11. **Lineáris egyenletrendszer, kibővített együtthatómátrix, elemi sorekvivalens átalakítás** és kapcsolata a megoldásokkal. **LA és RLA mátrix, vezéregyes, megoldás leolvasása RLA mátrix esetén.** Tilos sor, kötött változó, szabad paraméter, ezek jelentése a megoldás/megoldhatóság szempontjából. **Gauss-elimináció**, összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az egyenletek és ismeretlenek száma között.

1. Lineáris egyenletrendszer

Def: Lineáris egyenlet: Ismeretlenek konstansszorosainak összege konstans. Lineáris egyenletrendszer: Véges sok lineáris egyenlet. Megoldás: Olyan értékadás, ami minden egyenletet igazzá tesz.

2. Kibővített együttható mátrix

Def: Lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixa: a sorok az egyenleteknek, az oszlopok az ismeretleneknek ill. az egyenletek jobb oldalainak felelnek meg, az egyes mezőkben pedig a megfelelő együttható ill. jobb oldali konstans áll.

3. Elemi sorekvivalens átalakítás

Megoldás módszere: Ekvivalens átalakításokat végzünk. Ezek során a megoldások halmaza nem változik. Konkrétan: egyenleteket felcserélünk, egyenletet nemnullával végigszorzunk ill. az i-dik egyenletet kicseréljük az i-dik és j-dik egyenletek összegére. Erről szól a következő definíció.

Def: A kibővített egyhómx elemi sorekvivalens átalakítása (ESÁ): (1) sorcsere, (2) sor nemnulla konstanssal végigszorzása, (3) az i-dik sor helyettesítése az i-dik és j-dik sorok (koordinátánkénti) összegével (az i-dik sor helyettesítése az i-dik sor és a j-dik sor konstansszorosának összegével, csupa0 sor hozzáadása/elhagyása).

4. kapcsolattal

Biz: Minden ESÁ előtti megoldás megoldás marad az ESÁ után is. Minden ESÁ fordítottja megkapható ESÁ-ok egymásutánjaként is. Ezért minden ESÁ utáni megoldás megoldja az ESÁ előtti előtti rendszert is. □

Megj: A kibővített együtthatómátrix a lineáris egyenletrendszer felírásának egy tömör módja: elkerüljük vele a műveleti- és egyenlőségjelekkel piszmogást, mégis teljesen áttekinthető módon tartalmaz minden lényeges információt.

5. LA és RLA mátrix

Def: Az M mátrix lépcsős alakú (LA), ha
(1) minden sor első nemnulla eleme 1-es (ú.n. vezér1-es, avagy v1)
(2) minden v1 feletti sorban van ettől a v1-től balra eső másik v1.
Az M mátrix redukált lépcsős alakú (RLA), ha
(3) M LA és (2) M-ben minden v1 felett csak nullák állnak.

Példa: LA mátrix RLA mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ill. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Vezéregyes

5LA és RLA mátrix

7. **Megoldás leolvasása RLA mátrix esetén**

Példa: RLA kibővített egyhómx:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \end{array} \mapsto \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= 1 \\ x_3 + 5x_4 &= 7 \end{aligned} \mapsto \begin{aligned} &x_2, x_4 \in \mathbb{R} \\ x_1 &= 1 - 3x_2 + 2x_4 \\ x_3 &= 7 - 5x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \mapsto \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= 1 \\ x_3 + 5x_4 &= 7 \\ 0 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \mapsto \lightning$$

8. **Tilos sor**

Def: Kib. egyhómx tilos sora: $0 \ \ldots \ 0 \mid x$ alakú sor, ha $x \neq 0$.

9. **Kötött változó**

Def: A RLA kib. egyhómx v1-hez tartozó változója kötött, a többi változó (amihez nem tartozik v1) szabad (vagy szabad paraméter).
Megf: Ha a kib. egyhómx RLA, akkor (1) minden sor vagy a v1-hez tartozó változó értékadása, vagy tilos sor, vagy csupa0 sor.

