

0.1 Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf

Példa: Ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$, ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$. V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak), E pedig G éleinek halmaza.

Példa: $G = (\{a, b, c, d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf diagramja a G egy olyan lerajzolása, amiben V -nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u -t és v -t összekötő görbe felel meg.

Terminológia & konvenciók: Gráf alatt rendszerint egyszerű, irányítatlan gráfot értünk. Ha G egy gráf, akkor $V(G)$ a G csúcshalmazát, $E(G)$ pedig G élhalmazát jelöli, azaz $G = (V(G), E(G))$. Az $e = \{u, v\}$ élt röviden uv -vel jelöljük.

Ekkor e az u és v csúcsokat köti össze. Továbbá u és v az e végpontjai, amelyek az e élre illeszkednek, és e mentén szomszédosak.

0.2 Multigráfok és irányított gráfok

Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

Def: Az n -pontú út, n -pontú kör, ill. n -pontú teljes gráf jele rendre P_n , C_n , ill. K_n . (P_1, P_2, P_3 elfajulók.) **Megf:** $K_1 = P_1, P_2 = C_2, C_3 = K_3$

Def: $c \in V(G)$ esetén a v -re illeszkedő élek száma a v fokszáma. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít. (Irányított gráf esetén $\delta(v)$ ill. $\rho(v)$ a v ki- ill. befokát jelöli.)

Def: A G gráf maximális ill. minimális fokszáma $\Delta(G)$ ill. $\delta(G)$. G reguláris, ha minden csúcsának foka ugyanannyi: $\Delta(G) = \delta(G)$, G pedig k -reguláris, ha minden csúcsának pontosan k a fokszáma.

Megf: Minden kör 2-reguláris, K_n pedig $(n - 1)$ -reguláris.

0.3 Handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$, azaz a csúcsok ki- és befokainak összege is az élszámot adja meg.

Biz: Az egyes csúcsokból kilépő éleket megszámlálva G minden irányított élét pontosan egyszer számoljuk meg. Ezért a kifokok összege az élszám. A belépő éleket leszámolva hasonló igaz, ezért a befokok összege is az élszám. \square

A KFL bizonyítása: Készítsük a G' digráfot úgy, hogy G minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítsük. Ekkor

$$\sum_{v \in V} d_G(V) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)| \quad \square$$

Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna az általánosított kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G -be az éleket. 0-elű (üres)gráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 1-gyel növeli az élszámot is és a ki/befokok összegét is.

Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna a kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G -be az éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-vel növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszámösszeget is.

0.4 Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V, (G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megj: G és \overline{G} csúcsai megegyeznek, és két csúcspontosan akkor szomszédos \overline{G} -ben, ha nem szomszédosak G -ben.

Példa:

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és a $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsra.

Biz: A K_n teljes frág minden éle a G és \overline{G} gráfok közül pontosan az egyikhez tartozik. Ezért $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v)$ megegyezik a v csúcs K_n -beli fokszámával, ami $n - 1$. \square

Def: A G és G' gráfok akkor **izomorfak**, ha mindeket gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n -ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G -ben, mint az u -nak és v -nek megfelelő sorszámú csúcsok között G' -ben. Jelölése: $G \cong G'$.

Példa:

Megf: Ha $G \cong G'$, akkor G és G' lényegében ugyanúgy néznek ki. Így például minden fokszám ugyanannyiszor lép fel G -ben mint G' -ben, ugyan annyi C_4 kör található G -ben, mint G' -ben, stb.

0.5 Gráfoperációk

Def: Éltörlés, csúcs törlés, élhozzáadás.

Def: Feszítő részgráf: éltörlésekkel kapható gráf.

Feszített részgráf: csúcs törlésekkel kapható gráf.

Részgráf: él- és csúcs törlésekkel kapható gráf.

Példa: H_1, H_2, H_3 : a G feszítő, feszített, jelzőnélküli részgráfjai.

Megf: H a G részgráfja $\iff V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$.

H a G feszítő részgráfja $\iff V(H) = V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$.

H a G feszített részgráfja $\iff V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H) = E(G) \cap E(H)$.

