0.1 Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 1

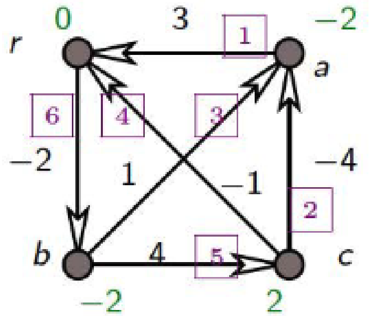
Könnyű olyan példát találni, ahol a Dijkstra-algoritmus konzervatív hosszüggvény esetén hibás eredményt ad. Azonban konzervatív hosszüffvény esetén is igaz, hogy

- (r,l)-fb élmenti javítása (r,l)-fb-t eredményez, ill.
- ha egy (r,l)-fb-ben nem végezhető erdemi élmenti javítás, akkor pontos.

konzervatív hosszfüggvény esetén is hasonló startégiát követünk: Élmenti javításokat végzünk a triviális (r,l)-fb-en, míg van érdemi javítás.

Ford-algoritmus: Input: $G=(V,E), l: E\to\mathbb{R}, r\in V$. Output: $dist_l(r,l)\forall v\in V$ Működés: f_0 a triviális (r,l)-fb, $|V|=n, E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$. Az i-dik fázis $i=1,2,\dots,n-1$-re az alábbi. f_i-t f_{i-1}-ből kapjuk, az $e_1,\dots,e_m$ élmenti javítások után. OUTPUT: $dist_l(r,v)=f_{n-1}(v)\forall v\in V$.

3. fázis



	r	a	b	c
f_0	0	∞	∞	∞
f_1	0	∞	-2	∞
f_2	0	-1	-2	2
f_3	0	-2	-2	2

Állítás: Ha l konzervatív, akkor $dist_l(v)\forall v\in V$.

Megf: Ha $f_i=f_{i-1}$, akkor a Ford-algoritmust az i-dik fázis után be lehet fejezni, hisz nincs érdemi élmenti javítás, így $f_{n-1}=f_i$.

Megj: Az $f_{n-1}(v)$-t beállító élek legrövidebb utak fáját alkozják.

"Lépésszámanalízis": Ha a $|V(G)|=n$ és $|E(G)|=m$, akkor minden fázisban $\le m$ élmenti javítás, ami $konst\cdot m$ lépés. Ez összesen $\le konst\cdot(n-1)\cdot m\le konst\cdot n^3$ lépés, az algoritmus hatékony.

0.2 Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 2

Tegyük fel, hogy $G=(V,E), l: E\to\mathbb{R}$ és $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$. Jelölje $d^{(k)}(i,j)$ a legrövidebb olyan v_iv_j-út hosszát, aminek belső csúcsai csak $v_1,v_2,\dots,v_k$ lehetnek.

Megf: (1) $d^{(n)}(i,j)=dist_l(v_i,v_j), v_iv_j\in E\Rightarrow d^{(0)}(i,j)=l(v_i,v_j)$ (2) $d^{(0)}(i,j)=0$, különben $d^{(0)}(i,j)=\infty$. (3) Ha l konzervatív, akkor tetszőleges i,j ill. $k\le n$ esetén $d^{(k+1)}(i,j)=min\{d^{(k)}(i,j), d^{(k)}(i,k+1)+d^{(k)}(k+1,j)\}$ teljesül.

I. eset: $v_{k+1}\notin P$. Ekkor $d^{(k+1)}(i,j)=d^{(k)}(i,j)$, és $d^{(k+1)}(i,j)\le d^{(k)}(i,k+1)+d^{(k)}(i,k+1)+d^{(k)}(k+1,j)$.

II. eset: $v_{k+1}\in P$. Ekkor $d^{(k+1)}(i,j)\le d^{(k)}(i,j)$, és $d^{(k+1)}(i,j)=d^{(k)}(i,k+1)+d^{(k)}(k+1,j)$.

Mindkét esetben helyes a képlet. $\square$

Floys-algoritmus: Input: $G=(V,E)$, konzervatív $l: E\to\mathbb{R}$. Output: $dist_l(u,v)\forall u,v\in V$ Működés: $d^{(0)}$ felírása (2) alapján. Az i-dik fázis: $d^{(i-1)}$-ből meghatározzuk $d^{(i)}$-t (3) alapján. OUTPUT: $d^{(n)}(u,v)=dist_l(u,v)\ \forall u,v\in V$.

"Lépésszámanalízis": A $d^{(0)}$ felírása $konst\cdot n^2$ lépés. Minden fázis $konst'\cdot n^2$. Mivel összesen n fázis van, a lépésszám legfeljebb $konst"\cdot n^3$ lépés, az algoritmus hatékony.

Ford vs Floyd: Konzervatív hosszfüggvényre működnek helyesen. Mindkét algoritmus talál bizonítékot, ha l nem konzervatív. (!!) A Ford csak egy gyökérből, a Floyd bármely két csúcs között talál legrövidebb utat. (!!) A Ford ritka gráfokra jelentősen olcsóbb, sok él eletén a Floyd nem sokkal drágább.

0.3 Depth First Search (DFS)

"Mélységi bejárás (DFS): A bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az $\boxed{1.}$ esetben.

