

18. Lineáris leképezések és mátrixszorzások kapcsolata. Lineáris leképezés mátrixának meghatározása. Leképezések egymásutánjának mátrixa, mátrixszorzás asszociativitása.

1. Lineáris leképezések és mátrixszorzások kapcsolata

**Megf:** Ha  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ , akkor  $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$  olyan  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  leképezés, amire  $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$  esetén

(1)  $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$  ill. (2)  $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$  teljesül.

**Def:** Tfh  $U \leq \mathbb{R}^k$  és  $V \leq \mathbb{R}^n$ . Az  $f : U \rightarrow V$  **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha  $\forall \underline{u}, \underline{v} \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}$  esetén

(1)  $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$  ill. (2)  $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$  teljesül.

**Példa:** Lin.lekép  $\mathbb{R}^2$ -ből  $\mathbb{R}^2$ -be (a szokásos helyvektorokon) az origóra tükrözés, az origó körüli forgatás, az  $x$  tengelyre vetítés, vagy egy origón átmenő egyenesre tükrözés.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineáris leképezés, ha pl. az sík minden  $(x, y)$  pontjához a tér  $(2x, 0, y/2)$  pontját rendeljük.

**Megf:** Tetsz.  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$  esetén az  $A$ -val történő balszorzás lin.lekép-t definiál  $\mathbb{R}^k$ -ből  $\mathbb{R}^n$ -be.

**Lemma:** Tfh  $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$ . Ekkor  $f : U \rightarrow V$  lin.lekép  $\iff$   $f$  zárt a lin.komb-ra, azaz  $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$ .

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Mivel  $f$  additív és homogén, ezért

$f(\lambda_1 \underline{u}_1 + \dots + \lambda_k \underline{u}_k) = f(\lambda_1 \underline{u}_1) + \dots + f(\lambda_k \underline{u}_k) = \lambda_1 f(\underline{u}_1) + \dots + \lambda_k f(\underline{u}_k)$ , azaz  $f$  zárt a lin.komb-ra.

$\Leftarrow$ : Ha  $f$  zárt a lin.komb-ra, akkor  $f(\lambda \underline{u}) = \lambda f(\underline{u})$ , hisz  $\lambda \underline{u}$  az  $U$  lin.komb-ja, továbbá

$f(\underline{u} + \underline{v}) = f(1\underline{u} + 1\underline{v}) = 1f(\underline{u}) + 1f(\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ , tehát  $f$  homogén és additív, más szóval  $f$  lin.lekép.  $\square$

**Köv:** Ha  $f : U \rightarrow V$  lin.lekép,  $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$  az  $U$  bázisa és  $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$ , akkor  $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$ , azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.lekép-t.

Annak az igazolásához, hogy minden  $f$  lineáris leképezés előáll mátrixszal történő balszorzással csupán azt kell megmutatni, hogy van olyan  $[f]$  mátrix, amire  $f(\underline{b}_i) = [f]\underline{b}_i$  teljesül minden  $\underline{b}_i$  báziselemre.

Ekkor ugyanis az  $[f]$ -fel való balszorzás lineáris leképezés, továbbá a fenti Következmény miatt  $f(\underline{v}) = [f]\underline{v}$ , azaz minden  $\underline{v}$  vektor  $f$  szerinti  $f(\underline{v})$  képe az  $[f]$  mátrixszal történő balszorzással kapható.

Lehetetlen-e egyértelműen meghatározni a mátrixot?

**Lemma:** Tfh  $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m$  az  $U$  bázisa és  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$  tetsz. vektorok. Ekkor van olyan  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrix, amire  $A\underline{b}_i = \underline{v}_i$  teljesül  $\forall 1 \leq i \leq m$  esetén.

**Biz:** Legyen  $B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m)$ , és  $C = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m)$ . A Lemma állítása ekvivalens azzal, hogy van olyan  $A$  mátrix, amire  $A \cdot B = C$ . Láttuk, hogy ha  $C$  minden sora előáll  $B$  sorainak lineáris kombinációjaként, akkor van ilyen  $A$ . Azt fogjuk tehát most igazolni, hogy  $C$  minden sora előáll  $B$  sorainak lineáris kombinációjaként.

