Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

A számítástudomány alapjai

Összefoglaló jegyzet

Készítette: Illyés Dávid

Ez a jegyzet nagyon hasonlóan van struktúrálva az előadás jegyzetekhez és fő célja, hogy olyan módon adja át a "A Programozás Alapjai 1" nevű tárgy anyagát, hogy az teljesen kezdők számára is könnyen megérthető és megtanulható legyen.

February 11, 2024

Tartalomjegyzék

1 A gráfelmélet alapjai

1.1 Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf

Példa: Ha $V \neq 0$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$, ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$. V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak), E pedig G éleinek halmaza.

Példa: $G = (\{a, b, c, d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf diagramja a G egy olyan lerajzolása, amiben V-nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u-t és v-t összekötő görbe felel meg.

Terminológia & konvenciók: Gráf alatt rendszerint egyszerű, irányítatlan gráfot értünk. Ha G egy gráf, akkor $V(G)$ a G csúcshalmazát, $E(G)$ pedig G élhalmazát jelöli, azaz $G = (V(G), E(G))$. Az $e = \{u, v\}$ élt röviden uv-vel jelöljük.

Ekkor e az u és v csúcsokat köti össze. Továbbá u és v az e végpontjai, amelyek az e élre illeszkednek, és e mentén szomszédosak.

1.2 Multigráfok és irányított gráfok

Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

Def: Az n-pontú út, n-pontú kör, ill. n-pontú teljes gráf jele rendre P_n, C_n, ill. K_n. (P_1, P_2, P_3 elfajulók.) **Megf:** $K_1 = P_1, P_2 = C_2, C_3 = K_3$

Def: $c \in V(G)$ esetén a v-re illeszkedő élek száma a v fokszáma. Jelölése $d_g(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít. (Irányított gráf esetén $\delta(v)$ (Delta) ill. $\rho(v)$ (Rho) a v ki- ill. befokát jelöli.)

Def: A G gráf maximális ill. minimális fokszáma $\Delta(G)$ ill. $\delta(G)$. G reguláris, ha minden csúcsának foka ugyanannyi: $\Delta(G) = \delta(G), G$ pedig k-reguláris, ha minden csúcsának pontosan k a fokszáma.

Megf: Minden kör 2-reguláris, K_n pedig $(n - 1)$-reguláris.

1.3 Handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(V) = |E|$, azaz a csúcsok ki- és befokainak összege is az élszámot adja meg.

Biz: Az egyes csúcsokból kilépő éleket megszámolva G minden irányított élét pontosan egyszer számoljuk meg. Ezért a kifokok összege az élszám. A belépő éleket leszámlálva hasonló igaz, ezért a befokok összege is az élszám. □

A KFL bizonyítása: Készítsükel a G' digráfot úgy, hogy G minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítjük. Ekkor

$$\sum_{v \in V} d_G(V) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)| \qquad \square$$

Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna az általánosított kéfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. 0-elű (üres)gráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 1-gyel növeli az élszámot is és a ki/befokok összegét is.

Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna a kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-vel növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszámösszeget is.

1.4 Komplementer és izomorfia

Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V, (G), \binom{v}{2} \setminus E(G))$.

Megj: G és $\overline{G}$ csúcsai megegyeznek, és két csúcs pontosan akkor szomszédos $\overline{G}$-ben, ha nem szomszédosak G-ben.

Példa:

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gárf és a $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}} = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsra.

Biz: A K_n teljes frág minden éle a G és $\overline{G}$ gráfok közül pontosan az egyikhez tartozik. Ezért $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v)$ megyegyezik a v csúcs K_n-beli fokszámával, ami $n - 1$. $\square$

Def: A G és G' gráfok akkor izomorfak, ha mindekét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n-ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G-ben, mint az u-nak és v-nek megfelelő sorszámú csúcsok között G'-ben. Jelölése: $G \cong G'$.

Példa:

Megf: Ha $G \cong G'$, akkor G és G' lényegében ugyanúgy néznek ki. Így például minden fokszám ugyanannyiszor lép fel G-ben mint G'-ben, ugyan annyi C_{42} kör található G-ben, mint G'-ben, stb.

1.5 Gráfoperációk

Def: Éltörlés, csúcstörlés, élhozzáadás.

Def: Feszítő részgráf: éltörlésekkel kapható gráf.

Feszített részgráf: csúcstörlésekkel kapható gráf.

Részgráf: él- és csúcstörlésekkel kapható gráf.

Példa: H_1, H_2, H_3: a G feszítő, feszített, jelzőnélküli részgráfjai.

Megf: H a G részgráfja $\iff V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$.

H a G feszítő részgráfja $\iff V(H) = V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$.

H a G feszített részgráfja $\iff V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H)$ a H.

Megj: A gráf definíciója megengedi, hogy a gráf egyik részéből egyáltalán ne vezessen él a gráf maradék részébe, azaz a gráf egyik csúcsából ne lehessen eleken keresztül eljutni a gráf egy másik csúcsába. Ez történik pl. az üresgráf (alias $\overline{K_n}$) esetén.

1.6 Háromféle elérhetőség, összefüggőség

Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$. (Tulajdonképp egyik csúcsból eljutunk egy másik csúcsba mindig élek mentén haladva.)

Séta: olyan élsorozat, amelyikban nincsen ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Terminológia: Ha a kezdőpont u, a végpont v, akkor uv-élsorozatról, uv-sétáról, ill. uv-útról beszélünk. Ha hangsúlyozni szeretnénk, hogy $u = v$, de a kezdő (és vég)pontot nem akarjuk megnevezni, akkor zárt élsorozatról, körsétáról ill. körről beszélünk.

Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat $\square$

Állítás: G-ben $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út $\square$

Def: G irányítatlan gráf u-ból v **elérhető** ($u \sim v$), ha $\exists uv$-út G-ben.

Def: A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

Megj: (1) Az összefüggőség szokásos definíciója nem a $\sim$ reláció segítségével történik, hanem valahogy így: a G irányítatlan gráfot akkor mondjuk öszefüggőnek, ha G bármely két csúcsa között vezet út G-ben.

Megj: (2) Az előző definíciót irányított gráfokra is kterjeszthető: a G irányított gráfot akkor mondjuk **erősen összefüggő**nek, ha G bármely $u, v \in V(G)$ esetén van **irányított** uv-út G-ben.

Megj: (3) Irányított gráf másfajta összefüggősége is értelmezhető: a G irányított gráfot akkor mondjuk **gyengén összefügő**nek, ha a G-nek megfelelő irányítatlan gráf összefüggő.

Köv: Ha G irányítatlan gráf, akkor $\sim$ ekvivalenciareláció:

(1) $\forall u \in V(G) : u \sim u$, (2) $\forall u, v \in V(G) : u \sim v \Rightarrow v \sim u$, és (3) $\forall u, v, w \in V(G) : u \sim v \ \sim w \Rightarrow u \sim w$. $\square$

Def: A G gráf **(összefüggő) komponense** a $\sim$ ekvivalenciaosztálya. Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

1.7 Gráfok összefüggősége a gyakorlatban

Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in$ esetén $v \sim v'$.

(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. $\square$

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. $\square$

Élhozzáadási lemma (ÉHL): Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.

(1) G és G' komponensei megegyeznek, de G'-nek több köre van, mint G-nek.

(2) G és G' körei megegyeznek, de G'-nek eggyel keveseb komponense van, mint G-nek.

1.8 Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük. Az öszefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.

Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa.

Példa:

Megf: (1) P_n fa minden $n \geq 1$ egész esetén. (2) Fához egy új csúcsot egy éllel bekötve fát kapunk:

Lemma: G n-csúcsú, k-komponensű erdő $\Rightarrow |E(G)| = n - k$.

Biz: Építsük fel G-t a $\overline{K_n}$ üresgráfból az élek egyenkénti behúzásával. G körmentes, ezért az ÉHL miatt minden lé zöld: behúzásakor 1-gyel csökken a komponensek száma. A $\overline{K_n}$ üresgráfnak n komponense van, G-nek pedig k. Ezért pontosan $n - k$ zöld élt kellett behúzni G felépítéséhez. $\square$

Köv: Ha F egy n-csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.

Biz: F egy 1-komponensű erdő, így az előző Lemma alkalmazható $k = 1$ helyettesítéssel.

Állítás: Tetsz. n-csúcsú G gráf esetén az alábbi három tulajdonság közül bármely kettőből következik a harmadik. (a) G körmentes. (b) G összefüggő. (c) $|E(G)| = n - 1$.

Biz: $(a) + (b) \Rightarrow (c) : \checkmark$

$(a) + (c) \Rightarrow (b)$: Építsük fel G-t élek egyenkénti behúzásával. $n - 1$ él egyikének behúzása se hoz létre kört, ezért az ÉHL miatt minden él zöld, és 1-gyel csökkenti a komponensszámot. Végül $n - (n - 1) = 1$ komponens marad, tehát G összefüggő.

$(b) + (c) \Rightarrow (a)$: Építsük fel G-t élek egyenkénti behúzásával. Mivel a komponensek száma végül 1 lesz, ezért $n-1$ zöld élt kellett behúzni. (c) miatt G összes éle zöld, piros éle nincs. Az ÉHL miatt G körmentes. $\square$

1.9 Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor
(1) $(F-e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.
(2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.
(3) $(F+e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re.
(4) Ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa levél, ha $d(v) = 1$.

Biz: (1): $F-e$ erdő, hisz körmentes. $F = (F-e)+e$, és mivel F is körmentes, e zöld az ÉHL miatt. Ezért F-nek 1-gyel kevesebb komponense van, mint $(F-e)$-nek. Mivel F-nek 1 komponense van, $(F-e)$-nek 2. $\square$

Biz: (2): F összefüggő, ezért van (legalább egy) uv-útja, mnodjuk P. Ezen P út bármely e élét elhagyva, a kapott $F-e$ grágnak (1) miatt két komponense van, melyek közül az egyik u-t, a másik v-t tartalmazza. Ezért $(F-e)$-ben nincs uv-út. Azt kaptuk, hogy P minden éle benne van F minden uv-útjában, ezért F-ben P-n kívül nincsmás uv-út. $\square$

Biz: (3): Tfh $e = uv$. Minden F körmentes, ezért $F+e$ minden köre e-ből és F egy uv-útjából tevődik össze. Ezért $F+e$ köreinek száma megegyezik az F fa uv-útjainka számával, ami (2) miatt pontosan 1. $\square$

Biz: (4): (Algebrai út) A KFL miatt $\sum_{v\in V(G)}(d(v)-2) = \sum_{v\in V(G)} d(v)-2n = 2(n-1)-2n = -2$. F minden v csúcsára $d(v) \geq 1$ teljesül, ezért $d(v)-2 \geq -1$. A fenti összeg csak úgy lehet -2, ha F-nek legalább 2 levele van. $\square$

Biz: (4): (Kombinatorikus út) Induljunk el F egy tetszőleges v csúcsából egy sétán, és haladjunk, amíg tununk. Ha sosem akadunk el, akkor előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, és kört találunk. Ezért elakadunk, és az csakis egy v-től különböző u levélben történhet. Ha $d(v) = 1$, akkor v egy u-tól különböző levél. Ha $d(v) \geq 2$, akkor sétát indulhatjuk v-ből egy másik él mentén. Ekkor egy u-tól különböző levélben akadunk el. $\square$

1.10 Feszítőfák

Építsük fel a G gráfot az élek egymás utái behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével! Legyen G' a G gráf piros élei törlésével keletkező feszítő részgráf! G' biztosan körmentes lesz, hiszen a zöld élek sosem alkottak kört a korábbi élekkel. G' minden K' komponense részhalmaza G egy K komponensének. Ha $K' \neq K$, akkor G-nek van olyan éle, ami kilép K'-ből. Ezen élek mind pirosak K' definíciója miatt. Legyen e ezek közül az elsőnek kiszínezett. Az e él nem tudott kört alkotni a korábbn kiszínezettekel, így nem lehet piros: ellentmondás. Ezek szerint G egy G' komponensei megegyeznek.

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. $\square$

Def: F a G gráf feszítőfája (ffája), ha F egy G-ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: (G-nek van feszítőfája) $\iff$ (G összefüggő)

Biz: $\Rightarrow$: Legyen F a G feszítőfája. F összefüggő, és $V(F) = V(G)$, tehát G bármely két csúcsa között vezet F-beli út.

$\Leftarrow$: Építsük fel G-t az álek egyenkénti behúzásával és kiszínezésével. Láttuk, hogy a zöld élek egy F erdőt alkotnak, aminek egyetlen komponense van, hiszen G is egykomponensű. Ezek szerint F olyan fa, ami G-ből éltörlésekkel kapható. $\square$

Megj: Ha egy nem feltétlenül összefüggő G gráf éleit a fenti módon kiszínezzük, akkor a zöld élek G minden komponensének egy F feszítőfáját alkotják. Nem összefüggő G esetén a zöld élek alkotta feszítő részgráf neve a G feszítő erdeje.

2 Minimális költségű feszítőfák

2.1 Alapkörrendszer, alap vágás renszer

Adott egy G gráf és G-nek egy F rögzített feszítőfája. Ekkor G minden éléhez F meghatározza G éleinek egy fontos részhalmazát. Attól függően, hogy az adott él F-hez tartozik-e vagy sem, különböző fajta részhalmazról van szó.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak. Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tarozó alapkör pedig az $F + e$ köre.

Megf: Tfh $f \in F$ és $e \in E(G) \setminus E(F)$. Ekkor ($F - f + e$ ffa) $\iff$ (f benne van e alapkörében) $\iff$ (e benne van f alap vágásában).

