

# A számítástudomány alapjai

ÖSSZEFOGLALÓ JEGYZET

*Készítette: Illyés Dávid*

Ez a jegyzet nagyon hasonlóan van struktúrálnva az előadás jegyzetekhez és fő célja, hogy olyan módon adja át a "A Programozás Alapjai 1" nevű tárgy anyagát, hogy az teljesen kezdők számára is könnyen megérthető és megtanulható legyen.

# Tartalomjegyzék

Oldal

<b>1</b>	<b>A gráfelmélet alapjai</b>	<b>2</b>
1.1	Mi a gráf? . . . . .	2
1.2	Multigráfok és irányított gráfok . . . . .	2
1.3	Handshaking lemma . . . . .	2
1.4	Komplementer és izomorfia . . . . .	3
1.5	Gráfoperációk . . . . .	3
1.6	Háromféle elérhetőség, összefüggőség . . . . .	3
1.7	Gráfok összefüggősége a gyakorlatban . . . . .	4
1.8	Fák és erdők . . . . .	4
1.9	Fák további tulajdonságai . . . . .	5
1.10	Feszítőfák . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Minimális költségű feszítőfák</b>	<b>6</b>
2.1	Alapkörendszer, alap vágás rendszer . . . . .	6
2.2	Minimális költségű feszítőfa . . . . .	6
2.3	Minimális költségű feszítőfák struktúrája . . . . .	6
2.4	Az ötödik elem . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Gráfbejárások és legrövidebb utak</b>	<b>8</b>
3.1	Általános gráfbejárás & BFS . . . . .	8
3.2	A BFS tulajdonságai . . . . .	8
3.3	Legrövidebb utak . . . . .	9
3.4	Az elméleti javítás . . . . .	9
3.5	Dijkstra, egy példán . . . . .	10
3.6	Dijkstra helyessége . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Legrövidebb utak, DFS, PERT</b>	<b>12</b>
4.1	Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 1 . . . . .	12
4.2	Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 2 . . . . .	12
4.3	Depth First Search (DFS) . . . . .	13
4.4	Direct Acyclic Graphs . . . . .	13
4.5	Leghosszabb út keresése . . . . .	14
4.6	A PERT probléma . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Euler-séták és Hamilton-körök</b>	<b>16</b>
5.1	Euler-séták . . . . .	16
5.2	Hamilton-körök és -utak . . . . .	17
5.3	A Chvátal-lezárt . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Síkgráfok</b>	<b>20</b>
6.1	Síkbarajzolhatóság . . . . .	20
6.2	Az Ezler-féle poliéderformula, síkgráfok karakterizációja . . . . .	20
6.3	Síkgráfok duálisa . . . . .	21
6.4	Whitney . . . . .	22

# 1 A gráfelmélet alapjai

## 1.1 Mi a gráf?

**Def:**  $G = (V, E)$  egyszerű, irányítatlan gráf

**Példa:** Ha  $V \neq \emptyset$  és  $E \subseteq \binom{V}{2}$ , ahol  $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ .  $V$  a  $G$  csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),  $E$  pedig  $G$  éleinek halmaza.

**Példa:**  $G = (\{a, b, c, d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\})$

**Def:** A  $G = (V, E)$  gráf diagramja a  $G$  egy olyan lerajzolása, amiben  $V$ -nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és  $G$  minden  $\{u, v\}$  élének egy  $u$ -t és  $v$ -t összekötő görbe felel meg.

**Terminológia & konvenciók:** Gráf alatt rendszerint egyszerű, irányítatlan gráfot értünk. Ha  $G$  egy gráf, akkor  $V(G)$  a  $G$  csúcshalmazát,  $E(G)$  pedig  $G$  élhalmazát jelöli, azaz  $G = (V(G), E(G))$ . Az  $e = \{u, v\}$  élt röviden  $uv$ -vel jelöljük.

Ekkor  $e$  az  $u$  és  $v$  csúcsokat köti össze. Továbbá  $u$  és  $v$  az  $e$  végpontjai, amelyek az  $e$  élre illeszkednek, és  $e$  mentén szomszédosak.

## 1.2 Multigráfok és irányított gráfok

**Megj:** Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

**Def:** Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

**Def:**  $G = (V, E)$  véges gráf, ha  $V$  és  $E$  is véges halmazok.

**Def:** Az  $n$ -pontú út,  $n$ -pontú kör, ill.  $n$ -pontú teljes gráf jele rendre  $P_n$ ,  $C_n$ , ill.  $K_n$ . ( $P_1, P_2, P_3$  elfajulók.) **Megf:**  $K_1 = P_1, P_2 = C_2, C_3 = K_3$

**Def:**  $c \in V(G)$  esetén a  $v$ -re illeszkedő élek száma a  $v$  fokszáma. Jelölése  $d_g(v)$  vagy  $d(v)$ , a hurokél kétszer számít. (Irányított gráf esetén  $\delta(v)$  ill.  $\rho(v)$  a  $v$  ki- ill. befokát jelöli.)

**Def:** A  $G$  gráf maximális ill. minimális fokszáma  $\Delta(G)$  ill.  $\delta(G)$ .  $G$  reguláris, ha minden csúcsának foka ugyanannyi:  $\Delta(G) = \delta(G)$ ,  $G$  pedig  $k$ -reguláris, ha minden csúcsának pontosan  $k$  a fokszáma.

**Megf:** Minden kör 2-reguláris,  $K_n$  pedig  $(n - 1)$ -reguláris.

## 1.3 Handshaking lemma

**Kézfogás-lemma (KFL):** Ha  $G = (V, E)$  véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ , azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

**Általánosított kézfogás-lemma:** Tetsz.  $G = (V, E)$  véges irányított gráfra  $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$ , azaz a csúcsok ki- és befokainak összege is az élszámot adja meg.

**Biz:** Az egyes csúcsokból kilépő éleket megszámlálva  $G$  minden irányított élét pontosan egyszer számoljuk meg. Ezért a kifokok összege az élszám. A belépő éleket leszámolálva hasonló igaz, ezért a befokok összege is az élszám.  $\square$

**A KFL bizonyítása:** Készítsük el a  $G'$  digráfot úgy, hogy  $G$  minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítsük. Ekkor

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)| \quad \square$$

**Megj:** Úgy is bizonyíthattuk volna az általánosított kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be  $G$ -be az éleket. 0-elű (üres)gráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 1-gyel növeli az élszámot is és a ki/befokok összegét is.

**Megj:** Úgy is bizonyíthattuk volna a kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be  $G$ -be az éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-vel növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszámösszeget is.

## 1.4 Komplementer és izomorfia

**Def:** A  $G$  egyszerű gráf **komplementere**  $\overline{G} = (V, (G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$ .

**Megj:**  $G$  és  $\overline{G}$  csúcsai megegyeznek, és két csúcspontosan akkor szomszédos  $\overline{G}$ -ben, ha nem szomszédosak  $G$ -ben.

**Példa:**

**Megf:** Ha  $G = (V, E)$  egyszerű gráf és a  $|V(G)| = n$ , akkor  $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$  teljesül  $G$  bármely  $v$  csúcsra.

**Biz:** A  $K_n$  teljes frág minden éle a  $G$  és  $\overline{G}$  gráfok közül pontosan az egyikhez tartozik. Ezért  $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v)$  megegyezik a  $v$  csúcs  $K_n$ -beli fokszámával, ami  $n - 1$ .  $\square$

**Def:** A  $G$  és  $G'$  gráfok akkor **izomorfak**, ha mindeket gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től  $n$ -ig terjedő egész számokkal (alkalmas  $n$  esetén), hogy  $G$  bármely két  $u, v$  csúcsa között pontosan annyi él fut  $G$ -ben, mint az  $u$ -nak és  $v$ -nek megfelelő sorszámú csúcsok között  $G'$ -ben. Jelölése:  $G \cong G'$ .

**Példa:**

**Megf:** Ha  $G \cong G'$ , akkor  $G$  és  $G'$  lényegében ugyanúgy néznek ki. Így például minden fokszám ugyanannyiszor lép fel  $G$ -ben mint  $G'$ -ben, ugyan annyi  $C_4$  kör található  $G$ -ben, mint  $G'$ -ben, stb.

## 1.5 Gráfoperációk

**Def:** Éltörlés, csúcs törlés, élhozzáadás.

**Def:** Feszítő részgráf: éltörlésekkel kapható gráf.

**Feszített részgráf:** csúcs törlésekkel kapható gráf.

**Részgráf:** él- és csúcs törlésekkel kapható gráf.

**Példa:**  $H_1, H_2, H_3$ : a  $G$  feszítő, feszített, jelzőnélküli részgráfjai.

**Megf:**  $H$  a  $G$  részgráfja  $\iff V(H) \subseteq V(G)$  és  $E(H) \subseteq E(G)$ .

$H$  a  $G$  feszítő részgráfja  $\iff V(H) = V(G)$  és  $E(H) \subseteq E(G)$ .

$H$  a  $G$  feszített részgráfja  $\iff V(H) \subseteq V(G)$  és  $E(H) = E(G) \cap E(H)$ .

**Megj:** A gráf definíciója megengedi, hogy a gráf egyik részéből egyáltalán ne vezessen el a gráf maradék részébe, azaz a gráf egyik csúcsából ne lehessen eleken keresztül eljutni a gráf egy másik csúcsába. Ez történik pl. az üresgráf (alias  $\overline{K_n}$ ) esetén.

## 1.6 Háromféle elérhetőség, összefüggőség

**Def:** Legyen  $G = (V, E)$  (irányított vagy irányítatlan) gráf.

**Élsorozat:**  $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$ , ahol  $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$ . (Tkp egyik csúcsból eljutunk egy másik csúcsba mindig élek mentén haladva.)

**Séta:** olyan élsorozat, amelyikben nincsen ismétlődő él.

**Út:** olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

**Terminológia:** Ha a kezdőpont  $u$ , a végpont  $v$ , akkor  **$uv$ -élsorozatról**,  **$uv$ -sétáról**, ill.  **$uv$ -útról** beszélünk. Ha hangsúlyozni szeretnénk, hogy  $u = v$ , de a kezdő (és vég)pontot nem akarjuk megnevezni, akkor **zárt élsorozatról**, **körsétáról** ill. **körrel** beszélünk.

**Megf:**  $G$ -ben  $\exists uv$ -út  $\Rightarrow G$ -ben  $\exists uv$ -séta  $\Rightarrow G$ -ben  $\exists uv$ -élsorozat  $\square$

**Állítás:**  $G$ -ben  $\exists uv$ -élsorozat  $\Rightarrow G$ -ben  $\exists uv$ -út  $\square$

**Def:**  $G$  ir.tatlan gráf  $u$ -ból  $v$  **elérhető** ( $u \sim v$ ), ha  $\exists uv$ -út  $G$ -ben.

**Def:** A  $G$  irányítatlan gráf **összefüggő**, ha  $u \sim v \forall u, v \in V(G)$ .

**Megj:** (1) Az összefüggőség szokásos definíciója nem a  $\sim$  reláció segítségével történik, hanem valahogy így: a  $G$  irányítatlan gráfot akkor mondjuk összefüggőnek, ha  $G$  bármely két csúcsa között vezet út  $G$ -ben.

