a megoldásokkal**. **LA és RLA mátrix, vezéregyes, megoldás leolvasása RLA mátrix esetén**. Tilos sor, kötött változó, szabad paraméter, ezek jelentése a megoldás/megoldhatóság szempontjából. **Gauss-elimináció, összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az egyenletek és ismeretlenek száma között**.
- Az  $\mathbb{R}^n$  tér, vektorműveletek azonosságai, (generált) **altér** (példák), (triviális) **lineáris kombináció**, alterek metszete, **generátorrendszer, lineáris függetlenség** (kétféle definíció). Lin.ftn rendszer hízlalása, generátor-rendszer ritkítása, kicserélési lemma, **FG-egyenlőtlenség** és következménye.
- ESÁ hatása a sor- és oszlopvektorokra, **oszlopvektorok lin.ftn-ségének eldöntése**. **Bázis fogalm, altér bázisának előállítás generátorrendszerből** ill. homogén lineáris egyenletrendszerrel megadott altér esetén.
- Generátorrendszerből homogén lin.egyenletrendszer előállítása. **Altér dimenziójának jóldefiniáltsága**,  $\mathbb{R}^n$  **standard bázisa**, bázishoz tartozó koordinátavektor kiszámítása.
- $n$  elem permutációja, a permutáció **inverziószáma**. **Bástyaelhelyezés**, inverzióban álló bástyapárok, **determináns, felső háromszögmátrix determinánsa**.
- Mátrix transzponáltja**, transzponált determinánsa, **ESÁ hatása a determinánssra**, **előjeles aldetemináns, kifejtési téte**.
- Vektorok skaláris szorzásának tulajdonságai. **Mátrixok összeadása és szorzásai**, e műveletek tulajdonságai. **A szorzatmátrix sorainak és oszlopainak különös tulajdonsága**, ESÁ és mátrixszorzás kapcsolata.

18. **Lineáris leképezések és mátrixszorzások kapcsolata. Lineáris leképezés mátrixának meghatározása.** Leképezések egymásutánjának mátrixa, mátrixszorzás asszociativitása.
19. **Mátrix jobb- és balinverze, ezek viszonya. Balinverz kiszámítása ESÁ-okkal** és előjeles aldeterminánsokkal, **reguláris mátrixok** jellemzése determinánssal, sorokkal, oszlopokkal ill. RLA mátrix segítségével.
20. **Sor- oszlop- és determinánsrang, ezek viszonya és kiszámítása. Összeg és szorzat rangja. Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja, a megoldhatóság és az oszlopok alterének kapcsolata.** Az egyértelmű megoldhatóság feltétele  $n \times n$  együtthatómátrix esetén.

# 1 Tétel

Gráfelméleti alapfogalmak: **csúcs, él, diagram, foksám.** Egyszerű gráf, irányított gráf, véges gráf, komplementer gráf, reguláris gráf, él/csúcsstörés, élhozzáadás, (feszítő/feszített) részgráf, izomorfia, élsorozat, séta, út, kör, **összefüggő gráf**, komponens. kézfogás-lemma.

Gráfelméleti alapfogalmak:

- **csúcs, élek:**

- $G=(V,E)$  egyszerű irányítatlan gráf ha  $V \neq \emptyset$  és  $E \leq \binom{V}{2}$ , ahol  $\binom{V}{2} = \{\{u,v\} : u,v \in V, u \neq v\}$
- $V$  a  $G$  csúcsainak ((szög) pontjainak) halmaza.
- $E$  pedig  $G$  éleinek halmaza.

- **Diagram:** A  $G = (V, E)$  gráf **diagramja** egy olyan lerajzolása, melyben a csúcsoknak (síkbeli) pontok felelnek meg, éleknek pedig a két végpontot összekötő, önmagukat nem metsző görbék.

- **Foksám:**

- $v \in V(G)$  esetén a  $v$ -re illeszkedő élék száma a  $v$  foksáma.
- A  $G$  gráf csúcsának  $d(v)$  foka a vé végpontú élék száma (hurokél kétszer számít).

- Egyszerű gráf: ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei.

- Irányított gráf: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

- Véges gráf:  $G = (V, E)$  **véges gráf**, ha  $V$  és  $E$  is véges halmazok.

- Komplementer gráf:

- A  $G$  **egyszerű** gráf **komplementere**  $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E(G))$ .
- Két csúcs pontosan akkor szomszédos  $G$ -ben, ha a foksámai megegyeznek vagy, ha minden csúcsának foka ugyan annyi.

- Reguláris gráf:  $k$ -reguláris, ha minden csúcsának pontosan  $k$  a foksáma.

- Él/Csúcsstörés: Ha  $G = (V, E)$  gráf  $e \in E$  és  $v \in E$  akkor  $G - e = (V, E \setminus \{e\})$  az éltörés eredménye  $\rightarrow$  **Feszítő részgráf** (éltöréssel kapható gráf), a csúcsstöréssel keletkező  $G - v$  gráfhoz  $V$ -ből töröljük  $v$ -t,  $E$ -ből pedig a  $v$ -re illeszkedő éleket. **Feszített részgráf:** (csúcsstörésekkel kapható gráf)  $\Rightarrow$  **Részgráf:** él- és csúcsstörésekkel kapható gráf. (jelzőnélküli részgráf)  $\rightarrow$  élhozzáadás:  $G(V, E)$  gráfban az  $E + 1$  nő.

- Izomorfia: A  $G$  és  $G'$  gráfok akkor **izomorfak**, ha mindeket gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től  $n$ -ig terjedő egész számokkal (alkalmas  $n$  esetén), hogy  $G$  bármely két  $u, v$  csúcsa között pontosan annyi él fut  $G$ -ben, mint az  $u$ -nak és  $v$ -nek megfelelő sorszámú csúcsok között  $G'$ -ben. Jelölése:  $G \cong G'$ .

- Élsorozat:  $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$ , ahol  $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$ . (Tulajdonképp egyik csúcsból eljutunk egy másik csúcsba mindig élék mentén haladva.)

- Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

- Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

- Kör:  $u = v$ , de a kezdő (és vég)pontot nem akarjuk megnevezni, akkor **zárt élsorozatról**, **körsétáról** ill. **kör**ről beszélünk.

- **Összefüggő gráf:**

- A  $G$  irányítatlan gráf **összefüggő**, ha  $u \sim v \forall u, v \in V(G)$  (ha bármely két pontja között vezet séta), ha bármely két csúcsa között vezet út  $G$ -ben (ha egy komponense van).
- A  $G$  irányított gráfot akkor mondjuk **erősen összefüggő**nek, ha  $G$  bármely  $u, v \in V(G)$  esetén van **irányított**  $uv$ -út  $G$ -ben.
- **gyengén összefüggő**, ha a  $G$ -nek megfelelő irányítatlan gráf összefüggő.

- **Komponens:**

- (1)  $K \subseteq V(G)$  pontosan akkor komponense  $G$ -nek, ha  $K$ -ből nem lép ki éle  $G$ -nek, de  $\forall v, v' \in$  esetén  $v \sim v'$ .

- (2) Minden  $G$  irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel  $G$  komponenseinek diszjunkt uniójára.
- A  $G$  komponense alatt sokszor nem csupán a  $G$  csúcsainak egy  $K$  részhalmazát, hanem a  $K$  által feszített részgráfot értjük.
  - $K \leq V(G)$  a  $G$  gráf komponense, ha bármely  $u, v \in K$  között létezik  $G$  séta, de nem létezik  $uv$ -séta, ha  $u \in K, v \in V(G) \setminus K$ . (Minden gráf egyértelműen bontható komponensekre)
- **Kézfogás-lemma:** Ha  $G = (V, E)$  véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ , azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.
- A KFL bizonyítása:** Készítsük a  $G'$  digráfot úgy, hogy  $G$  minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítsük. Ekkor  $\sum_{v \in V} d_G(V) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)|$
- Megj:** Úgy is bizonyíthattuk volna a kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be  $G$ -be az éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-vel növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszámösszeget is.
- **Általánosított kézfogás-lemma:** Tetsz.  $G = (V, E)$  véges irányított gráfra  $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$ , azaz a csúcsok ki- és befokainak összege is az élszámot adja meg. **Megj:** Úgy is bizonyíthattuk volna az általánosított kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be  $G$ -be az éleket. 0-elű (üres)gráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 1-gyel növeli az élszámot is és a ki/befokok összegét is.

## 2 Tétel

**Élhozzáadási lemma** erdő, **fa**, fák egyszerűbb tulajdonságai: két levél, erdők élszáma. **Feszítőfa** létezése, feszítőfához tartozó alapkörök és alap vágások.

- **Élhozzáadási lemma (ÉHL):** Legyen  $G$  irányítatlan gráf és  $G' = G + e$ . Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.
  - (1)  $G$  és  $G'$  komponensei megegyeznek, de  $G'$ -nek több köre van, mint  $G$ -nek.
  - (2)  $G$  és  $G'$  körei megegyeznek, de  $G'$ -nek eggyel kevesebb komponense van, mint  $G$ -nek.
- Erdő: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.
- **Fa:** Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.
  - $G$  erdő  $\iff G$  minden komponense fa.
  - $G$   $n$ -csúcsú,  $k$ -komponensű erdő  $\Rightarrow |E(G)| = n - k$ .
  - **Biz:** Építsük fel  $G$ -t a  $\overline{K_n}$  üresgráfból az élek egyenkénti behúzásával.  $G$  körmentes, ezért az ÉHL miatt minden lé zöld: behúzásakor 1-gyel csökken a komponensek száma. A  $\overline{K_n}$  üresgráfnak  $n$  komponense van,  $G$ -nek pedig  $k$ . Ezért pontosan  $n - k$  zöld élt kellett behúzni  $G$  felépítéséhez.
- **Két levél:** Legyen  $F$  egy tetszőleges fa  $n$  csúcson. Ekkor ha  $n \geq 2$ , akkor  $F$ -nek legalább két levele van.
  - **Biz::** (Algebrai út) A KFL miatt  $\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 2n = 2(n - 1) - 2n = -2$ .  $F$  minden  $v$  csúcsára  $d(v) \geq 1$  teljesül, ezért  $d(v) - 2 \geq -1$ . A fenti összeg csak úgy lehet  $-2$ , ha  $F$ -nek legalább 2 levele van.
  - **Biz::** (Kombinatorikus út) Induljunk el  $F$  egy tetszőleges  $v$  csúcsából egy sétán, és haladjunk, amíg tununk. Ha sosem akadunk el, akkor előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, és kört találunk. Ezért elakadunk, és az csakis egy  $v$ -től különböző  $u$  levélben történhet. Ha  $d(v) = 1$ , akkor  $v$  egy  $u$ -tól különböző levél. Ha  $d(v) \geq 2$ , akkor sétát indulhatjuk  $v$ -ből egy másik él mentén. Ekkor egy  $u$ -tól különböző levélben akadunk el.
- **Feszítőfa:**  $F$  a  $G$  gráf feszítőfája (ffa), ha  $F$  egy  $G$ -ből éltörésekkel kapható fa. Ha  $G$ -nek van feszítőfája  $\iff$  összefüggő.
- Alapvágás, alapkör: A  $G$  gráf  $F$  feszítőfájának  $f$  éléhez tartozó **alap vágást**  $G$  azon élei alkotják, amik az  $F - f$  két komponense között futnak. Az  $e \in E(G) \setminus E(F)$  éléhez tartozó **alapkör** pedig az  $F + e$  köre.
 

**Megf:** Tfh  $f \in F$  és  $e \in E(G) \setminus E(F)$ . Ekkor  $(F - f + e \text{ ffa}) \iff (f \text{ benne van } e \text{ alapkörében}) \iff (e \text{ benne van } f \text{ alap vágásában})$ .

### 3 Tétel

**Minimális költségű feszítőfa**, mkkfák struktúrája, **Kruskal-algoritmus** helyessége, villamos hálózathoz tartozó normál fa keresése.

- **Minimális költségű feszítőfa:** Adott a  $G = (V, E)$  irányítatlan gráf élein a  $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  költségfüggvény. Az  $F \subseteq E$  élhalmaz **költsége** az  $F$ -beli élek összköltsége:  $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$ . Az  $F \subseteq E$  élhalmaz  $G$ -ben **minimális költségű feszítőfa** (mkkfa), ha

- (1)  $(V, F)$  a  $G$  feszítőfája, és
- (2)  $k(F) \leq k(F')$  teljesül a  $G$  bármely  $(V, F')$  feszítőfájára.

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes.} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

- **Minimális költségű feszítőfa:** olyan  $F \subseteq E$  élhalmaz, amire  $(V, F)$  fa, és  $k(F)$  minimális.
- Mkkfák struktúrája:  $G = (V, E)$  gráf és  $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  költségfüggvény esetén legyen  $G_c$  a legfeljebb  $c$  költségű élek alkotta feszítő részgráfja  $G$ -nak:  $G_c = (V, E_c)$ , ahol  $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$ .

**Megf:** A  $G$  gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza  $G_c$  egy feszítő erdejét minden  $c \geq 0$  esetén.

**Lemma:** Tfh  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_l\}$ ,  $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_l)$  és  $F \cap E_c$  a  $G_c$  egy feszítő erdeje  $\forall c \geq 0$ -ra. Tfh  $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_l\}$  a  $G$  egy feszítő erdejének élei, és  $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_l)$ . Ekkor  $k(f_i) \leq k(f'_i)$  teljesül  $\forall 1 \leq i \leq l$  esetén, így  $k(F) \leq k(F')$ .

**Köv:** (1) A Kruskal-algoritmus outputja a  $G$  gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

**Köv:** (2) Az  $F'$  élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje  $G$ -nek, ha  $F' \cap E_c$  a  $G_c$  egy feszítő erdeje minden  $c \leq 0$ -ra.

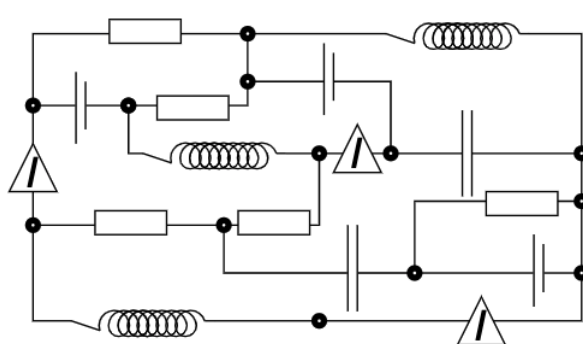
**Biz:** A Lemma bizonyítja az elégtélességet.

- **Kruskal-algoritmus:** Input:  $G = (V, E)$  és  $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  költségfüggvény. Output:  $F \subseteq E$  Működés: Tfh  $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \dots \leq k(e_m)$ , ahol  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Legyen  $F_0 = \emptyset$ , és  $i = 1, 2, \dots, m$ -re

- **Kruskal algoritmus:**

- Input:  $G = (V, E)$  gráf, és  $k : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  költségfüggvény.
- Output: minimális költségű feszítőfa.
- Működés: minden lépésben megépítjük a legolcsóbb élt, ami nem hoz létre kört. Mohó algoritmus, mert csak azzal törődik, ami éppen a legalacsonyabb költségű. Az így keletkezett fa a  $G$  gráf egy minimális költségű (súlyú) feszítőfája.
- Helyességének bizonyítása: tegyük fel, hogy az algoritmus helytelen, ekkor létezik egy  $f$  él, amit  $e$  helyére bevéve olcsóbb feszítőfát kapunk. Ekkor azonban  $f$  költsége kisebb, mint  $e$  költsége, így  $f$ -et az algoritmussal korábban már ellenőriztük, tehát ellentmondásra jutottunk, azaz a feszítőfa minimális költségű.

- Villamos hálózathoz tartozó normál fa keresése:



- Tegyük fel, hogy egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tulajdonképpen egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Az, hogy mi történik (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcúcsok között a potenciálkülönbségek), a Kirchoff- ill. Ohm-törvényekkel írható le.



- **Csomóponti törvény:** a gráf egy pontthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.
- **Huroktörvény:** a gráf tetszőleges köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.
- Mikor "értelmes" egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Bizonyítható, hogy ha a fenti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat "értelmes". Ennek a bizonyítéka a **normál fa**:  $G$  olyan feszítőfája, ami minden feszültségforrást tartalmaz, de egyetlen áramforrást sem (és mindemellett a legtöbb kapacitást és a lehető legkevesebb induktivitás tartalmazza).
- **Normál fa keresése:** fesz.forrás (1), kapacitás (2), ellenállás (3), induktivitás (4), áramforrás (5) élköltségekhez keressünk mkffát! Ha ez tartalmaz áramforrást, vagy nem tartalmaz minden feszültségforrást, akkor nincs normál fa, egyébként a mkffa egy normál fa és egyértelmű a megoldás "értelmes" a hálózat.

## 4 Tétel

Általános gráfbejárás: **a csúcsok állapotváltozása, a bejárás általános lépése**, a bejáráshoz tartozó sorrend ill. az élek osztályozása bejárás után. A **BFS** és tulajdonságai, legrövidebb utak fájának létezése.

- **Általános gráfbejárás & BFS:** A gráfbejárési algoritmus az inputgráf csúcsait és éleit fedezi fel. Minden csúcs az elértlen  $\rightarrow$  elért  $\rightarrow$  befejezett állapotokat veszi fel. A bejárás akkor ér véget, amint minden csúcs befejezetté vált.

1. Van elért csúcs. Választunk egyet, mondjuk  $u$ -t.
  - (1a) Ha van olyan  $uv$  él, amire  $v$  elértlen, akkor  $v$  elértté válik.
  - (1b) Ha nincs ilyen  $uv$  él, akkor  $u$  befejezetté válik.
1. Nincs elért csúcs.
  - (2a) Ha van elértlen  $u$  csúcs, akkor  $u$ -t elértté tesszük.
  - (2b) Ha nincs elértlen csúcs (azaz  $\forall$  csúcs fejezett), akkor END.

### Szélességi bejárás (BFS) szabálya:

Az 1. esetben mindig a legkorábban elért  $u$ -t választjuk.

**Input:**  $G = (V, E)$  (ir/ir.tatlan) gráf, ( $v \in V$  gyökérpont<sup>1</sup>).

**Output:** (1) A csúcsok elérési és befejezési sorrendje. (2) Az élek osztályozása:

**faél:** Olyan él, ami mentén egy csúcs elértté vált.

$uv$  **előreél:** nem faél, de  $u$ -ból  $v$ -be faélekből irányított út vezet.

$uv$  **visszaél:**  $v$ -ből  $u$ -ba faélekből irányított út vezet.

**keresztél:** minden más él ( $u$  és  $v$  közt nincs leszármazott viszony).

(3) A **bejárás fája:** a faélek alkotta részgráf. (A bejárás fája valójában egy gyökereiből kifelé irányított erdő.)

**Megf:** Irányítatlan esetben az előreél és a visszaél ugyanazt jelenti.

**Terminológia:** Ha a bejárás fájában  $u$ -ból  $v$ -be irányított út vezet, akkor  $u$  a  $v$  őse és  $v$  az  $u$  leszármazottja. A faél és az előreél tehát ősből leszármazottba, a visszaél leszármazottból ősbe vezet.

A bejárás során kialakul a csúcsok egy **elérési** ill. egy **befejezési** sorrendje, továbbá minden csúcshoz feljegyezzük azt is, hogy melyik él mentén értünk el (ha van ilyen él). Ez utóbbi élek (faélek) alkotják a **bejárás fáját** (ami egyrészt **irányított**, másrészt pedig **erdő**). A  $G$  gráf további  $uv$  éle **előreél**  $\Rightarrow$ , ha  $u$  a bejárás fájában a  $v$  őse, ha  $u$  a  $v$  **leszármazottja**, akkor **visszaél**. Minden más pedig **keresztél**. (Irányítatlan gráf bejárásakor minden élt oda-vissza irányított élnak tekintünk.)

### • A BFS tulajdonságai

Nézzük meg egy **irányított** gráf BFS bejárását is.

**Állítás:** Tfh  $G = (V, E)$  BFS bejárása után a csúcsok elérési sorrendje  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Ekkor az alábbiak teljesülnek.

(1) Ha  $i < j$ , akkor  $v_i$ -t hamarabb fejezzük be, mint  $v_j$ -t, továbbá  $v_i$  gyerekei megelőzik  $v_j$  gyerekeit az elérési sorrendben.

**Biz:** A  $v_i$ -t befejezésének pillanatában  $v_i$  minden gyereke elért, de  $v_j$ -nek még egy gyereke sem az. Ezért  $v_j$  gyerekeit a  $v_i$  csúcs befejezése után érjük el, majd ezt követően fejezzük be  $v_j$ -t.  $\square$

(2) **Az elérési és befejezési sorrend (BFS esetén) megegyezik.**

**Biz:** Ha  $v_i$ -t korábban érjük el, mint  $v_j$ -t, akkor (1) miatt  $v_i$ -t korábban is fejezzük be  $v_j$ -nél. Ezért bármely két csúcs sorrendje ugyanaz az elérési sorrendben mint befejezési sorrendben. Tehát az elérési sorrendnek meg kell egyeznie a befejezési sorrenddel.  $\square$

(3) **Gréfél nem ugorhat át falét:** ha  $k < i < j \leq l$  és  $v_i v_j$  faél, akkor  $v_k v_l$  nem lehet gráfél.

**Biz:** Ha  $v_k v_l \in E(G)$ , akkor  $v_l$  szülője  $v_k$  vagy egy  $v_k$ -t megelőző csúcs. (1) miatt  $v_j$  szülője sem következhet  $v_k$  után, vagyis  $v_i$  nem lehet  $v_j$  szülője.

(4) **Nincs előreél.** (Irányítatlan eset: csak faél és keresztél van.)

<sup>1</sup>A gyökérben kezdetben elért állapotú, ezért kivétel az általános szabály alól.

**Biz:** Indirekt: ha  $v_i v_j$  előreél lenne, akkor  $v_i$ -ből  $v_j$ -be irányított út vezetne a BFS-fában, és  $v_i v_j$  ennek a faélekből álló útnak az utolsó élét átugraná.  $\square$

(5) Ha a BFS-fában  $k$ -élű irányított út vezet  $u$ -ból  $v$ -be, akkor  $G$ -ben nincs  $k$ -nál kevesebb élű  $uv$ -út.

**Biz:** Ha lenne a BFS fa-beli útnál kevesebb élű út  $G$ -ben, akkor lenne olyan gráfél, ami faélt ugrik át.  $\square$

(6) **A BFS-fa egy legrövidebb utak fája:** a BFS-fa  $v_1$  gyökeréből bármely  $v_i$  csúcsba vezető faút a  $G$  egy legkevesebb élű  $v_1 v_i$ -útja.

- **Legrövidebb utak**

**Def:** Adott  $G$  (ir) gráf és  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény esetén egy  **$P$  út hossza** a  $P$  éleinek összhossza:  $l(P) = \sum_{e \in E(P)} l(e)$ .