Köv: Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ alapkörét e mellett azon F-beli élek alkotják, amelyek alapvágása e-t tartalmazza. Az $f \in F$ alapvágást f mellett a G azon élei alkotják, amelyek alapköre f-t tartalmazza.

2.2 Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(F)$.

Az $F \subseteq E$ élhalmaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.

Az $F \subseteq E$ élhalmaz G-ben minimális költségű feszítő erdeje, ha
(1) (V, F) a G feszítő erdeje, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítő erdejére.

Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.

Ötlet: Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élk egyenkénti behúzásával, az ÉHL szerint zöldre színezett élek halmazaként.

Zöld él: olyan él, ami nem alkot kört a korábban felépített élekkel.

Mohó stratégia: A feszítőfa építésekor költség szerint növekvő sorrendben döntsünk az élekről, hátha mkffát kapunk a végén.

Kruskal-algoritmus: <u>Input</u>: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. <u>Output</u>: $F \subseteq E$
<u>Működés</u>: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \cdots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = 0$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes.} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \qquad F := F_m$$

2.3 Minimális költségű feszítőfák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nak: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtotott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Biz: A Kruskal-algoritmus a legfeljebb c költségű (E_c-beli) éleket hamarabb dolgozza fel, mint a c-nél drágábbakat. Ezért E_c összes élének feldolgozása után pontosan azt az állapotot érjük el, mintha a Kruskal-algoritmust a G_c frágon futtattunk volna. Korábban (az ÉHL előtt) láttuk, hogy az utóbbi algoritmus outputja G_c egye feszítő erdeje. $\square$

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_l\}, k(f_1) \leq k(f_2) \leq \cdots \leq k(f_l)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_l\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \cdots \leq k(f'_l)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq l$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Biz: Indirekt: tfh $k(f_i) > k(f'_i) = c$. Ekkor $|E_c \cap F| < i$, így a feltevés miatt $E_c \cap F$ a G_c egy i-nél kevesebb élű feszítő erdeje. Az $f'_1, f'_2, \ldots, f'_i$ élek is mind E_c-beliek, és többen vannak az $E_c \cap F$ feszítő erdő élszámánál. Tehát $f'_1, f'_2, \ldots, f'_i$ nem lehet körmentes, így $f'_1, f'_2, \ldots, f'_l$ sem. Ez ellentmondás. Tehát $k(f_i) \leq k(f'_i)\ \forall i$. Ezért $k(F) = \sum_{i=1}^{l} k(f_i) \leq \sum_{i=1}^{l} k(f'_i) = k(F')$. $\square$

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

Biz: Legyen F a Kruskal-algoritmus outputja. A megfigyelés miatt $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra, ezért a Lemma szerint $k(F) \leq k(F')$ teljesül G tetszőleges F' feszítő erdejére. $\square$

Köv: (2) Az F' élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje G-nek, ha $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \leq 0$-ra.

Biz: A Lemma bizonyítja az elégfégességet.

Biz: A szükségességhez tfh $F' \cap E_c$ nem feszítő erdeje G_c-nek, és legyen F a Kruskal-algoritmus outputja. Mivel $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje, ezért $|F \cap E_c| > |F' \cap E_c|$, így $k(f_i) < k(f'_i)$ teljesül legalább egy i-re, és minden j-re $k(k_j) \leq k(f'_i)$. Innen $k(F) < k(F')$. $\square$

Köv: (3) Ha a G gárf összefüggő, akkor G feszítő erdeje a G feszítő fája, így a Kruskal-algoritmus mkffát talál. A (2) következmény pedig G mkffáit karakterizálja.

2.4 Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:

Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.

Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.

Tfh n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.

A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Élek költség szerinti sorbarendezése
2. Döntés az egyes élekről a fenti sorrendben.

1. m szám sorbarendezéséhez a buborékrendezés legfeljebb $\binom{m}{2}$ összehasonlítást használ.

1. n csúcsú G gráf esetén egy élről döntés megoldható $konst \cdot \log_2 n$ lépésben az adatstruktúra karbantartásával együtt is. Az összes döntéshez tehát elegendő $konst \cdot n \cdot \log_2 n$ lépés. A Kruskal-algoritmus lépésszáma ezért felülről becsülhető $konst \cdot (n + m) \cdot \log_2(n + m)$-mel.

3 Gráfbejárások és legrövidebb utak

3.1 Általános gráfbejárás & BFS

A gráfbejárási algoritmus az inputgráf csúcsait és éleit fedezi fel. Minden csúcs az eléretlen $\to$ elért $\to$ befejezett állapotokat veszi fel. A bejárás akkor ér véget, amint minden csúcs befejezetté vált.

1. Van elért csúcs. Választunk egyet, mondjuk u-t.

(1a) Ha van olyan uv él, amire v eléretlen, akkor v elérté válik.

(1b) Ha nincs ilyen uv él, akkor u befejezetté válik.

2. Nincs elért csúcs.

(2a) Ha van eléretlen u csúcs, akkor u-t elértté tesszük.

(2b) Ha nincs eléretlen csúcs (azaz $\forall$ csúcs fejezett), akkor END.

Szélességi bejárás (BFS) szabálya:

Az 1. esetben mindeg a legkorábban elért u-t választjuk.

Input: $G = (V, E)$ (ir/ir.tatlan) gráf, ($v \in V$ gyökérpont[1]).

Output: (1) A csúcsok elérési és befejezési sorrendje. (2) Az élek osztályozása:

faél: Olyan él, ami mentén egy csúcs elértté vált.

uv **előreél:** nem faél, de u-ból v-be faélekből irányított út vezet.

uv **visszaél:** v-ből u-ba faélekből irányított út vezet.

keresztél: minden más él (u és v közt nincs leszármazott viszony).

(3) A **bejárás fája:** a faélek alkotta részgráf. (A bejárás fája valójában egy gyökereiből kifelé irányított erdő.)

Megf: Irányítatlan esetben az előreél és a visszaél ugyanazt jelenti.

Terminológia: Ha a bejárás fájában u-ból v-be irányított út vezet, akkor u a v őse és v az u leszármazottja. A faél és az előreél tehát ősből leszármazottba, a visszaél leszármazottból ősbe vezet.

3.2 A BFS tulajdonságai

Nézzük meg egy **irányított** gráf BFS bejárását is.

Állítás: Tfh $G = (V, E)$ BFS bejárása után a csúcsok elérési sorrendje $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

(1) Ha $i < j$, akkor v_i-t hamarabb fejezük be, mint v_j-t, továbbá v_i gyerekei megleőzik v_j gyerekeit az elérési sorrendben.

Biz: A v_i-t befejezésének pillanatában v_i minden gyereke elért, de v_j-nek még egy gyereke sem az. Ezért v_j gyerekeit a v_i csúcs befejezése után érjük el, majd ezt követően fejezzük be v_j-t. $\square$

(2) **Az elérési és befejezési sorrend (BFS esetén) megegyezik.**

Biz: Ha v_i-t korábban érjük el, mint v_j-t, akkor (1) miatt v_i-t korábban is fejezzük be v_j-nél. Ezért bármely két csúcs sorrendje ugyanaz az elérési sorrendben mint befejezési sorrendben. Tehát az elérési sorrendnek meg kell egyeznie a befejezési sorrenddel. $\square$

(3) **Gréfél nem ugorhat át falét:** ha $k < i < j \leq l$ és $v_i v_j$ faél, akkor $v_k v_l$ nem lehet gráfél.

Biz: Ha $v_k v_l \in E(G)$, akkor v_l szülője v_k vagy egy v_k-t megelőző csúcs. (1) miatt v_j szülője sem következhet v_k után, vagyis v_i nem lehet v_j szülője.

(4) **Nincs előreél.** (Irányítatlan eset: csak faél és keresztél van.)

Biz: Indirekt: ha $v_i v_j$ előreél lenne, akkor v_i-ből v_j-be irányított út vezetne a BFS-fában, és $v_i v_j$ ennek a faélekből álló útnak az utolsó élét átugraná. $\square$

[1] A gyökérben kezdetben elért állapotú, ezért kivétel az általános szabály alól.

(5) Ha a BFS-fában k-élű irányított út vezet u-ból v-be, akkor G-ben nincs k-nál kevesebb élű uv-út.

Biz: Ha lenne a BFS fa-beli útnál kevesebb elű út G-ben, akkor lenne olyan gráfél, ami faélt ugrik át. $\square$

(6) **A BFS-fa egy legrövidebb utak fája:** a BFS-fa v_1 gyökeréből bármely v_i csúcsba vezető faút a G egy legkevesebb élű v_1v_i-útja.

3.3 Legrövidebb utak

Def: Adott G (ir) gráf és $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény esetén egy P út hossza a P éleinek összhossza: $l(P) = \sum_{e \in E(P)} l(e)$.

Az u és v csúcsok távolsága a legrövidebb uv-út hossza: $dist_l(u, v) := \min\{l(P) : P\ uv\text{-út}\}$ ($\nexists uv$-út$\Rightarrow$ $dist_l(u, v) = \infty$.) Az l hosszfüggvénye nemnegatív, ha $l(e) \geq 0$ teljesül minden e élre. Az l hosszvüggvény konzervatív, ha G-ben $\nexists$ negatív összhosszú ir. kör.

Cél: Legrövidebb út keresése irányított/irányítatlan gráfban.

Megf: Ha $l(e) = 1$ a G minden e élére, akkor $l(P)$ a P élszáma. Ezért a BFS-fa minden gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből, azaz a szélességi bejárás tekinthető egy legrövidebb utat kereső algoritmusnak is.

Def: Adott G (ir) gráf, $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény és $r \in V(G)$. (r, l)-felső becslés olyan $f : V(G) \to \mathbb{R}$ függvény, ami felülről becsli minden csúcs r-től mért távolságát: $dist_l(r, v) \geq f(v) \forall v \in V(G)$.

Triviális (r, l)-felső becslés: $f(v) = \begin{cases} 0 & v = r \\ \infty & v \neq r \end{cases}$

Pontos (r, l)-felső becslés: $f(v) = dist_l(r, l)\ \forall v \in V(G)$.

3.4 Az elméleti javítás

Def: Tfh f egy (r, l)-felső becslés és $uv \in E(G)$. Az f uv-elméleti javítása az az f', amire $f'(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq v \\ min\{f(v), f(u) + l(uv)\} & z = v \end{cases}$

Megf: Tfh az $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény konzervatív és $f(r) = 0$.

Ekkor (1) Az $f(r, l)$-felső becslés élmenti javítása mindig (r, l)-felső becslést ad.

Biz: Azt kell megmutatni, hogy van olyan rv-út, aminek a hossza legfeljebb $f(u) + l(uv)$. Ha egy legrövidebb ru-utat kiegészítünk az uv éllel, akkor olyan rv-élsorozatot kapunk, aminek az összhossza $dist_l(r, u) + l(uv) \leq f(u) + l(uv)$. „Könnyen" látható, hogy az élhosszfüggvény konzervativitása miatt ha van x összhosszúságú rv-élsorozat, akkor van legfeljebb x összhosszúságú rv-út is. Ezek szerint van legfeljebb $f(u) + l(u, v)$ hosszúságú uv-út is, azaz az érdemi élmenti javítás után szintén (r, l)-felső becslést kapunk. $\square$

(2) $f(r, l)$-felső becslés (pontosan) $\iff$ (f-en $\nexists$ érdemi élmenti javítás).

Biz: $\Rightarrow$: Ha f pontos, akkor biztosan nincs rajta érdemi élmenti javítás: ha volna, akkor egy felső becslés a pontos érték alá csökkenne, így az élmenti javítás nem (r, l)-felső becslést eredményezne. $\Leftarrow$: Legyen $v \in V(G)$ tetsz, és legyen P egy legrövidebbb rv-út. A P egyik éle mentén sincs érdemi élmenti javítás, ezért P minden u csúcsára pontos a felső becslés: $f(u) = dist_l(r, u)$. Ez igaz az út utolsó csúcsára, a tetszőlegesen választott v-re is. $\square$

Köv: Adott G, konzervatív l és $r \in V(G)$ esetén ha kiindulunk a triviális (r, l)-felső becslésből, és addig végzünk émj-kat, amíg lehet, akkor a végén megkapjuk minden csúcs r-től való távolságát.

Itt a jegyzet 17. oldaláról az utolsó kettő pont hiányzik, mivel nem tudom, hogy mennyire lényegesek.

Def: Tfh f egy (r,l)-felső becslés és $uv \in E(G)$. Az f uv-élmenti javítása az az f', amire
$f'(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq v \\ min\{f(v), f(u) + l(uv)\} & z = v \end{cases}$

Megf: Tfh az $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény konzervatív és $f(r) = 0$. Ekkor (1) Az $f(f,l)$-felső becslés élmenti javítása mindig (r,l)-felső becslést ad. (2) $f(r,l)$-felső becslés (pontosan) $\Leftrightarrow$ (f-en $\nexists$ érdemi élmenti javítás).

Dijkstra-algoritmus: Input: $G = (V,E), l : E \to \mathbb{R}_+, r \in V$. Output: $dist_l(r,v) \forall v \in V$ Működés: $U_0 := \emptyset$, f_0 a triviális. (r,l)-felső becslés.

Az i-dik fázis:

1. Legyen $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$, ahol u_i olyan csúcs a $V \setminus U_{i-1}$ halmazból, amelyre $f_{i-1}(v)$ minimális.

2. f_i : f_{i-1} élmenti javítása minden U_i-ből kivezető u_ix élen. Output: $f_{|V|}$. Megjelöljük a végső $f_{|V|}(V)$ értékeket beállító éleket.