**Megj:** (2) Az előző definíciót irányított fráfokra is kiterjeszthető: a  $G$  irányított gráfot akkor mondjuk **erősen összefüggőnek**, ha  $G$  bármely  $u, v \in V(G)$  esetén van **irányított**  $uv$ -út  $G$ -ben.

**Megj:** (3) Irányított gráf másfajta összefüggősége is értelmezhető: a  $G$  irányított gráfot akkor mondjuk **gyengén összefüggőnek**, ha a  $G$ -nek megfelelő irányítatlan gráf összefüggő.

**Köv:** Ha  $G$  irányítatlan gráf, akkor  $\sim$  ekvivalenciareláció:

(1)  $\forall u \in V(G) : u \sim u$ , (2)  $\forall u, v \in V(G) : u \sim v \Rightarrow v \sim u$ , és (3)  $\forall u, v, w \in V(G) : u \sim v \sim w \Rightarrow u \sim w$ .  $\square$

**Def:** A  $G$  gráf **(összefüggő) komponense** a  $\sim$  ekvivalenciaosztálya. Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

## 1.7 Gráfok összefüggősége a gyakorlatban

**Lemma:** (1)  $K \subseteq V(G)$  pontosan akkor komponense  $G$ -nek, ha  $K$ -ból nem lép ki éle  $G$ -nek, de  $\forall v, v' \in$  esetén  $v \sim v'$ .

(2) Minden  $G$  irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel  $G$  komponenseinek diszjunkt uniójára.  $\square$

**Megj:** A  $G$  komponense alatt sokszor nem csupán a  $G$  csúcsainak egy  $K$  részhalmazát, hanem a  $K$  által feszített részgráfot értjük.

**Megf:**  $G$  pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van.  $\square$

**Élhozzáadási lemma (ÉHL):** Legyen  $G$  irányítatlan gráf és  $G' = G + e$ . Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.

(1)  $G$  és  $G'$  komponensei megegyeznek, de  $G'$ -nek több köre van, mint  $G$ -nek.

(2)  $G$  és  $G'$  körei megegyeznek, de  $G'$ -nek egyel kevesebb komponense van, mint  $G$ -nek.

## 1.8 Fák és erdők

**Def:** A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük. Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

**Megf:**  $G$  erdő  $\iff G$  minden komponense fa.

**Példa:**

**Megf:** (1)  $P_n$  fa minden  $n \geq 1$  egész esetén. (2) Fához egy új csúcsot egy éllel bekötve fát kapunk:

**Lemma:**  $G$   $n$ -csúcsú,  $k$ -komponensű erdő  $\Rightarrow |E(G)| = n - k$ .

**Biz:** Építsük fel  $G$ -t a  $\overline{K_n}$  üresgráfból az élek egyenkénti behúzásával.  $G$  körmentes, ezért az ÉHL miatt minden él zöld: behúzásakor 1-gyel csökken a komponensek száma. A  $\overline{K_n}$  üresgráfnak  $n$  komponense van,  $G$ -nek pedig  $k$ . Ezért pontosan  $n - k$  zöld élt kellett behúzni  $G$  felépítéséhez.  $\square$

**Köv:** Ha  $F$  egy  $n$ -csúcsú fa, akkor élszáma  $|E(F)| = n - 1$ .

**Biz:**  $F$  egy 1-komponensű erdő, így az előző Lemma alkalmazható  $k = 1$  helyettesítéssel.

**Állítás:** Tetsz.  $n$ -csúcsú  $G$  gráf esetén az alábbi három tulajdonság közül bármely kettőből következik a harmadik. (a)  $G$  körmentes. (b)  $G$  összefüggő. (c)  $|E(G)| = n - 1$ .

**Biz:** (a) + (b)  $\Rightarrow$  (c) :  $\checkmark$

(a) + (c)  $\Rightarrow$  (b): Építsük fel  $G$ -t élek egyenkénti behúzásával.  $n - 1$  él egyikének behúzása se hoz létre kört, ezért az ÉHL miatt minden él zöld, és 1-gyel csökkenti a komponensszámot. Végül  $n - (n - 1) = 1$  komponens marad, tehát  $G$  összefüggő.

(b) + (c)  $\Rightarrow$  (a): Építsük fel  $G$ -t élek egyenkénti behúzásával. Mivel a komponensek száma végül 1 lesz, ezért  $n - 1$  zöld élt kellett behúzni. (c) miatt  $G$  összes éle zöld, piros éle nincs. Az ÉHL miatt  $G$  körmentes.  $\square$

## 1.9 Fák további tulajdonságai

**Állítás:** Legyen  $F$  egy tetszőleges fa  $n$  csúcson. Ekkor

(1)  $(F - e)$ -nek pontosan két komponense van  $\forall e \in E(F)$ -re.

(2)  $F$ -nek pontosan egy  $uv$ -útja van  $\forall u, v \in V(F)$ -re.

(3)  $(F + e)$ -nek pontosan egy köre van  $\forall e \notin E(F)$ -re.

(4) Ha  $n \geq 2$ , akkor  $F$ -nek legalább két levele van.

**Def:** A  $G$  irányítatlan gráf  $v$  csúcsa **levél**, ha  $d(v) = 1$ .

**Biz:** (1):  $F - e$  erdő, hisz körmentes.  $F = (F - e) + e$ , és mivel  $F$  is körmentes,  $e$  zöld az ÉHL miatt. Ezért  $F$ -nek 1-gyel kevesebb komponense van, mint  $(F - e)$ -nek. Mivel  $F$ -nek 1 komponense van,  $(F - e)$ -nek 2.  $\square$

**Biz:** (2):  $F$  összefüggő, ezért van (legalább egy)  $uv$ -útja, mondjuk  $P$ . Ezen  $P$  út bármely  $e$  élét elhagyva, a kapott  $F - e$  grágnak (1) miatt két komponense van, melyek közül az egyik  $u$ -t, a másik  $v$ -t tartalmazza. Ezért  $(F - e)$ -ben nincs  $uv$ -út. Azt kaptuk, hogy  $P$  minden éle benne van  $F$  minden  $uv$ -útjában, ezért  $F$ -ben  $P$ -n kívül nincs más  $uv$ -út.  $\square$

**Biz:** (3): Tfh  $e = uv$ . Minden  $F$  körmentes, ezért  $F + e$  minden köre  $e$ -ből és  $F$  egy  $uv$ -útjából tevődik össze. Ezért  $F + e$  köreinek száma megegyezik az  $F$  fa  $uv$ -útjainak számával, ami (2) miatt pontosan 1.  $\square$

**Biz:** (4): (Algebrai út) A KFL miatt  $\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 2n = 2(n - 1) - 2n = -2$ .  $F$  minden  $v$  csúcsára  $d(v) \geq 1$  teljesül, ezért  $d(v) - 2 \geq -1$ . A fenti összeg csak úgy lehet  $-2$ , ha  $F$ -nek legalább 2 levele van.  $\square$

**Biz:** (4): (Kombinatorikus út) Induljunk el  $F$  egy tetszőleges  $v$  csúcsából egy sétán, és haladjunk, amíg tununk. Ha sosem akadunk el, akkor előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, és kört találunk. Ezért elakadunk, és az csakis egy  $v$ -től különböző  $u$  levélben történhet. Ha  $d(v) = 1$ , akkor  $v$  egy  $u$ -tól különböző levél. Ha  $d(v) \geq 2$ , akkor sétát indulhatjuk  $v$ -ből egy másik él mentén. Ekkor egy  $u$ -tól különböző levélben akadunk el.  $\square$

## 1.10 Feszítőfák

Építsük fel a  $G$  gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével! Legyen  $G'$  a  $G$  gráf piros élei törlésével keletkező feszítő részgráf!  $G'$  biztosan körmentes lesz, hiszen a zöld élek sosem alkottak kört a korábbi élekkel.  $G'$  minden  $K'$  komponense részhalmaza  $G$  egy  $K$  komponensének. Ha  $K' \neq K$ , akkor  $G$ -nek van olyan éle, ami kilép  $K'$ -ből. Ezen élek mind pirosak  $K'$  definíciója miatt. Legyen  $e$  ezek közül az elsőnek kiszínezett. Az  $e$  él nem tudott kört alkotni a korábban kiszínezettekkel, így nem lehet piros: ellentmondás. Ezek szerint  $G$  egy  $G'$  komponensei megegyeznek.

**Köv:** A  $G$  gráf zöld élei olyan  $G'$  feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek  $G$  komponenseivel.  $\square$

**Def:**  $F$  a  $G$  gráf **feszítőfája** (**ffája**), ha  $F$  egy  $G$ -ből éltörlésekkel kapható fa.

**Állítás:**  $(G\text{-nek van feszítőfája}) \iff (G \text{ összefüggő})$

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Legyen  $F$  a  $G$  feszítőfája.  $F$  összefüggő, és  $V(F) = V(G)$ , tehát  $G$  bármely két csúcsa között vezet  $F$ -beli út.

$\Leftarrow$ : Építsük fel  $G$ -t az élek egyenkénti behúzásával és kiszínezésével. Láttuk, hogy a zöld élek egy  $F$  erdőt alkotnak, aminek egyetlen komponense van, hiszen  $G$  is egykomponensű. Ezek szerint  $F$  olyan fa, ami  $G$ -ből éltörlésekkel kapható.  $\square$

**Megj:** Ha egy nem feltétlenül összefüggő  $G$  gráf éleit a fenti módon kiszínezzük, akkor a zöld élek  $G$  minden komponensének egy  $F$  feszítőfáját alkotják. Nem összefüggő  $G$  esetén a zöld élek alkotta feszítő részgráf neve a  $G$  **feszítő erdeje**.

## 2 Minimális költségű feszítőfák

### 2.1 Alapkörendszer, alap vágás rendszer

Adott egy  $G$  gráf és  $G$ -nek egy  $F$  rögzített feszítőfája. Ekkor  $G$  minden éléhez  $F$  meghatározza  $G$  éleinek egy fontos részhalmazát. Attól függően, hogy az adott él  $F$ -hez tartozik-e vagy sem, különböző fajta részhalmazról van szó.

**Def:** A  $G$  gráf  $F$  feszítőfájának  $f$  éléhez tartozó **alap vágást**  $G$  azon élei alkotják, amik az  $F - f$  két komponense között futnak. Az  $e \in E(G) \setminus E(F)$  éléhez tartozó **alapkör** pedig az  $F + e$  köre.

**Megf:** Tfh  $f \in F$  és  $e \in E(G) \setminus E(F)$ . Ekkor  $(F - f + e \text{ ffa}) \iff (f \text{ benne van } e \text{ alapkörében}) \iff (e \text{ benne van } f \text{ alap vágásában}).$

**Köv:** Az  $e \in E(G) \setminus E(F)$  alapkörét  $e$  mellett azon  $F$ -beli élek alkotják, amelyek alapvágása  $e$ -t tartalmazza. Az  $f \in F$  alapvágást  $f$  mellett a  $G$  azon élei alkotják, amelyek alapköre  $f$ -t tartalmazza.