Az  $u$  és  $v$  csúcsok **távolsága** a legrövidebb  $uv$ -út hossza:  $dist_l(u, v) := \min\{l(P) : P \text{ } uv\text{-út}\}$  ( $\nexists uv$ -út  $\Rightarrow dist_l(u, v) = \infty$ .) Az  $l$  hosszfüggvénye **nemnegatív**, ha  $l(e) \geq 0$  teljesül minden  $e$  élre. Az  $l$  hosszfüggvény **konzervatív**, ha  $G$ -ben  $\nexists$  negatív összhosszú ir. kör.

**Cél:** Legrövidebb út keresése irányított/irányítatlan gráfban.

**Megf:** Ha  $l(e) = 1$  a  $G$  minden  $e$  élére, akkor  $l(P)$  a  $P$  élszáma. Ezért a BFS-fa minden gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből, azaz a szélességi bejárás tekinthető egy legrövidebb utat kereső algoritmusnak is.

**Def:** Adott  $G$  (ir) gráf,  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény és  $r \in V(G)$ .  **$(r, l)$ -felső becslés** olyan  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, ami felülről becsli minden csúcs  $r$ -től mért távolságát:  $dist_l(r, v) \geq f(v) \forall v \in V(G)$ .

**Triviális**  $(r, l)$ -felső becslés:  $f(v) = \begin{cases} 0 & v = r \\ \infty & v \neq r \end{cases}$

**Pontos**  $(r, l)$ -felső becslés:  $f(v) = dist_l(r, l) \forall v \in V(G)$ .

## 5 Tétel

Gráfút hossza, gráfcsúcsok távolsága, nemnegatív és konzervatív hosszfüggvény, triviális és pontos  $(r, l)$ -felső becslés, élmenti javítás. Dijkstra-algoritmus működése, Ford-algoritmus helyessége és lépésszáma. Legrövidebb utak fájának létezése.

- **Def:** Adott  $G$  (ir) gráf és  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény esetén egy  $P$  út hossza a  $P$  éleinek összhossza:  $l(P) = \sum_{e \in E(P)} l(e)$ .

Az  $u$  és  $v$  csúcsok **távolsága** a legrövidebb  $uv$ -út hossza:  $dist_l(u, v) := \min\{l(P) : P \text{ } uv\text{-út}\}$  ( $\nexists uv\text{-út} \Rightarrow dist_l(u, v) = \infty$ .) Az  $l$  hosszfüggvénye **nemnegatív**, ha  $l(e) \geq 0$  teljesül minden  $e$  élre. Az  $l$  hosszfüggvény **konzervatív**, ha  $G$ -ben  $\nexists$  negatív összhosszú ir. kör.

**Cél:** Legrövidebb út keresése irányított/irányítatlan gráfban.

**Megf:** Ha  $l(e) = 1$  a  $G$  minden  $e$  élére, akkor  $l(P)$  a  $P$  élszáma. Ezért a BFS-fa minden gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből, azaz a szélességi bejárás tekinthető egy legrövidebb utat kereső algoritmusnak is.

**Def:** Adott  $G$  (ir) gráf,  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény és  $r \in V(G)$ .  $(r, l)$ -felső becslés olyan  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, ami felülről becsli minden csúcs  $r$ -től mért távolságát:  $dist_l(r, v) \geq f(v) \forall v \in V(G)$ .

**Triviális**  $(r, l)$ -felső becslés:  $f(v) = \begin{cases} 0 & v = r \\ \infty & v \neq r \end{cases}$

**Pontos**  $(r, l)$ -felső becslés:  $f(v) = dist_l(r, l) \forall v \in V(G)$ .

- Adott  $G = (V, E)$  irányított gráf és egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  élhosszfv. Egy  $G$ -beli irányított út hossza az út éleinek összhossza,  $dist_l(n, v)$  pedig az irányított  $uv$ -utak közül a legrövidebb hosszát jelöli.

Az  $l$  hosszfv konzervatív ha nincs  $G$ -ben negatív összhosszúságú irányított kör.

Adott  $G = (V, E)$  irányított gráf  $r \in v$  és egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  élhosszfv. Az  $f : v \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt  $(r, l)$ -felső becslésnek nevezzük, ha  $f(r) = 0$  és  $f(v) \leq dist_l(r, v)$  teljesül  $G$  minden  $v$  csúcsára. Az  $e = uv$  élmenti javítás esetén a  $f(v)$  értéket a  $\min\{f(v), f(u) + l(uv)\}$  értékkel helyettesíthetjük.

(1) Ha  $l$  konzervatív akkor tetsz.  $(r, l)$ -f. b. élmenti javítása  $(r, l)$ -fb-t ad.

(2) Ha az  $f(r, l)$  felső becsléshez nincs érdemi élmenti javítás, akkor  $f(v) = dist_l(r, v) \forall v \in V$ .

- **Az elméleti javítás**

**Def:** Tfh  $f$  egy  $(r, l)$ -felső becslés és  $uv \in E(G)$ . Az  $f$  **uv-elméleti javítása** az az  $f'$ , amire  $f'(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq v \\ \min\{f(v), f(u) + l(uv)\} & z = v \end{cases}$

**Megf:** Tfh az  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény konzervatív és  $f(r) = 0$ .

Ekkor (1) Az  $f(r, l)$ -felső becslés élmenti javítása mindig  $(r, l)$ -felső becslést ad.

**Biz:** Azt kell megmutatni, hogy van olyan  $rv$ -út, aminek a hossza legfeljebb  $f(u) + l(uv)$ . Ha egy legrövidebb  $ru$ -utat kiegészítünk az  $uv$  éllel, akkor olyan  $rv$ -élsorozatot kapunk, aminek az összhossza  $dist_l(r, u) + l(uv) \leq f(u) + l(uv)$ . „Könnyen” látható, hogy az élhosszfüggvény konzervativitása miatt ha van  $x$  összhosszúságú  $rv$ -élsorozat, akkor van legfeljebb  $x$  összhosszúságú  $rv$ -út is. Ezek szerint van legfeljebb  $f(u) + l(u, v)$  hosszúságú  $uv$ -út is, azaz az érdemi élmenti javítás után szintén  $(r, l)$ -felső becslést kapunk.  $\square$

(2)  $f(r, l)$ -felső becslés (pontosan)  $\iff$  ( $f$ -en  $\nexists$  érdemi élmenti javítás).

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Ha  $f$  pontos, akkor biztosan nincs rajta érdemi élmenti javítás: ha volna, akkor egy felső becslés a pontos érték alá csökkenne, így az élmenti javítás nem  $(r, l)$ -felső becslést eredményezne.  $\Leftarrow$ : Legyen  $v \in V(G)$  tetsz, és legyen  $P$  egy legrövidebb  $rv$ -út. A  $P$  egyik éle mentén sincs érdemi élmenti javítás, ezért  $P$  minden  $u$  csúcsára pontos a felső becslés:  $f(u) = dist_l(r, u)$ . Ez igaz az út utolsó csúcsára, a tetszőlegesen választott  $v$ -re is.  $\square$

- Dijkstra algoritmus működése:

- **Input:**  $G = (V, E)$  irányított gráf,  $l : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  nemnegatív hosszfüggvény,  $r \in V$  gyökér
- **Output:**  $dist_l(r, v)$  minden  $v \in V$ -re.
- **Működés:** Kezdetben  $U_0 = \emptyset$ ,  $f(r) = 0$  és  $f(v) = \infty$ , ha  $v \neq r$ .  
Az algoritmus  $i$ -dik fázisában ( $i = 1, 2, \dots, |V|$ ) a következő történik.

1. Legyen  $u_i$  az  $v$  csúcs a  $v \setminus u_{i-1}$  halmazból, amelyre  $f(r)$  minimális és legyen  $u_{i-1} \cup u_i$ .
2. Végezzünk élelmenti javításokat minden  $u_i$ -ből kivezető  $u_i x$  élen.

Az output a  $|v|$ -dik fázis utáni  $f$  függvény. Szokás megjelölni a végső  $f(v)$  értékeket beállító éleket. Ha az output az  $f(r, l)$ -felső becslés, akkor

- (1)  $f(u_i) \leq f(u_{i+1}) \forall 1 \leq i \leq n$ .
- (2)  $f(u_i) \leq f(u_2) \leq \dots \leq f(u_n)$
- (3) élelmentijavítás nem változhat  $f$ -n.

- A Dijkstra-algoritmus helyesen működik, azaz  $dist_l(r, v) = f(v) \forall v \in V$  teljesül. Az algoritmus során megjelölt élek egy legrövidebb utak fáját alkotják  $G$ -ben: az  $r$  gyökérből minden  $r$ -ből elérhető csúcshoz vezet olyan legrövidebb út is ami csak megjelölt éleket tartalmaz.
- A Dijkstra-algoritmus lépésszáma legfeljebb  $konst \cdot (n^2 + m)$ , ahol  $n = |V|$   $m = |E|$ .

- **Dijkstra-algoritmus:** Input:  $G = (V, E), l : E \rightarrow \mathbb{R}_+, r \in V$ . Output:  $dist_l(r, v) \forall v \in V$  Működés:  $U_0 := \emptyset, f_0$  a triviális.  $(r, l)$ -felső becslés.

Az  $i$ -dik fázis:

1. Legyen  $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$ , ahol  $u_i$  olyan csúcs a  $V \setminus U_{i-1}$  halmazból, amelyre  $f_{i-1}(v)$  minimális.
2.  $f_i : f_{i-1}$  élelmenti javítása minden  $U_i$ -ből kivezető  $u_i x$  élen. Output:  $f_{|V|}$ . Megjelöljük a végső  $f_{|V|}(V)$  értékeket beállító éleket.

**Megf:** Ha a  $v$ -be vezet megjelölt él, akkor vezet  $r$ -ből  $v$ -be megjelölt éleken út, és ennek hozzá megegyezik  $f_{|V|}(v)$ -vel.

**Biz:**  $f_{|V|}(r) = 0$ , és a megjelölt élek mentén haladva az  $f_{|V|}$  érték az élhosszal növekszik.  $\square$

- **Dijkstra helyessége**

**Megf:** Tfh  $u_1, u_2, \dots, u_n$  a  $G$  csúcsainak sorrendje a Dijkstra-algoritmus végrehajtása után.

- (1) Ekkor  $f_{|V|}(u_i) \leq f_{|V|}(u_{i+1})$  teljesül  $\forall 1 \leq i \leq n$ .

**Biz:** Az  $i$ -dik fázisban  $f_i(u_i) \leq f_i(u_{i+1})$  teljesült az  $u_i$  választása miatt. Ezek után  $f_i(u_i)$  már nem változott:  $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i)$ . Ugyan  $f_i(u_{i+1})$  még csökkenhetett, de csak az  $u_i u_{i+1}$  él mentén történt javítás miatt, hiszen az  $(i+1)$ -dik fázisban  $u_{i+1}$  bekerült az  $U_i$  halmazba, és a hozzá tartozó  $(r, l)$ -fb már nem csökken tovább. Ekkor  $f_{i+1}(u_{i+1}) = \min\{f_i(u_{i+1}), f_i(u_i) + l(u_i u_{i+1})\} \geq f_i(u_i)$ , mivel  $l(u_i u_{i+1}) > 0$ . Ezért  $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i) \leq f_{i+1}(u_{i+1}) = f_{|V|}(u_{i+1})$   $\square$

- (2)  $f_{|V|}(u_1) \leq f_{|V|}(u_2) \leq \dots \leq f_{|V|}(u_n)$

- (3) A Dijkstra-algoritmus outputjaként kaptt  $f_{|V|}$ -n élelmenti javítás nem tud változtatni.

**Biz:** Tegyük fel, hogy  $u_i u_j \in E(G)$  a  $G$  egy tetszőleges éle. Ha  $i > j$ , akkor (2) miatt  $f_{|V|}(u_i) \geq f_{|V|}(u_j)$ , ezért az  $u_i u_j$  mentén történő javítás nem tudja  $f_{|V|}(u_j)$ -t csökkenteni, hisz  $l(u_i u_j)$  pozitív. Ha pedig  $i < j$ , akkor az  $i$ -dik fázisban megrögzött az  $u_i u_j$  mentén történő javítás, és ezt követően  $f(u_i)$  nem változott, azaz  $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i)$ . A másik  $(r, l)$ -felső becslés pedig csak tovább csökkenhetett a későbbi élmj-ok során  $f_{|V|}(u_j) \leq f_i(u_j)$ . Ezért az  $u_i u_j$  él mentén sem az  $i$ -dik fázisban, sem később nincs érdemi javítás.  $\square$

**Tétel:** A Dijkstra-algoritmus helyesen működik, azaz  $G$  minden csúcsára igaz, hogy  $dist(r, v) = f_{|V|}(v)$ .

**Biz:** A Dijkstra-algoritmus az  $f_0$  triviális  $(r, l)$ -felső becslésből indul ki, és élelmenti javításokat alkalmaz. Így minden  $f_i$  (speciálisan  $f_{|V|}$  is)  $(r, l)$ -felső becslés lesz. A fenti (3)-as megfigyelés miatt  $f_{|V|}$ -n nem végezhető érdemi élelmenti javítás. Ezért egy korábbi (2)-es megfigyelés miatt  $f_{|V|}$  pontos  $(r, l)$ -felső becslés, azaz  $f_{|V|}(v) = dist_l(r, v) \forall v \in V(G)$ .  $\square$

- Könnyű olyan példát találni, ahol a Dijkstra-algoritmus konzervatív hosszűggvény esetén hibás eredményt ad. Azonban konzervatív hosszűffvény esetén is igaz, hogy

- $(r, l)$ -fb élelmenti javítása  $(r, l)$ -fb-t eredményez, ill.
- ha egy  $(r, l)$ -fb-ben nem végezhető érdemi élelmenti javítás, akkor pontos.

konzervatív hosszűggvény esetén is hasonló startégiát követünk: Élelmenti javításokat végzünk a triviális  $(r, l)$ -fb-en, míg van érdemi javítás.

#### Ford-algoritmus:

Input:  $G = (V, E)$  irányított,  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  konzervatív hosszűggvény,  $r \in V$  gyökérpont.

Output:  $dist_l(r, l)$  minden  $v \in V$

Működés: Legyen  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Kezdetben legy  $f(r) = 0$  és  $v \neq r$  esetén  $f(v) = \infty$ , Az  $i$ -dik fázis

$i = 1, 2, \dots, n-1$  esetén abból áll, hogy elvégezzük az  $e_1, e_2, \dots, e_m$  élek menti javításokat. A végén az OUTPUT:  $dist_l(r, v) = f(v)$  minden  $v$ -re. ( $dist_l(r, v) = f_{n-1}(v) \forall v \in V$ )

**Állítás:** Ha  $l$  konzervatív, akkor  $dist_l(v)$   $v \in V$ -re.

**Biz:**  $f_1(v) = dist_l(r, v)$  ha  $\exists \leq 1$ -élű legrövidebb  $rv$ -út.  $f_2(v) = dist_l(r, v)$  ha  $\exists \leq 2$ -élű legrövidebb  $rv$ -út.  $\dots$   $f_{n-1}(v) = dist_l(r, v)$  ha  $\exists \leq (n-1)$ -élű legrövidebb  $rv$ -út. Tehát  $f_{n-1}(v) = dist_l(r, v) \forall v \in V$ .  $\square$

**Megf:** Ha  $f_i = f_{i-1}$ , akkor a Ford-algoritmust az  $i$ -dik fázis után be lehet fejezni, hisz nincs érdemi élmenti javítás, így  $f_{n-1} = f_i$ .

**Megj:** Az  $f_{n-1}(v)$ -t beállító élek legrövidebb utak fáját alkotják.

**Biz:** A Dijkstra esethez hasonló. Tetszőleges  $v$  csúcsból visszafelé követve a végső értékeket beállító éleket  $f_{n-1}(v)$  hosszúságú  $rv$ -utat találunk.  $\square$

**”Lépésszámanalízis”:** Ha a  $|V(G)| = n$  és  $|E(G)| = m$ , akkor minden fázisban  $\leq m$  élmenti javítás, ami  $konst \cdot m$  lépés. Ez összesen  $\leq konst \cdot (n-1) \cdot m \leq konst \cdot n^3$  lépés, az algoritmus hatékony.

## 6 Tétel

**Mélységi keresés és alkalmazásai** (fellépő éltípusok, mélységi- és befejezési számozásból az éltípus meghatározása, irányított kör létezésének eldöntése DFS-sel).

### • Depth First Search (DFS)

(A mélységi bejárás avagy DFS alatt olyan gráfbejárást értünk, amikor mindig a legutolsónak elért csúcsból kerül elérésre a soron következőnek elért csúcs. Az elérési illetve befejezési sorrendből adódik minden  $v$  csúcshoz egy  $m(v)$  mélységi ill.  $b(v)$  befejezési szám.)

**”Mélységi bejárás (DFS):** A bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az  $[1]$  esetben.

**Mélységi és befejezési számozás:** DFS után  $m(v)$  ill.  $b(v)$  a  $v$  csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

**Megj:** A BFS konkrét megvalósításában szükség van arra, hogy az **elért** csúcsokat úgy tároljuk, hogy könnyű legyen kiválasztani az **elért** csúcsok közül a legkorábban elértet. Erre egy célszerű adatstruktúra a *sor* (avagy *FIFO lista*). Ha a BFS megvalósításában ezt az adatstruktúrát *veremre* (más néven *FIFO listára*) cseréljük, akkor a DFS egy megvalósítása adódik.

**Megf:** Tegyük fel, hogy a  $G$  gráf éleit DFS után osztályoztuk.

(1) Ha  $uv$  **faél**, akkor  $m(u) < m(v)$  és  $b(u) > b(v)$ .

**Biz:**  $v$ -t  $u$ -ból értük el, ezért  $m(u) < m(v)$ . A  $v$  elérésekor  $u$  és  $v$  elért állapotúak. A DFS szerint  $v$ -t  $u$  elptt fejezzük be.  $\square$

(2) Ha  $uv$  **előreél**, akkor  $m(u) < m(v)$  és  $b(u) > b(v)$ .

**Biz:**  $u$ -ból  $v$ -be faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, befejezési csökken.  $\square$

(3) Ha  $uv$  **visszaél**, akkor  $m(u) > m(v)$  és  $b(u) < b(v)$ .

**Biz:**  $v$ -ből  $u$ -ba faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, a befejezési csökken.  $\square$

**Biz:**  $m(u) < m(v)$  esetén a DFS miatt  $v$  az  $u$  leszármazottja lenne. Ezért  $m(u) > m(v)$ . Ha  $u$ -t a  $v$  befejezése előtt értenék el, akkor  $u$  a  $v$  leszármazottja lenne. Ezért az alábbi sorrendben történik  $u$  és  $v$  evolúciója: **v elérése, v befejezése, u elérése, u befejezése**.  $\square$  (4) Ha  $uv$  **keresztél**, akkor  $m(u) > m(v)$  és  $b(u) > b(v)$ .

(5) Irányítatlan gráf DFS bejárása után nincs keresztél.

**Biz:** Indirekt. Ha  $uv$  keresztél, akkor (4) miatt  $m(u) > m(v)$ , továbbá  $vu$  is keresztél, ezért  $m(v) > m(u)$ . Ellentmondás.  $\square$

(6) Ha DFS után van visszaél, akkor  $G$  tartalmaz irányított kört.

**Biz:** A DFS fa visszaélhez tartozó alapköre a  $G$  egy irányított köre.  $\square$

(7) Ha DFS után nincs visszaél, akkor  $G$ -ben nincs irányított kör.

**Biz:** Bmely irányított körnek van olyan  $uv$  éle, amire  $b(u) < b(v)$ . Ez az él csak visszaél lehet.  $\square$

A mélységi bejárás lépésszáma lineáris, azaz van olyan  $c$  konstans, hogy tetszőleges  $u$  csúcsú,  $m$  élű gráf DFS-éhez legfeljebb  $c(n + m)$  lépés szükséges.

### • Direct Acyclic Graphs

**Def:** A  $G = (V, E)$  irányított gráf **aciklikus** (más néven **DAG**), ha  $G$  nem tartalmaz irányított kört.

**Példa:** DAG-ot úgy kaphatunk, hogy egy  $G$  irányítatlan gráf csúcsait csupa különbözőszámmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobbba irányítunk.

Ha ugyanis lenne az így megírányított gráfban irányított kör, akkor az élei mentén a számok végig növekednének, ami lehetetlen. Azt fogjuk ihazolni, hogy a fenti példa minden DAG-ot leír.

**Def:** A  $G = (V, E)$  irányított gráf csúcsainak **topologikus sorrendje** alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba. ( $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, v_i v_j \in E \Rightarrow i < j$ )

**Tétel:** ( $G$  irányított gráf DAG)  $\Leftrightarrow (V(G)$ -nek  $\exists$  topologikus sorrendje).

**Biz:** Tegyük fel, hogy  $\exists$  topologikus sorrend. Láttuk, hogy  $G$  ekkor DAG.  $\checkmark$

**Biz:** Most tegyük fel, hogy  $G$  DAG, és futtassunk rajra egy DFS-t. Láttuk, hogy a DFS után nem lesz visszaél, ezért minden  $uv$  irányított élre  $b(u) > b(v)$  teljesül. Ezért a csúcsok befejezési sorrendjének megfordítása a  $G$  csúcsainak egy topologikus sorrendje.  $\square$

**Köv:** Irányított gráf aciklikussága DFS-sel gyorsan eldönthető: ha van visszaél, akkor a visszaél DFS-fabeli alapköre  $G$  egy irányított köre, így  $G$  nem DAG. Ha pedig nincs visszaél, akkor a fordított befejezési sorrend a  $G$  egy topologikus sorrendje,  $G$  tehát DAG.

**Megj:** DAG-ban topologikus sorrendet forráskeresések és forrástörlések alkalmazásával is találhatunk.



## 7 Tétel

**DAG**, jellemzése, **topologikus sorrend keresése**. Leghosszabb utak keresése, **PERT-módszer**, kritikus utak és tevékenységek.

### • Direct Acyclic Graphs

**Def:** A  $G = (V, E)$  irányított gráf **aciklikus** (más néven **DAG**), ha  $G$  nem tartalmaz irányított kört.

**Példa:** DAG-ot úgy kaphatunk, hogy egy  $G$  irányítatlan gráf csúcsait csupa különbözőszámmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobbba irányítunk.

Ha ugyanis lenne az így megirányított gráfban irányított kör, akkor az élei mentén a számok végig növekednének, ami lehetetlen. Azt fogjuk ihazolni, hogy a fenti példa minden DAG-ot leír.