3.5 Dijkstra, egy példán

Dijkstra-algoritmus: Input: $G = (V,E), l : E \to \mathbb{R}_+, r \in V$. Output: $dist_l(r,v) \forall v \in V$ Működés: $U_0 := \emptyset$, f_0 a triviális. (r,l)-felső becslés.

Az i-dik fázis:

1. Legyen $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$, ahol u_i olyan csúcs a $V \setminus U_{i-1}$ halmazból, amelyre $f_{i-1}(v)$ minimális.

2. f_i : f_{i-1} élmenti javítása minden U_i-ből kivezető u_ix élen. Output: $f_{|V|}$. Megjelöljük a végső $f_{|V|}(V)$ értékeket beállító éleket.

Megf: Ha a v-be vezet megjelölt él, akkor vezet r-ből v-be megjelölt éleken út, és ennek hozza megegyezik $f_{|V|}(v)$-vel.

Biz: $f_{|V|}(r) = 0$, és a megjelölt élek mentén haladva az $f_{|V|}$ érték az élhosszal növekszik. $\square$

Köv: Ha a Dijsktra-algoritmus helyes, akkor az algoritmus végén a megjelölt élek egy legrövidebb utak fáját alkotják r gyökérrel.

3.6 Dijkstra helyessége

Megf: Tfh $u_1, u_2, \ldots, u_n$ a G csúcsainak sorrendje a Dijkstra-algoritmus végrehajtása után.

(1) Ekkor $f_{|V|}(u_i) \leq f_{|V|}(u_{i+1})$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq n$.

Biz: Az i-dik fázisban $f_i(u_i) \leq f_i(u_{i+1})$ teljesült az u_i választása miatt. Ezek után $f_i(u_i)$ már nem változott: $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i)$. Ugyan $f_i(u_{i+1})$ még csökkenhetett, de csak az u_iu_{i+1} él mentén történt javítás miatt, hiszen az $(i+1)$-dik fázisban u_{i+1} bekerült az U_i halmazba, és a hozzá tartozó (r,l)-fb már nem csökken tovább. Ekkor $f_{i+1}(u_{i+1}) = min\{f_i(u_{i+1}), f_i(u_i) + l(u_iu_{i+1})\} \geq f_i(u_i)$, mivel $l(u_iu_{i+1}) > 0$. Ezért $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i) \leq f_{i+1}(u_{i+1}) = f_{|V|}(u_{i+1})$ $\square$

(2) $f_{|V|}(u_1) \leq f_{|V|}(u_2) \leq \cdots \leq f_{|V|}(u_n)$

(3) A Dijsktra-algoritmus outputjaként kaptt $f_{|V|}$-n élmenti javítás nem tud változtatni.

Biz: Tegyük fel, hogy $u_iu_j \in E(G)$ a G egy tetszőleges éle. Ha $i > j$, akkor (2) miatt $f_{|V|}(u_i) \geq f_{|V|}(u_j)$, ezért az u_iu_j mentén történő javítás nem tudja $f_{|V|}(u_j)$-t csökkenteni, hisz $l(u_iu_j)$ pozitív. Ha pedig $i < j$, akkor az i-dik fázisban megrörtént az u_iu_j mentén történő javítás, és ezt követően $f(u_i)$ nem váltorott, azaz $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i)$. A másik (r,l)-felső becslés pedig csak tovább csökkenhetett a késpbbi émj-ok során $f_{|V|}(u_j) \leq f_i(u_j)$. Ezért az u_iu_j él mentén sem az i-dik fázisban, sem később nincs érdemi javítás. $\square$

Tétel: A Dijsktra-algoritmus helyesen működik, azaz G minden csúcsára igaz, hogy $dist(r,v) = f_{|V|}(v)$.

Biz: A Dijsktra-algoritmus az f_0 triviális (r,l)-felső becslésből indul ki, és élmenti javításokat alkalmaz. Így minden f_i (speciálisan $f_{|V|}$ is) (r,l)-felső becslés lesz. A fenti (3)-as megfigyelés miatt $f_{|V|}$-n nem végezhető érdemi élmenti javítás. Ezért egy korábbi (2)-es megfigyelés miatt $f_{|V|}$ pontos (r,l)-felső becslés, azaz $f_{|V|}(v) = dist_l(r,v) \forall v \in V(G)$. $\square$

„Lépésszámanalízis": Ha a G gráfnak n csúcsa és m éle van, akkor a Dijkstra-algoritmus n-szer keresi meg legfeljebb n szám minimumát, ami összességében legfeljebb $konst \cdot n^2$ lépést igényel. Ezen kívül legfeljebb m élmenti javítást véges, ami $konst' \cdot m$ lépés. Összességében tehát legfeljebb $konst'' \cdot (n^2 + m)$ lépésre van szükség, az algoritmus hatékony.

4 Legrövidebb utak, DFS, PERT

4.1 Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 1

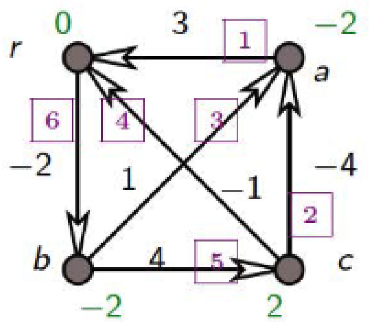
Könnyű olyan példát találni, ahol a Dijkstra-algoritmus konzervatív hosszüggvény esetén hibás eredményt ad. Azonban konzervatív hosszüffvény esetén is igaz, hogy

- (r,l)-fb élmenti javítása (r,l)-fb-t eredményez, ill.
- ha egy (r,l)-fb-ben nem végezhető erdemi élmenti javítás, akkor pontos.

konzervatív hosszfüggvény esetén is hasonló startégiát követünk: Élmenti javításokat végzünk a triviális (r,l)-fb-en, míg van érdemi javítás.

Ford-algoritmus: Input: $G=(V,E), l: E \to \mathbb{R}, r \in V$. Output: $dist_l(r,l) \forall v \in V$ Működés: f_0 a triviális (r,l)-fb, $|V|=n, E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$. Az i-dik fázis $i=1,2,\dots,n-1$-re az alábbi. f_i-t f_{i-1}-ből kapjuk, az $e_1,\dots,e_m$ élmenti javítások után. OUTPUT: $dist_l(r,v)=f_{n-1}(v) \forall v \in V$.

3. fázis



	r	a	b	c
f_0	0	∞	∞	∞
f_1	0	∞	−2	∞
f_2	0	−1	−2	2
f_3	0	−2	−2	2

Állítás: Ha l konzervatív, akkor $dist_l(v) \forall v \in V$.

Biz: $f_1(v)=dist_l(r,v)$ ha $\exists \leq 1$-élű legrövidebb rv-út. $f_2(v)=dist_l(r,v)$ ha $\exists \leq 2$-élű legrövidebb rv-út. $\dots$ $f_{n-1}(v)=dist_l(r,v)$ ha $\exists \leq (n-1)$-élű legrövidebb rv-út. Tehát $f_{n-1}(v)=dist_l(r,v) \forall v \in V$. $\square$

Megf: Ha $f_i=f_{i-1}$, akkor a Ford-algoritmust az i-dik fázis után be lehet fejezni, hisz nincs érdemi élmenti javítás, így $f_{n-1}=f_i$.

Megj: Az $f_{n-1}(v)$-t beállító élek legrövidebb utak fáját alkozják.

Biz: A Dijkstra esethez hasonló. Tetszőleges v csúcsból visszafelé követve a végső értékeket beállító éleket $f_{n-1}(v)$ hosszúságú rv-utat találunk. $\square$

"Lépésszámanalízis": Ha a $|V(G)|=n$ és $|E(G)|=m$, akkor minden fázisban $\leq m$ élmenti javítás, ami $konst \cdot m$ lépés. Ez összesen $\leq konst \cdot (n-1) \cdot m \leq konst \cdot n^3$ lépés, az algoritmus hatékony.

4.2 Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 2

Tegyük fel, hogy $G=(V,E), l: E \to \mathbb{R}$ és $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$. Jelölje $d^{(k)}(i,j)$ a legrövidebb olyan v_iv_j-út hosszát, aminek belső csúcsai csak $v_1,v_2,\dots,v_k$ lehetnek.

Megf: (1) $d^{(n)}(i,j)=dist_l(v_i,v_j), v_iv_j \in E \Rightarrow d^{(0)}(i,j)=l(v_i,v_j)$ (2) $d^{(0)}(i,j)=0$, különben $d^{(0)}(i,j)=\infty$. (3) Ha l konzervatív, akkor tetszőleges i,j ill. $k \leq n$ esetén $d^{(k+1)}(i,j)=min\{d^{(k)}(i,j), d^{(k)}(i,k+1)+d^{(k)}(k+1,j)\}$ teljesül.

Biz: Tekintsünk egy $d^{(k+1)}(i,j)$-t meghatározó P utat.

I. eset: $v_{k+1} \notin P$. Ekkor $d^{(k+1)}(i,j)=d^{(k)}(i,j)$, és $d^{(k+1)}(i,j) \leq d^{(k)}(i,k+1)+d^{(k)}(i,k+1)+d^{(k)}(k+1,j)$.

II. eset: $v_{k+1} \in P$. Ekkor $d^{(k+1)}(i,j) \leq d^{(k)}(i,j)$, és $d^{(k+1)}(i,j)=d^{(k)}(i,k+1)+d^{(k)}(k+1,j)$.

Mindkét esetben helyes a képlet. $\square$

Floyd-algoritmus: Input: $G = (V, E)$, konzervatív $l : E \to \mathbb{R}$. Output: $dist_l(u, v) \forall u, v \in V$
Működés: $d^{(0)}$ felírása (2) alapján. Az i-dik fázis: $d^{(i-1)}$-ből meghatározzuk $d^{(i)}$-t (3) alapján.
OUTPUT: $d^{(n)}(u, v) = dist_l(u, v)\ \forall u, v \in V$.

"Lépésszámanalízis": A $d^{(0)}$ felírása $konst \cdot n^2$ lépés. Minden fázis $konst' \cdot n^2$. Mivel összesen n fázis van, a lépésszám legfeljebb $konst" \cdot n^3$ lépés, az algoritmus hatékony.

Ford vs Floyd: Konzervatív hosszfüggvényre működnek helyesen. Mindkét algoritmus talál bizonítékot, ha l nem konzervatív. (!!) A Ford csak egy gyökérből, a Floyd bármely két csúcs között talál legrövidebb utat. (!!) A Ford ritka gráfokra jelentősen olcsóbb, sok él eletén a Floyd nem sokkal drágább.

4.3 Depth First Search (DFS)

"Mélységi bejárás (DFS): A bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az $\boxed{1.}$ esetben.

Mélységi és befejezési számozás: DFS után $m(v)$ ill. $b(v)$ a v csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

Megj: A BFS konkrét megvalósításában szükség van arra, hogy az elért csúcsokat úgy tároljuk, hogy könnyű legyen kiválasztani az elért csúcsok közül a legkorábban elértet. Erre egy célszerű adatstruktúra a *sor* (avagy *FIFO lista*). Ha a BFS megvalósításában ezt az adatstruktúrát *veremre* (más néven *FIFO listára*) cseréljük, akkor a DFS egy megvalósítása adódik.

Megf: Tegyük fel, hogy a G gráf éleit DFS után osztályoztuk.

(1) Ha uv faél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

Biz: v-t u-ból értük el, ezért $m(u) < m(v)$. A v elérésekor u és v elért állapotúak. A DFS szerint v-t u elptt fejezzük be. $\square$

(2) Ha uv előreél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

Biz: u-ból v-be faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, befejezési csökken. $\square$

(3) Ha uv visszaél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) < b(v)$.

Biz: v-ből u-ba faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, a befejezési csökken. $\square$

Biz: $m(u) < m(v)$ esetén a DFS miatt v az u leszármazottja lenne. Ezért $m(u) > m(u)$. Ha u-t a v befejezése előtt érnénk el, akkor u a v leszármazottja lenne. Ezért az alábbi sorrendben történik u és v evolúciója: v elérése, v befejezése, u elérése, u befejezése. $\square$ (4) Ha uv keresztél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

(5) Irányítatlan gráf DFS bejárása után nincs keresztél.

Biz: Indirekt. Ha uv keresztél, akkor (4) miatt $m(u) > m(v)$, továbbá vu is keresztél, ezért $m(v) > m(u)$. Ellentmondás. $\square$

(6) Ha DFS után van visszaél, akkor G tartalmaz irányított kört.

Biz: A DFS fa visszaélhez tartozó alapköre a G egy irányított köre. $\square$

(7) Ha DFS után nincs visszaél, akkor G-ben nincs irányított kör.

Biz: Bmely irányított körnek van olyan uv éle, amire $b(u) < b(v)$. Ez az él csak visszaél lehet. $\square$

4.4 Direct Acyclic Graphs

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf aciklikus (más néven DAG), ha G nem tartalmaz irányított kört.

Példa: DAG-ot úgy kaphatunk, hogy egy G irányítatlan gráf csúcsait csupa különbözőszámmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobba irányítunk.

Ha ugyanis lenne az így megirányított gráfban irányított kör, akkor az élei mentén a számok végig növekednének, ami lehetetlen. Azt fogjuk ihazolni, hogy a fenti példa minden DAG-ot leír.

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcsainak topologikus sorrendje alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba. ($V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, v_iv_j \in E \Rightarrow i < j$)

Tétel: (G irányított gráf DAG) $\Leftrightarrow$ ($V(G)$-nek $\exists$ topologikus sorrendje).