### 2.2 Minimális költségű feszítőfa

**Def:** Adott a  $G = (V, E)$  irányítatlan gráf élein a  $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  költségfüggvény. Az  $F \subseteq E$  élhalmaz **költsége** az  $F$ -beli élek összköltsége:  $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$ .

Az  $F \subseteq E$  élhalmaz  $G$ -ben **minimális költségű feszítőfa (mkffa)**, ha

- (1)  $(V, F)$  a  $G$  feszítőfája, és
- (2)  $k(F) \leq k(F')$  teljesül a  $G$  bármely  $(V, F')$  feszítőfájára.

Az  $F \subseteq E$  élhalmaz  $G$ -ben **minimális költségű feszítő erdeje**, ha

- (1)  $(V, F)$  a  $G$  feszítő erdeje, és
- (2)  $k(F) \leq k(F')$  teljesül a  $G$  bármely  $(V, F')$  feszítő erdejére.

**Cél:** Hatékony eljárás mkffa keresésére.

**Ötlet:** Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élek egyenkénti behúzásával, az ÉHL szerint zöldre színezett élek halmazaként.

Zöld él: olyan él, ami nem alkot kört a korábban felépített élekkel.

**Mohó stratégia:** A feszítőfa építéskor költség szerint növekvő sorrendben döntünk az élekről, hátha mkffát kapunk a végén.

**Kruskal-algoritmus:** Input:  $G = (V, E)$  és  $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  költségfüggvény. Output:  $F \subseteq E$   
Működés: Tfh  $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \dots \leq k(e_m)$ , ahol  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Legyen  $F_0 = \emptyset$ , és  $i = 1, 2, \dots, m$ -re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes.} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

### 2.3 Minimális költségű feszítőfák struktúrája

$G = (V, E)$  gráf és  $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  költségfüggvény esetén legyen  $G_c$  a legfeljebb  $c$  költségű élek alkotta feszítő részgráfja  $G$ -nak:  $G_c = (V, E_c)$ , ahol  $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$ .

**Megf:** A  $G$  gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza  $G_c$  egy feszítő erdejét minden  $c \geq 0$  esetén.

**Biz:** A Kruskal-algoritmus a legfeljebb  $c$  költségű ( $E_c$ -beli) éleket hamarabb dolgozza fel, mint a  $c$ -nél drágábbakat. Ezért  $E_c$  összes élének feldolgozása után pontosan azt az állapotot érjük el, mintha a Kruskal-algoritmust a  $G_c$  frágon futtattunk volna. Korábban (az ÉHL előtt) láttuk, hogy az utóbbi algoritmus outputja  $G_c$  egye feszítő erdeje.  $\square$



**Lemma:** Tfh  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_l\}, k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_l)$  és  $F \cap E_c$  a  $G_c$  egy feszítő erdeje  $\forall c \geq 0$ -ra. Tfh  $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_l\}$  a  $G$  egy feszítő erdejének élei, és  $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_l)$ . Ekkor  $k(f_i) \leq k(f'_i)$  teljesül  $\forall 1 \leq i \leq l$  esetén, így  $k(F) \leq k(F')$ .

**Biz:** Indirekt: tfh  $k(f_i) > k(f'_i) = c$ . Ekkor  $|E_c \cap F| < i$ , így a feltevés miatt  $E_c \cap F$  a  $G_c$  egy  $i$ -nél kevesebb élű feszítő erdeje. Az  $f'_1, f'_2, \dots, f'_i$  élek is mind  $E_c$ -beliek, és többen vannak az  $E_c \cap F$  feszítő erdő élszámánál. Tehát  $f'_1, f'_2, \dots, f'_i$  nem lehet körmentes, így  $f'_1, f'_2, \dots, f'_l$  sem. Ez ellentmondás. Tehát  $k(f_i) \leq k(f'_i) \forall i$ . Ezért  $k(F) = \sum_{i=1}^l k(f_i) \leq \sum_{i=1}^l k(f'_i) = k(F')$ .  $\square$

**Köv:** (1) A Kruskal-algoritmus outputja a  $G$  gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

**Biz:** Legyen  $F$  a Kruskal-algoritmus outputja. A megfigyelés miatt  $F \cap E_c$  a  $G_c$  feszítő erdeje  $\forall c \geq 0$ -ra, ezért a Lemma szerint  $k(F) \leq k(F')$  teljesül  $G$  tetszőleges  $F'$  feszítő erdejére.  $\square$

**Köv:** (2) Az  $F'$  élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje  $G$ -nek, ha  $F' \cap E_c$  a  $G_c$  egy feszítő erdeje minden  $c \leq 0$ -ra.

**Biz:** A Lemma bizonyítja az elégfégességet.

**Biz:** A szükségességhez tfh  $F' \cap E_c$  nem feszítő erdeje  $G_c$ -nek, és legyen  $F$  a Kruskal-algoritmus outputja. Mivel  $F \cap E_c$  a  $G_c$  feszítő erdeje, ezért  $|F \cap E_c| > |F' \cap E_c|$ , így  $k(f_i) < k(f'_i)$  teljesül legalább egy  $i$ -re, és minden  $j$ -re  $k(f_j) \leq k(f'_j)$ . Innen  $k(F) < k(F')$ .  $\square$

**Köv:** (3) Ha a  $G$  gráf összefüggő, akkor  $G$  feszítő erdeje a  $G$  feszítő fája, így a Kruskal-algoritmus mkffát talál. A (2) következmény pedig  $G$  mkffáit karakterizálja.

## 2.4 Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:

Input  $\checkmark$ , Output  $\checkmark$ , Működés  $\checkmark$ , Helyesség  $\checkmark$ , Lépésszám.

Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.

Tfh  $n$  ill.  $m$  a  $G$  csúcsai ill. élei száma.

A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Élek költség szerinti sorbarendeze
2. Döntés az egyes élekről a fenti sorrendben.

1.  $m$  szám sorbarendezéséhez a buborékrendezés legfeljebb  $\binom{m}{2}$  összehasonlítást használ.

1.  $n$  csúcsú  $G$  gráf esetén egy élről döntés megoldható  $\text{konst} \cdot \log_2 n$  lépésben az adatstruktúra karbantartásával együtt is. Az összes döntéshez tehát elegendő  $\text{konst} \cdot n \cdot \log_2 n$  lépés. A Kruskal-algoritmus lépésszáma ezért felülről becsülhető  $\text{konst} \cdot (n + m) \cdot \log_2(n + m)$ -mel.



## 3 Gráfbejárások és legrövidebb utak

### 3.1 Általános gráfbejárás & BFS

A gráfbejárási algoritmus az inputgráf csúcsait és éleit fedezi fel. Minden csúcs az eléretlen  $\rightarrow$  elért  $\rightarrow$  befejezett állapotokat veszi fel. A bejárás akkor ér véget, amint minden csúcs befejezetté vált.

1. Van elért csúcs. Választunk egyet, mondjuk  $u$ -t.
  - (1a) Ha van olyan  $uv$  él, amire  $v$  eléretlen, akkor  $v$  elértté válik.
  - (1b) Ha nincs ilyen  $uv$  él, akkor  $u$  befejezetté válik.
2. Nincs elért csúcs.
  - (2a) Ha van eléretlen  $u$  csúcs, akkor  $u$ -t elértté tesszük.
  - (2b) Ha nincs eléretlen csúcs (azaz  $\forall$  csúcs fejezett), akkor END.

#### Szélességi bejárás (BFS) szabálya:

Az 1. esetben mindegy a legkorábban elért  $u$ -t választjuk.

**Input:**  $G = (V, E)$  (ir/ir.tatlan) gráf, ( $v \in V$  gyökérpont<sup>1</sup>).

**Output:** (1) A csúcsok elérési és befejezési sorrendje. (2) Az élek osztályozása:

**faél:** Olyan él, ami mentén egy csúcs elértté vált.

$uv$  **előreél:** nem faél, de  $u$ -ból  $v$ -be faélekből irányított út vezet.

$uv$  **visszaél:**  $v$ -ből  $u$ -ba faélekből irányított út vezet.

**keresztél:** minden más él ( $u$  és  $v$  közt nincs leszármazott viszony).

(3) A **bejárás fája:** a faélek alkotta részgráf. (A bejárás fája valójában egy gyökereiből kifelé irányított erdő.)

**Megf:** Irányítatlan esetben az előreél és a visszaél ugyanazt jelenti.

**Terminológia:** Ha a bejárás fájában  $u$ -ból  $v$ -be irányított út vezet, akkor  $u$  a  $v$  őse és  $v$  az  $u$  leszármazottja. A faél és az előreél tehát őszből leszármazottba, a visszaél leszármazottból őszbe vezet.

### 3.2 A BFS tulajdonságai

Nézzük meg egy **irányított** gráf BFS bejárását is.

**Állítás:** Tfh  $G = (V, E)$  BFS bejárása után a csúcsok elérési sorrendje  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Ekkor az alábbiak teljesülnek.

(1) Ha  $i < j$ , akkor  $v_i$ -t hamarabb fejezzük be, mint  $v_j$ -t, továbbá  $v_i$  gyerekei megelőzik  $v_j$  gyerekeit az elérési sorrendben.

**Biz:** A  $v_i$ -t befejezésének pillanatában  $v_i$  minden gyereke elért, de  $v_j$ -nek még egy gyereke sem az. Ezért  $v_j$  gyerekeit a  $v_i$  csúcs befejezése után érjük el, majd ezt követően fejezzük be  $v_j$ -t.  $\square$

(2) **Az elérési és befejezési sorrend (BFS esetén) megegyezik.**

**Biz:** Ha  $v_i$ -t korábban érjük el, mint  $v_j$ -t, akkor (1) miatt  $v_i$ -t korábban is fejezzük be  $v_j$ -nél. Ezért bármely két csúcs sorrendje ugyanaz az elérési sorrendben mint befejezési sorrendben. Tehát az elérési sorrendnek meg kell egyeznie a befejezési sorrenddel.  $\square$

(3) **Gréfél nem ugorhat át falét:** ha  $k < i < j \leq l$  és  $v_i v_j$  faél, akkor  $v_k v_l$  nem lehet gráfél.

**Biz:** Ha  $v_k v_l \in E(G)$ , akkor  $v_l$  szülője  $v_k$  vagy egy  $v_k$ -t megelőző csúcs. (1) miatt  $v_j$  szülője sem következhet  $v_k$  után, vagyis  $v_i$  nem lehet  $v_j$  szülője.

(4) **Nincs előreél.** (Irányítatlan eset: csak faél és keresztél van.)

**Biz:** Indirekt: ha  $v_i v_j$  előreél lenne, akkor  $v_i$ -ből  $v_j$ -be irányított út vezetne a BFS-fában, és  $v_i v_j$  ennek a faélekből álló útnak az utolsó élét átugraná.  $\square$

<sup>1</sup>A gyökérben kezdetben elért állapotú, ezért kivétel az általános szabály alól.

(5) Ha a BFS-fában  $k$ -élű irányított út vezet  $u$ -ból  $v$ -be, akkor  $G$ -ben nincs  $k$ -nál kevesebb élű  $uv$ -út.

