Nem hivatalos BME jegyzet

A számítástudomány alapjai

Kidolgozott szóbeli tételsor

Készítette: Illyés Dávid

A jegyzetben a "A számítástudomány alapjai" nevű tárgy 2023/24/1 félévében kiadott szóbeli tételsor van (többé-kevésbé) kidolgozva. (Jelenleg inkább csak össze gyűjtögetve, de finomítva még nincs.)

January 20, 2024

Tartalomjegyzék

Tételek:

A **félkövéren** szedett dolgokat tudni kell ismertetni, kimondani, ill. definiálni. Az aláhúzottakat bizonyítottuk, a *dőlten* szedetteket nem. A vizsgán az anyag értő ismeretét kérjük számon, elégségesért nem kell bizonyítást tudni.

1. Gráfelméleti alapfogalmak: **csúcs, él, diagram, fokszám**. Egyszerű gráf, irányított gráf, véges gráf, komplementer gráf, reguláris gráf, él/csúcstörlés, élhozzáadás, (feszítő/feszített) részgráf, izomorfia, élsorozat, séta, út, kör,**összefüggő gráf**, komponens. **kézfogás-lemma**.

2. **Élhozzáadási lemma** erdő, **fa**, fák egyszerűbb tulajdonságai: két levél, erdők élszáma. **Feszítőfa** létezése, feszítőfához tartozó alapkörök és alap vágások.

3. **Minimális költségű feszítőfa**, mkffák struktúrája, **Kruskal-algoritmus** helyessége, villamos hálózathoz tartozó normál fa keresése.

4. Általános gráfbejárás: **a csúcsok állapotváltozása, a bejárás általános lépései**, a bejáráshoz tartozó sorrend ill. az élek osztályozása bejárás után. A **BFS** és tulajdonságai, legrövidebb utak fájának létezése.

5. Gráfút hossza, gráfcsúcsok távolsága, nemnegatív és konzervatív hosszfüggvény, triviális és pontos (r, l)**-felső becslés, élmenti javítás. Dijkstra-algoritmus működése**, Ford-algoritmus helyessége és lépésszáma. Legrövidebb utak fájának létezése.

6. **Mélységi keresés** és alkalmazásai (fellépő éltípusok, mélységi- és befejezési számozásból az éltípus meghatározása, irányított kör létezésének eldöntése DFS-sel).

7. **DAG**, jellemzése, **topologikus sorrend** keresése. Leghosszabb utak keresése, **PERT-módszer**, kritikus utak és tevékenységek.

8. **Euler-séta és körséta** létezésének szükséges és elégséges feltétele. **Hamilton-kör és út** létezésére szükséges, ill. elégséges feltételek: komponensszám ponttörlés után (Petersen-gráf) **Dirac, Ore tételei**, gazdag párok, hízlalási lemma, Chavátal-lezárt.

9. **Gráfok síkba ill. gömbre rajzolhatósága, tartomány, sztereografikus projekció**, következményei. Az **Euler-féle poliédertétel**, duális kézfogáslemma és következményei: felső korlátok az élszámra és a minimális fokszáma egyszerű, síkbarajzolható gráfokon.

10. **Kuratowski gráfok** síkbarajzolhatósága, **soros bővítés,** ***Kuratowski-tétel*** **könnyű iránya**. **Síkbarajzolt gráf duálisa**, a duális paraméterei. Vágás, elvágó él, soros élek. *Kör-vágás dualitása*, különféle élek duálisai. Whitney két tétele, Whitney operációk.

11. **Lineáris egyenletrendszer, kibővített együtthatómátrix, elemi sorekvivalens átalakítás** és kapcsolata a megoldásokkal. **LA és RLA mátrix, vezéregyes, megoldás leolvasása RLA mátrix esetén.** Tilos sor, kötött változó, szabad paraméter, ezek jelentése a megoldás/megoldhatóság szempontjából. **Gauss-elimináció**, összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az egynletek és ismeretlenek száma között.

12. Az $\mathbb{R}^n$ **tér**, vektorműveletek azonosságai, (generált) **altér** (példák), (triviális) **lineáris kombináció**, alterek metszete, **generátorrendszer**, **lineáris függetlenség** (kétféle definíció). Lin.ftn rendszer hízlalása, generátor-rendszer ritkítása, kicserélési lemma, **FG-egyenlőtlenség** és következménye.

13. ESÁ hatása a sor- és oszlopvektorokra, **oszlopvektorok lin.ftn-ségének eldöntése**. **Bázis** fogalma, **altér bázisának előállítása generátorrendszerből** ill. homogén lineáris egyenletrendszerrel megadott altér esetén.

14. Generátorrendszerből homogén lin.egyenletredszer előállítása. **Altér dimenziójának** jóldefiniáltsága, $\mathbb{R}^n$ **standard bázisa, bázishoz tartozó koordinátavektor** kiszámítása.

15. n elem permutációja, a permutáció **inverziószáma**. **Bástyaelhelyezés**, inverzióban álló bástyapárok, **determináns, felső háromszögmátrix determinánsa**.

16. **Mátrix transzponáltja**, transzponált determinánsa, **ESÁ hatása a determinánsra, előjeles aldetermináns, kifejtési tétel**.

17. Vektorok skaláris szorzásának tulajdonságai. **Mátrixok összeadása és szorzása**, e műveletek tulajdonságai. **A szorzatmátrix sorainak és oszlopainak különös tulajdonsága**, ESÁ és mátrixszorzás kapcsolata.

18. **Lineáris leképezések** és mátrixszorzások kapcsolata. **Lineáris leképezés mátrixának meghatározása.** Leképezések egymásutánjának mátrixa, mátrixszorzás asszociativitása.

19. **Mátrix jobb- és balinverze**, ezek viszonya. **Balinverz kiszámítása ESÁ-okkal** és előjeles aldeterminánsokkal, **reguláris mátrixok** jellemzése determinánssal, sorokkal, oszlopokkal ill. RLA mátrix segítségével.

20. **Sor- oszlop- és determinánsrang**, ezek viszonya és **kiszámítása**. Összeg és szorzat rangja. **Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja**, a megoldhatóság és az oszlopok alterének kapcsolata. Az egyértelmű megoldhatóság feltétele $n \times n$ együtthatómátrix esetén.

1 Tétel

Gráfelméleti alapfogalmak: **csúcs, él, diagram, fokszám**. Egyszerű gráf, irányított gráf, véges gráf, komplementer gráf, reguláris gráf, él/csúcstörlés, élhozzáadás, (feszítő/feszített) részgráf, izomorfia, élsorozat, séta, út, kör,**összefüggő gráf**, komponens. **kézfogás-lemma**.

Gráfelméleti alapfogalmak:

- **csúcs, élek:**
  - V a G csúcsainak ((szög) pontjainak) halmaza.
  - E pedig G éleinek halmaza.
  - G=(V,E) egyszerű irányítatlan gráf ha $V \neq \emptyset$ és $E \leq \binom{V}{2}$, ahol $\binom{V}{2} = \{\{u,v\} : u,v \in V, u \neq v\}$
- **Diagram:** A $G = (V,E)$ gráf diagramja egy olyan lerajzolása, melyben a csúcsoknak (síkbeli) pontok felelnek meg, éleknek pedig a két végpontot összekötő, önmagukat nem metsző görbék.
- **Fokszám:**
  - $v \in V(G)$ esetén a v-re illeszkedő élek száma a v fokszáma.
  - A G gráf csúcsának $d(v)$ foka a v végpontú élek száma (hurokél kétszer számít).
- Egyszerű gráf: ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei.
- Irányított gráf: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.
- Véges gráf: $G = (V,E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.
- Komplementer gráf:
  - A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V,(G),\binom{v}{2}\backslash E(G))$.
  - Két csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a fokszámai megegyeznek vagy, ha minden csúcsának foka ugyan annyi.
- Reguláris gráf: k-reguláris, ha minden csúcsának pontosan k a fokszáma.
- Él/Csúcstörlés:

  Feszítő részgráf (éltöréssel kapható gráf), $G = (V,E)$ gráf $e \in E$ és $v \in V$ akkor $G - e = (V, E\backslash\{e\})$ az éltörés eredménye.

  Feszített részgráf: (csúcstörlésekkel kapható gráf), csúcstörléssel keletkező $G - v$ gráfhoz V-ből töröljük v-t, E-ből pedig a v-re illeszkedő éleket.

  Részgráf: él- és csúcstörlésekkel kapható gráf.
- Izomorfia: A G és G' gráfok akkor izomorfak, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n-ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u,v csúcsa között pontosan annyi él fut G-ben, mint az u-nak és v-nek megfelelő sorszámú csúcsok között G'-ben. Jelölése: $G \cong G'$.
- Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$. (Tulajdonképp egyik csúcsból eljutunk egy másik csúcsba mindig élek mentén haladva.)
- Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.
- Út: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.
- Kör: $u = v$, ha a kezdő (és vég)pontot nem akarjuk megnevezni, akkor zárt élsorozatról, körsétáról ill. körről beszélünk.
- **Összefüggő gráf:**
  - A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v$, $\forall u, v \in V(G)$ (ha bármely két pontja között vezet séta), ha bármely két csúcsa között vezet út G-ben (ha egy komponense van).
  - A G irányított gráfot akkor mondjuk **erősen összefüggő**nek, ha G bármely $u,v \in V(G)$ esetén van **irányított** uv-út G-ben.
  - **gyengén összefügő**, ha a G-nek megfelelő irányítatlan gráf, összefüggő.

- Komponens:
  (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$. (A komponensen belül el lehet jutni minden csúcsból minden csúcsba.)
  (2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára.
    - A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.
    - $K \leq V(G)$ a G gráf komponense, ha bármely $u, v \in K$ között létezik G séta, de nem létezik uv-séta, ha $u \in K, v \in V(G) \backslash K$. (Minden gráf egyértelműen bontható komponensekre.)

- **Kézfogás-lemma:** Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.
  A KFL bizonyítása: Készítsükel a G' digráfot úgy, hogy G minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítjük. Ekkor $\sum_{v \in V} d_G(V) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)|$
  Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna a kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-vel növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszámösszeget is.

- **Általánosított kézfogás-lemma:** Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(V) = |E|$, azaz a csúcsok ki- és befokainak összege is az élszámot adja meg. **Megj:** Úgy is bizonyíthattuk volna az általánosított kéfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. 0-elű (üres)gráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 1-gyel növeli az élszámot is és a ki/befokok összegét is.

2 Tétel

<u>**Élhozzáadási lemma**</u> erdő, **fa**, fák egyszerűbb tulajdonságai: <u>két levél</u>, <u>erdők élszáma</u>. **Feszítőfa** <u>létezése</u>, feszítőfához tartozó alapkörök és alap vágások.

- <u>**Élhozzáadási lemma (ÉHL):**</u> Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.

  (1) G és G' komponensei megegyeznek, de G'-nek eggyel több köre van, mint G-nek.

  (2) G és G' körei megegyeznek, de G'-nek eggyel kevesebb komponense van, mint G-nek.

- Erdő: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.

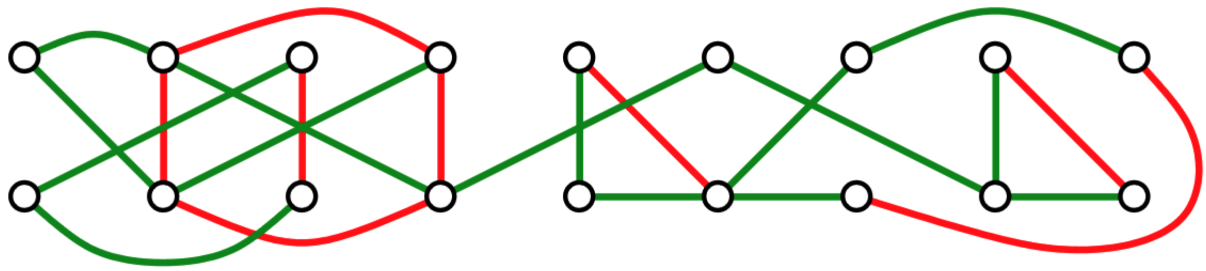
- **Fa:** Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
  - G erdő $\iff$ G minden komponense fa.
  - G n-csúcsú, k-komponensű erdő $\Rightarrow |E(G)| = n - k$.
  - **Biz:** Építsük fel G-t a $\overline{K_n}$ üresgráfból az élek egyenkénti behúzásával. G körmentes, ezért az ÉHL miatt minden él zöld: behúzásakor 1-gyel csökken a komponensek száma. A $\overline{K_n}$ üresgráfnak n komponense van, G-nek pedig k. Ezért pontosan $n - k$ zöld élt kellett behúzni G felépítéséhez.

- <u>Két levél:</u> Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.
  - **Biz:** (Algebrai út) A KFL miatt $\sum_{v \in V(G)}(d(v) - 2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 2n = 2(n-1) - 2n = -2$. F minden v csúcsára $d(v) \geq 1$ teljesül, ezért $d(v) - 2 \geq -1$. A fenti összeg csak úgy lehet -2, ha F-nek legalább 2 levele van.
  - **Biz:** (Kombinatorikus út) Induljunk el F egy tetszőleges v csúcsából egy sétán, és haladjunk, amíg tununk. Ha sosem akadunk el, akkor előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, és kört találunk. Ezért elakadunk, és az csakis egy v-től különböző u levélben történhet. Ha $d(v) = 1$, akkor v egy u-tól különböző levél. Ha $d(v) \geq 2$, akkor sétát indíthatunk v-ből egy másik él mentén. Ekkor egy u-tól különböző levélben akadunk el.

- **Feszítőfa**

  F a G gráf feszítőfája (ffa), ha F egy G-ből éltörésekkel kapható fa. Ha G-nek van feszítőfája $\Leftrightarrow$ (akkor) összefüggő.

  Építsük fel a G gráfot az élek egymás utái behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!



Legyen G' a G gráf piros élei törlésével keletkező feszítő részgráf! G' biztosan körmentes lesz, hiszen a zöld élek sosem alkottak kört a korábbi élekkel. G' minden K' komponense részhalmaza G egy K komponensének. Ha $K' \neq K$, akkor G-nek van olyan éle, ami kilép K'-ből. Ezen élek mind pirosak K' definíciója miatt. Legyen e ezek közül az elsőnek kiszínezett. Az e él nem tudott kört alkotni a korábbn kiszínezettekel, így nem lehet piros: ellentmondás. Ezek szerint G egy G' komponensei megegyeznek.

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel.

Def: F a G gráf feszítőfája (ffája), ha F egy G-ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: (G-nek van feszítőfája) $\iff$ (G összefüggő)

Biz: $\Rightarrow$: Legyen F a G feszítőfája. F összefüggő, és $V(F) = V(G)$, tehát G bármely két csúcsa között vezet F-beli út.

$\Leftarrow$: Építsük fel G-t az álek egyenkénti behúzásával és kiszínezésével. Láttuk, hogy a zöld élek egy F erdőt alkotnak, aminek egyetlen komponense van, hiszen G is egy komponensű. Ezek szerint F olyan fa, ami G-ből éltörlésekkel kapható.

Megj: Ha egy nem feltétlenül összefüggő G gráf éleit a fenti módon kiszínezzük, akkor a zöld élek G minden komponensének egy F feszítőfáját alkotják. Nem összefüggő G esetén a zöld élek alkotta feszítő részgráf neve a G feszítő erdeje.

- Alapvágás, alapkör:

  A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ által létrehozott két komponens között futnak.

  Az $e \in E(G) \backslash E(F)$ éléhez tarozó alapkör pedig az $F + e$ köre.

  Megf: Tfh $f \in F$ és $e \in E(G) \backslash E(F)$. Ekkor ($F - f + e$ ffa) $\iff$ (f benne van e alapkörében) $\iff$ (e benne van f alap vágásában).

3 Tétel

Minimális költségű feszítőfa, mkffák struktúrája, **Kruskal-algoritmus** helyessége, villamos hálózathoz tartozó normál fa keresése.

- **Minimális költségű feszítőfa:** Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(F)$.
  Az $F \subseteq E$ élhalmaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
  (1) (V, F) a G feszítőfája, és
  (2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára. (akkor mkffa ha ennek a feszítőfának a legkisebb a költsége az összes többi feszítőfa közül)

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes.} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \qquad F := F_m$$

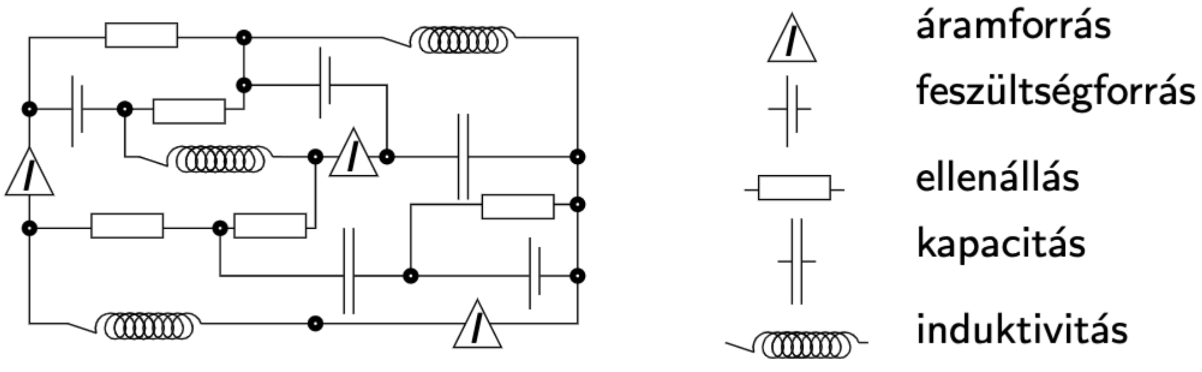
  (1 eset) az élt bevesszük a ffába, ha az nem alkotna kört
  (2 eset) ha az él bevételével kör keletkezne, nem vesszük be a ffa-ba

- **Minimális költségű feszítőfa:** olyan $F \in E$ élhalmaz, amire (V, F) fa, és $k(F)$ minimális.

- Mkkfák struktúrája: $G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nak: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.
  Megf: A G gráfon futtotott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.
  Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_l\}, k(f_1) \leq k(f_2) \leq \cdots \leq k(f_l)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_l\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \cdots \leq k(f'_l)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq l$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.
  Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.
  Köv: (2) Az F' élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje G-nek, ha $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \leq 0$-ra.
  Biz: A Lemma bizonyítja az elégségességet.