Biz: Tegyük fel, hogy $\exists$ toplogikus sorrend. Láttuk, hogy G ekkor DAG. ✓

Biz: Most tegyük fel, hogy G DAG, és futtassunk rajra egy DFS-t. Láttuk, hogy a DFS után nem lesz visszaél, ezért minden uv irányított élre $b(u) > b(v)$ teljesül. Ezért a csúcsok befejezési sorrendjének megfordítása a G csúcsainak egy topologikus sorrendje. $\square$

Köv: Irányított gráf aciklikussága DFS-sel gyorsan eldönthető: ha van visszaél, akkor a visszaél DFS-fabeli alapköre G egy irányított köre, így G nem DAG. Ha pedig nincs visszaél, akkor a fordított befejezési sorrend a G egy topologikus sorrendje, G tehát DAG.

Megj: DAG-ban topologikus sorrendet forráskeresések és forrástörlések alkalmazásával is találhatunk.

4.5 Leghosszabb út keresése

Ötlet: Az $l'(uv) = -l(uv)$ élhosszokkal a leghosszabb utak legrövidebbekké válnak. Olyanokat pedig tudunk keresni.

Gond: A módszerünk csak konzervatív élhosszokra működik. Irányítatlan gráfon ez nemnegatív élhosszokat jelent, ezért ez az ötlet itt nem segít. Itányított esetben nem baj a negatív élhossz, feltéve, hogy G DAG. Ekkor Ford, Floyd bármelyike használható.

Jó hír: Van egy még gyorsabb módszer: a dinamikus programozás. Ennek segítségével tetszőleges G DAG minden v csúcsához ki tudjuk számítani a v-be vezető leghosszabb utat. (Sőt! ...)

Leghosszabb út DAG-ban: Input: $G = (V, E)DAG, l : E \to \mathbb{R}.\underline{Output} : max\{l(P) : P v$-be vezető út$\}$ minden $v \in V$ csúcsra. Működés: $\boxed{1} V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ topologikus sorrend meghatározása. $\boxed{2} i = 1, 2, \ldots, n : f(v_i) = max\{max\{f(v_j) + l(v_jv_i) : v_jv_i \in E\}, 0\}$ Output: $f(v)\ \forall v \in V$

Helyesség: Ha a v_i-be veeztő leghosszabb út utolsó előtti csúcsa v_j, akkor $f(v_i) = f(f_j) + l(v_jv_i)$.

Megj: Ha a fenti algoritmusban minden csúcsra megjelöljük az $f(v)$ értéket beállító élt (éleket), akkor a megjelölt élek minden v csúcsba megadnak egy leghosszabb utat. Sőt: minden v-be vezető leghosszabb megkapható így.

4.6 A PERT probléma

Egy $a, b, \ldots$ tevékenységekből álló projektet kell végrehajtanunk.

Precedeniafeltételek: bizonyos (u, v) párok esetén előírás, hogy az u tevékenységet a v előtt kell elvégezni, ezért v az u kezdetét követően $c(uv)$ időkorlát elteltával kezdhető.

Cél: minden v tevékenységhez olyan $k(v) \geq 0$ kezdési időpont meghatározása, ami nem sérti a preferenciafeltételeket, és a projekt végrehajtási ideje (a legnagyobb $k(v)$ érték) minimális.

G **irányított gráf** csúcsai a tevékenységek, élei pedig a precedenciafeltételek, az uv él hossza $c(uv)$.

Megf: (1) Ha G nem DAG, akkor a projekt nem hajtható végre. (2) Ha G DAG, akkor minden v tevékenység legkorábbi kezdási időpontja a v-be vezető leghosszabb út hossza.

Köv: A PERT probléma megoldása nem més, mint a G DAG minden csúcsára az oda vezető leghosszabb út meghatározása.

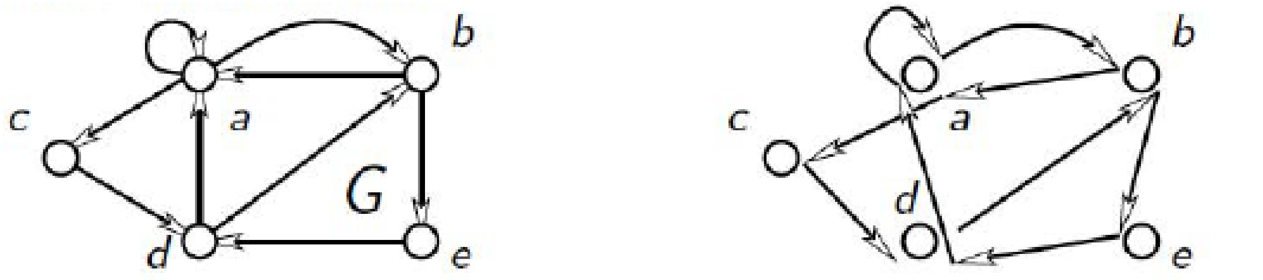
Terminológia: G leghosszabb útja kritikus út, amivől több is lehet. Kritikus út csúcsai a kritikus tevékenységek.

Megf: Ha egy kritikus tevékenység nem kezdődik el a lehető legkorábbi időpontban, akkor az egész projekt végrehajtása csúszik.

5 Euler-séták és Hamilton-körök

5.1 Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.



Megj: (1) A fenti definíció 2×2 fogalmat definiál: az Euler-sétát és az Euler-körsétát irányítatlan és irányított gráfra is. (2) Szokás a definíciót abban a formában kimondani, hogy az Euler-(kör)séta G minden élét **pontosan** egyszer tartalmazza. Tekintettel arra, hogy egy séta nem mehet át kétszer ugyanazon az élen, ez redundáns kívánalom, hiszen következménye az általunk használt definíciónak. Használatos ezen kívül az Euler-kör ill. Euler-út megnevezés is a fenti fogalmakra. (3) Irányítatlan Euler-séta: "G egy vonallal lerajzolható".

Cél: Gyors módszer az Euler-(kör)séta megtalálására, létezésének ellenőrzésére.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

Biz: (a) Ha G két különböző gyenge komponense is tartalmaz élt, akkor G-nek nem lehet Euler-körsétája, hisz egyetlen séta sem tartalmazhat élt két különböző gyenge komponensből. ✓

(b) Ha végighaladunk az Euler-körsétán, akkor a v csúcsba pontosan annyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk onnan. A körséta G minden élét pontosan egyszer érinti: $\rho(v) = \delta(v)$ $\square$

Megf: (2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

(b) G-ben minden fokszám páros.

Biz: Az irányított esethez hasonló. (a) Egy (kör)séta nem tartalmazhatja két különböző komponensnek is $1-1$ élét, és (b) az Euler-körsétát követve tetszőleges v csúcsba ugyanyannyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk belőle. Ezért $d(v)$ páros. $\square$

Megf: (3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

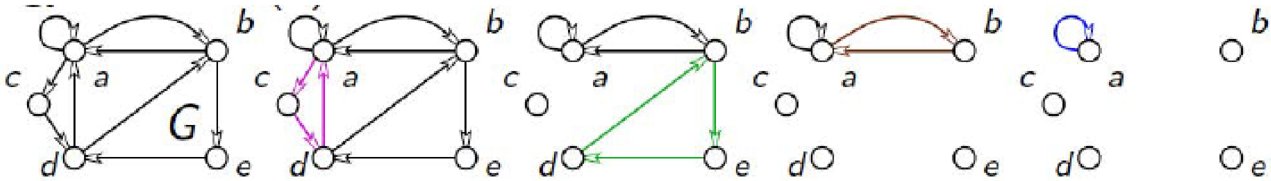
(b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Biz: (a) ✓. (b): Tegyük fel, hogy G Euler-sétája egy uv-séta. Ekkor minden $w \neq u, v$ csúcsra $d(w)$ kétszer annyi, mint ahányszor az Euler-séta w-n áthalad, vagyis $d(w)$ páros. Ha $u = v$, akkor az Euler-séta körséta, így $d(u)$ is páros (2b) miatt. Ha pedig $u \neq v$, akkor u-ból 1-gyel többször lépünk ki, mint be, v-be 1-gyel többször lépünk be, mint ki, vagyis $d(u)$ és $d(v)$ páratlanok. $\square$

Megj: A fenti Megfigyelés segítségével bizonyos esetekben azonnal látszik, hogy G-nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

G irányítatlan Euler-gráf, ha G minden v csúcsra $d(v)$ páros.

Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (irányított) kört alkossanak minden színre.

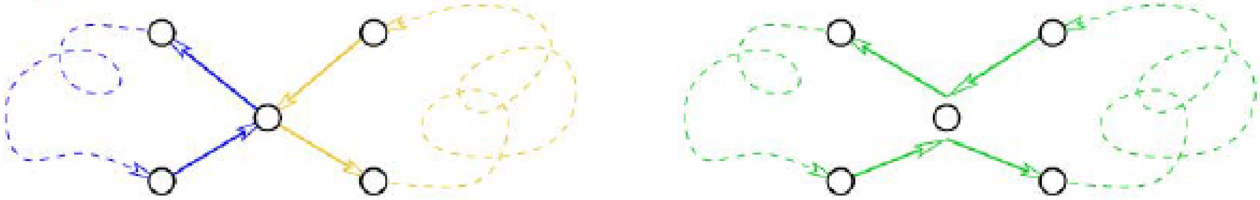


Biz: Induljunk el G egy éle mentén, és haladjunk tovább az (irányított) élek mentén. Mivel G Euler, ezért sosem adaunk el: előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, így találunk egy C_1 kört. C_1 éleit törtölve $G - C_1$ Euler-gráf marad. Ismételjük meg ezt a $G - C_1$ gráfon. Így G minden éle előbb-utóbb sorra kerül és megkapja a $C_2, C_3, \ldots$ köröket. Ezért $E(G) = C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ diszjunkt körök uniójára bomlik fel. Színezzük ki a C_1 kör éleit az i-dik színnel. □

Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\iff$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő)

(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\iff$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve összefüggő)

Biz: $\Rightarrow$: Láttuk. ✓ $\Leftarrow$: A Lemma miatt $E(G)$ felbontható körökre, tehát körsétákra is. Ha a körséták száma legalább 2, akkor választunk két körsétát, aminek van közös csúcsa és e csúcs mentén "összevarjuk" azokat. Mindezt addig végezzük, amíg egyetlen körséta marad. □



Tétel: (3) (G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája) $\iff$ (G izolált pontoktól eltekintve összefüggő és 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.)

Biz: $\Rightarrow$: Láttuk. ✓ $\Leftarrow$: Ha G Euler-gráf, akkor (2) miatt van Euler-körsétája, ami Euler-séta is egyúttal. Ha G nem Euler-gráf, akkor legyenek u és v a G páratlan fokú csúcsai. Ekkor $G + uv$ Euler-gráf, és (2) miatt van Euler-körsétája. Feltehető, hogy e körséta utolsó éle uv. Ezt az uv élt elhagyva a körsétából, G Euler-sétáját kapjuk. □

Euler-körséta keresése Euler-gráfban: $E(G)$-t felbontjuk körsétákra, amiket összevarrunk. Körsétát a felbontáshoz pl. úgy is kereshetünk, hogy addig követünk egy sétát, amíg tudunk. Előbb-utóbb elakadunk, de ez csakis a séta kiindulási pontjában történhet meg. Ezért a bejárt séta egy körséta, amit a felbontásban felhasználunk.

5.2 Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Megj: A célunk hasonló, mint az Euler-(kör)séta esetén, azaz gyors módszer, amivel el lehet dönteni egy gráfról, hogy van-e Hamilton-köre ill. -útja. Sajnos jól használható szükséges **és** elégséges feltételt nem tudunk adni erre a problémára, és jó oka van annak, hogy nem is számítunk ilyen feltétel létezésére. Tudunk viszont jól használható szükséges, és jól használható elégséges feltételt adni, de ezek csak bizonyos gráfok esetén hasznosak.

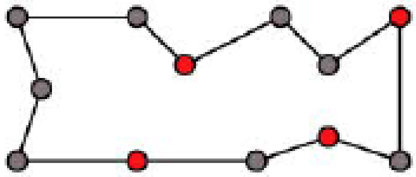
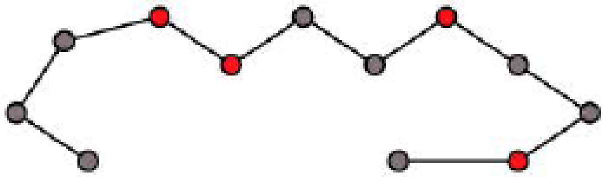
Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

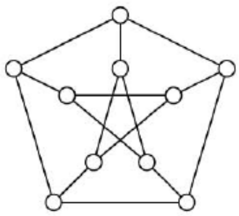
Megj: A fenti feltétel, miszerint k csúcs törlésétől a gráf legfeljebb k (ill. $k+1$) komponensre eshet szét feltétlenül **szükséges** ahhoz, hogy G-nek legyen Hamilton-köre ill. -útja. Abból azonban, hogy G teljesíti a fenti feltételt, nem következik, hogy G-nek csakugyan van Hamilton-köre vagy útja. A szükséges feltételt úgy tudjuk alkalmazni, hogy a segítségével igazoljuk egy konkrét gráfról, hogy nincs Hamilton-köre (vagy -útja). Ha pl. azt látjuk, hogy G-ből 42 csúcsot elhagyva 43 komponens keletkezik, akkor G-nek nincs Hamilton-köre. Ha a komponensszám legalább 44, akkor G-nek Hamilton-útja sincs.

