Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

A számítástudomány alapjai

Kidolgozott szóbeli tételsor

Készítette: Illyés Dávid

A jegyzetben a "A számítástudomány alapjai" nevű tárgy 2023/24/1 félévében kiadott szóbeli tételsor van (többé-kevésbé) kidolgozva. (Jelenleg inkább csak össze gyűjtögetve, de finomítva még nincs.) Minden a jegyzetben található információ (beleértve az ábrákat) a BME tulajdonát képzik és az eredeti előadás diákból, ill. azok alapján van megírva. Nem hivatalos BME által kiadott dokumentum!

January 4, 2024

Tartalomjegyzék

Tételek:

A **félkövéren** szedett dolgokat tudni kell ismertetni, kimondani, ill. definiálni. Az aláhúzottakat bizonyítottuk, a *dőlten* szedetteket nem. A vizsgán az anyag értő ismeretét kérjük számon, elégségesért nem kell bizonyítást tudni.

1. Gráfelméleti alapfogalmak: **csúcs, él, diagram, fokszám**. Egyszerű gráf, irányított gráf, véges gráf, komplementer gráf, reguláris gráf, él/csúcstörlés, élhozzáadás, (feszítő/feszített) részgráf, izomorfia, élsorozat, séta, út, kör,**összefüggő gráf**, komponens. **kézfogás-lemma**.
2. **Élhozzáadási lemma** erdő, **fa**, fák egyszerűbb tulajdonságai: két levél, erdők élszáma. **Feszítőfa** létezése, feszítőfához tartozó alapkörök és alap vágások.
3. **Minimális költségű feszítőfa**, mkffák struktúrája, **Kruskal-algoritmus** helyessége, villamos hálózathoz tartozó normál fa keresése.
4. Általános gráfbejárás: **a csúcsok állapotváltozása, a bejárás általános lépése**, a bejáráshoz tartozó sorrender ill. az élek osztályozása bejárás után. A **BFS** és tulajdonságai, legrövidebb utak fájának létezése.
5. Gráfút hossza, gráfcsúcsok távolsága, nemnegatív és konzervatív hosszfüggvény, triviális és pontos (r, l)**-felső becslés, élmenti javítás. Dijkstra-algoritmus működése**, Ford-algoritmus helyessége és lépésszáma. Legrövidebb utak fájának létezése.
6. **Mélységi keresés** és alkalmazásai (fellépő éltípusok, mélységi- és befejezési számozásból az éltípus meghatározása, irányított kör létezésének eldöntése DFS-sel).
7. **DAG**, jellemzése, **topologikus sorrend** keresése. Leghosszabb utak keresése, **PERT-módszer**, kritikus utak és tevékenységek.
8. **Euler-séta és körséta** létezésének szükkséges és elégséges feltétele. **Hamilton-kör és út** létezésére szükséges, ill. elégséges feltételek: komponensszám ponttörlés után (Petersen-gráf) **Dirac, Ore tételei**, gazdag párok, hízlalási lemma, Chavátal-lezárt.
9. **Gráfok síkba ill. gömbre rajzolhatósága, tartomény, sztereografikus projekció**, következményei. Az **Euler-féle poliédertétel**, duális kézfogáslemma és következményei: felső korlátok az élszámra és a minimális fokszáma egyszerű, síkbarajzolható gráfokon.
10. **Kuratowski gráfok** síkbarajzolhatósága, **soros bővítés,** ***Kuratowski-tétel*** **könnyű iránya**. **Síkbarajzolt gárf duálisa**, a duális paraméterei. Vágás, elvágó él, soros élek. *Kör-vágás dualitása*, különféle élek duálisai. Whitney két tétele, Whitney operációk.
11. **Lineáris egyenletrendszer, kibővített együtthatómátrix, elemi sorekvivalens átalakítás** és kapcsolata a megoldásokkal. **LA és RLA mátrix, vezéregyes, megoldás leolvasása RLA mátrix esetén.** Tilos sor, kötött változó, szabad paraméter, ezek jelentése a megoldás/megoldhatóság szempontjából. **Gauss-elimináció**, összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az egynletek és ismeretlenek száma között.
12. Az $\mathbb{R}^n$ **tér**, vektorműveletek azonosságai, (generált) **altér** (példák), (triviális) **lineáris kombináció**, alterek metszete, **generátorrendszer**, **lineáris függetlenség** (kétféle definíció). Lin.ftn rendszer hízlalása, generátor-rendszer ritkítása, kicserélési lemma, **FG-egyenlőtlenség** és következménye.
13. ESÁ hatása a sor- és oszlopvektorokra, **oszlopvektorok lin.ftn-ségének eldöntése**. **Bázis** fogalm, **altér bázisának előállítása generátorrendszerből** ill. homogén lineáris egyenletrendszerrel megadott altér esetén.
14. Generátorrendszerből homogén lin.egyenletredszer előállítása. **Altér dimenziójának** jóldefiniáltsága, $\mathbb{R}^n$ **standard bázisa, bázishoz tartozó koordinátavektor** kiszámítása.
15. n elem permutációja, a permutáció **inverziószáma**. **Bástyaelhelyezés**, inverzióban álló bástyapárok, **determináns, felső háromszögmátrix determinánsa**.
16. **Mátrix transzponáltja**, transzponált determinánsa, **ESÁ hatása a determinánsra, előjeles aldetermináns, kifejtési téte**.
17. Vektorok skaláris szorzásának tulajdonságai. **Mátrixok összeadása és szorzásai**, e műveletek tulajdonságai. **A szorzatmátrix sorainak és oszlopainak különös tulajdonsága**, ESÁ és mátrixszorzás kapcsolata.

18. **Lineáris leképezések** és mátrixszorzások kapcsolata. **Lineáris leképezés mátrixának meghatározása.** Leképezések egymásutánjának mátrixa, mátrixszorzás asszociativitása.

19. **Mátrix jobb- és balinverze**, ezek viszonya. **Balinverz kiszámítása ESÁ-okkal** és előjeles aldeterminánsokkal, **reguláris mátrixok** jellemzése determinánssal, sorokkal, oszlopokkal ill. RLA mátrix segítségével.

20. **Sor- oszlop- és determinánsrang**, ezek viszonya és **kiszámítása**. Összeg és szorzat rangja. **Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja**, a megoldhatóság és az oszlopok alterének kapcsolata. Az egyértelmű megoldhatóság feltétele $n \times n$ együtthatómátrix esetén.

1 Tétel

Gráfelméleti alapfogalmak: **csúcs, él, diagram, fokszám**. Egyszerű gráf, irányított gráf, véges gráf, komplementer gráf, reguláris gráf, él/csúcstörlés, élhozzáadás, (feszítő/feszített) részgráf, izomorfia, élsorozat, séta, út, kör,**összefüggő gráf**, komponens. **kézfogás-lemma**.

Gráfelméleti alapfogalmak:

- **csúcs, élek:**
  - G=(V,E) egyszerű irányítatlan gráf ha $V \neq \emptyset$ és $E \leq \binom{V}{2}$, ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$
  - V a G csúcsainak ((szög) pontjainak) halmaza.
  - E pedig G éleinek halmaza.
- **Diagram:** A $G = (V, E)$ gráf diagramja egy olyan lerajzolása, melyben a csúcsoknak (síkbeli) pontok felelnek meg, éleknek pedig a két végpontot összekötő, önmagukat nem metsző görbék.
- **Fokszám:**
  - $v \in V(G)$ esetén a v-re illeszkedő élek száma a v fokszáma.
  - A G gráf csúcsának d (v) foka a vé végpontú élek száma (hurokél kétszer számít).
- Egyszerű gráf: ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei.
- Irányított gráf: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.
- Véges gráf: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.
- Komplementer gráf:
  - A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V, (G), \binom{v}{2} \backslash E(G))$.
  - Két csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a fokszámai megegyeznek vagy, ha minden csúcsának foka ugyan annyi.
- Reguláris gráf: k-reguláris, ha minden csúcsának pontosan k a fokszáma.
- Él/Csúcstörlés: Ha $G = (V, E)$ gráf $e \in E$ és $v \in E$ akkor $G - e = (V, E \backslash \{e\})$ az éltörés eredménye $\rightarrow$ Feszítő részgráf (éltöréssel kapható gráf), a csúcstörléssel keletkező $G - v$ gráfhoz V-ből töröljük v-t, E-ből pedig a v-re illeszkedő éleket. Feszített részgráf: (csúcstörlésekkel kapható gráf) $\Rightarrow$ Részgráf: él- és csúcstörlésekkel kapható gráf. (jelzőnélküli részgráf) $\rightarrow$ élhozzáadás: $G(V, E)$ gráfban az $E + 1$ nő.
- Izomorfia: A G és G' gráfok akkor izomorfak, ha mindekét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n-ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G-ben, mint az u-nak és v-nek megfelelő sorszámú csúcsok között G'-ben. Jelölése: $G \cong G'$.
- Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$. (Tulajdonképp egyik csúcsból eljutunk egy másik csúcsba mindig élek mentén haladva.)
- Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.
- Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.
- Kör: $u = v$, de a kezdő (és vég)pontot nem akarjuk megnevezni, akkor zárt élsorozatról, körsétáról ill. körről beszélünk.
- **Összefüggő gráf:**
  - A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$ (ha bármely két pontja között vezet séta), ha bármely két csúcsa között vezet út G-ben (ha egy komponense van).
  - A G irányított gráfot akkor mondjuk **erősen összefüggő**nek, ha G bármely $u, v \in V(G)$ esetén van **irányított** uv-út G-ben.
  - **gyengén összefügő**, ha a G-nek megfelelő irányítatlan gráf összefüggő.
- **Komponens:**
  1. $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in$ esetén $v \sim v'$.

(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára.

– A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

– $K \leq V(G)$ a G gráf komponense, ha bármely $u, v \in K$ között létezik G séta, de nem létezik uv-séta, ha $u \in K, v \in V(G) \backslash K$. (Minden gráf egyértelműen bontható komponensekre)

- **Kézfogás-lemma:** Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.
  A KFL bizonyítása: Készítsükel a G' digráfot úgy, hogy G minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítjük. Ekkor $\sum_{v \in V} d_G(V) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)|$
  Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna a kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-vel növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszámösszeget is.