**Def:** A  $G = (V, E)$  irányított gráf csúcsainak **topologikus sorrendje** alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba.  $(V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, v_i v_j \in E \Rightarrow i < j)$

**Tétel:**  $(G$  irányított gráf DAG)  $\Leftrightarrow (V(G)$ -nek  $\exists$  topologikus sorrendje).

**Biz:** Tegyük fel, hogy  $\exists$  topologikus sorrend. Láttuk, hogy  $G$  ekkor DAG. ✓

**Biz:** Most tegyük fel, hogy  $G$  DAG, és futtassunk rajra egy DFS-t. Láttuk, hogy a DFS után nem lesz visszaél, ezért minden  $uv$  irányított élre  $b(u) > b(v)$  teljesül. Ezért a csúcsok befejezési sorrendjének megfordítása a  $G$  csúcsainak egy topologikus sorrendje. □

**Köv:** Irányított gráf aciklikussága DFS-sel gyorsan eldönthető: ha van visszaél, akkor a visszaél DFS-fabeli alapköre  $G$  egy irányított köre, így  $G$  nem DAG. Ha pedig nincs visszaél, akkor a fordított befejezési sorrend a  $G$  egy topologikus sorrendje,  $G$  tehát DAG.

**Megj:** DAG-ban topologikus sorrendet forráskeresések és forrástörlések alkalmazásával is találhatunk.

### • Leghosszabb út keresése

**Ötlet:** Az  $l'(uv) = -l(uv)$  élhosszokkal a leghosszabb utak legrövidebbekké válnak. Olyanokat pedig tudunk keresni.

**Gond:** A módszerünk csak konzervatív élhosszokra működik. Irányítatlan gráfon ez nemnegatív élhosszokat jelent, ezért ez az ötlet itt nem segít. Itányított esetben nem baj a negatív élhossz, feltéve, hogy  $G$  DAG. Ekkor Ford, Floyd bármelyike használható.

**Jó hír:** Van egy még gyorsabb módszer: a dinamikus programozás. Ennek segítségével tetszőleges  $G$  DAG minden  $v$  csúcsához ki tudjuk számítani a  $v$ -be vezető leghosszabb utat. (Sőt! ...)

**Leghosszabb út DAG-ban:** Input:  $G = (V, E)$  DAG,  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Output:  $\max\{l(P) : Pv\text{-be vezető út}\}$  minden  $v \in V$  csúcsra. Működés:  $\boxed{1} V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  topologikus sorrend meghatározása.  $\boxed{2} i = 1, 2, \dots, n : f(v_i) = \max\{\max\{f(v_j) + l(v_j v_i) : v_j v_i \in E\}, 0\}$  Output:  $f(v) \forall v \in V$

**Helyesség:** Ha a  $v_i$ -be vezető leghosszabb út utolsó előtti csúcsa  $v_j$ , akkor  $f(v_i) = f(v_j) + l(v_j v_i)$ .

**Megj:** Ha a fenti algoritmusban minden csúcsra megjelöljük az  $f(v)$  értéket beállító élt (éleket), akkor a megjelölt élek minden  $v$  csúcsba megadnak egy leghosszabb utat. Sőt: minden  $v$ -be vezető leghosszabb megkapható így.

### • A PERT probléma

Egy  $a, b, \dots$  tevékenységekből álló projektet kell végrehajtanunk.

**Precedenciafeltételek:** bizonyos  $(u, v)$  párok esetén előírás, hogy az  $u$  tevékenységet a  $v$  előtt kell elvégezni, ezért  $v$  az  $u$  kezdetét követően  $c(uv)$  időkorlát elteltével kezdhető.

**Cél:** minden  $v$  tevékenységhez olyan  $k(v) \geq 0$  kezdési időpont meghatározása, ami nem sérti a preferenciafeltételeket, és a projekt végrehajtási ideje (a legnagyobb  $k(v)$  érték) minimális.

$G$  irányított gráf csúcsai a tevékenységek, élei pedig a precedenciafeltételek, az  $uv$  él hossza  $c(uv)$ .

**Megf:** (1) Ha  $G$  nem DAG, akkor a projekt nem hajtható végre. (2) Ha  $G$  DAG, akkor minden  $v$  tevékenység legkorábbi kezdési időpontja a  $v$ -be vezető leghosszabb út hossza.

**Köv:** A PERT probléma megoldása nem más, mint a  $G$  DAG minden csúcsára az oda vezető leghosszabb út meghatározása.

**Terminológia:**  $G$  leghosszabb útja **kritikus út**, amivől több is lehet. Kritikus út csúcsai a **kritikus tevékenységek**.

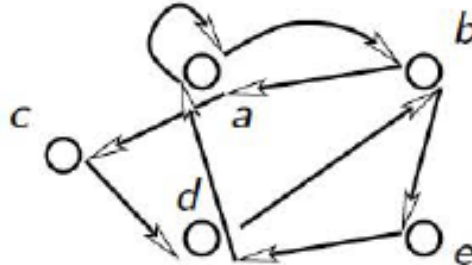
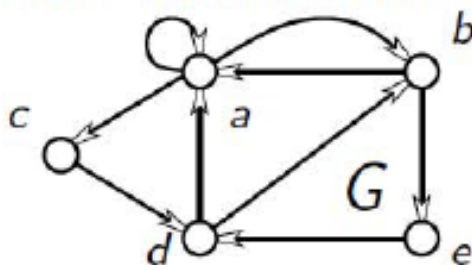
**Megf:** Ha egy kritikus tevékenység nem kezdődik el a lehető legkorábbi időpontban, akkor az egész projekt végrehajtása csúszik.

## 8 Tétel

**Euler-séta és körséta** létezésének szükséges és elégséges feltétele. **Hamilton-kör és út** létezésére szükséges, ill. elégséges feltételek: komponensszám ponttörlés után (Petersen-gráf) **Dirac, Ore tételei**, gazdag párok, hízlalási lemma, Chavátal-lezárt.

### • Euler-séták

**Def:** A  $G$  gráf **Euler-(kör)sétája** a  $G$  egy olyan (kör)sétája, ami  $G$  minden élét tartalmazza.



**Megj:** (1) A fenti definíció  $2 \times 2$  fogalmat definiál: az Euler-sétát és az Euler-körsétát irányítatlan és irányított gráfokra is. (2) Szokás a definíciót abban a formában kimondani, hogy az Euler-(kör)séta  $G$  minden élét **pontosan** egyszer tartalmazza. Tekintettel arra, hogy egy séta nem mehet át kétszer ugyanazon az élen, ez redundáns kiváncsálgatás, hiszen következménye az általunk használt definíciónak. Használatos ezen kívül az Euler-kör ill. Euler-út megnevezés is a fenti fogalmakra. (3) Irányítatlan Euler-séta: " $G$  egy vonallal lerajzolható".

**Cél:** Gyors módszer az Euler-(kör)séta megtalálására, létezésének ellenőrzésére.

**Megf:** (1) Ha a  $G$  irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden  $v$  csúcsra  $\rho(v) = \delta(v)$  teljesül.

**Biz:** (a) Ha  $G$  két különböző gyenge komponense is tartalmaz élt, akkor  $G$ -nek nem lehet Euler-körsétája, hisz egyetlen séta sem tartalmazhat élt két különböző gyenge komponensből. ✓

(b) Ha végighaladunk az Euler-körsétán, akkor a  $v$  csúcsba pontosan annyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk onnan. A körséta  $G$  minden élét pontosan egyszer érinti:  $\rho(v) = \delta(v)$  □

**Megf:** (2) Ha a  $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

(b)  $G$ -ben minden fokszám páros.

**Biz:** Az irányított esethez hasonló. (a) Egy (kör)séta nem tartalmazhatja két különböző komponensnek is  $1-1$  élét, és (b) az Euler-körsétát követve tetszőleges  $v$  csúcsba ugyanannyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk belőle. Ezért  $d(v)$  páros. □

**Megf:** (3) Ha a  $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor

(a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

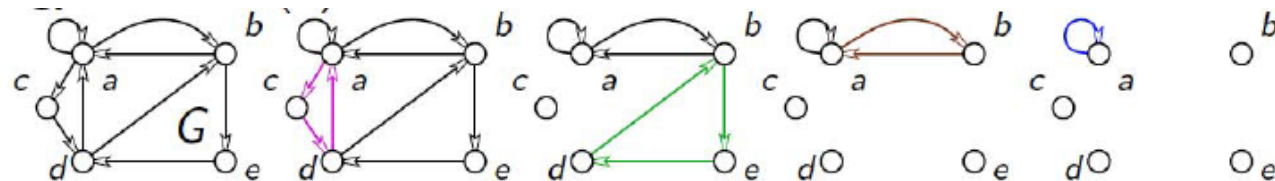
(b)  $G$ -nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

**Biz:** (a) ✓. (b): Tegyük fel, hogy  $G$  Euler-sétája egy  $uv$ -séta. Ekkor minden  $w \neq u, v$  csúcsra  $d(w)$  kétszer annyi, mint ahányszor az Euler-séta  $w$ -n áthalad, vagyis  $d(w)$  páros. Ha  $u = v$ , akkor az Euler-séta körséta, így  $d(u)$  is páros (2b) miatt. Ha pedig  $u \neq v$ , akkor  $u$ -ból 1-gyel többször lépünk ki, mint be,  $v$ -be 1-gyel többször lépünk be, mint ki, vagyis  $d(u)$  és  $d(v)$  páratlanok. □

**Megj:** A fenti Megfigyelés segítségével bizonyos esetekben azonnal látszik, hogy  $G$ -nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

$G$  **irányítatlan Euler-gráf**, ha  $G$  minden  $v$  csúcsra  $d(v)$  páros.

**Lemma:** Ha  $G$  Euler-gráf, akkor  $G$  élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (irányított) kört alkossanak minden színre.

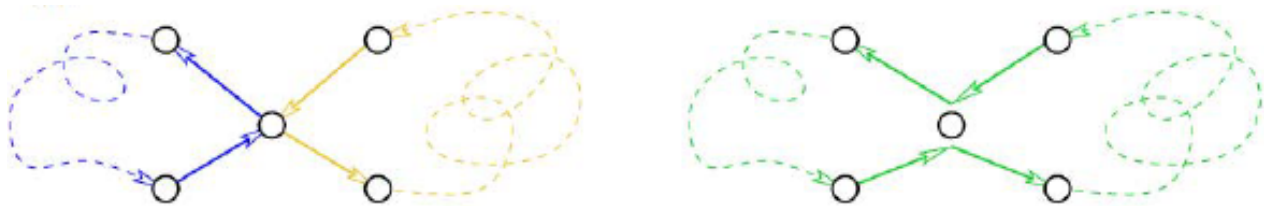


**Biz:** Induljunk el  $G$  egy éle mentén, és haladjunk tovább az (irányított) élek mentén. Mivel  $G$  Euler, ezért sosem adaunk el: előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, így találunk egy  $C_1$  kört.  $C_1$  éleit törölve  $G - C_1$  Euler-gráf marad. Ismételjük meg ezt a  $G - C_1$  gráfon. Így  $G$  minden éle előbb-utóbb sorra kerül és megkapja a  $C_2, C_3, \dots$  köröket. Ezért  $E(G) = C_1 \cup C_2 \cup \dots$  diszjunkt körök uniójára bomlik fel. Színezzük ki a  $C_1$  kör éleit az  $i$ -dik színnel.  $\square$

**Tétel:** (1) ( $G$  irányított gráfnak van Euler-körsétája)  $\iff$  ( $G$  Euler-gráf és  $G$  izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő)

(2) ( $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája)  $\iff$  ( $G$  Euler-gráf és  $G$  izolált pontoktól eltekintve összefüggő)

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Láttuk.  $\checkmark \Leftarrow$ : A Lemma miatt  $E(G)$  felbontható körökre, tehát körsétákra is. Ha a körséták száma legalább 2, akkor választunk két körsétát, aminek van közös csúcsa és  $e$  csúcs mentén "összevarjuk" azokat. Mindezt addig végezzük, amíg egyetlen körséta marad.  $\square$



**Tétel:** (3) ( $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-sétája)  $\iff$  ( $G$  izolált pontoktól eltekintve összefüggő és 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.)

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Láttuk.  $\checkmark \Leftarrow$ : Ha  $G$  Euler-gráf, akkor (2) miatt van Euler-körsétája, ami Euler-séta is egyúttal. Ha  $G$  nem Euler-gráf, akkor legyenek  $u$  és  $v$  a  $G$  páratlan fokú csúcsai. Ekkor  $G + uv$  Euler-gráf, és (2) miatt van Euler-körsétája. Feltehető, hogy  $e$  körséta utolsó éle  $uv$ . Ezt az  $uv$  élt elhagyva a körsétából,  $G$  Euler-sétáját kapjuk.  $\square$

**Euler-körséta keresése Euler-gráfban:**  $E(G)$ -t felbontjuk körsétákra, amiket összevarrunk. Körsétát a felbontáshoz pl. úgy is kereshetünk, hogy addig követünk egy sétát, amíg tudunk. Előbb-utóbb elakadunk, de ez csakis a séta kiindulási pontjában történhet meg. Ezért a bejárt séta egy körséta, amit a felbontásban felhasználunk.

## • Hamilton-körök és -utak

**Def:** A  $G$  gráf **Hamilton-köre** (**Hamilton-útja**) a  $G$  olyan köre (útja), ami  $G$  minden csúcsát tartalmazza.

**Megj:** A célunk hasonló, mint az Euler-(kör)séta esetén, azaz gyors módszer, amivel el lehet dönteni egy gráfról, hogy van-e Hamilton-köre ill. -útja. Sajnos jól használható szükséges és elégséges feltételt nem tudunk adni erre a problémára, és jó oka van annak, hogy nem is számítunk ilyen feltétel létezésére. Tudunk viszont jól használható szükséges, és jól használható elégséges feltételt adni, de ezek csak bizonyos gráfok esetén hasznosak.

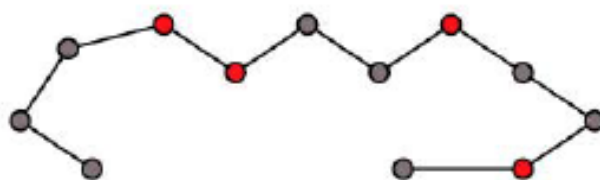
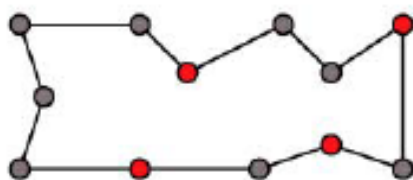
### Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-köre, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U|$ .

(2) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-útja, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U| + 1$ .

**Megj:** A fenti feltétel, miszerint  $k$  csúcs törlésétől a gráf legfeljebb  $k$  (ill.  $k + 1$ ) komponensre eshet szét feltétlenül **szükséges** ahhoz, hogy  $G$ -nek legyen Hamilton-köre ill. -útja. Abból azonban, hogy  $G$  teljesíti a fenti feltételt, nem következik, hogy  $G$ -nek csakugyan van Hamilton-köre vagy útja. A szükséges feltételt úgy tudjuk alkalmazni, hogy a segítségével igazoljuk egy konkrét gráfról, hogy nincs Hamilton-köre (vagy -útja). Ha pl. azt látjuk, hogy  $G$ -ből 42 csúcsot elhagyva 43 komponens keletkezik, akkor  $G$ -nek nincs Hamilton-köre. Ha a komponensszám legalább 44, akkor  $G$ -nek Hamilton-útja sincs.

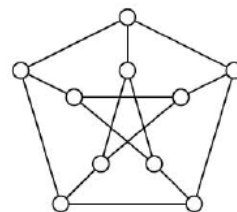
**Biz:** (1,2)  $G$ -t tekinthetjük úgy, mint egy kör (ill. út), amihez még további éleket adunk hozzá. Könnyű látni, hogy egy kör (ill. út)  $k$  pont elhagyásától legfeljebb  $k$  ( $k + 1$ ) komponensre eshet szét. A további élek (amit a körhöz ill. úthoz hozzá kell adni, hogy  $G$ -t kapjunk) csak csökkenteni tudják a komponensszámot, növelni nem. Ezért  $G$ -ből  $k$  csúcsot törölve legfeljebb  $k$  ( $k + 1$ ) komponens keletkezik.  $\square$



**Megj:** Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.

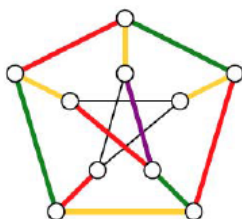
- (a) Tegyük fel, hogy külső körből  $k_1$ , a belsőből  $k_2$  csúcsot hagytunk el. Ha  $k_1 = 0$  vagy  $k_2 = 0$ , akkor a gráf összefüggő marad. Különben a külső kör legfeljebb  $k_1$ , a belső pedig legfeljebb  $k_2$



részre esik szét, vagyis összesen legfeljebb  $k_1 + k_2$  komponens létezik.

2. Nincs Hamilton-köre.

- (a) Ha lenne Hamilton-köre, akkor a Hamilton-kör éleit felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, sárga ill. zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet.



A továbbiakban elégséges feltételeket fogunk látni Hamilton-kör létezésére. Ezek segítségével (szerencsés esetben) gyorsan és kétséget kizáróan tudjuk bizonyítani, hogy egy adott gráfnak van Hamilton-köre. Az elégséges feltétel vizsgálata azonban nem alkalmas arra, hogy egy gráf a Hamilton-körének hiányát igazoljuk.

**Def:** Legyen  $G$   $n$ -csúcsú, egyszerű gráf.

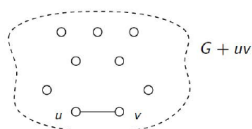
Az  $u, v \in V(G)$  csúcspár **gazdag**, ha  $d(u) + d(v) \geq n$ . A  $G$  gráfra teljesül a **Dirac-feltétel**, ha  $d(v) \geq \frac{n}{2} \forall v \in V(G)$ -re.  $G$ -re igaz az **Ore-feltétel**, ha  $G$  bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot.

**Dirac tétele:**  $G$ -re igaz a Dirac-feltétel  $\Rightarrow G$ -nek van H-köre.

**Ore tétele:**  $G$ -re igaz az Ore-feltétel  $\Rightarrow G$ -nek van H-köre.

**Megj:** A Dirac-feltétel erősebb (többet kíván), mint az Ore. Ezért az Ore-tétel erősebb, mint a Dirac: gyengébb feltételből igazolja ugyanazt. Ezért az Ore-tétel bizonyítása a Dirac-tételt is igazolja.

#### • A Chvátal-lezárt



**Hízalási lemma:** Tegyük fel, hogy  $G$  egyszerű gráf, és  $(u, v)$  gazdag pár. ( $G$ -nek van Hamilton-köre)  $\iff (G + uv$ -nek van Hamilton köre).

**Megj:** A hízalási lemma jelentősége az, hogy segít eldönteni azt, hogy van-e  $G$ -ben Hamilton-kör. Azt mondja ki ugyanin, hogy a gazdag párok közé  $G$ -be "ingyen" behúzzhatunk éleket, u.i. ez nem változtat azon a tényen, hogy van vagy nincs Hamilton-kör a vizsgált gráfban. Megtehetjük tehát, hogy a lemma segítségével addig húzunk be éleket a gráfba, amíg lehet. Ha az így adódó  $\overline{G}$  Chvátal-lezártban találunk Hamilton-kört, akkor  $G$ -nek is bizonyosan van Hamilton-köre. Ha pedig  $\overline{G}$  nem tartalmaz Hamilton-kört, akkor persze  $G$ -nek nincs Hamilton-köre.

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Láttuk.  $\Leftarrow$ : Legyen  $C$  a  $G + uv$  Hamilton-köre. Ha  $uv \notin C$ , akkor  $C$  a  $G$ -nek is Hamilton-köre, kész vagyunk. Ha viszont  $uv \in C$ , akkor  $C - uv$  a  $G$  egy Hamilton-útja. Legyen ez a Hamilton-út  $u = v_1, v_2, \dots, v_n = v$ . Legyen  $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$  a  $v$  szomszédainak halmaza, és legyen  $B := \{v_{i-1} : uv_i \in E(G)\}$  az  $u$  szomszédait a Hamilton-úton megelőző csúcsok halmaza.

Világos, hogy  $v \notin A$  és  $v \notin B$ , így  $|A \cup B| \leq n - 1$ . Mivel  $(u, v)$  gazdag pár, ezért  $|A| + |B| = d(u) + d(v) \geq n$ . Ezek szerint  $A \cap B \neq \emptyset$ , legyen pl.  $v_i \in A \cap B$ . Ekkor  $v_1, v_2, \dots, v_i, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}, v_1$  a  $G$  egy Hamilton-köre.  $\square$

**Ore tétele:** Ha  $G$  bármely két nemszomszédos csúcsa gazdag párt alkot, akkor  $G$ -nek van Hamilton-köre.

**Biz:** A hízlalási lemma alapján  $G$  bármely két nemszomszédos csúcsát "ingyen" összeköthetjük. Így  $G$  Chátal-lezártja a  $\overline{G} = K_n$  teljes gráf. Mivel  $K_n$ -nek van H-köre, ezért  $G$ -nek is van.  $\square$

**Dirac-tétele:** Ha  $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$ , akkor  $G$ -nek van Hamilton-köre.

**Biz:**  $G$  bármely két csúcsa gazdag párt alkot, ezért  $G$ -re teljesül az Ore-feltétel. Az Ore-tétel miatt  $G$ -nek van Hamilton-köre.  $\square$

## 9 Tétel

**Gráfok síkba ill. gömbre rajzolhatósága, tartomány, sztereografikus projekció, következményei.** Az **Euler-féle poliédertétel**, duális kézfogáslemma és következményei: felső korlátok az élszámról és a minimális fokszáma egyszerű, síkbarajzolható gráfokon.

### • Síkbarajzolhatóság

**Def:** **Síkbarajzolt** (síkbarajzolható) gráf alatt olyan gráfdiagramot értünk, amiben az élek nem keresztezik egymást.

A  $G$  gráf **síkbarajzolható** (síkbarajzolható), ha van síkbarajzolt diagramja.

Síkbarajzolt gráf **tartománya** (lapja): a diagram komplementerének összefüggő tartománya. A nem korlátos rész neve **külső tartomány**.

**Megj:** (1) A fentieket nem csak egyszerű gráfokra definiáltuk. (2) A síkbarajzolt gráf nem csupán egy gráf, hanem egy **konkrét** diagram. (3) Ugyanannak a síkbarajzolható gráfnak nagyon sok lényegesen különböző síkbarajzolt diagramja (lerajzolása) lehet. (4) A görbe (tóruszra) rajzolhatóság hasonlóan definiálható.

