

Gráfút hossza, gráfcsúcsok távolsága, nemnegatív és konzervatív hosszfüggvény, triviális és pontos  $(r, l)$ -felső becslés, élmenti javítás. **Dijkstra-algoritmus működése**, Ford-algoritmus helyessége és lépésszáma. Legrövidebb utak fájának létezése.

- Gráfút hossza, gráfcsúcsok távolsága, nemnegatív és konzervatív hosszfüggvény, triviális és pontos  $(r, l)$ -felső becslés, élmenti javítás.

**Def:** Adott  $G$  (ir.) gráf és  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény esetén egy  **$P$  út hossza** a  $P$  éleinek összhossza:  $l(P) = \sum_{e \in E(P)} l(e)$ .

Az  $u$  és  $v$  csúcsok **távolsága** a legrövidebb  $uv$ -út hossza:  $dist_l(u, v) := \min\{l(P) : P \text{ } uv\text{-út}\}$  ( $\nexists uv\text{-út} \Rightarrow dist_l(u, v) = \infty$ ). Az  $l$  hosszfüggvénye **nemnegatív**, ha  $l(e) \geq 0$  teljesül minden  $e$  élre. Az  $l$  hosszfüggvény **konzervatív**, ha  $G$ -ben  $\nexists$  negatív összhosszú ir. kör.

**Cél:** Legrövidebb út keresése irányított/irányítatlan gráfban.

**Megf:** Ha  $l(e) = 1$  a  $G$  minden  $e$  élére, akkor  $l(P)$  a  $P$  élszáma. Ezért a BFS-fa minden gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat, azaz a szélességi bejárás tekinthető egy legrövidebb utat kereső algoritmusnak is.

**Def:** Adott  $G$  (ir) gráf,  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény és  $r \in V(G)$ .  **$(r, l)$ -felső becslés** olyan  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, ami felülről becsli minden csúcs  $r$ -től mért távolságát:  $dist_l(r, v) \geq f(v) \forall v \in V(G)$ .

**Triviális**  $(r, l)$ -felső becslés:  $f(v) = \begin{cases} 0 & v = r \\ \infty & v \neq r \end{cases}$

**Pontos**  $(r, l)$ -felső becslés:  $f(v) = dist_l(r, l) \forall v \in V(G)$ .

- Konzervatív hosszfüggvény

Adott  $G = (V, E)$  irányított gráf és egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  élhosszfv.

Egy  $G$ -beli irányított út hossza az út éleinek összhossza,  $dist_l(n, v)$  pedig az irányított  $uv$ -utak közül a legrövidebb hosszát jelöli.

Az  $l$  hosszfv konzervatív ha nincs  $G$ -ben negatív összhosszúságú irányított kör.

Adott  $G = (V, E)$  irányított gráf  $r \in v$  és egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  élhosszfv. Az  $f : v \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt  $(r, l)$ -felső becslésnek nevezzük, ha  $f(r) = 0$  és  $f(v) \leq dist_l(r, v)$  teljesül  $G$  minden  $v$  csúcsára. Az  $e = uv$  élmenti javítás esetén a  $f(v)$  értéket a  $\min\{f(v), f(u) + l(uv)\}$  értékkel helyettesíthetjük.

(1) Ha  $l$  konzervatív akkor tetsz.  $(r, l)$ -fb. élmenti javítása  $(r, l)$ -fb-t ad.

(2) Ha az  $f(r, l)$  felső becsléshez nincs érdemi élmenti javítás, akkor  $f(v) = dist_l(r, v) \forall v \in V$ .

- Az élmenti javítás

**Def:** Tfh  $f$  egy  $(r, l)$ -felső becslés és  $uv \in E(G)$ . Az  $f$   **$uv$ -elméleti javítása** az az  $f'$ , amire

$$f'(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq v \\ \min\{f(v), f(u) + l(uv)\} & z = v \end{cases}$$

**Megf:** Tfh az  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény konzervatív és  $f(r) = 0$ . Ekkor

(1) Az  $f(r, l)$ -felső becslés élmenti javítása mindig  $(r, l)$ -felső becslést ad.

**Biz:** Azt kell megmutatni, hogy van olyan  $rv$ -út, aminek a hossza legfeljebb  $f(u) + l(uv)$ . Ha egy legrövidebb  $ru$ -utat kiegészítünk az  $uv$  éllel, akkor olyan  $rv$ -élsorozatot kapunk, aminek az összhossza  $dist_l(r, u) + l(uv) \leq f(u) + l(uv)$ . „Könnyen” látható, hogy az élhosszfüggvény konzervativitása miatt ha van  $x$  összhosszúságú  $rv$ -élsorozat, akkor van legfeljebb  $x$  összhosszúságú  $rv$ -út is. Ezek szerint van legfeljebb  $f(u) + l(u, v)$  hosszúságú  $uv$ -út is, azaz az érdemi élmenti javítás után szintén  $(r, l)$ -felső becslést kapunk.

(2)  $f(r, l)$ -felső becslés (pontosan)  $\iff$  ( $f$ -en  $\nexists$  érdemi élmenti javítás).