- **Általánosított kézfogás-lemma:** Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(V) = |E|$, azaz a csúcsok ki- és befokainak összege is az élszámot adja meg. **Megj:** Úgy is bizonyíthattuk volna az általánosított kéfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. 0-elű (üres)gráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 1-gyel növeli az élszámot is és a ki/befokok összegét is.

2 Tétel

Élhozzáadási lemma erdő, **fa**, fák egyszerűbb tulajdonságai: két levél, erdők élszáma. **Feszítőfa** létezése, feszítőfához tartozó alapkörök és alap vágások.

- **Élhozzáadási lemma (ÉHL):** Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.
  (1) G és G' komponensei megegyeznek, de G'-nek több köre van, mint G-nek.
  (2) G és G' körei megegyeznek, de G'-nek eggyel keveseb komponense van, mint G-nek.
- Erdő: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
- **Fa:** Az öszefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
  - G erdő $\Longleftrightarrow$ G minden komponense fa.
  - G n-csúcsú, k-komponensű erdő $\Rightarrow |E(G)| = n - k$.
  - **Biz:** Építsük fel G-t a $\overline{K_n}$ üresgráfból az élek egyenkénti behúzásával. G körmentes, ezért az ÉHL miatt minden lé zöld: behúzásakor 1-gyel csökken a komponensek száma. A $\overline{K_n}$ üresgráfnak n komponense van, G-nek pedig k. Ezért pontosan $n - k$ zöld élt kellett behúzni G felépítéséhez.
- **Két levél:** Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.
  - **Biz:**: (Algebrai út) A KFL miatt $\sum_{v \in V(G)}(d(v) - 2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 2n = 2(n-1) - 2n = -2$. F minden v csúcsára $d(v) \geq 1$ teljesül, ezért $d(v) - 2 \geq -1$. A fenti összeg csak úgy lehet -2, ha F-nek legalább 2 levele van.
  - **Biz:**: (Kombinatorikus út) Induljunk el F egy tetszőleges v csúcsából egy sétán, és haladjunk, amíg tunUnk. Ha sosem akadunk el, akkor előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, és kört találunk. Ezért elakadunk, és az csakis egy v-től különböző u levélben történhet. Ha $d(v) = 1$, akkor v egy u-tól különböző levél. Ha $d(v) \geq 2$, akkor sétát indulhatjuk v-ből egy másik él mentén. Ekkor egy u-tól különböző levélben akadunk el.
- **Feszítőfa**: F a G gráf feszítőfája (ffa), ha F egy G-ből éltörésekkel kapható fa. Ha G-nek van feszítőfája $\Leftrightarrow$ összefüggő.
- Alapvágás, alapkör: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak. Az $e \in E(G) \backslash E(F)$ éléhez tarozó alapkör pedig az $F + e$ köre.
  Megf: Tfh $f \in F$ és $e \in E(G) \backslash E(F)$. Ekkor ($F - f + e$ ffa) $\Longleftrightarrow$ (f benne van e alapkörében) $\Longleftrightarrow$ (e benne van f alap vágásában).

3 Tétel

Minimális költségű feszítőfa, mkffák struktúrája, **Kruskal-algoritmus** helyessége, villamos hálózathoz tartozó normál fa keresése.

- **Minimális költségű feszítőfa:** Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(F)$.
Az $F \subseteq E$ élhalmaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
  (1) (V, F) a G feszítőfája, és
  (2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes.} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \qquad F := F_m$$

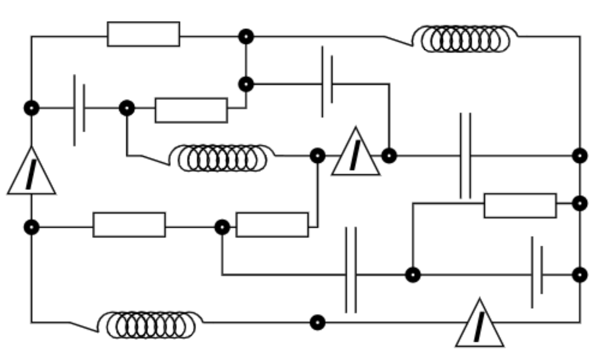
- **Minimális költségű feszítőfa:** olyan $F \in E$ élhalmaz, amire (V, F) fa, és $k(F)$ minimális.

- Mkkfák struktúrája: $G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nak: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.
Megf: A G gráfon futtotott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.
Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_l\}, k(f_1) \leq k(f_2) \leq \cdots \leq k(f_l)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_l\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \cdots \leq k(f'_l)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq l$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.
Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.
Köv: (2) Az F' élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje G-nek, ha $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \leq 0$-ra.
Biz: A Lemma bizonyítja az elégfégességet.

- **Kruskal-algoritmus:** Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \cdots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = 0$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

- **Kruskal algoritmus:**
  - Input: $G = (V, E)$ gráf, és $k : E \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény.
  - Output: minimális költségű feszítőfa.
  - Működés: minden lépésben megépítjuk a legolcsóbb élt, ami nem hoz létre kört. Mohó algoritmus, mert csak azzal törődik, ami éppen a legalacsonyabb költségű. Az így keletkezett fa a G gráf egy minimális költségű (súlyú) feszítőfája.
  - Helyességének bizonyítása: tegyük fel, hogy az algoritmus helytelen, ekkor létezik egy f él, amit e helyére bevéve olcsóbb feszítőfát kapunk. Ekkor azonban f költsége kisebb, mint e költsége, így f-et az algoritmussal korábban már ellenőriztük, tehát ellentmondásra jutottunk, azaz a feszítőfa minimális költségű.

- Villamos hálózatohoz tartozó normál fa keresése:



  - Tegyük fel, hogy egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tulajdonképpen egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Az, hogy mi történik (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), a Kirchoff- ill. Ohm-törvényekkel írható le.

- **Csomóponti törvény:** a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.
- **Huroktörvény:** a gráf tetszőleges köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.
- Mikor "értelmes" egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Bizonyítható, hogy ha a fenti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat "értelmes". Enneka a bizonyítéka a normál fa: G olyan feszítőfája, ami minden feszültségforrást tartalmaz, de egyetelen árramforrást sem (és mindemellett a legtöbb kapacitást és a lehető legkevesebb induktivitás tartalmazza).
- **Normál fa keresése:** fesz.forrás (1), kapacitás (2), ellenállás (3), induktivitás (4), áramforrás (5) élköltségekhez keressünk mkffát! Ha ez tartalmaz áramforrást, vagy nem tartalmaz minden feszültségforrást, akkor nincs normál fa, egyébként a mkffa egy normál fa és egyértelmű a megoldás "értelmes" a hálózat.

4 Tétel

Általános gráfbejárás: **a csúcsok állapotváltozása, a bejárás általános lépése**, a bejáráshoz tartozó sorrender ill. az élek osztályozása bejárás után. A **BFS** és tulajdonságai, legrövidebb utak fájának létezése.

- **Általános gárfbejárás & BFS**: A gráfbejárási algoritmus az inputgráf csúcsait és éleit fedezi fel. Minden csúcs az eléretlen → elért → befejezett állapotokat veszi fel. A bejárás akkor ér véget, amint minden csúcs befejezetté vált.

  1. Van elért csúcs. Választunk egyet, mondjuk u-t.
     (1a) Ha van olyan uv él, amire v eléretlen, akkor v elérté válik.
     (1b) Ha nincs ilyen uv él, akkor u befejezetté válik.
  1. Nincs elért csúcs.
     (2a) Ha van eléretlen u csúcs, akkor u-t elértté tesszük.
     (2b) Ha nincs eléretlen csúcs (azaz $\forall$ csúcs fejezett), akkor END.

  Szélességi bejárás (BFS) szabálya:
  Az 1. esetben mindig a legkorábban elért u-t választjuk.

  Input: $G = (V, E)$ (ir/ir.tatlan) gráf, ($v \in V$ gyökérpont[1]).

  Output: (1) A csúcsok elérési és befejezési sorrendje. (2) Az élek osztályozása:

  faél: Olyan él, ami mentén egy csúcs elértté vált.

  uv **előreél:** nem faél, de u-ból v-be faélekből irányított út vezet.

  uv **visszaél:** v-ből u-ba faélekből irányított út vezet.

  keresztél: minden más él (u és v közt nincs leszármazott viszony).

  (3) A **bejárás fája:** a faélek alkotta részgráf. (A bejárás fája valójában egy gyökereiből kifelé irányított erdő.)

  Megf: Irányítatlan esetben az előreél és a visszaél ugyanazt jelenti.

  Terminológia: Ha a bejárás fájában u-ból v-be irányított út vezet, akkor u a v őse és v az u leszármazottja. A faél és az előreél tehát ősből leszármazottba, a visszaél leszármazottból ősbe vezet.

  A bejárás során kialakul a csúcsok egy elérési ill. egy befejezési sorrendje, továbbá minden csúcshoz feljegyezzük azt is, hogy melyik él mentén értünk el (ha van ilyen él). Ez utóbbi élek (faélek) alkotják a bejárás fáját (ami egyrészt irányított, másrészt pedig erdő). A G gráf további uv éle előreél ⇒, ha u a bejárás fájában a v őse, ha u a v leszármazottja, akkor visszaél. Minden más pedig keresztél. (Irányítatlan gráf bejárásakor minden élt oda-vissza irányított élnek tekintünk.)

- **A BFS tulajdonságai**

  Nézzük meg egy **irányított** gráf BFS bejárását is.

  Állítás: Tfh $G = (V, E)$ BFS bejárása után a csúcsok elérési sorrendje $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

  (1) Ha $i < j$, akkor v_i-t hamarabb fejezük be, mint v_j-t, továbbá v_i gyerekei megleőzik v_j gyerekeit az elérési sorrendben.