**Biz:** Ha lenne a BFS fa-beli útnál kevesebb élű út  $G$ -ben, akkor lenne olyan gráfél, ami faélt ugrik át.  $\square$

(6) **A BFS-fa egy legrövidebb utak fája:** a BFS-fa  $v_1$  gyökeréből bármely  $v_i$  csúcsba vezető faút a  $G$  egy legkevesebb élű  $v_1 v_i$ -útja.

### 3.3 Legrövidebb utak

**Def:** Adott  $G$  (ir) gráf és  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény esetén egy  **$P$  út hossza** a  $P$  éleinek összhossza:  $l(P) = \sum_{e \in E(P)} l(e)$ .

Az  $u$  és  $v$  csúcsok **távolsága** a legrövidebb  $uv$ -út hossza:  $dist_l(u, v) := \min\{l(P) : P \text{ } uv\text{-út}\}$  ( $\nexists uv\text{-út} \Rightarrow dist_l(u, v) = \infty$ .) Az  $l$  hosszfüggvénye **nemnegatív**, ha  $l(e) \geq 0$  teljesül minden  $e$  élre. Az  $l$  hosszfüggvény **konzervatív**, ha  $G$ -ben  $\nexists$  negatív összhosszú ir. kör.

**Cél:** Legrövidebb út keresése irányított/irányítatlan gráfban.

**Megf:** Ha  $l(e) = 1$  a  $G$  minden  $e$  élére, akkor  $l(P)$  a  $P$  élszáma. Ezért a BFS-fa minden gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből, azaz a szélességi bejárás tekinthető egy legrövidebb utat kereső algoritmusnak is.

**Def:** Adott  $G$  (ir) gráf,  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény és  $r \in V(G)$ .  **$(r, l)$ -felső becslés** olyan  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, ami felülről becsli minden csúcs  $r$ -től mért távolságát:  $dist_l(r, v) \geq f(v) \forall v \in V(G)$ .

**Triviális**  $(r, l)$ -felső becslés:  $f(v) = \begin{cases} 0 & v = r \\ \infty & v \neq r \end{cases}$

**Pontos**  $(r, l)$ -felső becslés:  $f(v) = dist_l(r, v) \forall v \in V(G)$ .

### 3.4 Az elméleti javítás

**Def:** Tfh  $f$  egy  $(r, l)$ -felső becslés és  $uv \in E(G)$ . Az  $f$   **$uv$ -elméleti javítása** az az  $f'$ , amire  $f'(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq v \\ \min\{f(v), f(u) + l(uv)\} & z = v \end{cases}$

**Megf:** Tfh az  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény konzervatív és  $f(r) = 0$ .

Ekkor (1) Az  $f(r, l)$ -felső becslés élmenti javítása mindig  $(r, l)$ -felső becslést ad.

**Biz:** Azt kell megmutatni, hogy van olyan  $rv$ -út, aminek a hossza legfeljebb  $f(u) + l(uv)$ . Ha egy legrövidebb  $ru$ -utat kiegészítünk az  $uv$  éllel, akkor olyan  $rv$ -élsorozatot kapunk, aminek az összhossza  $dist_l(r, u) + l(uv) \leq f(u) + l(uv)$ . „Könnyen” látható, hogy az élhosszfűggvény konzervativitása miatt ha van  $x$  összhosszúságú  $rv$ -élsorozat, akkor van legfeljebb  $x$  összhosszúságú  $rv$ -út is. Ezek szerint van legfeljebb  $f(u) + l(u, v)$  hosszúságú  $uv$ -út is, azaz az érdemi élmenti javítás után szintén  $(r, l)$ -felső becslést kapunk.  $\square$

(2)  $f(r, l)$ -felső becslés (pontosan)  $\iff$  ( $f$ -en  $\nexists$  érdemi élmenti javítás).

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Ha  $f$  pontos, akkor biztosan nincs rajta érdemi élmenti javítás: ha volna, akkor egy felső becslés a pontos érték alá csökkenne, így az élmenti javítás nem  $(r, l)$ -felső becslést eredményezne.  $\Leftarrow$ : Legyen  $v \in V(G)$  tetsz, és legyen  $P$  egy legrövidebb  $rv$ -út. A  $P$  egyik éle mentén sincs érdemi élmenti javítás, ezért  $P$  minden  $u$  csúcsára pontos a felső becslés:  $f(u) = dist_l(r, u)$ . Ez igaz az út utolsó csúcsára, a tetszőlegesen választott  $v$ -re is.  $\square$

**Köv:** Adott  $G$ , konzervatív  $l$  és  $r \in V(G)$  esetén ha kiindulunk a triviális  $(r, l)$ -felső becslésből, és addig végzünk émj-kat, amíg lehet, akkor a végén megkapjuk minden csúcs  $r$ -től való távolságát.

**Itt a jegyzet 17. oldaláról az utolsó kettő pont hiányzik, mivel nem tudom, hogy mennyire lényegesek.**

**Def:** Tfh  $f$  egy  $(r, l)$ -felső becslés és  $uv \in E(G)$ . Az  $f$   **$uv$ -élmenti javítása** az az  $f'$ , amire

$$f'(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq v \\ \min\{f(v), f(u) + l(uv)\} & z = v \end{cases}$$

**Megf:** Tfh az  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény konzervatív és  $f(r) = 0$ . Ekkor (1) Az  $f(f, l)$ -felső becslés élmenti javítása mindig  $(r, l)$ -felső becslést ad. (2)  $f(r, l)$ -felső becslés (pontosan)  $\Leftrightarrow (f\text{-en } \nexists \text{ érdemi élmenti javítás})$ .

**Dijkstra-algoritmus:** Input:  $G = (V, E), l : E \rightarrow \mathbb{R}_+, r \in V$ . Output:  $\text{dist}_l(r, v) \forall v \in V$   
Működés:  $U_0 := \emptyset, f_0$  a triviális.  $(r, l)$ -felső becslés.

Az  $i$ -dik fázis:

1. Legyen  $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$ , ahol  $u_i$  olyan csúcs a  $V \setminus U_{i-1}$  halmazból, amelyre  $f_{i-1}(v)$  minimális.
2.  $f_i : f_{i-1}$  élmenti javítása minden  $U_i$ -ből kivezető  $u_i x$  élen. Output:  $f_{|V|}$ . Megjelöljük a végső  $f_{|V|}(V)$  értékeket beállító éleket.

### 3.5 Dijkstra, egy példán

**Dijkstra-algoritmus:** Input:  $G = (V, E), l : E \rightarrow \mathbb{R}_+, r \in V$ . Output:  $\text{dist}_l(r, v) \forall v \in V$   
Működés:  $U_0 := \emptyset, f_0$  a triviális.  $(r, l)$ -felső becslés.

Az  $i$ -dik fázis:

1. Legyen  $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$ , ahol  $u_i$  olyan csúcs a  $V \setminus U_{i-1}$  halmazból, amelyre  $f_{i-1}(v)$  minimális.
2.  $f_i : f_{i-1}$  élmenti javítása minden  $U_i$ -ből kivezető  $u_i x$  élen. Output:  $f_{|V|}$ . Megjelöljük a végső  $f_{|V|}(V)$  értékeket beállító éleket.

**Megf:** Ha a  $v$ -be vezet megjelölt él, akkor vezet  $r$ -ből  $v$ -be megjelölt éleken út, és ennek hozzá megegyezik  $f_{|V|}(v)$ -vel.

**Biz:**  $f_{|V|}(r) = 0$ , és a megjelölt élek mentén haladva az  $f_{|V|}$  érték az élhosszal növekszik.  $\square$

**Köv:** Ha a Dijkstra-algoritmus helyes, akkor az algoritmus végén a megjelölt élek egy legrövidebb utak fáját alkotják  $r$  gyökérrel.

### 3.6 Dijkstra helyessége

**Megf:** Tfh  $u_1, u_2, \dots, u_n$  a  $G$  csúcsainak sorrendje a Dijkstra-algoritmus végrehajtása után.

(1) Ekkor  $f_{|V|}(u_i) \leq f_{|V|}(u_{i+1})$  teljesül  $\forall 1 \leq i \leq n$ .

**Biz:** Az  $i$ -dik fázisban  $f_i(u_i) \leq f_i(u_{i+1})$  teljesült az  $u_i$  választása miatt. Ezek után  $f_i(u_i)$  már nem változott:  $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i)$ . Ugyan  $f_i(u_{i+1})$  még csökkenhetett, de csak az  $u_i u_{i+1}$  él mentén történt javítás miatt, hiszen az  $(i+1)$ -dik fázisban  $u_{i+1}$  bekerült az  $U_i$  halmazba, és a hozzá tartozó  $(r, l)$ -fb már nem csökken tovább. Ekkor  $f_{i+1}(u_{i+1}) = \min\{f_i(u_{i+1}), f_i(u_i) + l(u_i u_{i+1})\} \geq f_i(u_i)$ , mivel  $l(u_i u_{i+1}) > 0$ . Ezért  $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i) \leq f_{i+1}(u_{i+1}) = f_{|V|}(u_{i+1})$   $\square$

(2)  $f_{|V|}(u_1) \leq f_{|V|}(u_2) \leq \dots \leq f_{|V|}(u_n)$

(3) A Dijkstra-algoritmus outputjaként kaptt  $f_{|V|}$ -n élmenti javítás nem tud változtatni.

**Biz:** Tegyük fel, hogy  $u_i u_j \in E(G)$  a  $G$  egy tetszőleges éle. Ha  $i > j$ , akkor (2) miatt  $f_{|V|}(u_i) \geq f_{|V|}(u_j)$ , ezért az  $u_i u_j$  mentén történő javítás nem tudja  $f_{|V|}(u_j)$ -t csökkenteni, hisz  $l(u_i u_j)$  pozitív. Ha pedig  $i < j$ , akkor az  $i$ -dik fázisban megrögzött az  $u_i u_j$  mentén történő javítás, és ezt követően  $f(u_i)$  nem változott, azaz  $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i)$ . A másik  $(r, l)$ -felső becslés pedig csak tovább csökkenhetett a későbbi émj-ok során  $f_{|V|}(u_j) \leq f_i(u_j)$ . Ezért az  $u_i u_j$  él mentén sem az  $i$ -dik fázisban, sem később nincs érdemi javítás.  $\square$

**Tétel:** A Dijkstra-algoritmus helyesen működik, azaz  $G$  minden csúcsára igaz, hogy  $\text{dist}(r, v) = f_{|V|}(v)$ .

**Biz:** A Dijkstra-algoritmus az  $f_0$  triviális  $(r, l)$ -felső becslésből indul ki, és élmenti javításokat alkalmaz. Így minden  $f_i$  (speciálisan  $f_{|V|}$  is)  $(r, l)$ -felső becslés lesz. A fenti (3)-as megfigyelés miatt  $f_{|V|}$ -n nem végezhető érdemi élmenti javítás. Ezért egy korábbi (2)-es megfigyelés miatt  $f_{|V|}$  pontos  $(r, l)$ -felső becslés, azaz  $f_{|V|}(v) = \text{dist}_l(r, v) \forall v \in V(G)$ .  $\square$

**„Lépésszámanalízis”:** Ha a  $G$  gráfnak  $n$  csúcsa és  $m$  éle van, akkor a Dijkstra-algoritmus  $n$ -szer keresi meg legfeljebb  $n$  szám minimumát, ami összességében legfeljebb  $\text{konst} \cdot n^2$  lépést igényel. Ezen kívül legfeljebb  $m$  élmenti javítást végez, ami  $\text{konst}' \cdot m$  lépés. Összességében tehát legfeljebb  $\text{konst}'' \cdot (n^2 + m)$  lépésre van szükség, az algoritmus hatékony.