Megj: A gráf definíciója megengedi, hogy a gráf egyik részéből egyáltalán ne vezessen el a gráf maradék részébe, azaz a gráf egyik csúcsából ne lehessen eleken keresztül eljutni a gráf egy másik csúcsába. Ez történik pl. az üresgráf (alias \overline{K}_n) esetén.

0.6 Háromféle elérhetőség, összefüggőség

Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$. (Tkp egyik csúcsból eljutunk egy másik csúcsba mindig élek mentén haladva.)

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincsen ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Terminológia: Ha a kezdőpont u , a végpont v , akkor **uv -élsorozatról**, **uv -sétáról**, ill. **uv -útról** beszélünk. Ha hangsúlyozni szeretnénk, hogy $u = v$, de a kezdő (és vég)pontot nem akarjuk megnevezni, akkor **zárt élsorozatról**, **körsétáról** ill. **körrel** beszélünk.

Megf: G -ben $\exists uv$ -út $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -séta $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -élsorozat \square

Állítás: G -ben $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út \square

Def: G irányítatlan gráf u -ból v **elérhető** ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

Def: A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

Megj: (1) Az összefüggőség szokásos definíciója nem a \sim reláció segítségével történik, hanem valahogy így: a G irányítatlan gráfot akkor mondjuk összefüggőnek, ha G bármely két csúcsa között vezet út G -ben.

Megj: (2) Az előző definíciót irányított fráfokra is kiterjeszthető: a G irányított gráfot akkor mondjuk **erősen összefüggőnek**, ha G bármely $u, v \in V(G)$ esetén van **irányított** uv -út G -ben.

Megj: (3) Irányított gráf másfajta összefüggősége is értelmezhető: a G irányított gráfot akkor mondjuk **gyengén összefüggőnek**, ha a G -nek megfelelő irányítatlan gráf összefüggő.

Köv: Ha G irányítatlan gráf, akkor \sim ekvivalenciareláció:

(1) $\forall u \in V(G) : u \sim u$, (2) $\forall u, v \in V(G) : u \sim v \Rightarrow v \sim u$, és (3) $\forall u, v, w \in V(G) : u \sim v \sim w \Rightarrow u \sim w$. \square

Def: A G gráf **(összefüggő) komponense** a \sim ekvivalenciaosztálya. Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

0.7 Gráfok összefüggősége a gyakorlatban

Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in$ esetén $v \sim v'$.

(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. \square

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. \square

Élhozzáadási lemma (ÉHL): Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.

(1) G és G' komponensei megegyeznek, de G' -nek több köre van, mint G -nek.

(2) G és G' körei megegyeznek, de G' -nek egyel kevesebb komponense van, mint G -nek.

0.8 Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük. Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

Megf: G erdő $\iff G$ minden komponense fa.

Példa:

Megf: (1) P_n fa minden $n \geq 1$ egész esetén. (2) Fához egy új csúcsot egy éllel bekötve fát kapunk:

Lemma: G n -csúcsú, k -komponensű erdő $\Rightarrow |E(G)| = n - k$.

Biz: Építsük fel G -t a $\overline{K_n}$ üresgráfból az élek egyenkénti behúzásával. G körmentes, ezért az ÉHL miatt minden lé zöld: behúzásakor 1-gyel csökken a komponensek száma. A $\overline{K_n}$ üresgráfnak n komponense van, G -nek pedig k . Ezért pontosan $n - k$ zöld élt kellett behúzni G felépítéséhez. \square

Köv: Ha F egy n -csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.

Biz: F egy 1-komponensű erdő, így az előző Lemma alkalmazható $k = 1$ helyettesítéssel.

Állítás: Tetsz. n -csúcsú G gráf esetén az alábbi három tulajdonság közül bármely kettőből következik a harmadik. (a) G körmentes. (b) G összefüggő. (c) $|E(G)| = n - 1$.

Biz: (a) + (b) \Rightarrow (c) : \checkmark

(a) + (c) \Rightarrow (b): Építsük fel G -t élek egyenkénti behúzásával. $n - 1$ él egyikének behúzása se hoz létre kört, ezért az ÉHL miatt minden él zöld, és 1-gyel csökkenti a komponensszámot. Végül $n - (n - 1) = 1$ komponens marad, tehát G összefüggő.