  Biz: A v_i-t befejezésének pillanatában v_i minden gyereke elért, de v_j-nek még egy gyereke sem az. Ezért v_j gyerekeit a v_i csúcs befejezése után érjük el, majd ezt követően fejezzük be v_j-t. □

  (2) **Az elérési és befejezési sorrend (BFS esetén) megegyezik.**

  Biz: Ha v_i-t korábban érjük el, mint v_j-t, akkor (1) miatt v_i-t korábban is fejezzük be v_j-nél. Ezért bármely két csúcs sorrendje ugyanaz az elérési sorrendben mint befejezési sorrendben. Tehát az elérési sorrendnek meg kell egyeznie a befejezési sorrenddel. □

  (3) **Gréfél nem ugorhat át falét:** ha $k < i < j \leq l$ és $v_i v_j$ faél, akkor $v_k v_l$ nem lehet gráfél.

  Biz: Ha $v_k v_l \in E(G)$, akkor v_l szülője v_k vagy egy v_k-t megelőző csúcs. (1) miatt v_j szülője sem következhet v_k után, vagyis v_i nem lehet v_j szülője.

  (4) **Nincs előreél.** (Irányítatlan eset: csak faél és keresztél van.)

[1] A gyökérben kezdetben elért állapotú, ezért kivétel az általános szabály alól.

Biz: Indirekt: ha v_iv_j előreél lenne, akkor v_i-ből v_j-be irányított út vezetne a BFS-fában, és v_iv_j ennek a faélekből álló útnak az utolsó élét átugraná. $\square$

(5) Ha a BFS-fában k-élű irányított út vezet u-ból v-be, akkor G-ben nincs k-nál kevesebb élű uv-út.

Biz: Ha lenne a BFS fa-beli útnál kevesebb elű út G-ben, akkor lenne olyan gráfél, ami faélt ugrik át. $\square$

(6) **A BFS-fa egy legrövidebb utak fája:** a BFS-fa v_1 gyökeréből bármely v_i csúcsba vezető faút a G egy legkevesebb élű v_1v_i-útja.

- **Legrövidebb utak**

Def: Adott G (ir) gráf és $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény esetén egy P út hossza a P éleinek összhossza: $l(P) = \sum_{e \in E(P)} l(e)$.

Az u és v csúcsok távolsága a legrövidebb uv-út hossza: $dist_l(u, v) := \min\{l(P) : P \ uv\text{-út}\}$ ($\nexists uv$-út$\Rightarrow$ $dist_l(u, v) = \infty$.) Az l hosszfüggvénye nemnegatív, ha $l(e) \geq 0$ teljesül minden e élre. Az l hosszvüggvény konzervatív, ha G-ben $\nexists$ negatív összhosszú ir. kör.

Cél: Legrövidebb út keresése irányított/irányítatlan gráfban.

Megf: Ha $l(e) = 1$ a G minden e élére, akkor $l(P)$ a P élszáma. Ezért a BFS-fa minden gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből, azaz a szélességi bejárás tekinthető egy legrövidebb utat kereső algoritmusnak is.

Def: Adott G (ir) gráf, $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény és $r \in V(G)$. (r, l)-felső becslés olyan $f : V(G) \to \mathbb{R}$ függvény, ami felülről becsli minden csúcs r-től mért távolságát: $dist_l(r, v) \geq f(v) \forall v \in V(G)$.

Triviális (r, l)-felső becslés: $f(v) = \begin{cases} 0 & v = r \\ \infty & v \neq r \end{cases}$

Pontos (r, l)-felső becslés: $f(v) = dist_l(r, l) \ \forall v \in V(G)$.

5 Tétel

Gráfút hossza, gráfcsúcsok távolsága, nemnegatív és konzervatív hosszfüggvény, triviális és pontos (r,l)-**felső becslés, élmenti javítás. Dijkstra-algoritmus működése**, Ford-algoritmus helyessége és lépésszáma. Legrövidebb utak fájának létezése.

- **Def:** Adott G (ir) gráf és $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény esetén egy P út hossza a P éleinek összhossza: $l(P) = \sum_{e \in E(P)} l(e)$.

  Az u és v csúcsok távolsága a legrövidebb uv-út hossza: $dist_l(u,v) := \min\{l(P) : P\ uv\text{-út}\}$ ($\nexists uv$-út$\Rightarrow$ $dist_l(u,v) = \infty$.) Az l hosszfüggvénye nemnegatív, ha $l(e) \geq 0$ teljesül minden e élre. Az l hosszvüggvény konzervatív, ha G-ben $\nexists$ negatív összhosszú ir. kör.

  Cél: Legrövidebb út keresése irányított/irányítatlan gráfban.

  Megf: Ha $l(e) = 1$ a G minden e élére, akkor $l(P)$ a P élszáma. Ezért a BFS-fa minden gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből, azaz a szélességi bejárás tekinthető egy legrövidebb utat kereső algoritmusnak is.

  Def: Adott G (ir) gráf, $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény és $r \in V(G)$. (r,l)-felső becslés olyan $f : V(G) \to \mathbb{R}$ függvény, ami felülről becsli minden csúcs r-től mért távolságát: $dist_l(r,v) \geq f(v) \forall v \in V(G)$.

  Triviális (r,l)-felső becslés: $f(v) = \begin{cases} 0 & v = r \\ \infty & v \neq r \end{cases}$

  Pontos (r,l)-felső becslés: $f(v) = dist_l(r,l)\ \forall v \in V(G)$.

- Adott $G = (V,E)$ irányított gráf és egy $l : E \to \mathbb{R}$ élhosszfv. Egy G-beli irányított út hossza az út éleinek összhossza, $dist_l(n,v)$ pedig az irányított uv-utak közül a legrövidebb hosszát jelöli.

  Az l hosszfv konzervatív ha nincs G-ben negatív összhosszúságú irányított kör.

  Adott $G = (V,E)$ irányított gráf $r \in v$ és egy $l : E \to R$ élhosszfv. Az $f : v \to R$ függvényt (r,l)-felső becslésnek nevezzük, ha $f(r) = 0$ és $f(v) \leq dist_l(r,v)$ teljesül G minden v csúcsára. Az $e = uv$ élmenti javítás esetén a $f(v)$ értéket a $min\{f(v), f(u) + l(uv)\}$ értékkel helyettesíthetjük.

  (1) Ha l konzervatív akkor tetsz. (r,l)-f. b. élmenti javítása (r,l)-fb-t ad.

  (2) Ha az $f(r,l)$ felső becsléshez nincs érdemi élmenti javítás, akkor $f(v) = dist_l(r,v)\ \forall v \in V$.

- **Az elméleti javítás**

  Def: Tfh f egy (r,l)-felső becslés és $uv \in E(G)$. Az f uv-elméleti javítása az az f', amire $f'(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq v \\ min\{f(v), f(u) + l(uv)\} & z = v \end{cases}$

  Megf: Tfh az $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény konzervatív és $f(r) = 0$.

  Ekkor (1) Az $f(r,l)$-felső becslés élmenti javítása mindig (r,l)-felső becslést ad.

  Biz: Azt kell megmutatni, hogy van olyan rv-út, aminek a hossza legfeljebb $f(u) + l(uv)$. Ha egy legrövidebb ru-utat kiegészítünk az uv éllel, akkor olyan rv-élsorozatot kapunk, aminek az összhossza $dist_l(r,u) + l(uv) \leq f(u) + l(uv)$. „Könnyen” látható, hogy az élhosszfüggvény konzervativitása miatt ha van x összhosszúságú rv-élsorozat, akkor van legfeljebb x összhosszúságú rv-út is. Ezek szerint van legfeljebb $f(u) + l(u,v)$ hosszúságú uv-út is, azaz az érdemi élmenti javítás után szintén (r,l)-felső becslést kapunk. □

  (2) $f(r,l)$-felső becslés (pontosan) $\iff$ (f-en $\nexists$ érdemi élmenti javítás).

  Biz: $\Rightarrow$: Ha f pontos, akkor biztosan nincs rajta érdemi élmenti javítás: ha volna, akkor egy felső becslés a pontos érték alá csökkenne, így az élmenti javítás nem (r,l)-felső becslést eredményezne. $\Leftarrow$: Legyen $v \in V(G)$ tetsz, és legyen P egy legrövidebb rv-út. A P egyik éle mentén sincs érdemi élmenti javítás, ezért P minden u csúcsára pontos a felső becslés: $f(u) = dist_l(r,u)$. Ez igaz az út utolsó csúcsára, a tetszőlegesen választott v-re is. □

- Dijkstra algoritmus működése:

  - **Input**: $G = (V,E)$ irányított gráf, $l : E \to \mathbb{R}^+$ nemnegatív hosszfüggvény, $r \in V$ gyökér
  - **Output**: $dist_l(r,v)$ minden $v \in V$-re.
  - **Működés**: Kezdetben $U_0 = \emptyset, f(r) = 0$ és $f(v) = \infty$, ha $v \neq r$.
    Az algoritmus i-dik fázisában $(i = 1, 2, ..., |v|)$ a következő történik.

1. Legyen u_i az v csúcs a $v \backslash u_{i-1}$ halmazból, amelyre $f(r)$ minimális és legyen $u_{i-1} \cup u_i$.
2. Végezzünk élmenti javításokat minden u_i-ből kivezető $u_i x$ élen.

Az output a $|v|$-dik fázik utáni f függvény. Szokás megjelölni a végső $f(v)$ értékeket beállító éleket. Ha az output az $f(r,l)$-felső becslés, akkor

(1) $f(u_i) \leq f(u_{i+1})$ $\forall 1 \leq u$-re.

(2) $f(u_i) \leq f(u_2) \leq \cdots \leq (u_n)$

(3) élmentijavítás nem változhat f-n.

- A Dijkstra-algoritmus helyesen működik, azaz $dist_l(r,v) = f(v) \forall v \in V$ teljesül. Az algoritmus során megjelölt élek egy legrövidebb utak fáját alkotják G-ben: az r gyökérből minden r-ből elérhető csúcshoz vezet olyan legrövidebb út is ami csak megjelölt éleket tartalmaz.
- A Dijkstra-algoritmus lépésszáma legfeljebb. $konst \cdot (n^2 + m)$, ahol $n = |v|$ $m = |E|$.