## 4 Legrövidebb utak, DFS, PERT

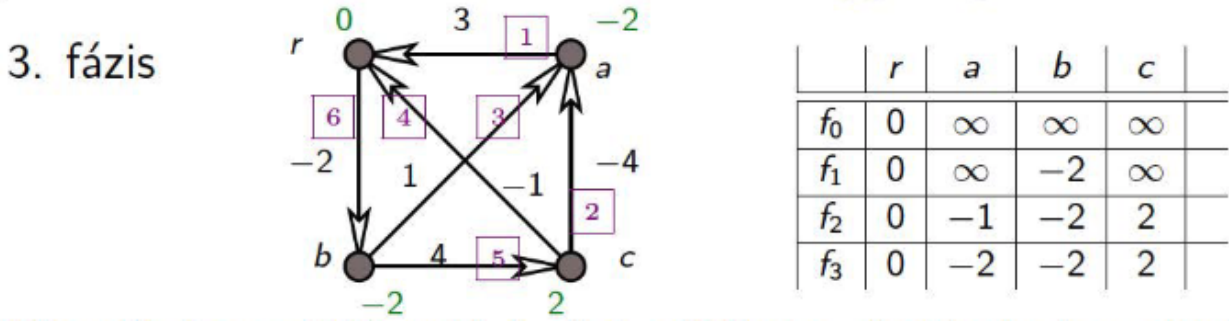
### 4.1 Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 1

Könnyű olyan példát találni, ahol a Dijkstra-algoritmus konzervatív hosszfüggvény esetén hibás eredményt ad. Azonban konzervatív hosszfüggvény esetén is igaz, hogy

- $(r, l)$ -fb élmenti javítása  $(r, l)$ -fb-t eredményez, ill.
- ha egy  $(r, l)$ -fb-ben nem végezhető érdemi élmenti javítás, akkor pontos.

konzervatív hosszfüggvény esetén is hasonló startégiát követünk: Élmenti javításokat végzünk a triviális  $(r, l)$ -fb-en, míg van érdemi javítás.

**Ford-algoritmus:** Input:  $G = (V, E), l : E \rightarrow \mathbb{R}, r \in V$ . Output:  $dist_l(r, l) \forall v \in V$  Működés:  $f_0$  a triviális  $(r, l)$ -fb,  $|V| = n, E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Az  $i$ -dik fázis  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ -re az alábbi.  $f_i$ -t  $f_{i-1}$ -ből kapjuk, az  $e_1, \dots, e_m$  élmenti javítások után. OUTPUT:  $dist_l(r, v) = f_{n-1}(v) \forall v \in V$ .



**Állítás:** Ha  $l$  konzervatív, akkor  $dist_l(v) \forall v \in V$ .

**Biz:**  $f_1(v) = dist_l(r, v)$  ha  $\exists \leq 1$ -élű legrövidebb  $rv$ -út.  $f_2(v) = dist_l(r, v)$  ha  $\exists \leq 2$ -élű legrövidebb  $rv$ -út. ...  $f_{n-1}(v) = dist_l(r, v)$  ha  $\exists \leq (n - 1)$ -élű legrövidebb  $rv$ -út. Tehát  $f_{n-1}(v) = dist_l(r, v) \forall v \in V$ .  $\square$

**Megf:** Ha  $f_i = f_{i-1}$ , akkor a Ford-algoritmust az  $i$ -dik fázis után be lehet fejezni, hisz nincs érdemi élmenti javítás, így  $f_{n-1} = f_i$ .

**Megj:** Az  $f_{n-1}(v)$ -t beállító élek legrövidebb utak fáját alkotják.

**Biz:** A Dijkstra esethez hasonló. Tetszőleges  $v$  csúsból visszafelé követve a végső értékeket beállító éleket  $f_{n-1}(v)$  hosszúságú  $rv$ -utat találunk.  $\square$

**"Lépésszámanalízis":** Ha a  $|V(G)| = n$  és  $|E(G)| = m$ , akkor minden fázisban  $\leq m$  élmenti javítás, ami  $konst \cdot m$  lépés. Ez összesen  $\leq konst \cdot (n - 1) \cdot m \leq konst \cdot n^3$  lépés, az algoritmus hatékony.

### 4.2 Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 2

Tegyük fel, hogy  $G = (V, E), l : E \rightarrow \mathbb{R}$  és  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Jelölje  $d^{(k)}(i, j)$  a legrövidebb olyan  $v_i v_j$ -út hosszát, aminek belső csúcsai csak  $v_1, v_2, \dots, v_k$  lehetnek.

**Megf:** (1)  $d^{(n)}(i, j) = dist_l(v_i, v_j), v_i v_j \in E \Rightarrow d^{(0)}(i, j) = l(v_i, v_j)$  (2)  $d^{(0)}(i, j) = 0$ , különben  $d^{(0)}(i, j) = \infty$ . (3) Ha  $l$  konzervatív, akkor tetszőleges  $i, j$  ill.  $k \leq n$  esetén  $d^{(k+1)}(i, j) = \min\{d^{(k)}(i, j), d^{(k)}(i, k + 1) + d^{(k)}(k + 1, j)\}$  teljesül.

**Biz:** Tekintsünk egy  $d^{(k+1)}(i, j)$ -t meghatározó  $P$  utat.

**I. eset:**  $v_{k+1} \notin P$ . Ekkor  $d^{(k+1)}(i, j) = d^{(k)}(i, j)$ , és  $d^{(k+1)}(i, j) \leq d^{(k)}(i, k + 1) + d^{(k)}(i, k + 1) + d^{(k)}(k + 1, j)$ .

**II. eset:**  $v_{k+1} \in P$ . Ekkor  $d^{(k+1)}(i, j) \leq d^{(k)}(i, j)$ , és  $d^{(k+1)}(i, j) = d^{(k)}(i, k + 1) + d^{(k)}(k + 1, j)$ . Mindkét esetben helyes a képlet.  $\square$

**Floyds-algoritmus:** Input:  $G = (V, E)$ , konzervatív  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Output:  $dist_l(u, v) \forall u, v \in V$   
Működés:  $d^{(0)}$  felírása (2) alapján. Az  $i$ -dik fázis:  $d^{(i-1)}$ -ből meghatározzuk  $d^{(i)}$ -t (3) alapján.  
OUTPUT:  $d^{(n)}(u, v) = dist_l(u, v) \forall u, v \in V$ .

**”Lépésszámanalízis”:** A  $d^{(0)}$  felírása  $konst \cdot n^2$  lépés. Minden fázis  $konst' \cdot n^2$ . Mivel összesen  $n$  fázis van, a lépésszám legfeljebb  $konst'' \cdot n^3$  lépés, az algoritmus hatékony.

**Ford vs Floyd:** Konzervatív hosszfüggvényre működnek helyesen. Mindkét algoritmus talál bizonyítékot, ha  $l$  nem konzervatív. (!!)

A Ford csak egy gyökérből, a Floyd bármely két csúcs között talál legrövidebb utat. (!!)

A Ford ritka gráfokra jelentősen olcsóbb, sok él esetén a Floyd nem sokkal drágább.

### 4.3 Depth First Search (DFS)

**”Mélységi bejárás (DFS):** A bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az [1.] esetben.

**Mélységi és befejezési számozás:** DFS után  $m(v)$  ill.  $b(v)$  a  $v$  csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

**Megj:** A BFS konkrét megvalósításában szükség van arra, hogy az **elért** csúcsokat úgy tároljuk, hogy könnyű legyen kiválasztani az **elért** csúcsok közül a legkorábban elértet. Erre egy célszerű adatstruktúra a *sor* (avagy *FIFO lista*). Ha a BFS megvalósításában ezt az adatstruktúrát *veremre* (más néven *FIFO listára*) cseréljük, akkor a DFS egy megvalósítása adódik.

**Megf:** Tegyük fel, hogy a  $G$  gráf éleit DFS után osztályoztuk.

(1) Ha  $uv$  **faél**, akkor  $m(u) < m(v)$  és  $b(u) > b(v)$ .

**Biz:**  $v$ -t  $u$ -ból értük el, ezért  $m(u) < m(v)$ . A  $v$  elérésekor  $u$  és  $v$  elért állapotúak. A DFS szerint  $v$ -t  $u$  elptt fejezzük be.  $\square$

(2) Ha  $uv$  **előreél**, akkor  $m(u) < m(v)$  és  $b(u) > b(v)$ .

**Biz:**  $u$ -ból  $v$ -be faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, befejezési csökken.  $\square$

(3) Ha  $uv$  **visszaél**, akkor  $m(u) > m(v)$  és  $b(u) < b(v)$ .

**Biz:**  $v$ -ből  $u$ -ba faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, a befejezési csökken.  $\square$

**Biz:**  $m(u) < m(v)$  esetén a DFS miatt  $v$  az  $u$  leszármazottja lenne. Ezért  $m(u) > m(v)$ . Ha  $u$ -t a  $v$  befejezése előtt értenék el, akkor  $u$  a  $v$  leszármazottja lenne. Ezért az alábbi sorrendben történik  $u$  és  $v$  evolúciója: **v** **elérése**, **v** **befejezése**, **u** **elérése**, **u** **befejezése**.  $\square$

(4) Ha  $uv$  **keresztél**, akkor  $m(u) > m(v)$  és  $b(u) > b(v)$ .

(5) Irányítatlan gráf DFS bejárása után nincs keresztél.

**Biz:** Indirekt. Ha  $uv$  keresztél, akkor (4) miatt  $m(u) > m(v)$ , továbbá  $vu$  is keresztél, ezért  $m(v) > m(u)$ . Ellentmondás.  $\square$

(6) Ha DFS után van visszaél, akkor  $G$  tartalmaz irányított kört.

**Biz:** A DFS fa visszaélhez tartozó alapköre a  $G$  egy irányított köre.  $\square$

(7) Ha DFS után nincs visszaél, akkor  $G$ -ben nincs irányított kör.

**Biz:** Bmely irányított körnek van olyan  $uv$  éle, amire  $b(u) < b(v)$ . Ez az él csak visszaél lehet.  $\square$

### 4.4 Direct Acyclic Graphs

**Def:** A  $G = (V, E)$  irányított gráf **aciklikus** (más néven **DAG**), ha  $G$  nem tartalmaz irányított kört.

**Példa:** DAG-ot úgy kaphatunk, hogy egy  $G$  irányítatlan gráf csúcsait csupa különbözőszámmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobbba irányítunk.



Ha ugyanis lenne az így megírányított gráfban írányított kör, akkor az élei mentén a számok végig növekednének, ami lehetetlen. Azt fogjuk ihazolni, hogy a fenti példa minden DAG-ot leír.