**Lemma:** Tfh  $U \leq \mathbb{R}^k$ ,  $V \leq \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m$  az  $U$  bázisa és  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$  tetsz. vektorok. Ekkor van olyan  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrix, amire  $A\underline{b}_i = \underline{v}_i$  teljesül  $\forall 1 \leq i \leq m$  esetén.

**Biz:** Mivel  $B$  bázis, ezért  $B$  oszlopai lin.ftn-ek. Így a  $B$  ESÁ-okkal RLA mátrixszá transformált alakja  $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m)$ , azaz  $I_m$  áll az RLA mátrix tetején. Ezért  $I_m$  minden sora előáll a  $B$  sorainak lineáris kombinációjaként. Minden  $m$  oszlopból álló mátrix, így  $C$  is megkapható  $I_m$  sorainak lineáris kombinációjaként. Tehát  $C$  sorai előállnak nem csak  $I_m$ , de  $B$  sorainak lin.komb-jaként is.  $\square$

**Köv:** Tetsz.  $f: U \rightarrow V$  lin.lekép esetén van olyan  $[f]$  mátrix, amire  $[f]\underline{u} = f(\underline{u})$  teljesül  $\forall \underline{u} \in U$  esetén.

**Biz:** Legyen  $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k\}$  az  $U$  altér egy bázisa. A fenti Lemma szerint van olyan  $[f]$  mátrix, amire  $[f]\underline{b}_i = f(\underline{b}_i)$  teljesül minden báziselemre. Az  $\underline{u} \mapsto [f]\underline{u}$  olyan lineáris leképezés, ami a  $\underline{b}_i$  báziselemeken megegyezik  $f$ -fel. Mivel a lineáris leképezést a báziselemek képe meghatározza, ezért  $f(\underline{u}) = [f]\underline{u} \forall \underline{u} \in U$ .  $\square$

## 2. Lineáris leképezés mátrixának meghatározása

**Állítás:** Tfh  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  lin.lekép. Ekkor  $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$  teljesül  $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$  esetén, ahol  $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$ .

**Biz:**  $[f]\underline{e}_i = (f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), \dots, f(\underline{e}_n)) \underline{e}_i = f(\underline{e}_i)$  egy korábbi megfigyelés szerint. Ha tehát  $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i$ , akkor

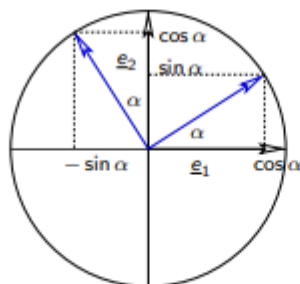
$$[f]\underline{v} = [f](\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i [f]\underline{e}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\underline{e}_i) = f(\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i) = f(\underline{v})$$

(A 2-dik és 4-dik egyenlőségnél  $f$  ill  $[f]$  lineáris kombináció tartó tulajdonságát, a 3-diknál pedig a bizonyítás elején szereplő megfigyelést használtuk.)  $\square$

**Állítás:** Tfh  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  lin.lekép. Ekkor  $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$  teljesül  $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$  esetén, ahol  $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$ .

**Def:** A fenti  $[f]$  mátrix az  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  **lineáris leképezés mátrixa**.

**Példa:** Legyen  $f_\alpha$  az origó körüli  $\alpha$  szögű elforgatás  $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor  $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$  ill.  $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$ , így  $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .



**Megj:** A Lemma azt mondja ki, hogy lineáris leképezések egymásutánja olyan lineáris leképezés, aminek a mátrixa a két lineáris leképezés mátrixának a szorzata, ahol a szorzást a másodiknak elvégzett leképezés mátrixával kezdjük.

miatt e két leképezés megegyezik, így a mátrixaik is azonosak.  $\square$