

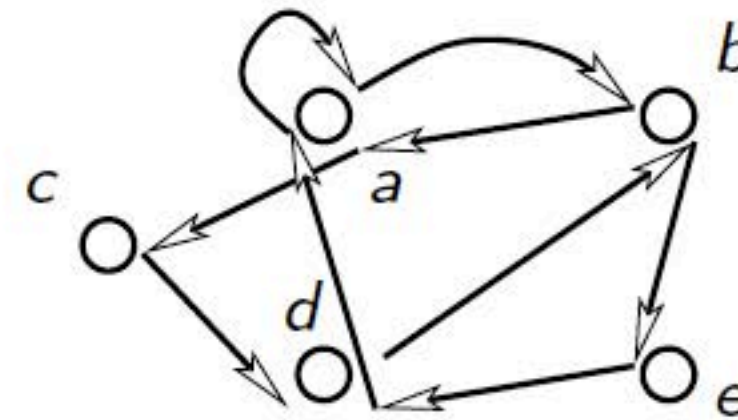
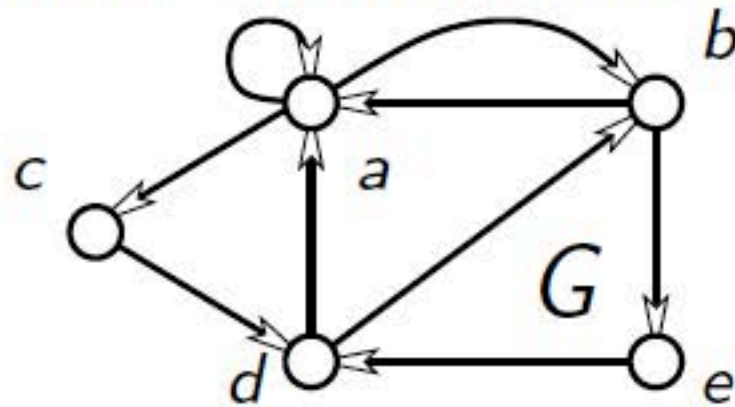
# A számítástudomány alapjai

Euler-séták és Hamilton-körök

2022. október 4.

# Euler-séták

**Def:** A  $G$  gráf **Euler-(kör)sétája** a  $G$  egy olyan (kör)sétája, ami  $G$  minden élét tartalmazza.



**Megj:** (1) A fenti definíció  $2 \times 2$  fogalmat definiál: az Euler-sétát és az Euler-körsétát irányítatlan és irányított gráfra is.

(2) Szokás a definíciót abban a formában kimondani, hogy az Euler-(kör)séta  $G$  minden élét **pontosan** egyszer tartalmazza.

Tekintettel arra, hogy egy séta nem mehet át kétszer ugyanazon az élen, ez redundáns kíváncsú, hiszen következménye az általunk használt definíciónak. Használatos ezen kívül az Euler-kör ill.

Euler-út megnevezés is a fenti fogalmakra.

(3) Irányítatlan Euler-séta: „ $G$  egy vonallal lerajzolható”.

**Cél:** Gyors módszer az Euler-(kör)séta megtalálására, létezésének ellenőrzésére.



# Euler-séták

**Def:** A  $G$  gráf **Euler-(kör)sétája** a  $G$  egy olyan (kör)sétája, ami  $G$  minden élét tartalmazza.

**Megf:** (1) Ha a  $G$  irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

- (a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
- (b) minden  $v$  csúcsára  $\rho(v) = \delta(v)$  teljesül.

**Biz:** (a) Ha  $G$  két különböző gyenge komponense is tartalmaz élt, akkor  $G$ -nek nem lehet Euler-körsétája, hisz egyetlen séta sem tartalmazhat élt két különböző gyenge komponensből. ✓

(b) Ha végighaladunk az Euler-körsétán, akkor a  $v$  csúcsba pontosan annyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk onnan. A körséta  $G$  minden élét pontosan egyszer érinti:  $\rho(v) = \delta(v)$ . □



# Euler-séták

**Def:** A  $G$  gráf **Euler-(kör)sétája** a  $G$  egy olyan (kör)sétája, ami  $G$  minden élét tartalmazza.

**Megf:** (1) Ha a  $G$  irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

- (a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
- (b) minden  $v$  csúcsára  $\rho(v) = \delta(v)$  teljesül.

(2) Ha a  $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor

- (a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
- (b)  $G$ -ben minden fokszám páros.

**Biz:** Az irányított esethez hasonló. (a) Egy (kör)séta nem tartalmazhatja két különböző komponensnek is  $1 - 1$  élét, és (b) az Euler-körsétát követve tetszőleges  $v$  csúcsba ugyanannyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk belőle. Ezért  $d(v)$  páros.  $\square$



# Euler-séták

**Def:** A  $G$  gráf **Euler-(kör)sétája** a  $G$  egy olyan (kör)sétája, ami  $G$  minden élét tartalmazza.

**Megf:** (1) Ha a  $G$  irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

- (a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
- (b) minden  $v$  csúcsára  $\rho(v) = \delta(v)$  teljesül.

(2) Ha a  $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor

- (a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
- (b)  $G$ -ben minden fokszám páros.

(3) Ha a  $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor

- (a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
- (b)  $G$ -nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

**Biz:** (a)✓. (b): Tfh  $G$  Euler-sétája egy  $uv$ -séta. Ekkor minden  $w \neq u, v$  csúcsra  $d(w)$  kétszer annyi, mint ahányszor az Euler-séta  $w$ -n áthalad, vagyis  $d(w)$  páros. Ha  $u = v$ , akkor az Euler-séta körséta, így  $d(u)$  is páros (2b) miatt. Ha pedig  $u \neq v$ , akkor  $u$ -ból 1-gyel többször lépünk ki, mint be,  $v$ -be 1-gyel többször lépünk be, mint ki, vagyis  $d(u)$  és  $d(v)$  páratlanok. □



# Euler-séták

**Def:** A  $G$  gráf **Euler-(kör)sétája** a  $G$  egy olyan (kör)sétája, ami  $G$  minden élét tartalmazza.

**Megf:** (1) Ha a  $G$  irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

- (a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
- (b) minden  $v$  csúcsára  $\rho(v) = \delta(v)$  teljesül.

