A számítástudomány alapjai

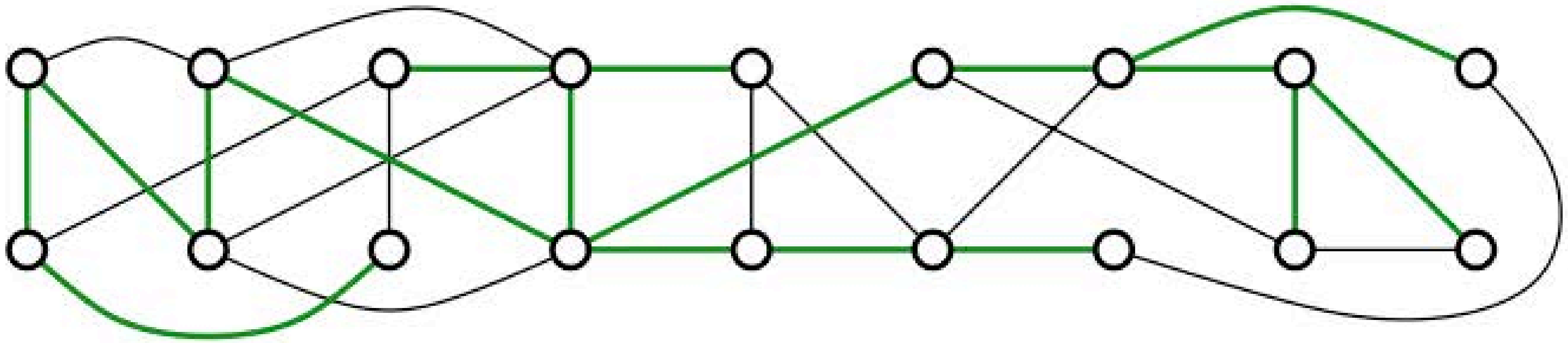
Minimális költségű feszítőfák

2022. szeptember 13.

Emlékeztető

- G gráf feszítőfája: a G-ből éltörlésekkel kapható fa.
- Tetsz. G irányítatlan gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.
- Összefüggő G gráf feszítőfáját megkaphatjuk, ha G-t élek egyenkénti behúzásával építjük fel, és az éleket kiszínezzük az ÉHL szerint. A zöld élek a G feszítőfáját adják.
- Ha G nem volt összefüggő, akkor a zöld élek G feszítő erdejét alkotják.
- Az ÉHL „fordítottját" használva pedig az látszik, hogy ha egy kör élét töröljük, akkor nem változnak a komponensek. Ezért úgy is található feszítőfa (vagy feszítő erdő), hogy addig törlünk körbeli élt, amíg van kör a gráfban.

Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



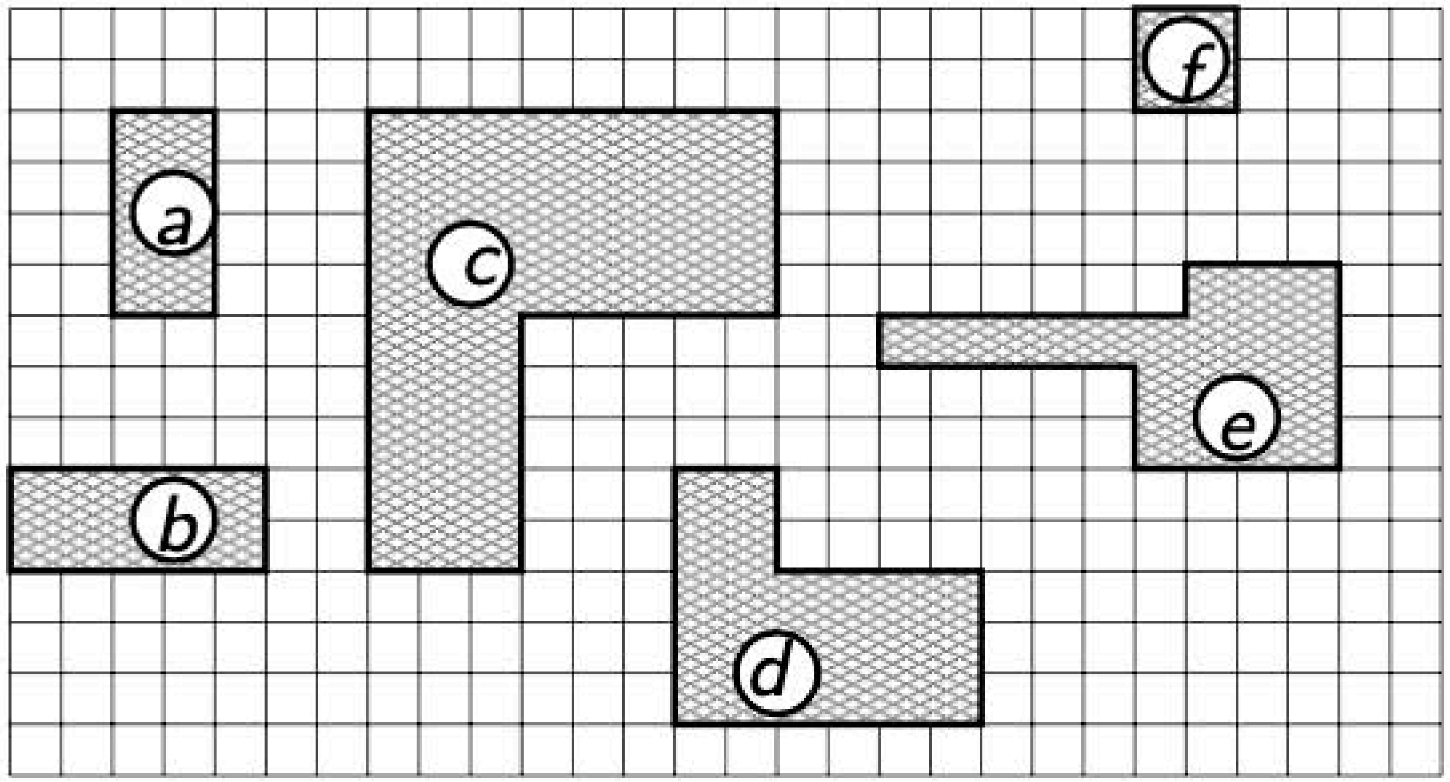
Adott egy G gráf és G-nek egy F rögzített feszítőfája. Ekkor G minden éléhez F meghatározza G éleinek egy fontos részhalmazát. Attól függően, hogy az adott él F-hez tartozik-e vagy sem, különböző fajta részhalmazról van szó.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak. Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tartozó alapkör pedig az $F + e$ köre.

Megf: Tfh $f \in F$ és $e \in E(G) \setminus E(F)$ Ekkor ($F - f + e$ ffa) $\Longleftrightarrow$ (f benne van e alapkörében) $\Longleftrightarrow$ (e benne van f alap vágásában).

Köv: Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ alapkörét e mellett azon F-beli élek alkotják, amelyek alapvágása e-t tartalmazza.
Az $f \in F$ alap vágását f mellett a G azon élei alkotják, amelyek alapköre f-t tartalmazza.

Egy gyakorlati probléma



A Guváti vállalat piripócsi üzemében álló fém konténereket kell leföldelni, azaz mindegyiket összekötni az f földelési ponttal. Ennek során egy konténer egy másik, már földelt konténerhez is hozzácsatlakoztatható. Hogyan lehet ezt a feladatot úgy megoldani, hogy a lehető legkevesebb földelővezetéket használjuk? (A vezetékeket csak két konténer összekötésére vagy valamelyik konténer földelési ponthoz történő bekötéséhez használhatjuk.)

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítő erdeje, ha
(1) (V, F) a G feszítő erdeje, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítő erdejére.

