

## 0.1 Az $\mathbb{R}^n$ tér

**Def:**  $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$  az  $A$  és  $B$ -beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$  a rendezett  $n$ -esek halmaza. Végül  $A^n := A \times A \times A \times \dots \times A$  az  $n$ -szeres Descartes-szorzat jelölése.

**Megj:** (1) A továbbiakban  $\mathbb{R}^n$  elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket  $n$  magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk.

**Példa:**

$$\begin{pmatrix} e \\ \pi \\ 42 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ ill. } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

utóbbi esetben az 1-es felülről az  $i$ -dik helyen áll.

**Megj:** (2) Ha  $n$  világos a szövegkörnyezetből, akkor  $\mathbb{R}^n$  elemeit vektoroknak,  $\mathbb{R}$  elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni. A vektorok tehát itt és most nem „irányított szakaszok”, hanem ennél általánosabb fogalmat takarnak: az irányított szakaszok is tekinthetők vektornak, de egy vektor a mi tárgyalásunkban nem feltétlenül irányított szakasz.

(3) Az  $n$  magasságú vektorokkal különféle dolgokat művelhetünk. Például (koordinátáinként) összeadhatjuk őket.

**Példa:**

$$\text{Ha } \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ és } \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ akkor } \underline{x} + \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Vagy skalárral szorozhatjuk őket. (Ami nem „igazi” művelet...)

**Példa:**

$$\text{Ha } \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ és } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ akkor } \lambda \underline{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \dots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

(4) Az  $\mathbb{R}^n$  **tér** alatt  $\mathbb{R}^n$  elemeire és a fenti két műveletre gondolunk.

(5)  $\mathbb{R}^2$  ill.  $\mathbb{R}^3$  elemei természetes módon megfeleltethetők a sík, ill. a 3 dimenziós tér pontjainak. Ez segíthet abban, hogy valamiféle szemléletes képet kapjunk az  $n$  magasságú vektorokról tanultakról.

## 0.2 Vektorműveletek azonosságai

**Állítás:** Az  $\mathbb{R}^n$  tér vektoraival történő számolásban néhány fontos szabály sokat segít. Tetszőleges  $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$  vektorokra és  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  skalárokra az alábbiak teljesülnek:

- (1)  $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$  (az összeadás kommutatív)
- (2)  $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$  (az összeadás asszociatív)
- (3)  $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda \underline{u} + \lambda \underline{v}$  (egyik disztributivitás)
- (4)  $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda \underline{u} + \mu \underline{u}$  (másik disztributivitás)

(5)  $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u})$  (másik asszociativitás)

**Biz:** Mivel mindkét művelet koordinátánként történik, elég az egyes azonosságokat koordinátánként ellenőrizni. Ezek viszont éppen a valós számokra vonatkozó jól ismert szabályok.

**Konvenció:**  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$  esetén  $-\underline{v} := (-1) \cdot \underline{v}$ . Ezzel a vektorok között nem csak az összeadás, hanem a kivonás is értelmezhető:  $\underline{u} - \underline{v} := \underline{u} + (-1)\underline{v}$ . Ezáltal a kivonás is egyfajta összeadás, tehát az összeadásra vonatkozó szabályok értelemszerű változatai a kivonásra is érvényesek.

Ezek szerint a vektorokkal történő számolási szabályok nagyon hasonlóak a valós számok esetén megszokott szabályokhoz.

## 0.3 Altér és lineáris kombináció

**Def:**  $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$  az  $\mathbb{R}^n$  tér **altér** (jel:  $V \leq \mathbb{R}^n$ ), ha  $V$  zárt a műveletekre:  $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$  teljesül  $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$  és  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  esetén.

**Példa:**  $\mathbb{R}^2$ -ben tetszőleges origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak.  $\mathbb{R}^3$ -ban tetszőleges origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.

**Kérdés:** Mik az  $\mathbb{R}^n$  tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?

**Megf:** Ha  $V \leq \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k \in V$  és  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ , akkor  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \dots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$ .

**Def:** A  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$  kifejezés az  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$  **lineáris kombinációja**.

