Altér bázisa

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa a V egy lin.ftn generátorrendszere.
Példa: Az $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektorok az $\mathbb{R}^n$ standard bázisát alkotják.
Kínzó kérdés: Minden altérnek van bázisa? Ha $\mathbb{R}^n$ egy V alterének van, akkor hogyan lehet előállítani V egy bázisát?

1. módszer: Ha $V = \langle G \rangle$, azaz ha ismert a V egy véges G generátorrendszere, akkor G-t addig ritkítjuk, amíg lin.ftn nem lesz. Konkrétan: ha egy $\underline{g} \in G$ generátorelem előáll a $G \setminus \{\underline{g}\}$ elemeinek alkalmas lin. kombinácójaként, akkor $G \setminus \{\underline{g}\}$ is generálja V-t. Ezért $\underline{g}$-t eldobhatjuk. Ha már nincs ilyen eldobható $\underline{g}$ vektor, akkor G maradéka nem csak generátorrendszer, de lin.ftn is.

2. módszer: Felépíthetjük V bázisát a V egy tetsz. F lin.ftn rendszeréből (akár $F = \emptyset$-ból) kiindulva. Ha $\langle F \rangle = V$, akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor tetsz. $\underline{f} \in V \setminus \langle F \rangle$ esetén $F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn marad. Az FG-egyenlőtlenség miatt F nem tartalmazhat n-nél több elemet, ezért legfeljebb n lépésben megkapjuk V bázisát.

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{array}{rrrrr|rrrrr|rrrrr|}
3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\
-1 & 3 & 4 & -9 & 2 & -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\
0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\
1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 & 5 & 5 & -10 & -7
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|rrrrr|rrrrr|}
1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\
0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\
0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\
0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|}
\underline{u} & \underline{v} & \underline{w} & \underline{x} & \underline{y} \\
1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Ezek szerint $\underline{w} = \underline{v} - \underline{u}$, $\underline{x} = 3\underline{u} - 2\underline{v}$, és $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}\}$ lin.ftn generátorrendszer, tehát a V altér bázisát alkotja. $\square$

Bázis előállítása egyenletrendszer megoldásával

Példa: Keressük meg az alábbi $V \leq \mathbb{R}^4$ altér egy bázisát!

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, 3x_2 - 2x_4 = 0 \right\}$$

Megoldás: Az altér egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaiból áll. (Homogén: a jobboldalon 0-k állnak, amiket a kib.egyhómx-ból elhagyunk.) A megoldásokat leíró képletből fogjuk meghatározni V egy bázisát.

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \\
0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}, \\
x_1 = -x_3 - \frac{5}{3}x_4, \\
x_2 = \frac{2}{3}x_4.
\end{array}$$

A bázis elkészítéséhez a szp-ek olyan lin.ftn értékadásait keressük, amelyek lin.komb-jaként a szp-ek tetsz. értékadása előáll. Ilyen pl., ha minden lehetséges módon egy szp-nek 1, a többinek 0 értéket adunk. Azaz az $x_3 = 1, x_4 = 0$ ill. $x_3 = 0, x_4 = 1$ értékadásokhoz a

$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, és $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorok alkotta bázis tartozik. $\square$

Generált altér megadása egyenlőségekkel

Példa: Írjuk fel a V alteret meghatározó homogén lin.egyrsz-t, ahol V-t az alábbi vektorok generálják.

$$\underline{u}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \underline{v}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\-1\end{pmatrix},\ \underline{w}=\begin{pmatrix}5\\-9\\2\\5\end{pmatrix},\ \underline{z}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\3\end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{z}|\underline{x})$ mátrixot RLA-ra (LA-ra) hozzuk.

$$\begin{array}{rrrrr|}3&2&5&2&x_1\\-1&3&-9&2&x_2\\0&-1&2&2&x_3\\1&-1&5&3&x_4\end{array}\ \begin{array}{rrrrr|}1&-1&5&3&x_4\\-1&3&-9&2&x_2\\0&-1&2&2&x_3\\3&2&5&2&x_1\end{array}\ \begin{array}{rrrrr|}1&-1&5&3&x_4\\0&2&-4&5&x_2+x_4\\0&-1&2&2&x_3\\0&5&-10&-7&x_1-3x_4\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|}1&-1&5&3&x_4\\0&-1&2&2&x_3\\0&2&-4&5&x_2+x_4\\0&5&-10&-7&x_1-3x_4\end{array}\ \begin{array}{rrrrr|}1&-1&5&3&x_4\\0&1&-2&-2&-x_3\\0&2&-4&5&x_2+x_4\\0&5&-10&-7&x_1-3x_4\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|}1&0&3&1&x_4-x_3\\0&1&-2&-2&-x_3\\0&0&0&9&x_2+2x_3+x_4\\0&0&0&3&x_1+5x_3-3x_4\end{array}\ \begin{array}{rrrrr|}1&0&3&0&\dots\\0&1&-2&0&\dots\\0&0&0&1&\frac{x_2+2x_3+x_4}{9}\\0&0&0&0&\frac{3x_1-x_2+13x_3-10x_4}{3}\end{array}$$