Biz: (1,2) G-t tekinthetjük úgy, mint egy kör (ill. út), amihez még további éleket adunk hozzá. Könnyű látni, hogy egy kör (ill. út) k pont elhagyásától legfeljebb k $(k+1)$ komponensre eshet szét. A további élek (amit a körhöz ill. úthoz hozzá kell adni, hogy G-t kapjuk) csak csökkenteni tudják a komponensszámot, növelni nem. Ezért G-ből k csúcsot törölve legfeljebb k $(k+1)$ komponens keletkezhet. $\square$

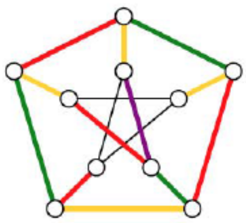



Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.

   (a) Tegyük fel, hogy külső körből k_1, a belsőből k_2 csúcsot hagytunk el. Ha $k_1 = 0$ vagy $k_2 = 0$, akkor a gráf összefüggő marad. Különben a kölső kör legfeljebb k_1, a belső pedig legfeljebb k_2 részre esik szét, vagyis összesen legfeljebb $k_1 + k_2$ komponens  létezik.

2. Nincs Hamilton-köre.

   (a) Ha lenne Hamilton-köre, akkor a Hamilton-kör éleit felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, sárga ill. zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni,  kiderül, hogy nem lehet.

A továbbiakban elégséges feltételeket fogunk látni Hamilton-kör létezésére. Ezek segítségével (szerencsés esetben) gyorsan és kétséget kizáróan tudjuk bizonyítani, hogy egy adott gráfnak van Hamilton-köre. Az elégséges feltétel vizsgálata azonban nem alkalmas arra, hogy egy gráf a Hamilton-körének hiányát igazoljuk.

Def: Legyen G n-csúcsú, egyszerű gráf.

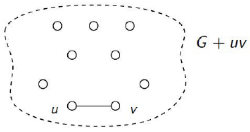
Az $u, v \in V(G)$ csúcspár gazdag, ha $d(u) + d(v) \geq n$. A G gráfra teljesül a Dirac-feltétel, ha $d(v) \geq \frac{n}{2} \forall v \in V(G)$-re. G-re igaz az Ore-feltétel, ha G bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot.

Dirac tétele: Gre igaz a Dirac-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Ore tétele: G-re igaz az Ore-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Megj: A Dirac-feltétel erősebb (többet kíván), mint az Ore. Ezért az Ore-tétel erősebb, mint a Dirac: gyengébb feltételből igazolja ugyanazt. Ezért az Ore-tétel bizonyítása a Dirac-tételt is igazolja.

5.3 A Chvátal-lezárt



Hízlalási lemma: Tegyük fel, hogy G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\Longleftrightarrow$ ($G + uv$-nek van Hamiliton köre).

Megj: A hízlalási lemma jelentőségge az, hogy segít eldönteni azt, hogy van-e G-ben Hamilton-kör. Azt mondja ki ugyanin, hogy a gazdag párok közé G-be "ingyen" behúzhatunk éleket, u.i. ez nem változtat azon a tényen, hogy van vagy nincs Hamilton-kör a vizsgált gráfban. Megtehetjük tehát, hogy a lemma segítségével addig húzunk be éleket a gráfba, amíg lehet. Ha az így adódó $\overline{G}$ Chvátal-lezártban találunk Hamilton-kört, akkor G-nek is bizonyosan van Hamiliton-köre. Ha pedig $\overline{G}$ nem tartalmaz Hamilton-kört, akkor persze G-nek nincs Hamilton-köre.

Biz: $\Rightarrow$: Láttuk. ✓ $\Leftarrow$: Legyen C a $G + uv$ Hamilton-köre. Ha $uv \notin C$, akkor C a G-nek is Hamilton-köre, kész vagyunk. Ha viszont $uv \in C$, akkor $C - uv$ a G egy Hamilton-útja. Legyen ez a Hamilton-út $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$. Legyen $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$ a v szomszédainak halmaza, és legyen $B := \{v_{i-1} : uv_i \in E(G)\}$ az u szomszédait a Hamilton-úton megelőző csúcsok halmaza.

Világos, hogy $v \notin A$ és $v \notin B$, így $|A \cup B| \leq n - 1$. Mivel (u, v) gazdag pár, ezért $|A| + |B| = d(u) + d(v) \geq n$. Ezek szerint $A \cap V \neq \emptyset$, legyen pl. $v_i \in A \cap B$. Ekkor $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}, v_1$ a G egy Hamilton-köre. $\square$

Ore tétele: Ha G bármely két nemszomszédos csúcsa gazdag párt alkot, akkor G-nek van Hamilton-köre.

Biz: A hízlalási lemma alapján G bármely két nemszomszédos csúcsát "ingyen" összeköthetjük. Így G Chátal-lezártja a $\overline{G} = K_n$ teljes gráf. Mivel K_n-nek van H-köre, ezért G-nek is van. $\square$

Dirac-tétele: Ha $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$, akkor G-nek van Hamilton-köre.

Biz: G bármely két csúcsa gazdag párt alkot, ezért G-re teljesül az Ore-feltétel. Az Ore-tétel miatt G-nek van Hamilton-köre. $\square$

6 Síkgráfok

6.1 Síkbarajzolhatóság

Def: Síkbarajzolt (SRt) gráf alatt olyan gráfdiagramot értünk, amiven az élek nem keresztezik egymást.

A G gráf síkbarajzolható (SRható), ha van SRt diagramja.

Síkbarajzolt gráf tartománya (lapja): a diagram komplementerének összefüggő tartománya. A nem korlátos rész neve külső tartomány.

Megj: (1) A fentieket nem csak egyszerű gráfokra definiáltuk. (2) A SRt gráf nem csupán egy gráf, hanem egy **konkrét** diagram. (3) Ugyanannak a SRható gráfnak nagyon sok lényegesen különböző síkbarajzolt diagramja (lerajzolása) lehet. (4) A görbe (tóruszra) rajzolhatóság hasonlóan definiálható.

Állítás: (A G gráf SRható) $\iff$ (G gömbre rajzolható)

Biz: A sztereografikus projekcióban az északi-sarkból történő vetítés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a sík pontjai és a síkot a déli-sarkon érintő gömbfelszín pontjai (mínusz északi-sark) között. A síkbarajzolt diagram vetülete gömbre rajzolt lesz ($\Rightarrow \checkmark$), és az $\acute{E}$-t nem tartalmazó gömbre rajzolt diagram pedig síkbarajzolttá válik. A $\Leftarrow$ irány igazolásához csupán annyi kell, hogy úgy rajzoljuk G-t a gömbre, hogy az $\acute{E}$-n ne menjen át él. $\square$

Köv: SRt gráf külső tartománynak nincs kitüntetett szerepe.

Biz: Bármely lerajzolás "kifordítható": a diagram átrajzolható úgy, hogy a kiválasztott tartomány legyen a külső tartomány.

1. Vetítsük fel a diagramot a gömbre.
2. Állítsuk az $\acute{E}$-t a kiválasztott tartománynak megfelelő gömbi tartomány belsejébe.
3. Vetítsük vissza a gömbre rajzolt gráfot a síkra. $\square$

Köv: Bármely konvex poliéder élhálója SRható gráf.

Biz: A kx poliéder belső pontjából az élháló kivetíthető egy, a poliédert tartalmazó gömbre. Így az élhálóból göbmre rajzolt gráf lesz. Láttuk, hogy minden gömbre rajzolható gráf SRható. $\square$

Megj: A kx poliéder élgráfjának tartományai a poliéder lapjainak felelnek meg.

Terminológia: SRt G gráf esetén n, e, t ill. k jelöli rendre a G csúcsai, élei, tartományai és komponensei számát.

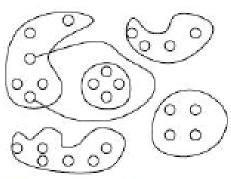
Duális kézfogáslemma (DKFL): Ha G SRt gráf, akkor $\sum_{i=1}^{t} l_i = 2e$ ahol l_i az i-dik lapot határoló élek számát jelöli.

Biz: Minden él vagy két különböző lapot határol, vagy ugyanazt a lapot 2-szer. Így minden él 2-vel járul a BO-hoz és a JO-hoz is. $\square$

Megj: A DKFL akkor hasznos, ha a SRt gráf lapjairól, a KFL pedig akkor, ha a fokszámokról van információnk.

Fáry-Wagner-tétel: Ha G egyerű SRható gráf, akkor olyan síkbarajzolása is van, amiben minden él egyenes szakasz.

6.2 Az Euler-féle poliéderformula, síkgráfok karakterizációja



Tétel: Ha G SRt gráf, akkor $n + t = e + k + 1$.

Biz: Rajzoljuk meg G-t az n csúcsból kiindulva, az élek egyenkénti behúzásával. Kezdetben $t = 1, e = 0$ és $k = n$, így a bizonyítandó összefüggés fennáll. Tegyük fel, hogy már néhány élt berajzoltunk, még mindig fennáll az összefüggés, és egy éppen az uv élt rajzolunk meg.

$\boxed{1.}$ u és v különböző komponenshez tartoznak. Ekkor k értéke 1-gyel csökken, e-é pedig 1-gyel nő. Az ÉHL miatt nem keletkezik kör, tehát nem zárunk körül új tartományt, vagyis t nem változik. Az összefüggés fennmarad.

$\boxed{2.}$ u és v ugyanahhoz a komponenshez tartoznak. Ekkor k nem változik, e viszont 1-gyel nő. Az ÉHL miatt keletkezik kör, tehát kettévágjuk az uv élt tartalmazó korábbi tartományt. Ezért t is 1-gyel nő, az összefüggés ismét fennmarad. $\square$

Köv: **(1)** Ha G SRható, akkor t nem függ a síkbarajzolástól.

Biz: $t = e + k + 1 - n$, és a JO nem függ a síkbarajzolástól. $\square$

(2) (**Euler-formula**) Ha G összefüggő SRt gráf, akkor $n + t = e + 2$

Biz: Mivel G összefüggő, ezért a fenti Tételben $k = 1$. $\square$

(3) Ha G egyszerű, SRható és $n \geq 3$, akkor $e \leq 3n - 6$.

Biz: Ilyenkor G minden lapját legalább 3 él határolja, így a DKFL miatt $2e = \sum_{i=1}^{t} l_i \geq 3t$. A Tétel alapján $3n + 2e \geq 3n + 3t = 3e + 3k \geq 3e + 3 + 3 = 3e + 6$, amit rendezve $e \leq 3n - 6$ adódik. $\square$

(4) G egyszerű, SRható, C_3-mentes és $n \geq 3 \Rightarrow e \leq 2n - 4$.

Biz: Ilyenkor G minden lapját legalább 4 él határolja. A DKFL miatt $2e = \sum_{i=1}^{t} l_i \geq 4t$, így $e \geq 2t$. A Tétel miatt $2n + e \geq 2n + 2t = 2e + 2k + 2 \geq 2e + 2 + 2 = 2e + 4$ Ezt rendezve $e \leq 2n - 4$ adódik. $\square$

(5) Ha G egyszerű, SRható, akkor $\delta(G) \ \leq 5$ (azaz $\exists v : d(v) \leq 5$).

Biz: A KFL és **(3)** miatt $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e \leq 6n - 12$. Ezért van olyan csúcs, amire $d(v) \leq \frac{6n-12}{n} < 6$. $\square$

(6) A K_5 és $K_{3,3}$ gráfok egyike sem SRható.

Biz: A K_5 gráf egyszerű, de nem teljesül **(3)**, hiszen $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10 \not\leq 9 = 3 \cdot 5 - 6$. Ezért K_5 nem SRható. A $K_{3,3}$ gráf egyszerű és C_3-mentes, de nem teljesül rá **(4)**, u.i. $|E(K_{3,3})| = 9 \not\leq 8 = 2 \cdot 6 - 4$. Ezrét $K_{3,3}$ nem SRható. $\square$

Megj: Könnyen látható, hogy ha G SRható, akkor $G + e$ tóruszra rajzolható bármely e él behúzása esetén. Nem nehéz látni, hogy K_6 is tóruszra rajzolható. Sőt: még K_7 is az, de K_8 már nem.

Def: Élfelosztás: az élre egy új, másodfokú csúcs ültetése. Élüsszehúzás: az él törlése és két végpontjának azonosítása. Topologikus G (soros bővítés): G-ből élfelosztásokkal képzett gráf.

Megf: Az éltörlés, csúcstörlés, élfelosztás, élösszehúzás operációk mindegyike megőrzi a gráf SRható tulajdonságát.

Köv: (1) Top. K_5 top. $K_{3,3}$ nem SRható. (2) Ha G SRható, akkor G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja.

Kuratowski tétele: (G SRható) $\iff$ (G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja) **Példa:** Petersen-gráf

6.3 Síkgráfok duálisa

Def: A G síkba rajzolt gráf duálisa a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A SRt G gráf G^* duálisa SRható. (n^*, e^*, t^*, k^*) (2) $n^* = t, e^* = e, k^* = 1$. (3) Ha v az i-dik laphoz tartozó duális csőcs, akkor $d_{G^*}(v) = l_i$.

Köv: KFL a duálisra $\sum_{i=1}^{t} l_i = \sum_{v \ \in V(G^*)} d_{G^*}(v) = 2e^* = 2e$.

Def: A $Q \subseteq E(G)$ élhalmaz a G gráf vágása, ha $G - Q$ szétesik (több komponense van, mint G-nek), de $Q' \subsetneq Q$ esetén $G - Q'$ nem esik szét. Elvágó él: egyélű vágás. Soros élek: kételű vágás.

Kör-vágás dualitása: Tegyük fel, hogy G^* a G SRt gráf duálisa. Ekkor (C a G köre) $\iff$ (C^* a G^* vágása) ill. (Q a G vágása) $\iff$ (Q^* a G^* köre).

