

15. n elem permutációja, a permutáció **inverziószáma**. **Bástyaelhelyezés**, inverzióban álló bástyapárok, **determináns**, **felső háromszögmátrix determinánsa**.

1. N elem permutációja

Az e_1, e_2, \dots, e_n tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8	
e_3	e_8	e_5	e_7	e_1	e_6	e_2	e_4	Orbitok: (e_1, e_5, e_3) , (e_8, e_2, e_7, e_4) , (e_6)

Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció **orbitjai**.

Megf: Az e_1, e_2, \dots, e_n vektorok tetszőleges sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik.

Ugyanez igaz a páros méretű orbitok számára is.

Biz:



Köv: Az e_1, e_2, \dots, e_n vektorok tetsz. sorrendjére ekvivalensek:

- (1) a sorrend ps sok cserével kapható (e_1, e_2, \dots, e_n) -ből,
- (2) a sorrend orbitjai számának paritása megegyezik n paritásával,
- (3) a sorrend páros méretű orbitjainak száma páros.

Bármelyik teljesül a fentiek közül, akkor a megfelelő hiperkocka térfogata pozitív.

Biz: Az e_1, e_2, \dots, e_n sorrendnek n orbitja van, és ezekből a páros méretűek száma 0. □

Megj: Hagyományosan egy harmadik módszert használunk az előjel meghatározására.

◀ ▶ ↺ ↻

2. A permutáció **inverziószáma**

Def: Az $f : A \rightarrow B$ függvény **bijekció**, ha minden B -beli elem pontosan egy A -beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ bijekciót **n elem permutációjának** nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n .

Megf: Az e_1, e_2, \dots, e_n vektorok tetsz. sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű σ permutáció, amelyre $\sigma(i) = j$, ha e_i j -dik a sorban.

Példa: Az $(e_3, e_8, e_5, e_7, e_1, e_6, e_2, e_4)$ sorrendhez az alábbi σ

permutáció tartozik:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(i)$	5	7	1	8	3	6	4	2

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az $\{i, j\}$ pár **inverzióban áll**, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$ -val jelölt **inverziószáma** a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.

(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Biz: (1) A két felcserélt vektor viszonya megfordul, minden más pár ugyanolyan marad, mint korábban volt.

Biz: (2) Ha a felcserélt vektorok között k másik vektor van, akkor ugyanez a csere megkapható $2k + 1$ szomszédos vektorpár cseréjének egymásutánjaként. Az inverziószám így $(2k + 1)$ -szer változik 1-gyel, ezért összességében páratlannal változik. \square

Köv: Az egységvektorok egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma pontosan akkor páros, ha ez a sorrend páros sok vektorcserével kapható az (e_1, \dots, e_n) sorrendből.

Köv: A σ permutációhoz tartozó hiperkocka térfogatának előjele $(-1)^{I(\sigma)}$. Hogyan határozható meg gyorsan ez az előjel?

3. Bástyaelhelyezés

Az (e_1, \dots, e_n) tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek **bástyaelhelyezést** alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.

Mit jelent, hogy az $\{i, j\}$ pár σ szerint inverzióban áll?

Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.

Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.

Köv: Az (e_1, \dots, e_n) egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számával.

Példa:

Navigation icons: back, forward, search, etc.

4. Inverzióban álló bástyapárok

5. Determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix **determinánsa** $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i -dik sornak j -dik eleme. A $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros. (2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másféleképpen nincs. (3) 2×2 -es és 3×3 -as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelogramma előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **transzponáltja** az az $A^T \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix, aminek az i -dik sor j -dik eleme az A mátrix j -dik sorának i -dik eleme $\forall i, j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^T|$.

Biz: Az A mátrix bármely bástya-elhelyezését meghatározó elemek A^T -ban is bástya-elhelyezést alkotnak. Két bástya pontosan akkor alkot ÉK-DNy párt A -ban, ha A^T -ban is ÉK-DNy-i párt alkotnak. Ezért $\det(A)$ -ban ugyanazokat a kifejtési tagokat (ugyazzal az előjellel) kell összeadni, mint $\det(A^T)$ -ban.

Köv: Ha egy tulajdonság általában igaz a determináns oszlopaira, akkor a megfelelő tulajdonság a determináns soraira is teljesül.

Megj: Egy $n \times n$ determináns kiszámításához $n!$ kifejtési tagot kell összegezni. Ez rengeteg munka. Gyorsabb módszer adódik, ha megfigyeljük, hogy az ESÁ-ok hogyan változtatják a determinánst.

Allítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

Biz: A bal oldali determináns minden kifejtési tagjának az i -dik oszlopbeli tényezője \underline{u}_i és \underline{v} egy koordinátájának összege. Ha felbontjuk a zárójelet, a kifejtési tagból két szorzat lesz. Ezek a szorzatok pedig épp a jobb oldali determinánsok kifejtési tagjai.

Allítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

$$(5) \text{ Ha } A \text{-nak van két egyforma oszlopa, akkor } |A| = 0.$$

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ -val szorozva a determináns λ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j -dik sort kicserélve az i -dik és j -dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix **főátlója** az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik.

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 42 = 42$$

Megj: A determináns kiszámításához képezhetünk LA mátrixot. Ehhez nem kötelező Gauss-eliminációt használni, bármilyen ESÁ-sal dolgozhatunk a cél érdekében. Nem muszáj v1-et sem gyártani: elég a felső háromszögmátrixig (vagy csupa0 sorig) eljutni. Sőt: mindent, amit a sorokkal megtehetünk, azt hasonló módon az oszlopokkal is elvégezhetjük. Ez néha célszerűbb lehet, mint kizárólag csak ESÁ-ok alkalmazása.

6. Felső háromszögmátrix determinánása

Def: Az A négyzetes mátrix **főátlója** az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A **felső háromszögmátrix**.

?	?	?	?	?	?
0	?	?	?	?	?
0	0	?	?	?	?
0	0	0	?	?	?
0	0	0	0	?	?
0	0	0	0	0	?

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.

Biz: Ha egy sor v_1 -e a főátlótól balra van, akkor a felette levő soré is. Az első soré nem ilyen, ezért minden v_1 a főátlón vagy attól jobbra áll, így a főátló alatt minden elem 0.