- **Kruskal algoritmus:**
  - Input: $G = (V, E)$ gráf, és $k : E \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény.
  - Output: minimális költségű feszítőfa.
  - Működés: minden lépésben megépítjuk a legolcsóbb élt, ami nem hoz létre kört. Mohó algoritmus, mert csak azzal törődik, ami éppen a legalacsonyabb költségű. Az így keletkezett fa a G gráf egy minimális költségű (súlyú) feszítőfája.
  - Helyességének bizonyítása: tegyük fel, hogy az algoritmus helytelen, ekkor létezik egy f él, amit e helyére bevéve olcsóbb feszítőfát kapunk. Ekkor azonban f költsége kisebb, mint e költsége, így f-et az algoritmussal korábban már ellenőriztük, tehát ellentmondásra jutottunk, azaz a feszítőfa minimális költségű.

- Villamos hálózatohoz tartozó normál fa keresése:



  - Tegyük fel, hogy egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tulajdonképpen egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Az, hogy mi történik (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), a Kirchoff- ill. Ohm-törvényekkel írható le.

- **Csomóponti törvény:** a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.
- **Huroktörvény:** a gráf tetszőleges köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.
- Mikor "értelmes" egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Bizonyítható, hogy ha a fenti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat "értelmes". Ennek a a bizonyítéka a normál fa: G olyan feszítőfája, ami minden feszültségforrást tartalmaz, de egyetelen árramforrást sem (és mindemellett a legtöbb kapacitást és a lehető legkevesebb induktivitás tartalmazza).
- **Normál fa keresése:** fesz.forrás (1), kapacitás (2), ellenállás (3), induktivitás (4), áramforrás (5) élköltségekhez keressünk mkffát! Ha ez tartalmaz áramforrást, vagy nem tartalmaz minden feszültségforrást, akkor nincs normál fa, egyébként a mkffa egy normál fa és egyértelmű a megoldás "értelmes" a hálózat.

4 Tétel

Általános gráfbejárás: **a csúcsok állapotváltozása, a bejárás általános lépései**, a bejáráshoz tartozó sorrend ill. az élek osztályozása bejárás után. A **BFS** és tulajdonságai, legrövidebb utak fájának létezése.

- Általános gárfbejárás: A gráfbejárási algoritmus az inputgráf csúcsait és éleit fedezi fel. Minden csúcs az eléretlen → elért → befejezett állapotokat veszi fel. A bejárás akkor ér véget, amint minden csúcs befejezetté vált.

  1. Van elért csúcs. Választunk egyet, mondjuk u-t.
     (1a) Ha van olyan uv él, amire v eléretlen, akkor v elérté válik.
     (1b) Ha nincs ilyen uv él, akkor u befejezetté válik.
  2. Nincs elért csúcs.
     (2a) Ha van eléretlen u csúcs, akkor u-t elértté tesszük.
     (2b) Ha nincs eléretlen csúcs (azaz minden csúcs befejezett), akkor END.

  Az élek osztályozása:

  faél: Olyan él, ami mentén egy csúcs elértté vált.

  uv **előreél:** nem faél, de u-ból v-be faélekből irányított út vezet.

  uv **visszaél:** v-ből u-ba faélekből irányított út vezet.

  keresztél: minden más él (u és v közt nincs leszármazott viszony).

- **Szélességi bejárás (BFS) szabálya:**
  Az 1. esetben mindig a legkorábban elért u-t választjuk.

  Input: $G = (V, E)$ (ir/ir.tatlan) gráf, ($v \in V$ gyökérpont[1]).

  Output:

  (1) A csúcsok elérési és befejezési sorrendje.

  (2) Az élek osztályozása:

  faél: Olyan él, ami mentén egy csúcs elértté vált.

  uv **előreél:** nem faél, de u-ból v-be faélekből irányított út vezet.

  uv **visszaél:** v-ből u-ba faélekből irányított út vezet.

  keresztél: minden más él (u és v közt nincs leszármazott viszony).

  (3) A **bejárás fája:** a faélek alkotta részgráf. (A bejárás fája valójában egy gyökereiből kifelé irányított erdő.)

  Megf: Irányítatlan esetben az előreél és a visszaél ugyanazt jelenti.

  Terminológia: Ha a bejárás fájában u-ból v-be irányított út vezet, akkor u a v őse és v az u leszármazottja. A faél és az előreél tehát ősből leszármazottba, a visszaél leszármazottból ősbe vezet.

  A bejárás során kialakul a csúcsok egy elérési ill. egy befejezési sorrendje, továbbá minden csúcshoz feljegyezzük azt is, hogy melyik él mentén értük el (ha van ilyen él). Ez utóbbi élek (faélek) alkotják a bejárás fáját (ami egyrészt irányított, másrészt pedig erdő). A G gráf további uv éle előreél ⇒, ha u a bejárás fájában a v őse, ha u a v leszármazottja, akkor visszaél. Minden más pedig keresztél. (Irányítatlan gráf bejárásakor minden élt oda-vissza irányított élnek tekintünk.)

- A BFS tulajdonságai

  Nézzük meg egy **irányított** gráf BFS bejárását is.

  Állítás: Tfh $G = (V, E)$ BFS bejárása után a csúcsok elérési sorrendje $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

  (1) Ha $i < j$, akkor v_i-t hamarabb fejezük be, mint v_j-t, továbbá v_i gyerekei megelőzik v_j gyerekeit az elérési sorrendben.

  Biz: A v_i-t befejezésének pillanatában v_i minden gyereke elért, de v_j-nek még egy gyereke sem az. Ezért v_j gyerekeit a v_i csúcs befejezése után érjük el, majd ezt követően fejezzük be v_j-t.

  (2) **Az elérési és befejezési sorrend (BFS esetén) megegyezik.**

[1] A gyökérben kezdetben elért állapotú, ezért kivétel az általános szabály alól.

Biz: Ha v_i-t korábban érjük el, mint v_j-t, akkor (1) miatt v_i-t korábban is fejezzük be v_j-nél. Ezért bármely két csúcs sorrendje ugyanaz az elérési sorrendben mint befejezési sorrendben. Tehát az elérési sorrendnek meg kell egyeznie a befejezési sorrenddel.

(3) **Gráfél nem ugorhat át faélt:** ha $k < i < j \leq l$ és v_iv_j faél, akkor v_kv_l nem lehet gráfél.

Biz: Ha $v_kv_l \in E(G)$, akkor v_l szülője v_k vagy egy v_k-t megelőző csúcs. (1) miatt v_j szülője sem következhet v_k után, vagyis v_i nem lehet v_j szülője.

(4) **Nincs előreél.** (Irányítatlan eset: csak faél és keresztél van.)

Biz: Indirekt: ha v_iv_j előreél lenne, akkor v_i-ből v_j-be irányított út vezetne a BFS-fában, és v_iv_j ennek a faélekből álló útnak az utolsó élét átugraná.

(5) Ha a BFS-fában k-élű irányított út vezet u-ból v-be, akkor G-ben nincs k-nál kevesebb élű uv-út.

Biz: Ha lenne a BFS fa-beli útnál kevesebb élű út G-ben, akkor lenne olyan gráfél, ami faélt ugrik át.

(6) **A BFS-fa egy legrövidebb utak fája:** a BFS-fa v_1 gyökeréből bármely v_i csúcsba vezető faút a G egy legkevesebb élű v_1v_i-útja.

- Legrövidebb utak

  Def: Adott G (ir) gráf és $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény esetén egy P út hossza a P éleinek összhossza: $l(P) = \sum_{e \in E(P)} l(e)$.

  Az u és v csúcsok távolsága a legrövidebb uv-út hossza: $dist_l(u, v) := \min\{l(P) : P\ uv\text{-út}\}$ ($\nexists uv$-út$\Rightarrow$ $dist_l(u, v) = \infty$.) Az l hosszfüggvénye nemnegatív, ha $l(e) \geq 0$ teljesül minden e élre. Az l hosszüggvény konzervatív, ha G-ben $\nexists$ negatív összhosszú ir. kör.

  Cél: Legrövidebb út keresése irányított/irányítatlan gráfban.

  Megf: Ha $l(e) = 1$ a G minden e élére, akkor $l(P)$ a P élszáma. Ezért a BFS-fa minden gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből, azaz a szélességi bejárás tekinthető egy legrövidebb utat kereső algoritmusnak is.

  Def: Adott G (ir) gráf, $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény és $r \in V(G)$. (r, l)-felső becslés olyan $f : V(G) \to \mathbb{R}$ függvény, ami felülről becsli minden csúcs r-től mért távolságát: $dist_l(r, v) \geq f(v) \forall v \in V(G)$.

  Triviális (r, l)-felső becslés: $f(v) = \begin{cases} 0 & v = r \\ \infty & v \neq r \end{cases}$

  Pontos (r, l)-felső becslés: $f(v) = dist_l(r, l)\ \forall v \in V(G)$.

5 Tétel

Gráfút hossza, gráfcsúcsok távolsága, nemnegatív és konzervatív hosszfüggvény, triviális és pontos (r, l)**-felső becslés, élmenti javítás. Dijkstra-algoritmus működése**, Ford-algoritmus helyessége és lépésszáma. Legrövidebb utak fájának létezése.

- Gráfút hossza, gráfcsúcsok távolsága, nemnegatív és konzervatív hosszfüggvény, triviális és pontos (r, l)**-felső becslés, élmenti javítás.**

  Def: Adott G (ir.) gráf és $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény esetén egy P út hossza a P éleinek összhossza: $l(P) = \sum_{e \in E(P)} l(e)$.

  Az u és v csúcsok távolsága a legrövidebb uv-út hossza: $dist_l(u, v) := \min\{l(P) : P\ uv\text{-út}\}$ ($\nexists uv$-út$\Rightarrow$ $dist_l(u, v) = \infty$.) Az l hosszfüggvénye nemnegatív, ha $l(e) \geq 0$ teljesül minden e élre. Az l hosszvüggvény konzervatív, ha G-ben $\nexists$ negatív összhosszú ir. kör.

  Cél: Legrövidebb út keresése irányított/irányítatlan gráfban.

  Megf: Ha $l(e) = 1$ a G minden e élére, akkor $l(P)$ a P élszáma. Ezért a BFS-fa minden gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat, azaz a szélességi bejárás tekinthető egy legrövidebb utat kereső algoritmusnak is.

  Def: Adott G (ir) gráf, $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény és $r \in V(G)$. (r, l)-felső becslés olyan $f : V(G) \to \mathbb{R}$ függvény, ami felülről becsli minden csúcs r-től mért távolságát: $dist_l(r, v) \geq f(v) \forall v \in V(G)$.

  Triviális (r, l)-felső becslés: $f(v) = \begin{cases} 0 & v = r \\ \infty & v \neq r \end{cases}$

  Pontos (r, l)-felső becslés: $f(v) = dist_l(r, l)\ \forall v \in V(G)$.

- Konzervatív hosszfüggvény

  Adott $G = (V, E)$ irányított gráf és egy $l : E \to \mathbb{R}$ élhosszfv.

  Egy G-beli irányított út hossza az út éleinek összhossza, $dist_l(n, v)$ pedig az irányított uv-utak közül a legrövidebb hosszát jelöli.

  Az l hosszfv konzervatív ha nincs G-ben negatív összhosszúságú irányított kör.

  Adott $G = (V, E)$ irányított gráf $r \in v$ és egy $l : E \to \mathbb{R}$ élhosszfv. Az $f : v \to \mathbb{R}$ függvényt (r, l)-felső becslésnek nevezzük, ha $f(r) = 0$ és $f(v) \leq dist_l(r, v)$ teljesül G minden v csúcsára. Az $e = uv$ élmenti javítás esetén a $f(v)$ értéket a $min\{f(v), f(u) + l(uv)\}$ értékkel helyettesíthetjük.

  (1) Ha l konzervatív akkor tetsz. (r, l)-fb. élmenti javítása (r,l)-fb-t ad.

  (2) Ha az $f(r, l)$ felső becsléshez nincs érdemi élmenti javítás, akkor $f(v) = dist_l(r, v)\ \forall v \in V$.

- **Az élmenti javítás**

  Def: Tfh f egy (r, l)-felső becslés és $uv \in E(G)$. Az f uv-elméleti javítása az az f', amire

$$f'(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq v \\ min\{f(v), f(u) + l(uv)\} & z = v \end{cases}$$

  Megf: Tfh az $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény konzervatív és $f(r) = 0$. Ekkor

  (1) Az $f(r, l)$-felső becslés élmenti javítása mindig (r, l)-felső becslést ad.

  Biz: Azt kell megmutatni, hogy van olyan rv-út, aminek a hossza legfeljebb $f(u) + l(uv)$. Ha egy legrövidebb ru-utat kiegészítünk az uv éllel, akkor olyan rv-élsorozatot kapunk, aminek az összhossza $dist_l(r, u) + l(uv) \leq f(u) + l(uv)$. „Könnyen” látható, hogy az élhosszfüggvény konzervativitása miatt ha van x összhosszúságú rv-élsorozat, akkor van legfeljebb x összhosszúságú rv-út is. Ezek szerint van legfeljebb $f(u) + l(u, v)$ hosszúságú uv-út is, azaz az érdemi élmenti javítás után szintén (r, l)-felső becslést kapunk.

  (2) $f(r, l)$-felső becslés (pontosan) $\iff$ (f-en $\nexists$ érdemi élmenti javítás).

  Biz: $\Rightarrow$: Ha f pontos, akkor biztosan nincs rajta érdemi élmenti javítás: ha volna, akkor egy felső becslés a pontos érték alá csökkenne, így az élmenti javítás nem (r, l)-felső becslést eredményezne. $\Leftarrow$: Legyen $v \in V(G)$ tetsz, és legyen P egy legrövidebb rv-út. A P egyik éle mentén sincs érdemi élmenti javítás, ezért P minden u csúcsára pontos a felső becslés: $f(u) = dist_l(r, u)$. Ez igaz az út utolsó csúcsára, a tetszőlegesen választott v-re is.

- **Dijkstra algoritmus működése:**
  - **Input**: $G = (V, E)$ irányított gráf, $l : E \to \mathbb{R}^+$ nemnegatív hosszfüggvény, $r \in V$ gyökér
  - **Output**: $dist_l(r, v)$ minden $v \in V$-re.
  - **Működés**: Kezdetben $U_0 = \emptyset, f(r) = 0$ és $f(v) = \infty$, ha $v \neq r$.
    Az algoritmus i-dik fázisában $(i = 1, 2, ..., |v|)$ a következő történik.
    1. Legyen u_i a v csúcs a $v \backslash u_{i-1}$ halmazból, amelyre $f(r)$ minimális és legyen $u_{i-1} \cup u_i$.
    2. Végezzünk élmenti javításokat minden u_i-ből kivezető $u_i x$ élen.

    Az output a $|v|$-dik fázis utáni f függvény. Szokás megjelölni a végső $f(v)$ értékeket beállító éleket. Ha az output az $f(r, l)$-felső becslés, akkor
    (1) $f(u_i) \leq f(u_{i+1})$ $\forall 1 \leq u$-re.
    (2) $f(u_i) \leq f(u_2) \leq \cdots \leq (u_n)$
    (3) élmentijavítás nem változtat f-n.
  - A Dijkstra-algoritmus helyesen működik, azaz $dist_l(r, v) = f(v) \forall v \in V$ teljesül. Az algoritmus során megjelölt élek egy legrövidebb utak fáját alkotják G-ben: az r gyökérből minden r-ből elérhető csúcshoz vezet olyan legrövidebb út is, ami csak megjelölt éleket tartalmaz.
  - A Dijkstra-algoritmus lépésszáma legfeljebb. $konst \cdot (n^2 + m)$, ahol $n = |v|$ $m = |E|$.

Dijkstra-algoritmus: Input: $G = (V, E), l : E \to \mathbb{R}_+, r \in V$. Output: $dist_l(r, v) \forall v \in V$ Működés: $U_0 := \emptyset$, f_0 a triviális. (r, l)-felső becslés.

Az i-dik fázis:

1. Legyen $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$, ahol u_i olyan csúcs a $V \setminus U_{i-1}$ halmazból, amelyre $f_{i-1}(v)$ minimális.

2. $f_i : f_{i-1}$ élmenti javítása minden U_i-ből kivezető $u_i x$ élen. Output: $f_{|V|}$. Megjelöljük a végső $f_{|V|}(V)$ értékeket beállító éleket.

Megf: Ha a v-be vezet megjelölt él, akkor vezet r-ből v-be megjelölt éleken út, és ennek hozza megegyezik $f_{|V|}(v)$-vel.

Biz: $f_{|V|}(r) = 0$, és a megjelölt élek mentén haladva az $f_{|V|}$ érték az élhosszal növekszik.

- **Dijkstra helyessége**

  Megf: Tfh $u_1, u_2, \ldots, u_n$ a G csúcsainak sorrendje a Dijkstra-algoritmus végrehajtása után.

  (1) Ekkor $f_{|V|}(u_i) \leq f_{|V|}(u_{i+1})$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq n$.

  Biz: Az i-dik fázisban $f_i(u_i) \leq f_i(u_{i+1})$ teljesült az u_i választása miatt. Ezek után $f_i(u_i)$ már nem változott: $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i)$. Ugyan $f_i(u_{i+1})$ még csökkenhetett, de csak az $u_i u_{i+1}$ él mentén történt javítás miatt, hiszen az $(i + 1)$-dik fázisban u_{i+1} bekerült az U_i halmazba, és a hozzá tartozó (r, l)-fb már nem csökken tovább. Ekkor $f_{i+1}(u_{i+1}) = min\{f_i(u_{i+1}), f_i(u_i) + l(u_i u_{i+1})\} \geq f_i(u_i)$, mivel $l(u_i u_{i+1}) > 0$. Ezért $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i) \leq f_{i+1}(u_{i+1}) = f_{|V|}(u_{i+1})$

  (2) $f_{|V|}(u_1) \leq f_{|V|}(u_2) \leq \cdots \leq f_{|V|}(u_n)$

  (3) A Dijsktra-algoritmus outputjaként kaptt $f_{|V|}$-n élmenti javítás nem tud változtatni.

  Biz: Tegyük fel, hogy $u_i u_j \in E(G)$ a G egy tetszőleges éle. Ha $i > j$, akkor (2) miatt $f_{|V|}(u_i) \geq f_{|V|}(u_j)$, ezért az $u_i u_j$ mentén történő javítás nem tudja $f_{|V|}(u_j)$-t csökkenteni, hisz $l(u_i u_j)$ pozitív. Ha pedig $i < j$, akkor az i-dik fázisban megtörtént az $u_i u_j$ mentén történő javítás, és ezt követően $f(u_i)$ nem változott, azaz $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i)$. A másik (r, l)-felső becslés pedig csak tovább csökkenhetett a későbbi émj-ok során $f_{|V|}(u_j) \leq f_i(u_j)$. Ezért az $u_i u_j$ él mentén sem az i-dik fázisban, sem később nincs érdemi javítás.

  Tétel: A Dijsktra-algoritmus helyesen működik, azaz G minden csúcsára igaz, hogy $dist(r, v) = f_{|V|}(v)$.