(2) Ha a  $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor

- (a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
- (b)  $G$ -ben minden fokszám páros.

(3) Ha a  $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor

- (a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
- (b)  $G$ -nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

**Megj:** A fenti Megfigyelés segítségével bizonyos esetekben azonnal látszik, hogy  $G$ -nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

**Kínzó kérdés:** Lehet-e a Megfigyelésben látottaktól eltérő oka annak, hogy  $G$ -nek nincs Euler-(kör)sétája?

**Megnyugtató válasz:** Nem lehet.

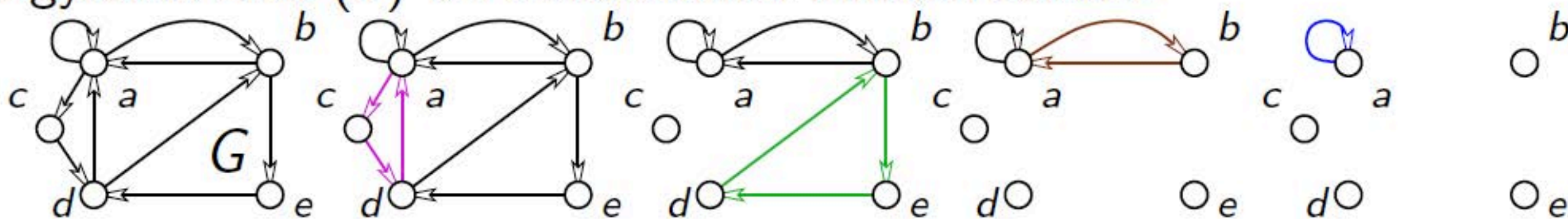


# Az Euler-tulajdonság karakterizációja

**Def:** Az **irányított Euler-gráf** olyan gráf, aminek minden  $v \in V(G)$  csúcsára  $\delta(v) = \rho(v)$  teljesül.

$G$  **irányítatlan Euler-gráf**, ha  $G$  minden  $v$  csúcsára  $d(v)$  páros.

**Lemma:** Ha  $G$  Euler-gráf, akkor  $G$  élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.



**Biz:** Induljunk el  $G$  egy éle mentén, és haladjunk tovább az (irányított) élek mentén. Mivel  $G$  Euler, ezért sosem akadunk el: előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, így találunk egy  $C_1$  kört.  $C_1$  éleit törölve  $G - C_1$  Euler-gráf marad. Ismételjük meg ezt a  $G - C_1$  gráfon. Így  $G$  minden éle előbb-utóbb sorra kerül és megkapjuk a  $C_2, C_3, \dots$  köröket. Ezért  $E(G) = C_1 \cup C_2 \cup \dots$  diszjunkt körök uniójára bomlik fel. Színezzük ki a  $C_i$  kör éleit az  $i$ -dik színnel.  $\square$



# Az Euler-tulajdonság karakterizációja

**Def:** Az **irányított Euler-gráf** olyan gráf, aminek minden  $v \in V(G)$  csúcsára  $\delta(v) = \rho(v)$  teljesül.

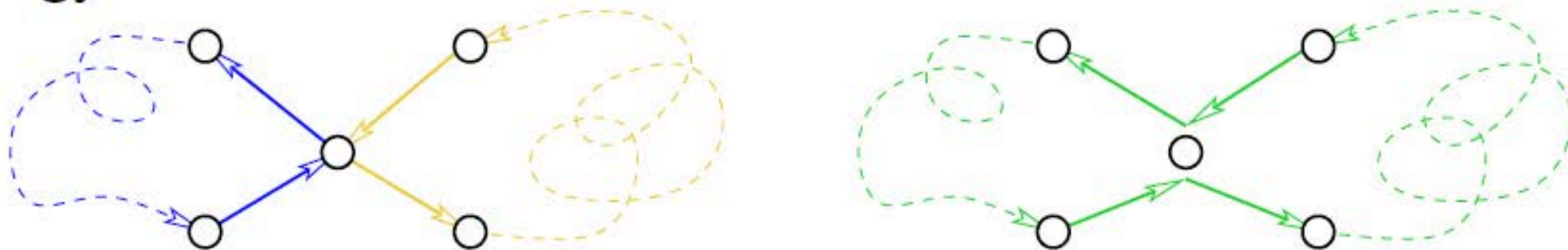
$G$  **irányítatlan Euler-gráf**, ha  $G$  minden  $v$  csúcsára  $d(v)$  páros.

**Lemma:** Ha  $G$  Euler-gráf, akkor  $G$  élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.

**Tétel:** (1) ( $G$  irányított gráfnak van Euler-körsétája)  $\iff$   
( $G$  Euler-gráf és  $G$  izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)  
(2) ( $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája)  $\iff$   
( $G$  Euler-gráf és  $G$  izolált pontoktól eltekintve öf)

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Láttuk.  $\checkmark \Leftarrow$ : A Lemma miatt  $E(G)$  felbontható körökre, tehát körsétákra is. Ha a körséták száma legalább 2, akkor választunk két körsétát, amiknek van közös csúcsa és e csúcs mentén „összevarrjuk” azokat. Mindezt addig végezzük, amíg egyetlen körséta marad.

□





# Az Euler-tulajdonság karakterizációja

**Def:** Az **irányított Euler-gráf** olyan gráf, aminek minden  $v \in V(G)$  csúcsára  $\delta(v) = \rho(v)$  teljesül.

$G$  **irányítatlan Euler-gráf**, ha  $G$  minden  $v$  csúcsára  $d(v)$  páros.