- **Dijkstra-algoritmus:** Input: $G = (V,E), l: E \to \mathbb{R}_+, r \in V$. Output: $dist_l(r,v) \forall v \in V$ Működés: $U_0 := \emptyset, f_0$ a triviális. (r,l)-felső becslés.

  Az i-dik fázis:

  1. Legyen $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$, ahol u_i olyan csúcs a $V \setminus U_{i-1}$ halmazból, amelyre $f_{i-1}(v)$ minimális.

  2. $f_i : f_{i-1}$ élmenti javítása minden U_i-ből kivezető $u_i x$ élen. Output: $f_{|V|}$. Megjelöljük a végső $f_{|V|}(V)$ értékeket beállító éleket.

  Megf: Ha a v-be vezet megjelölt él, akkor vezet r-ből v-be megjelölt éleken út, és ennek hozza megegyezik $f_{|V|}(v)$-vel.

  Biz: $f_{|V|}(r) = 0$, és a megjelölt élek mentén haladva az $f_{|V|}$ érték az élhosszal növekszik. □

- **Dijkstra helyessége**

  Megf: Tfh $u_1, u_2, \ldots, u_n$ a G csúcsainak sorrendje a Dijkstra-algoritmus végrehajtása után.

  (1) Ekkor $f_{|V|}(u_i) \leq f_{|V|}(u_{i+1})$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq n$.

  Biz: Az i-dik fázisban $f_i(u_i) \leq f_i(u_{i+1})$ teljesült az u_i választása miatt. Ezek után $f_i(u_i)$ már nem változott: $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i)$. Ugyan $f_i(u_{i+1})$ még csökkenhetett, de csak az $u_i u_{i+1}$ él mentén történt javítás miatt, hiszen az $(i+1)$-dik fázisban u_{i+1} bekerült az U_i halmazba, és a hozzá tartozó (r,l)-fb már nem csökken tovább. Ekkor $f_{i+1}(u_{i+1}) = min\{f_i(u_{i+1}), f_i(u_i) + l(u_i u_{i+1})\} \geq f_i(u_i)$, mivel $l(u_i u_{i+1}) > 0$. Ezért $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i) \leq f_{i+1}(u_{i+1}) = f_{|V|}(u_{i+1})$ □

  (2) $f_{|V|}(u_1) \leq f_{|V|}(u_2) \leq \cdots \leq f_{|V|}(u_n)$

  (3) A Dijsktra-algoritmus outputjaként kaptt $f_{|V|}$-n élmenti javítás nem tud változtatni.

  Biz: Tegyük fel, hogy $u_i u_j \in E(G)$ a G egy tetszőleges éle. Ha $i > j$, akkor (2) miatt $f_{|V|}(u_i) \geq f_{|V|}(u_j)$, ezért az $u_i u_j$ mentén történő javítás nem tudja $f_{|V|}(u_j)$-t csökkenteni, hisz $l(u_i u_j)$ pozitív. Ha pedig $i < j$, akkor az i-dik fázisban megrörtént az $u_i u_j$ mentén történő javítás, és ezt követően $f(u_i)$ nem váltorott, azaz $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i)$. A másik (r,l)-felső becslés pedig csak tovább csökkenhetett a késpbbi émj-ok során $f_{|V|}(u_j) \leq f_i(u_j)$. Ezért az $u_i u_j$ él mentén sem az i-dik fázisban, sem később nincs érdemi javítás. □

  Tétel: A Dijsktra-algoritmus helyesen működik, azaz G minden csúcsára igaz, hogy $dist(r,v) = f_{|V|}(v)$.

  Biz: A Dijsktra-algoritmus az f_0 triviális (r,l)-felső becslésből indul ki, és élmenti javításokat alkalmaz. Így minden f_i (speciálisan $f_{|V|}$ is) (r,l)-felső becslés lesz. A fenti (3)-as megfigyelés miatt $f_{|V|}$-n nem végezhető érdemi élmenti javítás. Ezért egy korábbi (2)-es megfigyelés miatt $f_{|V|}$ pontos (r,l)-felső becslés, azaz $f_{|V|}(v) = dist_l(r,v) \forall v \in V(G)$. □

- Könnyű olyan példát találni, ahol a Dijkstra-algoritmus konzervatív hosszüggvény esetén hibás eredményt ad. Azonban konzervatív hosszüffvény esetén is igaz, hogy

  - (r,l)-fb élmenti javítása (r,l)-fb-t eredményez, ill.
  - ha egy (r,l)-fb-ben nem végezhető erdemi élmenti javítás, akkor pontos.

  konzervatív hosszfüggvény esetén is hasonló startégiát követünk: Élmenti javításokat végzünk a triviális (r,l)-fb-en, míg van érdemi javítás.

  Ford-algoritmus:
  Input: $G = (V,E)$ irányított, $l : E \to \mathbb{R}$ konzervatív hosszfüggvény, $r \in V$ gyökérpont.
  Output: $dist_l(r,l)$ minden $v \in V$
  Működés: Legyen $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Kezdetben legy $f(r) = 0$ és $v \neq r$ esetén $f(v) = \infty$, Az i-dik fázis

$i = 1, 2, \ldots, n-1$ esetén abból áll, hogy elvégezzük az $e_1, e_2, \ldots, e_m$ élek menti javításokat. A végén az OUTPUT: $dist_l(r, v) = f(v)$ minden v-re. ($dist_l(r, v) = f_{n-1}(v) \forall v \in V$)

Állítás: Ha l konzervatív, akkor $dist_l(v)$ $v \in V$-re.

Biz: $f_1(v) = dist_l(r, v)$ ha $\exists \leq$ 1-élű legrövidebb rv-út. $f_2(v) = dist_l(r, v)$ ha $\exists \leq$ 2-élű legrövidebb rv-út. $\ldots$ $f_{n-1}(v) = dist_l(r, v)$ ha $\exists \leq (n-1)$-élű legrövidebb rv-út. Tehát $f_{n-1}(v) = dist_l(r, v) \forall v \in V$. $\square$

Megf: Ha $f_i = f_{i-1}$, akkor a Ford-algoritmust az i-dik fázis után be lehet fejezni, hisz nincs érdemi élmenti javítás, így $f_{n-1} = f_i$.

Megj: Az $f_{n-1}(v)$-t beállító élek legrövidebb utak fáját alkozják.

Biz: A Dijkstra esethez hasonló. Tetszőleges v csúcsból visszafelé követve a végső értékeket beállító éleket $f_{n-1}(v)$ hosszúságú rv-utat találunk. $\square$

"Lépésszámanalízis": Ha a $|V(G)| = n$ és $|E(G)| = m$, akkor minden fázisban $\leq m$ élmenti javítás, ami $konst \cdot m$ lépés. Ez összesen $\leq konst \cdot (n-1) \cdot m \leq konst \cdot n^3$ lépés, az algoritmus hatékony.

6 Tétel

Mélységi keresés és alkalmazásai (fellépő éltípusok, mélységi- és befejezési számozásból az éltípus meghatározása, irányított kör létezésének eldöntése DFS-sel).

- **Depth First Search (DFS)**

  (A mélységi bejárás avagy DFS alatt olyan gráfbejárást értünk, amikor mindig a legutolsónak elért csúcsból kerül elérésre a soron következőnek elért csúcs. Az elérési illetve befejezési sorrendből adódik minden v csőcshoz egy $m(v)$ mélységi ill. $b(v)$ befejezési szám.)

  "Mélységi bejárás (DFS): A bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az $\boxed{1.}$ esetben.

  Mélységi és befejezési számozás: DFS után $m(v)$ ill. $b(v)$ a v csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

  Megj: A BFS konkrét megvalósításában szükség van arra, hogy az elért csúcsokat úgy tároljuk, hogy könnyű legyen kiválasztani az elért csúcsok közül a legkorábban elértet. Erre egy célszerű adatstruktúra a *sor* (avagy *FIFO lista*). Ha a BFS megvalósításában ezt az adatstruktúrát *veremre* (más néven *FIFO listára*) cseréljük, akkor a DFS egy megvalósítása adódik.

  Megf: Tegyük fel, hogy a G gráf éleit DFS után osztályoztuk.

  (1) Ha uv faél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

  Biz: v-t u-ból értük el, ezért $m(u) < m(v)$. A v elérésekor u és v elért állapotúak. A DFS szerint v-t u elptt fejezzük be. □

  (2) Ha uv előreél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

  Biz: u-ból v-be faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, befejezési csökken. □

  (3) Ha uv visszaél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) < b(v)$.

  Biz: v-ből u-ba faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, a befejezési csökken. □

  Biz: $m(u) < m(v)$ esetén a DFS miatt v az u leszármazottja lenne. Ezért $m(u) > m(u)$. Ha u-t a v befejezése előtt érnénk el, akkor u a v leszármazottja lenne. Ezért az alábbi sorrendben történik u és v evolúciója: v elérése, v befejezése, u elérése, u befejezése. □ (4) Ha uv keresztél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

  (5) Irányítatlan gráf DFS bejárása után nincs keresztél.

  Biz: Indirekt. Ha uv keresztél, akkor (4) miatt $m(u) > m(v)$, továbbá vu is keresztél, ezért $m(v) > m(u)$. Ellentmondás. □

  (6) Ha DFS után van visszaél, akkor G tartalmaz irányított kört.

  Biz: A DFS fa visszaélhez tartozó alapköre a G egy irányított köre. □

  (7) Ha DFS után nincs visszaél, akkor G-ben nincs irányított kör.

  Biz: Bmely irányított körnek van olyan uv éle, amire $b(u) < b(v)$. Ez az él csak visszaél lehet. □

  A mélységi bejárás lépésszáma lineáris, azaz van olyan c konstans, hogy tetszőleges u csúcsú, m élű gráf DFS-éhez legfeljebb $c(n+m)$ lépés szükséges.

- **Direct Acyclic Graphs**

  Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf aciklikus (más néven DAG), ha G nem tartalmaz irányított kört.

  Példa: DAG-ot úgy kaphatunk, hogy egy G irányítatlan gráf csúcsait csupa különbözőszámmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobba irányítunk.

  Ha ugyanis lenne az így megirányított gráfban irányított kör, akkor az élei mentén a számok végig növekednének, ami lehetetlen. Azt fogjuk ihazolni, hogy a fenti példa minden DAG-ot leír.

  Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcsainak topologikus sorrendje alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba. $(V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, v_iv_j \in E \Rightarrow i < j)$

  Tétel: (G irányított gráf DAG) $\Leftrightarrow$ ($V(G)$-nek $\exists$ topologikus sorrendje).

  Biz: Tegyük fel, hogy $\exists$ toplogikus sorrend. Láttuk, hogy G ekkor DAG. ✓

Biz: Most tegyük fel, hogy G DAG, és futtassunk rajra egy DFS-t. Láttuk, hogy a DFS után nem lesz visszaél, ezért minden uv irányított élre $b(u) > b(v)$ teljesül. Ezért a csúcsok befejezési sorrendjének megfordítása a G csúcsainak egy topologikus sorrendje. $\square$

Köv: Irányított gráf aciklikussága DFS-sel gyorsan eldönthető: ha van visszaél, akkor a visszaél DFS-fabeli alapköre G egy irányított köre, így G nem DAG. Ha pedig nincs visszaél, akkor a fordított befejezési sorrend a G egy topologikus sorrendje, G tehát DAG.

Megj: DAG-ban topologikus sorrendet forráskeresések és forrástörlések alkalmazásával is találhatunk.

7 Tétel

DAG, jellemzése, **topologikus sorrend** keresése. Leghosszabb utak keresése, **PERT-módszer**, kritikus utak és tevékenységek.

- **Direct Acyclic Graphs**

  Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf aciklikus (más néven DAG), ha G nem tartalmaz irányított kört.

  Példa: DAG-ot úgy kaphatunk, hogy egy G irányítatlan gráf csúcsait csupa különbözőszámmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobba irányítunk.

  Ha ugyanis lenne az így megirányított gráfban irányított kör, akkor az élei mentén a számok végig növekednének, ami lehetetlen. Azt fogjuk ihazolni, hogy a fenti példa minden DAG-ot leír.

  Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcsainak topologikus sorrendje alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba. $(V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, v_iv_j \in E \Rightarrow i < j)$

  Tétel: (G irányított gráf DAG) $\Leftrightarrow$ ($V(G)$-nek $\exists$ topologikus sorrendje).

  Biz: Tegyük fel, hogy $\exists$ toplogikus sorrend. Láttuk, hogy G ekkor DAG. ✓

  Biz: Most tegyük fel, hogy G DAG, és futtassunk rajra egy DFS-t. Láttuk, hogy a DFS után nem lesz visszaél, ezért minden uv irányított élre $b(u) > b(v)$ teljesül. Ezért a csúcsok befejezési sorrendjének megfordítása a G csúcsainak egy topologikus sorrendje. $\square$

  Köv: Irányított gráf aciklikussága DFS-sel gyorsan eldönthető: ha van visszaél, akkor a visszaél DFS-fabeli alapköre G egy irányított köre, így G nem DAG. Ha pedig nincs visszaél, akkor a fordított befejezési sorrend a G egy topologikus sorrendje, G tehát DAG.

  Megj: DAG-ban topologikus sorrendet forráskeresések és forrástörlések alkalmazásával is találhatunk.

- **Leghosszabb út keresése**

  Ötlet: Az $l'(uv) = -l(uv)$ élhosszokkal a leghosszabb utak legrövidebbekké válnak. Olyanokat pedig tudunk keresni.

  Gond: A módszerünk csak konzervatív élhosszokra működik. Irányítatlan gráfon ez nemnegatív élhosszokat jelent, ezért ez az ötlet itt nem segít. Itányított esetben nem baj a negatív élhossz, feltéve, hogy G DAG. Ekkor Ford, Floyd bármelyike használható.

  Jó hír: Van egy még gyorsabb módszer: a dinamikus programozás. Ennek segítségével tetszőleges G DAG minden v csúcsához ki tudjuk számítani a v-be vezető leghosszabb utat. (Sőt! ...)

  Leghosszabb út DAG-ban: Input: $G = (V, E) DAG, l : E \to \mathbb{R}$.$\underline{Output}$ $:max\{l(P) : P v\text{-be vezető út}\}$ minden $v \in V$ csúcsra. Működés: $\boxed{1}$ $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ topologikus sorrend meghatározása. $\boxed{2}$ $i = 1, 2, \ldots, n : f(v_i) = max\{max\{f(v_j) + l(v_jv_i) : v_jv_i \in E\}, 0\}$ Output: $f(v)\ \forall v \in V$

  Helyesség: Ha a v_i-be veeztő leghosszabb út utolsó előtti csúcsa v_j, akkor $f(v_i) = f(f_j) + l(v_jv_i)$.

  Megj: Ha a fenti algoritmusban minden csúcsra megjelöljük az $f(v)$ értéket beállító élt (éleket), akkor a megjelölt élek minden v csúcsba megadnak egy leghosszabb utat. Sőt: minden v-be vezető leghosszabb megkapható így.

- **A PERT probléma**

  Egy $a, b, \ldots$ tevékenységekből álló projektet kell végrehajtanunk.

  Precedeniafeltételek: bizonyos (u, v) párok esetén előírás, hogy az u tevékenységet a v előtt kell elvégezni, ezért v az u kezdetét követően $c(uv)$ időkorlát elteltával kezdhető.

  Cél: minden v tevékenységhez olyan $k(v) \geq 0$ kezdési időpont meghatározása, ami nem sérti a preferenciafeltételeket, és a projekt végrehajtási ideje (a legnagyobb $k(v)$ érték) minimális.

  G **irányított gráf** csúcsai a tevékenységek, élei pedig a precedenciafeltételek, az uv él hossza $c(uv)$.

  Megf: (1) Ha G nem DAG, akkor a projekt nem hajtható végre. (2) Ha G DAG, akkor minden v tevékenység legkorábbi kezdási időpontja a v-be vezető leghosszabb út hossza.

  Köv: A PERT probléma megoldása nem más, mint a G DAG minden csúcsára az oda vezető leghosszabb út meghatározása.

  Terminológia: G leghosszabb útja kritikus út, amivől több is lehet. Kritikus út csúcsai a kritikus tevékenységek.

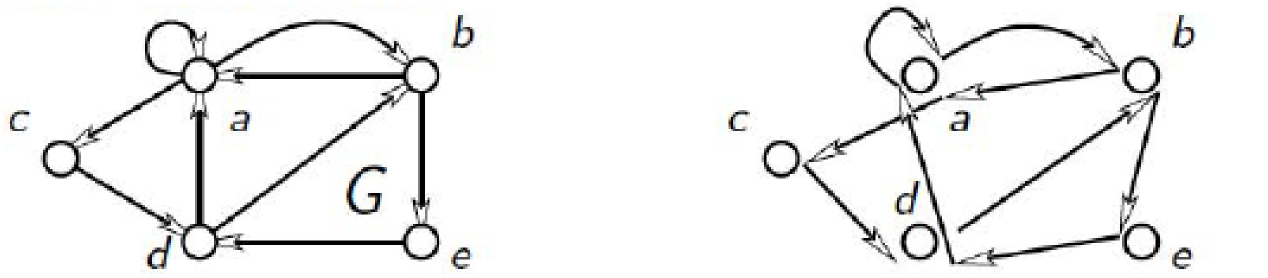
  Megf: Ha egy kritikus tevékenység nem kezdődik el a lehető legkorábbi időpontban, akkor az egész projekt végrehajtása csúszik.

8 Tétel

Euler-séta és körséta létezésének szükkséges és elégséges feltétele. **Hamilton-kör és út** létezésére szükséges, ill. elégséges feltételek: komponensszám ponttörlés után (Petersen-gráf) **Dirac, Ore tételei**, gazdag párok, hízlalási lemma, Chavátal-lezárt.

- **Euler-séták**

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.



Megj: (1) A fenti definíció 2×2 fogalmat definiál: az Euler-sétát és az Euler-körsétát irányítatlan és irányított gráfra is. (2) Szokás a definíciót abban a formában kimondani, hogy az Euler-(kör)séta G minden élét **pontosan** egyszer tartalmazza. Tekintettel arra, hogy egy séta nem mehet át kétszer ugyanazon az élen, ez redundáns kivánalom, hiszen következménye az általunk használt definíciónak. Használatos ezen kívül az Euler-kör ill. Euler-út megnevezés is a fenti fogalmakra. (3) Irányítatlan Euler-séta: "G egy vonallal lerajzolható".

Cél: Gyors módszer az Euler-(kör)séta megtalálására, létezésének ellenőrzésére.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

Biz: (a) Ha G két különböző gyenge komponense is tartalmaz élt, akkor G-nek nem lehet Euler-körsétája, hisz egyetlen séta sem tartalmazhat élt két különböző gyenge komponensből. ✓

(b) Ha végighaladunk az Euler-körsétán, akkor a v csúcsba pontosan annyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk onnan. A körséta G minden élét pontosan egyszer érinti: $\rho(v) = \delta(v)$ □

Megf: (2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

(b) G-ben minden fokszám páros.

Biz: Az irányított esethez hasonló. (a) Egy (kör)séta nem tartalmazhatja két különböző komponensnek is $1-1$ élét, és (b) az Euler-körsétát követve tetszőleges v csúcsba ugyanyannyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk belőle. Ezért $d(v)$ páros. □

Megf: (3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

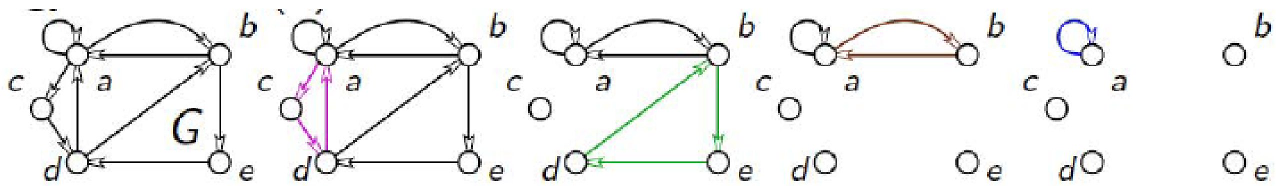
(b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Biz: (a) ✓. (b): Tegyük fel, hogy G Euler-sétája egy uv-séta. Ekkor minden $w \neq u, v$ csúcsra $d(w)$ kétszer annyi, mint ahányszor az Euler-séta w-n áthalad, vagyis $d(w)$ páros. Ha $u = v$, akkor az Euler-séta körséta, így $d(u)$ is páros (2b) miatt. Ha pedig $u \neq v$, akkor u-ból 1-gyel többször lépünk ki, mint be, v-be 1-gyel többször lépünk be, mint ki, vagyis $d(u)$ és $d(v)$ páratlanok. □

Megj: A fenti Megfigyelés segítségével bizonyos esetekben azonnal látszik, hogy G-nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

G irányítatlan Euler-gráf, ha G minden v csúcsra $d(v)$ páros.

Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (irányított) kört alkossanak minden színre.

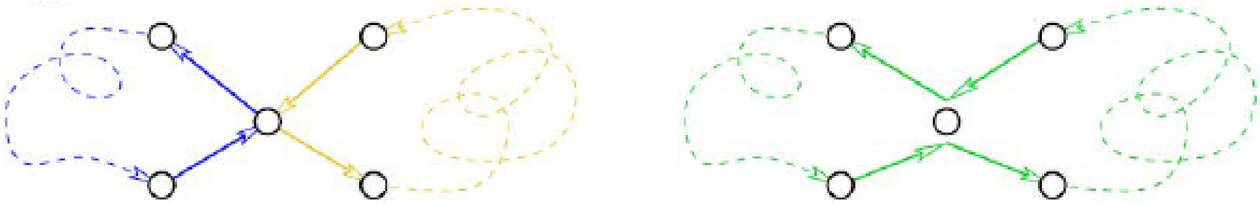


Biz: Induljunk el G egy éle mentén, és haladjunk tovább az (irányított) élek mentén. Mivel G Euler, ezért sosem adaunk el: előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, így találunk egy C_1 kört. C_1 éleit törtölve $G - C_1$ Euler-gráf marad. Ismételjük meg ezt a $G - C_1$ gráfon. Így G minden éle előbb-utóbb sorra kerül és megkapja a $C_2, C_3, \ldots$ köröket. Ezért $E(G) = C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ diszjunkt körök uniójára bomlik fel. Színezzük ki a C_1 kör éleit az i-dik színnel. $\square$

Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő)

(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve összefüggő)

Biz: $\Rightarrow$: Láttuk. ✓ $\Leftarrow$: A Lemma miatt $E(G)$ felbontható körökre, tehát körsétákra is. Ha a körséták száma legalább 2, akkor választunk két körsétát, aminek van közös csúcsa és e csúcs mentén "összevarjuk" azokat. Mindezt addig végezzük, amíg egyetlen körséta marad. $\square$



Tétel: (3) (G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája) $\Longleftrightarrow$ (G izolált pontoktól eltekintve összefüggő és 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.)

Biz: $\Rightarrow$: Láttuk. ✓ $\Leftarrow$: Ha G Euler-gráf, akkor (2) miatt van Euler-körsétája, ami Euler-séta is egyúttal. Ha G nem Euler-gráf, akkor legyenek u és v a G páratlan fokú csúcsai. Ekkor $G + uv$ Euler-gráf, és (2) miatt van Euler-körsétája. Feltehető, hogy e körséta utolsó éle uv. Ezt az uv élt elhagyva a körsétából, G Euler-sétáját kapjuk. $\square$

Euler-körséta keresése Euler-gráfban: $E(G)$-t felbontjuk körsétákra, amiket összevarrunk. Körsétát a felbontáshoz pl. úgy is kereshetünk, hogy addig követünk egy sétát, amíg tudunk. Előbb-utóbb elakadunk, de ez csakis a séta kiindulási pontjában történhet meg. Ezért a bejárt séta egy körséta, amit a felbontásban felhasználunk.

- **Hamilton-körök és -utak**

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Megj: A célunk hasonló, mint az Euler-(kör)séta esetén, azaz gyors módszer, amivel el lehet dönteni egy gráfról, hogy van-e Hamilton-köre ill. -útja. Sajnos jól használható szükséges **és** elégséges feltételt nem tudunk adni erre a problémára, és jó oka van annak, hogy nem is számítunk ilyen feltétel létezésére. Tudunk viszont jól használható szükséges, és jól használható elégséges feltételt adni, de ezek csak bizonyos gráfok esetén hasznosak.

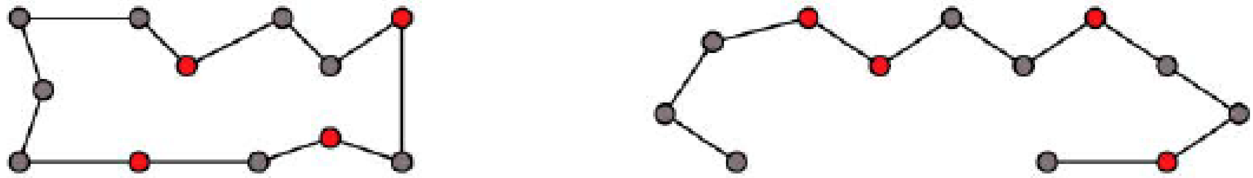
Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

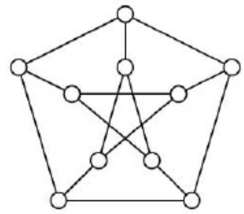
Megj: A fenti feltétel, miszerint k csúcs törlésétől a gráf legfeljebb k (ill. $k + 1$) komponensre eshet szét feltétlenül **szükséges** ahhoz, hogy G-nek legyen Hamilton-köre ill. -útja. Abból azonban, hogy G teljesíti a fenti feltételt, nem következik, hogy G-nek csakugyan van Hamilton-köre vagy útja. A szükséges feltételt úgy tudjuk alkalmazni, hogy a segítségével igazoljuk egy konkrét gráfról, hogy nincs Hamilton-köre (vagy -útja). Ha pl. azt látjuk, hogy G-ből 42 csúcsot elhagyva 43 komponens keletkezik, akkor G-nek nincs Hamilton-köre. Ha a komponensszám legalább 44, akkor G-nek Hamilton-útja sincs.

Biz: (1,2) G-t tekinthetjük úgy, mint egy kör (ill. út), amihez még további éleket adunk hozzá. Könnyű látni, hogy egy kör (ill. út) k pont elhagyásától legfeljebb k $(k+1)$ komponensre eshet szét. A további élek (amit a körhöz ill. úthoz hozzá kell adni, hogy G-t kapjuk) csak csökkenteni tudják a komponensszámot, növelni nem. Ezért G-ből k csúcsot törölve legfeljebb k $(k+1)$ komponens keletkezhet. $\square$

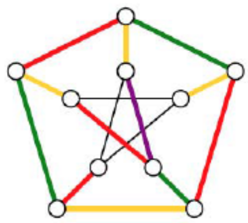


Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.
   (a) Tegyük fel, hogy külső körből k_1, a belsőből k_2 csúcsot hagytunk el. Ha $k_1 = 0$ vagy $k_2 = 0$, akkor a gráf összefüggő marad. Különben a kölső kör legfeljebb k_1, a belső pedig legfeljebb k_2 részre esik szét, vagyis összesen legfeljebb $k_1 + k_2$ komponens létezik.



2. Nincs Hamilton-köre.
   (a) Ha lenne Hamilton-köre, akkor a Hamilton-kör éleit felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, sárga ill. zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet.



A továbbiakban elégséges feltételeket fogunk látni Hamilton-kör létezésére. Ezek segítségével (szerencsés esetben) gyorsan és kétséget kizáróan tudjuk bizonyítani, hogy egy adott gráfnak van Hamilton-köre. Az elégséges feltétel vizsgálata azonban nem alkalmas arra, hogy egy gráf a Hamilton-körének hiányát igazoljuk.

Def: Legyen G n-csúcsú, egyszerű gráf.

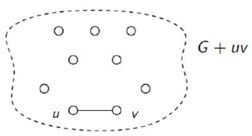
Az $u, v \in V(G)$ csúcspár gazdag, ha $d(u) + d(v) \geq n$. A G gráfra teljesül a Dirac-feltétel, ha $d(v) \geq \frac{n}{2} \forall v \in V(G)$-re. G-re igaz az Ore-feltétel, ha G bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot.

Dirac tétele: Gre igaz a Dirac-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Ore tétele: G-re igaz az Ore-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Megj: A Dirac-feltétel erősebb (többet kíván), mint az Ore. Ezért az Ore-tétel erősebb, mint a Dirac: gyengébb feltételből igazolja ugyanazt. Ezért az Ore-tétel bizonyítása a Dirac-tételt is igazolja.

- **A Chvátal-lezárt**



Hízlalási lemma: Tegyük fel, hogy G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\iff$ ($G + uv$-nek van Hamiliton köre).

Megj: A hízlalási lemma jelentősségge az, hogy segít eldönteni azt, hogy van-e G-ben Hamilton-kör. Azt mondja ki ugyanin, hogy a gazdag párok közé G-be "ingyen" behúzhatunk éleket, u.i. ez nem változtat azon a tényen, hogy van vagy nincs Hamilton-kör a vizsgált gráfban. Megtehetjük tehát, hogy a lemma segítségével addig húzunk be éleket a gráfba, amíg lehet. Ha az így adódó $\overline{G}$ Chvátal-lezártban találunk Hamilton-kört, akkor G-nek is bizonyosan van Hamiliton-köre. Ha pedig $\overline{G}$ nem tartalmaz Hamilton-kört, akkor persze G-nek nincs Hamilton-köre.

Biz: $\Rightarrow$: Láttuk. ✓ $\Leftarrow$: Legyen C a $G+uv$ Hamilton-köre. Ha $uv \notin C$, akkor C a G-nek is Hamilton-köre, kész vagyunk. Ha viszont $uv \in C$, akkor $C - uv$ a G egy Hamilton-útja. Legyen ez a Hamilton-út $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$. Legyen $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$ a v szomszédainak halmaza, és legyen $B := \{v_{i-1} : uv_i \in E(G)\}$ az u szomszédait a Hamilton-úton megelőző csúcsok halmaza.