  Biz: A Dijsktra-algoritmus az f_0 triviális (r, l)-felső becslésből indul ki, és élmenti javításokat alkalmaz. Így minden f_i (speciálisan $f_{|V|}$ is) (r, l)-felső becslés lesz. A fenti (3)-as megfigyelés miatt $f_{|V|}$-n nem végezhető érdemi élmenti javítás. Ezért egy korábbi (2)-es megfigyelés miatt $f_{|V|}$ pontos (r, l)-felső becslés, azaz $f_{|V|}(v) = dist_l(r, v) \forall v \in V(G)$.

- Könnyű olyan példát találni, ahol a Dijkstra-algoritmus konzervatív hosszfüggvény esetén hibás eredményt ad. Azonban konzervatív hosszfüggvény esetén is igaz, hogy
  - (r, l)-fb élmenti javítása (r, l)-fb-t eredményez, ill.
  - ha egy (r, l)-fb-ben nem végezhető erdemi élmenti javítás, akkor pontos.

konzervatív hosszfüggvény esetén is hasonló startégiát követünk: Élmenti javításokat végzünk a triviális (r, l)-fb-en, míg van érdemi javítás.

Ford-algoritmus:
Input: $G = (V, E)$ irányított, $l : E \to \mathbb{R}$ konzervatív hosszfüggvény, $r \in V$ gyökérpont.
Output: $dist_l(r, l)$ minden $v \in V$
Működés: Legyen $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Kezdetben legy $f(r) = 0$ és $v \neq r$ esetén $f(v) = \infty$, Az i-dik fázis $i = 1, 2, \ldots, n-1$ esetén abból áll, hogy elvégezzük az $e_1, e_2, \ldots, e_m$ élek menti javításokat. A végén az OUTPUT: $dist_l(r, v) = f(v)$ minden v-re. $(dist_l(r, v) = f_{n-1}(v) \forall v \in V)$

Állítás: Ha l konzervatív, akkor $dist_l(v)$ $v \in V$-re.

Biz: $f_1(v) = dist_l(r, v)$ ha $\exists \leq$ 1-élű legrövidebb rv-út. $f_2(v) = dist_l(r, v)$ ha $\exists \leq$ 2-élű legrövidebb rv-út. $\ldots$ $f_{n-1}(v) = dist_l(r, v)$ ha $\exists \leq (n-1)$-élű legrövidebb rv-út. Tehát $f_{n-1}(v) = dist_l(r, v) \forall v \in V$.

Megf: Ha $f_i = f_{i-1}$, akkor a Ford-algoritmust az i-dik fázis után be lehet fejezni, hisz nincs érdemi élmenti javítás, így $f_{n-1} = f_i$.

Megj: Az $f_{n-1}(v)$-t beállító élek legrövidebb utak fáját alkozják.

Biz: A Dijkstra esethez hasonló. Tetszőleges v csúcsból visszafelé követve a végső értékeket beállító éleket $f_{n-1}(v)$ hosszúságú rv-utat találunk.

"Lépésszámanalízis": Ha a $|V(G)| = n$ és $|E(G)| = m$, akkor minden fázisban $\leq m$ élmenti javítás, ami $konst \cdot m$ lépés. Ez összesen $\leq konst \cdot (n-1) \cdot m \leq konst \cdot n^3$ lépés, az algoritmus hatékony.

6 Tétel

Mélységi keresés és alkalmazásai (fellépő éltípusok, mélységi- és befejezési számozásból az éltípus meghatározása, irányított kör létezésének eldöntése DFS-sel).

- Általános gárfbejárás: A gráfbejárási algoritmus az inputgráf csúcsait és éleit fedezi fel. Minden csúcs az eléretlen → elért → befejezett állapotokat veszi fel. A bejárás akkor ér véget, amint minden csúcs befejezetté vált.

  1. Van elért csúcs. Választunk egyet, mondjuk u-t.
     (1a) Ha van olyan uv él, amire v eléretlen, akkor v elérté válik.
     (1b) Ha nincs ilyen uv él, akkor u befejezetté válik.
  2. Nincs elért csúcs.
     (2a) Ha van eléretlen u csúcs, akkor u-t elértté tesszük.
     (2b) Ha nincs eléretlen csúcs (azaz minden csúcs befejezett), akkor END.

  Az élek osztályozása:

  faél: Olyan él, ami mentén egy csúcs elértté vált.

  uv **előreél:** nem faél, de u-ból v-be faélekből irányított út vezet.

  uv **visszaél:** v-ből u-ba faélekből irányított út vezet.

  keresztél: minden más él (u és v közt nincs leszármazott viszony).

- **Mélységi keresés (DFS (Depth First Search))**

  (A mélységi bejárás avagy DFS alatt olyan gráfbejárást értünk, amikor mindig a legutolsónak elért csúcsból kerül elérésre a soron következőnek elért csúcs. Az elérési illetve befejezési sorrendből adódik minden v csúcshoz egy $m(v)$ mélységi ill. $b(v)$ befejezési szám.)

  "Mélységi bejárás (DFS): A bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az $\boxed{1.}$ esetben.

  Mélységi és befejezési számozás: DFS után $m(v)$ ill. $b(v)$ a v csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

  Megj: A BFS konkrét megvalósításában szükség van arra, hogy az elért csúcsokat úgy tároljuk, hogy könnyű legyen kiválasztani az elért csúcsok közül a legkorábban elértet. Erre egy célszerű adatstruktúra a *sor* (avagy *FIFO lista* (First In First Out)). Ha a BFS megvalósításában ezt az adatstruktúrát *veremre* (más néven *LIFO listára* (Last In First Out)) cseréljük, akkor a DFS egy megvalósítása adódik.

  Megf: Tegyük fel, hogy a G gráf éleit DFS után osztályoztuk.

  (1) Ha uv faél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

  Biz: v-t u-ból értük el, ezért $m(u) < m(v)$. A v elérésekor u és v elért állapotúak. A DFS szerint v-t u előtt fejezzük be.

  (2) Ha uv előreél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

  Biz: u-ból v-be faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, befejezési csökken.

  (3) Ha uv visszaél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) < b(v)$.

  Biz: v-ből u-ba faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, a befejezési csökken.

  (4) Ha uv keresztél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

  Biz: $m(u) < m(v)$ esetén a DFS miatt v az u leszármazottja lenne. Ezért $m(u) > m(u)$. Ha u-t a v befejezése előtt érnénk el, akkor u a v leszármazottja lenne. Ezért az alábbi sorrendben történik u és v evolúciója: v elérése, v befejezése, u elérése, u befejezése.

  (5) Irányítatlan gráf DFS bejárása után nincs keresztél.

  Biz: Indirekt. Ha uv keresztél, akkor (4) miatt $m(u) > m(v)$, továbbá vu is keresztél, ezért $m(v) > m(u)$. Ellentmondás.

  (6) Ha DFS után van visszaél, akkor G tartalmaz irányított kört.

  Biz: A DFS fa visszaélhez tartozó alapköre a G egy irányított köre.

  (7) Ha DFS után nincs visszaél, akkor G-ben nincs irányított kör.

Biz: Bármely irányított körnek van olyan uv éle, amire $b(u) < b(v)$. Ez az él csak visszaél lehet.

A mélységi bejárás lépésszáma lineáris, azaz van olyan c konstans, hogy tetszőleges u csúcsú, m élű gráf DFS-éhez legfeljebb $c(n + m)$ lépés szükséges.

- **Directed Acyclic Graphs**

  Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf aciklikus (más néven DAG), ha G nem tartalmaz irányított kört.

  Példa: DAG-ot úgy kaphatunk, hogy egy G irányítatlan gráf csúcsait csupa különböző számmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobba irányítunk.

  Ha ugyanis lenne az így megirányított gráfban irányított kör, akkor az élei mentén a számok végig növekednének, ami lehetetlen. Azt fogjuk igazolni, hogy a fenti példa minden DAG-ot leír.

  Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcsainak topologikus sorrendje alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba. $(V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, v_i v_j \in E \Rightarrow i < j)$

  Tétel: (G irányított gráf DAG) $\Leftrightarrow$ ($V(G)$-nek $\exists$ topologikus sorrendje).

  Biz: Tegyük fel, hogy $\exists$ toplogikus sorrend. Láttuk, hogy G ekkor DAG. ✓

  Biz: Most tegyük fel, hogy G DAG, és futtassunk rajra egy DFS-t. Láttuk, hogy a DFS után nem lesz visszaél, ezért minden uv irányított élre $b(u) > b(v)$ teljesül. Ezért a csúcsok befejezési sorrendjének megfordítása a G csúcsainak egy topologikus sorrendje.

  Köv: Irányított gráf aciklikussága DFS-sel gyorsan eldönthető: ha van visszaél, akkor a visszaél DFS-fabeli alapköre G egy irányított köre, így G nem DAG. Ha pedig nincs visszaél, akkor a fordított befejezési sorrend a G egy topologikus sorrendje, G tehát DAG.

  Megj: DAG-ban topologikus sorrendet forráskeresések és forrástörlések alkalmazásával is találhatunk.

7 Tétel

DAG, jellemzése, **topologikus sorrend** keresése. Leghosszabb utak keresése, **PERT-módszer**, kritikus utak és tevékenységek.

- **DAG (Direct Acyclic Graphs)**, jellemzése

  Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf aciklikus (más néven DAG), ha G nem tartalmaz irányított kört.

  Példa: DAG-ot úgy kaphatunk, hogy egy G irányítatlan gráf csúcsait csupa különbözőszámmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobba irányítunk.

  Ha ugyanis lenne az így megirányított gráfban irányított kör, akkor az élei mentén a számok végig növekednének, ami lehetetlen. Azt fogjuk igazolni, hogy a fenti példa minden DAG-ot leír.

- **topologikus sorrend** keresése

  Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcsainak topologikus sorrendje alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba. $(V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, v_i v_j \in E \Rightarrow i < j)$

  Tétel: (G irányított gráf DAG) $\Leftrightarrow$ ($V(G)$-nek $\exists$ topologikus sorrendje).

  Biz: Tegyük fel, hogy $\exists$ toplogikus sorrend. Láttuk, hogy G ekkor DAG. ✓

  Biz: Most tegyük fel, hogy G DAG, és futtassunk rajra egy DFS-t. Láttuk, hogy a DFS után nem lesz visszaél, ezért minden uv irányított élre $b(u) > b(v)$ teljesül. Ezért a csúcsok befejezési sorrendjének megfordítása a G csúcsainak egy topologikus sorrendje. □

  Köv: Irányított gráf aciklikussága DFS-sel gyorsan eldönthető: ha van visszaél, akkor a visszaél DFS-fabeli alapköre G egy irányított köre, így G nem DAG. Ha pedig nincs visszaél, akkor a fordított befejezési sorrend a G egy topologikus sorrendje, G tehát DAG.

  Megj: DAG-ban topologikus sorrendet forráskeresések és forrástörlések alkalmazásával is találhatunk.

- Leghosszabb utak keresése

  Ötlet: Az $l'(uv) = -l(uv)$ élhosszokkal a leghosszabb utak legrövidebbekké válnak. Olyanokat pedig tudunk keresni.

  Gond: A módszerünk csak konzervatív élhosszokra működik. Irányítatlan gráfon ez nemnegatív élhosszokat jelent, ezért ez az ötlet itt nem segít. Irányított esetben nem baj a negatív élhossz, feltéve, hogy G DAG. Ekkor Ford, Floyd bármelyike használható.

  Jó hír: Van egy még gyorsabb módszer: a dinamikus programozás. Ennek segítségével tetszőleges G DAG minden v csúcsához ki tudjuk számítani a v-be vezető leghosszabb utat. (Sőt! ...)

  Leghosszabb út DAG-ban:

  Input: $G = (V, E) DAG, l : E \to \mathbb{R}$.

  Output: $max\{l(P) : Pv\text{-be vezető út}\}$ minden $v \in V$ csúcsra.

  Működés:

  $\boxed{1}$ $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ topologikus sorrend meghatározása.

  $\boxed{2}$ $i = 1, 2, \ldots, n : f(v_i) = max\{max\{f(v_j) + l(v_j v_i) : v_j v_i \in E\}, 0\}$

  Output: $f(v)\ \forall v \in V$

  Helyesség: Ha a v_i-be vezető leghosszabb út utolsó előtti csúcsa v_j, akkor $f(v_i) = f(f_j) + l(v_j v_i)$.

  Megj: Ha a fenti algoritmusban minden csúcsra megjelöljük az $f(v)$ értéket beállító élt (éleket), akkor a megjelölt élek minden v csúcsba megadnak egy leghosszabb utat. Sőt: minden v-be vezető leghosszabb megkapható így.

- **A PERT probléma**

  Egy $a, b, \ldots$ tevékenységekből álló projektet kell végrehajtanunk.

  Precedeniafeltételek: bizonyos (u, v) párok esetén előírás, hogy az u tevékenységet a v előtt kell elvégezni, ezért v az u kezdetét követően $c(uv)$ időkorlát elteltével kezdhető.

  Cél: minden v tevékenységhez olyan $k(v) \geq 0$ kezdési időpont meghatározása, ami nem sérti a precerenciafeltételeket, és a projekt végrehajtási ideje (a legnagyobb $k(v)$ érték) minimális.

  G **irányított gráf** csúcsai a tevékenységek, élei pedig a precedenciafeltételek, az uv él hossza $c(uv)$.

Megf:

(1) Ha G nem DAG, akkor a projekt nem hajtható végre.

(2) Ha G DAG, akkor minden v tevékenység legkorábbi kezdési időpontja a v-be vezető leghosszabb út hossza.

Köv: A PERT probléma megoldása nem más, mint a G DAG minden csúcsára az oda vezető leghosszabb út meghatározása.

- Kritikus utak és tevékenységek

  Terminológia: G leghosszabb útja kritikus út, amiből több is lehet. Kritikus út csúcsai a kritikus tevékenységek.

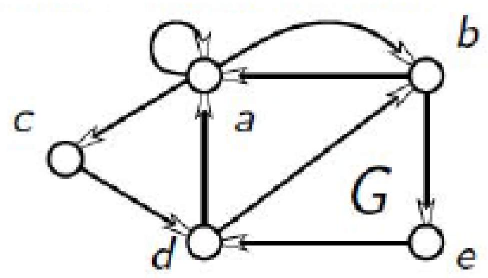
  Megf: Ha egy kritikus tevékenység nem kezdődik el a lehető legkorábbi időpontban, akkor az egész projekt végrehajtása csúszik.

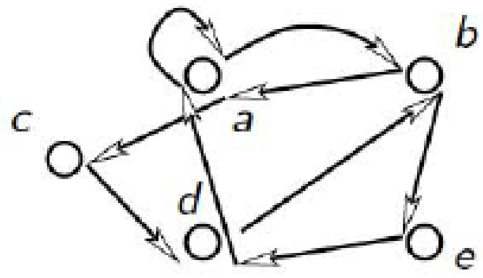
8 Tétel

Euler-séta és körséta létezésének szükséges és elégséges feltétele. **Hamilton-kör és út** létezésére szükséges, ill. elégséges feltételek: komponensszám ponttörlés után (Petersen-gráf) **Dirac, Ore tételei**, gazdag párok, hízlalási lemma, Chavátal-lezárt.

- **Euler-séta és körséta** létezésének szükséges és elégséges feltétele

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.





Megj:

(1) A fenti definíció 2×2 fogalmat definiál: az Euler-sétát és az Euler-körsétát irányítatlan és irányított gráfra is.

(2) Szokás a definíciót abban a formában kimondani, hogy az Euler-(kör)séta G minden élét **pontosan** egyszer tartalmazza. Tekintettel arra, hogy egy séta nem mehet át kétszer ugyanazon az élen, ez redundáns kívánalom, hiszen következménye az általunk használt definíciónak. Használatos ezen kívül az Euler-kör ill. Euler-út megnevezés is a fenti fogalmakra.

(3) Irányítatlan Euler-séta: "G egy vonallal lerajzolható".

Cél: Gyors módszer az Euler-(kör)séta megtalálására, létezésének ellenőrzésére.

Megf:

(1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

Biz:

(a) Ha G két különböző gyenge komponense is tartalmaz élt, akkor G-nek nem lehet Euler-körsétája, hisz egyetlen séta sem tartalmazhat élt két különböző gyenge komponensből. ✓

(b) Ha végighaladunk az Euler-körsétán, akkor a v csúcsba pontosan annyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk onnan. A körséta G minden élét pontosan egyszer érinti: $\rho(v) = \delta(v)$

Megf:

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

(b) G-ben minden fokszám páros.

Biz: Az irányított esethez hasonló.

(a) Egy (kör)séta nem tartalmazhatja két különböző komponensnek is $1-1$ élét, és

(b) az Euler-körsétát követve tetszőleges v csúcsba ugyanyannyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk belőle. Ezért $d(v)$ páros.

Megf:

(3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

(b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Biz:

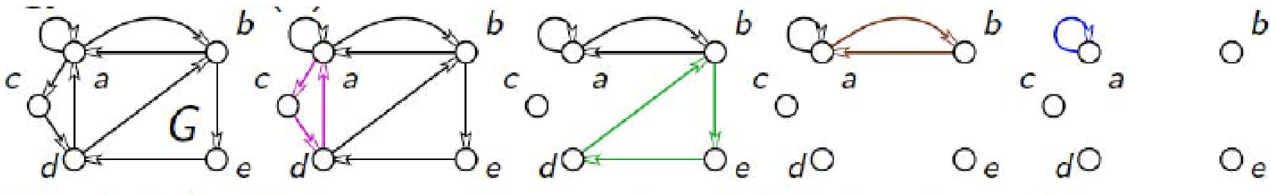
(a) ✓.

(b) Tegyük fel, hogy G Euler-sétája egy uv-séta. Ekkor minden $w \neq u, v$ csúcsra $d(w)$ kétszer annyi, mint ahányszor az Euler-séta w-n áthalad, vagyis $d(w)$ páros. Ha $u = v$, akkor az Euler-séta körséta, így $d(u)$ is páros (2b) miatt. Ha pedig $u \neq v$, akkor u-ból 1-gyel többször lépünk ki, mint be, v-be 1-gyel többször lépünk be, mint ki, vagyis $d(u)$ és $d(v)$ páratlanok.

Megj: A fenti megfigyelés segítségével bizonyos esetekben azonnal látszik, hogy G-nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

G irányítatlan Euler-gráf, ha G minden v csúcsra $d(v)$ páros.

Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (irányított) kört alkossanak minden színre.