A kiindulási mátrix 5-dik oszlopa pontosan akkor van V-ben, ha az első 4 oszlop generálja. Ez azzal ekvivalens, hogy az RLA mátrix első 4 oszlopa generálja az 5-diket. Mivel $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ a generáló oszlopok között vannak, ezért csupán $3x_1 - x_2 + 13x_3 - 10x_4 = 0$ a feltétel. $\square$

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Biz: Mivel B_1 lin.ftn és B_2 generátorrendszer V-ben, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt $|B_1| \leq |B_2|$.
Az is igaz, hogy B_2 lin.ftn és B_1 generátorrendszer V-ben, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt $|B_2| \leq |B_1|$ is teljesül.
A két eredmény összevetéséből $|B_1| = |B_2|$ adódik. $\square$

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.
Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.
Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n. (U.i. $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ lin.ftn gen.rsz.)

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.

Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.

Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n.

Állítás: Ha $U \leq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\dim U \leq \dim V$.

Biz: Legyen B az U bázisa. Ekkor $B \subseteq V$ lin.ftn, ezért a korábban látott 2. módszerrel B-t ki lehet egészíteni V egy B' bázisává, így $\dim U = |B| \leq |B'| = \dim V$. $\square$

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.
Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.
Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n.
Állítás: Ha $U \leq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\dim U \leq \dim V$.
Állítás: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$ és V_1, V_2 a V alterei, akkor $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim V \geq \dim V_1 + \dim V_2$.
Biz: Egészítsük ki az $U \cap V$ egy B bázisát a V_1 egy $B \cup B_1$ ill. a V_2 egy $B \cup B_2$ bázisává. Igazoljuk, hogy $B \cup B_1 \cup B_2$ lin.ftn. Tfh $\sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b} + \sum_{\underline{b}_1 \in B_1} \lambda_{\underline{b}_1} \underline{b}_1 + \sum_{\underline{b}_2 \in B_2} \lambda_{\underline{b}_2} \underline{b}_2 = \underline{0}$. Ezt átrendezve: $V_1 \ni \underline{x} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b} + \sum_{\underline{b}_1 \in B_1} \lambda_{\underline{b}_1} \underline{b}_1 = -\sum_{\underline{b}_2 \in B_2} \lambda_{\underline{b}_2} \underline{b}_2 \in V_2$ adódik, ezért $\underline{x} \in V_1 \cap V_2$. Ekkor $\underline{x} = \sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b}$, hisz B a $V_1 \cap V_2$ bázisa. Innen $\sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b} + \sum_{\underline{b}_2 \in B_2} \lambda_{\underline{b}_2} \underline{b}_2 = \underline{x} - \underline{x} = \underline{0}$. A $B \cup B_2$ lin.ftn-sége miatt $\lambda_{\underline{b}_2} = 0 \; \forall \underline{b}_2 \in B_2$. Hasonlóan $\lambda_{\underline{b}_1} = 0 \; \forall \underline{b}_1 \in B_1$, és $\lambda_{\underline{b}} = 0 \; \forall \underline{b} \in B$, azaz $B \cup B_1 \cup B_2$ lin.ftn. Ebből adódik, hogy $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim V \geq |B| + |B_1| + |B_2| + |B| = \dim V_1 + \dim V_2$. $\square$

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.
Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.
Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n.
Állítás: Ha $U \leq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\dim U \leq \dim V$.
Állítás: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$ és V_1, V_2 a V alterei, akkor $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim V \geq \dim V_1 + \dim V_2$.
Köv: $\mathbb{R}^3$-ban bármely két origón áthaladó sík (más szóval: kétdimenziós altér) tartalmaz közös egyenest.
Megj: $\mathbb{R}^4$-ben már található két olyan origón áthaladó sík, amik csak az origóban metszik egymást. Ilyenek pl. $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle$ ill. $\langle \underline{e}_3, \underline{e}_4 \rangle$.

A továbbiakban azt szeretnénk indokolni, hogy $\mathbb{R}^n$ tetszőleges k dimenziós altere „lényegében” úgy viselkedik, mint $\mathbb{R}^k$.

Bázis szerinti koordináták

Legyen B a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa. Mivel B generátorrendszer, minden $\underline{v} \in V$ előáll a B elemeinek lin.komb-jaként, azaz $\underline{v} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b}$ alakban.

A B bázis lin.ftn-ségéből pedig az következik, hogy tetszőleges $\underline{v} \in V$ lin.komb-ként történő előállítása egyértelmű: ha $\underline{v} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b} = \sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b}$, akkor $\lambda_{\underline{b}} = \mu_{\underline{b}}$ $\forall \underline{b} \in B$.

Ez a gondolatmenet indokolja az alábbi fogalom jóldefiniáltságát.