(b) + (c) \Rightarrow (a): Építsük fel G -t élek egyenkénti behúzásával. Mivel a komponensek száma végül 1 lesz, ezért $n - 1$ zöld élt kellett behúzni. (c) miatt G összes éle zöld, piros éle nincs. Az ÉHL miatt G körmentes. \square

0.9 Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor

- (1) $(F - e)$ -nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$ -re.
- (2) F -nek pontosan egy uv -útja van $\forall u, v \in V(F)$ -re.
- (3) $(F + e)$ -nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$ -re.
- (4) Ha $n \geq 2$, akkor F -nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa **levél**, ha $d(v) = 1$.

Biz: (1): $F - e$ erdő, hisz körmentes. $F = (F - e) + e$, és mivel F is körmentes, e zöld az ÉHL miatt. Ezért F -nek 1-gyel kevesebb komponense van, mint $(F - e)$ -nek. Mivel F -nek 1 komponense van, $(F - e)$ -nek 2. \square

Biz: (2): F összefüggő, ezért van (legalább egy) uv -útja, mondjuk P . Ezen P út bármely e élét elhagyva, a kapott $F - e$ grágnak (1) miatt két komponense van, melyek közül az egyik u -t, a másik v -t tartalmazza. Ezért $(F - e)$ -ben nincs uv -út. Azt kaptuk, hogy P minden éle benne van F minden uv -útjában, ezért F -ben P -n kívül nincs más uv -út. \square

Biz: (3): Tfh $e = uv$. Minden F körmentes, ezért $F + e$ minden köre e -ből és F egy uv -útjából tevődik össze. Ezért $F + e$ köreinek száma megegyezik az F fa uv -útjainak számával, ami (2) miatt pontosan 1. \square

Biz: (4): (Algebrai út) A KFL miatt $\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 2n = 2(n - 1) - 2n = -2$. F minden v csúcsára $d(v) \geq 1$ teljesül, ezért $d(v) - 2 \geq -1$. A fenti összeg csak úgy lehet -2 , ha F -nek legalább 2 levele van. \square

Biz: (4): (Kombinatorikus út) Induljunk el F egy tetszőleges v csúcsából egy sétán, és haladjunk, amíg tununk. Ha sosem akadunk el, akkor előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, és kört találunk. Ezért elakadunk, és az csakis egy v -től különböző u levélben történhet. Ha $d(v) = 1$, akkor v egy u -tól különböző levél. Ha $d(v) \geq 2$, akkor sétát indulhatjuk v -ből egy másik él mentén. Ekkor egy u -tól különböző levélben akadunk el. \square

0.10 Feszítőfák

Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével! Legyen G' a G gráf piros élei törlésével keletkező feszítő részgráf! G' biztosan körmentes lesz, hiszen a zöld élek sosem alkottak kört a korábbi élekkel. G' minden K' komponense részhalmaza G egy K komponensének. Ha $K' \neq K$, akkor G -nek van olyan éle, ami kilép K' -ből. Ezen élek mind pirosak K' definíciója miatt. Legyen e ezek közül az elsőnek kiszínezett. Az e él nem tudott kört alkotni a korábban kiszínezettekkel, így nem lehet piros: ellentmondás. Ezek szerint G egy G' komponensei megegyeznek.

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. \square

Def: F a G gráf **feszítőfája** (**ffája**), ha F egy G -ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: $(G\text{-nek van feszítőfája}) \iff (G \text{ összefüggő})$

Biz: \Rightarrow : Legyen F a G feszítőfája. F összefüggő, és $V(F) = V(G)$, tehát G bármely két csúcsa között vezet F -beli út.

\Leftarrow : Építsük fel G -t az élek egyenkénti behúzásával és kiszínezésével. Láttuk, hogy a zöld élek egy F erdőt alkotnak, aminek egyetlen komponense van, hiszen G is egykomponensű. Ezek szerint F olyan fa, ami G -ből éltörlésekkel kapható. \square

Megj: Ha egy nem feltétlenül összefüggő G gráf éleit a fenti módon kiszínezzük, akkor a zöld élek G minden komponensének egy F feszítőfáját alkotják. Nem összefüggő G esetén a zöld élek alkotta feszítő részgráf neve a G **feszítő erdeje**.