**Állítás:**  $(G \text{ gráf síkbarajzolható}) \iff (G \text{ gömbre rajzolható})$

**Biz:** A sztereografikus projekcióban az északi-sarkból történő vetítés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a sík pontjai és a síkot a déli-sarkon érintő gömbfelszín pontjai (mínusz északi-sark) között. A síkbarajzolt diagram vetülete gömbre rajzolt lesz ( $\Rightarrow \checkmark$ ), és az  $\hat{E}$ -t nem tartalmazó gömbre rajzolt diagram pedig síkbarajzolttá válik. A  $\Leftarrow$  irány igazolásához csupán annyi kell, hogy úgy rajzoljuk  $G$ -t a gömbre, hogy az  $\hat{E}$ -n ne menjen át él.  $\square$

**Köv:** síkbarajzolt gráf külső tartománynak nincs kitüntetett szerepe.

**Biz:** Bármely lerajzolás "kifordítható": a diagram átrajzolható úgy, hogy a kiválasztott tartomány legyen a külső tartomány.

1. Vetítsük fel a diagramot a gömbre.
2. Állítsuk az  $\hat{E}$ -t a kiválasztott tartománynak megfelelő gömbi tartomány belsejébe.
3. Vetítsük vissza a gömbre rajzolt gráfot a síkra.  $\square$

**Köv:** Bármely konvex poliéder élhálóját síkbarajzolható gráf.

**Biz:** A  $kx$  poliéder belső pontjából az élháló kivetíthető egy, a poliédert tartalmazó gömbre. Így az élhálóból gömbre rajzolt gráf lesz. Láttuk, hogy minden gömbre rajzolható gráf síkbarajzolható.  $\square$

**Megj:** A  $kx$  poliéder élgráfjának tartományai a poliéder lapjainak felelnek meg.

**Terminológia:** síkbarajzolt  $G$  gráf esetén  $n, e, t$  ill.  $k$  jelöli rendre a  $G$  csúcsai, élei, tartományai és komponensei számát.

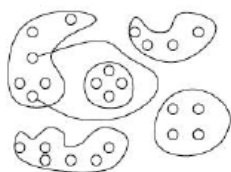
**Duális kézfogáslemma (DKFL):** Ha  $G$  síkbarajzolt gráf, akkor  $\sum_{i=1}^t l_i = 2e$  ahol  $l_i$  az  $i$ -dik lapot határoló élek számát jelöli.

**Biz:** Minden él vagy két különböző lapot határol, vagy ugyanazt a lapot 2-szer. Így minden él 2-vel járul a BO-hoz és a JO-hoz is.  $\square$

**Megj:** A DKFL akkor hasznos, ha a síkbarajzolt gráf lapjairól, a KFL pedig akkor, ha a foksámról van információnk.

**Fáry-Wagner-tétel:** Ha  $G$  egyerű síkbarajzolható gráf, akkor olyan síkbarajzolása is van, amiben minden él egyenes szakasz.

### • Az Euler-féle poliéderformula, síkgráfok karakterizációja



**Tétel:** Ha  $G$  síkbarajzolt gráf, akkor  $n + t = e + k + 1$ .

**Biz:** Rajzoljuk meg  $G$ -t az  $n$  csúcsból kiindulva, az élek egyenkénti behúzásával. Kezdetben  $t = 1, e = 0$  és  $k = n$ , így a bizonyítandó összefüggés fennáll. Tegyük fel, hogy már néhány élt berajzolunk, még mindig fennáll az összefüggés, és egy éppen az  $uv$  élt rajzolunk meg.



1.  $u$  és  $v$  különböző komponenshez tartoznak. Ekkor  $k$  értéke 1-gyel csökken,  $e$ -é pedig 1-gyel nő. Az ÉHL miatt nem keletkezik kör, tehát nem zárunk körül új tartományt, vagyis  $t$  nem változik. Az összefüggés fennmarad.

2.  $u$  és  $v$  ugyanahhoz a komponenshez tartoznak. Ekkor  $k$  nem változik,  $e$  viszont 1-gyel nő. Az ÉHL miatt keletkezik kör, tehát kettévágjuk az  $uv$  élt tartalmazó korábbi tartományt. Ezért  $t$  is 1-gyel nő, az összefüggés ismét fennmarad.  $\square$

**Köv:** (1) Ha  $G$  síkbarajzolható, akkor  $t$  nem függ a síkbarajzolástól.

**Biz:**  $t = e + k + 1 - n$ , és a JO nem függ a síkbarajzolástól.  $\square$

(2) (**Euler-formula**) Ha  $G$  összefüggő síkbarajzolt gráf, akkor  $n + t = e + 2$

**Biz:** Mivel  $G$  összefüggő, ezért a fenti Tételben  $k = 1$ .  $\square$

(3) Ha  $G$  egyszerű, síkbarajzolható és  $n \geq 3$ , akkor  $e \leq 3n - 6$ .

**Biz:** Ilyenkor  $G$  minden lapját legalább 3 él határolja, így a DKFL miatt  $2e = \sum_{i=1}^t l_i \geq 3t$ . A Tétel alapján  $3n + 2e \geq 3n + 3t = 3e + 3k \geq 3e + 3 + 3 = 3e + 6$ , amit rendezve  $e \leq 3n - 6$  adódik.  $\square$

(4)  $G$  egyszerű, síkbarajzolható,  $C_3$ -mentes és  $n \geq 3 \Rightarrow e \leq 2n - 4$ .

**Biz:** Ilyenkor  $G$  minden lapját legalább 4 él határolja. A DKFL miatt  $2e = \sum_{i=1}^t l_i \geq 4t$ , így  $e \geq 2t$ . A Tétel miatt  $2n + e \geq 2n + 2t = 2e + 2k + 2 \geq 2e + 2 + 2 = 2e + 4$  Ezt rendezve  $e \leq 2n - 4$  adódik.  $\square$

(5) Ha  $G$  egyszerű, síkbarajzolható, akkor  $\delta(G) \leq 5$  (azaz  $\exists v : d(v) \leq 5$ ).

**Biz:** A KFL és (3) miatt  $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e \leq 6n - 12$ . Ezért van olyan csúcs, amire  $d(v) \leq \frac{6n-12}{n} < 6$ .  $\square$

(6) A  $K_5$  és  $K_{3,3}$  gráfok egyike sem síkbarajzolható.

**Biz:** A  $K_5$  gráf egyszerű, de nem teljesül (3), hiszen  $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10 \not\leq 9 = 3 \cdot 5 - 6$ . Ezért  $K_5$  nem síkbarajzolható. A  $K_{3,3}$  gráf egyszerű és  $C_3$ -mentes, de nem teljesül rá (4), u.i.  $|E(K_{3,3})| = 9 \not\leq 8 = 2 \cdot 6 - 4$ . Ezért  $K_{3,3}$  nem síkbarajzolható.  $\square$

**Megj:** Könnyen látható, hogy ha  $G$  síkbarajzolható, akkor  $G + e$  tóruszra rajzolható bármely  $e$  él behúzása esetén. Nem nehéz látni, hogy  $K_6$  is tóruszra rajzolható. Sőt: még  $K_7$  is az, de  $K_8$  már nem.

**Def: Élfelosztás:** az élre egy új, másodfokú csúcs ültetése. **Élösszehúzás:** az él törlése és két végpontjának azonosítása. **Topologikus  $G$  (soros bővítés):**  $G$ -ből élfelosztásokkal képzett gráf.

**Megf:** Az éltörlés, csúcstörlés, élfelosztás, élösszehúzás operációk mindegyike megőrzi a gráf síkbarajzolható tulajdonságát.

**Köv:** (1) Top.  $K_5$  top.  $K_{3,3}$  nem síkbarajzolható. (2) Ha  $G$  síkbarajzolható, akkor  $G$ -nek nincs se topologikus  $K_5$ , se topologikus  $K_{3,3}$  részgráfja.

**Kuratowski tétele:** ( $G$  síkbarajzolható)  $\iff$  ( $G$ -nek nincs se topologikus  $K_5$ , se topologikus  $K_{3,3}$  részgráfja)

**Példa:** Petersen-gráf

## 10 Tétel

**Kuratowski gráfok síkbarajzolhatósága, soros bővítés, Kuratowski-tétel könnyű iránya. Síkbarajzolt gráf duálisa, a duális paraméterei. Vágás, elvágó él, soros élek. Kör-vágás dualitása, különféle élek duálisai. Whitney két tétele, Whitney operációk.**

### • Síkbarajzolhatóság

**Def:** **Síkbarajzolt** (síkbarajzolt) gráf alatt olyan gráfdiagramot értünk, amiven az élek nem keresztezik egymást.

A  $G$  gráf **síkbarajzolható** (síkbarajzolható), ha van síkbarajzolt diagramja.

Síkbarajzolt gráf **tartománya** (lapja): a diagram komplementerének összefüggő tartománya. A nem korlátos rész neve **külső tartomány**.

**Megj:** (1) A fentieket nem csak egyszerű gráfokra definiáltuk. (2) A síkbarajzolt gráf nem csupán egy gráf, hanem egy **konkrét** diagram. (3) Ugyanannak a síkbarajzolható gráfnak nagyon sok lényegesen különböző síkbarajzolt diagramja (lerajzolása) lehet. (4) A görbe (tóruszra) rajzolhatóság hasonlóan definiálható.

**Állítás:**  $(G \text{ gráf síkbarajzolható}) \iff (G \text{ gömbre rajzolható})$

**\*\*\*Biz:** A sztereografikus projekcióban az északi-sarkból történő vetítés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a sík pontjai és a sítot a déli-sarkon érintő gömbfelszín pontjai (mínusz északi-sark) között. A síkbarajzolt diagram vetülete gömbre rajzolt lesz ( $\Rightarrow \checkmark$ ), és az  $\acute{E}$ -t nem tartalmazó gömbre rajzolt diagram pedig síkbarajzoltttá válik.  $A \Leftarrow$  irány igazolásához csupán annyi kell, hogy úgy rajzoljuk  $G$ -t a gömbre, hogy az  $\acute{E}$ -n ne menjen át él.  $\square$

**Köv:** síkbarajzolt gráf külső tartománynak nincs kitüntetett szerepe.

**Biz:** Bármely lerajzolás "kifordítható": a diagram átrajzolható úgy, hogy a kiválasztott tartomány legyen a külső tartomány.

1. Vetítsük fel a diagramot a gömbre.
2. Állítsuk az  $\acute{E}$ -t a kiválasztott tartománynak megfelelő gömbi tartomány belsejébe.
3. Vetítsük vissza a gömbre rajzolt gráfot a síkra.  $\square$

**Köv:** Bármely konvex poliéder élhálójá síkbarajzolható gráf.

**Biz:** A  $kx$  poliéder belső pontjából az élháló kivetíthető egy, a poliédert tartalmazó gömbre. Így az élhálóból gömbre rajzolt gráf lesz. Láttuk, hogy minden gömbre rajzolható gráf síkbarajzolható.  $\square$

**Megj:** A  $kx$  poliéder élgráfjának tartományai a poliéder lapjainak felelnek meg.

**Terminológia:** síkbarajzolt  $G$  gráf esetén  $n, e, t$  ill.  $k$  jelöli rendre a  $G$  csúcsai, élei, tartományai és komponensei számát.

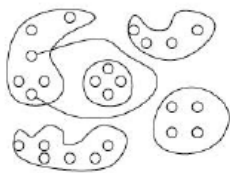
**Duális kézfogáslemma (DKFL):** Ha  $G$  síkbarajzolt gráf, akkor  $\sum_{i=1}^t l_i = 2e$  ahol  $l_i$  az  $i$ -dik lapot határoló élek számát jelöli.

**Biz:** Minden él vagy két különböző lapot határol, vagy ugyanazt a lapot 2-szer. Így minden él 2-vel járul a BO-hoz és a JO-hoz is.  $\square$

**Megj:** A DKFL akkor hasznos, ha a síkbarajzolt gráf lapjairól, a KFL pedig akkor, ha a fokszámról van információnk.

**Fáry-Wagner-tétel:** Ha  $G$  egyerű síkbarajzolható gráf, akkor olyan síkbarajzolása is van, amiben minden él egyenes szakasz.

### • Az Euler-féle poliéderformula, síkgráfok karakterizációja



**Tétel:** Ha  $G$  síkbarajzolt gráf, akkor  $n + t = e + k + 1$ .

**Biz:** Rajzoljuk meg  $G$ -t az  $n$  csúcsból kiindulva, az élek egyenkénti behúzásával. Kezdetben  $t = 1, e = 0$  és  $k = n$ , így a bizonyítandó összefüggés fennáll. Tegyük fel, hogy már néhány élt berajzoltunk, még mindig fennáll az összefüggés, és egy éppen az  $uv$  élt rajzolunk meg.



1.  $u$  és  $v$  különböző komponenshez tartoznak. Ekkor  $k$  értéke 1-gyel csökken,  $e$ -é pedig 1-gyel nő. Az ÉHL miatt nem keletkezik kör, tehát nem zárunk körül új tartományt, vagyis  $t$  nem változik. Az összefüggés fennmarad.

2.  $u$  és  $v$  ugyanahhoz a komponenshez tartoznak. Ekkor  $k$  nem változik,  $e$  viszont 1-gyel nő. Az ÉHL miatt keletkezik kör, tehát kettévágjuk az  $uv$  élt tartalmazó korábbi tartományt. Ezért  $t$  is 1-gyel nő, az összefüggés ismét fennmarad.  $\square$

**Köv:** (1) Ha  $G$  síkbarajzolható, akkor  $t$  nem függ a síkbarajzolástól.

**Biz:**  $t = e + k + 1 - n$ , és a JO nem függ a síkbarajzolástól.  $\square$

(2) (**Euler-formula**) Ha  $G$  összefüggő síkbarajzolt gráf, akkor  $n + t = e + 2$

**Biz:** Mivel  $G$  összefüggő, ezért a fenti Tételben  $k = 1$ .  $\square$

(3) Ha  $G$  egyszerű, síkbarajzolható és  $n \geq 3$ , akkor  $e \leq 3n - 6$ .

**Biz:** Ilyenkor  $G$  minden lapját legalább 3 él határolja, így a DKFL miatt  $2e = \sum_{i=1}^t l_i \geq 3t$ . A Tétel alapján  $3n + 2e \geq 3n + 3t = 3e + 3k \geq 3e + 3 + 3 = 3e + 6$ , amit rendezve  $e \leq 3n - 6$  adódik.  $\square$

(4)  $G$  egyszerű, síkbarajzolható,  $C_3$ -mentes és  $n \geq 3 \Rightarrow e \leq 2n - 4$ .

**Biz:** Ilyenkor  $G$  minden lapját legalább 4 él határolja. A DKFL miatt  $2e = \sum_{i=1}^t l_i \geq 4t$ , így  $e \geq 2t$ . A Tétel miatt  $2n + e \geq 2n + 2t = 2e + 2k + 2 \geq 2e + 2 + 2 = 2e + 4$  Ezt rendezve  $e \leq 2n - 4$  adódik.  $\square$

(5) Ha  $G$  egyszerű, síkbarajzolható, akkor  $\delta(G) \leq 5$  (azaz  $\exists v : d(v) \leq 5$ ).

**Biz:** A KFL és (3) miatt  $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e \leq 6n - 12$ . Ezért van olyan csúcs, amire  $d(v) \leq \frac{6n-12}{n} < 6$ .  $\square$

(6) A  $K_5$  és  $K_{3,3}$  gráfok egyike sem síkbarajzolható.

**Biz:** A  $K_5$  gráf egyszerű, de nem teljesül (3), hiszen  $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10 \not\leq 9 = 3 \cdot 5 - 6$ . Ezért  $K_5$  nem síkbarajzolható. A  $K_{3,3}$  gráf egyszerű és  $C_3$ -mentes, de nem teljesül rá (4), u.i.  $|E(K_{3,3})| = 9 \not\leq 8 = 2 \cdot 6 - 4$ . Ezért  $K_{3,3}$  nem síkbarajzolható.  $\square$

**Megj:** Könnyen látható, hogy ha  $G$  síkbarajzolható, akkor  $G + e$  tóruszra rajzolható bármely  $e$  él behúzása esetén. Nem nehéz látni, hogy  $K_6$  is tóruszra rajzolható. Sőt: még  $K_7$  is az, de  $K_8$  már nem.

\*\*\***Def: Élfelosztás:** az élre egy új, másodfokú csúcs ültetése. **Élüsszehúzás:** az él törlése és két végpontjának azonosítása. **Topologikus G (soros bővítés):**  $G$ -ből élfelosztásokkal képzett gráf.

**Megf:** Az éltörlés, csúcstörlés, élfelosztás, élösszehúzás operációk mindegyike megőrzi a gráf síkbarajzolható tulajdonságát.

**Köv:** (1) Top.  $K_5$  top.  $K_{3,3}$  nem síkbarajzolható. (2) Ha  $G$  síkbarajzolható, akkor  $G$ -nek nincs se topologikus  $K_5$ , se topologikus  $K_{3,3}$  részgráfja.

\*\*\***Kuratowski tétele:** ( $G$  síkbarajzolható)  $\iff$  ( $G$ -nek nincs se topologikus  $K_5$ , se topologikus  $K_{3,3}$  részgráfja) **Példa:** Petersen-gráf

## • Síkgráfok duálisa

**Def:** A  $G$  síkba rajzolt gráf **duálisa** a  $G^*$  gráf, ha  $G^*$  csúcsai  $G$  tartományainak,  $G^*$  élei  $G$  éleinek felelnek meg. Az  $uv \in E(G)$  élnek megfelelő duális él az  $uv$  él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

**Megf:** (1) A síkbarajzolt  $G$  gráf  $G^*$  duálisa síkbarajzolható.  $(n^*, e^*, t^*, k^*)$  (2)  $n^* = t, e^* = e, k^* = 1$ . (3) Ha  $v$  az  $i$ -dik laphoz tartozó duális csőcs, akkor  $d_{G^*}(v) = l_i$ .

**Köv:** KFL a duálusra  $\sum_{i=1}^t l_i = \sum_{v \in V(G^*)} d_{G^*}(v) = 2e^* = 2e$ .

**Def:** A  $Q \subseteq E(G)$  élhalmaz a  $G$  gráf **vágása**, ha  $G - Q$  szétesik (több komponense van, mint  $G$ -nek), de  $Q' \subsetneq Q$  esetén  $G - Q'$  nem esik szét. **Elvágó él:** egyélű vágás. **Soros élek:** kétélű vágás.

**Kör-vágás dualitása:** Tegyük fel, hogy  $G^*$  a  $G$  síkbarajzolt gráf duálisa. Ekkor  $(C$  a  $G$  köre)  $\iff$   $(C^*$  a  $G^*$  vágása) ill.  $(Q$  a  $G$  vágása)  $\iff$   $(Q^*$  a  $G^*$  köre).

**Köv:** Hurokél duálisa elvágó él, soros élpáré párhuzamos élpár.

## • Whitney

**Whitney tétele:** Tegyük fel, hogy  $G^*$  a  $G$  síkbarajzolt gráf duálisa. Ekkor  $H$  pontosan akkor duálisa a  $G$  egy alkalmas síkbarajzolásának, ha  $H$  előáll  $G^*$ -ból a fenti Whitney-operációk alkalmas egymásutánjával.

**Def:** A  $\varphi : E(G) \rightarrow E(H)$  kölcsönös egyenértékű leképezés **kör-vágás dualitás**  $G$  és  $H$  között, ha  $C$  pontosan akkor  $G$  köre, ha  $\varphi(C)H$  vágása.

**Whitney másik tétele:** Tegyük fel, hogy  $G$  és  $H$  között kör-vágás dualitás van. Ekkor  $G$  síkbarajzolható, és  $H$  a  $G$  egy alkalmas síkbarajzolásának duálisa.

**Megj:** Egy  $G$  gráf által leírt villamos hálózat viselkedését az Ohm-él Kirchhoff-törvények írják le. Ezek a  $G$  gráf éleire, köreire és vágásaira vonatkoznak. Ha  $G$  és  $H$  közt kör-vágás dualitás van, akkor  $H$ -n elkészíthető az előző hálózat duálisa. Az eredeti hálózat megoldásában ha az  $I$  és  $U$  értékeket felcseréljük, az utóbbi hálózat megoldását kapjuk. Whitney másik tétele miatt ez a különös szimmetria csak síkbarajzolható gráfok által leírt hálózatokon lehetséges.

11. Lineáris egyenletrendszer, kibővített együtthatómátrix, elemi sorkvivalens átalakítás és kapcsolata a megoldásokkal. LA és RLA mátrix, vezéregyes, megoldás leolvasása RLA mátrix esetén. Tilos sor, kötött változó, szabad paraméter, ezek jelentése a megoldás/megoldhatóság szempontjából. Gauss-elimináció, összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az egyenletek és ismeretlenek száma között.

## 1. Lineáris egyenletrendszer

**Def: Lineáris egyenlet:** Ismeretlenek konstansszorosainak összege konstans. **Lineáris egyenletrendszer:** Véges sok lineáris egyenlet.

**Megoldás:** Olyan értékhalmaz, ami minden egyenletet igazgá tesz.

## 2. Kibővített együttható mátrix

**Def: Lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixa:** a sorok az egyenleteknek, az oszlopok az ismeretleneknek ill. az egyenletek jobb oldalainak felelnek meg, az egyes mezőkben pedig a megfelelő együttható ill. jobb oldali konstans áll.

## 3. Elemi sorkvivalens átalakítás

**Megoldás módszere:** Ekvivalens átalakításokat végzünk.

Ezek során a megoldások halmaza nem változik. Konkrétan: egyenleteket felcserélünk, egyenletet nemnullával végigszorozunk ill. az  $i$ -dik egyenletet kicseréljük az  $i$ -dik és  $j$ -dik egyenletek összegére. Erről szól a következő definíció.

**Def:** A kibővített egyhómx **elemi sorkvivalens átalakítása (ESÁ):**

(1) sorcsere, (2) sor nemnulla konstanssal végigszorozása, (3) az  $i$ -dik sor helyettesítése az  $i$ -dik és  $j$ -dik sorok (koordinátánkénti) összegével (az  $i$ -dik sor helyettesítése az  $i$ -dik sor és a  $j$ -dik sor konstansszorosának összegével, csupa0 sor hozzáadása/elhagyása).

## 4. kapcsolattal

**Biz:** Minden ESÁ előtti megoldás megoldás marad az ESÁ után is. Minden ESÁ fordítottja megkapható ESÁ-ok egymásutánjaként is. Ezért minden ESÁ utáni megoldás megoldja az ESÁ előtti előtti rendszert is.  $\square$

**Megj:** A kibővített együtthatómátrix a lineáris egyenletrendszer felírásának egy tömör módja: elkerüljük vele a műveleti- és egyenlőségjelekkel piszmozgást, mégis teljesen áttekinthető módon tartalmaz minden lényeges információt.

## 5. LA és RLA mátrix

**Def:** Az  $M$  mátrix **lépcsős alakú (LA)**, ha

- (1) minden sor első nemnulla eleme 1-es (ú.n. **vezér1-es**, avagy **v1**)
- (2) minden v1 feletti sorban van ettől a v1-től balra eső másik v1.

Az  $M$  mátrix **redukált lépcsős alakú (RLA)**, ha

- (3)  $M$  LA és (2)  $M$ -ben minden v1 felett csak nullák állnak.