**Lemma:** Ha  $G$  Euler-gráf, akkor  $G$  élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.

**Tétel:** (1) ( $G$  irányított gráfnak van Euler-körsétája)  $\iff$   
( $G$  Euler-gráf és  $G$  izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)  
(2) ( $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája)  $\iff$   
( $G$  Euler-gráf és  $G$  izolált pontoktól eltekintve öf)  
(3) ( $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-sétája)  $\iff$   
( $G$  izolált pontoktól eltekintve öf és 0 vagy 2 ptn fokú csúcsa van.)

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Láttuk.  $\checkmark \Leftarrow$ : Ha  $G$  Euler-gráf, akkor (2) miatt van Euler-körsétája, ami Euler-séta is egyúttal. Ha  $G$  nem Euler-gráf, akkor legyenek  $u$  és  $v$  a  $G$  ptn fokú csúcsai. Ekkor  $G + uv$  Euler-gráf, és (2) miatt van Euler-körsétája. Feltehető, hogy  $e$  körséta utolsó éle  $uv$ . Ezt az  $uv$  élt elhagyva a körsétából,  $G$  Euler-sétáját kapjuk. □



# Az Euler-tulajdonság karakterizációja

**Def:** Az **irányított Euler-gráf** olyan gráf, aminek minden  $v \in V(G)$  csúcsára  $\delta(v) = \rho(v)$  teljesül.

$G$  **irányítatlan Euler-gráf**, ha  $G$  minden  $v$  csúcsára  $d(v)$  páros.

**Lemma:** Ha  $G$  Euler-gráf, akkor  $G$  élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.

**Tétel:** (1) ( $G$  irányított gráfnak van Euler-körsétája)  $\iff$   
( $G$  Euler-gráf és  $G$  izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)

(2) ( $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája)  $\iff$   
( $G$  Euler-gráf és  $G$  izolált pontoktól eltekintve öf)

(3) ( $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-sétája)  $\iff$   
( $G$  izolált pontoktól eltekintve öf és 0 vagy 2 ptn fokú csúcsa van.)

**Euler-körséta keresése Euler-gráfban:**  $E(G)$ -t felbontjuk körsétákra, amiket összevarrunk. Körsétát a felbontáshoz pl. úgy is kereshetünk, hogy addig követünk egy sétát, amíg tudunk. Előbb-utóbb elakadunk, de ez csakis a séta kiindulási pontjában történhet meg. Ezért a bejárt séta egy körséta, amit a felbontásban felhasználunk.



# Hamilton-körök és -utak

**Def:** A  $G$  gráf **Hamilton-köre** (**Hamilton-útja**) a  $G$  olyan köre (útja), ami  $G$  minden csúcsát tartalmazza.

**Megj:** A célunk hasonló, mint az Euler-(kör)séta esetén, azaz gyors módszer, amivel el lehet dönteni egy gráfról, hogy van-e Hamilton-köre ill. -útja. Sajnos jól használható szükséges és elégséges feltételt nem tudunk adni erre a problémára, és jó oka van annak, hogy nem is számítunk ilyen feltétel létezésére. Tudunk viszont jól használható szükséges, és jól használható elégséges feltételt adni, de ezek csak bizonyos gráfok esetén hasznosak.



# Hamilton-körök és -utak

**Def:** A  $G$  gráf **Hamilton-köre** (**Hamilton-útja**) a  $G$  olyan köre (útja), ami  $G$  minden csúcsát tartalmazza.

## Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-köre, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U|$ .

(2) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-útja, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U| + 1$ .

**Megj:** A fenti feltétel, miszerint  $k$  csúcs törlésétől a gráf legfeljebb  $k$  (ill.  $k + 1$ ) komponensre eshet szét feltétlenül **szükséges** ahhoz, hogy  $G$ -nek legyen Hamilton-köre ill. -útja. Abból azonban, hogy  $G$  teljesíti a fenti feltételt, nem következik, hogy  $G$ -nek csakugyan van Hamilton-köre vagy útja. A szükséges feltételt úgy tudjuk alkalmazni, hogy a segítségével igazoljuk egy konkrét gráfról, hogy nincs Hamilton-köre (vagy -útja). Ha pl. azt látjuk, hogy  $G$ -ből 42 csúcsot elhagyva 43 komponens keletkezik, akkor  $G$ -nek nincs Hamilton-köre. Ha a komponensszám legalább 44, akkor  $G$ -nek Hamilton-útja sincs.



# Hamilton-körök és -utak

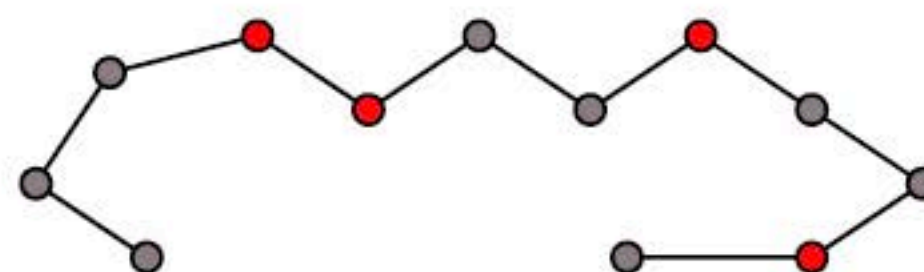
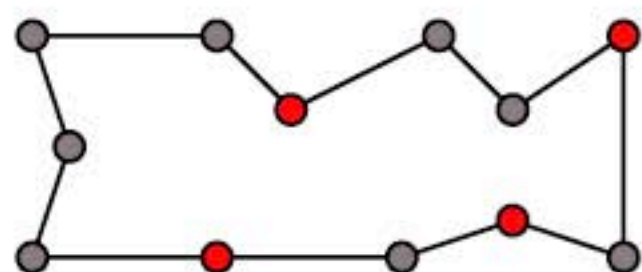
**Def:** A  $G$  gráf **Hamilton-köre** (**Hamilton-útja**) a  $G$  olyan köre (útja), ami  $G$  minden csúcsát tartalmazza.

## Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-köre, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U|$ .

(2) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-útja, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U| + 1$ .

**Biz:** (1,2)  $G$ -t tekinthetjük úgy, mint egy kör (ill. út), amihez még további éleket adunk hozzá. Könnyű látni, hogy egy kör (ill. út)  $k$  pont elhagyásától legfeljebb  $k$  ( $k + 1$ ) komponensre eshet szét. A további élek (amit a körhöz ill. úthoz hozzá kell adni, hogy  $G$ -t kapjuk) csak csökkenteni tudják a komponensszámot, növelni nem. Ezért  $G$ -ből  $k$  csúcsot törölve legfeljebb  $k$  ( $k + 1$ ) komponens keletkezhet. □





# Hamilton-körök és -utak

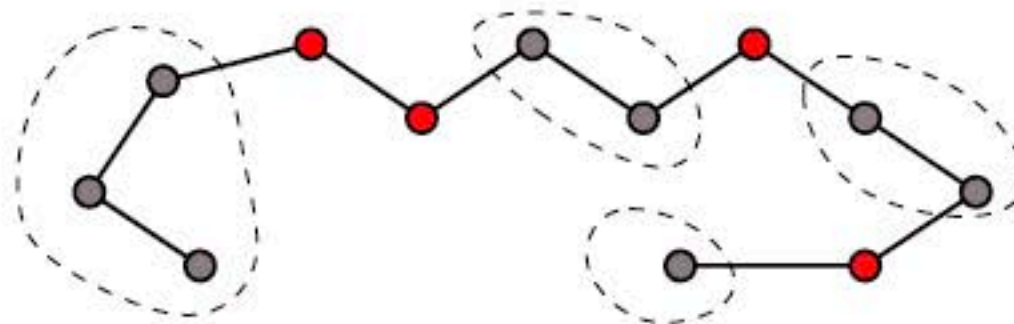
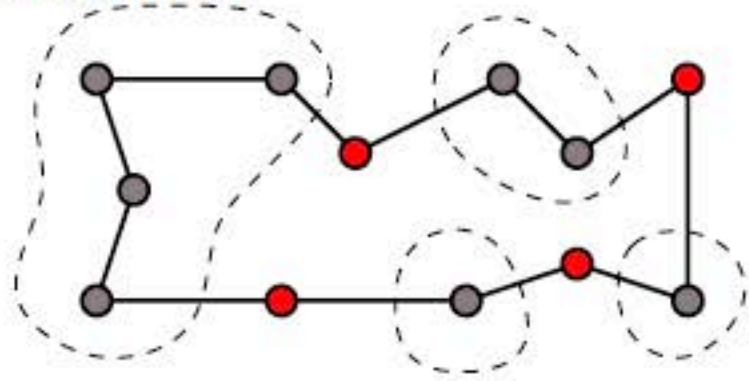
**Def:** A  $G$  gráf **Hamilton-köre** (**Hamilton-útja**) a  $G$  olyan köre (útja), ami  $G$  minden csúcsát tartalmazza.

## Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-köre, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U|$ .

(2) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-útja, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U| + 1$ .

**Biz:** (1,2)  $G$ -t tekinthetjük úgy, mint egy kör (ill. út), amihez még további éleket adunk hozzá. Könnyű látni, hogy egy kör (ill. út)  $k$  pont elhagyásától legfeljebb  $k$  ( $k + 1$ ) komponensre eshet szét. A további élek (amit a körhöz ill. úthoz hozzá kell adni, hogy  $G$ -t kapjunk) csak csökkenteni tudják a komponensszámot, növelni nem. Ezért  $G$ -ből  $k$  csúcsot törölve legfeljebb  $k$  ( $k + 1$ ) komponens keletkezhet. □





# Hamilton-körök és -utak

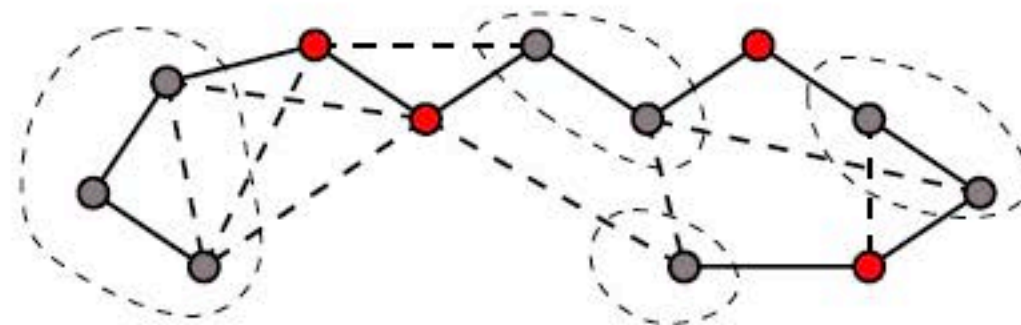
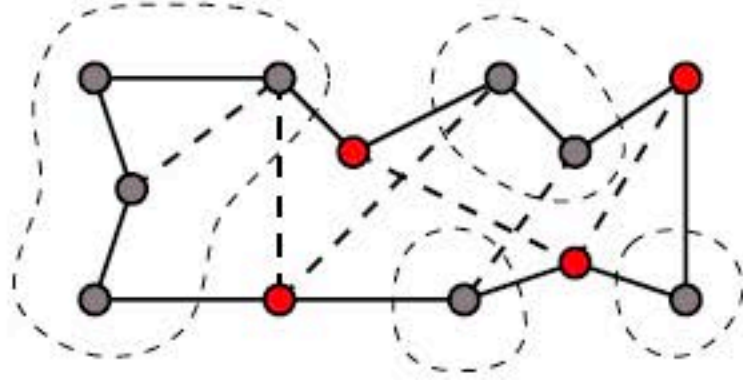
**Def:** A  $G$  gráf **Hamilton-köre** (**Hamilton-útja**) a  $G$  olyan köre (útja), ami  $G$  minden csúcsát tartalmazza.

## Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-köre, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U|$ .

(2) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-útja, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U| + 1$ .

**Biz:** (1,2)  $G$ -t tekinthetjük úgy, mint egy kör (ill. út), amihez még további éleket adunk hozzá. Könnyű látni, hogy egy kör (ill. út)  $k$  pont elhagyásától legfeljebb  $k$  ( $k + 1$ ) komponensre eshet szét. A további élek (amit a körhöz ill. úthoz hozzá kell adni, hogy  $G$ -t kapjunk) csak csökkenteni tudják a komponensszámot, növelni nem. Ezért  $G$ -ből  $k$  csúcsot törölve legfeljebb  $k$  ( $k + 1$ ) komponens keletkezhet. □





# Hamilton-körök és -utak

**Def:** A  $G$  gráf **Hamilton-köre** (**Hamilton-útja**) a  $G$  olyan köre (útja), ami  $G$  minden csúcsát tartalmazza.

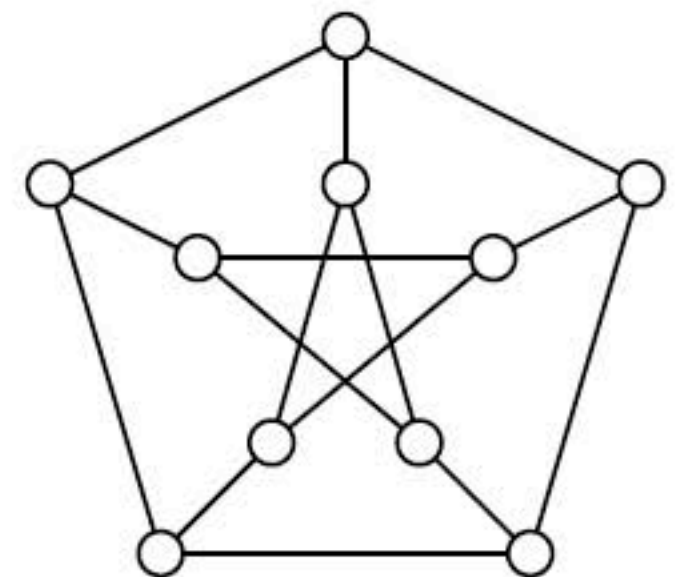
## Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

- (1) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-köre, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U|$ .
- (2) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-útja, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U| + 1$ .

**Megj:** Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

- 1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.
- 2. Nincs Hamilton-köre.

1: Tfh külső körből  $k_1$ , a belsőből  $k_2$  csúcsot hagytunk el. Ha  $k_1 = 0$  vagy  $k_2 = 0$ , akkor a gráf összefüggő marad. Különben a külső kör legfeljebb  $k_1$ , a belső pedig legfeljebb  $k_2$  részre esik szét, vagyis összesen legfeljebb  $k_1 + k_2$  komponens keletkezik.





# Hamilton-körök és -utak

**Def:** A  $G$  gráf **Hamilton-köre** (**Hamilton-útja**) a  $G$  olyan köre (útja), ami  $G$  minden csúcsát tartalmazza.

## Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

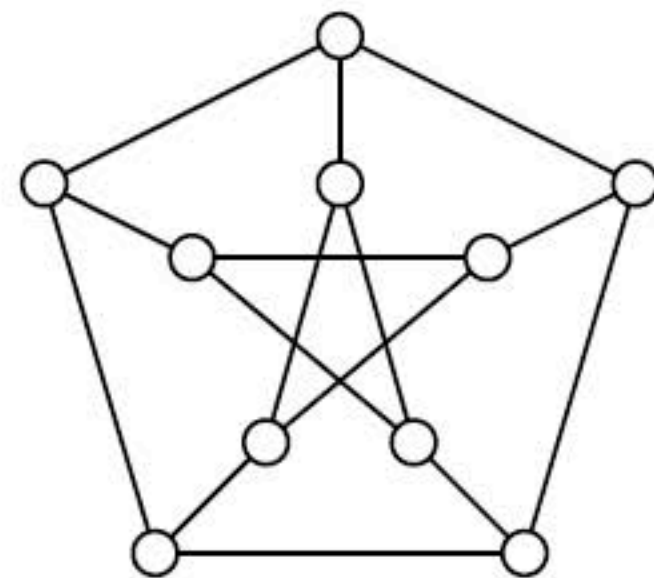
- (1) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-köre, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U|$ .
- (2) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-útja, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U| + 1$ .

**Megj:** Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.

2. Nincs Hamilton-köre.

2: Ha lenne H-kör, akkor a H-kör éleit felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, sárga ill. zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet.





# Hamilton-körök és -utak

**Def:** A  $G$  gráf **Hamilton-köre** (**Hamilton-útja**) a  $G$  olyan köre (útja), ami  $G$  minden csúcsát tartalmazza.

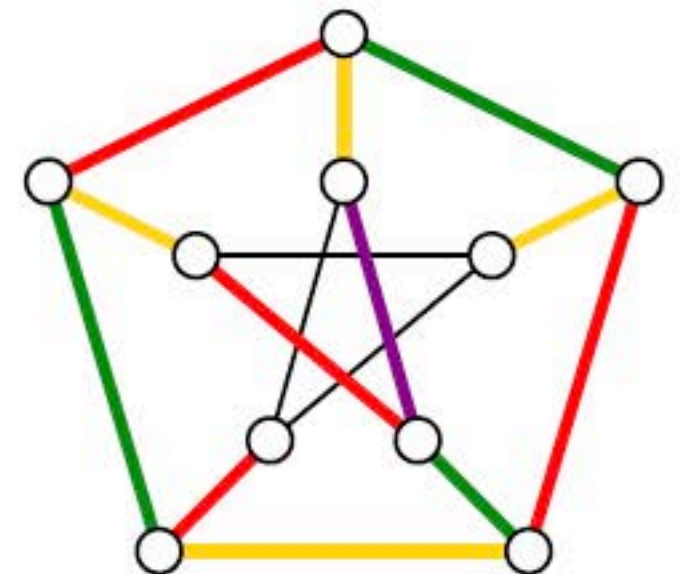
## Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

- (1) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-köre, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U|$ .
- (2) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-útja, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U| + 1$ .