Minimális költségű feszítőfa

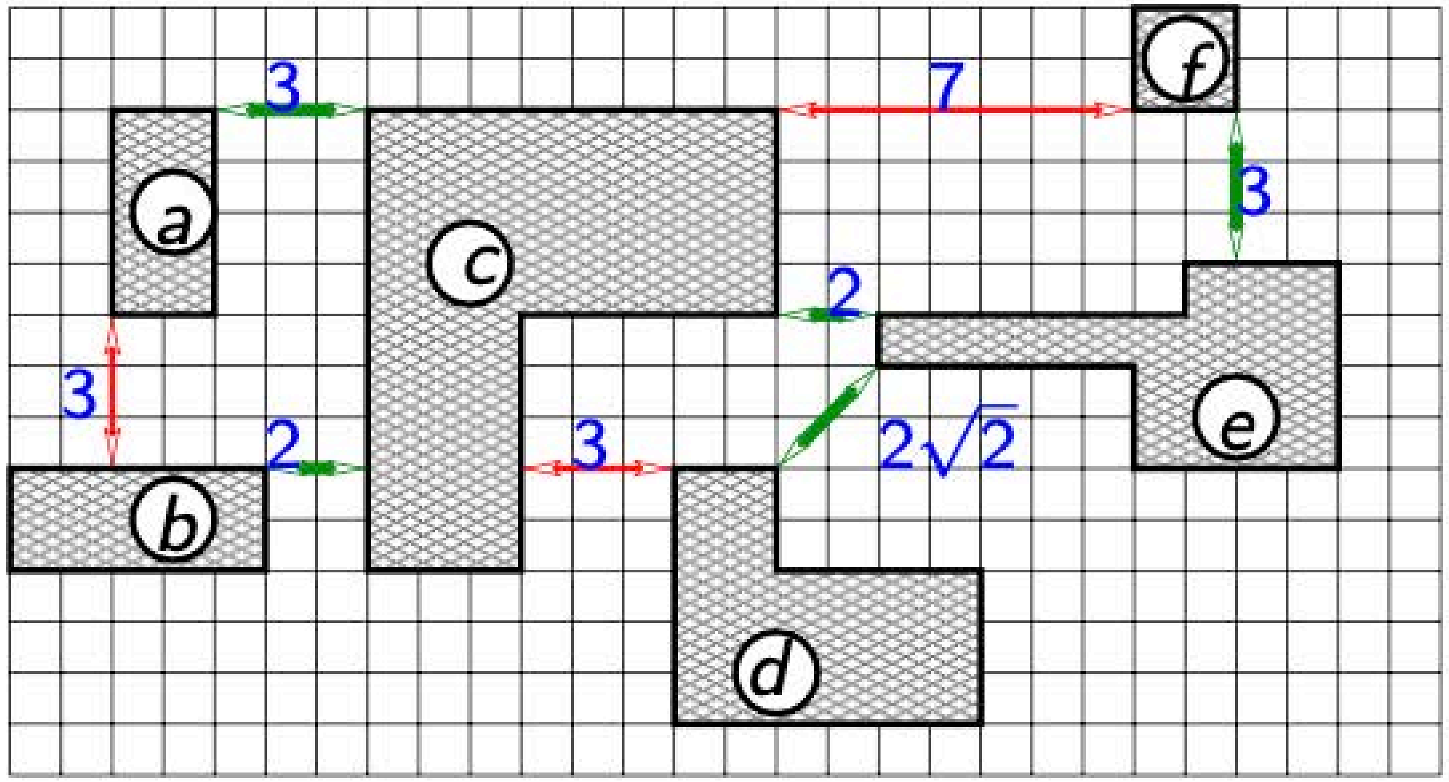
Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Megf: A konténerföldelési probléma megoldása egy mkffa.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.