Világos, hogy $v \notin A$ és $v \notin B$, így $|A \cup B| \leq n-1$. Mivel (u,v) gazdag pár, ezért $|A|+|B| = d(u)+d(v) \geq n$. Ezek szerint $A \cap V \neq \emptyset$, legyen pl. $v_i \in A \cap B$. Ekkor $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}, v_1$ a G egy Hamilton-köre. $\square$

Ore tétele: Ha G bármely két nemszomszédos csúcsa gazdag párt alkot, akkor G-nek van Hamilton-köre.

Biz: A hízlalási lemma alapján G bármely két nemszomszédos csúcsát "ingyen" összeköthetjük. Így G Chátal-lezártja a $\overline{G} = K_n$ teljes gráf. Mivel K_n-nek van H-köre, ezért G-nek is van. $\square$

Dirac-tétele: Ha $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$, akkor G-nek van Hamilton-köre.

Biz: G bármely két csúcsa gazdag párt alkot, ezért G-re teljesül az Ore-feltétel. Az Ore-tétel miatt G-nek van Hamilton-köre. $\square$

9 Tétel

Gráfok síkba ill. gömbre rajzolhatósága, tartomény, sztereografikus projekció, következményei. Az **Euler-féle poliédertétel**, duális kézfogáslemma és következményei: felső korlátok az élszámra és a minimális fokszáma egyszerű, síkbarajzolható gráfokon.

- **Síkbarajzolhatóság**

  Def: Síkbarajzolt (síkbarajzolt) gráf alatt olyan gráfdiagramot értünk, amiven az élek nem keresztezik egymást.

  A G gráf síkbarajzolható (síkbarajzolható), ha van síkbarajzolt diagramja.

  Síkbarajzolt gráf tartománya (lapja): a diagram komplementerének összefüggő tartománya. A nem korlátos rész neve külső tartomány.

  Megj: (1) A fentieket nem csak egyszerű gráfokra definiáltuk. (2) A síkbarajzolt gráf nem csupán egy gráf, hanem egy **konkrét** diagram. (3) Ugyanannak a síkbarajzolható gráfnak nagyon sok lényegesen különböző síkbarajzolt diagramja (lerajzolása) lehet. (4) A görbe (tóruszra) rajzolhatóság hasonlóan definiálható.

  Állítás: (A G gráf síkbarajzolható) $\Longleftrightarrow$ (G gömbre rajzolható)

  Biz: A sztereografikus projekcióban az északi-sarkból történő vetítés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a sík pontjai és a síkot a déli-sarkon érintő gömbfelszín pontjai (mínusz északi-sark) között. A síkbarajzolt diagram vetülete gömbre rajzolt lesz ($\Rightarrow \checkmark$), és az $É$-t nem tartalmazó gömbre rajzolt diagram pedig síkbarajzolttá válik. A $\Leftarrow$ irány igazolásához csupán annyi kell, hogy úgy rajzoljuk G-t a gömbre, hogy az $É$-n ne menjen át él. $\square$

  Köv: síkbarajzolt gráf külső tartománynak nincs kitüntetett szerepe.

  Biz: Bármely lerajzolás "kifordítható": a diagram átrajzolható úgy, hogy a kiválasztott tartomány legyen a külső tartomány.

  1. Vetítsük fel a diagramot a gömbre.
  2. Állítsuk az $É$-t a kiválasztott tartománynak megfelelő gömbi tartomány belsejébe.
  3. Vetítsük vissza a gömbre rajzolt gráfot a síkra. $\square$

  Köv: Bármely konvex poliéder élhálója síkbarajzolható gráf.

  Biz: A kx poliéder belső pontjából az élháló kivetíthető egy, a poliédert tartalmazó gömbre. Így az élhálóból göbmre rajzolt gráf lesz. Láttuk, hogy minden gömbre rajzolható gráf síkbarajzolható. $\square$

  Megj: A kx poliéder élgráfjának tartományai a poliéder lapjainak felelnek meg.

  Terminológia: síkbarajzolt G gráf esetén n, e, t ill. k jelöli rendre a G csúcsai, élei, tartományai és komponensei számát.

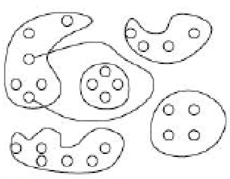
  Duális kézfogáslemma (DKFL): Ha G síkbarajzolt gráf, akkor $\sum_{i=1}^{t} l_i = 2e$ ahol l_i az i-dik lapot határoló élek számát jelöli.

  Biz: Minden él vagy két különböző lapot határol, vagy ugyanazt a lapot 2-szer. Így minden él 2-vel járul a BO-hoz és a JO-hoz is. $\square$

  Megj: A DKFL akkor hasznos, ha a síkbarajzolt gráf lapjairól, a KFL pedig akkor, ha a fokszámokról van információnk.

  Fáry-Wagner-tétel: Ha G egyerű síkbarajzolható gráf, akkor olyan síkbarajzolása is van, amiben minden él egyenes szakasz.

- **Az Euler-féle poliéderformula, síkgráfok karakterizációja**

  Tétel: Ha G síkbarajzolt gráf, akkor $n + t = e + k + 1$.

  Biz: Rajzoljuk meg G-t az n csúcsból kiindulva, az élek egyenkénti behúzásával. Kezdetben $t = 1, e = 0$ és $k = n$, így a bizonyítandó összefüggés fennáll. Tegyük fel, hogy már néhány élt berajzoltunk, még mindig fennáll az összefüggés, és egy éppen az uv élt rajzolunk meg.

$\boxed{1.}$ u és v különböző komponenshez tartoznak. Ekkor k értéke 1-gyel csökken, e-é pedig 1-gyel nő. Az ÉHL miatt nem keletkezik kör, tehát nem zárunk körül új tartományt, vagyis t nem változik. Az összefüggés fennmarad.

$\boxed{2.}$ u és v ugyanahhoz a komponenshez tartoznak. Ekkor k nem változik, e viszont 1-gyel nő. Az ÉHL miatt keletkezik kör, tehát kettévágjuk az uv élt tartalmazó korábbi tartományt. Ezért t is 1-gyel nő, az összefüggés ismét fennmarad. $\square$

Köv: **(1)** Ha G síkbarajzolható, akkor t nem függ a síkbarajzolástól.

Biz: $t = e + k + 1 - n$, és a JO nem függ a síkbarajzolástól. $\square$

(2) (**Euler-formula**) Ha G összefüggő síkbarajzolt gráf, akkor $n + t = e + 2$

Biz: Mivel G összefüggő, ezért a fenti Tételben $k = 1$. $\square$

(3) Ha G egyszerű, síkbarajzolható és $n \geq 3$, akkor $e \leq 3n - 6$.

Biz: Ilyenkor G minden lapját legalább 3 él határolja, így a DKFL miatt $2e = \sum_{i=1}^{t} l_i \geq 3t$. A Tétel alapján $3n + 2e \geq 3n + 3t = 3e + 3k \geq 3e + 3 + 3 = 3e + 6$, amit rendezve $e \leq 3n - 6$ adódik. $\square$

(4) G egyszerű, síkbarajzolható, C_3-mentes és $n \geq 3 \Rightarrow e \leq 2n - 4$.

Biz: Ilyenkor G minden lapját legalább 4 él határolja. A DKFL miatt $2e = \sum_{i=1}^{t} l_i \geq 4t$, így $e \geq 2t$. A Tétel miatt $2n + e \geq 2n + 2t = 2e + 2k + 2 \geq 2e + 2 + 2 = 2e + 4$ Ezt rendezve $e \leq 2n - 4$ adódik. $\square$

(5) Ha G egyszerű, síkbarajzolható, akkor $\delta(G) \ \leq 5$ (azaz $\exists v : d(v) \leq 5$).

Biz: A KFL és **(3)** miatt $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e \leq 6n - 12$. Ezért van olyan csúcs, amire $d(v) \leq \frac{6n-12}{n} < 6$. $\square$

(6) A K_5 és $K_{3,3}$ gráfok egyike sem síkbarajzolható.

Biz: A K_5 gráf egyszerű, de nem teljesül **(3)**, hiszen $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10 \not\leq 9 = 3 \cdot 5 - 6$. Ezért K_5 nem síkbarajzolható. A $K_{3,3}$ gráf egyszerű és C_3-mentes, de nem teljesül rá **(4)**, u.i. $|E(K_{3,3})| = 9 \not\leq 8 = 2 \cdot 6 - 4$. Ezrét $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható. $\square$

Megj: Könnyen látható, hogy ha G síkbarajzolható, akkor $G + e$ tóruszra rajzolható bármely e él behúzása esetén. Nem nehéz látni, hogy K_6 is tóruszra rajzolható. Sőt: még K_7 is az, de K_8 már nem.

Def: Élfelosztás: az élre egy új, másodfokú csúcs ültetése. Élösszehúzás: az él törlése és két végpontjának azonosítása. Topologikus G (soros bővítés): G-ből élfelosztásokkal képzett gráf.

Megf: Az éltörlés, csúcstörlés, élfelosztás, élösszehúzás operációk mindegyike megőrzi a gráf síkbarajzolható tulajdonságát.

Köv: (1) Top. K_5 top. $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható. (2) Ha G síkbarajzolható, akkor G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja.

Kuratowski tétele: (G síkbarajzolható) $\iff$ (G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja)

Példa: Petersen-gráf

10 Tétel

Kuratowski gráfok síkbarajzolhatósága, **soros bővítés,** ***Kuratowski-tétel*** **könnyű iránya**. **Síkbarajzolt gárf duálisa**, a duális paraméterei. Vágás, elvágó él, soros élek. *Kör-vágás dualitása*, különféle élek duálisai. Whitney két tétele, Whitney operációk.

- **Síkbarajzolhatóság**

  Def: Síkbarajzolt (síkbarajzolt) gráf alatt olyan gráfdiagramot értünk, amiven az élek nem keresztezik egymást.

  A G gráf síkbarajzolható (síkbarajzolható), ha van síkbarajzolt diagramja.