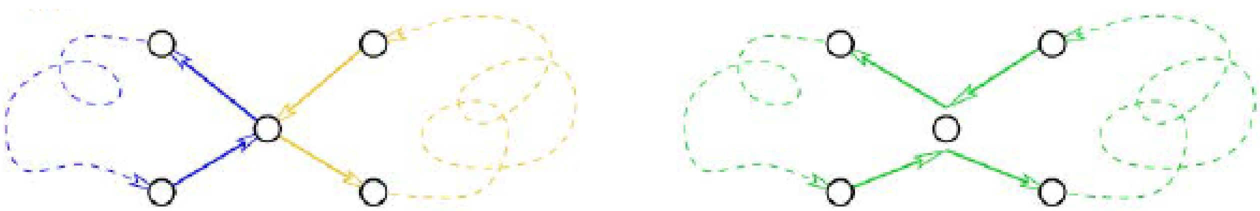


Biz: Induljunk el G egy éle mentén, és haladjunk tovább az (irányított) élek mentén. Mivel G Euler, ezért sosem akadunk el: előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, így találunk egy C_1 kört. C_1 éleit törölve $G - C_1$ Euler-gráf marad. Ismételjük meg ezt a $G - C_1$ gráfon. Így G minden éle előbb-utóbb sorra kerül és megkapja a $C_2, C_3, \ldots$ köröket. Ezért $E(G) = C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ diszjunkt körök uniójára bomlik fel. Színezzük ki a C_1 kör éleit az i-dik színnel.

Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő)

(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve összefüggő)

Biz: $\Rightarrow$: Láttuk. ✓ $\Leftarrow$: A Lemma miatt $E(G)$ felbontható körökre, tehát körsétákra is. Ha a körséták száma legalább 2, akkor választunk két körsétát, aminek van közös csúcsa és e csúcs mentén "összevarjuk" azokat. Mindezt addig végezzük, amíg egyetlen körséta marad.



Tétel: (3) (G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája) $\Longleftrightarrow$ (G izolált pontoktól eltekintve összefüggő és 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.)

Biz: $\Rightarrow$: Láttuk. ✓ $\Leftarrow$: Ha G Euler-gráf, akkor (2) miatt van Euler-körsétája, ami Euler-séta is egyúttal. Ha G nem Euler-gráf, akkor legyenek u és v a G páratlan fokú csúcsai. Ekkor $G + uv$ Euler-gráf, és (2) miatt van Euler-körsétája. Feltehető, hogy e körséta utolsó éle uv. Ezt az uv élt elhagyva a körsétából, G Euler-sétáját kapjuk.

Euler-körséta keresése Euler-gráfban: $E(G)$-t felbontjuk körsétákra, amiket összevarrunk. Körsétát a felbontáshoz pl. úgy is kereshetünk, hogy addig követünk egy sétát, amíg tudunk. Előbb-utóbb elakadunk, de ez csakis a séta kiindulási pontjában történhet meg. Ezért a bejárt séta egy körséta, amit a felbontásban felhasználunk.

- **Hamilton-kör és út** létezésére szükséges, ill. elégséges feltételek: komponensszám ponttörlés után (Petersen-gráf)

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Megj: A célunk hasonló, mint az Euler-(kör)séta esetén, azaz gyors módszer, amivel el lehet dönteni egy gráfról, hogy van-e Hamilton-köre ill. -útja. Sajnos jól használható szükséges **és** elégséges feltételt nem tudunk adni erre a problémára, és jó oka van annak, hogy nem is számítunk ilyen feltétel létezésére. Tudunk viszont jól használható szükséges, és jól használható elégséges feltételt adni, de ezek csak bizonyos gráfok esetén hasznosak.

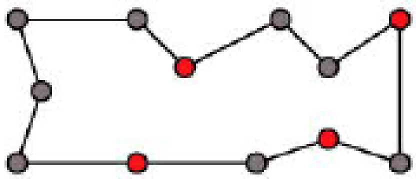
Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

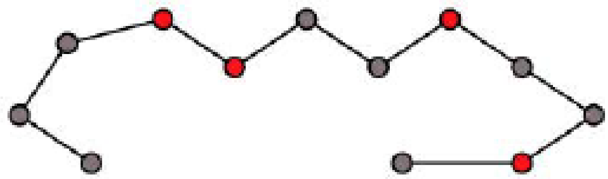
(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: A fenti feltétel, miszerint k csúcs törlésétől a gráf legfeljebb k (ill. $k+1$) komponensre eshet szét feltétlenül **szükséges** ahhoz, hogy G-nek legyen Hamilton-köre ill. -útja. Abból azonban, hogy G teljesíti a fenti feltételt, nem következik, hogy G-nek csakugyan van Hamilton-köre vagy útja. A szükséges feltételt úgy tudjuk alkalmazni, hogy a segítségével igazoljuk egy konkrét gráfról, hogy nincs Hamilton-köre (vagy -útja). Ha pl. azt látjuk, hogy G-ből 42 csúcsot elhagyva 43 komponens keletkezik, akkor G-nek nincs Hamilton-köre. Ha a komponensszám legalább 44, akkor G-nek Hamilton-útja sincs.

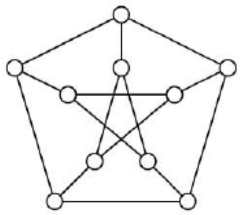
Biz: (1,2) G-t tekinthetjük úgy, mint egy kör (ill. út), amihez még további éleket adunk hozzá. Könnyű látni, hogy egy kör (ill. út) k pont elhagyásától legfeljebb k $(k+1)$ komponensre eshet szét. A további élek (amit a körhöz ill. úthoz hozzá kell adni, hogy G-t kapjuk) csak csökkenteni tudják a komponensszámot, növelni nem. Ezért G-ből k csúcsot törölve legfeljebb k $(k+1)$ komponens keletkezhet.



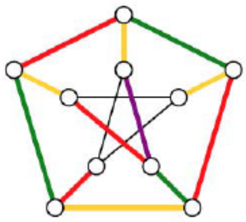


Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.
   (a) Tegyük fel, hogy külső körből k_1, a belsőből k_2 csúcsot hagytunk el. Ha $k_1 = 0$ vagy $k_2 = 0$, akkor a gráf összefüggő marad. Különben a kölső kör legfeljebb k_1, a belső pedig legfeljebb k_2 részre esik szét, vagyis összesen legfeljebb $k_1 + k_2$ komponens létezik.



2. Nincs Hamilton-köre.
   (a) Ha lenne Hamilton-köre, akkor a Hamilton-kör éleit felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, sárga ill. zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet.



A továbbiakban elégséges feltételeket fogunk látni Hamilton-kör létezésére. Ezek segítségével (szerencsés esetben) gyorsan és kétséget kizáróan tudjuk bizonyítani, hogy egy adott gráfnak van Hamilton-köre. Az elégséges feltétel vizsgálata azonban nem alkalmas arra, hogy egy gráf a Hamilton-körének hiányát igazoljuk.

- **Dirac, Ore tételei**, gazdag párok, hízlalási lemma

Def: Legyen G n-csúcsú, egyszerű gráf.

Az $u, v \in V(G)$ csúcspár gazdag, ha $d(u) + d(v) \geq n$. A G gráfra teljesül a Dirac-feltétel, ha $d(v) \geq \frac{n}{2} \forall v \in V(G)$-re. G-re igaz az Ore-feltétel, ha G bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot.

Dirac-tétele: Ha $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$, akkor G-nek van Hamilton-köre.

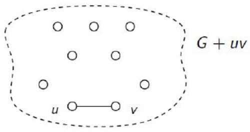
Dirac tétele: Gre igaz a Dirac-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Ore tétele: Ha G bármely két nemszomszédos csúcsa gazdag párt alkot, akkor G-nek van Hamilton-köre.

Ore tétele: G-re igaz az Ore-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Megj: A Dirac-feltétel erősebb (többet kíván), mint az Ore. Ezért az Ore-tétel erősebb, mint a Dirac: gyengébb feltételből igazolja ugyanazt. Ezért az Ore-tétel bizonyítása a Dirac-tételt is igazolja.

- Chavátal-lezárt



Hízlalási lemma: Tegyük fel, hogy G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\Longleftrightarrow$ ($G + uv$-nek van Hamiliton köre).

Megj: A hízlalási lemma jelentőségge az, hogy segít eldönteni azt, hogy van-e G-ben Hamilton-kör. Azt mondja ki ugyanis, hogy a gazdag párok közé G-be "ingyen" behúzhatunk éleket, u.i. ez nem változtat azon a tényen, hogy van vagy nincs Hamilton-kör a vizsgált gráfban. Megtehetjük tehát, hogy a lemma segítségével addig húzunk be éleket a gráfba, amíg lehet. Ha az így adódó $\overline{G}$ Chvátal-lezártban találunk Hamilton-kört, akkor G-nek is bizonyosan van Hamiliton-köre. Ha pedig $\overline{G}$ nem tartalmaz Hamilton-kört, akkor persze G-nek nincs Hamilton-köre.

Biz: $\Rightarrow$: Láttuk. ✓ $\Leftarrow$: Legyen C a $G + uv$ Hamilton-köre. Ha $uv \notin C$, akkor C a G-nek is Hamilton-köre, kész vagyunk. Ha viszont $uv \in C$, akkor $C - uv$ a G egy Hamilton-útja. Legyen ez a Hamilton-út $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$. Legyen $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$ a v szomszédainak halmaza, és legyen $B := \{v_{i-1} : uv_i \in E(G)\}$ az u szomszédait a Hamilton-úton megelőző csúcsok halmaza.

Világos, hogy $v \notin A$ és $v \notin B$, így $|A \cup B| \leq n - 1$. Mivel (u, v) gazdag pár, ezért $|A| + |B| = d(u) + d(v) \geq n$. Ezek szerint $A \cap V \neq \emptyset$, legyen pl. $v_i \in A \cap B$. Ekkor $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}, v_1$ a G egy Hamilton-köre.

Ore tétele: Ha G bármely két nemszomszédos csúcsa gazdag párt alkot, akkor G-nek van Hamilton-köre.

Biz: A hízlalási lemma alapján G bármely két nemszomszédos csúcsát "ingyen" összeköthetjük. Így G Chátal-lezártja a $\overline{G} = K_n$ teljes gráf. Mivel K_n-nek van H-köre, ezért G-nek is van.

Dirac-tétele: Ha $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$, akkor G-nek van Hamilton-köre.

Biz: G bármely két csúcsa gazdag párt alkot, ezért G-re teljesül az Ore-feltétel. Az Ore-tétel miatt G-nek van Hamilton-köre.

9 Tétel

Gráfok síkba ill. gömbre rajzolhatósága, tartomány, sztereografikus projekció, következményei. Az **Euler-féle poliédertétel**, duális kézfogáslemma és következményei: felső korlátok az élszámra és a minimális fokszáma egyszerű, síkbarajzolható gráfokon.

- **Gráfok síkba ill. gömbre rajzolhatósága, tartomány, sztereografikus projekció**

  Def: Síkbarajzolt (síkbarajzolt) gráf alatt olyan gráfdiagramot értünk, amiven az élek nem keresztezik egymást.

  A G gráf síkbarajzolható (síkbarajzolható), ha van síkbarajzolt diagramja.

  Síkbarajzolt gráf tartománya (lapja): a diagram komplementerének összefüggő tartománya. A nem korlátos rész neve külső tartomány.

  Megj:

  (1) A fentieket nem csak egyszerű gráfokra definiáltuk.

  (2) A síkbarajzolt gráf nem csupán egy gráf, hanem egy **konkrét** diagram.

  (3) Ugyanannak a síkbarajzolható gráfnak nagyon sok lényegesen különböző síkbarajzolt diagramja (lerajzolása) lehet.

  (4) A görbe (tóruszra) rajzolhatóság hasonlóan definiálható.

  Állítás: (A G gráf síkbarajzolható) $\iff$ (G gömbre rajzolható)

  Biz: A sztereografikus projekcióban az északi-sarkból történő vetítés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a sík pontjai és a síkot a déli-sarkon érintő gömbfelszín pontjai (mínusz északi-sark) között. A síkbarajzolt diagram vetülete gömbre rajzolt lesz ($\Rightarrow$ ✓), és az $É$-t nem tartalmazó gömbre rajzolt diagram pedig síkbarajzolttá válik. A $\Leftarrow$ irány igazolásához csupán annyi kell, hogy úgy rajzoljuk G-t a gömbre, hogy az $É$-n ne menjen át él.

- Következményei

  Köv: síkbarajzolt gráf külső tartománynak nincs kitüntetett szerepe.

  Biz: Bármely lerajzolás "kifordítható": a diagram átrajzolható úgy, hogy a kiválasztott tartomány legyen a külső tartomány.

  1. Vetítsük fel a diagramot a gömbre.
  2. Állítsuk az $É$-t a kiválasztott tartománynak megfelelő gömbi tartomány belsejébe.
  3. Vetítsük vissza a gömbre rajzolt gráfot a síkra.

- Az **Euler-féle poliédertétel**, duális kézfogáslemma és következményei: felső korlátok az élszámra és a minimális fokszáma egyszerű, síkbarajzolható gráfokon.

  Köv: Bármely konvex poliéder élhálója síkbarajzolható gráf.

  Biz: A kx poliéder belső pontjából az élháló kivetíthető egy, a poliédert tartalmazó gömbre. Így az élhálóból gömbre rajzolt gráf lesz. Láttuk, hogy minden gömbre rajzolható gráf síkbarajzolható.

  Megj: A kx poliéder élgráfjának tartományai a poliéder lapjainak felelnek meg.

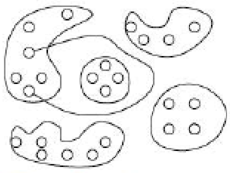
  Terminológia: síkbarajzolt G gráf esetén n, e, t ill. k jelöli rendre a G csúcsai, élei, tartományai és komponensei számát.

- **Duális kézfogáslemma (DKFL):** Ha G síkbarajzolt gráf, akkor $\sum_{i=1}^{t} l_i = 2e$ ahol l_i az i-dik lapot határoló élek számát jelöli.

  Biz: Minden él vagy két különböző lapot határol, vagy ugyanazt a lapot 2-szer. Így minden él 2-vel járul a BO-hoz és a JO-hoz is.

  Megj: A DKFL akkor hasznos, ha a síkbarajzolt gráf lapjairól, a KFL pedig akkor, ha a fokszámokról van információnk.

  Fáry-Wagner-tétel: Ha G egyszerű síkbarajzolható gráf, akkor olyan síkbarajzolása is van, amiben minden él egyenes szakasz.



n=csúcsok, t=tartományok, e=élek, k=komponensei

Tétel: Ha G síkbarajzolt gráf, akkor $n + t = e + k + 1$.

Biz: Rajzoljuk meg G-t az n csúcsból kiindulva, az élek egyenkénti behúzásával. Kezdetben $t = 1, e = 0$ és $k = n$, így a bizonyítandó összefüggés fennáll. Tegyük fel, hogy már néhány élt berajzoltunk, még mindig fennáll az összefüggés, és egy éppen az uv élt rajzolunk meg.

$\boxed{1.}$ u és v különböző komponenshez tartoznak. Ekkor k értéke 1-gyel csökken, e-é pedig 1-gyel nő. Az ÉHL miatt nem keletkezik kör, tehát nem zárunk körül új tartományt, vagyis t nem változik. Az összefüggés fennmarad.

$\boxed{2.}$ u és v ugyanahhoz a komponenshez tartoznak. Ekkor k nem változik, e viszont 1-gyel nő. Az ÉHL miatt keletkezik kör, tehát kettévágjuk az uv élt tartalmazó korábbi tartományt. Ezért t is 1-gyel nő, az összefüggés ismét fennmarad.

Köv: **(1)** Ha G síkbarajzolható, akkor t nem függ a síkbarajzolástól.

Biz: $t = e + k + 1 - n$, és a JO nem függ a síkbarajzolástól.

!!!(2)!!! (**Euler-formula**) Ha G összefüggő síkbarajzolt gráf, akkor $n + t = e + 2$

Biz: Mivel G összefüggő, ezért a fenti Tételben $k = 1$.

(3) Ha G egyszerű, síkbarajzolható és $n \geq 3$, akkor $e \leq 3n - 6$.

Biz: Ilyenkor G minden lapját legalább 3 él határolja, így a DKFL miatt $2e = \sum_{i=1}^{t} l_i \geq 3t$. A Tétel alapján $3n + 2e \geq 3n + 3t = 3e + 3k \geq 3e + 3 + 3 = 3e + 6$, amit rendezve $e \leq 3n - 6$ adódik.

(4) G egyszerű, síkbarajzolható, C_3-mentes és $n \geq 3 \Rightarrow e \leq 2n - 4$.

Biz: Ilyenkor G minden lapját legalább 4 él határolja. A DKFL miatt $2e = \sum_{i=1}^{t} l_i \geq 4t$, így $e \geq 2t$. A Tétel miatt $2n + e \geq 2n + 2t = 2e + 2k + 2 \geq 2e + 2 + 2 = 2e + 4$ Ezt rendezve $e \leq 2n - 4$ adódik.

(5) Ha G egyszerű, síkbarajzolható, akkor $\delta(G) \leq 5$ (azaz $\exists v : d(v) \leq 5$).

Biz: A KFL és **(3)** miatt $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e \leq 6n - 12$. Ezért van olyan csúcs, amire $d(v) \leq \frac{6n-12}{n} < 6$.

(6) A K_5 és $K_{3,3}$ gráfok egyike sem síkbarajzolható.

Biz: A K_5 gráf egyszerű, de nem teljesül **(3)**, hiszen $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10 \not\leq 9 = 3 \cdot 5 - 6$. Ezért K_5 nem síkbarajzolható. A $K_{3,3}$ gráf egyszerű és C_3-mentes, de nem teljesül rá **(4)**, u.i. $|E(K_{3,3})| = 9 \not\leq 8 = 2 \cdot 6 - 4$. Ezért $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható.

Megj: Könnyen látható, hogy ha G síkbarajzolható, akkor $G + e$ tóruszra rajzolható bármely e él behúzása esetén. Nem nehéz látni, hogy K_6 is tóruszra rajzolható. Sőt: még K_7 is az, de K_8 már nem.

Def: Élfelosztás: az élre egy új, másodfokú csúcs ültetése. Élösszehúzás: az él törlése és két végpontjának azonosítása. Topologikus G (soros bővítés): G-ből élfelosztásokkal képzett gráf.

Megf: Az éltörlés, csúcstörlés, élfelosztás, élösszehúzás operációk mindegyike megőrzi a gráf síkbarajzolható tulajdonságát.

Köv: (1) Top. K_5 top. $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható. (2) Ha G síkbarajzolható, akkor G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja.

Kuratowski tétele: (G síkbarajzolható) $\iff$ (G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja)

Példa: Petersen-gráf

10 Tétel

Kuratowski gráfok síkbarajzolhatósága, **soros bővítés,** ***Kuratowski-tétel*** **könnyű iránya**. **Síkbarajzolt gráf duálisa**, a duális paraméterei. Vágás, elvágó él, soros élek. *Kör-vágás dualitása*, különféle élek duálisai. Whitney két tétele, Whitney operációk.