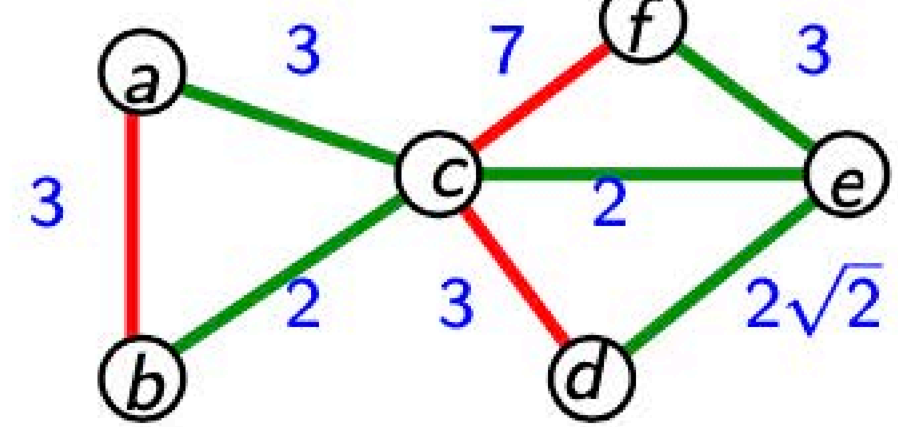
Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.
Ötlet: Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élek egyenkénti behúzásával, az ÉHL szerint zöldre színezett élek halmazaként.
Zöld él: olyan él, ami nem alkot kört a korábban felépített élekkel.
Mohó stratégia: A feszítőfa építésekor költség szerint növekvő sorrendben döntsünk az élekről, hátha mkffát kapunk a végén.
Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv.
Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus egy példán