**Példa:** LA mátrix

RLA mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ill. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 6. Vezéregyes

5LA és RLA mátrix

## 7. Megoldás leolvasása RLA mátrix esetén

**Példa:** RLA kibővített egyhómx:

$$\begin{array}{cccc|c}
 x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 5 & 7
 \end{array} \mapsto \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 1 \\ x_3 + 5x_4 = 7 \end{array} \mapsto \begin{array}{l} x_1 = 1 - 3x_2 + 2x_4 \\ x_3 = 7 - 5x_4 \end{array} \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}$$
  

$$\begin{array}{cccc|c}
 x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \mapsto \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 1 \\ x_3 + 5x_4 = 7 \\ 0 = 1 \\ 0 = 0 \end{array} \mapsto \text{f}$$

## 8. Tilos sor

**Def:** Kib. egyhómx **tilos sor**:  $0 \dots 0 \mid x$  alakú sor, ha  $x \neq 0$ .

## 9. Kötött változó

**Def:** A RLA kib. egyhómx v1-hez tartozó változója **kötött**, a többi változó (amihez nem tartozik v1) **szabad** (vagy **szabad paraméter**).

**Megf:** Ha a kib. egyhómx RLA, akkor (1) minden sor vagy a v1-hez tartozó változó értékadása, vagy tilos sor, vagy csupa0 sor.

## 10. Szabad paraméter

**Def:** A RLA kib. egyhómx v1-hez tartozó változója **kötött**, a többi változó (amihez nem tartozik v1) **szabad** (vagy **szabad paraméter**).

**Megf:** Ha a kib. egyhómx RLA, akkor (1) minden sor vagy a v1-hez tartozó változó értékadása, vagy tilos sor, vagy csupa0 sor.

## 11. jelentése

**Megf:** Ha a kib. egyhómx RLA, akkor (1) minden sor vagy a v1-hez tartozó változó értékadása, vagy tilos sor, vagy csupa0 sor.

(2) Ha van tilos sor, akkor nincs megoldás.

(3) Ha nincs tilos sor, a szabad paraméterek tetsz. értékadásához egyértelmű megoldás tartozik.

**Megf:** A lin. egyenletsz. megoldása tekinthető úgy, hogy a lin. egyenletsz. egy RLA kibővített egyhómx-szal van megadva.

**Cél:** Olyan eljárás, ami ESÁ-okkal tetsz. mátrixot RLA-vá alakít.

## 12. Gauss elimináció

**Gauss-elimináció:** Input:  $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrix.

Output: Egy  $M$ -ből ESÁ-okkal kapható  $M' \in \mathbb{R}^{n \times k}$  LA mátrix.

**Működés:** Az algoritmus fázisokból áll. Az  $i$ -dik fázisban keresünk egy nemnulla elemet az  $(i - 1)$ -dik sor alatt a lehető legkisebb sorszámú oszlopban. Ha nincs ilyen elem, az algoritmus véget ér. Sorcserével ezt a nemnulla elemet az  $i$ -dik sorba visszük.

Az  $i$ -dik sor konstanssal szorzásával ezt az elemet v1-sé alakítjuk.

Az  $i$ -dik sor alatti sorokhoz az  $i$ -dik sor konstansszorosát hozzáadva kinullázzuk a kapott v1 alatti elemeket.

### 13. összefüggés

**Megj:** (1) A Gauss-elimináció outputja LA. Az RLA-hoz további lépésekre van szükség: minden  $v_1$  felett kinullázhatók az elemek, ha a  $v_1$  sorának konstansszorosait a  $v_1$  feletti sorokhoz adjuk.

(2) Ha csupán LA (vagy RLA) a cél, eltérhetünk a Gauss-eliminációtól, feltéve, hogy ESÁ-okkal dolgozunk.

(3) A Gauss-elimináció megvalósítható rekurzív algoritmusként is. A  $GE(M)$  (az  $M$  mátrixot lépcsős alakra hozó eljárás):


**1.** Ha  $M$  első oszlopa csupa0, akkor  $M'$  az első oszlop törlésével keletkező mátrix. Output:  $GE(M')$  elé írunk egy csupa0 oszlopot.

**2.** Ha  $M$  első oszlopa tartalmaz nemnulla elemet, sorcserével és az első sor konstansszorosával az első sor első elemét  $v_1$ -sé tesszük, majd a  $v_1$  alatti elemeket ESÁ-okkal kinullázzuk. Legyen  $M'$  az első sor és első oszlop törlésével keletkező mátrix. Output:  $GE(M')$  elé írunk egy csupa0 oszlopot és az így kapott mátrix fölé a korábban törölt első sort.

1. Lineáris egyenletrendszer kib. egyhómxként is megadható.
2. ESÁ nem változtat a megoldásokon
3. ESÁ-okkal elérhető a RLA
4. A RLA-ból azonnal adódik a megoldás
  - ▶ Ha az utolsó oszlopban van  $v_1$ , akkor nincs megoldás
  - ▶ Ha az utolsó kivételével minden oszlopban van  $v_1$ , akkor egyetlen megoldás van
  - ▶ Ha az utolsón kívül más oszlopban sincs  $v_1$ , akkor van szabad paraméter, így végtelen sok különböző megoldás van.

**Köv:** Ha a lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor legalább annyi egyenlet van, mint ahány ismeretlen.

**Biz:** Az RLA-ra hozás után nincs szabad paraméter, tehát minden változóhoz tartozik  $v_1$ . Ezért a kibővített együtthatómátrixnak legalább annyi sora van, mint a változók száma.  $\square$

**Megj:** A fenti következmény fordított irányban nem igaz, és lényegében nincs más összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az ismeretlenek és egyenletek száma között. 



12. Az  $\mathbb{R}^n$  tér, vektorműveletek azonosságai, (generált) **altér** (példák), (triviális) **lineáris kombináció**, alterek metszete, **generátorrendszer**, **lineáris függetlenség** (kétféle definíció). Lin.ftn rendszer hízlalása, generátorrendszer ritkítása, kicserélési lemma, **FG-egyenlőtlenség** és következménye.

## 1. Az $\mathbb{R}^n$ tér

**Def:**  $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$  az  $A$  és  $B$ -beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$  a rendezett  $n$ -esek halmaza. Végül

$A^n := A \times A \times \dots \times A$  az  $n$ -szeres Descartes-szorzat jelölése.

**Megj:** (1) A továbbiakban  $\mathbb{R}^n$  elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket  $n$  magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk.

**Példa:**

$$\begin{pmatrix} e \\ \pi \\ 42 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ ill. } \underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ utóbbi}$$

esetben az 1-es felülről az  $i$ -dik helyen áll.

**Megj:** (1) A továbbiakban  $\mathbb{R}^n$  elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket  $n$  magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk.

**Def:**  $\underline{0}, \underline{e}_i$

(2) Ha  $n$  világos a szövegkörnyezetből, akkor  $\mathbb{R}^n$  elemeit vektoroknak,  $\mathbb{R}$  elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

**Konvenció:** A jelölés során az oszlopvektorokat aláhúzással különböztetjük meg a skalároktól.

**Megj:** A vektorok tehát itt és most nem „irányított szakaszok”, hanem ennél általánosabb fogalmat takarnak: az irányított szakaszok is tekinthetők vektornak, de egy vektor a mi tárgyalásunkban nem feltétlenül irányított szakasz.

## 2. Vektorműveletek azonosságai

**Állítás:** Az  $\mathbb{R}^n$  tér vektoraival történő számolásban néhány fontos szabály sokat segít. Tetsz.  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$  vektorokra és  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  skalárookra az alábbiak teljesülnek

- (1)  $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$  (az összeadás kommutatív)
- (2)  $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$  (az összeadás asszociatív)
- (3)  $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$  (egyik disztributivitás)
- (4)  $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}$  (másik disztributivitás)
- (5)  $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u})$  (skalárral szorzás asszociativitása)

**Biz:** Mivel mindkét művelet koordinátánként történik, elég az egyes azonosságokat koordinátánként ellenőrizni. Ezek viszont éppen a valós számokra (azaz a skalárokra) vonatkozó, jól ismert szabályok. □

**Konvenció:**  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$  esetén  $-\underline{v} := (-1) \cdot \underline{v}$ .

**Megj:** Vektorok között nem csak az összeadás, hanem a kivonás is értelmezhető:  $\underline{u} - \underline{v} := \underline{u} + (-1)\underline{v}$ . Ezáltal a kivonás is egyfajta összeadás, tehát az összeadásra vonatkozó szabályok értelemszerű változatai a kivonásra is érvényesek.

A vektorokkal történő számolásakor érvényes szabályok nagyon hasonlóak a valós számok esetén megszokott szabályokhoz.

### 3. Generált altér(példák)

**Def:**  $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$  az  $\mathbb{R}^n$  tér **altér** (jel:  $V \leq \mathbb{R}^n$ ), ha  $V$  zárt a műveletekre:  $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$  teljesül  $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$  és  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  esetén.

**Példa:**  $\mathbb{R}^2$ -ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak.  $\mathbb{R}^3$ -ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.

**Kérdés:** Mik az  $\mathbb{R}^n$  tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?

**Megf:** Ha  $V \leq \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k \in V$  és  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ , akkor  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \dots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$ .

**Def:** Az  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$  által **generált altér** a  $\langle \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \rangle$  halmaz.

Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.

**Megf:** (1) Alterek metszete altér:  $V_i \leq \mathbb{R}^n \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$ .

(2)  $\{0\} \leq \mathbb{R}^n$ . (3)  $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$ . **Def:**  $\mathbb{R}^n$  **triviális alterei:**  $\{0\}, \mathbb{R}^n$ .

### 4. Triviális lineáris kombináció

**Def:** A  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$  kifejezés az  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$  **lineáris kombinációja**.

**Triviális lineáris kombináció:**  $0 \cdot \underline{x}_1 + \dots + 0 \cdot \underline{x}_k$ .

**Megf:**  $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V \text{ zárt a lineáris kombinációra})$

**Biz:**  $\Rightarrow$ :  $\lambda_i \underline{x}_i \in V \forall i$  esetén, így a  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$  összegük is  $V$ -beli.

$\Leftarrow$ : Ha  $\underline{x}, \underline{y} \in V$  és  $\lambda \in \mathbb{R}$ , akkor  $\underline{x} + \underline{y}$  ill.  $\lambda \underline{x}$  lineáris kombinációk.

Mivel  $V$  zárt a lineáris kombinációra, ezért  $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ . Ez tetszőleges  $\underline{x}, \underline{y}, \lambda$  esetén fennáll, tehát  $V$  zárt a műveletekre, vagyis altér. □

### 5. Alterek metszete

**Def:** Az  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$  által **generált altér** a  $\langle \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \rangle$  halmaz.

Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.

**Megf:** (1) Alterek metszete altér:  $V_i \leq \mathbb{R}^n \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$ .

(2)  $\{0\} \leq \mathbb{R}^n$ . (3)  $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$ . **Def:**  $\mathbb{R}^n$  **triviális alterei:**  $\{0\}, \mathbb{R}^n$ .

### 6. Generátorrendszer

**Def:** Az  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$  vektorok a  $V \leq \mathbb{R}^n$  altér

**generátorrendszerét** alkotják, ha  $\langle \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \rangle = V$ .

**Példa:**  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  az  $\mathbb{R}^n$  generátorrendszere, hisz minden  $\mathbb{R}^n$ -beli vektor előáll az egységvektorok lineáris kombinációjaként, azaz  $\langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \rangle = \mathbb{R}^n$ .

Ha  $\mathbb{R}^2$ -ben ha  $\underline{u}$  és  $\underline{v}$  nem párhuzamosak, akkor  $\{\underline{u}, \underline{v}\}$  generátorrendszer, hiszen bármely  $\underline{z}$  vektor előállítható  $\underline{u}$  és  $\underline{v}$  lineáris kombinációjaként. (Ehhez  $\underline{u}$  és  $\underline{v}$  egyenesére kell a „másik” vektorral párhuzamosan vetíteni az előállítandó  $\underline{z}$  vektort.)

Hasonlóan, ha  $\mathbb{R}^3$ -ban három vektor nem esik ugyanarra az origón átmenő síkra, akkor ez a három vektor generátorrendszert alkot.

## 7. Lineáris függetlenség 1.

**Def:** Az  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$  vektorok **lineárisan függetlenek**, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:

$$\lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor **lineárisan összefüggők**.

**Példa:**  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  lin. ftn  $\mathbb{R}^n$ -ben, hisz ha  $\lambda_1 \underline{e}_1 + \dots + \lambda_n \underline{e}_n = \underline{0}$  akkor az  $i$ -dik koordináta 0 volta miatt  $\lambda_i = 0$ , tehát a lineáris kombináció triviális.

$\mathbb{R}^2$ -ben két vektor akkor lin.őf, ha párhuzamosak. Tehát ha nem párhuzamosak, akkor lin. ftn-ek. ( $\underline{0}$  minden vektorral párhuzamos.)  
 $\mathbb{R}^3$ -ban pedig az igaz, hogy ha három vektor nem esik ugyanarra az origón átmenő síkra, akkor ez a három vektor lineárisan független rendszert alkot.

**Megj:** A lin.ftn-ség (akárcsak a lin.őf tulajdonság) vektorok egy halmazára és nem az egyes vektorokra vonatkozik. Hasonló igaz a generátorrendszerre. Az, hogy egy konkrét  $\underline{v}$  vektor benne van egy lin.ftn (vagy lin.őf vagy generátor-) rendszerben lényegében semmi információt nem ad  $\underline{v}$ -ről.

## 8. Lineáris függetlenség 2.

**Lemma:**  $\{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k\}$  lineárisan független vektorrendszer  $\iff$  egyik  $\underline{x}_i$  sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

**Biz:** A fenti állítások tagadásainak ekvivalenciáját igazoljuk.

1. Tfh  $\{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k\}$  **nem** lineárisan független, azaz  $\lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0}$  és  $\lambda_i \neq 0$ . Ekkor  $\underline{x}_i$  előállítható a többiből:  $\underline{x}_i = \frac{-1}{\lambda_i} \cdot (\lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \dots + \lambda_k \underline{x}_k)$ .
2. Most tfh valamelyik  $\underline{x}_i$  előáll a többi lineáris kombinációjaként:  $\underline{x}_i = \lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \dots + \lambda_k \underline{x}_k$ . Ekkor  $\{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k\}$  nem lineárisan független, hiszen a nullvektor megkapható nemtriviális lineáris kombinációjaként:

$$\underline{0} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + (-1) \cdot \underline{x}_i + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \dots + \lambda_k \underline{x}_k. \quad \square$$

**Állítás:** Tfh  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{v} \notin G$  és  $\langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle = V \leq \mathbb{R}^n$ . Ekkor  $(\langle G \rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G \rangle)$

**Megj:** A fenti állítás tkp azt mondja ki, hogy egy  $V$  altér generátorrendszeréből pontosan akkor tudunk egy elemet elvenni úgy, hogy a maradék vektorok továbbra is generátorrendszert alkossanak, ha a kihagyott elem előáll a maradék elemek lineáris kombinációjaként.

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Mivel  $\langle G \rangle = V = \langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle$ , ezért  $\underline{v} \in V$  és  $\underline{v} \in \langle G \rangle$ .

$\Leftarrow$ : Tetsz.  $\underline{u} \in V$  elemről azt kell megmutatni, hogy  $\underline{u} \in \langle G \rangle$ .

Mivel  $\underline{v} \in \langle G \rangle$ , feltehető, hogy  $\underline{v} = \sum_{\underline{g} \in G} \lambda_{\underline{g}} \underline{g}$ .

Tudjuk, hogy  $\underline{u} \in V = \langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle$ , ezért  $\underline{u} = \lambda \underline{v} + \sum_{\underline{g} \in G} \mu_{\underline{g}} \underline{g}$ .

Ebbe behelyettesítve a fenti kifejezést  $\underline{u} = \sum_{\underline{g} \in G} (\mu_{\underline{g}} + \lambda \cdot \lambda_{\underline{g}}) \underline{g}$  adódik, azaz  $\underline{u} \in \langle G \rangle$ . Ez bmely  $\underline{u} \in V$ -re igaz, így  $\langle G \rangle = V$ .  $\square$



9. Lin.ftn rendszer hízlalása

- Megf:** (1) A  $\{0\}$  nem lineárisan független:  $1 \cdot 0 = 0$ .  
(2) Két vektor akkor lin.ftn, ha nem egymás skalárszorosai.  
(3)  $\mathbb{R}^2$ -ben két vektor pontosan akkor lineárisan független, ha (irányított szakaszként) nem párhuzamosak. Bármely két nem párhuzamos  $\mathbb{R}^2$ -beli vektor generálja  $\mathbb{R}^2$ -t. (ábra)  
(4) Ha  $\langle G \rangle = V$  és  $G \subseteq G' \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ , akkor  $\langle G' \rangle = V$ , azaz generátorrendszert ( $V$ -n belül) hízlalva generátorrendszer marad.  
(5)  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  lin.ftn és  $F' \subseteq F$ , akkor  $F'$  is lin.ftn, azaz lin.ftn rendszert ritkítva lin.ftn marad.
- 

10. Generátorrendszer ritkítása

- Megf:** (1) A  $\{0\}$  nem lineárisan független:  $1 \cdot 0 = 0$ .  
(2) Két vektor akkor lin.ftn, ha nem egymás skalárszorosai.  
(3)  $\mathbb{R}^2$ -ben két vektor pontosan akkor lineárisan független, ha (irányított szakaszként) nem párhuzamosak. Bármely két nem párhuzamos  $\mathbb{R}^2$ -beli vektor generálja  $\mathbb{R}^2$ -t. (ábra)  
(4) Ha  $\langle G \rangle = V$  és  $G \subseteq G' \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ , akkor  $\langle G' \rangle = V$ , azaz generátorrendszert ( $V$ -n belül) hízlalva generátorrendszer marad.  
(5)  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  lin.ftn és  $F' \subseteq F$ , akkor  $F'$  is lin.ftn, azaz lin.ftn rendszert ritkítva lin.ftn marad.
- 

11. Kicserélési lemma

- Lemma:** Tfh  $F = \{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$  lin.ftn és  $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$ . Ekkor  $(F \cup \{\underline{f}\} \text{ lin.ftn.}) \iff (\underline{f} \notin \langle F \rangle)$   
**Köv: (Kicserélési lemma)** Ha  $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$  lin.ftn. és  $\langle G \rangle = V$  gen.rsz. akkor  $\forall \underline{f} \in F \exists \underline{g} \in G$ , amire  $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$  is lin.ftn.  
**Megj:** A kicserélési lemma szerint bárhogy is törölünk a  $V$  altér egy ftn rendszeréből egy vektort, az pótolható  $V$  generátorrendszerének egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer lin.ftn marad.  
**Biz:** Legyen  $F' := F \setminus \{\underline{f}\}$ . Indirekt bizonyítunk.  
Tfh  $F' \cup \{\underline{g}\}$  egyetlen  $\underline{g} \in G$ -re sem lin. ftn. Ekkor az előző lemma miatt  $\underline{g} \in \langle F' \rangle$  teljesül minden  $\underline{g} \in G$ -re. Ezért  $G \subseteq \langle F' \rangle$ , ahonnan  $\langle G \rangle \subseteq \langle F' \rangle$  következik. Ebből pedig  $\underline{f} \in V = \langle G \rangle \subseteq \langle F' \rangle$ , azaz  $\underline{f} \in \langle F' \rangle$  adódik. A fenti lemma miatt  $\{f\} \cup F' = F$  nem lin. ftn, ami ellentmondás.  
Az indirekt feltevés hamis, így  $\exists \underline{g} \in G$ , amire  $F' \cup \{\underline{g}\}$  lin.ftn.  $\square$
- 

12. FG-Egyenlőtlenség

- FG-egyenlőtlenség:** Tfh  $\tilde{G}$  a  $V \leq \mathbb{R}^n$  altér generátorrendszere, és  $F \subseteq V$  lin.ftn. Ekkor  $|F| \leq |\tilde{G}|$ .  
**Megj:** Magyarul: altérben egy ftn. rendszer sosem nagyobb, mint egy generátorrendszer.  
**Biz:** Legyen  $F_0 := F$ . Ha  $F_0 \subseteq G$ , akkor  $|F_0| \leq |G|$ . Ha  $F_0 \not\subseteq G$ , akkor  $F_0 \setminus G \neq \emptyset$ , legyen mondjuk  $\underline{f} \in F_0 \setminus G$ . A kicserélési lemma miatt van olyan  $\underline{g} \in G$ , amire  $F_1 := F_0 \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$  lin.ftn. Ezzel az  $F_1$ -gyel ugyanezt folytatva kapjuk az  $F_2, F_3, \dots$ , lin.ftn rendszereket. Előbb-utóbb olyan  $F_i$ -hez jutunk, amivel ez már nem folytatható, mert  $F_i \subseteq G$ . Ekkor  $|F_0| = |F_1| = \dots = |F_i| \leq |G|$ , győztünk.  $\square$
-

**Köv:** Ha  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  lin.ftn, akkor  $|F| \leq n$ .

**Biz:** Láttuk, hogy  $G = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$  az  $\mathbb{R}^n$  generátorrendszere. Az FG-egyenlőtlenség miatt  $|F| \leq |G| = n$ .  $\square$

---

**Allítás:** Tfh  $F = \{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$  lin.ftn. és  $\underline{f} \in \langle F \rangle$ . Ekkor  $\underline{f}$  egyértelműen áll elő  $F$ -beli vektorok lin.komb.-jaként.

**Biz:** Mivel  $\underline{f} \in \langle F \rangle$ , ezért  $\underline{f}$  előáll az  $F$ -beliek lin.komb.-jaként. Tfh  $\underline{f} = \lambda_1 \underline{f}_1 + \dots + \lambda_k \underline{f}_k = \mu_1 \underline{f}_1 + \dots + \mu_k \underline{f}_k$  két előállítás. Ekkor  $\underline{0} = \underline{f} - \underline{f} = (\lambda_1 - \mu_1) \underline{f}_1 + \dots + (\lambda_k - \mu_k) \underline{f}_k$ .

Mivel  $F$  lin.ftn, a JO-on álló lineáris kombináció triviális, azaz  $\lambda_i = \mu_i \forall i$ . Így a két fenti előállítás megegyezik, vagyis  $\underline{f}$  csak egyféleképp áll elő az  $F$ -beliek lin.komb.-jaként.  $\square$

---

13. ESÁ hatása a sor- és oszlopvektorokra, **oszlopvektorok lin.ftn-ségének eldöntése**. Bázis fogalma, **altér** bázisának előállítás a generátorrendszerből ill. homogén lineáris egyenletrendszerrel megadott altér esetén.