- **Kuratowski gráfok** síkbarajzolhatósága, **soros bővítés,** ***Kuratowski-tétel*** **könnyű iránya**.

  (6) A K_5 és $K_{3,3}$ gráfok egyike sem síkbarajzolható.

  Biz: A K_5 gráf egyszerű, de nem teljesül (3), hiszen $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10 \not\leq 9 = 3 \cdot 5 - 6$. Ezért K_5 nem síkbarajzolható. A $K_{3,3}$ gráf egyszerű és C_3-mentes, de nem teljesül rá (4), u.i. $|E(K_{3,3})| = 9 \not\leq 8 = 2 \cdot 6 - 4$. Ezrét $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható. $\square$

  Megj: Könnyen látható, hogy ha G síkbarajzolható, akkor $G + e$ tóruszra rajzolható bármely e él behúzása esetén. Nem nehéz látni, hogy K_6 is tóruszra rajzolható. Sőt: még K_7 is az, de K_8 már nem.

  *****Def:** Élfelosztás: az élre egy új, másodfokú csúcs ültetése. Élösszehúzás: az él törlése és két végpontjának azonosítása. Topologikus G (soros bővítés): G-ből élfelosztásokkal képzett gráf.

  Megf: Az éltörlés, csúcstörlés, élfelosztás, élösszehúzás operációk mindegyike megőrzi a gráf síkbarajzolható tulajdonságát.

  Köv:

  (1) Top. K_5 top. $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható.

  (2) Ha G síkbarajzolható, akkor G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja.

  *****Kuratowski tétele:** (G síkbarajzolható) $\iff$ (G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja) **Példa:** Petersen-gráf

- **Síkbarajzolt gráf duálisa**, a duális paraméterei. Vágás, elvágó él, soros élek. *Kör-vágás dualitása*, különféle élek duálisai.

  Def: A G síkba rajzolt gráf duálisa a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

  Megf: (1) A síkbarajzolt G gráf G^* duálisa síkbarajzolható. (n^*, e^*, t^*, k^*) (2) $n^* = t, e^* = e, k^* = 1$. (3) Ha v az i-dik laphoz tartozó duális csőcs, akkor $d_{G^*}(v) = l_i$.

  Köv: KFL a duálisra $\sum_{i=1}^{t} l_i = \sum_{v \ \in V(G^*)} d_{G^*}(v) = 2e^* = 2e$.

  Def: A $Q \subseteq E(G)$ élhalmaz a G gráf vágása, ha $G - Q$ szétesik (több komponense van, mint G-nek), de $Q' \subsetneq Q$ esetén $G - Q'$ nem esik szét. Elvágó él: egyélű vágás. Soros élek: kétélű vágás.

  Kör-vágás dualitása: Tegyük fel, hogy G^* a G síkbarajzolt gráf duálisa. Ekkor (C a G köre) $\iff$ (C^* a G^* vágása) ill. (Q a G vágása) $\iff$ (Q^* a G^* köre).

  Köv: Hurokél duálisa elvágó él, soros élpáré párhuzamos élpár.

- Whitney két tétele, Whitney operációk.

  Whitney tétele: Tegyük fel, hogy G^* a G síkbarajzolt gráf duálisa. Ekkor H pontosan akkor duálisa a G egy alkalmas síkbarajzolásának, ha H előáll G^*-ból a fenti Whitney-operációk alkalmas egymásutánjával.

  Def: A $\varphi : E(G) \to E(H)$ kölcsönös egyenértékű leképezés kör-vágás dualitás G és H között, ha C pontosan akkor G köre, ha $\varphi(C)H$ vágása.

  Whitney másik tétele: Tegyük fel, hogy G és H között kör-vágás dualitás van. Ekkor G síkbarajzolható, és H a G egy alkalmas síkbarajzolásának duálisa.

  Megj: Egy G gráf által leírt villamos hálózat viselkedését az Ohm-él Kirchhoff-törvények írják le. Ezek a G gráf éleire, köreire és vágásaira vonatkoznak. Ha G és H közt kör-vágás dualitás van, akkor H-n elkészíthető az előző hálózat duálisa. Az eredeti hálózat megoldásában ha az I és U értékeket felcseréljük, az utóbbi hálózat megoldását kapjuk. Whitney másik tétele miatt ez a különös szimmetria csak síkbarajzolható gráfok által leírt hálózatokon lehetséges.

11 Tétel

Lineáris egyenletrendszer, kibővített együtthatómátrix, elemi sorekvivalens átalakítás és kapcsolata a megoldásokkal. **LA és RLA mátrix, vezéregyes, megoldás leolvasása RLA mátrix esetén.** Tilos sor, kötött változó, szabad paraméter, ezek jelentése a megoldás/megoldhatóság szempontjából. **Gauss-elimináció,** összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az egynletek és ismeretlenek száma között.

- **Lineáris egyenletrendszer**

  Def: Lineáris egyenlet: Ismeretlenek konstansszorosainak összege konstans. Lineáris egyenletrendszer: Véges sok lineáris egyenlet. Megoldás: Olyan érték adás, ami minden egyenletet igazzá tesz.

- **Kibővített együtthatómátrix**

  Def: Lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixa: a sorok az egyenletek, az oszlopok az ismeretleneknek ill. az egyenletek jobb oldalainak felelnek meg, az egyes mezőkben pedig a megfelelő együttható ill. jobb oldali konstans áll.

- **Elemi sorekvivalens átalakítás** és kapcsolata a megoldásokkal

  Biz: Minden ESÁ előtti megoldás megoldás marad az ESÁ után is. Minen ESÁ fordítottja megkapható ESÁ-ok egymásutánjaként is. Ezért minden ESÁ utáni megoldás megoldja az ESÁ előtti előtti rendszert is.

  Megj: A kibővített együtthatómátrix a lineáris egyenletrendszer felírásának egy tömör módja: elkerüljük vele a műveleti- és egyenlőségjelekkel piszmogást, mégis telejesen áttekinthető módon tartalmaz minden lényeges információt.

  Megoldás módszere Ekvivalens átalakításokat végzünk. Ezek során a megoldások halmaza nem változik. Konkrétan: egyenleteket felcserélünk, egyenletet nemnullával vigigszorzunk ill. az i-dik egyenletet kicseréljük az i-dik és j-dik egyenletek összegére.

  Def: A kibővített együtthatómátrix elemi sorekvivalens átalakítása (ESÁ): (1) sorcsere, (2) sor nemnulla konstanssal végigszorzása, (3) az i-dik sor helyettesítése az i-dik és j-dik sorok (koordiántánkénti) összegével (az i-dik sor helyettesítése az i-dik sor és a j-dik sor konstansszorosának összegével, csupa 0 sor hozzáadása/elhagyása).

- **LA és RLA mátrix, vezéregyes**

  Def: Az M mártix lépcsős alakú (LA), ha

  (1) minden sor első nemnulla eleme 1-es (ú.n. vezér 1-es, avagy v1)

  (2) minden v1 feletti sorban van ettől a v1-től balra eső másik v1.

  Az M mátrix redukált lépcsős alakú (RLA), ha

  (3) M LA és (2) M-ben minden v1 felett csak nullák állnak.

  Példa: LA mátrix RLA mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ill. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Megoldás leolvasása RLA mátrix esetén**

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \end{array} \mapsto \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= 1 \\ x_3 + 5x_4 &= 7 \end{aligned} \mapsto \begin{aligned} &x_2, x_4 \in \mathbb{R} \\ x_1 &= 1 - 3x_2 + 2x_4 \\ x_3 &= 7 - 5x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \mapsto \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= 1 \\ x_3 + 5x_4 &= 7 \\ 0 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \mapsto \lightning$$

- Tilos sor

  Def: Kibővített együtthatómátrix tilos sora: $0 \dots 0|x$ alakú sor, ha $x \neq 0$.

- Kötött változó és szabad paraméter

  Def: A RLA kibővített együtthatómátrix v1-hez tartozó változója kötöttm a többi változó (amihez nem tartozik v1) szabad (vagy szabad paraméter).

  Megf: Ha kibővített együtthatómátrix RLA, akkor (1) minden sor vagy a v1-hez tartozó változó értékadása, vagy tilos sor, vagy csupa 0 sor.

  (2) Ha van tilos sor, akkor nincs megoldás.

  (3) Ha nincs tilos sor, a szabad paraméterek tetszőleges, értékadásához egyértelmű megoldás tartozik.

  Megf: A lineáris egyenletrendszer megoldása tekinthető úgy, hogy a lineáris egyenletrendszeregy RLA kibővített együtthatómátrixal van megadva.

  Cél: Olyan eljárás, ami ESÁ-okkal tetszőleges mátrixot RLA-vá alakít.

- **Gauss elimináció**

  Gauss-elimináció:

  Input: $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix.

  Output: Egy M-ből ESÁ-okkal kapható $M' \in \mathbb{R}^{n \times k}$ LA mátrix.

  Működés: Az algoritmus fázisokból áll. Az i-dik fázisban keresünk egy nemnulla elemet az $(i-1)$-dik sor alatt a lehető legkisebb sorszámú oszlopban. Ha nincs ilyen elem, az algoritmus véget ér. Sorcserével ezt a nemnulla elemet az i-dik sorban visszük. Az i-dik sor konstanssal szorzásával ezt az elemet v1-sé alakítjuk. Az i-dik sor alatti sorokhoz az i-dik sor konstansszorosát hozzáadva kinullázuk a kapott v1 alatti elemeket.

- összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az egynletek és ismeretlenek száma között

  Megj: (1) A Gauss-elimináció outputja LA. Az RLA-hoz további lépésekre van szükség: minden v1 felett kinullázhatók az elemek, ha a v1 sorának konstansszorosait a v1 feletti sorokhoz adjuk.

  (2) Ha csupán LA (vagy RLA) a cél, eltérhetünk a Gauss-eliminációtól, feltéve, hogy ESÁ-okkal dolgozunk.

  (3) A Gauss-elimináció megvalósítható rekurzív algoritmusként is.

  A GE(M) (az M mátrixot lépcsős alakra hozó eljárás):

  $\boxed{1.}$ Ha M első oszlopa csupa 0, akkor M' az első oszlop törlésével keletkező mátrix. Output: GE(M') elé írunk egy csupa 0 oszlopot.

  $\boxed{2.}$ Ha M első oszlopa tartalmaz nemnulla elemet, sorcserével és az első sor konstanssal szorzásával az első sor első elemét v1-sé tesszük, majd a v1 alatti elemeket ESÁ-okkal kinullázzuk. Legyen M' az első sor és első oszlop törlésével keletkező mátrix. Output: GE(M') elé írunk egy csupa 0 oszlopot és az így kapott mátrix fölé a korábban törölt első sort.

  1. Lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixként is magadható.
  2. ESÁ nem változtat a megoldásokon.
  3. ESÁ-okkal elérhető a RLA.
  4. A RLA-ból azonnal adódik a megoldás
     - Ha az utolsó oszlopban van v1, akkor nincs megoldás.
     - Ha az utolsó kivételével minden oszlopban van v1, akkor egyetlen megoldás van.
     - Ha az utolsón kívül más oszlopban nincs v1, akkor van szabad paraméter, így végtelen sok különböző megoldás van.

  Köv: Ha a lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor legalább annyi egyenlet van, mint ahány ismeretlen.

  Biz: Az RLA-ra hozás után nincs szabad paraméter, tehát minden változóhoz tartozik v1. Ezért a kibővített együtthatómátrixnak legalább annyi sora van, mint a változók száma.

  Megj: A fenti következmény fordított irányban nem igaz, és lényegében nincs más összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az ismeretlenek és egyneletek száma között.

12. Az $\mathbb{R}^n$ **tér**, vektorműveletek azonosságai, (generált) **altér** (példák), (triviális) **lineáris kombináció**, alterek metszete, **generátorrendszer**, **lineáris függetlenség** (kétféle definíció). Lin.ftn rendszer hízlalása, generátorrendszer ritkítása, kicserélési lemma, **FG-egyenlőtlenség** és következménye.

1. Az $\mathbf{R^n}$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk.

Példa:
$\begin{pmatrix} e \\ \pi \\ 42 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, ill. $\underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, utóbbi esetben az 1-es felülről az i-dik helyen áll.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}$, $\underline{e}_i$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

Konvenció: A jelölés során az oszlopvektorokat aláhúzással különböztetjük meg a skalároktól.

Megj: A vektorok tehát itt és most nem „irányított szakaszok", hanem ennél általánosabb fogalmat takarnak: az irányított szakaszok is tekinthetők vektornak, de egy vektor a mi tárgyalásunkban nem feltétlenül irányított szakasz.

2. Vektorműveletek azonosságai

Állítás: Az $\mathbb{R}^n$ tér vektoraival történő számolásban néhány fontos szabály sokat segít. Tetsz. $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárokra az alábbiak teljesülnek

(1) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (az összeadás kommutatív)

(2) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ (az összeadás asszociatív)

(3) $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$ (egyik disztributivitás)

(4) $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}$ (másik disztributivitás)

(5) $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u})$ (skalárral szorzás asszociativitása)

Biz: Mivel mindkét művelet koordinátánként történik, elég az egyes azonosságokat koordinátánként ellenőrizni. Ezek viszont éppen a valós számokra (azaz a skalárokra) vonatkozó, jól ismert szabályok. $\square$

Konvenció: $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $-\underline{v} := (-1) \cdot v$.
Megj: Vektorok között nem csak az összeadás, hanem a kivonás is értelmezhető: $\underline{u} - \underline{v} := \underline{u} + (-1)\underline{v}$. Ezáltal a kivonás is egyfajta összeadás, tehát az összadásra vonatkozó szabályok értelemszerű változatai a kivonásra is érvényesek.

A vektorokkal történő számoláskor érvényes szabályok nagyon hasonlók a valós számok esetén megszokott szabályokhoz.

3. (Generált) **altér (**példák**)**

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \; \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$. (3) $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$. **Def:** $\mathbb{R}^n$ triviális alterei: $\{\underline{0}\}, \mathbb{R}^n$.

4. (Triviális) **lineáris kombináció**

Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Biz: $\Rightarrow$: $\lambda_i \underline{x}_i \in V \; \forall i$ esetén, így a $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ összegük is V-beli.
$\Leftarrow$: Ha $\underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\underline{x} + \underline{y}$ ill. $\lambda\underline{x}$ lineáris kombinációk. Mivel V zárt a lináris kombinációra, ezért $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$. Ez tetszőleges $\underline{x}, \underline{y}, \lambda$ esetén fennáll, tehát V zárt a műveletekre, vagyis altér. $\square$

5. Alterek metszete

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \; \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$. (3) $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$. **Def:** $\mathbb{R}^n$ triviális alterei: $\{\underline{0}\}, \mathbb{R}^n$.

6. Generátorrendszer

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Példa: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ generátorrendszere, hisz minden $\mathbb{R}^n$-beli vektor előáll az egységvektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\langle \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n \rangle = \mathbb{R}^n$.
Ha $\mathbb{R}^2$-ben ha $\underline{u}$ és $\underline{v}$ nem párhuzamosak, akkor $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ generátorrendszer, hiszen bármely $\underline{z}$ vektor előállítható $\underline{u}$ és $\underline{v}$ lineáris kombinációjaként. (Ehhez $\underline{u}$ és $\underline{v}$ egyenesére kell a ,,másik" vektorral párhuzamosan vetíteni az előállítandó $\underline{z}$ vektort.)
Hasonlóan, ha $\mathbb{R}^3$-ban három vektor nem esik ugyanarra az origón átmenő síkra, akkor ez a három vektor generátorrendszert alkot.

7. Lineáris függetlenség 1.

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.
Példa: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ lin. ftn $\mathbb{R}^n$-ben, hisz ha $\lambda_1 \underline{e}_1 + \ldots \lambda_n \underline{e}_n = \underline{0}$ akkor az i-dik koordináta 0 volta miatt $\lambda_i = 0$, tehát a lineáris kombináció triviális.
$\mathbb{R}^2$-ben két vektor akkor lin.öf, ha párhuzamosak. Tehát ha nem párhuzamosak, akkor lin. ftn-ek. ($\underline{0}$ minden vektorral párhuzamos.)
$\mathbb{R}^3$-ban pedig az igaz, hogy ha három vektor nem esik ugyanarra az origón átmenő síkra, akkor ez a három vektor lineárisan független rendszert alkot.

Megj: A lin.ftn-ség (akárcsak a lin.öf tulajdonság) vektorok egy halmazára és nem az egyes vektorokra vonatkozik. Hasonló igaz a generátorrendszerre. Az, hogy egy konrét $\underline{v}$ vektor benne van egy lin.ftn (vagy lin.öf vagy generátor-) rendszerben lényegében semmi információt nem ad $\underline{v}$-ről.

8. Lineáris függetlenség 2.

Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\iff$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.
Biz: A fenti állítások tagadásainak ekvivalenciáját igazoljuk.
1. Tfh $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ **nem** lineárisan független, azaz
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0}$ és $\lambda_i \neq 0$. Ekkor $\underline{x}_i$ előállítható a többiből:
$\underline{x}_i = \frac{-1}{\lambda_i} \cdot (\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k)$.
2. Most tfh valamelyik x_i előáll a többi lineáris kombinációjaként:
$\underline{x}_i = \lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k$. Ekkor $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ nem lineárisan független, hiszen a nullvektor megkapható nemtriviális lineáris kombinációként:
$\underline{0} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + (-1) \cdot \underline{x}_i + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k$. □

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G \rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G \rangle)$
Megj: A fenti állítás tkp azt mondja ki, hogy egy V altér generátorrendszeréből pontosan akkor tudunk egy elemet elvenni úgy, hogy a maradék vektorok továbbra is generátorrendszert alkossanak, ha a kihagyott elem előáll a maradék elemek lineáris kombinációjaként.
Biz: $\Rightarrow$: Mivel $\langle G \rangle = V = \langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle$, ezért $\underline{v} \in V$ és $\underline{v} \in \langle G \rangle$.
$\Leftarrow$: Tetsz. $\underline{u} \in V$ elemről azt kell megmutatni, hogy $\underline{u} \in \langle G \rangle$.
Mivel $\underline{v} \in \langle G \rangle$, feltehető, hogy $\underline{v} = \sum_{\underline{g} \in G} \lambda_{\underline{g}} \underline{g}$.
Tudjuk, hogy $\underline{u} \in V = \langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle$, ezért $\underline{u} = \lambda \underline{v} + \sum_{\underline{g} \in G} \mu_{\underline{g}} \underline{g}$.
Ebbe behelyettesítve a fenti kifejezést $\underline{u} = \sum_{\underline{g} \in G} (\mu_{\underline{g}} + \lambda \cdot \lambda_{\underline{g}}) \underline{g}$ adódik, azaz $\underline{u} \in \langle G \rangle$. Ez bmely $\underline{u} \in V$-re igaz, így $\langle G \rangle = V$. □

9. Lin.ftn rendszer hízlalása

Megf: (1) A $\{\underline{0}\}$ nem lineárisan független: $1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$.
(2) Két vektor akkor lin.ftn, ha nem egymás skalárszorosai.
(3) $\mathbb{R}^2$-ben két vektor pontosan akkor lineárisan független, ha (irányított szakaszként) nem párhuzamosak. Bármely két nem párhuzamos $\mathbb{R}^2$-beli vektor generálja $\mathbb{R}^2$-t. (ábra)
(4) Ha $\langle G \rangle = V$ és $G \subseteq G' \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\langle G' \rangle = V$, azaz generátorrendszert (V-n belül) hízlalva generátorrendszer marad.
(5) $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $F' \subseteq F$, akkor F' is lin.ftn, azaz lin.ftn rendszert ritkítva lin.ftn marad.