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Ha  $f$  pontos, akkor biztosan nincs rajta érdemi élmenti javítás: ha volna, akkor egy felső becslés a pontos érték alá csökkenne, így az élmenti javítás nem  $(r, l)$ -felső becslést eredményezne.  $\Leftarrow$ : Legyen  $v \in V(G)$  tetsz, és legyen  $P$  egy legrövidebb  $rv$ -út. A  $P$  egyik éle mentén sincs érdemi élmenti javítás, ezért  $P$  minden  $u$  csúcsára pontos a felső becslés:  $f(u) = dist_l(r, u)$ . Ez igaz az út utolsó csúcsára, a tetszőlegesen választott  $v$ -re is.

- **Dijkstra algoritmus működése:**

- **Input:**  $G = (V, E)$  irányított gráf,  $l : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  nemnegatív hosszfüggvény,  $r \in V$  gyökér
- **Output:**  $dist_l(r, v)$  minden  $v \in V$ -re.
- **Működés:** Kezdetben  $U_0 = \emptyset$ ,  $f(r) = 0$  és  $f(v) = \infty$ , ha  $v \neq r$ .  
Az algoritmus  $i$ -dik fázisában ( $i = 1, 2, \dots, |V|$ ) a következő történik.

1. Legyen  $u_i$  a  $v$  csúcs a  $v \setminus u_{i-1}$  halmazból, amelyre  $f(r)$  minimális és legyen  $u_{i-1} \cup u_i$ .
2. Végezzünk élmenti javításokat minden  $u_i$ -ből kivezető  $u_i x$  élen.

Az output a  $|V|$ -dik fázis utáni  $f$  függvény. Szokás megjelölni a végső  $f(v)$  értékeket beállító éleket.

Ha az output az  $f(r, l)$ -felső becslés, akkor

- (1)  $f(u_i) \leq f(u_{i+1}) \forall 1 \leq i \leq n$ .
- (2)  $f(u_1) \leq f(u_2) \leq \dots \leq f(u_n)$
- (3) élmentijavítás nem változtat  $f$ -n.

- A Dijkstra-algoritmus helyesen működik, azaz  $dist_l(r, v) = f(v) \forall v \in V$  teljesül. Az algoritmus során megjelölt élek egy legrövidebb utak fáját alkotják  $G$ -ben: az  $r$  gyökekből minden  $r$ -ből elérhető csúcsához vezet olyan legrövidebb út is, ami csak megjelölt éleket tartalmaz.
- A Dijkstra-algoritmus lépésszáma legfeljebb  $konst \cdot (n^2 + m)$ , ahol  $n = |V|$   $m = |E|$ .

**Dijkstra-algoritmus:** Input:  $G = (V, E), l : E \rightarrow \mathbb{R}_+, r \in V$ . Output:  $dist_l(r, v) \forall v \in V$  Működés:  $U_0 := \emptyset, f_0$  a triviális.  $(r, l)$ -felső becslés.

Az  $i$ -dik fázis:

1. Legyen  $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$ , ahol  $u_i$  olyan csúcs a  $V \setminus U_{i-1}$  halmazból, amelyre  $f_{i-1}(v)$  minimális.
2.  $f_i : f_{i-1}$  élmenti javítása minden  $U_i$ -ből kivezető  $u_i x$  élen. Output:  $f_{|V|}$ . Megjelöljük a végső  $f_{|V|}(V)$  értékeket beállító éleket.

**Megf:** Ha a  $v$ -be vezet megjelölt él, akkor vezet  $r$ -ből  $v$ -be megjelölt éleken út, és ennek hozza megegyezik  $f_{|V|}(v)$ -vel.

**Biz:**  $f_{|V|}(r) = 0$ , és a megjelölt élek mentén haladva az  $f_{|V|}$  érték az élhosszal növekszik.

#### • Dijkstra helyessége

**Megf:** Tfh  $u_1, u_2, \dots, u_n$  a  $G$  csúcsainak sorrendje a Dijkstra-algoritmus végrehajtása után.

- (1) Ekkor  $f_{|V|}(u_i) \leq f_{|V|}(u_{i+1})$  teljesül  $\forall 1 \leq i \leq n$ .

**Biz:** Az  $i$ -dik fázisban  $f_i(u_i) \leq f_i(u_{i+1})$  teljesült az  $u_i$  választása miatt. Ezek után  $f_i(u_i)$  már nem változott:  $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i)$ . Ugyan  $f_i(u_{i+1})$  még csökkenhetett, de csak az  $u_i u_{i+1}$  él mentén történt javítás miatt, hiszen az  $(i+1)$ -dik fázisban  $u_{i+1}$  bekerült az  $U_i$  halmazba, és a hozzá tartozó  $(r, l)$ -fb már nem csökken tovább. Ekkor  $f_{i+1}(u_{i+1}) = \min\{f_i(u_{i+1}), f_i(u_i) + l(u_i u_{i+1})\} \geq f_i(u_i)$ , mivel  $l(u_i u_{i+1}) > 0$ . Ezért  $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i) \leq f_{i+1}(u_{i+1}) = f_{|V|}(u_{i+1})$

- (2)  $f_{|V|}(u_1) \leq f_{|V|}(u_2) \leq \dots \leq f_{|V|}(u_n)$

- (3) A Dijkstra-algoritmus outputjaként kaptt  $f_{|V|}$ -n élmenti javítás nem tud változtatni.