Köv: Hurokél duálisa elvágó él, soros élpáré párhuzamos élpár.

6.4 Whitney

Whitney tétele: Tegyük fel, hogy G^* a G SRt gráf duálisa. Ekkor H pontosan akkor duálisa a G egy alkalmas síkbarajzolásának, ha H előáll G^*-ból a fenti Whitney-operációk alkalmas egymásutánjával.

Def: A $\varphi : E(G) \to E(H)$ kölcsönös egyenértékű leképezés kör-vágás dualitás G és H között, ha C pontosan akkor G köre, ha $\varphi(C) H$ vágása.

Whitney másik tétele: Tegyük fel, hogy G és H között kör-vágás dualitás van. Ekkor G SRható, és H a G egy alkalmas síkbarajzolásának duálisa.

Megj: Egy G gráf által leírt villamos hálózat viselkedését az Ohm-él Kirchhoff-törvények írják le. Ezek a G gráf éleire, köreire és vágásaira vonatkoznak. Ha G és H közt kör-vágás dualitás van, akkor H-n elkészíthető az előző hálózat duálisa. Az eredeti hálózat megoldásában ha az I és U értékeket felcseréljük, az utóbbi hálózat megoldását kapjuk. Whitney másik tétele miatt ez a különös szimmetria csak SRható gráfok által leírt hálózatokon lehetséges.

7 Lineáris egyenletrendszerek

Def: Lineáris egyenlet: Ismeretlenek konstansszorosainak összeges konstans.
Def: Lineáris egyenletrendszer: Véges sok lineáris egyenlet.
Példa:

$$\begin{aligned} 3x - 4z &= 666 \\ 33x - y + 77z &= 42 \\ \sqrt[3/2]{5}y - (\ln(\cos 42)) \cdot z &= \pi^{e^\pi} \end{aligned}$$

7.1 Elemi sorekvivalens átalakítások

Def: Lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixa: a sorok az egyenletek, az oszlopok az ismeretlenek ill. az egyenletek jobb oldalainak felelnek meg, az egyes mezőkben pedig a megfelelő együttható ill. jobb oldali konstans áll.
Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \qquad \longmapsto \qquad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 0 & -3 & 5 & -6 \\ 7 & 2 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -2 & 11 \end{array}$$

Megj: A kibővített együtthatómátrix a lineáris egyenletrendszer felírásának egy tömör módja: elkerüljük vele a műveleti- és egyenlőségjelekkel piszmogást, mégis teljesen áttekinthető módon tartalmaz minden lényeges információt.

Def: A kibővített egyhómx elemi sorekvivalens átalakítása (ESÁ): (1) sorcsere, (2) sor nemnulla konstanssal végig szorzása, (3) az i-dik sor helyettesítése az i-dik és j-dik sorok (koordinátánkánti) összegével.

Állítás: ESÁ hatására a megoldások halmaza nem változik.

Biz: Minden ESÁ előtti megoldás megoldás marad a ESÁ után is. Minden ESÁ fordítottja megkapható ESÁ-ok egymásutánjaként is. Ezért minden ESÁ utáni megoldás megoldja az ESÁ előtti előtti rendszert is.

7.2 (Redukált) lépcsős alak

Def: Az M mátrix lépcsős alakú (LA), ha

(1) minden sor első nemnulla eleme 1-es (ú.n. vezért1-es, avagy v1)

(2) minden v1 feletti sorban van ettől a v1-től balra eső másik v1.

Az M mátrix redukált lépcsős alakú (RLA), ha

(3) M LA és (2) M-ben minden v1 felett csak nullák állnak.

Példa: LA mátrix RLA mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ill. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \end{array} \mapsto \begin{array}{r} x_1 - 3x_2 - 2x_4 = 1 \\ 2x_3 + 5x_4 = 7 \end{array} \mapsto \begin{array}{l} x_2, x_4 \in \mathbb{R} \\ x_1 = 1 - 3x_2 + 2x_4 \\ x_3 = 7 - 5x_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \mapsto \begin{array}{r} x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 1 \\ x_3 + 5x_4 = 7 \\ 0 = 1 \\ 0 = 0 \end{array} \mapsto \lightning$$

Def: Kibővített egyhómx tilos sora: $0 \ \dots \ 0 \,|\, x$ alakú sor, ha $x \neq 0$.

Def: A RLA kibővített egyhómx v1-hez tartozó változója kötött, a többi változó (amihez nem tartozik v1) szabad (vagy szabad paraméter).

Megf: Ha a kibővített egyhómx RLA, akkor (1) minden sor vagy a v1-hez tartozó változó értékadása, vagy tilos sor, vagy csupa0 sor. (2) Ha van tilos sor, akkor nincs megoldás. (3) Ha nincs tilos sor, a szabad paraméterek tetszőleges értékadásához egyértelmű megoldás tartozik.

Megf: A lineáris egyenletrendszer megoldása tekinthető úgy, hogy a lineáris egyenletrendszeregy RLA kibővített egyhómx-szal van megadva.

7.3 Gauss-elimináció

Gauss-elimináció:

Input: $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix.

Output: Egy M-ből ESÁ-okkal kapható $M' \in \mathbb{R}^{n \times k}$ LA mátrix.

Működés: Az algoritmus fázisokból áll. Az i-dik fázisban keresünk egy nemnulla elemet az $(i-1)$-dik sor alatt a lehető legkisebb sorszámú oszlopban. Ha nincs ilyen elem, az algoritmus véget ér. Sorcserével ezt a nemnulla elemet az i-dik sorba visszük. Az i-dik konstanssal szorzásával ezt az elemet v1-sé alakítjuk. Az i-dik sor alatti sorokhoz az i-dik sor konstansszorosát hozzáadva kinullázuk a kapott v1 alatti elemeket.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & -6 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 \end{array} \to \begin{array}{ccccc} 3 & 6 & -6 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 \end{array} \to \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 \end{array} \to \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -7 \end{array} \to$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -7 \end{array} \to \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 13 \end{array} \to \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \checkmark$$

Megj: (1) A Gauss-elimináció outputja LA. Az RLA-hoz további lépésekre van szükség: minden v1 felett kinullázhatók az elemek, ha a v1 sorának konstansszorosait a v1 feletti sorokhoz adjuk.

Példa:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \to \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \to \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \checkmark$$

(2) Ha csupán LA (RLA) a cél, eltérhetünk a Gauss-eliminációtól, feltéve, hogy ESÁ-okkal dolgozunk.

Példa:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & \sqrt{42} & \sqrt[e]{\pi} \end{array} \to \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -2 & -\sqrt{42} & 3 - \sqrt[e]{\pi} \\ 2 & 1 & 0 & \sqrt{42} & \sqrt[e]{\pi} \end{array} \checkmark$$

(3) A Gauss-elimináció megvalósítható rekurzív algoritmusként is. A GE(M) (az M mátrixot lépcsős alakra hozó eljárás):

$\boxed{1.}$ Ha M első oszlopa csupa0, akkor M' az első oszlop törlésével keletkező mátrix. Output: GE(M') elé írunk egy csupa0 oszlopot.

$\boxed{2.}$ Ha M első oszlopa tartalmaz nemnulla elemet, sorcserével és az első sor konstanssal szorzásával az első sor első elemét v1-sé tesszük, majd a v1 alatti elemeket ESÁ-okkal kinullázzuk. Legyen M' az első sor és első oszlop törlésével keletkező mátrix. Output: GE(M') elé írunk egy csupa0 oszlopot és az így kapott mátrix fölé a korábban törölt első sort.

(4) Az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ Gauss-eliminációja során minden fázisában legfeljebb egy sorcserét, legfeljebb $2n$ sorszorzást és legfeljebb n sorösszeadást hajtunk végre. Ezért minden fázis legfeljebb $konst \cdot nk$ lépést igényel, az összlépésszám legfeljebb $konst \cdot n^2k$. Az input M mátrix $n \cdot k$ elemet tartalmaz, az eljárás hatékony.

7.4 Lineáris egyenletrendszer megoldásszáma

Láttuk:

1. Lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixként is megoldható.
2. ESÁ nem változtat a megoldásokon.
3. ESÁ-okkal elérhető a RLA.
4. A RLA-ból azonnal adódik a megoldás.
   - Ha az utolsó oszlopban van v1, akkor nincs megoldás.
   - Ha az utolsó kivételével minden oszlopban van v1, akkor egyetlen megoldás van.
   - Ha az utolsón kívül más oszlopban sincs v1, akkor van szabad paraméter, így végtelen sok különböző megoldás van.

Köv: Ha a lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor legalább annyi egynelet van, mint ahány ismeretlen.

Biz: Az RLA-ra hozás után nincs szabad paraméter, tehát minden változóhoz tartozik v1. Ezért a kibővített együtthatómátrixnak legalább annyi sora van, mint a változók száma.

Megj: A fenti következmény fordított irányban nem igaz, és lényegében nincs más összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az ismeretlenek és egyenletek száma között.

8 Az $\mathbb{R}^n$ tér alaptulajdonságai

8.1 Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times A \times \cdots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságó vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk.

Példa:

$$\begin{pmatrix} e \\ \pi \\ 42 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ ill. } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

utóbbi esetben az 1-es felülről az i-dik helyen áll.

Megj: (2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni. A vektorok tehát itt és most nem „irányított szakaszok”, hanem ennél általánosabb fogalmat takarnak: az irányított szakaszok is tekinthetők vektornak, de egy vektor a mi tárgyalásunkban nem feltétlenül irányított szakasz.

(3) Az n magasságú vektorokkal különféle dolgokat művelhetünk. Például (koordinátánként) összeadhatjuk őket.

Példa:

$$\text{Ha } \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ és } \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ akkor } \underline{x} + \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \ldots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Vagy skalárral szorozhatjuk őket. (Ami nem „igazi” művelet...)

Példa:

$$\text{Ha } \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ és } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ akkor } \lambda\underline{x} = \text{, akkor } \underline{x} + \underline{y} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \ldots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

(4) Az $\mathbb{R}^n$ **tér** alatt $\mathbb{R}^n$ elemeire és a fenti két műveletre gondolunk.

(5) $\mathbb{R}^2$ ill. $\mathbb{R}^3$ elemei természetes módon megfeleltethetők a sík, ill. a 3 dimenziós tér pontjainka. Ez segíthet abban, hogy valamiféle szemléletes képet kapjunk az n magasságú vektorokról tanultakról.

8.2 Vektorműveletek azonosságai

Állítás: Az $\mathbb{R}^n$ tér vektoraival történő számolásban néhány fontos szabály sokat segít. Tetszőleges $\underline{x, y, z} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárokra az alábbiak teljesülnek:

(1) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (az összeadás kommutatív)

(2) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ (az összeadás asszociatív)

(3) $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$ (egyik disztributivitás)

(4) $(\lambda+\mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}$ (másik disztributivitás)

(5) $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u})$ (másik asszociatívitás)

Biz: Mivel mindkét művelet koordinátánként történik, elég az egyes azonosságokat koordinátánként ellenőrizni. Ezek viszont éppen a valós számokra vonatkozó jól ismert szabályok.

Konvenció: $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $-\underline{v} := (-1)\cdot v$. Ezzel a vektorok között nem csak az összeadás, hanem a kivonás is értelmezhető: $\underline{u} - \underline{v} := \underline{u} + (-1)\underline{v}$. Ezáltal a kivonás is egyfajta összeadás, tehát az üsszeadásra vonatkozó szabályok értelemszerű változatai a kivonásra is érvényesek.

Ezek szerint a vektorokkal történő számolási szabályok nagyon hasonlók a valós számok esetén megszokott szabályokhoz.

8.3 Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x}+\underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetszőleges origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetszőleges origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.

Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?

Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \cdots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.

Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \cdots + 0 \cdot \underline{x}_k$.

Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt lineáris kombinációra$)$, azaz az altér definiálható az $\mathbb{R}^n$ lineáris kombinációra zárt részhalmazként.

Biz: Triviális.

Def: $\langle \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}_n$ lineáris kombinációinak halmaza.

Példa:

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \text{ az origón átmenő 2-meredekségű egyenes.}$$

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \mathbb{R}^2, \text{ ill. } \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n \rangle = \mathbb{R}^n \text{ ahol } \underline{e}_i \in \mathbb{R}^n \forall i.$$

Konvenció: $\langle \emptyset \rangle := \{\underline{0}\}$.

Állítás: Tetszőleges $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.

Biz: Zárt az összeadásra: $(\lambda_1\underline{x}_1 + \cdots + \lambda_k\underline{x}_k) + (\kappa_1\underline{x}_1 + \cdots + \kappa_k\underline{x}_k) = (\lambda_1+\kappa_1)\underline{x}_1 + \cdots + (\lambda_k+\kappa_k)\underline{x}_k \in V$. Skalárral szorzás: $\lambda \cdot (\lambda_1\underline{x}_1 + \cdots + \lambda_1\underline{x}_k) = \lambda\lambda_1\underline{x}_1 + \cdots + \lambda\lambda_k\underline{x}_k \in V$.

Def: Az $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ halmaz. Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.

Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \forall i \Rightarrow \cap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.

Biz: (1) Műveletzártság: $\underline{x}, \underline{y} \in V_i \forall i, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{x}+\underline{y}, \lambda\underline{x} \in V_i \forall_i$.

Megf: (2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$.

Biz: (2) $\underline{0}+\underline{0}=\underline{0}$ ill. $\lambda\underline{0}=\underline{0}$, zárt a műveletekre.

Megf: (3) $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$.

Biz: (3) $\mathbb{R}^n$ zárt a műveletekre.