**Def:** A  $G = (V, E)$  írányított gráf csúcsainak **topologikus sorrendje** alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden írányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba. ( $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, v_i v_j \in E \Rightarrow i < j$ )

**Tétel:** ( $G$  írányított gráf DAG)  $\Leftrightarrow (V(G)$ -nek  $\exists$  topologikus sorrendje).

**Biz:** Tegyük fel, hogy  $\exists$  topologikus sorrend. Láttuk, hogy  $G$  ekkor DAG.  $\checkmark$

**Biz:** Most tegyük fel, hogy  $G$  DAG, és futtassunk rajra egy DFS-t. Láttuk, hogy a DFS után nem lesz visszaél, ezért minden  $uv$  írányított élre  $b(u) > b(v)$  teljesül. Ezért a csúcsok befejezési sorrendjének megfordítása a  $G$  csúcsainak egy topologikus sorrendje.  $\square$

**Köv:** Írányított gráf aciklikussága DFS-sel gyorsan eldönthető: ha van visszaél, akkor a visszaél DFS-fabeli alapköre  $G$  egy írányított köre, így  $G$  nem DAG. Ha pedig nincs visszaél, akkor a fordított befejezési sorrend a  $G$  egy topologikus sorrendje,  $G$  tehát DAG.

**Megj:** DAG-ban topologikus sorrendet forráskeresések és forrástörlések alkalmazásával is találhatunk.

## 4.5 Leghosszabb út keresése

**Ötlet:** Az  $l'(uv) = -l(uv)$  élhosszokkal a leghosszabb utak legrövidebbekké válnak. Olyanokat pedig tudunk keresni.

**Gond:** A módszerünk csak konzervatív élhosszokra működik. Írányítatlan gráfon ez nemnegatív élhosszokat jelent, ezért ez az ötlet itt nem segít. Írányított esetben nem baj a negatív élhossz, feltéve, hogy  $G$  DAG. Ekkor Ford, Floyd bármelyike használható.

**Jó hír:** Van egy még gyorsabb módszer: a dinamikus programozás. Ennek segítségével tetszőleges  $G$  DAG minden  $v$  csúcsához ki tudjuk számítani a  $v$ -be vezető leghosszabb utat. (Sőt! ...)

**Leghosszabb út DAG-ban:** Input:  $G = (V, E)$  DAG,  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Output:  $\max\{l(P) : P \text{ } v \text{-be vezető út}\}$  minden  $v \in V$  csúcsra. Működés:  $[1] V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  topologikus sorrend meghatározása.  $[2] i = 1, 2, \dots, n : f(v_i) = \max\{\max\{f(v_j) + l(v_j v_i) : v_j v_i \in E\}, 0\}$  Output:  $f(v) \forall v \in V$

**Helyesség:** Ha a  $v_i$ -be vezető leghosszabb út utolsó előtti csúcsa  $v_j$ , akkor  $f(v_i) = f(v_j) + l(v_j v_i)$ .

**Megj:** Ha a fenti algoritmusban minden csúcsra megjelöljük az  $f(v)$  értéket beállító élt (éleket), akkor a megjelölt élek minden  $v$  csúcsba megadnak egy leghosszabb utat. Sőt: minden  $v$ -be vezető leghosszabb megkapható így.

## 4.6 A PERT probléma

Egy  $a, b, \dots$  tevékenységekből álló projektet kell végrehajtunk.

**Precedenciafeltételek:** bizonyos  $(u, v)$  párok esetén előírás, hogy az  $u$  tevékenységet a  $v$  előtt kell elvégezni, ezért  $v$  az  $u$  kezdetét követően  $c(uv)$  időkorlát elteltével kezdhető.

**Cél:** minden  $v$  tevékenységhez olyan  $k(v) \geq 0$  kezdési időpont meghatározása, ami nem sérti a preferenciafeltételeket, és a projekt végrehajtási ideje (a legnagyobb  $k(v)$  érték) minimális.

$G$  **írányított gráf** csúcsai a tevékenységek, élei pedig a precedenciafeltételek, az  $uv$  él hossza  $c(uv)$ .

**Megf:** (1) Ha  $G$  nem DAG, akkor a projekt nem hajtható végre. (2) Ha  $G$  DAG, akkor minden  $v$  tevékenység legkorábbi kezdési időpontja a  $v$ -be vezető leghosszabb út hossza.

**Köv:** A PERT probléma megoldása nem más, mint a  $G$  DAG minden csúcsára az oda vezető leghosszabb út meghatározása.



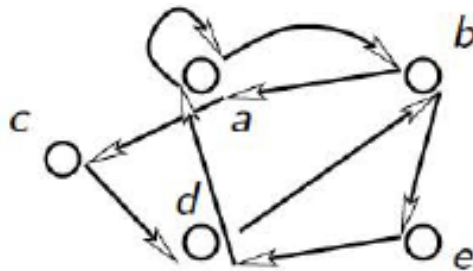
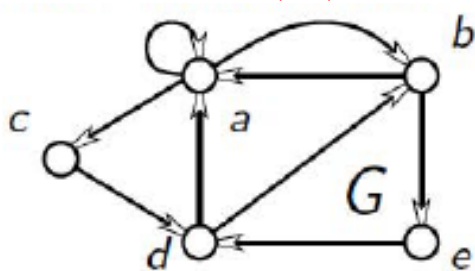
**Terminológia:**  $G$  leghosszabb útja **kritikus út**, amivől több is lehet. Kritikus út csúcsai a **kritikus tevékenységek**.

**Megf:** Ha egy kritikus tevékenység nem kezdődik el a lehető legkorábbi időpontban, akkor az egész projekt végrehajtása csúszik.

## 5 Euler-séták és Hamilton-körök

### 5.1 Euler-séták

**Def:** A  $G$  gráf **Euler-(kör)sétája** a  $G$  egy olyan (kör)sétája, ami  $G$  minden élét tartalmazza.



**Megj:** (1) A fenti definíció  $2 \times 2$  fogalmat definiál: az Euler-sétát és az Euler-körsétát irányítatlan és irányított gráfra is. (2) Szokás a definíciót abban a formában kimondani, hogy az Euler-(kör)séta  $G$  minden élét **pontosan** egyszer tartalmazza. Tekintettel arra, hogy egy séta nem mehet át kétszer ugyanazon az élen, ez redundáns kiváncs, hiszen következménye az általunk használt definíciónak. Használatos ezen kívül az Euler-kör ill. Euler-út megnevezés is a fenti fogalmakra. (3) Irányítatlan Euler-séta: " $G$  egy vonallal lerajzolható".

**Cél:** Gyors módszer az Euler-(kör)séta megtalálására, létezésének ellenőrzésére.

**Megf:** (1) Ha a  $G$  irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

- (a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
- (b) minden  $v$  csúcsára  $\rho(v) = \delta(v)$  teljesül.

**Biz:** (a) Ha  $G$  két különböző gyenge komponense is tartalmaz élt, akkor  $G$ -nek nem lehet Euler-körsétája, hisz egyetlen séta sem tartalmazhat élt két különböző gyenge komponensből. ✓

(b) Ha végighaladunk az Euler-körsétán, akkor a  $v$  csúcsba pontosan annyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk onnan. A körséta  $G$  minden élét pontosan egyszer érinti:  $\rho(v) = \delta(v)$

□

**Megf:** (2) Ha a  $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor

- (a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
- (b)  $G$ -ben minden fokszám páros.

**Biz:** Az irányított esethez hasonló. (a) Egy (kör)séta nem tartalmazhatja két különböző komponensnek is  $1-1$  élét, és (b) az Euler-körsétát követve tetszőleges  $v$  csúcsba ugyanannyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk belőle. Ezért  $d(v)$  páros. □

**Megf:** (3) Ha a  $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor

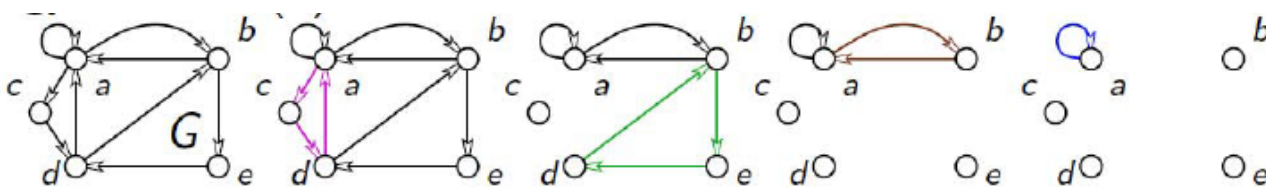
- (a)  $G$  izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
- (b)  $G$ -nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

**Biz:** (a) ✓. (b): Tegyük fel, hogy  $G$  Euler-sétája egy  $uv$ -séta. Ekkor minden  $w \neq u, v$  csúcsra  $d(w)$  kétszer annyi, mint ahányszor az Euler-séta  $w$ -n áthalad, vagyis  $d(w)$  páros. Ha  $u = v$ , akkor az Euler-séta körséta, így  $d(u)$  is páros (2b) miatt. Ha pedig  $u \neq v$ , akkor  $u$ -ból 1-gyel többször lépünk ki, mint be,  $v$ -be 1-gyel többször lépünk be, mint ki, vagyis  $d(u)$  és  $d(v)$  páratlanok. □

**Megj:** A fenti Megfigyelés segítségével bizonyos esetekben azonnal látszik, hogy  $G$ -nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

$G$  **irányítatlan Euler-gráf**, ha  $G$  minden  $v$  csúcsra  $d(v)$  páros.

**Lemma:** Ha  $G$  Euler-gráf, akkor  $G$  élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (irányított) kört alkossanak minden színre.

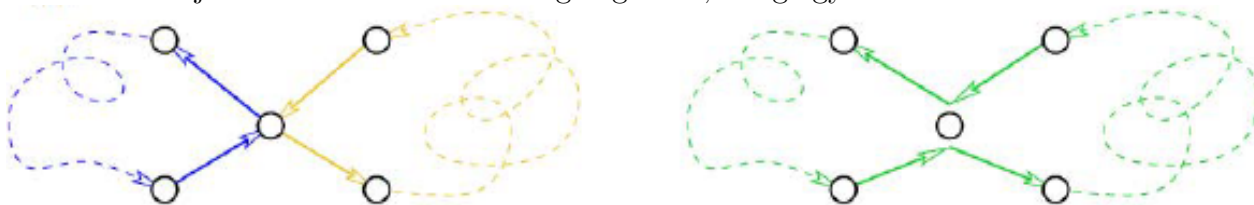


**Biz:** Induljunk el  $G$  egy éle mentén, és haladjunk tovább az (irányított) élek mentén. Mivel  $G$  Euler, ezért sosem adaunk el: előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, így találunk egy  $C_1$  kört.  $C_1$  éleit törölve  $G - C_1$  Euler-gráf marad. Ismételjük meg ezt a  $G - C_1$  gráfon. Így  $G$  minden éle előbb-utóbb sorra kerül és megkapja a  $C_2, C_3, \dots$  köröket. Ezért  $E(G) = C_1 \cup C_2 \cup \dots$  diszjunkt körök uniójára bomlik fel. Színezzük ki a  $C_1$  kör éleit az  $i$ -dik színnel.  $\square$

**Tétel:** (1) ( $G$  irányított gráfnak van Euler-körsétája)  $\iff$  ( $G$  Euler-gráf és  $G$  izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő)

(2) ( $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája)  $\iff$  ( $G$  Euler-gráf és  $G$  izolált pontoktól eltekintve összefüggő)

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Láttuk.  $\checkmark \Leftarrow$ : A Lemma miatt  $E(G)$  felbontható körökre, tehát körsétákra is. Ha a körséták száma legalább 2, akkor választunk két körsétát, aminek van közös csúcsa és  $e$  csúcs mentén "összevarjuk" azokat. Mindezt addig végezzük, amíg egyetlen körséta marad.  $\square$



**Tétel:** (3) ( $G$  irányítatlan gráfnak van Euler-sétája)  $\iff$  ( $G$  izolált pontoktól eltekintve összefüggő és 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.)