**Megj:** Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.
2. Nincs Hamilton-köre.

2: Ha lenne H-kör, akkor a H-kör éleit felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, sárga ill. zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet.





# Hamilton-körök és -utak

**Def:** A  $G$  gráf **Hamilton-köre** (**Hamilton-útja**) a  $G$  olyan köre (útja), ami  $G$  minden csúcsát tartalmazza.

## Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

- (1) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-köre, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U|$ .
- (2) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-útja, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U| + 1$ .

A továbbiakban elégséges feltételeket fogunk látni Hamilton-kör létezésére. Ezek segítségével (szerencsés esetben) gyorsan és kétséget kizáróan tudjuk bizonyítani, hogy egy adott gráfnak van Hamilton-köre. Az elégséges feltétel vizsgálata azonban nem alkalmas arra, hogy egy gráf a Hamilton-körének hiányát igazoljuk.



# Hamilton-körök és -utak

**Def:** A  $G$  gráf **Hamilton-köre** (**Hamilton-útja**) a  $G$  olyan köre (útja), ami  $G$  minden csúcsát tartalmazza.

## Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

- (1) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-köre, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U|$ .
- (2) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-útja, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U| + 1$ .

**Def:** Legyen  $G$   $n$ -csúcsú, egyszerű gráf.

Az  $u, v \in V(G)$  csúcspár **gazdag**, ha  $d(u) + d(v) \geq n$ .

A  $G$  gráfra teljesül a **Dirac-feltétel**, ha  $d(v) \geq \frac{n}{2} \forall v \in V(G)$ -re.

$G$ -re igaz az **Ore-feltétel**, ha  $G$  bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot.

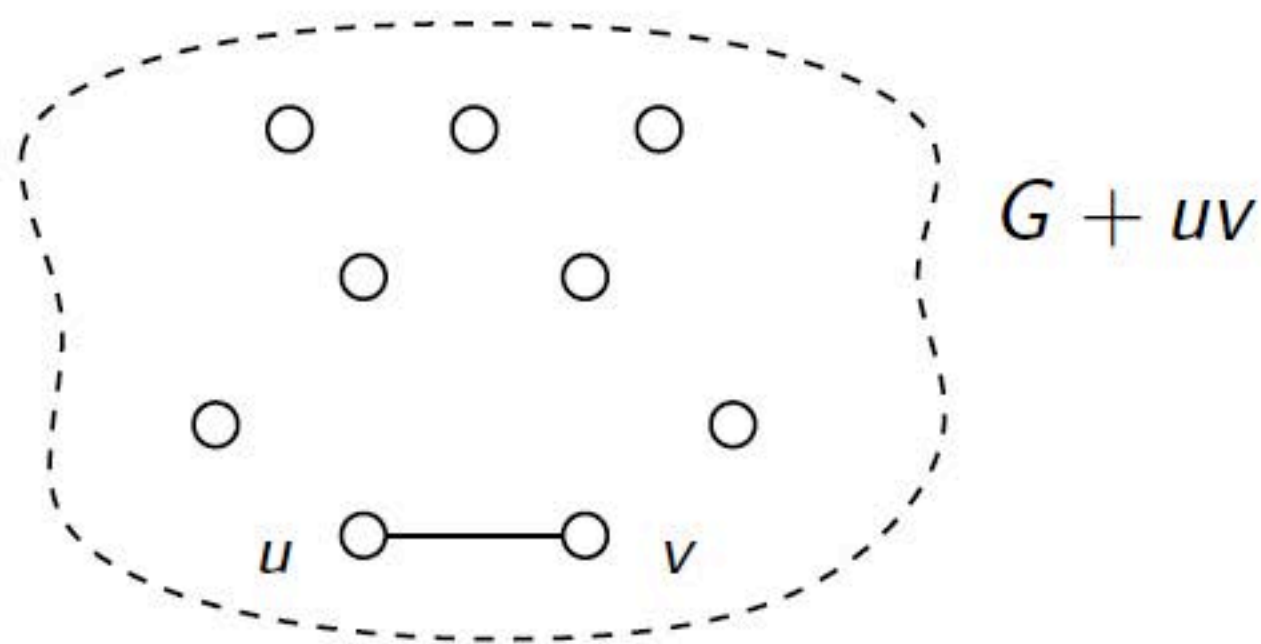
**Dirac tétele:**  $G$ -re igaz a Dirac-feltétel  $\Rightarrow G$ -nek van H-köre.

**Ore tétele:**  $G$ -re igaz az Ore-feltétel  $\Rightarrow G$ -nek van H-köre.

**Megj:** A Dirac-feltétel erősebb (többet kíván), mint az Ore. Ezért az Ore-tétel erősebb, mint a Dirac: gyengébb feltételből igazolja ugyanazt. Ezért az Ore-tétel bizonyítása a Dirac-tételt is igazolja.