1. ESÁ hatása a sor- és oszlopvektorokra, **oszlopvektorok lin.ftn-ségének eldöntése**

Egy  $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrixot tekinthetünk  $n$  db  $\mathbb{R}^k$ -beli sorvektornak és  $k$  db  $\mathbb{R}^n$ -beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

**Állítás:** Tfh  $M'$ -t ESÁ-okkal kaptuk az  $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrixból. Ha  $S$  ill.  $S'$  az  $M$  ill.  $M'$  sorvektorainak halmaza, akkor  $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$ .

**Állítás:** Tfh az  $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrixból  $M'$ -t ESÁ-okkal kaptuk és  $O = \{\underline{o}_1, \dots, \underline{o}_k\}$  ill.  $O' = \{\underline{o}'_1, \dots, \underline{o}'_k\}$  az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor  $O$ -n és  $O'$ -n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:  $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$ .

**Példa:** Döntsük el, hogy lin.ftn. rendszert alkotnak-e az alábbi  $M$  mátrix oszlopai. Megoldás: ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 5 & 0 & 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & -7 & A \text{ kapott } M' \text{ mátrixra } \underline{o}'_4 = -7\underline{o}'_1 + 3\underline{o}'_2 + 2\underline{o}'_3. \text{ Így} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & M \text{ oszloppaira } \underline{o}_4 = -7\underline{o}_1 + 3\underline{o}_2 + 2\underline{o}_3 \text{ teljesül, ezért} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & M \text{ oszlopai a korábbi lemma miatt nem lin. ftn.-ek.} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$

**Biz:** Feltehető, hogy  $M'$ -t egyetlen ESÁ-sal kaptuk  $M$ -ből.

Bármelyik konkrét ESÁ-t is alkalmaztuk,  $S' \subseteq \langle S \rangle$ , így  $\langle S' \rangle \subseteq \langle S \rangle$ .

Láttuk, hogy bármely ESÁ megfordítása is kivitelezhető ESÁ-okkal, ezért  $\langle S \rangle \subseteq \langle S' \rangle$ , és a két megfigyelésből  $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$  adódik.  $\square$

**Biz:** Ismét feltehető, hogy  $M'$  egyetlen ESÁ-sal keletkezett.

Ráadásul elég a  $\Rightarrow$ : irányt bizonyítani: a  $\Leftarrow$ : következik abból,

hogy minden ESÁ fordítottja megvalósítható legfeljebb három

ESÁ-sal. Ezért ha egy lin.összefüggés fennál  $M'$ -re akkor az ezt

legfeljebb három ESÁ megőrzi, tehát igaz marad  $M$ -re is.

**Biz:**  $\Rightarrow$ : A fenti lineáris összefüggés  $M$ -re pontosan azt jelenti,

hogy a  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{x}_i$  egyenletnek  $M$  minden sora

megoldása. Nekünk pedig azt kell igazolni, hogy ugyanezt az

egyenletet az ESÁ után kapott  $M'$  minden sora is megoldja.

Sorcsere esetén pontosan ugyanazokról az egyenlőségekről van szó,

skalárral szorzás esetén az egyik egyenletet skalárral kell szorozni,

sorösszeadás esetén pedig az új egyenlőség két korábban teljesülő

egyenlet összege.  $\square$

## 2. Bázis fogalma

**Def:** A  $V \leq \mathbb{R}^n$  altér **bázisa** a  $V$  egy lin.ftn generátorrendszere.

**Példa:** Az  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  vektorok az  $\mathbb{R}^n$  **standard bázisát** alkotják.

**Kínzó kérdés:** Minden altérnek van bázisa? Ha  $\mathbb{R}^n$  egy  $V$  altérének van, akkor hogyan lehet előállítani  $V$  egy bázisát?

**1. módszer:** Ha  $V = \langle G \rangle$ , azaz ha ismert a  $V$  egy véges  $G$  generátorrendszere, akkor  $G$ -t addig ritkítjuk, amíg lin.ftn nem lesz. Konkrétan: ha egy  $\underline{g} \in G$  generátorelem előáll a  $G \setminus \{\underline{g}\}$  elemeinek alkalmas lin. kombinációjaként, akkor  $G \setminus \{\underline{g}\}$  is generálja  $V$ -t. Ezért  $\underline{g}$ -t eldobhatjuk. Ha már nincs ilyen eldobható  $\underline{g}$  vektor, akkor  $G$  maradéka nem csak generátorrendszer, de lin.ftn is.

**2. módszer:** Felépíthetjük  $V$  bázisát a  $V$  egy tetsz.  $F$  lin.ftn rendszeréből (akár  $F = \emptyset$ -ből) kiindulva. Ha  $\langle F \rangle = V$ , akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor tetsz.  $\underline{f} \in V \setminus \langle F \rangle$  esetén  $F \cup \{\underline{f}\}$  lin.ftn marad. Az FG-egyenlőtlenség miatt  $F$  nem tartalmazhat  $n$ -nél több elemet, ezért legfeljebb  $n$  lépésben megkapjuk  $V$  bázisát.

## 3. Altér bázisának előállítása generátorrendszerből

**Példa:**

Keressük meg az alábbi vektorok által generált  $V$  altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Megoldás:** Az  $(\underline{u} | \underline{v} | \underline{w} | \underline{x} | \underline{y})$  mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \\ \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \\ \underline{u} & \underline{v} & \underline{w} & \underline{x} & \underline{y} & & & & & & & & & & \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & & & & & & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & \end{array}$$

Ezek szerint  $\underline{w} = \underline{v} - \underline{u}$ ,  $\underline{x} = 3\underline{u} - 2\underline{v}$ .

A  $v_1$ -ek oszlopai lin.ftn generátorrendszer, azaz  $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}\}$  a  $V$  altér bázisa. □

**Példa:** Keressük meg az alábbi  $V \subseteq \mathbb{R}^4$  altér egy bázisát!

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, 3x_2 - 2x_4 = 0 \right\}$$

**Megoldás:** Az altér egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaiból áll. (Homogén: a jobboldalon 0-k állnak, amiket a kib. egyhómx-ból elhagyunk.) A megoldásokat leíró képletből fogjuk meghatározni  $V$  egy bázisát.

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}, \\ x_1 = -x_3 - \frac{5}{3}x_4, \\ x_2 = \frac{2}{3}x_4. \end{array}$$

A bázis elkészítéséhez a szp-ek olyan lin.ftn értékadásait keressük, amelyek lin.komb-jaként a szp-ek tetsz. értékadása előáll. Ilyen pl., ha minden lehetséges módon egy szp-nek 1, a többinek 0 értéket adunk. Azaz az  $x_3 = 1, x_4 = 0$  ill.  $x_3 = 0, x_4 = 1$  értékadásokhoz a

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ és } \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ vektorokból álló bázis tartozik. } \square$$

**Példa:** Írjuk fel a  $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$  alteret lin.egyrsz megoldásaiként, ha

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Megoldás:** Az  $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{z}|\underline{x})$  mátrixot RLA-ra (LA-ra) hozzuk.

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 & 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 & 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 & -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 & 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 & 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 & 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 & 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 & 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & & & & & & & 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & & & & & & & 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & & & & & & & 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & & & & & & & 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & & & & & & & 1 & 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & -2 & & & & & & & 0 & 1 & -2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 9 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x_2 + 2x_3 + x_4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3x_1 - x_2 + 13x_3 - 10x_4}{3} \end{array}$$

A kiindulási mátrix 5-dik oszlopa pontosan akkor van  $V$ -ben, ha az első 4 oszlop generálja. Ez azzal ekvivalens, hogy az RLA mátrix első 4 oszlopa generálja az 5-diket. Mivel  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$  a generáló oszlopok között vannak, ezért csupán  $3x_1 - x_2 + 13x_3 - 10x_4 = 0$  a feltétel.  $\square$

4. homogén lineáris egyenletrendszerrel megadott altér esetén



14. Generátorrendszerből homogén lin. egyenletrendszer előállítása. Altér dimenziójának jóldefiniáltsága,  $\mathbb{R}^n$  standard bázisa, bázishoz tartozó koordinátavektor kiszámítása.

1. Generátorrendszerből homogén lin. egyenletrendszer előállítása

2. Altér dimenziójának jóldefiniáltsága

**Tétel:** Ha  $B_1$  és  $B_2$  a  $V \leq \mathbb{R}^n$  bázisai, akkor  $|B_1| = |B_2|$ .

**Biz:** Mivel  $B_1$  lin.ftn és  $B_2$  generátorrendszer  $V$ -ben, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt  $|B_1| \leq |B_2|$ .

Az is igaz, hogy  $B_2$  lin.ftn és  $B_1$  generátorrendszer  $V$ -ben, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt  $|B_2| \leq |B_1|$  is teljesül.

A két eredmény összevetéséből  $|B_1| = |B_2|$  adódik.  $\square$

---

**Def:** A  $V \leq \mathbb{R}^n$  altér **dimenziója**  $\dim V = k$ , ha  $V$ -nek van  $k$  vektorból álló bázisa.

**Megj:** A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.

**Példa:** Az  $\mathbb{R}^n$  tér dimenziója  $n$ .

**Állítás:** Ha  $U \leq V \leq \mathbb{R}^n$ , akkor  $\dim U \leq \dim V$ .

**Biz:** Legyen  $B$  az  $U$  bázisa. Ekkor  $B \subseteq V$  lin.ftn, ezért a korábban látott 2. módszerrel  $B$ -t ki lehet egészíteni  $V$  egy  $B'$  bázisává, így  $\dim U = |B| \leq |B'| = \dim V$ .  $\square$

---

**Állítás:** Ha  $V \leq \mathbb{R}^n$  és  $V_1, V_2$  a  $V$  alterei, akkor  $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim V \geq \dim V_1 + \dim V_2$ .

**Biz:** Egészítsük ki az  $U \cap V$  egy  $B$  bázisát a  $V_1$  egy  $B \cup B_1$  ill. a  $V_2$  egy  $B \cup B_2$  bázisává. Igazoljuk, hogy  $B \cup B_1 \cup B_2$  lin.ftn. Tfh  $\sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b} + \sum_{\underline{b}_1 \in B_1} \lambda_{\underline{b}_1} \underline{b}_1 + \sum_{\underline{b}_2 \in B_2} \lambda_{\underline{b}_2} \underline{b}_2 = \underline{0}$ . Ezt átrendezve:  $V_1 \ni \underline{x} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b} + \sum_{\underline{b}_1 \in B_1} \lambda_{\underline{b}_1} \underline{b}_1 = -\sum_{\underline{b}_2 \in B_2} \lambda_{\underline{b}_2} \underline{b}_2 \in V_2$  adódik, ezért  $\underline{x} \in V_1 \cap V_2$ . Ekkor  $\underline{x} = \sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b}$ , hisz  $B$  a  $V_1 \cap V_2$  bázisa. Innen  $\sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b} + \sum_{\underline{b}_2 \in B_2} \lambda_{\underline{b}_2} \underline{b}_2 = \underline{x} - \underline{x} = \underline{0}$ . A  $B \cup B_2$  lin.ftn-sége miatt  $\lambda_{\underline{b}_2} = 0 \ \forall \underline{b}_2 \in B_2$ . Hasonlóan  $\lambda_{\underline{b}_1} = 0 \ \forall \underline{b}_1 \in B_1$ , és  $\lambda_{\underline{b}} = 0 \ \forall \underline{b} \in B$ , azaz  $B \cup B_1 \cup B_2$  lin.ftn. Ebből adódik, hogy  $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim V \geq |B| + |B_1| + |B_2| + |B| = \dim V_1 + \dim V_2$ .  $\square$

**Köv:**  $\mathbb{R}^3$ -ban bármely két origón áthaladó sík (más szóval: kétdimenziós altér) tartalmaz közös egyenest.

**Megj:**  $\mathbb{R}^4$ -ben már található két olyan origón áthaladó sík, amik csak az origóban metszik egymást. Ilyenek pl.  $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle$  ill.  $\langle \underline{e}_3, \underline{e}_4 \rangle$ .

A továbbiakban azt szeretnénk indokolni, hogy  $\mathbb{R}^n$  tetszőleges  $k$  dimenziós altere „lényegében” úgy viselkedik, mint  $\mathbb{R}^k$ .

---

### 3. $\mathbb{R}^n$ standard bázisa

**Def:** A  $V \leq \mathbb{R}^n$  altér **bázisa** a  $V$  egy lin.ftn generátorrendszere.

**Példa:** Az  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  vektorok az  $\mathbb{R}^n$  **standard bázisát** alkotják.

**Kínzó kérdés:** Minden altérnek van bázisa? Ha  $\mathbb{R}^n$  egy  $V$  altérének van, akkor hogyan lehet előállítani  $V$  egy bázisát?

**1. módszer:** Ha  $V = \langle G \rangle$ , azaz ha ismert a  $V$  egy véges  $G$  generátorrendszere, akkor  $G$ -t addig ritkítjuk, amíg lin.ftn nem lesz. Konkrétan: ha egy  $\underline{g} \in G$  generátorelem előáll a  $G \setminus \{\underline{g}\}$  elemeinek alkalmas lin. kombinációjaként, akkor  $G \setminus \{\underline{g}\}$  is generálja  $V$ -t. Ezért  $\underline{g}$ -t eldobhatjuk. Ha már nincs ilyen eldobható  $\underline{g}$  vektor, akkor  $G$  maradéka nem csak generátorrendszer, de lin.ftn is.

**2. módszer:** Felépíthetjük  $V$  bázisát a  $V$  egy tetsz.  $F$  lin.ftn rendszeréből (akár  $F = \emptyset$ -ből) kiindulva. Ha  $\langle F \rangle = V$ , akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor tetsz.  $\underline{f} \in V \setminus \langle F \rangle$  esetén  $F \cup \{\underline{f}\}$  lin.ftn marad. Az FG-egyenlőtlenség miatt  $F$  nem tartalmazhat  $n$ -nél több elemet, ezért legfeljebb  $n$  lépésben megkapjuk  $V$  bázisát.

#### Bázis előállítása generátorrendszerből

**Példa:**

Keressük meg az alábbi vektorok által generált  $V$  altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Megoldás:** Az  $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$  mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk.

Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hline \underline{u} & \underline{v} & \underline{w} & \underline{x} & \underline{y} & \text{Ezek szerint } \underline{w} = \underline{v} - \underline{u}, \underline{x} = 3\underline{u} - 2\underline{v}. \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & \text{A } v_1\text{-ek oszlopai lin.ftn generátorrendszer,} \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & \text{azaz } \{\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}\} \text{ a } V \text{ altér bázisa.} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

□

#### 4. Bázishoz tartozó koordinátavektor kiszámítása

Legyen  $B$  a  $V \leq \mathbb{R}^n$  altér bázisa. Mivel  $B$  generátorrendszer, minden  $\underline{v} \in V$  előáll a  $B$  elemeinek lin.komb-jaként, azaz

$$\underline{v} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b} \text{ alakban.}$$

A  $B$  bázis lin.ftn-ségéből pedig az következik, hogy tetszőleges

$\underline{v} \in V$  lin.komb-ként történő előállítása egyértelmű: ha

$$\underline{v} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b} = \sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b}, \text{ akkor } \lambda_{\underline{b}} = \mu_{\underline{b}} \quad \forall \underline{b} \in B.$$

Ez a gondolatmenet indokolja az alábbi fogalom jóldefiniáltságát.

**Def:** Ha  $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$  a  $V \leq \mathbb{R}^n$  altér bázisa és

$\underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$ , akkor a  $\underline{v}$  vektor  **$B$  bázis szerinti koordinátavektora**

$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

---

Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

**Állítás:** Ha  $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$  a  $V \leq \mathbb{R}^n$  altér bázisa és

$\underline{u}, \underline{v} \in V$  ill.  $\lambda \in \mathbb{R}$ , akkor (1)  $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$  ill.

(2)  $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$ .

**Biz:** (1) Tfh  $[\underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$  és  $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}$ . Ekkor  $\underline{u} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$

és  $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{b}_i$ , tehát

$$\underline{u} + \underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i + \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_i) \underline{b}_i, \text{ ezért}$$

$$[\underline{u} + \underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_k + \mu_k \end{pmatrix} = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B.$$

---

**Biz:** (2) Tfh  $[\underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$ . Ekkor

$$\lambda \underline{u} = \lambda \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^k \lambda \lambda_i \underline{b}_i \Rightarrow [\lambda \underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda \lambda_k \end{pmatrix} = \lambda [\underline{u}]_B \quad \square$$

---

**Megj:** A fenti állítás azt mutatja meg, hogy  $\mathbb{R}^n$  bármely  $V$  altére lényegében ugyanúgy viselkedik, mint az  $\mathbb{R}^k$  tér, ahol  $k = \dim V$ .

---



15.  $n$  elem permutációja, a permutáció **inverziószáma**. **Bástyaelhelyezés**, inverzióban álló bástyapárok, **determináns**, **felső háromszögmátrix determinánsa**.

## 1. $N$ elem permutációja

Az  $e_1, e_2, \dots, e_n$  tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

**Példa:**

1	2	3	4	5	6	7	8	
$e_3$	$e_8$	$e_5$	$e_7$	$e_1$	$e_6$	$e_2$	$e_4$	Orbitok: $(e_1, e_5, e_3),$ $(e_8, e_2, e_7, e_4), (e_6)$

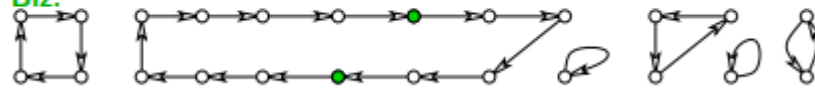
**Megf:** Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

**Def:** A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció **orbitjai**.

**Megf:** Az  $e_1, e_2, \dots, e_n$  vektorok tetszőleges sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik.

Ugyanez igaz a páros méretű orbitok számára is.

**Biz:**



**Köv:** Az  $e_1, e_2, \dots, e_n$  vektorok tetsz. sorrendjére ekvivalensek:

- (1) a sorrend ps sok cserével kapható  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ -ből,
- (2) a sorrend orbitjai számának paritása megegyezik  $n$  paritásával,
- (3) a sorrend páros méretű orbitjainak száma páros.

Bármelyik teljesül a fentiek közül, akkor a megfelelő hiperkocka térfogata pozitív.

**Biz:** Az  $e_1, e_2, \dots, e_n$  sorrendnek  $n$  orbitja van, és ezekből a páros méretűek száma 0. □

**Megj:** Hagyományosan egy harmadik módszert használunk az előjel meghatározására.

## 2. A permutáció inverziószáma

**Def:** Az  $f : A \rightarrow B$  függvény **bijekció**, ha minden  $B$ -beli elem pontosan egy  $A$ -beli képeként áll elő.

**Def:** A  $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  bijekciót  **$n$  elem permutációjának** nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza  $S_n$ .

**Megf:** Az  $e_1, e_2, \dots, e_n$  vektorok tetsz. sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű  $\sigma$  permutáció, amelyre  $\sigma(i) = j$ , ha  $e_i$   $j$ -dik a sorban.

**Példa:** Az  $(e_3, e_8, e_5, e_7, e_1, e_6, e_2, e_4)$  sorrendhez az alábbi  $\sigma$

permutáció tartozik:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(i)$	5	7	1	8	3	6	4	2

**Def:** A  $\sigma \in S_n$  permutációban az  $\{i, j\}$  pár **inverzióban áll**, ha  $i$  és  $j$  nagyságviszonya fordított  $\sigma(i)$  és  $\sigma(j)$  nagyságviszonyához képest. A  $\sigma \in S_n$  permutáció  $I(\sigma)$ -val jelölt **inverziószáma** a  $\sigma$  szerint inverzióban álló párok száma.

**Megf:** (1) Szomsz. vektorok cseréjekor  $I(\sigma)$  1-gyel változik.

(2) Két tetsz. vektor cseréjekor  $I(\sigma)$  mindig páratlannal változik.

**Biz:** (1) A két felcserélt vektor viszonya megfordul, minden más pár ugyanolyan marad, mint korábban volt.

**Biz:** (2) Ha a felcserélt vektorok között  $k$  másik vektor van, akkor ugyanez a csere megkapható  $2k + 1$  szomszédos vektorpár cseréjének egymásutánjaként. Az inverziószám így  $(2k + 1)$ -szer változik 1-gyel, ezért összességében páratlannal változik.  $\square$

**Köv:** Az egységvektorok egy sorrendjéhez tartozó  $\sigma$  permutáció inverziószáma pontosan akkor páros, ha ez a sorrend páros sok vektorcserével kapható az  $(e_1, \dots, e_n)$  sorrendből.

**Köv:** A  $\sigma$  permutációhoz tartozó hiperkocka térfogatának előjele  $(-1)^{I(\sigma)}$ . Hogyan határozható meg gyorsan ez az előjel?

### 3. Bástyaelhelyezés

Az  $(e_1, \dots, e_n)$  tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az  $n \times n$  méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek **bástyaelhelyezést** alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

Legyen  $\sigma$  a sorrendhez tartozó permutáció.

Mit jelent, hogy az  $\{i, j\}$  pár  $\sigma$  szerint inverzióban áll?

Azt, hogy  $e_i$  és  $e_j$  közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.

Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.

**Köv:** Az  $(e_1, \dots, e_n)$  egy sorrendjéhez tartozó  $\sigma$  permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számával.

**Példa:**


Navigation icons: back, forward, search, etc.

### 4. Inverzióban álló bástyapárok

## 5. Determináns

**Def:** Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  négyzetes mátrix **determinánsa**  $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ , ahol  $a_{i,j}$  az  $i$ -dik sornak  $j$ -dik eleme. A  $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$  szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

**Megj:** (1) Az  $A$  mátrix determinánsa tehát az  $A$  bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros. (2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másféleképpen nincs. (3)  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelogramma előjeles területe ill. térfogata.

**Def:** Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrix **transzponáltja** az az  $A^T \in \mathbb{R}^{k \times n}$  mátrix, aminek az  $i$ -dik sor  $j$ -dik eleme az  $A$  mátrix  $j$ -dik sorának  $i$ -dik eleme  $\forall i, j$ .

**Tétel:** Ha  $A$  négyzetes mátrix, akkor  $|A| = |A^T|$ .

**Biz:** Az  $A$  mátrix bármely bástya-elhelyezését meghatározó elemek  $A^T$ -ban is bástya-elhelyezést alkotnak. Két bástya pontosan akkor alkot ÉK-DNy párt  $A$ -ban, ha  $A^T$ -ban is ÉK-DNy-i párt alkotnak. Ezért  $\det(A)$ -ban ugyanazokat a kifejtési tagokat (ugyazzal az előjellel) kell összeadni, mint  $\det(A^T)$ -ban.

**Köv:** Ha egy tulajdonság általában igaz a determináns oszlopaira, akkor a megfelelő tulajdonság a determináns soraira is teljesül.

**Megj:** Egy  $n \times n$  determináns kiszámításához  $n!$  kifejtési tagot kell összegezni. Ez rengeteg munka. Gyorsabb módszer adódik, ha megfigyeljük, hogy az ESÁ-ok hogyan változtatják a determinánst.