---

10. Generátorrendszer ritkítása

Megf: (1) A $\{\underline{0}\}$ nem lineárisan független: $1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$.
(2) Két vektor akkor lin.ftn, ha nem egymás skalárszorosai.
(3) $\mathbb{R}^2$-ben két vektor pontosan akkor lineárisan független, ha (irányított szakaszként) nem párhuzamosak. Bármely két nem párhuzamos $\mathbb{R}^2$-beli vektor generálja $\mathbb{R}^2$-t. (ábra)
(4) Ha $\langle G \rangle = V$ és $G \subseteq G' \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\langle G' \rangle = V$, azaz generátorrendszert (V-n belül) hízlalva generátorrendszer marad.
(5) $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $F' \subseteq F$, akkor F' is lin.ftn, azaz lin.ftn rendszert ritkítva lin.ftn marad.

---

11. Kicserélési lemma

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor ($F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.) $\iff$ ($\underline{f} \notin \langle F \rangle$)

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G \rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

Megj: A kicserélési lemma szerint bárhogy is törlünk a V altér egy ftn rendszeréből egy vektort, az pótolható V generátorrendszerének egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer lin.ftn marad.

Biz: Legyen $F' := F \setminus \{\underline{f}\}$. Indirekt bizonyítunk.
Tfh $F' \cup \{\underline{g}\}$ egyetlen $\underline{g} \in G$-re sem lin. ftn. Ekkor az előző lemma miatt $\underline{g} \in \langle F' \rangle$ teljesül minden $\underline{g} \in G$-re. Ezért $G \subseteq \langle F' \rangle$, ahonnan $\langle G \rangle \subseteq \langle F' \rangle$ következik. Ebből pedig $\underline{f} \in V = \langle G \rangle \subseteq \langle F' \rangle$, azaz $\underline{f} \in \langle F' \rangle$ adódik. A fenti lemma miatt $\{f\} \cup F' = F$ nem lin. ftn, ami ellentmondás.
Az indirekt feltevés hamis, így $\exists\ \underline{g} \in G$, amire $F' \cup \{\underline{g}\}$ lin.ftn. □

---

12. FG-Egyenlőtlenség és következményei

FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Megj: Magyarul: altérben egy ftn. rendszer sosem nagyobb, mint egy generátorrendszer.

Biz: Legyen $F_0 := F$. Ha $F_0 \subseteq G$, akkor $|F_0| \leq |G|$. Ha $F_0 \not\subseteq G$, akkor $F_0 \setminus G \neq \emptyset$, legyen mondjuk $\underline{f} \in F_0 \setminus G$. A kicserélési lemma miatt van olyan $\underline{g} \in G$, amire $F_1 := F_0 \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ lin.ftn. Ezzel az F_1-gyel ugyanezt folytatva kapjuk az F_2, $F_3, \ldots,$ lin.ftn rendszereket. Előbb-utóbb olyan F_i-hez jutunk, amivel ez már nem folytatható, mert $F_i \subseteq G$. Ekkor $|F_0| = |F_1| = \ldots = |F_i| \leq |G|$, győztünk. □

Köv: Ha $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn, akkor $|F| \leq n$.
Biz: Láttuk, hogy $G = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ az $\mathbb{R}^n$ generátorrendszere. Az FG-egyenlőtlenség miatt $|F| \leq |G| = n$. □

Allítás: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\underline{f} \in \langle F \rangle$. Ekkor $\underline{f}$ egyértelműen áll elő F-beli vektorok lin.komb.-jaként.
Biz: Mivel $f \in \langle F \rangle$, ezért $\underline{f}$ előáll az F-beliek lin.komb.-jaként. Tfh $\underline{f} = \lambda_1 \underline{f}_1 + \dots + \lambda_k \underline{f}_k = \mu_1 \underline{f}_1 + \dots + \mu_k \underline{f}_k$ két előállítás. Ekkor $\underline{0} = \underline{f} - \underline{f} = (\lambda_1 - \mu_1)\underline{f}_1 + \dots + (\lambda_k - \mu_k)\underline{f}_k$.
Mivel F lin.ftn, a JO-on álló lineáris kombináció triviális, azaz $\lambda_i = \mu_i \ \forall i$. Így a két fenti előállítás megegyezik, vagyis f csak egyféleképp áll elő az F-beliek lin.komb-jaként. □

---

13. ESÁ hatása a sor- és oszlopvektorokra, **oszlopvektorok lin.ftn-ségének eldöntése**. **Bázis** fogalma, **altér bázisának előállítása generátorrendszerből** ill. homogén lineáris egyenletendszerrel megadott altér esetén.

1. ESÁ hatása a sor- és oszlopvektorokra, **oszlopvektorok lin.ftn-ségének eldöntése**

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$.

Példa: Döntsük el, hogy lin.ftn. rendszert alkotnak-e az alábbi M mátrix oszlopai. Megoldás: ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{array}{rrrr|rrrr|rrrr|rrrr|} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 5 & 0 & 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

A kapott M' mátrixra $\underline{o}'_4 = -7\underline{o}'_1 + 3\underline{o}'_2 + 2\underline{o}'_3$. Így M oszlopaira $\underline{o}_4 = -7\underline{o}_1 + 3\underline{o}_2 + 2\underline{o}_3$ teljesül, ezért M oszlopai a korábbi lemma miatt nem lin. ftn.-ek.

Biz: Feltehető, hogy M'-t egyetlen ESÁ-sal kaptuk M-ből. Bármelyik konkrét ESÁ-t is alkalmaztuk, $S' \subseteq \langle S\rangle$, így $\langle S'\rangle \subseteq \langle S\rangle$. Láttuk, hogy bármely ESÁ megfordítása is kivitelezhető ESÁ-okkal, ezért $\langle S\rangle \subseteq \langle S'\rangle$, és a két megfigyelésből $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$ adódik. □

Biz: Ismét feltehető, hogy M' egyetlen ESÁ-sal keletkezett. Ráadásul elég a $\Rightarrow$: irányt bizonyítani: a $\Leftarrow$: következik abból, hogy minden ESÁ fordítottja megvalósítható legfeljebb három ESÁ-sal. Ezért ha egy lin.összefüggés fennál M'-re akkor az ezt legfeljebb három ESÁ megőrzi, tehát igaz marad M-re is.

Biz: $\Rightarrow$: A fenti lineáris összefüggés M-re pontosan azt jelenti, hogy a $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^k \mu_i x_i$ egyenletnek M minden sora megoldása. Nekünk pedig azt kell igazolni, hogy ugyanezt az egyenletet az ESÁ után kapott M' minden sora is megoldja. Sorcsere esetén pontosan ugyanazokról az egyenlőségekről van szó, skalárral szorzás esetén az egyik egyenletet skalárral kell szorozni, sorösszeadás esetén pedig az új egyenlőség két korábban teljesülő egyenlet összege. □

2. Bázis fogalma

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa a V egy lin.ftn generátorrendszere.
Példa: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok az $\mathbb{R}^n$ standard bázisát alkotják.
Kínzó kérdés: Minden altérnek van bázisa? Ha $\mathbb{R}^n$ egy V altérének van, akkor hogyan lehet előállítani V egy bázisát?

1. módszer: Ha $V = \langle G \rangle$, azaz ha ismert a V egy véges G generátorrendszere, akkor G-t addig ritkítjuk, amíg lin.ftn nem lesz. Konkrétan: ha egy $\underline{g} \in G$ generátorelem előáll a $G \setminus \{\underline{g}\}$ elemeinek alkalmas lin. kombinációjaként, akkor $G \setminus \{\underline{g}\}$ is generálja V-t. Ezért $\underline{g}$-t eldobhatjuk. Ha már nincs ilyen eldobható $\underline{g}$ vektor, akkor G maradéka nem csak generátorrendszer, de lin.ftn is.

2. módszer: Felépíthetjük V bázisát a V egy tetsz. F lin.ftn rendszeréből (akár $F = \emptyset$-ból) kiindulva. Ha $\langle F \rangle = V$, akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor tetsz. $\underline{f} \in V \setminus \langle F \rangle$ esetén $F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn marad. Az FG-egyenlőtlenség miatt F nem tartalmazhat n-nél több elemet, ezért legfeljebb n lépésben megkapjuk V bázisát.

3. <u>Altér bázisának előállítása generátorrendszerből</u>

Példa:
Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{array}{rrrrr|rrrrr|rrrrr|}
3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\
-1 & 3 & 4 & -9 & 2 & -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\
0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\
1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 & 5 & 5 & -10 & -7
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|rrrrr|rrrrr|}
1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\
0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\
0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\
0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|}
\underline{u} & \underline{v} & \underline{w} & \underline{x} & \underline{y} \\
1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Ezek szerint $\underline{w} = \underline{v} - \underline{u}$, $\underline{x} = 3\underline{u} - 2\underline{v}$.
A v1-ek oszlopai lin.ftn generátorrendszer, azaz $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}\}$ a V altér bázisa. $\square$

Példa: Keressük meg az alábbi $V \leq \mathbb{R}^4$ altér egy bázisát!

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, 3x_2 - 2x_4 = 0 \right\}$$

Megoldás: Az altér egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaiból áll. (Homogén: a jobboldalon 0-k állnak, amiket a kib.egyhómx-ból elhagyunk.) A megoldásokat leíró képletből fogjuk meghatározni V egy bázisát.

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|l} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}, \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & x_1 = -x_3 - \frac{5}{3}x_4, \\ & & & & & & & & & & & & x_2 = \frac{2}{3}x_4. \end{array}$$

A bázis elkészítéséhez a szp-ek olyan lin.ftn értékadásait keressük, amelyek lin.komb-jaként a szp-ek tetsz. értékadása előáll. Ilyen pl., ha minden lehetséges módon egy szp-nek 1, a többinek 0 értéket adunk. Azaz az $x_3 = 1, x_4 = 0$ ill. $x_3 = 0, x_4 = 1$ értékadásokhoz a

$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, és $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorokból álló bázis tartozik. □

Példa: Írjuk fel a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$ alteret lin.egyrsz megoldásaiként, ha

$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{z}|\underline{x})$ mátrixot RLA-ra (LA-ra) hozzuk.

$$\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|} 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 & 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 & 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 & -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 & 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 & 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 & 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 & 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 & 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|ccccc|} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 & 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 & 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 & 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 & 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|ccccc|} 1 & 0 & 3 & 1 & x_4 - x_3 & 1 & 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 & 0 & 1 & -2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 9 & x_2 + 2x_3 + x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x_2+2x_3+x_4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & x_1 + 5x_3 - 3x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3x_1 - x_2 + 13x_3 - 10x_4}{3} \end{array}$$

A kiindulási mátrix 5-dik oszlopa pontosan akkor van V-ben, ha az első 4 oszlop generálja. Ez azzal ekvivalens, hogy az RLA mátrix első 4 oszlopa generálja az 5-diket. Mivel $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ a generáló oszlopok között vannak, ezért csupán $3x_1 - x_2 + 13x_3 - 10x_4 = 0$ a feltétel. □

---

4. homogén lineáris egyenletrendszerrel megadott altér esetén

14. Generátorrendszerből homogén lin.egyenletrendszer előállítása. **Altér dimenziójának jóldefináltsága**, $\mathbb{R}^n$ **standard bázisa, bázishoz tartozó koordinátavektor kiszámítása.**

1. Generátorrendszerből homogén lin, egyenletrendszer előállítása
2. **Altér dimenziójának jóldefináltsága**

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Biz: Mivel B_1 lin.ftn és B_2 generátorrendszer V-ben, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt $|B_1| \leq |B_2|$.
Az is igaz, hogy B_2 lin.ftn és B_1 generátorrendszer V-ben, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt $|B_2| \leq |B_1|$ is teljesül.
A két eredmény összevetéséből $|B_1| = |B_2|$ adódik. □

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója dim $V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.
Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.
Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n.
Állítás: Ha $U \leq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor dim $U \leq$ dim V.
Biz: Legyen B az U bázisa. Ekkor $B \subseteq V$ lin.ftn, ezért a korábban látott 2. módszerrel B-t ki lehet egészíteni V egy B' bázisává, így dim $U = |B| \leq |B'| =$ dim V. □

Állítás: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$ és V_1, V_2 a V alterei, akkor dim$(V_1 \cap V_2) +$ dim $V \geq$ dim $V_1 +$ dim V_2.
Biz: Egészítsük ki az $U \cap V$ egy B bázisát a V_1 egy $B \cup B_1$ ill. a V_2 egy $B \cup B_2$ bázisává. Igazoljuk, hogy $B \cup B_1 \cup B_2$ lin.ftn. Tfh $\sum_{\underline{b} \in B} \lambda_b \underline{b} + \sum_{\underline{b_1} \in B_1} \lambda_{\underline{b_1}} \underline{b_1} + \sum_{\underline{b_2} \in B_2} \lambda_{\underline{b_2}} \underline{b_2} = \underline{0}$. Ezt átrendezve: $V_1 \ni \underline{x} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_b \underline{b} + \sum_{\underline{b_1} \in B_1} \lambda_{\underline{b_1}} \underline{b_1} = -\sum_{\underline{b_2} \in B_2} \lambda_{\underline{b_2}} \underline{b_2} \in V_2$ adódik, ezért $\underline{x} \in V_1 \cap V_2$. Ekkor $\underline{x} = \sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b}$, hisz B a $V_1 \cap V_2$ bázisa. Innen $\sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b} + \sum_{\underline{b_2} \in B_2} \lambda_{\underline{b_2}} \underline{b_2} = \underline{x} - \underline{x} = \underline{0}$. A $B \cup B_2$ lin.ftn-sége miatt $\lambda_{\underline{b_2}} = 0\ \forall \underline{b_2} \in B_2$. Hasonlóan $\lambda_{\underline{b_1}} = 0\ \forall \underline{b_1} \in B_1$, és $\lambda_{\underline{b}} = 0\ \forall \underline{b} \in B$, azaz $B \cup B_1 \cup B_2$ lin.ftn. Ebből adódik, hogy dim$(V_1 \cap V_2) +$dim $V \geq |B| + |B_1| + |B_2| + |B| =$ dim $V_1 +$dim V_2. □

Köv: $\mathbb{R}^3$-ban bármely két origón áthaladó sík (más szóval: kétdimenziós altér) tartalmaz közös egyenest.
Megj: $\mathbb{R}^4$-ben már található két olyan origón áthaladó sík, amik csak az origóban metszik egymást. Ilyenek pl. $\langle \underline{e_1}, \underline{e_2} \rangle$ ill. $\langle \underline{e_3}, \underline{e_4} \rangle$.

A továbbiakban azt szeretnénk indokolni, hogy $\mathbb{R}^n$ tetszőleges k dimenziós altere „lényegében” úgy viselkedik, mint $\mathbb{R}^k$.

---

3. $\mathbf{R}^n$ standard bázisa

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa a V egy lin.ftn generátorrendszere.
Példa: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok az $\mathbb{R}^n$ standard bázisát alkotják.
Kínzó kérdés: Minden altérnek van bázisa? Ha $\mathbb{R}^n$ egy V altérének van, akkor hogyan lehet előállítani V egy bázisát?

1. módszer: Ha $V = \langle G \rangle$, azaz ha ismert a V egy véges G generátorrendszere, akkor G-t addig ritkítjuk, amíg lin.ftn nem lesz. Konkrétan: ha egy $\underline{g} \in G$ generátorelem előáll a $G \setminus \{\underline{g}\}$ elemeinek alkalmas lin. kombinációjaként, akkor $G \setminus \{\underline{g}\}$ is generálja V-t. Ezért $\underline{g}$-t eldobhatjuk. Ha már nincs ilyen eldobható $\underline{g}$ vektor, akkor G maradéka nem csak generátorrendszer, de lin.ftn is.

2. módszer: Felépíthetjük V bázisát a V egy tetsz. F lin.ftn rendszeréből (akár $F = \emptyset$-ból) kiindulva. Ha $\langle F \rangle = V$, akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor tetsz. $\underline{f} \in V \setminus \langle F \rangle$ esetén $F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn marad. Az FG-egyenlőtlenség miatt F nem tartalmazhat n-nél több elemet, ezért legfeljebb n lépésben megkapjuk V bázisát.

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:
Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{array}{rrrrr|rrrrr|rrrrr|} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|rrrrr|rrrrr|} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|} \underline{u} & \underline{v} & \underline{w} & \underline{x} & \underline{y} \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ezek szerint $\underline{w} = \underline{v} - \underline{u}$, $\underline{x} = 3\underline{u} - 2\underline{v}$.
A v1-ek oszlopai lin.ftn generátorrendszer, azaz $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}\}$ a V altér bázisa. $\square$

4. Bázishoz tartozó koordinátavektor kiszámítása

Legyen B a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa. Mivel B generátorrendszer, minden $\underline{v} \in V$ előáll a B elemeinek lin.komb-jaként, azaz $\underline{v} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b}$ alakban.
A B bázis lin.ftn-ségéből pedig az következik, hogy tetszőleges $\underline{v} \in V$ lin.komb-ként történő előállítása egyértelmű: ha $\underline{v} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b} = \sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b}$, akkor $\lambda_{\underline{b}} = \mu_{\underline{b}}\ \forall \underline{b} \in B$.
Ez a gondolatmenet indokolja az alábbi fogalom jóldefiniáltságát.
Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora
$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.
Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{u}, \underline{v} \in V$ ill. $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill.
(2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Biz: (1) Tfh $[\underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$ és $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}$. Ekkor $\underline{u} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$ és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{b}_i$, tehát
$\underline{u} + \underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i + \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_i) \underline{b}_i$, ezért
$$[\underline{u} + \underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_k + \mu_k \end{pmatrix} = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B\ .$$

Biz: (2) Tfh $[\underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$. Ekkor
$$\lambda \underline{u} = \lambda \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^k \lambda \lambda_i \underline{b}_i \Rightarrow [\lambda \underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda\lambda_k \end{pmatrix} = \lambda [\underline{u}]_B \quad \square$$

Megj: A fenti állítás azt mutatja meg, hogy $\mathbb{R}^n$ bármely V altere lényegében ugyanúgy viselkedik, mint az $\mathbb{R}^k$ tér, ahol $k = \dim V$.