Mélységi és befejezési számozás: DFS után $m(v)$ ill. $b(v)$ a v csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

Megj: A BFS konkrét megvalósításában szükség van arra, hogy az elért csúcsokat úgy tároljuk, hogy könnyű legyen kiválasztani az elért csúcsok közül a legkorábban elértet. Erre egy célszerű adatstruktúra a *sor* (avagy *FIFO lista*). Ha a BFS megvalósításában ezt az adatstruktúrát *veremre* (más néven *FIFO listára*) cseréljük, akkor a DFS egy megvalósítása adódik.

Megf: Tegyük fel, hogy a G gráf éleit DFS után osztályoztuk.
(1) Ha uv faél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.
(2) Ha uv előreél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.
(3) Ha uv visszaél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) < b(v)$.
(4) Ha uv keresztél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) > b(v)$.
(5) Irányítatlan gráf DFS bejárása után nincs keresztél.
(6) Ha DFS után van visszaél, akkor G tartalmaz irányított kört.
(7) Ha DFS után nincs visszaél, akkor G-ben nincs irányított kör.

0.4 Direct Acyclic Graphs

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf aciklikus (más néven DAG), ha G nem tartalmaz irányított kört.

Példa: DAG-ot úgy kaphatunk, hogy egy G irányítatlan gráf csúcsait csupa különbözőszámmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobba irányítunk.

Ha ugyanis lenne az így megirányított gráfban irányított kör, akkor az élei mentén a számok végig növekednének, ami lehetetlen. Azt fogjuk ihazolni, hogy a fenti példa minden DAG-ot leír.

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcsainak topologikus sorrendje alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba. $(V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, v_i v_j \in E \Rightarrow i < j)$

Tétel: (G irányított gráf DAG) $\Leftrightarrow$ ($V(G)$-nek $\exists$ topologikus sorrendje).

Köv: Irányított gráf aciklikussága DFS-sel gyorsan eldönthető: ha van visszaél, akkor a visszaél DFS-fabeli alapköre G egy irányított köre, így G nem DAG. Ha pedig nincs visszaél, akkor a fordított befejezési sorrend a G egy topologikus sorrendje, G tehát DAG.

Megj: DAG-ban topologikus sorrendet forráskeresések és forrástörlések alkalmazásával is találhatunk.

0.5 Leghosszabb út keresése

Ötlet: Az $l'(uv) = -l(uv)$ élhosszokkal a leghosszabb utak legrövidebbekké válnak. Olyanokat pedig tudunk keresni.

Gond: A módszerünk csak konzervatív élhosszokra működik. Irányítatlan gráfon ez nemnegatív élhosszokat jelent, ezért ez az ötlet itt nem segít. Itányított esetben nem baj a negatív élhossz, feltéve, hogy G DAG. Ekkor Ford, Floyd bármelyike használható.

Jó hír: Van egy még gyorsabb módszer: a dinamikus programozás. Ennek segítségével tetszőleges G DAG minden v csúcsához ki tudjuk számítani a v-be vezető leghosszabb utat. (Sőt! ...)

Leghosszabb út DAG-ban: Input: $G = (V, E) DAG, l : E \to \mathbb{R}. \underline{Output}: max\{l(P) : P v$-be vezető út$\}$ minden $v \in V$ csúcsra. Működés: $\boxed{1} V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ topologikus sorrend meghatározása. $\boxed{2}$ $i = 1, 2, \ldots, n : f(v_i) = max\{max\{f(v_j) + l(v_jv_i) : v_jv_i \in E\}, 0\}$ Output: $f(v)\ \forall v \in V$

Helyesség: Ha a v_i-be veeztő leghosszabb út utolsó előtti csúcsa v_j, akkor $f(v_i) = f(f_j) + l(v_jv_i)$.

Megj: Ha a fenti algoritmusban minden csúcsra megjelöljük az $f(v)$ értéket beállító élt (éleket), akkor a megjelölt élek minden v csúcsba megadnak egy leghosszabb utat. Sőt: minden v-be vezető leghosszabb megkapható így.

0.6 A PERT probléma

Egy $a, b, \ldots$ tevékenységekből álló projektet kell végrehajtanunk.

Precedeniafeltételek: bizonyos (u, v) párok esetén előírás, hogy az u tevékenységet a v előtt kell elvégezni, ezért v az u kezdetét követően $c(uv)$ időkorlát elteltável kezdhető.

Cél: minden v tevékenységhez olyan $k(v) \geq 0$ kezdési időpont meghatározása, ami nem sérti a preferenciafeltételeket, és a projekt végrehajtási ideje (a legnagyobb $k(v)$ érték) minimális.

G **irányított gráf** csúcsai a tevékenységek, élei pedig a precedenciafeltételek, az uv él hossza $c(uv)$.

Megf: (1) Ha G nem DAG, akkor a projekt nem hajtható végre. (2) Ha G DAG, akkor minden v tevékenység legkorábbi kezdási időpontja a v-be vezető leghosszabb út hossza.

Köv: A PERT probléma megoldása nem más, mint a G DAG minden csúcsára az oda vezető leghosszabb út meghatározása.

Terminológia: G leghosszabb útja kritikus út, amivől több is lehet. Kritikus út csúcsai a kritikus tevékenységek.

Megf: Ha egy kritikus tevékenység nem kezdődik el a lehető legkorábbi időpontban, akkor az egész projekt végrehajtása csúszik.