**Allítás:** Ha  $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  és  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ , akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

**Biz:** A bal oldali determináns minden kifejtési tagjának az  $i$ -dik oszlopbeli tényezője  $\underline{u}_i$  és  $\underline{v}$  egy koordinátájának összege. Ha felbontjuk a zárójelet, a kifejtési tagból két szorzat lesz. Ezek a szorzatok pedig épp a jobb oldali determinánsok kifejtési tagjai.

**Allítás:** Ha  $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  és  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ , akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

$$(5) \text{ Ha } A \text{-nak van két egyforma oszlopa, akkor } |A| = 0.$$

**Köv:** ESÁ hatása négyzetes  $A$  mátrix determinánsára:

(1) Sort  $\lambda$ -val szorozva a determináns  $\lambda$ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A  $j$ -dik sort kicserélve az  $i$ -dik és  $j$ -dik sor összegére a determináns nem változik.

**Def:** Az  $A$  négyzetes mátrix **főátlója** az  $A$  mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik.

## A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

### Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$
  

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} =$$
  

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 42 = 42$$

**Megj:** A determináns kiszámításához képezhetünk LA mátrixot. Ehhez nem kötelező Gauss-eliminációt használni, bármilyen ESÁ-sal dolgozhatunk a cél érdekében. Nem muszáj v1-et sem gyártani: elég a felső háromszögmátrixig (vagy csupa0 sorig) eljutni. Sőt: mindent, amit a sorokkal megtehetünk, azt hasonló módon az oszlopokkal is elvégezhetjük. Ez néha célszerűbb lehet, mint kizárólag csak ESÁ-ok alkalmazása.

## 6. Felső háromszögmátrix determinánása

**Def:** Az  $A$  négyzetes mátrix **főátlója** az  $A$  mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha  $A$  főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor  $A$  **felső háromszögmátrix**.

?	?	?	?	?	?
0	?	?	?	?	?
0	0	?	?	?	?
0	0	0	?	?	?
0	0	0	0	?	?
0	0	0	0	0	?

**Megf:** (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.

**Biz:** Ha egy sor  $v_1$ -e a főátlótól balra van, akkor a felette levő soré is. Az első soré nem ilyen, ezért minden  $v_1$  a főátlón vagy attól jobbra áll, így a főátló alatt minden elem 0.

16. Mátrix transzponáltja, transzponált determinánása, ESÁ hatása a determinánusra, előjeles aldetemináns, kifejtési tétel.

## 1. Mátrix transzponáltja

**Def:** Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  négyzetes mátrix **determinánása**  $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ , ahol  $a_{i,j}$  az  $i$ -dik sornak  $j$ -dik eleme. A  $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$  szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

**Megj:** (1) Az  $A$  mátrix determinánása tehát az  $A$  bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros. (2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánása, másféleképpen nincs. (3)  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

**Def:** Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrix **transzponáltja** az az  $A^T \in \mathbb{R}^{k \times n}$  mátrix, aminek az  $i$ -dik sor  $j$ -dik eleme az  $A$  mátrix  $j$ -dik sorának  $i$ -dik eleme  $\forall i, j$ .

**Példa:** 
$$\begin{pmatrix} 42 & 4^2 & 4, 2 \\ 42^{42} & 42! & \sqrt[42]{42/42} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 42 & 42^{42} \\ 4^2 & 42! \\ 4, 2 & \sqrt[42]{42/42} \end{pmatrix}$$

## 2. transzponált determinánása

**Tétel:** Ha  $A$  négyzetes mátrix, akkor  $|A| = |A^T|$ .

**Biz:** Az  $A$  mátrix bármely bástya-elhelyezését meghatározó elemek  $A^T$ -ban is bástya-elhelyezést alkotnak. Két bástya pontosan akkor alkot ÉK-DNy párt  $A$ -ban, ha  $A^T$ -ban is ÉK-DNy-i párt alkotnak. Ezért  $\det(A)$ -ban ugyanazokat a kifejtési tagokat (ugyazzal az előjellel) kell összeadni, mint  $\det(A^T)$ -ban.



### 3. ESÁ hatása a determinánsra

#### A determináns további fontos tulajdonságai

**Állítás:** Ha  $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  és  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ , akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

$$(5) \text{ Ha } A\text{-nak van két egyforma oszlopa, akkor } |A| = 0.$$

**Köv:** ESÁ hatása négyzetes  $A$  mátrix determinánsára:

(1) Sor  $\lambda$ -val szorozva a determináns  $\lambda$ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A  $j$ -dik sort kicserélve az  $i$ -dik és  $j$ -dik sor összegére a determináns nem változik.

**Def:** Az  $A$  négyzetes mátrix **főátlója** az  $A$  mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha  $A$  főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor  $A$  **felső háromszögmátrix**.

**Megf:** (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.

(2) F.háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemei szorzata.

**Biz:** Minden kif.tag tartalmaz 0 tényezőt, kivéve a főátlóbeliek szorzata, aminek az előjele pozitív.

### 4. előjeles aldetermináns

Sakktábla-szabály

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

minden mátrix bal felső sarka pozitív, és felváltva változik az előjel.

**Def:** Az  $A$  mátrix  $i$ -dik sorának  $j$ -dik eleméhez tartozó  $A_{i,j}$  **előjeles aldeterminánsa** az  $i$ -dik sor és  $j$ -dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának  $(-1)^{i+j}$ -szerese.

A fenti megfigyeléssel másképp is kiszámítható a determináns.

## 5. kifejtési tétel

**Megf:** Tfh  $\underline{e}_j$  az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix  $j$ -dik oszlopa, továbbá, hogy  $A$  első  $i-1$  sora az első  $j-1$  ill. utolsó  $n-j$  oszloppal az  $A_1$  ill.  $A_2$ , az utolsó  $n-i$  sor az első  $j-1$  ill. utolsó  $n-j$  oszloppal pedig az  $A_3$  ill.  $A_4$  mátrixokat alkotja. Ekkor  $j-1$  sor- és  $i-1$  oszlopcserével adódik:

$$\begin{vmatrix} 0 & & 0 \\ A_1 : A_2 & & : A_1 A_2 \\ 0 & & 0 \\ ??? 1 ??? & & 1 ????? \\ 0 & & 0 \\ A_3 : A_4 & & : A_3 A_4 \\ 0 & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & & 0 \\ : A_1 A_2 & & \\ 0 & & 1 ????? \\ 1 ????? & & \\ 0 & & 0 \\ : A_3 A_4 & & \\ 0 & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{j-1+i-1} \begin{vmatrix} 1 ????? \\ 0 & & \\ : A_1 A_2 & & \\ : A_3 A_4 & & \\ 0 & & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A_1 A_2 \\ A_3 A_4 \end{vmatrix} = A_{i,j}$$

**Def:** Az  $A$  mátrix  $i$ -dik sorának  $j$ -dik eleméhez tartozó  $A_{i,j}$  **előjeles aldeterminánsa** az  $i$ -dik sor és  $j$ -dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának  $(-1)^{i+j}$ -szerese.

**Determinánsok kifejtési tétele ( $j$ -dik oszlop szerinti kifejtés):**

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$$

□

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a determináns így is kiszámítható.

**Példa:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot 7 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(9-11) + 14(3-1) - (6-2) + (9-11) - (6-22) = 4+28-4-2+16=42$$



17. Vektorok skaláris szorzásának tulajdonságai. **Mátrixok összeadása és szorzásai**, e műveletek tulajdonságai. **A szorzatmátrix sorainak és oszlopainak különös tulajdonsága**, ESÁ és mátrixszorzás kapcsolata.

## 1. Vektorok skaláris szorzásának tulajdonságai

Vektorokon értelmeztük az összeadást és a skalárral szorzást. Az oszlopokat egymás alá írva bármely  $n \times k$  méretű mátrixot értelmezhetünk  $n \cdot k$  magasságú oszlopvektorként is. Ezzel értelmezni tudjuk az **azonos méretű** mátrixokon az összeadást és a skalárral szorzást.

**Példa:**  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 1 & 6006 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 42 \\ 7 & 4242 & 77 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ nem értelmes.}$$

Vektorokon értelmeztük az összeadást és a skalárral szorzást. Az oszlopokat egymás alá írva bármely  $n \times k$  méretű mátrixot értelmezhetünk  $n \cdot k$  magasságú oszlopvektorként is. Ezzel értelmezni tudjuk az **azonos méretű** mátrixokon az összeadást és a skalárral szorzást.

**Köv:** Ha  $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times k}$  és  $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ , akkor

- (1)  $A + B = B + A$ ,
- (2)  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ,
- (3)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ ,
- (4)  $(\lambda + \kappa)A = \lambda A + \kappa A$ ,
- (5)  $\lambda(\kappa A) = (\lambda \kappa)A$ , továbbá
- (6)  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ,
- (7)  $\lambda \cdot A^T = (\lambda A)^T$ .

Vektorok egymással történő összeszorozását nem értelmeztük eddig. Most fogjuk, de bizonyos korlátokkal. Ehhez először azonos méretű vektorokat tanulunk meg összeszorozni.

## 2. Mátrixok összeadása és szorzása

**Def:** Az  $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  vektorok **skaláris szorzata**

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

**Megf:**  $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$  esetén

- (1)  $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$ ,
- (2)  $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$  ill.
- (3)  $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda(\underline{u} \cdot \underline{v})$ .

**Megj:** (1) Világos, hogy ha  $\underline{u} = \underline{0}$  vagy  $\underline{v} = \underline{0}$ , akkor  $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ , ám a fordított következtetés nem igaz, pl  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ .

(2) A skaláris szorzás segítségével értelmezhető a vektorhossz és a merőlegesség (akár magasabb dimenzióban is).

**Megf:** A  $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  vektor hossza az  $a, b, c$  oldalakkal rendelkező téglalap testátlójának hossza, ami a Pitagorasz-tétel alapján  $\|\underline{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ . Ugyanez, másképp felírva:  $\|\underline{v}\|^2 = \underline{v} \cdot \underline{v}$ .

**Megj:** Az  $\underline{u}$  és  $\underline{v}$  vektorok merőlegessége azt jelenti, hogy  $\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 = \|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = (\underline{u} + \underline{v}) \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{u} + \underline{v} \cdot \underline{v} + 2\underline{u} \cdot \underline{v} = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v}$ , innen  $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$  adódik. Tehát  $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \iff \underline{u} \perp \underline{v}$ .

### 3. e műveletek tulajdonságai

Az  $\mathbb{R}^n$ -beli (oszlop)vektorok  $n \times 1$  méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ( $n > 1$  esetén) nem lehet összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen:  $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$  esetén  $\underline{u}^T \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$ , vagyis egy  $n$  dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy  $1 \times 1$  méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

**Def:** Tfh az  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrix sorvektorai  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$  és a  $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$  mátrix oszlopvektorai  $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$ . Ekkor az  $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$  szorzatmátrix  $i$ -dik sorának  $j$ -dik eleme az  $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$  skaláris szorzat.

**Példa:** 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

**Def:** Tfh az  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrix sorvektorai  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$  és a  $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$  mátrix oszlopvektorai  $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$ . Ekkor az  $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$  szorzatmátrix  $i$ -dik sorának  $j$ -dik eleme az  $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$  skaláris szorzat.

**Példa:** 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

**Megf:** Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok.  $(1) \lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$

**Biz:** A skaláris szorzásról tanult azonosság szerint

$\lambda(\underline{u} \cdot \underline{v}) = (\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot (\lambda \underline{v})$ . Ezért mindhárom szorzatban az  $i$ -dik sor  $j$ -dik eleme az  $A$   $i$ -dik sora és  $B$   $j$ -dik oszlopa skaláris szorzatának a  $\lambda$ -szorosa ( $\forall i, j$  esetén). □

### 4. A szorzatmátrixok sorainak és oszlopainak különös tulajdonsága

**Def:** Az  $n \times n$  méretű **egységmátrix**  $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ , ahol  $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$  az  $\mathbb{R}^n$  standard bázisa.

**Megf:** Legyen  $A$  tetsz.  $n \times k$  méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz.  $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$  és  $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$  egyékvektorok esetén  $A \cdot \underline{e}_j$  az  $A$  mátrix  $j$ -dik oszlopa,  $\underline{e}_i^T \cdot A$  pedig az  $A$  mátrix  $i$ -dik sora.

(2)  $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

(3) Ha  $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$  és  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ , akkor  $A \cdot \underline{u}$  az  $A$  oszlopainak  $\underline{v}^T \cdot A$  pedig az  $A$  sorainak lin.komb-ja.

**Köv:** Tfh  $A$  oszlopai  $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$  és  $B$  sorai  $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ . Ekkor

(1) az  $AB$  szorzat  $j$ -dik oszlopa az  $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$  oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat pedig a  $\underline{b}^j$  oszlop tartalmazza.

(2) Hasonlóan, az  $i$ -dik sor a  $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$  sorok lineáris kombinációja, mégpedig az  $\underline{a}_i$  sorban szereplő együtthatókkal.

(3) Ha a  $C$  mátrix minden oszlopa az  $A$  oszlopainak lin.komb-ja, akkor  $C$  előáll  $AB$  alakban. Ha a  $C$  mátrix sorai az  $A$  sorainak lin.komb-i, akkor  $C$  előáll  $C = BA$  alakban.

**Köv:** Ha  $A'$  ESÁ-okkal kapható  $A$ -ból, akkor  $A' = BA$  alakú.

5. ESÁ és mátrixszorzat kapcsolata.

**Megf:** Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok.

$$(1) \lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$$

$$(2) A(B + C) = AB + AC \text{ ill. } (A + B)C = AC + BC.$$

$$(3) (AB)^T = B^T A^T.$$

**Megj:** Ha  $AB$  és  $BA$  is értelmes, akkor  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$  és  $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ .

Ekkor  $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$  és  $BA \in \mathbb{R}^{k \times k}$ . Azonban még  $k = n$  esetén sem igaz általában, hogy  $AB = BA$ . A mátrixszorzás nem kommutatív.

$$(3) (AB)^T = B^T A^T.$$

**Biz:**  $(AB)^T$   $j$ -dik sorának  $i$ -dik eleme az  $A$   $i$ -dik sorának és  $B$   $j$ -dik oszlopának a skaláris szorzata, ami ugyanaz, mint  $B^T$   $j$ -dik sorának és  $A^T$   $i$ -dik oszlopának a skaláris szorzata ( $\forall i, j$  esetén).  $\square$



$$(2) A(B + C) = AB + AC \text{ ill. } (A + B)C = AC + BC.$$

**Biz:** Tudjuk, hogy  $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ . Ezért  $A(B + C)$  ill.  $AB + AC$   $i$ -dik sorának  $j$ -dik eleme az  $A$   $i$ -dik sorának és  $B$  és  $C$   $j$ -dik oszlopai összegének skaláris szorzata ( $\forall i, j$  esetén). A másik disztributív azonosság a skaláris szorzás  $(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w}$  alakú, másik disztributív azonosságából következik.  $\square$

18. Lineáris leképezések és mátrixszorzások kapcsolata. Lineáris leképezés mátrixának meghatározása. Leképezések egymásutánjának mátrixa, mátrixszorzás asszociativitása.

1. Lineáris leképezések és mátrixszorzások kapcsolata

**Megf:** Ha  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ , akkor  $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$  olyan  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  leképezés, amire  $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$  esetén

(1)  $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$  ill. (2)  $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$  teljesül.

**Def:** Tfh  $U \leq \mathbb{R}^k$  és  $V \leq \mathbb{R}^n$ . Az  $f : U \rightarrow V$  **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha  $\forall \underline{u}, \underline{v} \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}$  esetén

(1)  $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$  ill. (2)  $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$  teljesül.

**Példa:** Lin.lekép  $\mathbb{R}^2$ -ből  $\mathbb{R}^2$ -be (a szokásos helyvektorokon) az origóra tükrözés, az origó körüli forgatás, az  $x$  tengelyre vetítés, vagy egy origón átmenő egyenesre tükrözés.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineáris leképezés, ha pl. az sík minden  $(x, y)$  pontjához a tér  $(2x, 0, y/2)$  pontját rendeljük.

**Megf:** Tetsz.  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$  esetén az  $A$ -val történő balszorzás lin.lekép-t definiál  $\mathbb{R}^k$ -ből  $\mathbb{R}^n$ -be.

**Lemma:** Tfh  $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$ . Ekkor  $f : U \rightarrow V$  lin.lekép  $\iff f$  zárt a lin.komb-ra, azaz  $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$ .

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Mivel  $f$  additív és homogén, ezért

$f(\lambda_1 \underline{u}_1 + \dots + \lambda_k \underline{u}_k) = f(\lambda_1 \underline{u}_1) + \dots + f(\lambda_k \underline{u}_k) = \lambda_1 f(\underline{u}_1) + \dots + \lambda_k f(\underline{u}_k)$ , azaz  $f$  zárt a lin.komb-ra.

$\Leftarrow$ : Ha  $f$  zárt a lin.komb-ra, akkor  $f(\lambda \underline{u}) = \lambda f(\underline{u})$ , hisz  $\lambda \underline{u}$  az  $U$  lin.komb-ja, továbbá

$f(\underline{u} + \underline{v}) = f(1\underline{u} + 1\underline{v}) = 1f(\underline{u}) + 1f(\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ , tehát  $f$  homogén és additív, más szóval  $f$  lin.lekép.  $\square$

**Köv:** Ha  $f : U \rightarrow V$  lin.lekép,  $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$  az  $U$  bázisa és  $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$ , akkor  $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$ , azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.lekép-t.

Annak az igazolásához, hogy minden  $f$  lineáris leképezés előáll mátrixszal történő balszorzással csupán azt kell megmutatni, hogy van olyan  $[f]$  mátrix, amire  $f(\underline{b}_i) = [f]\underline{b}_i$  teljesül minden  $\underline{b}_i$  báziselemre.

Ekkor ugyanis az  $[f]$ -fel való balszorzás lineáris leképezés, továbbá a fenti Következmény miatt  $f(\underline{v}) = [f]\underline{v}$ , azaz minden  $\underline{v}$  vektor  $f$  szerinti  $f(\underline{v})$  képe az  $[f]$  mátrixszal történő balszorzással kapható.

Lehetetlen-e egyértelműen meghatározni a mátrixot?

**Lemma:** Tfh  $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m$  az  $U$  bázisa és  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$  tetsz. vektorok. Ekkor van olyan  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrix, amire  $A\underline{b}_i = \underline{v}_i$  teljesül  $\forall 1 \leq i \leq m$  esetén.

**Biz:** Legyen  $B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m)$ , és  $C = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m)$ . A Lemma állítása ekvivalens azzal, hogy van olyan  $A$  mátrix, amire  $A \cdot B = C$ . Láttuk, hogy ha  $C$  minden sora előáll  $B$  sorainak lineáris kombinációjaként, akkor van ilyen  $A$ . Azt fogjuk tehát most igazolni, hogy  $C$  minden sora előáll  $B$  sorainak lineáris kombinációjaként.



**Lemma:** Tfh  $U \leq \mathbb{R}^k$ ,  $V \leq \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m$  az  $U$  bázisa és  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$  tetsz. vektorok. Ekkor van olyan  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrix, amire  $A\underline{b}_i = \underline{v}_i$  teljesül  $\forall 1 \leq i \leq m$  esetén.

**Biz:** Mivel  $B$  bázis, ezért  $B$  oszlopai lin.ftn-ek. Így a  $B$  ESÁ-okkal RLA mátrixszá transformált alakja  $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m)$ , azaz  $I_m$  áll az RLA mátrix tetején. Ezért  $I_m$  minden sora előáll a  $B$  sorainak lineáris kombinációjaként. Minden  $m$  oszlopból álló mátrix, így  $C$  is megkapható  $I_m$  sorainak lineáris kombinációjaként. Tehát  $C$  sorai előállnak nem csak  $I_m$ , de  $B$  sorainak lin.komb-jaként is.  $\square$

**Köv:** Tetsz.  $f: U \rightarrow V$  lin.lekép esetén van olyan  $[f]$  mátrix, amire  $[f]\underline{u} = f(\underline{u})$  teljesül  $\forall \underline{u} \in U$  esetén.

**Biz:** Legyen  $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k\}$  az  $U$  altér egy bázisa. A fenti Lemma szerint van olyan  $[f]$  mátrix, amire  $[f]\underline{b}_i = f(\underline{b}_i)$  teljesül minden báziselemre. Az  $\underline{u} \mapsto [f]\underline{u}$  olyan lineáris leképezés, ami a  $\underline{b}_i$  báziselemeken megegyezik  $f$ -fel. Mivel a lineáris leképezést a báziselemek képe meghatározza, ezért  $f(\underline{u}) = [f]\underline{u} \forall \underline{u} \in U$ .  $\square$

## 2. Lineáris leképezés mátrixának meghatározása

**Állítás:** Tfh  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  lin.lekép. Ekkor  $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$  teljesül  $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$  esetén, ahol  $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$ .

**Biz:**  $[f]\underline{e}_i = (f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), \dots, f(\underline{e}_n)) \underline{e}_i = f(\underline{e}_i)$  egy korábbi megfigyelés szerint. Ha tehát  $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i$ , akkor

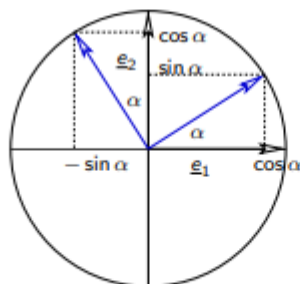
$$[f]\underline{v} = [f](\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i [f]\underline{e}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\underline{e}_i) = f(\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i) = f(\underline{v})$$

(A 2-dik és 4-dik egyenlőségnél  $f$  ill  $[f]$  lineáris kombináció tartó tulajdonságát, a 3-diknál pedig a bizonyítás elején szereplő megfigyelést használtuk.)  $\square$

**Állítás:** Tfh  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  lin.lekép. Ekkor  $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$  teljesül  $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$  esetén, ahol  $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$ .

**Def:** A fenti  $[f]$  mátrix az  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  **lineáris leképezés mátrixa**.

**Példa:** Legyen  $f_\alpha$  az origó körüli  $\alpha$  szögű elforgatás  $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor  $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$  ill.  $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$ , így  $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .



**Lemma:** Tfh  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  és  $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  lin.lekép-ek. Ekkor  $g \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  is lin.lekép, ahol  $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$  és  $[g \circ f] = [g][f]$ .

**Megj:** A Lemma azt mondja ki, hogy lineáris leképezések egymásutánja olyan lineáris leképezés, aminek a mátrixa a két lineáris leképezés mátrixának a szorzata, ahol a szorzást a másodiknak elvégzett leképezés mátrixával kezdjük.

### 3. leképezések egymásutánjának mátrixa

**Állítás:** Tfh  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  lin.lekép. Ekkor  $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$  teljesül  $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$  esetén, ahol  $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$ .