---

15. n elem permutációja, a permutáció **inverziószáma**. **Bástyaelhelyezés**, inverzióban álló bástyapárok, **determináns**, **felső háromszögmátrix determinánsa**.

1. N elem permutációja

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Orbitok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetszőleges sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik.
Ugyanez igaz a páros méretű orbitok számára is.

Biz:

Köv: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjére ekvivalensek:
(1) a sorrend ps sok cserével kapható $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n)$-ből,
(2) a sorrend orbitjai számának paritása megegyezik n paritásával,
(3) a sorrend páros méretű orbitjainak száma páros.
Bármelyik teljesül a fentiek közül, akkor a megfelelő hiperkocka térfogata pozitív.

Biz: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrendnek n orbitja van, és ezekből a páros méretűek száma 0. □

Megj: Hagyományosan egy harmadik módszert használunk az előjel meghatározására.

2. A permutáció **inverziószáma**

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű σ permutáció, amelyre $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Példa: Az $(\underline{e}_3, \underline{e}_8, \underline{e}_5, \underline{e}_7, \underline{e}_1, \underline{e}_6, \underline{e}_2, \underline{e}_4)$ sorrendhez az alábbi σ permutáció tartozik:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(i)$	5	7	1	8	3	6	4	2

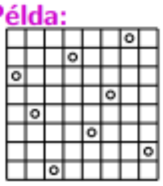
Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az $\{i, j\}$ pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.
Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.
Biz: (1) A két felcserélt vektor viszonya megfordul, minden más pár ugyanolyan marad, mint korábban volt.

Biz: (2) Ha a felcserélt vektorok között k másik vektor van, akkor ugyanez a csere megkapható $2k+1$ szomszédos vektorpár cseréjének egymásutánjaként. Az inverziószám így $(2k+1)$-szer változik 1-gyel, ezért összességében páratlannal változik. □

Köv: Az egységvektorok egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma pontosan akkor páros, ha ez a sorrend páros sok vektorcserével kapható az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ sorrendből.
Köv: A σ permutációhoz tartozó hiperkocka térfogatának előjele $(-1)^{I(\sigma)}$. Hogyan határozható meg gyorsan ez az előjel?

3. Bástyaelhelyezés

Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.
Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.
Mit jelent, hogy az $\{i, j\}$ pár σ szerint inverzióban áll?
Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.
Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.
Köv: Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számaval.
Példa:



4. Inverzióban álló bástyapárok

5. Determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, aminek az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i, j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

Biz: Az A mátrix bármely bástyaelhelyezését meghatározó elemek $A^\top$-ban is bástyaelhelyezést alkotnak. Két bástya pontosan akkor alkot ÉK-DNy párt A-ban, ha $A^\top$-ban is ÉK-DNy-i párt alkotnak. Ezért $\det(A)$-ban ugyanazokat a kifejtési tagokat (ugyazzal az előjellel) kell összeadni, mint $\det(A^\top)$-ban. □

Köv: Ha egy tulajdonság általában igaz a determináns oszlopaira, akkor a megfelelő tulajdonság a determináns soraira is teljesül.

Megj: Egy $n\times n$ determináns kiszámításához $n!$ kifejtési tagot kell összegezni. Ez rengeteg munka. Gyorsabb módszer adódik, ha megfigyeljük, hogy az ESÁ-ok hogyan változtatják a determinánst.

Allítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|$,

Biz: A bal oldali determináns minden kifejtési tagjának az i-dik oszlopbeli tényezője a $\underline{u}_i$ és $\underline{v}$ egy koordinátájának összege. Ha felbontjuk a zárójelet, a kifejtési tagból két szorzat lesz. Ezek a szorzatok pedig épp a jobb oldali determinánsok kifejtési tagjai. □

Allítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$ $\forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik.

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 42 = 42$$

Megj: A determináns kiszámításához képezhetünk LA mátrixot. Ehhez nem kötelező Gauss-eliminációt használni, bármilyen ESÁ-sal dolgozhatunk a cél érdekében. Nem muszáj v1-ket sem gyártani: elég a felső háromszögmátrixig (vagy csupa0 sorig) eljutni.
Sőt: mindent, amit a sorokkal megtehetünk, azt hasonló módon az oszlopokkal is elvégezhetjük. Ez néha célszerűbb lehet, mint kizárólag csak ESÁ-ok alkalmazása.

6. Felső háromszögmátrix determinánsa

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

$$\begin{matrix} ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? \end{matrix}$$

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.
Biz: Ha egy sor v1-e a főátlótól balra van, akkor a felette levő soré is. Az első soré nem ilyen, ezért minden v1 a főátlón vagy attól jobbra áll, így a főátló alatt minden elem 0. $\square$

16. **Mátrix transzponáltja**, transzponált determinánsa, **ESÁ hatása a determinánsra, előjeles aldeterminláns, kifejtési tétel**.

1. Mátrix transzponáltja

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| = = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme. A $(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástyaelhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, aminek az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i, j$.

Példa: $\begin{pmatrix} 42 & 4^2 & 4,2 \\ 42^{42} & 42! & \sqrt[42^{42}]{42} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 42 & 42^{42} \\ 4^2 & 42! \\ 4,2 & \sqrt[42^{42}]{42} \end{pmatrix}$

2. transzponált determinánsa

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.
Biz: Az A mátrix bármely bástyaelhelyezését meghatározó elemek $A^\top$-ban is bástyaelhelyezést alkotnak. Két bástya pontosan akkor alkot ÉK-DNy párt A-ban, ha $A^\top$-ban is ÉK-DNy-i párt alkotnak. Ezért $\det(A)$-ban ugyanazokat a kifejtési tagokat (ugyazzal az előjellel) kell összeadni, mint $\det(A^\top)$-ban.

3. **ESÁ hatása a determinánsra**

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \; \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.
(2) F.háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemei szorzata.

Biz: Minden kif.tag tartalmaz 0 tényezőt, kivéve a főátlóbeliek szorzata, aminek az előjele pozitív.

4. **előjeles aldetermináns**

Sakktábla-szabály

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

minden mátrix bal felső sarka pozítív ,és felváltva változik az előjel.

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.
A fenti megfigyeléssel másképp is kiszámítható a detereminíns.

5. **kifejtési tétel**

Megf: Tfh $\underline{e}_j$ az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix j-dik oszlopa, továbbá, hogy A első $i-1$ sora az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal az A_1 ill. A_2, az utolsó $n-i$ sor az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal pedig az A_3 ill. A_4 mátrixokat alkotja. Ekkor $j-1$ sor- és $i-1$ oszlopcserével adódik:

$$\begin{vmatrix} & 0 & \\ A_1 & \vdots & A_2 \\ & 0 & \\ ??? & 1 & ??? \\ & 0 & \\ A_3 & \vdots & A_4 \\ & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & & \\ \vdots & A_1 & A_2 \\ 0 & & \\ 1 & ????? & \\ 0 & & \\ \vdots & A_3 & A_4 \\ 0 & & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1+i-1} \begin{vmatrix} 1 & ????? & \\ 0 & & \\ \vdots & A_1 & A_2 \\ \vdots & A_3 & A_4 \\ 0 & & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = A_{i,j}$$

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}$ □

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a detereminláns így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot 7 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(9-11) + 14(3-1) - (6-2) + (9-11) - (6-22) = 4+28-4-2+16 = 42$$

---

17. Vektorok skaláris szorzásának tulajdonságai. **Mátrixok összeadása és szorzásai**, e műveletek tulajdonságai. **A szorzatmátrix sorainak és oszlopainak <u>különös tulajdonsága</u>**, ESÁ és mátrixszorzás kapcsolata.

1. Vektorok skaláris szorzásának tulajdonságai

Vektorokon értelmeztük az összeadást és a skalárral szorzást. Az oszlopokat egymás alá írva bármely $n \times k$ méretű mátrixot értelmezhetünk $n \cdot k$ magasságú oszlopvektorként is. Ezzel értelmezni tudjuk az **azonos méretű** mátrixokon az összeadást és a skalárral szorzást.

Példa: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

$7 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 1 & 6006 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 42 \\ 7 & 4242 & 77 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ nem értelmes.

Vektorokon értelmeztük az összeadást és a skalárral szorzást. Az oszlopokat egymás alá írva bármely $n \times k$ méretű mátrixot értelmezhetünk $n \cdot k$ magasságú oszlopvektorként is. Ezzel értelmezni tudjuk az **azonos méretű** mátrixokon az összeadást és a skalárral szorzást.

Köv: Ha $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$, akkor (1) $A + B = B + A$, (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$, (3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, (4) $(\lambda + \kappa)A = \lambda A + \kappa A$, (5) $\lambda(\kappa A) = (\lambda\kappa)A$, továbbá (6) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$, (7) $\lambda \cdot A^\top = (\lambda A)^\top$.

Vektorok egymással történő összeszorzását nem értelmeztük eddig. Most fogjuk, de bizonyos korlátokkal. Ehhez először azonos méretű vektorokat tanulunk meg összeszorozni.

2. Mátrixok összeadása és szorzása

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok skaláris szorzata $\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$.

Megf: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$, (2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ ill. (3) $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda(\underline{u} \cdot \underline{v})$.

Megj: (1) Világos, hogy ha $\underline{u} = \underline{0}$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, ám a fordított következtetés nem igaz, pl $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

(2) A skaláris szorzás segítségével értelmezhető a vektorhossz és a merőlegesség (akár magasabb dimenzióban is).

Megf: A $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vektor hossza az a, b, c oldalakkal rendelkező téglatest testátlójának hossza, ami a Pitagorasz-tétel alapján $\|\underline{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Ugyanez, másképp felírva: $\|\underline{v}\|^2 = \underline{v} \cdot \underline{v}$.

Megj: Az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok merőlegessége azt jelenti, hogy $\|\underline{u}\|^2+\|\underline{v}\|^2=\|\underline{u}+\underline{v}\|^2=(\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}+\underline{v})=\underline{u}\cdot\underline{u}+\underline{v}\cdot\underline{v}+2\underline{u}\cdot\underline{v}=\|\underline{u}\|^2+\|\underline{v}\|^2+2\underline{u}\cdot\underline{v}$, innen $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ adódik. Tehát $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \iff \underline{u} \perp \underline{v}$.

3. e műveletek tulajdonságai

Az $\mathbb{R}^n$-beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ill.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ill.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok. (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$

Biz: A skaláris szorzásról tanult azonosság szerint $\lambda(\underline{u} \cdot \underline{v}) = (\lambda\underline{u}) \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot (\lambda\underline{v})$. Ezért mindhárom szorzatban az i-dik sor j-dik eleme az A i-dik sora és B j-dik oszlopa skaláris szorzatának a λ-szorosa ($\forall i, j$ esetén). $\square$

4. A szorzatmátrixok sorainak és oszlopainak különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.

(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak $\underline{v}^\top \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

Köv: Tfh A oszlopai $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ és B sorai $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$. Ekkor

(1) az AB szorzat j-dik oszlopa az $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat pedig a $\underline{b}^j$ oszlop tartamazza.

(2) Hasonlóan, az i-dik sor a $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ sorok lineáris kombinációja, mégpedig az $\underline{a}_i$ sorban szereplő együtthatókkal.

(3) Ha a C mátrix minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja, akkor C előáll AB alakban. Ha a C mátrix sorai az A sorainak lin.komb-i, akkor C előáll $C = BA$ alakban.

Köv: Ha A' ESÁ-okkal kapható A-ból, akkor $A' = BA$ alakú.

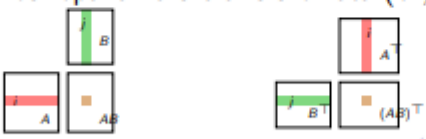
5. ESÁ és mátrixszorzat kapcsolata.

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok. (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$
(2) $A(B + C) = AB + AC$ ill. $(A + B)C = AC + BC$.
(3) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Megj: Ha AB és BA is értelmes, akkor $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Ekkor $AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $BA \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Azonban még $k = n$ esetén sem igaz általában, hogy $AB = BA$. A mátrixszorzás nem kommutatív.

(3) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Biz: $(AB)^T$ j-dik sorának i-dik eleme az A i-dik sorának és B j-dik oszlopának a skaláris szorzata, ami ugyanaz, mint $B^\top$ j-dik sorának és $A^\top$ i-dik oszlopának a skaláris szorzata ($\forall i, j$ esetén). □



(2) $A(B + C) = AB + AC$ ill. $(A + B)C = AC + BC$.

Biz: Tudjuk, hogy $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$. Ezért $A(B + C)$ ill. $AB + AC$ i-dik sorának j-dik eleme az A i-dik sorának és B és C j-dik oszlopai összegének skaláris szorzata ($\forall i, j$ esetén). A másik disztributivitás a skaláris szorzás $(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w}$ alakú, másik disztributív azonosságából következik. □

18. **Lineáris leképezések** és <u>mátrixszorzások kapcsolata</u>. **Lineáris leképezés mátrixának meghatározása**. Leképezések egymásutánjának mátrixa, <u>mátrixszorzás asszociativitása</u>.

1. **Lineáris lekepézések** és <u>mátrixszorzások kapcsolata</u>

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ leképezés, amire $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $A(\lambda\underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u}+\underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.
Def: Tfh $U \le \mathbb{R}^k$ és $V \le \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda\underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u}+\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.
Példa: Lin.lekép $\mathbb{R}^2$-ből $\mathbb{R}^2$-be (a szokásos helyvektorokon) az origóra tükrözés, az origó körüli forgatás, az x tengelyre vetítés, vagy egy origón átmenő egyenesre tükrözés. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, ha pl. az sík minden (x, y) pontjához a tér $(2x, 0, y/2)$ pontját rendeljük.

Megf: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ esetén az A-val történő balszorzás lin.lekép-t definiál $\mathbb{R}^k$-ból $\mathbb{R}^n$-be.
Lemma: Tfh $U \le \mathbb{R}^k, V \le \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.
Biz: $\Rightarrow$: Mivel f additív és homogén, ezért
$f(\lambda_1\underline{u}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{u}_k) = f(\lambda_1\underline{u}_1) + \ldots + f(\lambda_k\underline{u}_k) =$
$\lambda_1 f(\underline{u}_1) + \ldots + \lambda_k f(\underline{u}_k)$, azaz f zárt a lin.komb-ra.
$\Leftarrow$: Ha f zárt a lin.komb-ra, akkor $f(\lambda\underline{u}) = \lambda f(\underline{u})$, hisz λu az u lin.komb-ja, továbbá
$f(\underline{u}+\underline{v}) = f(1\underline{u}+1\underline{v}) = 1f(\underline{u}) + 1f(\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$, tehát f homogén és additív, más szóval f lin.lekép. $\square$

Köv: Ha $f : U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.lekép-t.

Annak az igazolásához, hogy minden f lineáris leképezés előáll mátrixszal történő balszorzással csupán azt kell megmutatni, hogy van olyan $[f]$ mátrix, amire $f(\underline{b}_i) = [f]\underline{b}_i$ teljesül minden $\underline{b}_i$ báziselemre.
Ekkor ugyanis az $[f]$-fel való balszorzás lineáris leképezés, továbbá a fenti Következmény miatt $f(\underline{v}) = [f]\underline{v}$, azaz minden $\underline{v}$ vektor f szerinti $f(\underline{v})$ képe az $[f]$ mátrixszal történő balszorzással kapható.

Lemma: Tfh $U \le \mathbb{R}^k, V \le \mathbb{R}^n$, $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix, amire $A\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \le i \le m$ esetén.
Biz: Legyen $B = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m)$, és $C = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m)$. A Lemma állítása ekvivalens azzal, hogy van olyan A mátrix, amire $A \cdot B = C$. Láttuk, hogy ha C minden sora előáll B sorainak lineáris kombinációjaként, akkor van ilyen A. Azt fogjuk tehát most igazolni, hogy C minden sora előáll B sorainak lineáris kombinációjaként.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$, $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix, amire $A\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.
Biz: Mivel B bázis, ezért B oszlopai lin.ftn-ek. Így a B ESÁ-okkal RLA mátrixszá transzformált alakja $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m)$, azaz I_m áll az RLA mátrix tetején. Ezért I_m minden sora előáll a B sorainak lineáris kombinációjaként. Minden m oszlopból álló mátrix, így C is megkapható I_m sorainak lineáris kombinációjaként. Tehát C sorai előállnak nem csak I_m, de B sorainak lin.komb-jaként is. $\square$

Köv: Tetsz. $f : U \to V$ lin.lekép esetén van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f]\underline{u} = f(\underline{u})$ teljesül $\forall \underline{u} \in U$ esetén.
Biz: Legyen $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k\}$ az U altér egy bázisa. A fenti Lemma szerint van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f]\underline{b}_i = f(\underline{b}_i)$ teljesül minden báziselemre. Az $\underline{u} \mapsto [f]\underline{u}$ olyan lineáris leképezés, ami a $\underline{b}_i$ báziselemeken megegyezik f-fel. Mivel a lineáris leképezést a báziselemek képe meghatározza, ezért $f(\underline{u}) = [f]\underline{u}\ \forall \underline{u} \in U$. $\square$

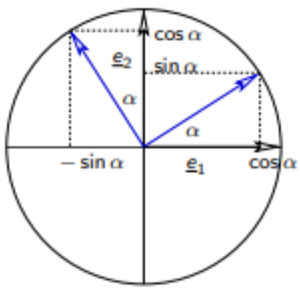
2. Lineáris lekepézés mátrixának meghatározása

Állítás: Tfh $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén, ahol $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.
Biz: $[f]\underline{e}_i = (f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), \ldots, f(\underline{e}_n))\,\underline{e}_i = f(\underline{e}_i)$ egy korábbi megfigyelés szerint. Ha tehát $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i$, akkor

$$[f]\underline{v} = [f](\textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i [f]\underline{e}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\underline{e}_i) = f(\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i) = f(\underline{v})$$

(A 2-dik és 4-dik egyenlőségnél f ill $[f]$ lineáris kombináció tartó tulajdonságát, a 3-diknál pedig a bizonyítás elején szereplő megfigyelést használtuk.) $\square$

Állítás: Tfh $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén, ahol $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.
Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa.
Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.



Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Megj: A Lemma azt mondja ki, hogy lineáris leképezések egymásutánja olyan lineáris leképezés, aminek a mátrixa a két lineáris leképezés mátrixának a szorzata, ahol a szorzást a másodiknak elvégzett leképezés mátrixával kezdjük.