**Triviális lineáris kombináció:**  $0 \cdot \underline{x}_1 + \dots + 0 \cdot \underline{x}_k$ .

**Megf:**  $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V \text{ zárt lineáris kombinációra}),$  azaz az altér definiálható az  $\mathbb{R}^n$  lineáris kombinációra zárt részhalmazként.

**Biz:** Triviális.

**Def:**  $\langle \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \rangle$  az  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$  lineáris kombinációinak halmaza.

**Példa:**

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$  az origón átmenő 2-meredekségű egyenes.

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$ , ill.  $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n \rangle = \mathbb{R}^n$  ahol  $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n \forall i$ .

**Konvenció:**  $\langle \emptyset \rangle := \{ \underline{0} \}$ .

**Állítás:** Tetszőleges  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$  esetén  $\langle \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$ .

**Biz:** Zárt az összeadásra:  $(\lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda_k \underline{x}_k) + (\kappa_1 \underline{x}_1 + \dots + \kappa_k \underline{x}_k) = (\lambda_1 + \kappa_1) \underline{x}_1 + \dots + (\lambda_k + \kappa_k) \underline{x}_k \in V$ . Skalárral szorzás:  $\lambda \cdot (\lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda_k \underline{x}_k) = \lambda \lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda \lambda_k \underline{x}_k \in V$ .

**Def:** Az  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$  által **generált altér** a  $\langle \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \rangle$  halmaz. Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.

**Megf:** (1) Altér metszete altér:  $V_i \leq \mathbb{R}^n \forall i \Rightarrow \cap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$ .

**Biz:** (1) Műveletzárttság:  $\underline{x}, \underline{y} \in V_i \forall i, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V_i \forall i$ .

**Megf:** (2)  $\{ \underline{0} \} \leq \mathbb{R}^n$ .

**Biz:** (2)  $\underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$  ill.  $\lambda \underline{0} = \underline{0}$ , zárt a műveletekre.

**Megf:** (3)  $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$ .

**Biz:** (3)  $\mathbb{R}^n$  zárt a műveletekre.

**Def:**  $\mathbb{R}^n$  **triviális alterei:**  $\{ \underline{0} \}, \mathbb{R}^n$ .

## 0.4 Lineáris függetlenség és generálás

**Def:** Az  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$  vektorok a  $V \leq \mathbb{R}^n$  altér **generátorrendszerét** alkotják, ha  $\langle \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \rangle = V$ .

**Példa:**  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  az  $\mathbb{R}^n$  generátorrendszere, hisz minden  $\mathbb{R}^n$ -beli vektor előáll az egységvektorok lineáris kombinációjaként, azaz  $\langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \rangle = \mathbb{R}^n$

Ha  $\mathbb{R}^2$ -ben két vektor nem párhuzamos, akkor generátorrendszert alkotnak, hiszen bármely vektor előállítható a lineáris kombinációjukból. (Ehhez a két vektort az origóval összekötő egyenesekre kell a „másik” vektorral párhuzamosan vetíteni az előállítandó vektort.)

Hasonlóan, ha  $\mathbb{R}^3$ -ban három vektor nem esik ugyanarra az origón átmenő síkra, akkor ez a három vektor generátorrendszert alkot.

**Def:** Az  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$  vektorok **lineárisan függetlenek**, ha a nullvektor csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:  $\lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ .

Ha a fenti vektorok nem lineárisan függetlenek, akkor **lineárisan összefüggők**.

**Példa:**  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  lineárisan független  $\mathbb{R}^n$ -ben, hisz ha  $\lambda_1 \underline{e}_1 + \dots + \lambda_n \underline{e}_n = \underline{0}$  akkor az  $i$ -dik koordináta 0 volta miatt  $\lambda_i = 0$ , tehát a lineáris kombináció triviális.

Ha  $\mathbb{R}^2$ -ben két vektor akkor lineárisan összefüggő, ha párhuzamosak. Tehát ha nem párhuzamosak, akkor lineárisan függetlenek.

Ha  $\mathbb{R}^3$ -ban pedig az igaz, hogy ha három vektor nem esik ugyanarra az origón átmenő síkra, akkor ez a három vektor lineárisan független rendszert alkot.

