

Mélységi keresés és alkalmazásai (fellépő éltípusok, mélységi- és befejezési számozásból az éltípus meghatározása, irányított kör létezésének eldöntése DFS-sel).

• Depth First Search (DFS)

(A mélységi bejárás avagy DFS alatt olyan gráfbejárást értünk, amikor mindig a legutolsónak elért csúcsból kerül elérésre a soron következőnek elért csúcs. Az elérési illetve befejezési sorrendből adódik minden v csúcshoz egy $m(v)$ mélységi ill. $b(v)$ befejezési szám.)

”**Mélységi bejárás (DFS):** A bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az [1.] esetben.

Mélységi és befejezési számozás: DFS után $m(v)$ ill. $b(v)$ a v csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

Megj: A BFS konkrét megvalósításában szükség van arra, hogy az **elért** csúcsokat úgy tároljuk, hogy könnyű legyen kiválasztani az **elért** csúcsok közül a legkorábban elértet. Erre egy célszerű adatstruktúra a *sor* (avagy *FIFO lista*). Ha a BFS megvalósításában ezt az adatstruktúrát *veremre* (más néven *FIFO listára*) cseréljük, akkor a DFS egy megvalósítása adódik.

Megf: Tegyük fel, hogy a G gráf éleit DFS után osztályoztuk.

(1) Ha uv **faél**, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

Biz: v -t u -ból értük el, ezért $m(u) < m(v)$. A v elérésekor u és v elért állapotúak. A DFS szerint v -t u elptt fejezzük be. \square

(2) Ha uv **előreél**, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

Biz: u -ból v -be faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, befejezési csökken. \square

(3) Ha uv **visszaél**, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) < b(v)$.

Biz: v -ből u -ba faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, a befejezési csökken. \square

Biz: $m(u) < m(v)$ esetén a DFS miatt v az u leszármazottja lenne. Ezért $m(u) > m(v)$. Ha u -t a v befejezése előtt érնék el, akkor u a v leszármazottja lenne. Ezért az alábbi sorrendben történik u és v evolúciója: **v** **elérése**, **v** **befejezése**, **u** **elérése**, **u** **befejezése**. \square (4) Ha uv **keresztél**, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

(5) Irányítatlan gráf DFS bejárása után nincs keresztél.

Biz: Indirekt. Ha uv keresztél, akkor (4) miatt $m(u) > m(v)$, továbbá vu is keresztél, ezért $m(v) > m(u)$. Ellentmondás. \square

(6) Ha DFS után van visszaél, akkor G tartalmaz irányított kört.

Biz: A DFS fa visszaélhez tartozó alapköre a G egy irányított köre. \square

(7) Ha DFS után nincs visszaél, akkor G -ben nincs irányított kör.

Biz: Bmely irányított körnek van olyan uv éle, amire $b(u) < b(v)$. Ez az él csak visszaél lehet. \square

A mélységi bejárás lépésszáma lineáris, azaz van olyan c konstans, hogy tetszőleges u csúcsú, m élű gráf DFS-éhez legfeljebb $c(n + m)$ lépés szükséges.

• Direct Acyclic Graphs

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf **aciklikus** (más néven **DAG**), ha G nem tartalmaz irányított kört.

Példa: DAG-ot úgy kaphatunk, hogy egy G irányítatlan gráf csúcsait csupa különbözőszámmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobbba irányítunk.

Ha ugyanis lenne az így megírányított gráfban irányított kör, akkor az élei mentén a számok végig növekednének, ami lehetetlen. Azt fogjuk ihazolni, hogy a fenti példa minden DAG-ot leír.

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcsainak **topologikus sorrendje** alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba. $(V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, v_i v_j \in E \Rightarrow i < j)$

Tétel: $(G$ irányított gráf DAG) $\Leftrightarrow (V(G)$ -nek \exists topologikus sorrendje).

Biz: Tegyük fel, hogy \exists topologikus sorrend. Láttuk, hogy G ekkor DAG. \checkmark

Biz: Most tegyük fel, hogy G DAG, és futtassunk rajra egy DFS-t. Láttuk, hogy a DFS után nem lesz visszaél, ezért minden uv irányított élre $b(u) > b(v)$ teljesül. Ezért a csúcsok befejezési sorrendjének megfordítása a G csúcsainak egy topologikus sorrendje. \square

Köv: Irányított gráf aciklikussága DFS-sel gyorsan eldönthető: ha van visszaél, akkor a visszaél DFS-fabeli alapköre G egy irányított köre, így G nem DAG. Ha pedig nincs visszaél, akkor a fordított befejezési sorrend a G egy topologikus sorrendje, G tehát DAG.

Megj: DAG-ban topologikus sorrendet forráskeresések és forrástörlések alkalmazásával is találhatunk.