**Biz:** Tegyük fel, hogy  $u_i u_j \in E(G)$  a  $G$  egy tetszőleges éle. Ha  $i > j$ , akkor (2) miatt  $f_{|V|}(u_i) \geq f_{|V|}(u_j)$ , ezért az  $u_i u_j$  mentén történő javítás nem tudja  $f_{|V|}(u_j)$ -t csökkenteni, hisz  $l(u_i u_j)$  pozitív. Ha pedig  $i < j$ , akkor az  $i$ -dik fázisban megtörtént az  $u_i u_j$  mentén történő javítás, és ezt követően  $f(u_i)$  nem változott, azaz  $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i)$ . A másik  $(r, l)$ -felső becslés pedig csak tovább csökkenhetett a későbbi élmj-ok során  $f_{|V|}(u_j) \leq f_i(u_j)$ . Ezért az  $u_i u_j$  él mentén sem az  $i$ -dik fázisban, sem később nincs érdemi javítás.

**Tétel:** A Dijkstra-algoritmus helyesen működik, azaz  $G$  minden csúcsára igaz, hogy  $dist(r, v) = f_{|V|}(v)$ .

**Biz:** A Dijkstra-algoritmus az  $f_0$  triviális  $(r, l)$ -felső becslésből indul ki, és élmenti javításokat alkalmaz. Így minden  $f_i$  (speciálisan  $f_{|V|}$  is)  $(r, l)$ -felső becslés lesz. A fenti (3)-as megfigyelés miatt  $f_{|V|}$ -n nem végezhető érdemi élmenti javítás. Ezért egy korábbi (2)-es megfigyelés miatt  $f_{|V|}$  pontos  $(r, l)$ -felső becslés, azaz  $f_{|V|}(v) = dist_l(r, v) \forall v \in V(G)$ .

- Könnyű olyan példát találni, ahol a Dijkstra-algoritmus konzervatív hosszfüggvény esetén hibás eredményt ad. Azonban konzervatív hosszfüggvény esetén is igaz, hogy

- $(r, l)$ -fb élmenti javítása  $(r, l)$ -fb-t eredményez, ill.
- ha egy  $(r, l)$ -fb-ben nem végezhető érdemi élmenti javítás, akkor pontos.

konzervatív hosszfüggvény esetén is hasonló stratégiát követünk: Élmenti javításokat végzünk a triviális  $(r, l)$ -fb-en, míg van érdemi javítás.

#### Ford-algoritmus:

Input:  $G = (V, E)$  irányított,  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  konzervatív hosszfüggvény,  $r \in V$  gyökérpont.

Output:  $dist_l(r, l)$  minden  $v \in V$

Működés: Legyen  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Kezdetben legyen  $f(r) = 0$  és  $v \neq r$  esetén  $f(v) = \infty$ . Az  $i$ -dik fázis  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  esetén abból áll, hogy elvégezzük az  $e_1, e_2, \dots, e_m$  élek menti javításokat. A végén az OUTPUT:  $dist_l(r, v) = f(v)$  minden  $v$ -re.  $(dist_l(r, v) = f_{n-1}(v) \forall v \in V)$

Állítás: Ha  $l$  konzervatív, akkor  $dist_l(v)$   $v \in V$ -re.

Biz:  $f_1(v) = dist_l(r, v)$  ha  $\exists \leq 1$ -élű legrövidebb  $rv$ -út.  $f_2(v) = dist_l(r, v)$  ha  $\exists \leq 2$ -élű legrövidebb  $rv$ -út.  $\dots$   $f_{n-1}(v) = dist_l(r, v)$  ha  $\exists \leq (n - 1)$ -élű legrövidebb  $rv$ -út. Tehát  $f_{n-1}(v) = dist_l(r, v) \forall v \in V$ .

Megf: Ha  $f_i = f_{i-1}$ , akkor a Ford-algoritmust az  $i$ -dik fázis után be lehet fejezni, hisz nincs érdemi élmenti javítás, így  $f_{n-1} = f_i$ .

Megj: Az  $f_{n-1}(v)$ -t beállító élek legrövidebb utak fáját alkotják.

Biz: A Dijkstra esethez hasonló. Tetszőleges  $v$  csúcsból visszafelé követve a végső értékeket beállító éleket  $f_{n-1}(v)$  hosszúságú  $rv$ -utat találunk.

”Lépésszámanalízis”: Ha a  $|V(G)| = n$  és  $|E(G)| = m$ , akkor minden fázisban  $\leq m$  élmenti javítás, ami  $konst \cdot m$  lépés. Ez összesen  $\leq konst \cdot (n - 1) \cdot m \leq konst \cdot n^3$  lépés, az algoritmus hatékony.