**Megj:** A lineáris függetlenség (akárcsak a lineáris összefüggő tulajdonság) vektorok egy halmazára és nem az egyes vektorokra vonatkozik. Hasonló igaz a generátorrendszerre. Az, hogy egy konkrét  $\underline{v}$  vektor benne van egy lineárisan független (lineárisan összefüggő vagy generátor-) rendszerben lényegében semmi információt nem ad  $\underline{v}$ -ről.

**Lemma:**  $\{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k\}$  lineárisan független vektorrendszer  $\iff$  egyik  $\underline{x}_i$  sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

**Biz:** Tegyük fel, hogy  $\{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k\}$  **nem** lineárisan független, azaz  $\lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0}$  és  $\lambda_i \neq 0$ . Ekkor  $\underline{x}_i$  előállítható a többiből:  $\underline{x}_i = \frac{-1}{\lambda_i} \cdot (\lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \dots + \lambda_k \underline{x}_k)$ . Most tegyük fel, hogy valamelyik  $\underline{x}_i$  előáll a többi lineáris kombinációjaként:  $\underline{x}_i = \lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \dots + \lambda_k \underline{x}_k$ .

Ekkor  $\{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k\}$  nem lineárisan független, hiszen a nullvektor megkapható nemtriviális lineáris kombinációként:  $\underline{0} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + (-1) \cdot \underline{x}_i + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \dots + \lambda_k \underline{x}_k$ .

## 0.5 Független- és generáló halmazok

**Állítás:** Tegyük fel, hogy  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n, \underline{v} \notin G$  és  $\langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle = V \leq \mathbb{R}^n$ . Ekkor  $(\langle G \rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G \rangle)$ .

**Megj:** A fenti állítás tulajdonképpen azt mondja ki, hogy egy  $V$  altér generátorrendszeréből pontosan akkor tudunk egy elemet elvenni úgy, hogy a maradék vektorok továbbra is generátorrendszert alkossanak, ha a kihagyott elem előáll a maradék elemek lineáris kombinációjaként.

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Mivel  $\langle G \rangle = V = \langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle$ , ezért  $\underline{v} \in V$  és  $\underline{v} \in \langle G \rangle$ .

$\Leftarrow$ : Tetszőleges  $\underline{u} \in V$  elemről azt kell megmutatni, hogy  $\underline{u} \in \langle G \rangle$ . Mivel  $\underline{v} \in \langle G \rangle$ , feltehető, hogy  $\underline{v} = \sum_{g \in G} \lambda_g \underline{g}$ . Tudjuk, hogy  $\underline{u} \in V = \langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle$ , ezért  $\underline{u} = \lambda \underline{v} + \sum_{g \in G} \mu_g \underline{g}$ . Ebbe behelyettesítve a fenti kifejezést  $\underline{u} = \sum_{g \in G} (\mu_g + \lambda \cdot \lambda_g) \underline{g}$  adódik, azaz  $\underline{u} \in \langle G \rangle$ . Ez bármely  $\underline{u} \in V$ -re igaz, így  $\langle G \rangle = V$ .

**Lemma:** Tegyük fel, hogy  $F = \{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$  lineárisan független. Ekkor  $(F \cup \{\underline{f}\})$  lineárisan független  $\iff (\underline{f} \notin \langle F \rangle)$

**Megj:** A lemma szerint független halmaz hízlalása csakis olyan vektorral lehetséges, ami nem áll elő a független rendszer lineáris kombinációjaként. A  $\Leftarrow$  irányt az „újonnan érkező vektor lemmájának” is nevezik.

**Biz:**  $\Rightarrow$ : Ha  $F \cup \{\underline{f}\}$  lineárisan független, akkor  $\underline{f}$  nem áll elő  $F$ -beliek lineáris kombinációjaként, azaz  $\underline{f} \notin \langle F \rangle$ .

$\Leftarrow$ : Tegyük fel, hogy  $\lambda \underline{f} + \lambda_1 \underline{f}_1 + \dots + \lambda_k \underline{f}_k = \underline{0}$ .