**Def:** A fenti  $[f]$  mátrix az  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  **lineáris leképezés mátrixa**.

**Példa:** Legyen  $f_\alpha$  az origó körüli  $\alpha$  szögű elforgatás  $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor  $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$  ill.  $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$ , így  $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .

**Lemma:** Tfh  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  és  $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  lin.lekép-ek. Ekkor  $g \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  is lin.lekép, ahol  $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$  és  $[g \circ f] = [g][f]$ .

**Köv:** Ha értelmesek a műveletek, akkor  $A(BC) = (AB)C$ .

**Köv:** A fenti példában szereplő elforgatásokra igaz, hogy

$$f_{\alpha+\beta} = f_\alpha \circ f_\beta, \text{ így } \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = [f_{\alpha+\beta}] = [f_\alpha][f_\beta] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix}$$

Ebből pedig  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$  ill.

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$  adódik. □

Váratlan módszerrel igazoltuk a trigonometrikus függvények addíciós képletét.

◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶

### 4. mátrixszorzás asszociativitása

**Biz:** Először  $g \circ f$  linearitását igazoljuk:

$g(f(\lambda \underline{u})) = g(\lambda f(\underline{u})) = \lambda g(f(\underline{u}))$  homogén, ill.

$g(f(\underline{u} + \underline{v})) = g(f(\underline{u}) + f(\underline{v})) = g(f(\underline{u})) + g(f(\underline{v}))$  lineáris.

Tehát  $g \circ f$  csakugyan lineáris leképezés.

Végül a kompozíciómátrixról szóló képlet helyességét bizonyítjuk.

**Biz:** A tanultak szerint  $[g \circ f]$   $i$ -dik oszlopa  $g(f(\underline{e}_i)) = [g]([f]\underline{e}_i)$ .

Láttuk, hogy  $[f]\underline{e}_i$  az  $[f]$   $i$ -dik oszlopa, így  $[g]([f]\underline{e}_i)$  a  $[g]$  mátrix szorzata az  $[f]$  mátrix  $i$ -dik oszlopával.

Ez pedig nem más, mint az  $[g][f]$  szorzatmátrix  $i$ -dik oszlopa.

Ezek szerint a  $[g \circ f]$  mátrix  $i$ -dik oszlopa megegyezik a  $[g][f]$  mátrix  $i$ -dik oszlopával ( $\forall i$ -re), így aztán  $[g \circ f] = [g][f]$ . □

◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶

**Köv:** Ha értelmesek a műveletek, akkor  $A(BC) = (AB)C$ .

**Biz:** Legyenek  $A, B$  ill.  $C$  az  $f, g$  és  $h$  lineáris leképezések mátrixai.

Ekkor  $A(BC)$  az  $f \circ (g \circ h)$ ,  $(AB)C$  pedig az  $(f \circ g) \circ h$  leképezés

mátrixa. Márpedig  $f \circ (g \circ h)(\underline{v}) = f(g(h(\underline{v}))) = (f \circ g) \circ h(\underline{v})$

miatt e két leképezés megegyezik, így a mátrixaik is azonosak. □

19. Mátrix jobb- és balinverze, ezek viszonya. **Balinverz kiszámítása ESÁ-okkal** és előjeles aldeterminánssokkal, reguláris mátrixok jellemzése determinánssal, sorokkal, oszlopokkal ill. RLA mátrix segítségével.

## 1. Mátrix jobb- és balinverze

Láttuk, hogy egy mátrixra gondolhatunk úgy is, mint egy  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  lin.lekép-re. Ha egy ilyen leképezés kölcsönösen egyértelmű (mint pl. a síkban az origó körüli forgatás, vagy egy origóra illeszkedő egyenesre tükrözés, stb), akkor a leképezés „megfordítása” is lineáris leképezés, amit egy másik mátrix ír le. Ezt a két leképezést egymás után elvégezve minden vektor helyben marad, azaz a két leképezés egymásutánjának mátrixa egyfelől az egységmátrix, másfelől pedig a két leképezés mátrixának szorzata. Nem minden leképezésnek van ilyen megfordítása. A továbbiakban pontosan azt vizsgáljuk, hogy a mátrixok nyelvén hogyan írható le, hogy mikor van ilyen megfordítás, és konkrétan mi is az.

**Def:** Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix **balinverze** az  $A^B$  mátrix, ha  $A^B A = I_n$ . Az  $A^J$  mátrix az  $A$  **jobbinverze**, ha  $AA^J = I_n$ .

**Megf:** Ha  $A$ -nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.

**Biz:**  $A^B = A^B I_n = A^B (AA^J) = (A^B A) A^J = I_n A^J = A^J$ .  $\square$

## 2. ezek viszonya

**Köv:**  $A$ -nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali. Ezért  $A$  inverzét a továbbiakban  $A^{-1}$ -zel jelöljük.

**Megf:** Ha  $A$  balról invertálható, akkor  $A^B A = I_n$ . Ezért  $I_n$  minden sora  $A$  sorainak lin.komb-ja, vagyis  $I_n$  minden sora benne van az  $A$  sorai által generált altérben. Mivel  $I_n$  sorai bázist alkotnak, ezért  $A$  sorainak is bázist kell alkotniuk, azaz  $A$  sorai lin.ftn-ek.

**Köv:** Ha  $A$ -nak van balinverze, akkor  $I_n$  előáll  $A$ -ból ESÁ-okkal.

**Biz:** Mivel  $A$  sorai lineárisan függetlenek, ezért  $A$  sorai egy  $n$ -dimenziós alteret, konkrétan a teljes  $\mathbb{R}^n$  teret generálják.

Alakítsuk az  $A$  mátrixot ESÁ-ok segítségével RLA mátrixszá! Az így kapott  $A'$  mátrix  $n$  sora is a teljes  $\mathbb{R}^n$  teret generálja. Ezért  $A'$  sorai lineárisan függetlenek, így  $A'$ -nek nem lehet csupa0 sora. Tehát  $A' = I_n$ .

**Megf:** (1) Minden ESÁ egy mátrixszal történő balszorozás.

(2) ESÁ-ok egymásutánja is egy mátrixszal történő balszorozás.

(3) Ha ESÁ-okkal  $A$ -ból  $I_n$  lesz, akkor  $A^B$ -vel szoroztunk balról.

**Köv:** Ha az  $(A|I_n)$  mátrixból ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk, és  $A$  helyén megjelenik  $I_n$ , akkor  $I_n$  helyén  $A^B$  jelenik meg. Ha  $A$  helyén nem jelenik meg  $I_n$ , akkor  $A$ -nak nincs balinverze.



### 3. Balinverz kiszámítása ESÁ-okkal

**Példa:** Keressük meg a  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & | & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & | & -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & | & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 17 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & 3 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 17 & -8 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 17 & -8 \end{pmatrix}$$

A bal oldalon egységmatricát kaptunk, ezért  $A^B = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 17 & -8 \end{pmatrix}$

Ellenőrzés:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} & & & & -1 & -8 & 4 \\ & & & & 1 & 6 & -3 \\ & & & & 2 & 17 & -8 \\ \hline & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -8 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 17 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

győztünk, sőt:  $A^B = A^J$ .

**Példa:** Keressük meg most a  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & | & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 19 & | & -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & | & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 & 17 & -8 \end{pmatrix}$$

A bal oldali részben csupa 0 sort kaptunk, tehát az  $A$  sorai által generált alteret két vektor generálja, így nem lehet benne három független vektor. Ezért  $A$  sorai nem generálhatják a standard bázis elemeit, vagyis  $I_n$  biztosan nem kapható meg  $A$ -ból balszorzással, azaz  $A$ -nak nincs balinverze.

**Köv:** Ha az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix sorai lin.ftn-ek, akkor  $A$ -nak van balinverze, ha  $A$  sorai nem lin.ftn-ek, akkor  $A$ -nak nincs balinverze.

Ugyanez a transzponáltra a jobbinverz létezését karakterizálja:

**Köv:** Ha  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  oszlopai lin.ftn-ek, akkor  $A$ -nak van jobbinverze, ha pedig  $A$  oszlopai nem lin.ftn-ek, akkor nincs.

### 4. és előjeles aldeterminánsokkal

**Lemma:** Tetsz.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixra igaz, hogy

$(A \text{ sorai lin.ftn-ek}) \iff (|A| \neq 0)$

**Biz:** Legyen  $V$  az  $A$  sorai által generált altér, és  $A'$  az  $A$ -ból ESÁ-okkal kapható RLA mátrix (ami felső háromszögmátrix).

Mivel ESÁ nem változtat a sorok által generált altéren, ezért  $A'$

sorai is  $V$ -t generálják. Így  $(A \text{ sorai lin.ftn-ek}) \iff$

$(\dim V = n) \iff (A' \text{ sorai lin.ftn-ek}) \iff (A' \text{-nek nincs csupa0}$

sora)  $\iff (A' \text{ minden sorában van v1}) \iff (|A'| = 1) \iff$

$(|A| \neq 0)$

Az utolsó ekvivalencia azért igaz, mert ESÁ nem változtat a determináns 0 voltán.

□

**Köv:** Tetsz.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixra igaz, hogy  
 (A-nak van balinverze)  $\iff$  (A-nak van jobbinverze)  
**Biz:** (A-nak van balinverze)  $\iff$  (A sorai lin.ftn-ek)  $\iff$  ( $|A| \neq 0$ )  
 $\iff$  ( $|A^T| \neq 0$ )  $\iff$  ( $A^T$  sorai lin.ftn-ek)  $\iff$  (A oszlopai lin.ftn-ek)  $\iff$  (A-nak van jobbinverze)  $\square$

**Tétel:** Tfh  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  és legyen a  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix  $i$ -dik sorának  $j$ -dik eleme az  $A_{j,i}$  előjeles aldetermináns. Ekkor  $AB = |A| \cdot I_n$ .

**Biz:** Az  $AB$   $i$ -dik sorának  $j$ -dik eleme az  $A$   $i$ -dik sorának és  $B$   $j$ -dik oszlopának skaláris szorzata, azaz

$a_{i,1}A_{j,1} + a_{i,2}A_{j,2} + \dots + a_{i,n}A_{j,n}$ , ahol  $a_{i,k}$  az  $A$  mátrix  $i$ -dik sorának  $j$ -dik elemét jelenti. Ha  $i = j$ , akkor ez az összeg épp az  $A$   $i$ -dik sor szerinti kifejtése, vagyis  $|A|$ . Ha  $i \neq j$ , akkor ez az összeg egy ú.n. ferde kifejtés: annak az  $A'$  mátrixnak az  $i$ -dik sor szerinti kifejtése, amit  $A$ -ból úgy kapunk, hogy az  $i$ -dik sor helyére a  $j$ -diket írjuk. Mivel  $A'$  két sora egyforma, ezért  $|A'| = 0$ .  $\square$

$j$ -dik eleme az  $A_{j,i}$  előjeles aldetermináns. Ekkor  $AB = |A| \cdot I_n$ .

**Köv:** A fenti tétel jelöléseivel: ha  $|A| \neq 0$ , akkor  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} B$ .

**Biz:**  $A \cdot \left( \frac{1}{|A|} B \right) = \frac{1}{|A|} (AB) = \frac{1}{|A|} (|A| I_n) = I_n \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} B$   $\square$

**Köv:** Négyzetes mátrix inverzének kiszámítására két módszerünk is van: vagy egy  $n \times 2n$  méretű mátrixból RLA mátrixot készítünk ESÁ-okkal, vagy kiszámítjuk  $|A|$ -t és az összes előjeles aldeterminánst.

## 5. reguláris mátrixok jellemzése determinánssal

**Def:** Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix **reguláris** (avagy **invertálható**), ha  $A$ -nak van inverze, és **szinguláris** ha nincs.

**Köv:** Tfh  $A$  négyzetes mátrix. Ekkor ( $A$  reguláris)  $\iff$  ( $|A| \neq 0$ )  
 $\iff$  (A sorai lin.ftn-ek)  $\iff$  (A oszlopai lin.ftn-ek)  $\iff$  (az  $A$ -ból kapott RLA mátrix minden sorában van v1)

Láttuk, hogy egy négyzetes mátrixnak vagy a sorai is és az oszlopai is lin.ftn-ek, vagy se a sorai, se az oszlopai nem azok. Lehet-e általánosítani ezt a megfigyelést nem négyzetes mátrixokra?

Ebben a formában nem.

Ha mondjuk  $n < k$  és egy  $n \times k$  méretű mátrix sorai függetlenek, akkor az oszlopok  $n$  magasságú vektorok, tehát legfeljebb  $n$  lehet közülük független,  $k$  semmiképp.

Van azonban egy jól használható általánosítása a fenti ténynek. Megmutatjuk, hogy ha egy  $M$  mátrixnak van  $k$  lin.ftn sora, akkor van  $k$  lin.ftn oszlopa is, és viszont.

Ebből következik pl. a négyzetes mátrixok fenti tulajdonsága is.

6. sorokkal ,oszlopokkal, RLA mátrix segítségével  
?

20. **Sor-, oszlop- és determinánsrang, ezek viszonya és kiszámítása.** Összeg és szorzat rangja. Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja, a megoldhatóság és az oszlopok alterének kapcsolata. Az egyértelmű megoldhatóság feltétele  $n \times n$  együtthatómátrix esetén.

## 1. Sor-, oszlop-, és determináns rang

**Def:** Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrix. Az  $A$  **sorrangja**  $s(A) = k$  ha az  $A$  sorvektoraiból kiválasztható  $k$  lin.ftn de  $k+1$  nem.

Az  $A$  **oszloprangja**  $o(A) = k$  ha az  $A$  oszlopvektoraiból kiválasztható  $k$  lin.ftn de  $k+1$  nem.

Az  $A$  **determinánsrangja**  $A$  legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele:  $d(A)$ .

**Megf:** (1)  $o(A) = s(A^T)$ .

(2) Ha  $A_1, A_2, \dots$  ill.  $A^1, A^2, \dots$  jelöli rendre  $A$  sorait és oszlopaikat, akkor  $s(A) = \dim\langle A_1, A_2, \dots \rangle$  és  $o(A) = \dim\langle A^1, A^2, \dots \rangle$ .

**Biz:** (1): A transzponált sorai a mátrix oszlopainak felelnek meg.

(2) A sorok által generált altér egy bázisát választhatjuk a sorvektorokból. Ez a bázis a sorok egy maximális méretű lin.ftn részhalmaza. Ezért ennek a bázisnak az elemszáma  $s(A)$ , vagyis a sorvektorok által generált altér dimenziója.

Az oszlopokra vonatkozó állítást hasonló érvelés igazolja. □

## 2. Ezek viszonya és kiszámítása

**Megf:** (1)  $o(A) = s(A^T)$ .

(2) Ha  $A_1, A_2, \dots$  ill.  $A^1, A^2, \dots$  jelöli rendre  $A$  sorait és oszlopaikat, akkor  $s(A) = \dim\langle A_1, A_2, \dots \rangle$  és  $o(A) = \dim\langle A^1, A^2, \dots \rangle$ .

**Állítás:** ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.

**Biz:** Láttuk, hogy ESÁ során a sorok által generált altér nem változik, így a dimenziója is ugyanannyi marad.

ESÁ hatására az oszlopok közti lineáris összefüggések sem változnak, ezért oszlopok egy halmaza pontosan akkor lin.ftn ESÁ előtt, ha ugyanezen oszlophalmaz lin.ftn ESÁ után. □

3.

**Megf:** Ha  $A$  RLA mátrix, akkor  $s(A) = o(A) = v1$ -ek száma.

**Biz:** A  $v1$ -ekhez tartozó oszlopok az oszlopok által generált altér bázisát alkotják, így  $o(A)$  a  $v1$ -ek száma.

RLA mátrix csupa 0 sorait elhagyva a maradék ( $v1$ -t tartalmazó) sorok lin.ftn-ek, hisz egyik se áll elő a többi lin.komb-jaként. Ezért  $s(A)$  is a  $v1$ -ek száma, tehát  $s(A) = o(A)$ . □

4.

**Megf:** Ha  $A$  mátrix, akkor  $s(A) = o(A)$ .

**Köv:** Tetsz.  $A$  mátrix esetén  $s(A) = o(A)$ .  
**Biz:** Legyen  $A'$  az  $A$ -ból ESÁ-okkal kapott RLA mátrix. Ekkor  $s(A) = s(A') = o(A') = o(A)$ .

5.

**Állítás:**  $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Tfh van  $k$  lin.ftn sor, ezek alkossák az  $A'$  mátrixot. Ekkor  $k = s(A') = o(A')$ :  $A'$ -nek van  $k$  lin.ftn oszlopa. Alkossák ezek az  $A''$  mátrixot. Így  $o(A'') = k = s(A'')$ , tehát  $A''$  az  $A$  egy  $k$  méretű nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixa, azaz  $d(A) \geq k$ .

6.

**Állítás:**  $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$

**Biz:**  $\Leftarrow$ : Tfh  $A''$  egy  $k$  méretű nemnulla determinánsú négyzetes részmátrix. Az inverzről tanultaknál láttuk, hogy  $A''$  sorai lin.ftn-ek. Ezért az  $A''$  sorainak megfelelő  $A$ -beli sorok is lin.ftn-ek, vagyis  $s(A) \geq k$ . □

7.

**Köv:** Tetsz.  $A$  mátrixra  $s(A) = o(A) = d(A)$ .

**Biz:** Ha  $s(A) = k$ , akkor az előző állítás miatt  $d(A) \geq k$ .

Ha pedig  $d(A) = k$ , akkor  $s(A) \geq k$ . Ezért  $s(A) = d(A)$ .

Korábban láttuk, hogy  $s(A) = o(A)$ . □

8.

**Köv:** Tetsz.  $A$  mátrixra  $s(A) = o(A) = d(A)$ .

**Def:** Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrix **rangja**  $r(A) = s(A)$ .

**Rang meghatározása:**

ESÁ-okkal képzett RLA mátrix v1-ei száma.

9.

10. Összeg és szorzat rangja

**Lemma:** Ha  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ , akkor  $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$ .

**Biz:** Tfh  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{r(A)}$  az  $A$  lin.ftn sorai és  $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{r(B)}$  a  $B$  lin.ftn sorai. Ekkor az  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{r(A)}$  sorvektorok generálják  $A$  minden sorát, és a  $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{r(B)}$  sorok generálják  $B$  minden sorát. Mivel  $A + B$  minden sorát generálják  $A$  sorai és  $B$  sorai, ezért  $A + B$  sorait generálják az  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{r(A)}, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{r(B)}$  vektorok is. Az  $A + B$  sorvektorai által generált altér dimenziójára tehát  $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$  teljesül. □

**Lemma:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}, B \in \mathbb{R}^{k \times \ell} \Rightarrow r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$ .

**Biz:** Láttuk, hogy  $AB$  minden sora a  $B$  sorainak lin.komb-ja, ezért  $AB$  sorvektorai által generált altér része a  $B$  sorvektorai által generált altérnek. Így az első altér dimenziója nem lehet nagyobb a másodikénál, vagyis  $r(AB) = s(AB) \leq s(B) = r(B)$ .

Hasonlóan,  $AB$  minden oszlopa az  $A$  oszlopainak lin.komb-ja, tehát az  $AB$  oszlopai által generált altér dimenziója nem nagyobb az  $A$  oszlopai által generálnál:  $r(AB) = o(AB) \leq o(A) = r(A)$ .

Innen a tétel állítása közvetlenül adódik. □

## 11. Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során?

Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

**Példa:**

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

**Megf:** Az  $(A|\underline{b})$  kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az  $A\underline{x} = \underline{b}$  mátrixegyenlettel, ahol  $A$  az együtthatómátrix,  $\underline{b}$  a konstansokat,  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.



## 12. A megoldhatóság és az oszlopok alterének kapcsolata

### Lineáris egyenletrendszerek, már megint

**Példa:**

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

**Megf:** Az  $(A|\mathbf{b})$  kib. egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  mátrixegyenlettel, ahol  $A$  az együtthatómátrix,  $\mathbf{b}$  a konstansokat,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

**Kínzó kérdés:** Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  lineáris egyenletrendszer megoldható?

**Frappáns válasz:** A kérdés voltaképpen az, hogy mikor található olyan  $\mathbf{x}$  oszlopvektor (konkrét számokkal), amire  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  teljesül.

**Láttuk:** Tetsz.  $A, C$  mátrixra ( $C$  előáll  $AB = C$  alakban)  $\Leftrightarrow$  ( $C$  minden oszlopa az  $A$  oszlopainak lin.komb-ja)

**Köv:** Ha  $A$  oszlopai  $A^1, \dots$ , akkor  $(\exists \mathbf{x}: A\mathbf{x} = \mathbf{b}) \Leftrightarrow (\mathbf{b} \in \langle A^1, \dots \rangle) \Leftrightarrow (\langle A^1, \dots \rangle = \langle \mathbf{b}, A^1, \dots \rangle) \Leftrightarrow (\dim \langle A^1, \dots \rangle = \dim \langle \mathbf{b}, A^1, \dots \rangle)$

## 13. Az egyértelmű megoldhatóság feltétele $n \times n$ együtthatómátrix esetén

Lineáris egyenletrendszerek érdekes speciális esete, ha az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik. Ilyenkor az együtthatómátrix négyzetes. Korábban láttuk, hogy  $n$  ismeretlen esetén legalább  $n$  egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

**Kínzó kérdés:** Lehet-e következtetni a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrix alapján?

**Válasz:** Ez a kérdés csak négyzetes együtthatómátrix érdekes.

**Állítás:** Ha  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :  $(A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  egyért. megoldható)  $\Leftrightarrow (|A| \neq 0)$

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Tfh  $|A| \neq 0$ . Ekkor  $A$  oszlopai nem lineárisan függetlenek, ezért  $A$  oszlopainak valamely nemtriviális lineáris kombinációja  $\mathbf{0}$ -t ad:  $\exists \mathbf{y} \neq \mathbf{0} : A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ . Ezért ha  $\mathbf{x}$  az  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  megoldása, akkor  $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$  miatt  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  is megoldás. Tehát az  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  mátrixegyenletnek nincs egyértelmű megoldása.

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Tfh  $|A| \neq 0$ . Ekkor  $A$  oszlopai nem lineárisan függetlenek, ezért  $A$  oszlopainak valamely nemtriviális lineáris kombinációja  $\mathbf{0}$ -t ad:  $\exists \mathbf{y} \neq \mathbf{0} : A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ . Ezért ha  $\mathbf{x}$  az  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  megoldása, akkor  $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$  miatt  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  is megoldás. Tehát az  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  mátrixegyenletnek nincs egyértelmű megoldása.

$\Leftarrow$ :  $|A| \neq 0$ , ezért  $A$ -nak van inverze. Így

$[A\mathbf{x} = \mathbf{b}] \Leftrightarrow [\mathbf{x} = (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b}]$ , azaz  $\mathbf{x}$  egyértelmű.

□