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Láttuk.  $\checkmark \Leftarrow$ : Ha  $G$  Euler-gráf, akkor (2) miatt van Euler-körsétája, ami Euler-séta is egyúttal. Ha  $G$  nem Euler-gráf, akkor legyenek  $u$  és  $v$  a  $G$  páratlan fokú csúcsai. Ekkor  $G + uv$  Euler-gráf, és (2) miatt van Euler-körsétája. Feltehető, hogy  $e$  körséta utolsó éle  $uv$ . Ezt az  $uv$  élt elhagyva a körsétából,  $G$  Euler-sétáját kapjuk.  $\square$

**Euler-körséta keresése Euler-gráfban:**  $E(G)$ -t felbontjuk körsétákra, amiket összevarrunk. Körsétát a felbontáshoz pl. úgy is kereshetünk, hogy addig követünk egy sétát, amíg tudunk. Előbb-utóbb elakadunk, de ez csakis a séta kiindulási pontjában történhet meg. Ezért a bejárt séta egy körséta, amit a felbontásban felhasználunk.

## 5.2 Hamilton-körök és -utak

**Def:** A  $G$  gráf **Hamilton-köre** (**Hamilton-útja**) a  $G$  olyan köre (útja), ami  $G$  minden csúcsát tartalmazza.

**Megj:** A célunk hasonló, mint az Euler-(kör)séta esetén, azaz gyors módszer, amivel el lehet dönteni egy gráfról, hogy van-e Hamilton-köre ill. -útja. Sajnos jól használható szükséges és elégséges feltételt nem tudunk adni erre a problémára, és jó oka van annak, hogy nem is számítunk ilyen feltétel létezésére. Tudunk viszont jól használható szükséges, és jól használható elégséges feltételt adni, de ezek csak bizonyos gráfok esetén hasznosak.

### Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

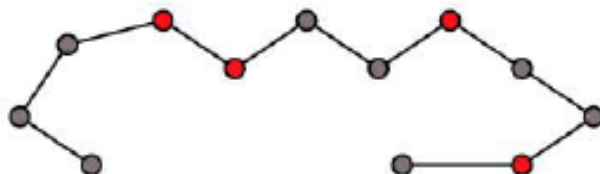
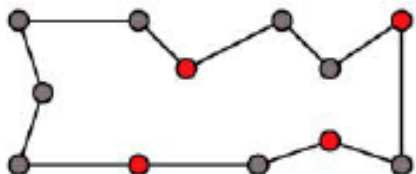
(1) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-köre, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U|$ .

(2) Ha a  $G$  gráfnak van Hamilton-útja, akkor  $\forall U \subseteq V(G)$  esetén  $G - U$  komponenseinek száma legfeljebb  $|U| + 1$ .

**Megj:** A fenti feltétel, miszerint  $k$  csúcs törlésétől a gráf legfeljebb  $k$  (ill.  $k + 1$ ) komponensre eshet szét feltétlenül **szükséges** ahhoz, hogy  $G$ -nek legyen Hamilton-köre ill. -útja. Abból

azonban, hogy  $G$  teljesíti a fenti feltételt, nem következik, hogy  $G$ -nek csakugyan van Hamilton-köre vagy útja. A szükséges feltételt úgy tudjuk alkalmazni, hogy a segítségével igazoljuk egy konkrét gráfról, hogy nincs Hamilton-köre (vagy -útja). Ha pl. azt látjuk, hogy  $G$ -ből 42 csúcsot elhagyva 43 komponens keletkezik, akkor  $G$ -nek nincs Hamilton-köre. Ha a komponensszám legalább 44, akkor  $G$ -nek Hamilton-útja sincs.

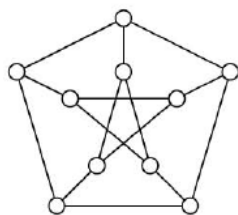
**Biz:** (1,2)  $G$ -t tekinthetjük úgy, mint egy kör (ill. út), amihez még további éleket adunk hozzá. Könnyű látni, hogy egy kör (ill. út)  $k$  pont elhagyásától legfeljebb  $k$  ( $k+1$ ) komponensre eshet szét. A további élek (amit a körhöz ill. úthoz hozzá kell adni, hogy  $G$ -t kapjunk) csak csökkenteni tudják a komponensszámot, növelni nem. Ezért  $G$ -ből  $k$  csúcsot törölve legfeljebb  $k$  ( $k+1$ ) komponens keletkezik.  $\square$



**Megj:** Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.

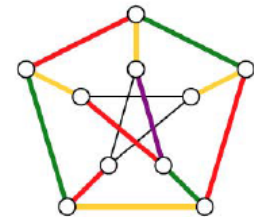
- (a) Tegyük fel, hogy külső körből  $k_1$ , a belsőből  $k_2$  csúcsot hagytunk el. Ha  $k_1 = 0$  vagy  $k_2 = 0$ , akkor a gráf összefüggő marad. Különben a külső kör legfeljebb  $k_1$ , a belső pedig legfeljebb  $k_2$  részre esik szét, vagyis összesen legfeljebb  $k_1 + k_2$  komponens



létezik.

2. Nincs Hamilton-köre.

- (a) Ha lenne Hamilton-köre, akkor a Hamilton-kör éleit felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezní. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, sárga ill. zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezní,



kiderül, hogy nem lehet.

A továbbiakban elégséges feltételeket fogunk látni Hamilton-kör létezésére. Ezek segítségével (szerencsés esetben) gyorsan és kétséget kizáróan tudjuk bizonyítani, hogy egy adott gráfnak van Hamilton-köre. Az elégséges feltétel vizsgálata azonban nem alkalmas arra, hogy egy gráf a Hamilton-körének hiányát igazoljuk.

**Def:** Legyen  $G$   $n$ -csúcsú, egyszerű gráf.

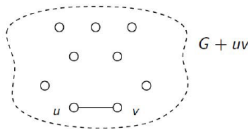
Az  $u, v \in V(G)$  csúcspár **gazdag**, ha  $d(u) + d(v) \geq n$ . A  $G$  gráfra teljesül a **Dirac-feltétel**, ha  $d(v) \geq \frac{n}{2} \forall v \in V(G)$ -re.  $G$ -re igaz az **Ore-feltétel**, ha  $G$  bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot.

**Dirac tétele:**  $G$ -re igaz a Dirac-feltétel  $\Rightarrow G$ -nek van H-köre.

**Ore tétele:**  $G$ -re igaz az Ore-feltétel  $\Rightarrow G$ -nek van H-köre.

**Megj:** A Dirac-feltétel erősebb (többet kíván), mint az Ore. Ezért az Ore-tétel erősebb, mint a Dirac: gyengébb feltételből igazolja ugyanazt. Ezért az Ore-tétel bizonyítása a Dirac-tételt is igazolja.

### 5.3 A Chvátal-lezárt



**Hízlalási lemma:** Tegyük fel, hogy  $G$  egyszerű gráf, és  $(u, v)$  gazdag pár. ( $G$ -nek van Hamilton-köre)  $\iff (G + uv$ -nek van Hamilton köre).

**Megj:** A hízlalási lemma jelentősége az, hogy segít eldönteni azt, hogy van-e  $G$ -ben Hamilton-kör. Azt mondja ki ugyanin, hogy a gazdag párok közé  $G$ -be "ingyen" behúzhatunk éleket, u.i. ez nem változtat azon a tényen, hogy van vagy nincs Hamilton-kör a vizsgált gráfban. Megtehetjük tehát, hogy a lemma segítségével addig húzunk be éleket a gráfba, amíg lehet. Ha az így adódó  $\overline{G}$  Chvátal-lezártban találunk Hamilton-kört, akkor  $G$ -nek is bizonyosan van Hamilton-köre. Ha pedig  $\overline{G}$  nem tartalmaz Hamilton-kört, akkor persze  $G$ -nek nincs Hamilton-köre.

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Láttuk.  $\Leftarrow$ : Legyen  $C$  a  $G + uv$  Hamilton-köre. Ha  $uv \notin C$ , akkor  $C$  a  $G$ -nek is Hamilton-köre, kész vagyunk. Ha viszont  $uv \in C$ , akkor  $C - uv$  a  $G$  egy Hamilton-útja. Legyen ez a Hamilton-út  $u = v_1, v_2, \dots, v_n = v$ . Legyen  $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$  a  $v$  szomszédainak halmaza, és legyen  $B := \{v_{i-1} : uv_i \in E(G)\}$  az  $u$  szomszédait a Hamilton-úton megelőző csúcsok halmaza.

Világos, hogy  $v \notin A$  és  $v \notin B$ , így  $|A \cup B| \leq n - 1$ . Mivel  $(u, v)$  gazdag pár, ezért  $|A| + |B| = d(u) + d(v) \geq n$ . Ezek szerint  $A \cap B \neq \emptyset$ , legyen pl.  $v_i \in A \cap B$ . Ekkor  $v_1, v_2, \dots, v_i, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}, v_1$  a  $G$  egy Hamilton-köre.  $\square$

**Ore tétele:** Ha  $G$  bármely két nemszomszédos csúcsa gazdag párt alkot, akkor  $G$ -nek van Hamilton-köre.

**Biz:** A hízlalási lemma alapján  $G$  bármely két nemszomszédos csúcsát "ingyen" összeköthetjük. Így  $G$  Chátal-lezártja a  $\overline{G} = K_n$  teljes gráf. Mivel  $K_n$ -nek van H-köre, ezért  $G$ -nek is van.  $\square$

**Dirac-tétele:** Ha  $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$ , akkor  $G$ -nek van Hamilton-köre.

**Biz:**  $G$  bármely két csúcsa gazdag párt alkot, ezért  $G$ -re teljesül az Ore-feltétel. Az Ore-tétel miatt  $G$ -nek van Hamilton-köre.  $\square$

## 6 Síkgráfok

### 6.1 Síkbarajzolhatóság

**Def:** Síkbarajzolt (SRt) gráf alatt olyan gráfdiagramot értünk, amiben az élek nem keresztezik egymást.

A  $G$  gráf síkbarajzolható (SRható), ha van SRt diagramja.

Síkbarajzolt gráf tartománya (lapja): a diagram komplementerének összefüggő tartománya. A nem korlátos rész neve külső tartomány.

**Megj:** (1) A fentieket nem csak egyszerű gráfokra definiáltuk. (2) A SRt gráf nem csupán egy gráf, hanem egy **konkrét** diagram. (3) Ugyanannak a SRható gráfnak nagyon sok lényegesen különböző síkbarajzolt diagramja (lerajzolása) lehet. (4) A görbe (tóruszra) rajzolhatóság hasonlóan definiálható.

