Lineáris egyenletrendszer, kibővített együtthatómátrix, elemi sorekvivalens átalakítás és kapcsolata a megoldásokkal. **LA és RLA mátrix, vezéregyes, megoldás leolvasása RLA mátrix esetén**. Tilos sor, kötött változó, szabad paraméter, ezek jelentése a megoldás/megoldhatóság szempontjából. **Gauss-elimináció**, összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az egynletek és ismeretlenek száma között.

- **Lineáris egyenletrendszer**

  Def: Lineáris egyenlet: Ismeretlenek konstansszorosainak összege konstans. Lineáris egyenletrendszer: Véges sok lineáris egyenlet. Megoldás: Olyan érték adás, ami minden egyenletet igazzá tesz.

- **Kibővített együtthatómátrix**

  Def: Lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixa: a sorok az egyenletek, az oszlopok az ismeretleneknek ill. az egyenletek jobb oldalainak felelnek meg, az egyes mezőkben pedig a megfelelő együttható ill. jobb oldali konstans áll.

- **Elemi sorekvivalens átalakítás** és kapcsolata a megoldásokkal

  Biz: Minden ESÁ előtti megoldás megoldás marad az ESÁ után is. Minen ESÁ fordítottja megkapható ESÁ-ok egymásutánjaként is. Ezért minden ESÁ utáni megoldás megoldja az ESÁ előtti előtti rendszert is.

  Megj: A kibővített együtthatómátrix a lineáris egyenletrendszer felírásának egy tömör módja: elkerüljük vele a műveleti- és egyenlőségjelekkel piszmogást, mégis telejesen áttekinthető módon tartalmaz minden lényeges információt.

  Megoldás módszere Ekvivalens átalakításokat végzünk. Ezek során a megoldások halmaza nem változik. Konkrétan: egyenleteket felcserélünk, egyenletet nemnullával vigigszorzunk ill. az i-dik egyenletet kicseréljük az i-dik és j-dik egyenletek összegére.

  Def: A kibővített együtthatómátrix elemi sorekvivalens átalakítása (ESÁ): (1) sorcsere, (2) sor nemnulla konstanssal végigszorzása, (3) az i-dik sor helyettesítése az i-dik és j-dik sorok (koordiántánkénti) összegével (az i-dik sor helyettesítése az i-dik sor és a j-dik sor konstansszorosának összegével, csupa 0 sor hozzáadása/elhagyása).

- **LA és RLA mátrix, vezéregyes**

  Def: Az M mártix lépcsős alakú (LA), ha

  (1) minden sor első nemnulla eleme 1-es (ú.n. vezér 1-es, avagy v1)

  (2) minden v1 feletti sorban van ettől a v1-től balra eső másik v1.

  Az M mátrix redukált lépcsős alakú (RLA), ha

  (3) M LA és (2) M-ben minden v1 felett csak nullák állnak.

  Példa: LA mátrix RLA mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ill. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Megoldás leolvasása RLA mátrix esetén**

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= 1 \\ x_3 + 5x_4 &= 7 \end{aligned} \quad \longmapsto \quad \begin{aligned} &x_2, x_4 \in \mathbb{R} \\ x_1 &= 1 - 3x_2 + 2x_4 \\ x_3 &= 7 - 5x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= 1 \\ x_3 + 5x_4 &= 7 \\ 0 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \quad \longmapsto \quad ↯$$

- Tilos sor

  Def: Kibővített együtthatómátrix tilos sora: $0 \dots 0 | x$ alakú sor, ha $x \neq 0$.

- Kötött változó és szabad paraméter

  Def: A RLA kibővített együtthatómátrix v1-hez tartozó változója kötöttm a többi változó (amihez nem tartozik v1) szabad (vagy szabad paraméter).

  Megf: Ha kibővített együtthatómátrix RLA, akkor (1) minden sor vagy a v1-hez tartozó változó értékadása, vagy tilos sor, vagy csupa 0 sor.

  (2) Ha van tilos sor, akkor nincs megoldás.

  (3) Ha nincs tilos sor, a szabad paraméterek tetszőleges, értékadásához egyértelmű megoldás tartozik.

  Megf: A lineáris egyenletrendszer megoldása tekinthető úgy, hogy a lineáris egyenletrendszeregy RLA kibővített együtthatómátrixal van megadva.

  Cél: Olyan eljárás, ami ESÁ-okkal tetszőleges mátrixot RLA-vá alakít.

- **Gauss elimináció**

  Gauss-elimináció:

  Input: $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix.

  Output: Egy M-ből ESÁ-okkal kapható $M' \in \mathbb{R}^{n \times k}$ LA mátrix.

  Működés: Az algoritmus fázisokból áll. Az i-dik fázisban keresünk egy nemnulla elemet az $(i-1)$-dik sor alatt a lehető legkisebb sorszámú oszlopban. Ha nincs ilyen elem, az algoritmus véget ér. Sorcserével ezt a nemnulla elemet az i-dik sorban visszük. Az i-dik sor konstanssal szorzásával ezt az elemet v1-sé alakítjuk. Az i-dik sor alatti sorokhoz az i-dik sor konstansszorosát hozzáadva kinullázuk a kapott v1 alatti elemeket.

- összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az egynletek és ismeretlenek száma között

  Megj: (1) A Gauss-elimináció outputja LA. Az RLA-hoz további lépésekre van szükség: minden v1 felett kinullázhatók az elemek, ha a v1 sorának konstansszorosait a v1 feletti sorokhoz adjuk.

  (2) Ha csupán LA (vagy RLA) a cél, eltérhetünk a Gauss-eliminációtól, feltéve, hogy ESÁ-okkal dolgozunk.

  (3) A Gauss-elimináció megvalósítható rekurzív algoritmusként is.

  A GE(M) (az M mátrixot lépcsős alakra hozó eljárás):

  $\boxed{1.}$ Ha M első oszlopa csupa 0, akkor M' az első oszlop törlésével keletkező mátrix. Output: GE(M') elé írunk egy csupa 0 oszlopot.

  $\boxed{2.}$ Ha M első oszlopa tartalmaz nemnulla elemet, sorcserével és az első sor konstanssal szorzásával az első sor első elemét v1-sé tesszük, majd a v1 alatti elemeket ESÁ-okkal kinullázzuk. Legyen M' az első sor és első oszlop törlésével keletkező mátrix. Output: GE(M') elé írunk egy csupa 0 oszlopot és az így kapott mátrix fölé a korábban törölt első sort.

  1. Lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixként is magadható.
  2. ESÁ nem változtat a megoldásokon.
  3. ESÁ-okkal elérhető a RLA.
  4. A RLA-ból azonnal adódik a megoldás
     - Ha az utolsó oszlopban van v1, akkor nincs megoldás.
     - Ha az utolsó kivételével minden oszlopban van v1, akkor egyetlen megoldás van.
     - Ha az utolsón kívül más oszlopban nincs v1, akkor van szabad paraméter, így végtelen sok különböző megoldás van.

  Köv: Ha a lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor legalább annyi egyenlet van, mint ahány ismeretlen.

  Biz: Az RLA-ra hozás után nincs szabad paraméter, tehát minden változóhoz tartozik v1. Ezért a kibővített együtthatómátrixnak legalább annyi sora van, mint a változók száma.

  Megj: A fenti következmény fordított irányban nem igaz, és lényegében nincs más összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az ismeretlenek és egyneletek száma között.