Def: $\mathbb{R}^n$ triviális alterei: $\{\underline{0}\}, \mathbb{R}^n$.

8.4 Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.

Példa: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ generátorrendszere, hisz minden $\mathbb{R}^n$-beli vektor előáll az egységvektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\langle \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n \rangle = \mathbb{R}^n$

Ha $\mathbb{R}^2$-ben két vektor nem párhuzamos, akkor generátorrendszert alkotnak, hiszen bármely vektor előállítható a lineáris kombinációjukból. (Ehhez a két vektrort az origóval összekötő egyenesekre kell a „másik" vektorral párhuzamosan vetíteni az előállítandó vektort.)

Hasonlóan, ha $\mathbb{R}^3$-ban három vektor nem esik ugyanarra az origón átmenő síkra, akkor ez a három vektor generátorrendszert alkot.

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektor csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő: $\lambda_1 \underline{x}_1 + \cdots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Ha a fenti vektorok nem lineárisan függetlenek, akkor lineárisan összefüggők.

Példa: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ lineárisan független $\mathbb{R}^n$-ben, hisz ha $\lambda_1 \underline{e}_1 + \ldots \lambda_n \underline{e}_n = \underline{0}$ akkor az i-dik koordináta 0 volta miatt $\lambda_i = 0$, tehát a lineáris kombináció triviális.

Ha $\mathbb{R}^2$-ben két vektro akkor lineárisan összefüggő, ha párhuzamosak. Tehát ha nem párhuzamosak, akkor lineárisan függetlenek.

Ha $\mathbb{R}^3$-ban pedig az igaz, hogy ha három vektor nem esik ugyanarra az origón átmenő síkra, akkor ez a három vektor lineárisan független rendszert alkot.

Megj: A lineáris függetlenség (akárcsak a lineáris összefüggő tulajdonság) vektorok egy halmazára és nem az egyes vektorokra vonatkozik. Hasonló igaz a generátorrendszerre. Az, hogy egy konkrét $\underline{v}$ vektor benne van egy lineárisan független (lineárisan összefüggő vagy generátor-) rendszerben lényegében semmi információt nem ad $\underline{v}$-ről.

Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\iff$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

Biz: Tegyük fel, hogy $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ **nem** lineárisan független, azaz $\lambda_1 \underline{x}_1 + \cdots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0}$ és $\lambda_i \neq 0$. Ekkor $\underline{x}_i$ előállítható a többiből: $\underline{x}_i = \frac{-1}{\lambda_i} \cdot (\lambda_1 \underline{x}_1 + \cdots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k)$.
Most tegyük fel, hogy valamelyik $\underline{x}_i$ előáll a többi lineáris kombinációjaként: $\underline{x}_i = \lambda_1 \underline{x}_1 + \cdots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k$.
Ekkor $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ nem lineárisan független, hiszen a nullvektor megkapható nemtriviális lineáris kombinációként: $\underline{0} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \cdots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + (-1) \cdot \underline{x}_i + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k$.

8.5 Független- és generáló halmazok

Állítás: Tegyük fel, hogy $\underline{v} \in \mathbb{R}^n, \underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G \rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G \rangle)$.

Megj: A fenti állítás tulajdonképpen azt mondja ki, hogy egy V altér generátorrendszeréből pontosan akkor tudunk egy elemet elvenni úgy, hogy a maradék vektorok tobábbra is generátorrendszert alkossanak, ha a kihagyott elem előáll a maradék elemek lineáris kombinációjaként.

Biz: $\Rightarrow$: Mivel $\langle G \rangle = V = \langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle$, ezért $\underline{v} \in V$ és $\underline{v} \in \langle G \rangle$.

$\Leftarrow$: Tetszőleges $\underline{u} \in V$ elemről azt kell megmutatni, hogy $\underline{u} \in \langle G \rangle$. Mivel $\underline{v} \in \langle G \rangle$, feltehető, hogy $\underline{v} = \sum_{\underline{g} \in G} \lambda_{\underline{g}} \underline{g}$. Tudjuk, hogy $\underline{u} \in V = \langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle$, ezért $\underline{u} = \lambda \underline{v} + \sum_{\underline{g} \in G} \mu_{\underline{g}} \underline{g}$. Ebbe behelyettesítve a fenti kifejezést $\underline{u} = \sum_{\underline{g} \in G} (\mu_{\underline{g}} + \lambda \cdot \lambda_{\underline{g}}) \underline{g}$ adódik, azaz $\underline{u} \in \langle G \rangle$. Ez bármely $\underline{u} \in V$-re igaz, így $\langle G \rangle = V$.

Lemma: Tegyük fel, hogy $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lineárisan független. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lineárisan független$) \iff (\underline{f} \notin \langle F \rangle)$

Megj: A lemma szerint független halmaz hízlalása csakis olyan vektorral lehetséges, ami nem áll elő a független rendszer lineáris kombinációjaként. A $\Leftarrow$ irányt az „újonnan érkező vektor lemmájának" is nevezik.

Biz: $\Rightarrow$: Ha $F \cup \{\underline{f}\}$ lineárisan független, akkor $\underline{f}$ nem áll elő F-beliek lineáris kombinációjaként, azaz $\underline{f} \notin \langle F \rangle$.

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy $\lambda \underline{f} + \lambda_1 \underline{f}_1 + \cdots + \lambda_k \underline{f}_k = \underline{0}$.

Ha $\lambda = 0$, akkor a bal oldal az $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k$ vektorok lineáris kombinációja, így F lineáris függetlensége miatt $\lambda_i = 0 \forall i$. Tehát $\underline{0}$ csak triviális lineáris kombinációként áll elő, vagyis $F \cup \{\underline{f}\}$ csakugyan lineárisan független.

Ha pedig $\lambda \neq 0$, akkor $\underline{f}$ kifejezhető az F-beliekkel: $\underline{f} = \frac{-\lambda_1}{\lambda} \underline{f}_1 + \cdots + \frac{-\lambda_k}{\lambda} \underline{f}_k$. Ez lehetetlen, hisz $\underline{f} \notin \langle F \rangle$.

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lineárisan független és $\langle G \rangle = V$ generátorrendszer akkor $\forall \underline{f} \in F \; \exists \; \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lineárisan független.

Megj: A kicserélési lemma szerint bárhogy is törlünk a V altér egy független rendszeréből egy vektrort, az pótolható a V generátorrendszer egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer lineárisan független marad.

Biz: Indirekt bizonyítunk. Legyen $F' := F \setminus \{\underline{f}\}$. Mivel F lineárisan független, ezért $\underline{f} \notin \langle F' \rangle$. Ha $F' \cup \{\underline{g}\}$ lineárisan összefüggő lenne minden $\underline{g} \in G$-re, akkor az előző lemma miatt $\underline{g} \in \langle F \rangle$ teljesülne minden $\underline{g} \in G$-re. Ez azt jelenti, hogy $G \subseteq \langle F' \rangle$, vagyis $\langle G \rangle \subseteq \langle F' \rangle$. Ezt felhasználva $\underline{f} \in V = \langle G \rangle \subseteq \langle F' \rangle \not\ni \underline{f}$ adódik, ami ellentmondás. Az indirekt feltevés megfőlt: van olyan $\underline{g} \in G$, amire $F' \cup \{\underline{g}\}$ lineárisan független.

FG-egyenlőtlenség: Tegyük fel, hogy G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lineárisan független. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Megj: Magyarul: altérben egy független rendszer sosem nagyobb, mint egy generátorrendszer.

Biz: Legyen $F_0 := F$. Ha $F_0 \subseteq G$, akkor $|F_0| \leq |G|$. Ha $F_0 \subsetneq G$, akkor $F_0 \setminus G \neq \emptyset$, legyen mondjuk $\underline{f} \in F_0 \setminus G$. A kicserélési lemma miatt van olyan $\underline{g} \in G$, amire $F_1 := F_0 \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ lineárisan független. Ezzel az F_1-gyel ugyanezt folytatva kapjuk az $F_2, F_3, \ldots,$ lineárisan független rendszereket. Előbb-utóbb olyan F_i-hez jutunk, amivel ez már nem folytatható, mert $F_i \subseteq G$. Ekkor $|F_0| = |F_1| = \cdots = |F_i| \leq |G|$, győztünk.

Köv: Ha $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lineárisan független, akkor $|F| \leq n$.

Biz: Láttuk, hogy $G = \{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ az $\mathbb{R}^n$ generátorrendszere. Az FG-egyenlőtlenség miatt $|F| \leq |G| = n$.

Állítás: Tegyük fel, hogy $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lineárisan független és $\underline{f} \in \langle F \rangle$. Ekkor $\underline{f}$ egyértelműen áll elő F-beli vektorok lineáris kombinációjaként.

Biz: Mivel $f \in \langle F \rangle$, ezért $\underline{f}$ előáll az F-beliek lineáris kombinációjaként. Tegyük fel, hogy $\underline{f} = \lambda_1 \underline{f}_1 + \cdots + \lambda_k \underline{f}_k = \mu_1 \underline{f}_1 + \cdots + \mu_k \underline{f}_k$ két előállítás. Ekkor $\underline{0} = \underline{f} - \underline{f} = (\lambda_1 - \mu_1)\underline{f}_1 + \cdots + (\lambda_k - \mu_k)\underline{f}_k$.

Mivel F lineárisan független, a jobb oldalon álló lineáris kombináció triviális, azaz $\lambda_i = \mu_i \forall i$. Így a két fenti előállítás megegyezik, vagyis f csak egyféleképp áll elő az F-beliek lineáris kombinációjaként.

8.6 ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. MOst azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tegyük fel, hogy M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Biz: Feltehető, hogy M'-t egyetlen ESÁ-sal kaptuk M-ből. Bármelyik konkrét ESÁ-i is alkalmaztunk, $S' \subseteq \langle S \rangle$, így $\langle S' \rangle \subseteq \langle S \rangle$. Láttuk, hogy bármely ESÁ megfordítása is kivitelezhető ESÁ-okkal, ezért $\langle S \rangle \subseteq \langle S' \rangle$, és a két megfigyelésből $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$ adódik.

Állítás: Tegyük fel, hogy az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots, \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots, \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$.

Biz: Ismét feltehető, hogy M' egyetlen ESÁ-sal keletkezett. Ráadásul elég a $\Rightarrow$: irányt bizonyítani: a $\Leftarrow$: következik abból, hogy minden ESÁ fordítottja megvalósítható legfeljebb három ESÁ-sal. Ezért ha egy lineáris összefüggés fennál M'-re akkor az ezt legfeljebb három ESÁ megőrzi, tehát igaz marad M-re is.

Biz: $\Rightarrow$: A fenti lineáris összefüggés M-re pontosan azt jelenti, hogy $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^k \mu_i x_i$ egyenletnek M minden sora megoldása. Nekünk pedig azt kell igazolni, hogy ugyanezt az egyenletet az ESÁ után kapott M' minden sora is megoldja. Sorcsere esetén pontosan ugyanazokról az egyenlőségekről van szó, skalárral szorzás esetén az egyik egyenletet skalárral kell szorozni, sorüsszeadás esetén pedig az új egyenlőség két korábban teljesülő egyenlet összege.

Példa: Döntsük el, hogy lineárisan független rendszert alkotnak-e az alábbi mátrix oszlopai. Megoldás: ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc|cccc|}
1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -7 \\
-1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
1 & 4 & 0 & 5 & 0 & 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
2 & 3 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

A kapott mátrixra $\underline{o}_4 = -7\underline{o}_1 + 3\underline{o}_2 + 2\underline{o}_3$, ezért ugyanez a lineáris összefüggés a kiindulási mátrixra is igaz, tehát nem voltak lineárisan függetlenek az oszlopok.

Megf: Az M mátrix pontosan akkor RLA, ha megkaphatü az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ oszlopok alkotta mátrixból oszlopok beszúrásával. Minden beszúrt oszlop a tőle álló $\underline{e}_i$ oszlopok lineáris kombinációja.

9 Altér bázisa és dimenziója

9.1 Altér bázisa

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa a V egy lineárisan független generátorrendszere.

Példa: Az $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektorok az $\mathbb{R}^n$ standard bázisát alkotják.

Kérdés: Minden altérnek van bázisa? Ha $\mathbb{R}^n$ egy V altérnek van, akkor hogyan lehet előállítani V egy bázisát?

1. Módszer: Ha $V = \langle G \rangle$, azaz ha ismert a V egy véges G generátorrendszere, akkor G-t addig ritkítjuk, amíg lineárisan független nem lesz.

Konkrétan: ha egy $\underline{g} \in G$ generátorelem előáll a $G \setminus \{\underline{g}\}$ elemeinek alkalmas lineáris kombinációjaként, akkor $G \setminus \{\underline{g}\}$ is generálja V-t. Ezért $\underline{g}$-t eldobhatjuk. Ha már nincs ilyen eldobható $\underline{g}$ vektor, akkor G maradéka nem csak generátorrendszer, de lineárisan független is.

2. Módszer: Felépíthetjük V bázisát a V egy tetszőleges F lineárisan független rendszeréből (akár $F = \emptyset$-ból) kiindulva. Ha $\langle F \rangle = V$, akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor tetszőleges $\underline{f} \in V \setminus \langle F \rangle$ esetén $F \cup \{\underline{f}\}$ lineárisan független marad. Az FG-egyenlőtlenség miatt F nem tartalmazhat n-nél több elemet, ezért legfeljebb n lépésben megkapjuk V bázisát.