Ha  $\lambda = 0$ , akkor a bal oldal az  $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_k$  vektorok lineáris kombinációja, így  $F$  lineáris függetlensége miatt  $\lambda_i = 0 \forall i$ . Tehát  $\underline{0}$  csak triviális lineáris kombinációként áll elő, vagyis  $F \cup \{f\}$  csakugyan lineárisan független.

Ha pedig  $\lambda \neq 0$ , akkor  $\underline{f}$  kifejezhető az  $F$ -beliekkel:  $\underline{f} = \frac{-\lambda_1}{\lambda} \underline{f}_1 + \dots + \frac{-\lambda_k}{\lambda} \underline{f}_k$ . Ez lehetetlen, hisz  $\underline{f} \notin \langle F \rangle$ .

**Köv:** (Kicserélési lemma) Ha  $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$  lineárisan független és  $\langle G \rangle = V$  generátorrendszer akkor  $\forall \underline{f} \in F \exists \underline{g} \in G$ , amire  $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$  is lineárisan független.

**Megj:** A kicserélési lemma szerint bárhogy is törölünk a  $V$  altér egy független rendszeréből egy vektort, az pótolható a  $V$  generátorrendszer egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer lineárisan független marad.

**Biz:** Indirekt bizonyítunk. Legyen  $F' := F \setminus \{\underline{f}\}$ . Mivel  $F$  lineárisan független, ezért  $\underline{f} \notin \langle F' \rangle$ . Ha  $F' \cup \{\underline{g}\}$  lineárisan összefüggő lenne minden  $\underline{g} \in G$ -re, akkor az előző lemma miatt  $\underline{g} \in \langle F' \rangle$  teljesülne minden  $\underline{g} \in G$ -re. Ez azt jelenti, hogy  $G \subseteq \langle F' \rangle$ , vagyis  $\langle G \rangle \subseteq \langle F' \rangle$ . Ezt felhasználva  $\underline{f} \in V = \langle G \rangle \subseteq \langle F' \rangle \not\vdash \underline{f}$  adódik, ami ellentmondás. Az indirekt feltevés megfőlt: van olyan  $\underline{g} \in G$ , amire  $F' \cup \{\underline{g}\}$  lineárisan független.

**FG-egyenlőtlenség:** Tegyük fel, hogy  $G$  a  $V \leq \mathbb{R}^n$  altér generátorrendszere, és  $F \subseteq V$  lineárisan független. Ekkor  $|F| \leq |G|$ .

**Megj:** Magyarul: altérben egy független rendszer sosem nagyobb, mint egy generátorrendszer.

**Biz:** Legyen  $F_0 := F$ . Ha  $F_0 \subseteq G$ , akkor  $|F_0| \leq |G|$ . Ha  $F_0 \subsetneq G$ , akkor  $F_0 \setminus G \neq \emptyset$ , legyen mondjuk  $\underline{f} \in F_0 \setminus G$ . A kicserélési lemma miatt van olyan  $\underline{g} \in G$ , amire  $F_1 := F_0 \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$  lineárisan független. Ezzel az  $F_1$ -gyel ugyanezt folytatva kapjuk az  $F_2, F_3, \dots$ , lineárisan független rendszereket. Előbb-utóbb olyan  $F_i$ -hez jutunk, amivel ez már nem folytatható, mert  $F_i \subseteq G$ . Ekkor  $|F_0| = |F_1| = \dots = |F_i| \leq |G|$ , győztünk.

**Köv:** Ha  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  lineárisan független, akkor  $|F| \leq n$ .

**Biz:** Láttuk, hogy  $G = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$  az  $\mathbb{R}^n$  generátorrendszere. Az FG-egyenlőtlenség miatt  $|F| \leq |G| = n$ .

**Állítás:** Tegyük fel, hogy  $F = \{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$  lineárisan független és  $\underline{f} \in \langle F \rangle$ . Ekkor  $\underline{f}$  egyértelműen áll elő  $F$ -beli vektorok lineáris kombinációjaként.