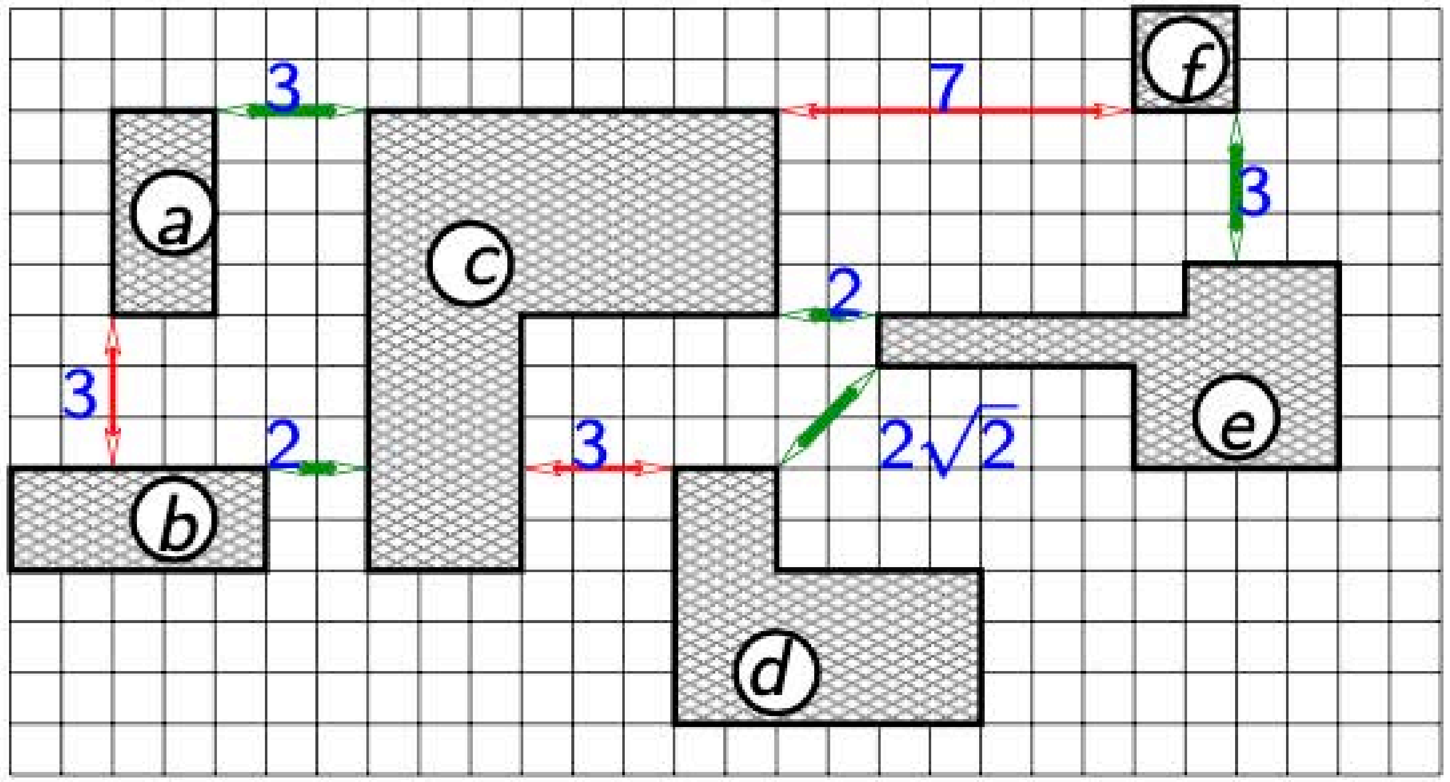


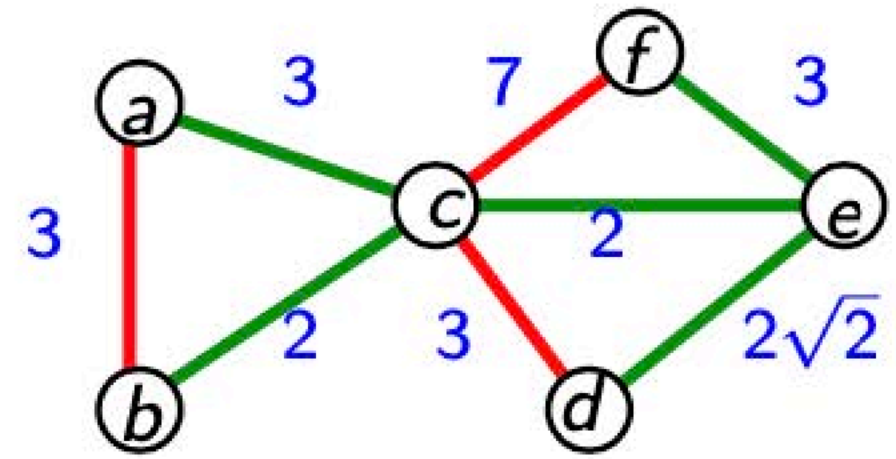


Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv.
Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \le k(e_2) \le \ldots \le k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus egy példán





Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Megj: Világos, hogy a Kruskal-algoritmus feszítő erdőt talál. (Ha G összefüggő, akkor a Kruskal outputja feszítőfa.) A kérdés az, hogy ez a rövidlátó, mohó stratégia vajon mindig optimális megoldást, azaz mkffát (ill. feszítő erdőt) ad-e.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Biz: A Kruskal-algortimus a legfeljebb c költségű (E_c-beli) éleket hamarabb dolgozza fel, mint a c-nél drágábbakat. Ezért E_c összes élének feldolgozása után pontosan azt az állapotot érjük el, mintha a Kruskal-algoritmust a G_c gráfon futtattuk volna. Korábban (az ÉHL előtt) láttuk, hogy az utóbbi algoritmus outputja G_c egy feszítő erdeje. $\square$

Mkffák struktúrája

$G=(V,E)$ gráf és $k: E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c=(V,E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \le c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \ge 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F=\{f_1,f_2,\ldots,f_\ell\}$, $k(f_1)\le k(f_2)\le \ldots \le k(f_\ell)$ és $F\cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \ge 0$-ra. Tfh $F'=\{f'_1,f'_2,\ldots,f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1)\le k(f'_2)\le \ldots \le k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i)\le k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1\le i\le \ell$ esetén, így $k(F)\le k(F')$.