3. le képezések egymásutánjának mátrixa

Állítás: Tfh $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén, ahol $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Köv: Ha értelmesek a műveletek, akkor $A(BC) = (AB)C$.

Köv: A fenti példában szereplő elforgatásokra igaz, hogy $f_{\alpha+\beta} = f_\alpha \circ f_\beta$, így $\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = [f_{\alpha+\beta}] = [f_\alpha][f_\beta] =$
$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$
Ebből pedig $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ ill. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$ adódik. □

Váratlan módszerrel igazoltuk a trigonometrikus függvények addíciós képletét.

4. mátrixszorzás asszociativitása

Biz: Először $g \circ f$ linearitását igazoljuk:
$g(f(\lambda\underline{u})) = g(\lambda f(\underline{u})) = \lambda g(f(\underline{u}))$ homogén, ill.
$g(f(\underline{u}+\underline{v})) = g(f(\underline{u}) + f(\underline{v})) = g(f(\underline{u})) + g(f(\underline{v}))$ lineáris.
Tehát $g \circ f$ csakugyan lineáris leképezés.
Végül a kompozíciómátrixról szóló képlet helyességét bizonyítjuk.

Biz: A tanultak szerint $[g \circ f]$ i-dik oszlopa $g(f(\underline{e}_i)) = [g]([f]\underline{e}_i)$. Láttuk, hogy $[f]\underline{e}_i$ az $[f]$ i-dik oszlopa, így $[g]([f]\underline{e}_i)$ a $[g]$ mátrix szorzata az $[f]$ mátrix i-dik oszlopával.
Ez pedig nem más, mint az $[g][f]$ szorzatmátrix i-dik oszlopa.
Ezek szerint a $[g \circ f]$ mátrix i-dik oszlopa megegyezik a $[g][f]$ mátrix i-dik oszlopával ($\forall i$-re), így aztán $[g \circ f] = [g][f]$. □

Köv: Ha értelmesek a műveletek, akkor $A(BC) = (AB)C$.

Biz: Legyenek A, B ill. C az f, g és h lineáris leképezések mátrixai. Ekkor $A(BC)$ az $f \circ (g \circ h)$, $(AB)C$ pedig az $(f \circ g) \circ h$ leképezés mátrixa. Márpedig $f \circ (g \circ h)(\underline{v}) = f(g(h(\underline{v}))) = (f \circ g) \circ h(\underline{v})$ miatt e két leképezés megegyezik, így a mátrixaik is azonosak. □

19. **Mátrix jobb- és balinverze**, ezek viszonya. **Balinverz kiszámítása ESÁ-okkal** és előjeles aldeterminánsokkal, **reguláris mátrixok** jellemzése determinánssal, sorokkal, oszkopokal ill. RLA mátrix segítségével.

1. Mátrix jobb- és balinverze

Láttuk, hogy egy mátrixra gondolhatunk úgy is, mint egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lin.lekép-re. Ha egy ilyen leképezés külcsönösen egyértelmű (mint pl. a síkban az origó körüli forgatás, vagy egy origóra illeszkedő egyenesre tükrözés, stb), akkor a leképezés „megfordítása" is lineáris leképezés, amit egy másik mátrix ír le. Ezt a két leképezést egymás után elvégezve minden vektor helyben marad, azaz a két leképezés egymásutánjának mátrixa egyfelől az egységmátrix, másfelől pedig a két leképezés mátrixának szorzata. Nem minden leképezésnek van ilyen megfordítása. A továbbiakban pontosan azt vizsgáljuk, hogy a mátrixok nyelvén hogyan írható le, hogy mikor van ilyen megfordítás, és konkrétan mi is az.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$. Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.

Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.

Biz: $A^B = A^B I_n = A^B(AA^J) = (A^B A)A^J = I_n A^J = A^J$. □

2. ezek viszonya

Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali. Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.

Megf: Ha A balról invertálható, akkor $A^B A = I_n$. Ezért I_n minden sora A sorainak lin.komb-ja, vagyis I_n minden sora benne van az A sorai által generált altérben. Mivel I_n sorai bázist alkotnak, ezért A sorainak is bázist kell alkotniuk, azaz A sorai lin.ftn-ek.

Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.

Biz: Mivel A sorai lineárisan függetlenek, ezért A sorai egy n-dimenziós alteret, konkrétan a teljes $\mathbb{R}^n$ teret generálják. Alakítsuk az A mátrixot ESÁ-ok segítségével RLA mátrixszá! Az így kapott A' mátrix n sora is a teljes $\mathbb{R}^n$ teret generálja. Ezért A' sorai lineárisan függetlenek, így A'-nek nem lehet csupa0 sora. Tehát $A' = I_n$.

Megf: (1) Minden ESÁ egy mátrixszal történő balszorzás.
(2) ESÁ-ok egymásutánja is egy mátrixszal történő balszorzás.
(3) Ha ESÁ-okkal A-ból I_n lesz, akkor A^B-vel szoroztunk balról.

Köv: Ha az $(A|I_n)$ mátrixból ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk, és A helyén megjelenik I_n, akkor I_n helyén A^B jelenik meg. Ha A helyén nem jelenik meg I_n, akkor A-nak nincs balinverze.

3. Balinverz kiszámítása ESÁ-okkal

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3&4&0&1&0&0 \\ 2&0&1&0&1&0 \\ 5&1&2&0&0&1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&4&-1&1&-1&0 \\ 2&0&1&0&1&0 \\ 5&1&2&0&0&1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&4&-1&1&-1&0 \\ 0&-8&3&-2&3&0 \\ 0&-19&7&-5&5&1 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&4&-1&1&-1&0 \\ 0&8&-3&2&-3&0 \\ 0&-3&1&-1&-1&1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&4&-1&1&-1&0 \\ 0&-1&0&-1&-6&3 \\ 0&-3&1&-1&-1&1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&4&-1&1&-1&0 \\ 0&1&0&1&6&-3 \\ 0&0&1&2&17&-8 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&4&0&3&16&-8 \\ 0&1&0&1&6&-3 \\ 0&0&1&2&17&-8 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&-1&-8&4 \\ 0&1&0&1&6&-3 \\ 0&0&1&2&17&-8 \end{array}\right)$$

A bal oldalon egységmátrixot kaptunk, ezért $A^B = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 17 & -8 \end{pmatrix}$

Ellenőrzés:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} &&&&&& -1&-8&4 \\ &&&&&& 1&6&-3 \\ &&&&&& 2&17&-8 \\ \hline &&& 3&4&0& 1&0&0 \\ &&& 2&0&1& 0&1&0 \\ &&& 5&1&2& 0&0&1 \\ \hline -1&-8&4& 1&0&0 &&& \\ 1&6&-3& 0&1&0 &&& \\ 2&17&-8& 0&0&1 &&& \end{array}$$

győztünk, sőt: $A^B = A^J$.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3&4&-1&1&0&0 \\ 2&0&2&0&1&0 \\ 5&1&4&0&0&1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&4&-3&1&-1&0 \\ 2&0&2&0&1&0 \\ 5&1&4&0&0&1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&4&-3&1&-1&0 \\ 0&-8&8&-2&3&0 \\ 0&-19&19&-5&5&1 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&4&-3&1&-1&0 \\ 0&8&-8&2&-3&0 \\ 0&-3&3&-1&-1&1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&4&-3&1&-1&0 \\ 0&-1&1&-1&-6&3 \\ 0&-3&3&-1&-1&1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&4&-3&1&-1&0 \\ 0&1&-1&1&6&-3 \\ 0&0&0&2&17&-8 \end{array}\right)$$

A bal oldali részben csupa0 sort kaptunk, tehát az A sorai által generált alteret két vektor generálja, így nem lehet benne három független vektor. Ezért A sorai nem generálhatják a standard bázis elemeit, vagyis I_n biztosan nem kapható meg A-ból balszorzással, azaz A-nak nincs balinverze.

Köv: Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix sorai lin.ftn-ek, akkor A-nak van balinverze, ha A sorai nem lin.ftn-ek, akkor A-nak nincs balinverze.

Ugyanez a transzponáltra a jobbinverz létezését karakterizálja:
Köv: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oszlopai lin.ftn-ek, akkor A-nak van jobbinverze, ha pedig A oszlopai nem lin.ftn-ek, akkor nincs.

---

4. és előjeles aldeterminánsokkal

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)

Biz: Legyen V az A sorai által generált altér, és A' az A-ból ESÁ-okkal kapható RLA mátrix (ami felső háromszögmátrix). Mivel ESÁ nem változtat a sorok által generált altéren, ezért A' sorai is V-t generálják. Így (A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($\dim V = n$) $\iff$ (A' sorai lin.ftn-ek) $\iff$ (A'-nek nincs csupa0 sora) $\iff$ (A' minden sorában van v1) $\iff$ ($|A'| = 1$) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Az utolsó ekvivalencia azért igaz, mert ESÁ nem változtat a determináns 0 voltán. □

Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Biz: (A-nak van balinverze) $\iff$ (A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$) $\iff$ ($|A^\top| \neq 0$) $\iff$ ($A^\top$ sorai lin.ftn-ek) $\iff$ (A oszlopai lin.ftn-ek) $\iff$ (A-nak van jobbinverze) $\square$

Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.
Biz: Az AB i-dik sorának j-dik eleme az A i-dik sorának és B j-dik oszlopának skaláris szorzata, azaz
$a_{i,1}A_{j,1} + a_{i,2}A_{j,2} + \ldots + a_{i,n}A_{j,n}$, ahol $a_{i,k}$ az A mátrix i-dik sorának j-dik elemét jelenti. Ha $i = j$, akkor ez az összeg épp az A i-dik sor szerinti kifejtése, vagyis $|A|$. Ha $i \neq j$, akkor ez az összeg egy ú.n. ferde kifejtés: annak az A' mátrixnak az i-dik sor szerinti kifejtése, amit A-ból úgy kapunk, hogy az i-dik sor helyére a j-diket írjuk. Mivel A' két sora egyforma, ezért $|A'| = 0$. $\square$

j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.
Köv: A fenti tétel jelöléseivel: ha $|A| \neq 0$, akkor $A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$.
Biz: $A \cdot \left(\frac{1}{|A|}B\right) = \frac{1}{|A|}(AB) = \frac{1}{|A|}(|A|I_n) = I_n \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$ $\square$

Köv: Négyzetes mátrix inverzének kiszámítására két módszerünk is van: vagy egy $n \times 2n$ méretű mátrixból RLA mátrixot készítünk ESÁ-okkal, vagy kiszámítjuk $|A|$-t és az összes előjeles aldeterminánst.

5. **reguláris mátrixok** jellemzése determinánssal

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix reguláris (avagy invertálható), ha A-nak van inverze, és szinguláris ha nincs.
Köv: Tfh A négyzetes mátrix. Ekkor (A reguláris) $\iff$ ($|A| \neq 0$) $\iff$ (A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ (A oszlopai lin.ftn-ek) $\iff$ (az A-ból kapott RLA mátrix minden sorában van v1)

Láttuk, hogy egy négyzetes mátrixnak vagy a sorai is és az oszlopai is lin.ftn-ek, vagy se a sorai, se az oszlopai nem azok. Lehet-e általánosítani ezt a megfigyelést nem négyzetes mátrixokra?

Ebben a formában nem.

Ha mondjuk $n < k$ és egy $n \times k$ méretű mátrix sorai függetlenek, akkor az oszlopok n magasságú vektorok, tehát legfeljebb n lehet közülük független, k semmiképp.

Van azonban egy jól használható általánosítása a fenti ténynek. Megmutatjuk, hogy ha egy M mátrixnak van k lin.ftn sora, akkor van k lin.ftn oszlopa is, és viszont.

Ebből következik pl. a négyzetes mátrixok fenti tulajdonsága is.

20. **Sor- oszlop- és determinánsrang**, ezek viszonya és **kiszámítása**. Összeg és szorzat rangja. **Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja**, a megoldhatóság és az oszlopok alterének kapcsolata. Az egyértelmű megoldhatóság feltétele $n \times n$ együtthatómátrix esetén.

Sor-, oszlop-, és determináns rang

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Biz: (1): A transzponált sorai a mátrix oszlopainak felelnek meg.
(2) A sorok által generált altér egy bázisát választhatjuk a sorvektorokból. Ez a bázis a sorok egy maximális méretű lin.ftn részhalmaza. Ezért ennek a bázisnak az elemszáma $s(A)$, vagyis a sorvektorok által generált altér dimenziója.
Az oszlopokra vonatkozó állítást hasonló érvelés igazolja. □

Ezek viszonya és kiszámítása

Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Biz: Láttuk, hogy ESÁ során a sorok által generált altér nem változik, így a dimenziója is ugyanannyi marad.
ESÁ hatására az oszlopok közti lineáris összefüggések sem változnak, ezért oszlopok egy halmaza pontosan akkor lin.ftn ESÁ előtt, ha ugyanezen oszlophalmaz lin.ftn ESÁ után. □

Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Biz: A v1-ekhez tartozó oszlopok az oszlopok által generált altér bázisát alkotják, így $o(A)$ a v1-ek száma.
RLA mátrix csupa 0 sorait elhagyva a maradék (v1-t tartalmazó) sorok lin.ftn-ek, hisz egyik se áll elő a többi lin.komb-jaként. Ezért $s(A)$ is a v1-ek száma, tehát $s(A) = o(A)$. □

Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Biz: Legyen A' az A-ból ESÁ-okkal kapott RLA mátrix. Ekkor $s(A) = s(A') = o(A') = o(A)$.

Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Biz: $\Rightarrow$: Tfh van k lin.ftn sor, ezek alkossák az A' mátrixot. Ekkor $k = s(A') = o(A')$: A'-nek van k lin.ftn oszlopa. Alkossák ezek az A'' mátrixot. Így $o(A'') = k = s(A'')$, tehát A'' az A egy k méretű nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixa, azaz $d(A) \geq k$.

Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$

Biz: $\Leftarrow$: Tfh A'' egy k méretű nemnulla determinánsú négyzetes részmátrix. Az inverzről tanultaknál láttuk, hogy A'' sorai lin.ftn-ek. Ezért az A'' sorainak megfelelő A-beli sorok is lin.ftn-ek, vagyis $s(A) \geq k$. $\square$

Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.

Biz: Ha $s(A) = k$, akkor az előző állítás miatt $d(A) \geq k$. Ha pedig $d(A) = k$, akkor $s(A) \geq k$. Ezért $s(A) = d(A)$. Korábban láttuk, hogy $s(A) = o(A)$. $\square$

Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix rangja $r(A) = s(A)$.

Rang meghatározása:

ESÁ-okkal képzett RLA mátrix v1-ei száma.

Összeg és szorzat rangja

Lemma: Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, akkor $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

Biz: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{r(A)}$ az A lin.ftn sorai és $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{r(B)}$ a B lin.ftn sorai. Ekkor az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{r(A)}$ sorvektorok generálják A minden sorát, és a $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{r(B)}$ sorok generálják B minden sorát. Mivel $A+B$ minden sorát generálják A sorai és B sorai, ezért $A+B$ sorait generálják az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{r(A)}, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{r(B)}$ vektorok is. Az $A+B$ sorvektorai által generált altér dimenziójára tehát $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ teljesül. $\square$

Lemma: $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ $\Rightarrow$ $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$.

Biz: Láttuk, hogy AB minden sora a B sorainak lin.komb-ja, ezért AB sorvektorai által generált altér része a B sorvektorai által generált altérnek. Így az első altér dimenziója nem lehet nagyobb a másodikénál, vagyis $r(AB) = s(AB) \leq s(B) = r(B)$.
Hasonlóan, AB minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja, tehát az AB oszlopai által generált altér dimenziója nem nagyobb az A oszlopai által generáltnál: $r(AB) = o(AB) \leq o(A) = r(A)$.
Innen a tétel állítása közvetlenül adódik. $\square$

Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

Példa:

$$\begin{array}{r} x_1 - 3x_3 + 5x_4 = -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 11 \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix, $\underline{b}$ a konstansokat, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

A megoldhatóság és az oszlopok alterének kapcsolata

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix, $\underline{b}$ a konstansokat, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

Kínzó kérdés: Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható?

Frappáns válasz: A kérdés voltaképpen az, hogy mikor található olyan $\underline{x}$ oszlopvektor (konkrét számokkal), amire $A\underline{x} = \underline{b}$ teljesül.

Láttuk: Tetsz. A, C mátrixra (C előáll $AB = C$ alakban) $\iff$ (C minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja)

Köv: Ha A oszlopai $A^1, \ldots$, akkor $(\exists \underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}) \iff (\underline{b} \in \langle A^1, \ldots \rangle)$ $\iff (\langle A^1, \ldots \rangle = \langle \underline{b}, A^1, \ldots \rangle) \iff (\dim\langle A^1, \ldots \rangle = \dim\langle \underline{b}, A^1, \ldots \rangle)$

Az egyértelmű megoldhatóság feltétele n × n együtthatómátrix esetén

Lineáris egyenletrendszerek érdekes speciális esete, ha az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik. Ilyenkor az együtthatómátrix négyzetes. Korábban láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

Kínzó kérdés: Lehet-e következtetni a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrix alapján?

Válasz: Ez a kérdés csak négyzetes együtthatómátrix érdekes.

Állítás: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $(A\underline{x} = \underline{b}$ egyért. megoldható$) \iff (|A| \neq 0)$

Biz: $\Rightarrow$: Tfh $|A| \neq 0$. Ekkor A oszlopai nem lineárisan függetlenek, ezért A oszlopainak valamely nemtriviális lineáris kombinációja $\underline{0}$-t ad: $\exists \underline{y} \neq \underline{0}: A\underline{y} = \underline{0}$. Ezért ha $\underline{x}$ az $A\underline{x} = \underline{b}$ megoldása, akkor $A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$ miatt $\underline{x} + \underline{y}$ is megoldás. Tehát az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenletnek nincs egyértelmű megoldása.

Biz: $\Rightarrow$: Tfh $|A| \neq 0$. Ekkor A oszlopai nem lineárisan függetlenek, ezért A oszlopainak valamely nemtriviális lineáris kombinációja $\underline{0}$-t ad: $\exists \underline{y} \neq \underline{0}: A\underline{y} = \underline{0}$. Ezért ha $\underline{x}$ az $A\underline{x} = \underline{b}$ megoldása, akkor $A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$ miatt $\underline{x} + \underline{y}$ is megoldás. Tehát az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenletnek nincs egyértelmű megoldása.

$\Leftarrow$: $|A| \neq 0$, ezért A-nak van inverze. Így $\left[A\underline{x} = \underline{b}\right] \iff \left[\underline{x} = (A^{-1}A)\underline{x} = A^{-1}(A\underline{x}) = A^{-1}\underline{b}\right]$, azaz $\underline{x}$ egyértelmű. $\square$