10. **Szabad paraméter**

Def: A RLA kib. egyhómx v1-hez tartozó változója kötött, a többi változó (amihez nem tartozik v1) szabad (vagy szabad paraméter).
Megf: Ha a kib. egyhómx RLA, akkor (1) minden sor vagy a v1-hez tartozó változó értékadása, vagy tilos sor, vagy csupa0 sor.

11. jelentése

Megf: Ha a kib. egyhómx RLA, akkor (1) minden sor vagy a v1-hez tartozó változó értékadása, vagy tilos sor, vagy csupa0 sor.
(2) Ha van tilos sor, akkor nincs megoldás.
(3) Ha nincs tilos sor, a szabad paraméterek tetsz. értékadásához egyértelmű megoldás tartozik.
Megf: A lin. egyenletrsz. megoldása tekinthető úgy, hogy a lin. egyenletrsz. egy RLA kibővített egyhómx-szal van megadva.

Cél: Olyan eljárás, ami ESÁ-okkal tetsz. mátrixot RLA-vá alakít.

---

12. **Gauss elimináció**

Gauss-elimináció: Input: $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix.
Output: Egy M-ből ESÁ-okkal kapható $M' \in \mathbb{R}^{n \times k}$ LA mátrix.
Működés: Az algoritmus fázisokból áll. Az i-dik fázisban keresünk egy nemulla elemet az $(i-1)$-dik sor alatt a lehető legkisebb sorszámú oszlopban. Ha nincs ilyen elem, az algoritmus véget ér.
Sorcserével ezt a nemnulla elemet az i-dik sorba visszük.
Az i-dik sor konstanssal szorzásával ezt az elemet v1-sé alakítjuk.
Az i-dik sor alatti sorokhoz az i-dik sor konstansszorosát hozzáadva kinullázzuk a kapott v1 alatti elemeket.

13. összefüggés

Megj: (1) A Gauss-elimináció outputja LA. Az RLA-hoz további lépésekre van szükség: minden v1 felett kinullázhatók az elemek, ha a v1 sorának konstansszorosait a v1 feletti sorokhoz adjuk.
(2) Ha csupán LA (vagy RLA) a cél, eltérhetünk a Gauss-eliminációtól, feltéve, hogy ESÁ-okkal dolgozunk.
(3) A Gauss-elimináció megvalósítható rekurzív algoritmusként is.
A GE(M) (az M mátrixot lépcsős alakra hozó eljárás):
$\boxed{1.}$ Ha M első oszlopa csupa0, akkor M' az első oszlop törlésével keletkező mátrix. Output: GE(M') elé írunk egy csupa0 oszlopot.
$\boxed{2.}$ Ha M első oszlopa tartalmaz nemnulla elemet, sorcserével és az első sor konstanssal szorzásával az első sor első elemét v1-sé tesszük, majd a v1 alatti elemeket ESÁ-okkal kinullázzuk. Legyen M' az első sor és első oszlop törlésével keletkező mátrix. Output: GE(M') elé írunk egy csupa0 oszlopot és az így kapott mátrix fölé a korábban törölt első sort.

1. Lineáris egyenletrendszer kib. egyhómxként is megadható.
2. ESÁ nem változtat a megoldásokon
3. ESÁ-okkal elérhető a RLA
4. A RLA-ból azonnal adódik a megoldás
   - Ha az utolsó oszlopban van v1, akkor nincs megoldás
   - Ha az utolsó kivételével minden oszlopban van v1, akkor egyetlen megoldás van
   - Ha az utolsón kívül más oszlopban sincs v1, akkor van szabad paraméter, így végtelen sok különböző megoldás van.

Köv: Ha a lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor legalább annyi egyenlet van, mint ahány ismeretlen.
Biz: Az RLA-ra hozás után nincs szabad paraméter, tehát minden változóhoz tartozik v1. Ezért a kibővített együtthatómátrixnak legalább annyi sora van, mint a változók száma. □
Megj: A fenti következmény fordított irányban nem igaz, és lényegében nincs más összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az ismeretlenek és egyenletek száma között.