Biz: Indirekt: tfh $k(f_i) > k(f'_i)=c$. Ekkor $|E_c\cap F|<i$, így a feltevés miatt $E_c\cap F$ a G_c egy i-nél kevesebb élű feszítő erdeje. Az $f'_1,f'_2,\ldots,f'_i$ élek is mind E_c-beliek, és többen vannak az $E_c\cap F$ feszítő erdő élszámánál. Tehát $f'_1,f'_2,\ldots,f'_i$ nem lehet körmentes, így $f'_1,f'_2,\ldots,f'_\ell$ sem. Ez ellentmondás. Tehát $k(f_i)\le k(f'_i)$ $\forall i$.

Ezért $k(F)=\sum_{i=1}^{\ell} k(f_i) \le \sum_{i=1}^{\ell} k(f'_i) = k(F')$. $\square$

Mkffák struktúrája

$G=(V,E)$ gráf és $k: E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c=(V,E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F=\{f_1,f_2,\ldots,f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F'=\{f'_1,f'_2,\ldots,f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\, 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

Biz: Legyen F a Kruskal-algoritmus outputja. A Megfigyelés miatt $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra, ezért a Lemma szerint $k(F) \leq k(F')$ teljesül G tetszőleges F' feszítő erdejére. $\square$

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\, 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje G-nek, ha $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \geq 0$-ra.

Biz: A Lemma bizonyítja az elégségességet.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje G-nek, ha $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \geq 0$-ra.

Biz: A szükségességhez tfh $F' \cap E_c$ nem feszítő erdeje G_c-nek, és legyen F a Kruskal-algoritmus outputja. Mivel $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje, ezért $|F \cap E_c| > |F' \cap E_c|$, így $k(f_i) < k(f'_i)$ teljesül legalább egy i-re, és minden j-re $k(f_j) \leq k(f'_j)$. Innen $k(F) < k(F')$. $\square$

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje G-nek, ha $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \geq 0$-ra.

(3) Ha a G gráf összefüggő, akkor G feszítő erdeje a G feszítő fája, így a Kruskal-algoritmus mkffát talál. A (2) következmény pedig G mkffáit karakterizálja.

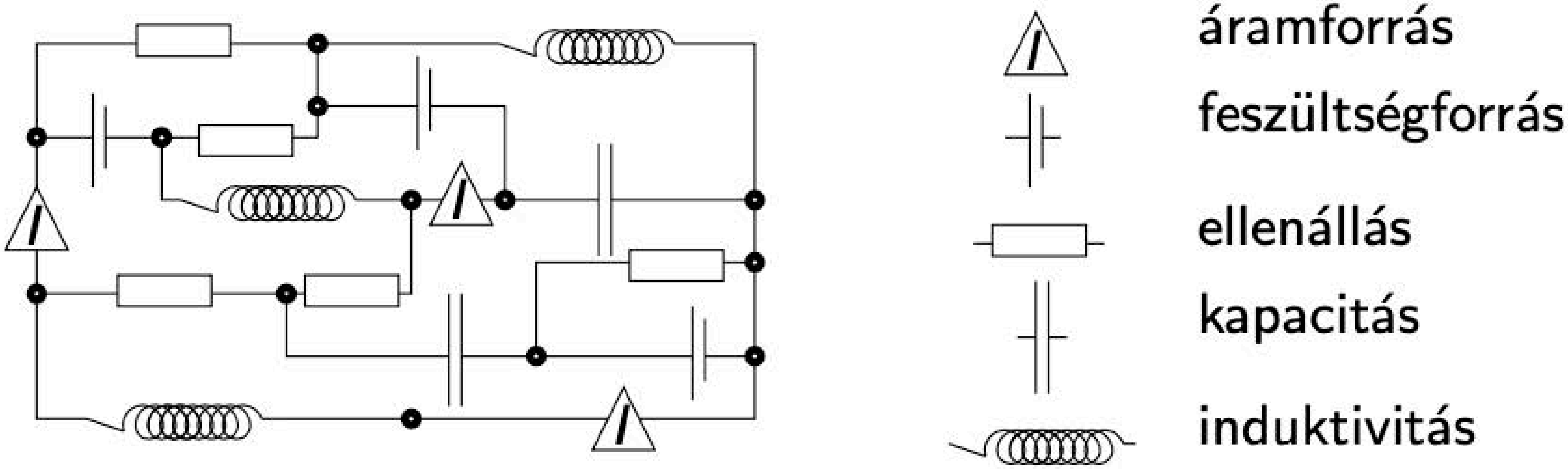
Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.
Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.
Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.
A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Élek költség szerinti sorbarendezése
2. Döntés az egyes élekről a fenti sorrendben.