**Biz:** Mivel  $\underline{f} \in \langle F \rangle$ , ezért  $\underline{f}$  előáll az  $F$ -beliek lineáris kombinációjaként. Tegyük fel, hogy  $\underline{f} = \lambda_1 \underline{f}_1 + \dots + \lambda_k \underline{f}_k = \mu_1 \underline{f}_1 + \dots + \mu_k \underline{f}_k$  két előállítás. Ekkor  $\underline{0} = \underline{f} - \underline{f} = (\lambda_1 - \mu_1) \underline{f}_1 + \dots + (\lambda_k - \mu_k) \underline{f}_k$ .

Mivel  $F$  lineárisan független, a jobb oldalon álló lineáris kombináció triviális, azaz  $\lambda_i = \mu_i \forall i$ . Így a két fenti előállítás megegyezik, vagyis  $\underline{f}$  csak egyféleképp áll elő az  $F$ -beliek lineáris kombinációjaként.

## 0.6 ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy  $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrixot tekinthetünk  $n$  db  $\mathbb{R}^k$ -beli sorvektornak és  $k$  db  $\mathbb{R}^n$ -beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

**Állítás:** Tegyük fel, hogy  $M'$ -t ESÁ-okkal kaptuk az  $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrixból. Ha  $S$  ill.  $S'$  az  $M$  ill.  $M'$  sorvektorainak halmaza, akkor  $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$ .

**Biz:** Feltehető, hogy  $M'$ -t egyetlen ESÁ-sal kaptuk  $M$ -ből. Bármelyik konkrét ESÁ-i is alkalmaztunk,  $S' \subseteq \langle S \rangle$ , így  $\langle S' \rangle \subseteq \langle S \rangle$ . Láttuk, hogy bármely ESÁ megfordítása is kivitelezhető ESÁ-okkal, ezért  $\langle S \rangle \subseteq \langle S' \rangle$ , és a két megfigyelésből  $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$  adódik.

**Állítás:** Tegyük fel, hogy az  $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$  mátrixból  $M'$ -t ESÁ-okkal kaptuk és  $O = \{\underline{o}_1, \dots, \underline{o}_k\}$  ill.  $O' = \{\underline{o}'_1, \dots, \underline{o}'_k\}$  az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor  $O$ -n és  $O'$ -n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:  $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$ .

**Biz:** Ismét feltehető, hogy  $M'$  egyetlen ESÁ-sal keletkezett. Ráadásul elég a  $\Rightarrow$ : irányt bizonyítani: a  $\Leftarrow$ : következik abból, hogy minden ESÁ fordítottja megvalósítható legfeljebb

három ESÁ-sal. Ezért ha egy lineáris összefüggés fennál  $M'$ -re akkor az ezt legfeljebb három ESÁ megőrzi, tehát igaz marad  $M$ -re is.

**Biz:**  $\Rightarrow$ : A fenti lineáris összefüggés  $M$ -re pontosan azt jelenti, hogy  $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^k \mu_i x_i$  egyenletnek  $M$  minden sora megoldása. Nekünk pedig azt kell igazolni, hogy ugyanezt az egyenletet az ESÁ után kapott  $M'$  minden sora is megoldja. Sorcsere esetén pontosan ugyanazokról az egyenlőségekről van szó, skalárral szorzás esetén az egyik egyenletet skalárral kell szorozni, sorösszeadás esetén pedig az új egyenlőség két korábban teljesülő egyenlet összege.

**Példa:** Döntsük el, hogy lineárisan független rendszert alkotnak-e az alábbi mátrix oszlopai. Megoldás: ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 5 & 0 & 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

A kapott mátrixra  $\underline{o}_4 = -7\underline{o}_1 + 3\underline{o}_2 + 2\underline{o}_3$ , ezért ugyanez a lineáris összefüggés a kiindulási mátrixra is igaz, tehát nem voltak lineárisan függetlenek az oszlopok.

**Megf:** Az  $M$  mátrix pontosan akkor RLA, ha megkaphatjuk az  $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$  oszlopok alkotta mátrixból oszlopok beszúrásával. Minden beszúrt oszlop a tőle álló  $\underline{e}_i$  oszlopok lineáris kombinációja.