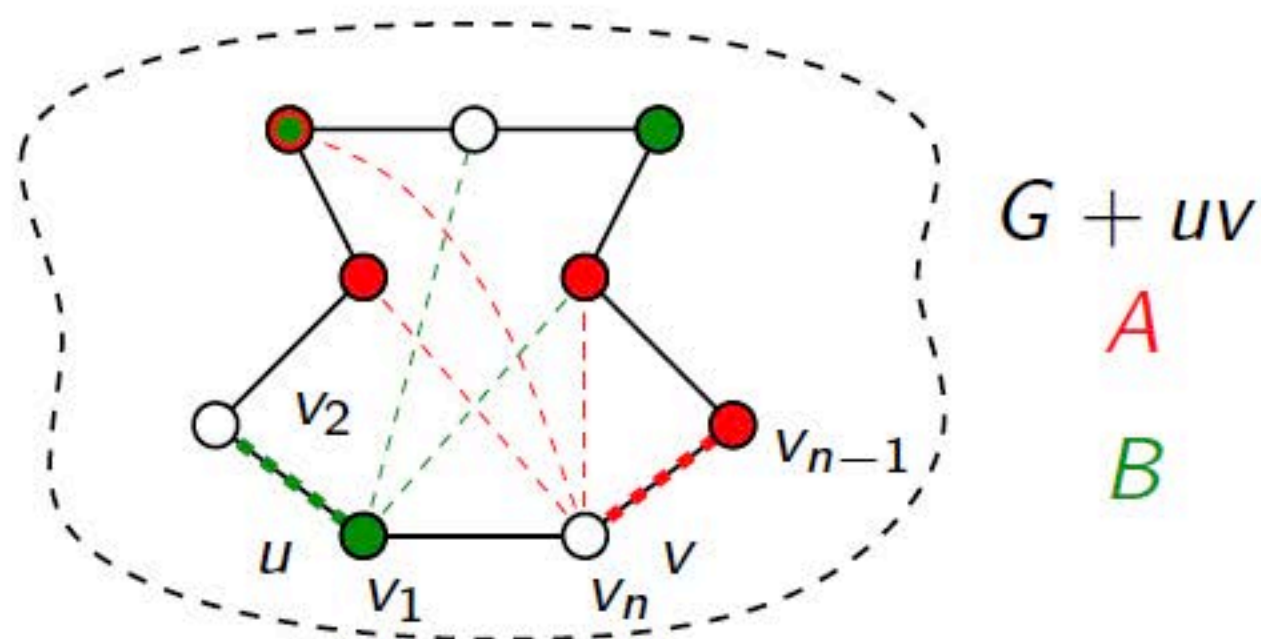
# A Chvátal-lezárt



**Hízlalási lemma:** Tfh  $G$  egyszerű gráf, és  $(u, v)$  gazdag pár.  
( $G$ -nek van Hamilton-köre)  $\iff$  ( $G + uv$ -nek van Hamilton köre).  
**Megj:** A hízlalási lemma jelentősége az, hogy segít eldönteni azt, hogy van-e  $G$ -ben Hamilton-kör. Azt mondja ki ugyanis, hogy a gazdag párok közé  $G$ -be „ingyen” behúzhatunk éleket, u.i. ez nem változtat azon a tényen, hogy van vagy nincs Hamilton-kör a vizsgált gráfban. Megtehetjük tehát, hogy a lemma segítségével addig húzunk be éleket a gráfba, amíg lehet. Ha az így adódó  $\overline{G}$  Chvátal-lezártban találunk Hamilton-kört, akkor  $G$ -nek is bizonyosan van Hamilton-köre. Ha pedig  $\overline{G}$  nem tartalmaz Hamilton-kört, akkor persze  $G$ -nek sincs Hamilton-köre.



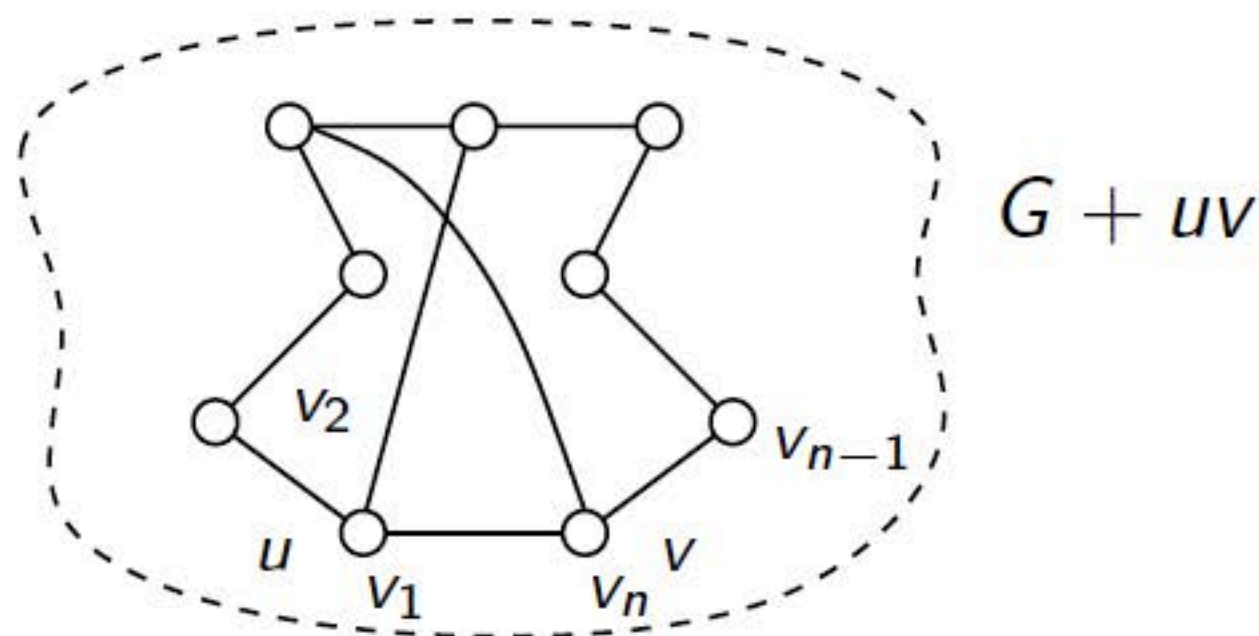
# A Chvátal-lezárt



**Hízlalási lemma:** Tfh  $G$  egyszerű gráf, és  $(u, v)$  gazdag pár.  
( $G$ -nek van Hamilton-köre)  $\iff$  ( $G + uv$ -nek van Hamilton köre).  
**Biz:**  $\Rightarrow$ :  $\checkmark$   $\Leftarrow$ : Legyen  $C$  a  $G + uv$  H-köre. Ha  $uv \notin C$ , akkor  $C$  a  $G$ -nek is H-köre, kész vagyunk. Ha viszont  $uv \in C$ , akkor  $C - uv$  a  $G$  egy H-útja. Legyen ez a H-út  $u = v_1, v_2, \dots, v_n = v$ . Legyen  $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$  a  $v$  szomszédainak halmaza, és legyen  $B := \{v_{i-1} : uv_i \in E(G)\}$  az  $u$  szomszédait a H-úton megelőző csúcsok halmaza.  
Világos, hogy  $v \notin A$  és  $v \notin B$ , így  $|A \cup B| \leq n - 1$ . Mivel  $(u, v)$  gazdag pár, ezért  $|A| + |B| = d(u) + d(v) \geq n$ . Ezek szerint  $A \cap B \neq \emptyset$ , legyen pl.  $v_i \in A \cap B$ .