**Állítás:**  $(A \text{ } G \text{ gráf SRható}) \iff (G \text{ gömbre rajzolható})$

**Biz:** A sztereografikus projekcióban az északi-sarkból történő vetítés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a sík pontjai és a síkot a déli-sarkon érintő gömbfelszín pontjai (mínusz északi-sark) között. A síkbarajzolt diagram vetülete gömbre rajzolt lesz ( $\Rightarrow \checkmark$ ), és az  $\bar{E}$ -t nem tartalmazó gömbre rajzolt diagram pedig síkbarajzoltává válik. A  $\Leftarrow$  irány igazolásához csupán annyi kell, hogy úgy rajzoljuk  $G$ -t a gömbre, hogy az  $\bar{E}$ -n ne menjen át él.  $\square$

**Köv:** SRt gráf külső tartománynak nincs kitüntetett szerepe.

**Biz:** Bármely lerajzolás "kifordítható": a diagram átrajzolható úgy, hogy a kiválasztott tartomány legyen a külső tartomány.

1. Vetítsük fel a diagramot a gömbre.
2. Állítsuk az  $\bar{E}$ -t a kiválasztott tartománynak megfelelő gömbi tartomány belsejébe.
3. Vetítsük vissza a gömbre rajzolt gráfot a síkra.  $\square$

**Köv:** Bármely konvex poliéder élhálójá SRható gráf.

**Biz:** A  $kx$  poliéder belső pontjából az élháló kivetíthető egy, a poliédert tartalmazó gömbre. Így az élhálóból gömbre rajzolt gráf lesz. Láttuk, hogy minden gömbre rajzolható gráf SRható.  $\square$

**Megj:** A  $kx$  poliéder élgráfjának tartományai a poliéder lapjainak felelnek meg.

**Terminológia:** SRt  $G$  gráf esetén  $n, e, t$  ill.  $k$  jelöli rendre a  $G$  csúcsai, élei, tartományai és komponensei számát.

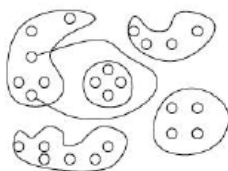
**Duális kézfogáslemma (DKFL):** Ha  $G$  SRt gráf, akkor  $\sum_{i=1}^t l_i = 2e$  ahol  $l_i$  az  $i$ -dik lapot határoló élek számát jelöli.

**Biz:** Minden él vagy két különböző lapot határol, vagy ugyanazt a lapot 2-szer. Így minden él 2-vel járul a BO-hoz és a JO-hoz is.  $\square$

**Megj:** A DKFL akkor hasznos, ha a SRt gráf lapjairól, a KFL pedig akkor, ha a fokszámokról van információnk.

**Fáry-Wagner-tétel:** Ha  $G$  egyerű SRható gráf, akkor olyan síkbarajzolása is van, amiben minden él egyenes szakasz.

### 6.2 Az Ezler-féle poliéderformula, síkgráfok karakterizációja





**Tétel:** Ha  $G$  SRt gráf, akkor  $n + t = e + k + 1$ .

**Biz:** Rajzoljuk meg  $G$ -t az  $n$  csúcsból kiindulva, az élek egyenkénti behúzásával. Kezdetben  $t = 1, e = 0$  és  $k = n$ , így a bizonyítandó összefüggés fennáll. Tegyük fel, hogy már néhány élt berajzoltunk, még mindig fennáll az összefüggés, és egy éppen az  $uv$  élt rajzolunk meg.

[1.]  $u$  és  $v$  különböző komponenshez tartoznak. Ekkor  $k$  értéke 1-gyel csökken,  $e$ -é pedig 1-gyel nő. Az ÉHL miatt nem keletkezik kör, tehát nem zárunk körül új tartományt, vagyis  $t$  nem változik. Az összefüggés fennmarad.

[2.]  $u$  és  $v$  ugyanahhoz a komponenshez tartoznak. Ekkor  $k$  nem változik,  $e$  viszont 1-gyel nő. Az ÉHL miatt keletkezik kör, tehát kettévágjuk az  $uv$  élt tartalmazó korábbi tartományt. Ezért  $t$  is 1-gyel nő, az összefüggés ismét fennmarad.  $\square$

**Köv:** (1) Ha  $G$  SRható, akkor  $t$  nem függ a síkbarajzolástól.

**Biz:**  $t = e + k + 1 - n$ , és a JO nem függ a síkbarajzolástól.  $\square$

(2) **(Euler-formula)** Ha  $G$  összefüggő SRt gráf, akkor  $n + t = e + 2$

**Biz:** Mivel  $G$  összefüggő, ezért a fenti Tételben  $k = 1$ .  $\square$

(3) Ha  $G$  egyszerű, SRható és  $n \geq 3$ , akkor  $e \leq 3n - 6$ .

**Biz:** Ilyenkor  $G$  minden lapját legalább 3 él határolja, így a DKFL miatt  $2e = \sum_{i=1}^t l_i \geq 3t$ . A Tétel alapján  $3n + 2e \geq 3n + 3t = 3e + 3k \geq 3e + 3 + 3 = 3e + 6$ , amit rendezve  $e \leq 3n - 6$  adódik.  $\square$

(4)  $G$  egyszerű, SRható,  $C_3$ -mentes és  $n \geq 3 \Rightarrow e \leq 2n - 4$ .

**Biz:** Ilyenkor  $G$  minden lapját legalább 4 él határolja. A DKFL miatt  $2e = \sum_{i=1}^t l_i \geq 4t$ , így  $e \geq 2t$ . A Tétel miatt  $2n + e \geq 2n + 2t = 2e + 2k + 2 \geq 2e + 2 + 2 = 2e + 4$  Ezt rendezve  $e \leq 2n - 4$  adódik.  $\square$

(5) Ha  $G$  egyszerű, SRható, akkor  $\delta(G) \leq 5$  (azaz  $\exists v : d(v) \leq 5$ ).

**Biz:** A KFL és (3) miatt  $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e \leq 6n - 12$ . Ezért van olyan csúcs, amire  $d(v) \leq \frac{6n-12}{n} < 6$ .  $\square$

(6) A  $K_5$  és  $K_{3,3}$  gráfok egyike sem SRható.

**Biz:** A  $K_5$  gráf egyszerű, de nem teljesül (3), hiszen  $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10 \not\leq 9 = 3 \cdot 5 - 6$ . Ezért  $K_5$  nem SRható. A  $K_{3,3}$  gráf egyszerű és  $C_3$ -mentes, de nem teljesül rá (4), u.i.  $|E(K_{3,3})| = 9 \not\leq 8 = 2 \cdot 6 - 4$ . Ezért  $K_{3,3}$  nem SRható.  $\square$

**Megj:** Könnyen látható, hogy ha  $G$  SRható, akkor  $G + e$  tóruszra rajzolható bármely  $e$  él behúzása esetén. Nem nehéz látni, hogy  $K_6$  is tóruszra rajzolható. Sőt: még  $K_7$  is az, de  $K_8$  már nem.

**Def:** **Élfelosztás:** az élre egy új, másodfokú csúcs ültetése. **Élösszehúzás:** az él törlése és két végpontjának azonosítása. **Topologikus  $G$  (soros bővítés):**  $G$ -ből élfelosztásokkal képzett gráf.

**Megf:** Az éltörlés, csúcsörlés, élfelosztás, élösszehúzás operációk mindegyike megőrzi a gráf SRható tulajdonságát.

**Köv:** (1) Top.  $K_5$  top.  $K_{3,3}$  nem SRható. (2) Ha  $G$  SRható, akkor  $G$ -nek nincs se topologikus  $K_5$ , se topologikus  $K_{3,3}$  részgráfja.

**Kuratowski tétele:** ( $G$  SRható)  $\iff$  ( $G$ -nek nincs se topologikus  $K_5$ , se topologikus  $K_{3,3}$  részgráfja) **Példa:** Petersen-gráf

## 6.3 Síkgráfok duálisa

**Def:** A  $G$  SRt gráf **duálisa** a  $G^*$  gráf, ha  $G^*$  csúcsai  $G$  tartományainak,  $G^*$  élei  $G$  éleinek felelnek meg. Az  $uv \in E(G)$  élnek megfelelő duális él az  $uv$  él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

**Megf:** (1) A SRt  $G$  gráf  $G^*$  duálisa SRható.  $(n^*, e^*, t^*, k^*)$  (2)  $n^* = t, e^* = e, k^* = 1$ . (3) Ha  $v$  az  $i$ -dik laphoz tartozó duális csúcs, akkor  $d_{G^*}(v) = l_i$ .

**Köv:** KFL a duálisra  $\sum_{i=1}^t l_i = \sum_{v \in V(G^*)} d_{G^*}(v) = 2e^* = 2e$ .



**Def:** A  $Q \subseteq E(G)$  élhalmaz a  $G$  gráf **vágása**, ha  $G - Q$  szétesik (több komponense van, mint  $G$ -nek), de  $Q' \subsetneq Q$  esetén  $G - Q'$  nem esik szét. **Elvágó él:** egyélű vágás. **Soros él:** kétélű vágás.

**Kör-vágás dualitása:** Tegyük fel, hogy  $G^*$  a  $G$  SRt gráf duálisa. Ekkor  $(C$  a  $G$  köre)  $\iff (C^*$  a  $G^*$  vágása) ill.  $(Q$  a  $G$  vágása)  $\iff (Q^*$  a  $G^*$  köre).

**Köv:** Hurokél duálisa elvágó él, soros élpáré párhuzamos élpár.

## 6.4 Whitney

**Whitney tétele:** Tegyük fel, hogy  $G^*$  a  $G$  SRt gráf duálisa. Ekkor  $H$  pontosan akkor duálisa a  $G$  egy alkalmas síkbarajzolásának, ha  $H$  előáll  $G^*$ -ból a fenti Whitney-operációk alkalmas egymásutánjával.

**Def:** A  $\varphi : E(G) \rightarrow E(H)$  kölcsönös egyenértékű leképezés **kör-vágás dualitás**  $G$  és  $H$  között, ha  $C$  pontosan akkor  $G$  köre, ha  $\varphi(C)$   $H$  vágása.

**Whitney másik tétele:** Tegyük fel, hogy  $G$  és  $H$  között kör-vágás dualitás van. Ekkor  $G$  SRható, és  $H$  a  $G$  egy alkalmas síkbarajzolásának duálisa.

**Megj:** Egy  $G$  gráf által leírt villamos hálózat viselkedését az Ohm-él Kirchhoff-törvények írják le. Ezek a  $G$  gráf éleire, köreire és vágásaira vonatkoznak. Ha  $G$  és  $H$  közt kör-vágás dualitás van, akkor  $H$ -n elkészíthető az előző hálózat duálisa. Az eredeti hálózat megoldásában ha az  $I$  és  $U$  értékeket felcseréljük, az utóbbi hálózat megoldását kapjuk. Whitney másik tétele miatt ez a különös szimmetria csak SRható gráfok által leírt hálózatokon lehetséges.