9.2 Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|} \underline{u} & \underline{v} & \underline{w} & \underline{x} & \underline{y} \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

Ezek szerint $\underline{w} = \underline{v} - \underline{u}$, $\underline{x} = 3\underline{u} - 2\underline{v}$, és $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}\}$ lineárisan független generátorrendszer, tehát a V altér bázisát alkotja.

Példa: Keressük meg az alábbi $V \leq \mathbb{R}^4$ altér egy bázisát!

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, 3x_2 - 2x_4 = 0 \right\}$$

Megoldás: Az altér egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaiból áll. (Homogén: a jobboldalon 0-k állnak, amiket a kibővített együtthatómátrixból elhagyunk.) A megoldásokat leíró képletből fogjuk meghatározni V egy bázisát.

$$
\begin{array}{cccc|cccc|cccc|}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\
0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3}
\end{array}
\quad
\begin{aligned}
& x_3, x_4 \in \mathbb{R}\text{tetsz.}, \\
& x_1 = -x_3 - \frac{5}{3}x_4, \\
& x_2 = \frac{2}{3}x_4.
\end{aligned}
$$

A bázis elkészítéséhez a szp-ek olyan lineárisan független értékadásait keressük, amelyek lineáris kombinációjaként a szp-ek tetszőleges értékadása előáll. Ilyen pl., ha minden lehetséges módon egy szp-nek 1, a többinek 0 értéket adunk. Azaz az $x_3 = 1, x_4 = 0$ ill. $x_3 = 0, x_4 = 1$ értékadásokhoz a $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorok alkotta bázis tartozik.

Példa: Írjuk fel a V alteret meghatározó homogén lineáris egyenletrendszert, ahol V-t az alábbi vektorok generálják.

$$
\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-ra (LA-ra) hozzuk.

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|}
3 & 2 & 5 & 2 & x_1 & 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 & 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\
-1 & 3 & -9 & 2 & x_2 & -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 & 0 & -1 & 2 & 2 & x_2 + x_4 \\
0 & -1 & 2 & 2 & x_3 & 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 & 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\
1 & -1 & 5 & 3 & x_4 & 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 & 0 & 5 & -10 & -7 & x_2 - 3x_4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|}
1 & -1 & 5 & 3 & x_4 & 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 & 1 & 0 & 3 & 1 & x_4 - x_3 \\
0 & -1 & 2 & 2 & x_3 & 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 & 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 \\
0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 & 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 & 0 & 0 & 0 & 9 & x_2 + 2x_3 + x_4 \\
0 & 5 & -10 & -7 & x_2 - 3x_4 & 0 & 5 & -10 & -7 & x_2 - 3x_4 & 0 & 0 & 0 & 3 & x_1 - 5x_3 - 3x_4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc|}
1 & 0 & 3 & 0 & \dots \\
0 & 1 & -2 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x_2+2x_3+x_4}{9} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3x_1-x_2+13x_3-10x_4}{3}
\end{array}
$$

A kiindulási mátrix 5-dik oszlopa pontosan akkor van V-ben, ha az első 4 oszlop generálja. Ez azzal ekvivalens, hogy az RLA mátrix eslő 4 oszlopa generálja az 5-diket. Mivel $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ a generáló oszlopok között vannak, ezért csupán $3x_1 - x_2 + 13x_3 - 10x_4 = 0$ a feltétel.

9.3 Altér dimenziója

Megf: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.

Biz: Mivel B_1 lineárisan független és B_2 generátorrendszer V-ben, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt $|B_1| \leq |B_2|$.

Az is igaz, hogy B_2 lineárisan független és B_1 generátorrendszer V-ben, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt $|B_1| \leq |B_2|$ is teljesül. A két eredmény összevetéséből $|B_1| = |B_2|$ adódik.

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázis.

Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.

Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n. (U.i. $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_3$ lineárisan független generátorrendszer)

Állítás: Ha $U \leq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor dim $U \leq$ dim V.

Biz: Legyen B az U bázisa. Ekkor $B \subseteq V$ lineárisan független, ezért a korábban látott 2. módszerrel B-t ki lehet egészíteni V egy B' bázisává, így dim $U = |B| \leq |B'| =$ dim V.

Állítás: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$ és V_1, V_2 a V alterei, akkor dim$(V_1 \cap V_2)+$ dim $V \geq$ dim V_1+ dim V_2.

Biz: Egészítsük ki az $U \cap V$ egy B bázisát a V_1 egy $B \cup B_1$ ill. a V_2 egy $B \cup B_2$ bázisává. Igazoljuk, hogy $B \cup B_1 \cup B_2$ lineárisan független.
Tegyük fel, hogy $\sum_{\underline{b}\in B} \lambda_b \underline{b} + \sum_{\underline{b_1}\in B_1} \lambda_{b_1}\underline{b_1} + \sum_{\underline{b_2}\in B_2} \lambda_{b_2}\underline{b_2} = 0$.
Ezt átrendezve: $V_1 \ni \underline{x} = \sum_{\underline{b}\in B} \lambda_b \underline{b} + \sum_{\underline{b_1}\in B_1} \lambda_{b_1}\underline{b_1} = -\sum_{\underline{b_2}\in B_2} \lambda_{b_2}\underline{b_2} \in V_2$ adódik, ezért $\underline{x} \in V_1 \cap V_2$.
Ekkor $\underline{x} = \sum_{\underline{b}\in B} \mu_b \underline{b}$, hisz B a $V_1 \cap V_2$ bázisa.
Innen $\underline{x} = \sum_{\underline{b}\in B} \mu_b \underline{b} + \sum_{\underline{b_2}\in B_2} \lambda_{b_2}\underline{b_2} = \underline{x} - \underline{x} = 0$.
A $B \cup B_2$ lineáris függetlensége miatt $\lambda_{\underline{b_2}} = 0$ $\forall \underline{b_2} \in B_2$. Hasonlóan $\lambda_{b_1} = 0$ $\forall \underline{b_1} \in B_1$, és $\lambda_{\underline{b}} = 0$ $\forall \underline{b} \in B$, azaz $B \cup B_1 \cup B_2$ lineárisan független. Ebből adódik, hogy dim $(V_1 \cap V_2)+$ dim $V \geq |B| + |B_1| + |B_2| + |B| =$ dim V_1+ dim V_2.

Köv: $\mathbb{R}^3$-ban bármely két origón áthaladó sík (más szóval: kétdimenziós altér) tartalmaz közös egyenest.

Megj: $\mathbb{R}^4$-ben már található két olyan origón áthaladó sík, amik csak az origóban metszik egymást. Ilyenek pl. $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2\rangle$ ill. $\langle \underline{e}_3, \underline{e}_4\rangle$.

A továbbiakban azt szeretnénk indokolni, hogy $\mathbb{R}^n$ tetszőleges k dimenziós altere „lényegében" úgy viselkedik, mint $\mathbb{R}^k$.

9.4 Bázis szerinti koordináták

Legyen B a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa. Mivel B generátorrendszer, minden $\underline{v} \in V$ előáll a B elemeinek lineáris kombinációjaként, azaz $\underline{v} = \sum_{\underline{b}\in B} \lambda_{\underline{b}}\underline{b}$ alakban.

A B bázis lineárisan függetlenségéből pedig az következik, hogy tetszőleges $\underline{v} \in V$ lin.komb-ként történő előállítása egyértelmű: ha $\underline{v} = \sum_{\underline{b}\in B} \lambda_{\underline{b}}\underline{b} = \sum_{\underline{b}\in B} \mu_{\underline{b}}\underline{b}$, akkor $\lambda_{\underline{b}} = \mu_{\underline{b}} \forall \underline{b} \in B$.

Ez a gondolatmenet indokolja az alábbi fogalom jóldefiniáltságát.

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_k\end{pmatrix}$

Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{u}, \underline{v} \in V$ ill. $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

(1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill.

(2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda[\underline{u}]_B$.

Biz: (1) Tegyük fel, hogy $[\underline{u}]_B = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_k\end{pmatrix}$ és $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_k\end{pmatrix}$.

Ekkor $\underline{u} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$ és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{b}_i$, tehát $\underline{u}+\underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i + \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_i)\underline{b}_i$,

ezért $[\underline{u}+\underline{v}]_B = \begin{pmatrix}\lambda_1+\mu_1\\ \vdots \\ \lambda_k+\mu_k\end{pmatrix} = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$.

Biz: (2) Tegyük fel, hogy $[\underline{u}]_B = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_k\end{pmatrix}$.

Ekkor $\lambda_{\underline{u}} = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda\lambda_i \underline{b}_i \Rightarrow [\lambda \underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda\lambda_k \end{pmatrix} = \lambda[\underline{u}]_B$

Megj: A fenti állítás azt mutatja meg, hogy $\mathbb{R}^n$ bármely V altere lényegében ugyanúgy viselkedik, mint az $\mathbb{R}^k$ tér, ahol $k = \dim V$.

Kínzó kérdés: Hogyan kell a koordinátavektort kiszámítani?

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ill. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Keressük a $[V]_B$-t, ha $v \in V$.

Megoldás: Az $(\underline{b}_1|\underline{b}_2|\underline{v})$ mátrixot RLA-vá transzformáljuk.

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|} 3 & 4 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 & -1 & 0 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Az RLA mátrix harmadik oszlopa az első kettő lineáris kombinációja, így $\underline{v} = -3\underline{b}_1 + 4\underline{b}_2$, azaz $\underline{v} \in V$ és $[\underline{v}]_B = \binom{-3}{4}$.

9.5 Mi haszna a lineáris algebrának???

Amikről itt és nem esik szó: kapcsolat a koordinátageometriával, konvex alakzatok geometriájával ill. lineáris célfüggvény optimalizálását előíró feladatok megoldásával.

A matematikailag különösen érdekes alkalmazások általában abból adódnak, hogy egy lineáris algebrától látszólag távol álló feladatról kiderül, hogy megfogalmazható lineáris algebrai terminológiával. Az így rendelkezésre álló eszközök pedig jóval hatékonyabbak lehetnek, mint az eredeti feladat témakörében szokásosak. Akár a legegyszerűbb lineáris algebrai eszköz (mint pl. az FG-egyenlőtlenség) nehéz tételek meglepően egyszerű igazolására is alkalmas lehet.

Buta kérdés: Egy n-elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet kiválasztani úgy, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha $\emptyset \neq A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda \ \forall 0 < i < j \leq k$, akkor $k \leq n$.

Biz:

(1) Ha $\lambda = 0$, akkor az $A_1, \ldots, A_k$ halmazok diszjunktak, és az állítás triviális, hisz $|A_i| \geq 1 \forall i$. Feltehetjük, hogy $\lambda > 0$.

(2) Világos, hogy $|A_i| \geq \lambda \forall 1 \leq i \leq k$. Ha mondjuk $|A_1| = \lambda$, akkor $A_1 \subsetneq A_j \forall j \neq 1$. Ezért az $A_2, \ldots, A_n$ halmazok A_1-en kívüli része egymástól diszjunkt, tehát a darabszámuk legfeljebb $n - \lambda$ lehet, és ebből $k \leq n - \lambda + 1 \leq n$ adódik. Feltehetjük tehát, hogy $|A_i| > \lambda$ teljesül az $A_1, \ldots, A_k$ halmazok mindegyikére.

(3) Legyen $|A_i| = \lambda + \mu_i$, ahol $\mu_i > 0 \forall 1 \leq i \leq k$. Jelölje rendre $a_1, \ldots, a_k$ az $A_1, \ldots, A_k$ halmazok karakterisztikus vektorát, azaz $a_i = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_n \end{pmatrix}$, ahol $\chi_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_j \in A_i \\ 0 & \text{ha } x_j \in A_i \end{cases}$.

Ha az $a_1, \ldots, a_k$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor az FG-egyenlőtlenség miatt $k \leq \dim \mathbb{R}^n = n$.

Tegyük fel, hogy $\lambda_1 \underline{a}_1 + \cdots + \lambda_k \underline{a}_k = 0$. A bal oldali vektor A_j elemeinek megfelelő koordinátáit összeadva $\mu_j \lambda_j + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$ adódik.

Ha $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i > 0$, akkor $\lambda_j < 0 \forall j$, így $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i < 0$, ellentmondás.

Hasonlóan, ha $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i < 0$, akkor $\lambda_j > 0 \forall j$, ez sem lehetséges.

Végül, ha ha $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$, akkor $\lambda_j = 0 \forall j$, és az $a_1, \ldots, a_k$ vektorok csakugyan lineárisan függetlenek.

10 Négyzetes mátrix determinánsa

10.1 Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata

Def:
Megf:
Megj:
Köv:
Def:
Megf:
Megj:
Köv:

10.2 Paralelotop térfogata

Tanulság:
Megf:
Kínzó kérdés:
Megnyugtató válasz:

10.3 Permutációk és transzpozíciók

Példa:
Megf:
Def:
Megf:
Köv:
Biz:
Megj:

10.4 Permutációk inverziószáma

Def:
Def:
Megf:
Példa:
Def:
Példa:
Megf:
Biz:
Biz:
Köv:
Köv:

10.5 Bástyaelhelyezések

Köv:
Példa:

10.6 A determináns

Def:
Példa:
Megj:
Def:
Példa:
Tétel:
Biz:
Példa:
Köv:
Megj:

10.7 A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás:
Biz:
Állítás:
Biz:
Állítás:
Biz:
Állítás:
Biz:
Állítás:
Biz:
Köv:
Biz:
Biz:
Biz:
Def:
Megf:
Biz:
Megf:
Biz:

10.8 A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:
Megj:

10.9 A kifejtési tétel

Megf:
Def:
Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):
Példa:

11 Mátrixműveletek és lineáris leképezések

12 Mátrix rangja és inverze

13 Mátrixegyenletek

Biz: