Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

A számítástudomány alapjai

Összefoglaló jegyzet

Készítette: Illyés Dávid

Ez a jegyzet nagyon hasonlóan van struktúrálva az előadás jegyzetekhez és fő célja, hogy olyan módon adja át a "A Programozás Alapjai 1" nevű tárgy anyagát, hogy az teljesen kezdők számára is könnyen megérthető és megtanulható legyen.

September 15, 2023

Tartalomjegyzék

1 A gráfelmélet alapjai

1.1 Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf

Példa: ha $V \neq 0$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$, ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak), E pedig G éleinek halmaza.

Példa: $G = (\{a, b, c, d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf diagramja a G egy olyan lerajzolása, amiben V-nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u-t és v-t összekötő görbe felel meg.

Terminológia & konvenciók: Gráf alatt rendszerint egyszerű, irányítatlan gráfot értünk. Ha G egy gráf, akkor $V(G)$ a G csúcshalmazát, $E(G)$ pedig G élhalmazát jelöli, azaz $G = (V(G), E(G))$. Az $e = \{u, v\}$ élt röviden uv-vel jelöljük.

Ekkor e az u és v csúcsokat köti össze. Továbbá u és v az e végpontjai, amelyek az e élre illeszkednek, és e mentén szomszédosak.

1.2 Multigráfok és irányított gráfok

Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

Def: Az n-pontú út, n-pontú kör, ill. n-pontú teljes gráf jele rendre P_n, C_n, ill. K_n. (P_1, P_2, P_3 elfajulók.) **Megf:** $K_1 = P_1, P_2 = C_2, C_3 = K_3$

Def: $c \in V(G)$ esetén a v-re illeszkedő élek száma a v fokszáma. Jelölése $d_g(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít. (Irányított gráf esetén $\delta(v)$ ill. $\rho(v)$ a v ki- ill. befokát jelöli.)

Def: A G gráf maximális ill. minimális fokszáma $\Delta(G)$ ill. $\delta(G)$. G reguláris, ha minden csúcsának foka ugyanannyi: $\Delta(G) = \delta(G), G$ pedig k-reguláris, ha minden csúcsának pontosan k a fokszáma.

Megf: Minden kör 2-reguláris, K_n pedig $(n-1)$-reguláris.

1.3 Handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(V) = |E|$, azaz a csúcsok ki- és befokainak összege is az élszámot adja meg.

Biz: Az egyes csúcsokból kilépő éleket megszámolva G minden irányított élét pontosan egyszer számoljuk meg. Ezért a kifokok összege az élszám. A belépő éleket leszámlálva hasonló igaz, ezért a befokok összege is az élszám.

A KFL bizonyítása: Készítsükel a G' digráfot úgy, hogy G minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítjük. Ekkor

$$\sum_{v \in V} d_G(V) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)|$$

Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna az általánosított kéfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. 0-elű (üres)gráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 1-gyel növeli az élszámot is és a ki/befokok összegét is.

Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna a kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-vel növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszámösszeget is.

1.4 Komplementer és izomorfia

Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V,(G), \binom{v}{2} \setminus E(G))$.

Megj: G és $\overline{G}$ csúcsai megegyeznek, és két csúcs pontosan akkor szomszédos $\overline{G}$-ben, ha nem szomszédosak G-ben.

Példa:

1.5 Gráfoperációk

1.6 Háromféle elérhetőség, összefüggőség

1.7 Gráfok összefüggősége a gyakorlatban

1.8 Fák és erdők

1.9 Fák további tulajdonságai

1.10 Feszítőfák

2 Minimális költségű feszítőfák

2.1 Alapkörrendszer, alap vágás renszer

2.2 Minimális költségű feszítőfa

2.3 Minimális költségű feszítőfák struktúrája

2.4 Az ötödik elem

2.5 Mkkffák egy villamosmérnöki alkalmazása

3 Gráfbejárások és legrövidebb utak

4 Legrövidebb utak, DFS, PERT

5 Euler-séták és Hamilton-körök

6 Síkgráfok

7 Lineáris egyenletrendszerek

8 Az $\mathbb{R}^n$ tér alaptulajdonságai

9 Altér bázisa és dimenziója

10 Négyzetes mátrix determinánsa

11 Mátrixműveletek és lineáris leképezések

12 Mátrix rangja és inverze

13 Mátrixegyenletek