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora

$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora

$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{u}, \underline{v} \in V$ ill. $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Biz: (1) Tfh $[\underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$ és $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}$. Ekkor $\underline{u} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{b}_i$ és $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \underline{b}_i$, tehát

$\underline{u} + \underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{b}_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) \underline{b}_i$, ezért

$$[\underline{u} + \underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_k + \mu_k \end{pmatrix} = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B \ .$$

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora
$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$

Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{u}, \underline{v} \in V$ ill. $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Biz: (2) Tfh $[\underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$. Ekkor

$$\lambda \underline{u} = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda \lambda_i \underline{b}_i \Rightarrow [\lambda \underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda\lambda_k \end{pmatrix} = \lambda [\underline{u}]_B \quad \square$$

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor *B bázis szerinti koordinátavektora*

$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{u}, \underline{v} \in V$ ill. $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Megj: A fenti állítás azt mutatja meg, hogy $\mathbb{R}^n$ bármely V altere lényegében ugyanúgy viselkedik, mint az $\mathbb{R}^k$ tér, ahol $k = \dim V$.

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$

Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{u}, \underline{v} \in V$ ill. $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Kínzó kérdés: Hogyan kell a koordinátavektort kiszámítani?

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ill. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.

Megoldás: A $(\underline{b}_1 | \underline{b}_2 | \underline{v})$ mátrixot RLA-vá transzformáljuk:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|} 3 & 4 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 & -1 & 0 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Az RLA mx harmadik oszlopa az első kettő lineáris kombinációja, így $\underline{v} = -3\underline{b}_1 + 4\underline{b}_2$, azaz $\underline{v} \in V$ és $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. □

Mi haszna a lineáris algebrának???

Amirők itt és nem esik szó: kapcsolat a koordinátageometriával, konvex alakzatok geometriájával ill. lineáris célfüggvény optimalizálását előíró feladatok megoldásával.
A matematikailag különösen érdekes alkalmazások általában abból adódnak, hogy egy lineáris algebrától látszólag távol álló feladatról kiderül, hogy megfogalmazható lin.alg terminológiával. Az így rendelkezésre álló eszközök pedig jóval hatékonyabbak lehetnek, mint az eredeti feladat témakörében szokásosak. Akár a legegyszerűbb linalg. eszköz (mint pl. az FG-egyenlőtlenség) nehéz tételek meglepően egyszerű igazolására is alkalmas lehet.
Buta kérdés: Egy n-elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet kiválasztani úgy, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n-elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet kiválasztani úgy, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha $\emptyset \neq A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda \ \forall 0 < i < j \leq k$, akkor $k \leq n$.

Biz: (1) Ha $\lambda = 0$, akkor az $A_1, \ldots, A_k$ halmazok diszjunktak, és az állítás triviális, hisz $|A_i| \geq 1 \ \forall i$. Feltehetjük, hogy $\lambda > 0$.

(2) Világos, hogy $|A_i| \geq \lambda \ \forall 1 \leq i \leq k$. Ha mondjuk $|A_1| = \lambda$, akkor $A_1 \subseteq A_j \ \forall j \neq 1$. Ezért az $A_2, \ldots A_n$ halmazok A_1-en kívüli része egymástól diszjunkt, tehát a darabszámuk legfeljebb $n - \lambda$ lehet, és ebből $k \leq n - \lambda + 1 \leq n$ adódik.

Feltehetjük tehát, hogy $|A_i| > \lambda$ teljesül az $A_1, \ldots, A_k$ halmazok mindegyikére.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n-elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet kiválasztani úgy, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha $\emptyset \neq A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda \ \forall 0 < i < j \leq k$, akkor $k \leq n$.

Biz: (3) Legyen $|A_i| = \lambda + \mu_i$, ahol $\mu_i > 0 \ \forall 1 \leq i \leq k$.

Jelölje rendre $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ az $A_1, \ldots, A_k$ halmazok karakterisztikus vektorát, azaz $\underline{a}_i = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_n \end{pmatrix}$, ahol $\chi_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_j \in A_i \\ 0 & \text{ha } x_j \notin A_i \end{cases}$.

Ha az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok lin.ftn-ek, akkor az FG-egyenlőtlenség miatt $k \leq \dim \mathbb{R}^n = n$.

Tfh $\lambda_1 \underline{a}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{a}_k = \underline{0}$. A bal oldali vektor A_j elemeinek megfelelő koordinátáit összeadva $\mu_j \lambda_j + \lambda \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ adódik.

Ha $\sum_{i=1}^k \lambda_i > 0$, akkor $\lambda_j < 0 \ \forall j$, így $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 0$, ellentmondás.

Hasonlóan, ha $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 0$, akkor $\lambda_j > 0 \ \forall j$, ez sem lehetséges.

Végül, ha ha $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$, akkor $\lambda_j = 0 \ \forall j$, és az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok csakugyan lin.ftn-ek.