20. **Sor- oszlop- és determinánsrang**, ezek viszonya és **kiszámítása**. Összeg és szorzat rangja. **Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja**, a megoldhatóság és az oszlopok alterének kapcsolata. Az egyértelmű megoldhatóság feltétele $n \times n$ együtthatómátrix esetén.

Sor-, oszlop-, és determináns rang

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Biz: (1): A transzponált sorai a mátrix oszlopainak felelnek meg.
(2) A sorok által generált altér egy bázisát választhatjuk a sorvektorokból. Ez a bázis a sorok egy maximális méretű lin.ftn részhalmaza. Ezért ennek a bázisnak az elemszáma $s(A)$, vagyis a sorvektorok által generált altér dimenziója.
Az oszlopokra vonatkozó állítást hasonló érvelés igazolja. $\square$

Ezek viszonya és kiszámítása

Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Biz: Láttuk, hogy ESÁ során a sorok által generált altér nem változik, így a dimenziója is ugyanannyi marad.
ESÁ hatására az oszlopok közti lineáris összefüggések sem változnak, ezért oszlopok egy halmaza pontosan akkor lin.ftn ESÁ előtt, ha ugyanezen oszlophalmaz lin.ftn ESÁ után. $\square$

Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Biz: A v1-ekhez tartozó oszlopok az oszlopok által generált altér bázisát alkotják, így $o(A)$ a v1-ek száma.
RLA mátrix csupa 0 sorait elhagyva a maradék (v1-t tartalmazó) sorok lin.ftn-ek, hisz egyik se áll elő a többi lin.komb-jaként. Ezért $s(A)$ is a v1-ek száma, tehát $s(A) = o(A)$. $\square$

Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Biz: Legyen A' az A-ból ESÁ-okkal kapott RLA mátrix. Ekkor $s(A) = s(A') = o(A') = o(A)$.

Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Biz: $\Rightarrow$: Tfh van k lin.ftn sor, ezek alkossák az A' mátrixot. Ekkor $k = s(A') = o(A')$: A'-nek van k lin.ftn oszlopa. Alkossák ezek az A'' mátrixot. Így $o(A'') = k = s(A'')$, tehát A'' az A egy k méretű nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixa, azaz $d(A) \geq k$.

Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Biz: $\Leftarrow$: Tfh A'' egy k méretű nemnulla determinánsú négyzetes részmátrix. Az inverzről tanultaknál láttuk, hogy A'' sorai lin.ftn-ek. Ezért az A'' sorainak megfelelő A-beli sorok is lin.ftn-ek, vagyis $s(A) \geq k$. $\square$

Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.
Biz: Ha $s(A) = k$, akkor az előző állítás miatt $d(A) \geq k$. Ha pedig $d(A) = k$, akkor $s(A) \geq k$. Ezért $s(A) = d(A)$. Korábban láttuk, hogy $s(A) = o(A)$. $\square$

Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix rangja $r(A) = s(A)$.
Rang meghatározása:
ESÁ-okkal képzett RLA mátrix v1-ei száma.

Összeg és szorzat rangja

Lemma: Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.
Biz: Tfh $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}$ az A lin.ftn sorai és $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ a B lin.ftn sorai. Ekkor az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}$ sorvektorok generálják A minden sorát, és a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ sorok generálják B minden sorát. Mivel $A + B$ minden sorát generálják A sorai és B sorai, ezért $A + B$ sorait generálják az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}, \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ vektorok is. Az $A + B$ sorvektorai által generált altér dimenziójára tehát $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$ teljesül. $\square$
Lemma: $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ $\Rightarrow$ $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$.
Biz: Láttuk, hogy AB minden sora a B sorainak lin.komb-ja, ezért AB sorvektorai által generált altér része a B sorvektorai által generált altérnek. Így az első altér dimenziója nem lehet nagyobb a másodikénál, vagyis $r(AB) = s(AB) \leq s(B) = r(B)$.
Hasonlóan, AB minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja, tehát az AB oszlopai által generált altér dimenziója nem nagyobb az A oszlopai által generáltnál: $r(AB) = o(AB) \leq o(A) = r(A)$.
Innen a tétel állítása közvetlenül adódik. $\square$

Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.
Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix, $\underline{b}$ a konstansokat, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

A megoldhatóság és az oszlopok alterének kapcsolata

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix, $\underline{b}$ a konstansokat, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

Kínzó kérdés: Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható?

Frappáns válasz: A kérdés voltaképpen az, hogy mikor található olyan $\underline{x}$ oszlopvektor (konkrét számokkal), amire $A\underline{x} = \underline{b}$ teljesül.

Láttuk: Tetsz. A, C mátrixra (C előáll $AB = C$ alakban) $\iff$ (C minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja)

Köv: Ha A oszlopai $A^1, \dots$, akkor $(\exists \underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}) \iff (\underline{b} \in \langle A^1, \dots \rangle) \iff (\langle A^1, \dots \rangle = \langle \underline{b}, A^1, \dots \rangle) \iff (\dim\langle A^1, \dots \rangle = \dim\langle \underline{b}, A^1, \dots \rangle)$

Az egyértelmű megoldhatóság feltétele n × n együtthatómátrix esetén

Lineáris egyenletrendszerek érdekes speciális esete, ha az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik. Ilyenkor az együtthatómátrix négyzetes. Korábban láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

Kínzó kérdés: Lehet-e következtetni a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrix alapján?

Válasz: Ez a kérdés csak négyzetes együtthatómátrix érdekes.

Állítás: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $(A\underline{x} = \underline{b}$ egyért. megoldható$) \iff (|A| \neq 0)$

Biz: $\Rightarrow$: Tfh $|A| \neq 0$. Ekkor A oszlopai nem lineárisan függetlenek, ezért A oszlopainak valamely nemtriviális lineáris kombinációja $\underline{0}$-t ad: $\exists \underline{y} \neq \underline{0}$: $A\underline{y} = \underline{0}$. Ezért ha $\underline{x}$ az $A\underline{x} = \underline{b}$ megoldása, akkor $A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$ miatt $\underline{x} + \underline{y}$ is megoldás. Tehát az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenletnek nincs egyértelmű megoldása.

Biz: $\Rightarrow$: Tfh $|A| \neq 0$. Ekkor A oszlopai nem lineárisan függetlenek, ezért A oszlopainak valamely nemtriviális lineáris kombinációja $\underline{0}$-t ad: $\exists \underline{y} \neq \underline{0}$: $A\underline{y} = \underline{0}$. Ezért ha $\underline{x}$ az $A\underline{x} = \underline{b}$ megoldása, akkor $A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$ miatt $\underline{x} + \underline{y}$ is megoldás. Tehát az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenletnek nincs egyértelmű megoldása.
$\Leftarrow$: $|A| \neq 0$, ezért A-nak van inverze. Így $\left[A\underline{x} = \underline{b}\right] \iff \left[\underline{x} = (A^{-1}A)\underline{x} = A^{-1}(A\underline{x}) = A^{-1}\underline{b}\right]$, azaz $\underline{x}$ egyértelmű. $\square$