# A Chvátal-lezárt



**Hízlalási lemma:** Tfh  $G$  egyszerű gráf, és  $(u, v)$  gazdag pár.

$(G\text{-nek van Hamilton-köre}) \iff (G + uv\text{-nek van Hamilton köre}).$

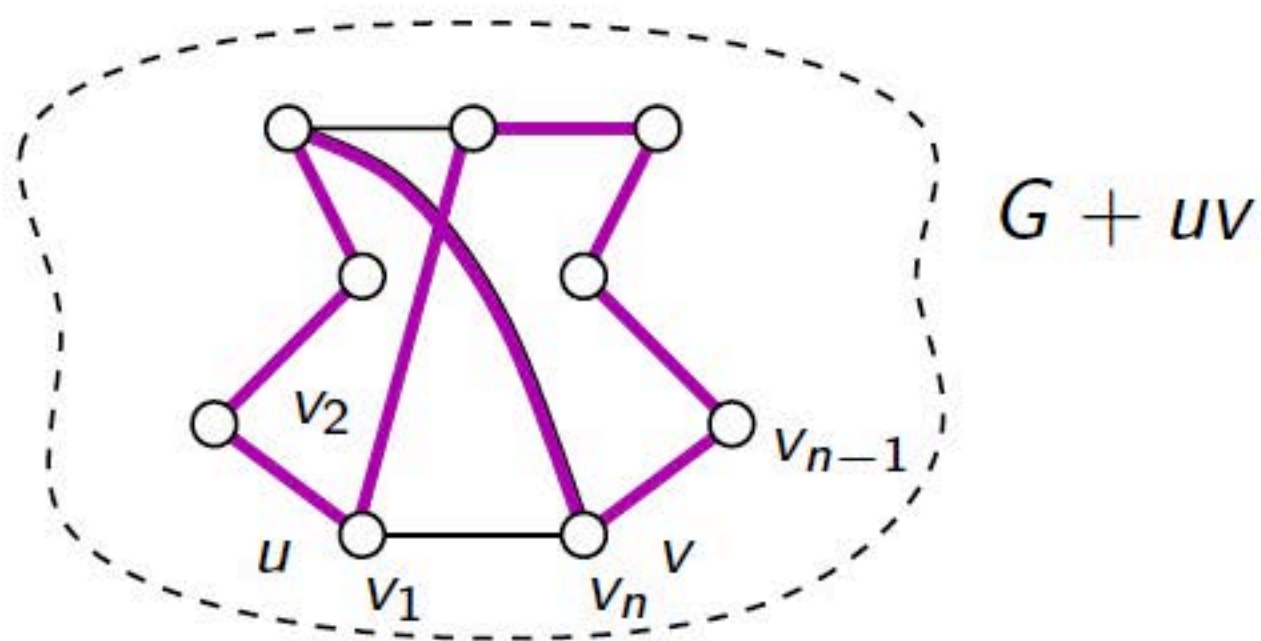
**Biz:**  $\Rightarrow$ :  $\checkmark$   $\Leftarrow$ : Legyen  $C$  a  $G + uv$  H-köre. Ha  $uv \notin C$ , akkor  $C$  a  $G$ -nek is H-köre, kész vagyunk. Ha viszont  $uv \in C$ , akkor  $C - uv$  a  $G$  egy H-útja. Legyen ez a H-út  $u = v_1, v_2, \dots, v_n = v$ . Legyen  $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$  a  $v$  szomszédainak halmaza, és legyen  $B := \{v_{i-1} : uv_i \in E(G)\}$  az  $u$  szomszédait a H-úton megelőző csúcsok halmaza.

Világos, hogy  $v \notin A$  és  $v \notin B$ , így  $|A \cup B| \leq n - 1$ . Mivel  $(u, v)$  gazdag pár, ezért  $|A| + |B| = d(u) + d(v) \geq n$ . Ezek szerint  $A \cap B \neq \emptyset$ , legyen pl.  $v_i \in A \cap B$ . Ekkor

$v_1, v_2, \dots, v_i, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}, v_1$  a  $G$  egy H-köre.



# A Chvátal-lezárt



**Hízlalási lemma:** Tfh  $G$  egyszerű gráf, és  $(u, v)$  gazdag pár.  
( $G$ -nek van Hamilton-köre)  $\iff$  ( $G + uv$ -nek van Hamilton köre).

**Ore tétele:** Ha  $G$  bármely két nemszomszédos csúcsa gazdag párt alkot, akkor  $G$ -nek van H-köre.

**Biz:** A hízlalási lemma alapján  $G$  bármely két nemszomszédos csúcsát „ingyen” összeköthetjük. Így  $G$  Chátal-lezártja a  $\overline{G} = K_n$  teljes gráf. Mivel  $K_n$ -nek van H-köre, ezért  $G$ -nek is van.  $\square$

**Dirac-tétel:** Ha  $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$ , akkor  $G$ -nek van H-köre.

**Biz:**  $G$  bármely két csúcsa gazdag párt alkot, ezért  $G$ -re teljesül az Ore-feltétel. Az Ore-tétel miatt  $G$ -nek van H-köre.  $\square$