  Síkbarajzolt gráf tartománya (lapja): a diagram komplementerének összefüggő tartománya. A nem korlátos rész neve külső tartomány.

  Megj: (1) A fentieket nem csak egyszerű gráfokra definiáltuk. (2) A síkbarajzolt gráf nem csupán egy gráf, hanem egy **konkrét** diagram. (3) Ugyanannak a síkbarajzolható gráfnak nagyon sok lényegesen különböző síkbarajzolt diagramja (lerajzolása) lehet. (4) A görbe (tóruszra) rajzolhatóság hasonlóan definiálható.

  Állítás: (A G gráf síkbarajzolható) $\iff$ (G gömbre rajzolható)

  *****Biz:** A sztereografikus projekcióban az északi-sarkból történő vetítés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a sík pontjai és a síkot a déli-sarkon érintő gömbfelszín pontjai (mínusz északi-sark) között. A síkbarajzolt diagram vetülete gömbre rajzolt lesz ($\Rightarrow \checkmark$), és az $\acute{E}$-t nem tartalmazó gömbre rajzolt diagram pedig síkbarajzolttá válik. A $\Leftarrow$ irány igazolásához csupán annyi kell, hogy úgy rajzoljuk G-t a gömbre, hogy az $\acute{E}$-n ne menjen át él. $\square$

  Köv: síkbarajzolt gráf külső tartománynak nincs kitüntetett szerepe.

  Biz: Bármely lerajzolás "kifordítható": a diagram átrajzolható úgy, hogy a kiválasztott tartomány legyen a külső tartomány.

  1. Vetítsük fel a diagramot a gömbre.
  2. Állítsuk az $\acute{E}$-t a kiválasztott tartománynak megfelelő gömbi tartomány belsejébe.
  3. Vetítsük vissza a gömbre rajzolt gráfot a síkra. $\square$

  Köv: Bármely konvex poliéder élhálója síkbarajzolható gráf.

  Biz: A kx poliéder belső pontjából az élháló kivetíthető egy, a poliédert tartalmazó gömbre. Így az élhálóból göbmre rajzolt gráf lesz. Láttuk, hogy minden gömbre rajzolható gráf síkbarajzolható. $\square$

  Megj: A kx poliéder élgráfjának tartományai a poliéder lapjainak felelnek meg.

  Terminológia: síkbarajzolt G gráf esetén n, e, t ill. k jelöli rendre a G csúcsai, élei, tartományai és komponensei számát.

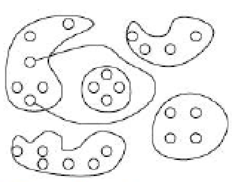
  Duális kézfogáslemma (DKFL): Ha G síkbarajzolt gráf, akkor $\sum_{i=1}^{t} l_i = 2e$ ahol l_i az i-dik lapot határoló élek számát jelöli.

  Biz: Minden él vagy két különböző lapot határol, vagy ugyanazt a lapot 2-szer. Így minden él 2-vel járul a BO-hoz és a JO-hoz is. $\square$

  Megj: A DKFL akkor hasznos, ha a síkbarajzolt gráf lapjairól, a KFL pedig akkor, ha a fokszámokról van információnk.

  Fáry-Wagner-tétel: Ha G egyerű síkbarajzolható gráf, akkor olyan síkbarajzolása is van, amiben minden él egyenes szakasz.

- **Az Euler-féle poliéderformula, síkgráfok karakterizációja**

  Tétel: Ha G síkbarajzolt gráf, akkor $n + t = e + k + 1$.

  Biz: Rajzoljuk meg G-t az n csúcsból kiindulva, az élek egyenkénti behúzásával. Kezdetben $t = 1, e = 0$ és $k = n$, így a bizonyítandó összefüggés fennáll. Tegyük fel, hogy már néhány élt berajzoltunk, még mindig fennáll az összefüggés, és egy éppen az uv élt rajzolunk meg.

$\boxed{1.}$ u és v különböző komponenshez tartoznak. Ekkor k értéke 1-gyel csökken, e-é pedig 1-gyel nő. Az ÉHL miatt nem keletkezik kör, tehát nem zárunk körül új tartományt, vagyis t nem változik. Az összefüggés fennmarad.

$\boxed{2.}$ u és v ugyanahhoz a komponenshez tartoznak. Ekkor k nem változik, e viszont 1-gyel nő. Az ÉHL miatt keletkezik kör, tehát kettévágjuk az uv élt tartalmazó korábbi tartományt. Ezért t is 1-gyel nő, az összefüggés ismét fennmarad. □

Köv: **(1)** Ha G síkbarajzolható, akkor t nem függ a síkbarajzolástól.

Biz: $t = e + k + 1 - n$, és a JO nem függ a síkbarajzolástól. □

(2) (**Euler-formula**) Ha G összefüggő síkbarajzolt gráf, akkor $n + t = e + 2$

Biz: Mivel G összefüggő, ezért a fenti Tételben $k = 1$. □

(3) Ha G egyszerű, síkbarajzolható és $n \geq 3$, akkor $e \leq 3n - 6$.

Biz: Ilyenkor G minden lapját legalább 3 él határolja, így a DKFL miatt $2e = \sum_{i=1}^{t} l_i \geq 3t$. A Tétel alapján $3n + 2e \geq 3n + 3t = 3e + 3k \geq 3e + 3 + 3 = 3e + 6$, amit rendezve $e \leq 3n - 6$ adódik. □

(4) G egyszerű, síkbarajzolható, C_3-mentes és $n \geq 3 \Rightarrow e \leq 2n - 4$.

Biz: Ilyenkor G minden lapját legalább 4 él határolja. A DKFL miatt $2e = \sum_{i=1}^{t} l_i \geq 4t$, így $e \geq 2t$. A Tétel miatt $2n + e \geq 2n + 2t = 2e + 2k + 2 \geq 2e + 2 + 2 = 2e + 4$ Ezt rendezve $e \leq 2n - 4$ adódik. □

(5) Ha G egyszerű, síkbarajzolható, akkor $\delta(G)\ \leq 5$ (azaz $\exists v : d(v) \leq 5$).

Biz: A KFL és **(3)** miatt $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e \leq 6n - 12$. Ezért van olyan csúcs, amire $d(v) \leq \frac{6n-12}{n} < 6$. □

(6) A K_5 és $K_{3,3}$ gráfok egyike sem síkbarajzolható.

Biz: A K_5 gráf egyszerű, de nem teljesül **(3)**, hiszen $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10 \not\leq 9 = 3 \cdot 5 - 6$. Ezért K_5 nem síkbarajzolható. A $K_{3,3}$ gráf egyszerű és C_3-mentes, de nem teljesül rá **(4)**, u.i. $|E(K_{3,3})| = 9 \not\leq 8 = 2 \cdot 6 - 4$. Ezrét $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható. □

Megj: Könnyen látható, hogy ha G síkbarajzolható, akkor $G + e$ tóruszra rajzolható bármely e él behúzása esetén. Nem nehéz látni, hogy K_6 is tóruszra rajzolható. Sőt: még K_7 is az, de K_8 már nem.

*****Def:** Élfelosztás: az élre egy új, másodfokú csúcs ültetése. Élüsszehúzás: az él törlése és két végpontjának azonosítása. Topologikus G (soros bővítés): G-ből élfelosztásokkal képzett gráf.

Megf: Az éltörlés, csúcstörlés, élfelosztás, élösszehúzás operációk mindegyike megőrzi a gráf síkbarajzolható tulajdonságát.

Köv: (1) Top. K_5 top. $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható. (2) Ha G síkbarajzolható, akkor G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja.

*****Kuratowski tétele:** (G síkbarajzolható) $\iff$ (G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja) **Példa:** Petersen-gráf

- **Síkgráfok duálisa**

Def: A G síkba rajzolt gráf duálisa a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A síkbarajzolt G gráf G^* duálisa síkbarajzolható. (n^*, e^*, t^*, k^*) (2) $n^* = t, e^* = e, k^* = 1$. (3) Ha v az i-dik laphoz tartozó duális csőcs, akkor $d_{G^*}(v) = l_i$.

Köv: KFL a duálisra $\sum_{i=1}^{t} l_i = \sum_{v\ \in V(G^*)} d_{G^*}(v) = 2e^* = 2e$.

Def: A $Q \subseteq E(G)$ élhalmaz a G gráf vágása, ha $G - Q$ szétesik (több komponense van, mint G-nek), de $Q' \subsetneq Q$ esetén $G - Q'$ nem esik szét. Elvágó él: egyélű vágás. Soros élek: kétélű vágás.

Kör-vágás dualitása: Tegyük fel, hogy G^* a G síkbarajzolt gráf duálisa. Ekkor (C a G köre) $\iff$ (C^* a G^* vágása) ill. (Q a G vágása) $\iff$ (Q^* a G^* köre).

Köv: Hurokél duálisa elvágó él, soros élpáré párhuzamos élpár.

- **Whitney**

Whitney tétele: Tegyük fel, hogy G^* a G síkbarajzolt gráf duálisa. Ekkor H pontosan akkor duálisa a G egy alkalmas síkbarajzolásának, ha H előáll G^*-ból a fenti Whitney-operációk alkalmas egymásutánjával.

Def: A $\varphi : E(G) \to E(H)$ kölcsönös egyenértékű leképezés kör-vágás dualitás G és H között, ha C pontosan akkor G köre, ha $\varphi(C) H$ vágása.

Whitney másik tétele: Tegyük fel, hogy G és H között kör-vágás dualitás van. Ekkor G síkbarajzolható, és H a G egy alkalmas síkbarajzolásának duálisa.

Megj: Egy G gráf által leírt villamos hálózat viselkedését az Ohm-él Kirchhoff-törvények írják le. Ezek a G gráf éleire, köreire és vágásaira vonatkoznak. Ha G és H közt kör-vágás dualitás van, akkor H-n elkészíthető az előző hálózat duálisa. Az eredeti hálózat megoldásában ha az I és U értékeket felcseréljük, az utóbbi hálózat megoldását kapjuk. Whitney másik tétele miatt ez a különös szimmetria csak síkbarajzolható gráfok által leírt hálózatokon lehetséges.