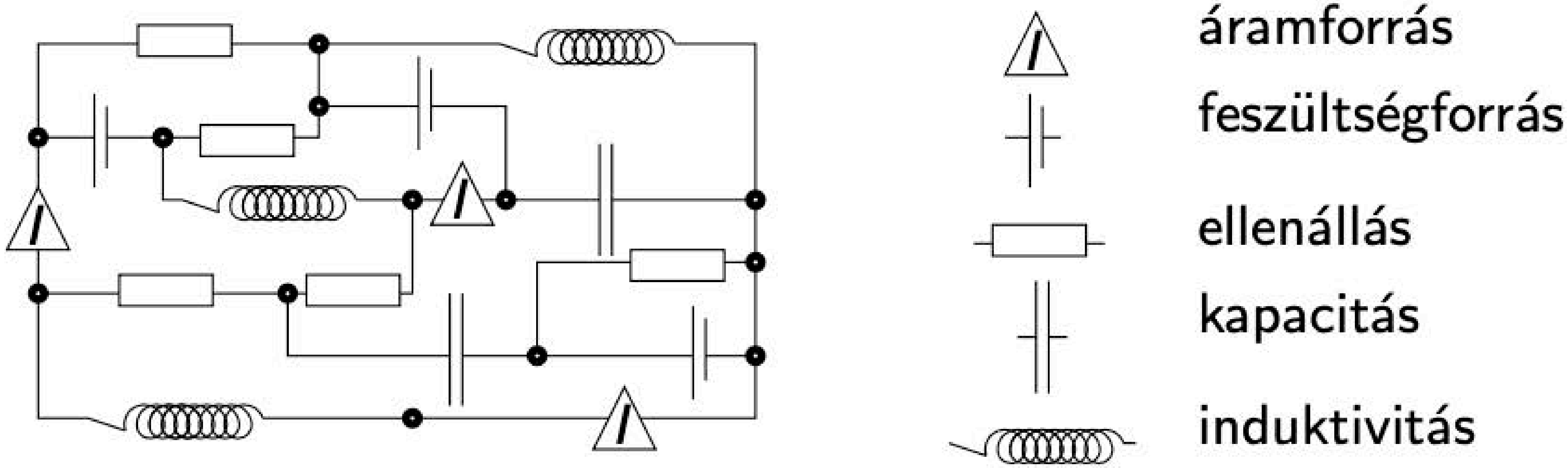
1. m szám sorbarendezéséhez a buborékrendezés legfeljebb $\binom{m}{2}$ összehasonlítást használ.
(A feladat megoldható $konst \cdot m \cdot \log_2 m$ lépésben is.)
2. n csúcsú G gráf esetén egy élről döntés megoldható $konst \cdot \log_2 n$ lépésben az adatstruktúra karbantartásával együtt is.
Az összes döntéshez tehát elegendő $konst \cdot n \cdot \log_2 n$ lépés.
A Kruskal-algoritmus lépésszáma ezért felülről becsülhető $konst \cdot (n+m) \cdot \log_2(n+m)$-mel.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



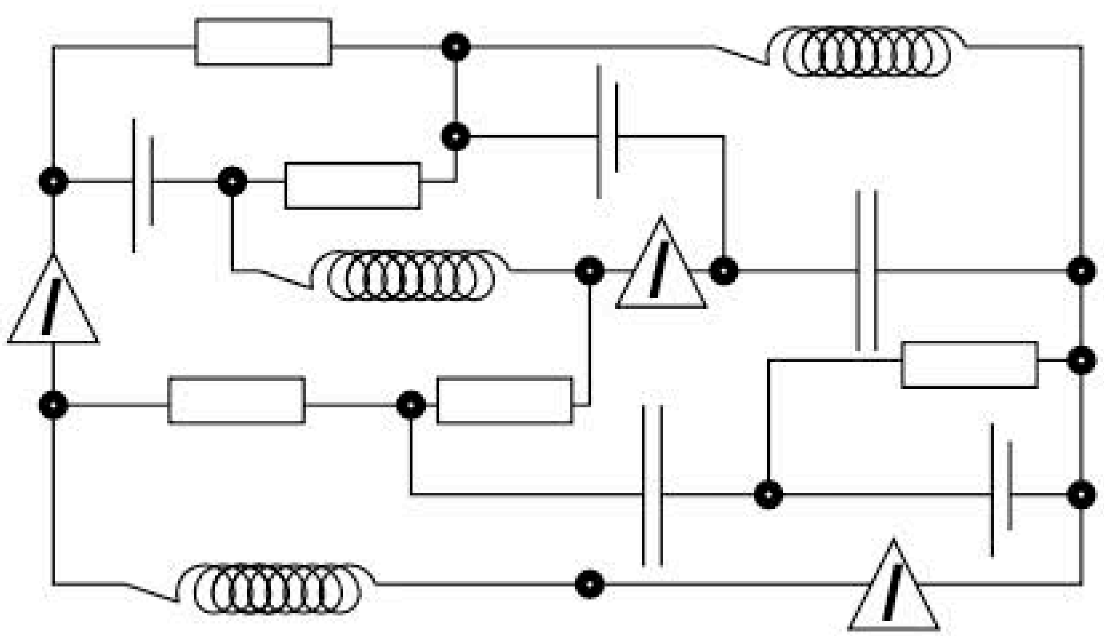
Mikor „értelmes" egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Bizonyítható, hogy ha a fenti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat „értelmes". Ennek a bizonyítéka a normál fa: G olyan feszítőfája, ami minden feszültségforrást tartalmaz, de egyetlen áramforrást sem (és mindemellett a legtöbb kapacitást és a lehető legkevesebb induktivitást tartalmazza).

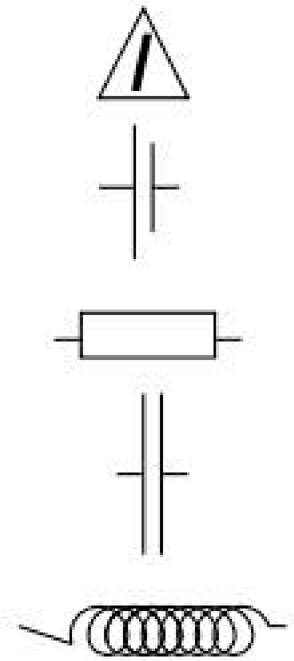
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Bizonyítható, hogy ha a fenti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat „értelmes”. Ennek a bizonyítéka a normál fa: G olyan feszítőfája, ami minden feszültségforrást tartalmaz, de egyetlen áramforrást sem (és mindemellett a legtöbb kapacitást és a lehető legkevesebb induktivitást tartalmazza). (Ráadásul a normál fához tartozó alapkörökre és alapvágásokra felírva a hurok- ill. csomóponti törvényeket, az egyértelmű megoldás már megkapható.)

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása





Mikor ,,értelmes” egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Bizonyítható, hogy ha a fenti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat ,,értelmes”. Ennek a bizonyítéka a normál fa: G olyan feszítőfája, ami minden feszültségforrást tartalmaz, de egyetlen áramforrást sem (és mindemellett a legtöbb kapacitást és a lehető legkevesebb induktivitást tartalmazza).

Normál fa keresése: fesz.forrás (1), kapacitás (2), ellenállás (3), induktivitás (4), áramforrás (5) élköltségekhez keressünk mkffát! Ha ez tartalmaz áramforrást, vagy nem tartalmaz minden feszültségforrást, akkor nincs normál fa, egyébként a mkffa egy normál fa és egyértelmű a megoldás ,,értelmes” a hálózat.