Az $\mathbb{R}^n$ **tér**, vektorműveletek azonosságai, (generált) **altér** (példák), (triviális) **lineáris kombináció**, alterek metszete, **generátorrendszer**, **lineáris függetlenség** (kétféle definíció). Lin.ftn rendszer hízlalása, generátor-rendszer ritkítása, kicserélési lemma, **FG-egyenlőtlenség** és következménye.

- **Az $\mathbb{R}^n$ tér**

Def: $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \ \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza.

$A^n := A \times A \times \cdots \times A$ az n-szeres Decartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk.

Példa:

$$\begin{pmatrix} e \\ \pi \\ 42 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ ill. } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{utóbbi esetben az 1-es felülről az } i\text{-dik helyen áll.}$$

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektroként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}$, $\underline{e_i}$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeti vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

Konvenció: A jelölés során az oszlopvektorokat aláhúzással különöbztetjük meg a skalároktól.

Megj: A vektorok tehát itt és mont nem "irányított szakaszok", hanem ennél általánosabb fogalmat takarnak: az irányíott szakasok is tekinthetők vektoroknak, de egy vektor a mi tárgylásunkban nem feltétlenül irányított szakasz.

- **Vektorműveletek azonosságai**

Állítás: Az $\mathbb{R}^n$ tér vektoraival történő számolásban néhány fontos szabály sokat segít. Tetszőleges $\underline{u, v, w} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárokra az alábbiak teljesülnek.

(1) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (összeadás kommutatív)

(2) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{v} + (\underline{u} + \underline{w})$ (az összeadás asszociatív)

(3) $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$ (egyik disztributivitás)

(4) $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}$ (másik disztributivitás)

(5) $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u})$ (skalárral szorzás asszociativitása)

Biz: Mivel mindkét művelet koordinátánként történik, elég az egyes azonosságokat koordinátánként ellenőrizni. Ezek viszont éppen a valós számokra (azaz a skalárokra) vonatkozó, jól ismert szabályok.

Konvenció: $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $-\underline{v} := (-1) \cdot v$.

Megj: Vektorok között nem csak az összeadás, hanem a kivonás is értelmezhető: $\underline{u} - \underline{v} := \underline{u} + (-1)\underline{v}$. Ezáltal a kivonás is egyfajta összeadás, tehát az összeadásra vonatkozó szabályok értelemszerű változatai a kivonásra is érvényesek.

A vektorokkal történő számoláskor érvényes szabályok nagyon hasonlók a valós számok esetén megszokott szabályokhoz.

- **Generált altér (példák)**

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetszőleges origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetszőleges origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.

Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?

Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \cdots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz. Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.

Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \forall i \ \Rightarrow \cap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$ (2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$. (3) $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$. **Def:** $\mathbb{R}^n$ triviális alterei: $\{\underline{0}\}, \mathbb{R}^n$.

- **Triviális lineáris kombináció**

  Def: A $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_i, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja. Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \cdots + 0 \cdot \underline{x}_k$.

  Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$

  Biz: $\Rightarrow$: $\lambda_i \underline{x}_i \in V \forall i$ esetén, így a $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{x}_i$ összegük is V-beli.

  $\Leftarrow$: Ha $\underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\underline{x} + \underline{y}$ ill. $\lambda \underline{x}$ lineáris kombinációk. Mivel V zárt a lineáris kombinációra, ezért $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$. Ez tetszőleges $\underline{x, y}, \lambda$ esetén fennáll, tehát V zárt a műveletekre, vagyis altér.

- **Alterek metszete**

  Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz. Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.

  Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \forall i \ \Rightarrow \cap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$ (2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$. (3) $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$. **Def:** $\mathbb{R}^n$ triviális alterei: $\{\underline{0}\}, \mathbb{R}^n$.

- **Generátorrendszer**

  Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektornak a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \ \rangle = V$.

  Példa: $e_1, e_2, \ldots, e_n$ az $\mathbb{R}^n$ generátorrendszere, hisz minden $\mathbb{R}^n$-beli vektor előáll az egységvektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$.

  Ha $\mathbb{R}^2$-ben ha $\underline{u}$ és $\underline{v}$ nem párhuzamosak, akkor $\{\underline{u, v}\}$ generátorrendszer, hiszen bármely $\underline{z}$ vektor előállítható $\underline{u}$ és $\underline{v}$ lineáris kombinációjaként. (Ehhez $\underline{u}$ és $\underline{v}$ egyenesére kell a "másik" vektorral párhuzamosan vetíteni az előállítandó $\underline{z}$.) Hasonlóan, ha $\mathbb{R}^3$-ban három vektor nem esik egyanarra az origón átmenő síkra, akkor ez a három vektor generátorrendszert alkot.

- **Lineáris függetlenség 1.**

  Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő: $\lambda_1 \underline{x}_1 + \cdots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$

- **Lineáris függetlenség 2.**

  Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\iff$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

  Biz: A fenti állítások tagadásainak ekvivalenciáját igazoljuk.

  1. Tfh $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ **nem** lineárisan független, azaz $\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0}$ és $\lambda_i \neq 0$. Ekkor $\underline{x}_i$ előállítható a többiből: $\underline{x}_i = \frac{-1}{\lambda_i} \cdot (\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k)$.

  1. Most tfh valamelyik $\underline{x}_i$ előáll a többi lineáris kombinációjaként: $\underline{x}_i = \lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k$. Ekkor $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ nem lineárisan független, hiszen a nullvektor megkapható nemtriviális lineáris kombinációként: $\underline{0} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + (-1) \cdot \underline{x}_i + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k$.