Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 1

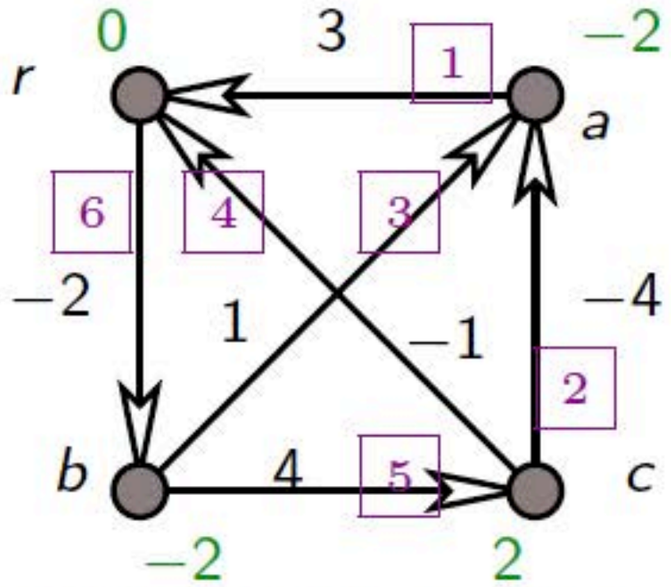
Könnyű olyan példát találni, ahol a Dijkstra-algoritmus konzervatív hosszfüggvény esetén hibás eredményt ad.
Azonban konzervatív hosszfüggvény esetén is igaz, hogy

- (r, ℓ)-fb élmenti javítása (r, ℓ)-fb-t eredményez, ill.
- ha egy (r, ℓ)-fb-en nem végezhető érdemi émj, akkor pontos.

Konzervatív hosszfv esetén is hasonló a stratégiát követünk:
Émj-okat végzünk a triviális (r, ℓ)-fb-en, míg van érdemi javítás.
Ford-algoritmus: Input: $G = (V, E)$, $\ell : E \to \mathbb{R}$,$r \in V$.
Output: $dist_\ell(r, v)$ $\forall v \in V$ Működés: f_0 a triv. (r, ℓ)-fb, $|V| = n$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Az i-dik fázis $i = 1, 2, \ldots, n-1$-re az alábbi.
f_i-t f_{i-1}-ből kapjuk, az $e_1, \ldots, e_m$ élmenti javítások után.
OUTPUT: $dist_\ell(r, v) = f_{n-1}(v)$ $\forall v \in V$.

Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 1

3. fázis



	r	a	b	c	
f_0	0	∞	∞	∞	
f_1	0	∞	-2	∞	
f_2	0	-1	-2	2	
f_3	0	-2	-2	2	

Könnyű olyan példát találni, ahol a Dijkstra-algoritmus konzervatív hosszfüggvény esetén hibás eredményt ad.

Azonban konzervatív hosszfüggvény esetén is igaz, hogy

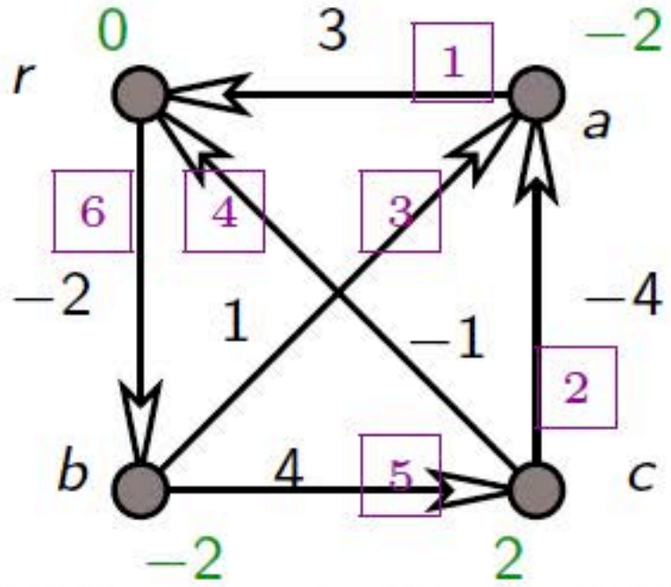
- (r, ℓ)-fb élmenti javítása (r, ℓ)-fb-t eredményez, ill.
- ha egy (r, ℓ)-fb-en nem végezhető érdemi émj, akkor pontos.

Konzervatív hosszfv esetén is hasonló a stratégiát követünk:
Émj-okat végzünk a triviális (r, ℓ)-fb-en, míg van érdemi javítás.

Ford-algoritmus: Input: $G = (V, E)$, $\ell : E \to \mathbb{R}$,$r \in V$.
Output: $dist_\ell(r, v)$ $\forall v \in V$ Működés: f_0 a triv. (r, ℓ)-fb, $|V| = n$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Az i-dik fázis $i = 1, 2, \ldots, n-1$-re az alábbi.
f_i-t f_{i-1}-ből kapjuk, az $e_1, \ldots, e_m$ élmenti javítások után.
OUTPUT: $dist_\ell(r, v) = f_{n-1}(v)$ $\forall v \in V$.

Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 1

3. fázis



	r	a	b	c	
f_0	0	∞	∞	∞	
f_1	0	∞	-2	∞	
f_2	0	-1	-2	2	
f_3	0	-2	-2	2	

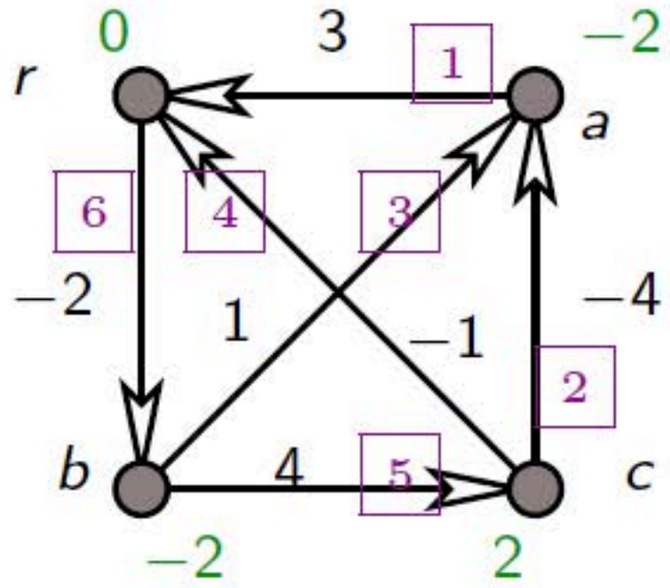
Ford-algoritmus: Input: $G = (V, E)$, $\ell : E \to \mathbb{R}$, $r \in V$.
Output: $dist_\ell(r, v)$ $\forall v \in V$ Működés: f_0 a triv. (r, ℓ)-fb, $|V| = n$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Az i-dik fázis $i = 1, 2, \ldots, n-1$-re az alábbi. f_i-t f_{i-1}-ből kapjuk, az $e_1, \ldots, e_m$ élmenti javítások után.
OUTPUT: $dist_\ell(r, v) = f_{n-1}(v)$ $\forall v \in V$.

Állítás: Ha ℓ konzervatív, akkor $dist_\ell(r, v) = f_{n-1}(v)$ $\forall v \in V$.

Biz: $f_1(v) = dist_\ell(r, v)$ ha $\exists \leq 1$-élű legrövidebb rv-út.
$f_2(v) = dist_\ell(r, v)$ ha $\exists \leq 2$-élű legrövidebb rv-út. ...
$f_{n-1}(v) = dist_\ell(r, v)$ ha $\exists \leq (n-1)$-élű legrövidebb rv-út.
Tehát $f_{n-1}(v) = dist_\ell(r, v)$ $\forall v \in V$. □

Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 1

3. fázis

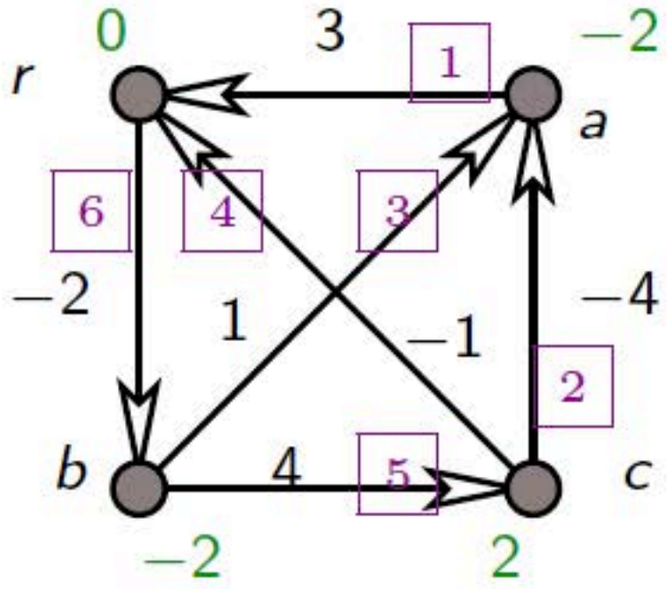


	r	a	b	c	
f_0	0	∞	∞	∞	
f_1	0	∞	-2	∞	
f_2	0	-1	-2	2	
f_3	0	-2	-2	2	

Ford-algoritmus: Input: $G = (V, E)$, $\ell : E \to \mathbb{R}$,$r \in V$.
Output: $dist_\ell(r, v)$ $\forall v \in V$ Működés: f_0 a triv. (r, ℓ)-fb, $|V| = n$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Az i-dik fázis $i = 1, 2, \ldots, n-1$-re az alábbi. f_i-t f_{i-1}-ből kapjuk, az $e_1, \ldots, e_m$ élmenti javítások után.
OUTPUT: $dist_\ell(r, v) = f_{n-1}(v)$ $\forall v \in V$.
Állítás: Ha ℓ konzervatív, akkor $dist_\ell(r, v) = f_{n-1}(v)$ $\forall v \in V$.
Megf: Ha $f_i = f_{i-1}$, akkor a Ford-algoritmust az i-dik fázis után be lehet fejezni, hisz nincs érdemi émj, így $f_{n-1} = f_i$.
Megj: Az $f_{n-1}(v)$-t beállító élek legrövidebb utak fáját alkotják.
Biz: A Dijkstra esethez hasonló. Tetsz. v csúcsból visszafelé követve az végső értékeket beállító éleket $f_{n-1}(v)$ hosszúságú rv-utat találunk. □

Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 1

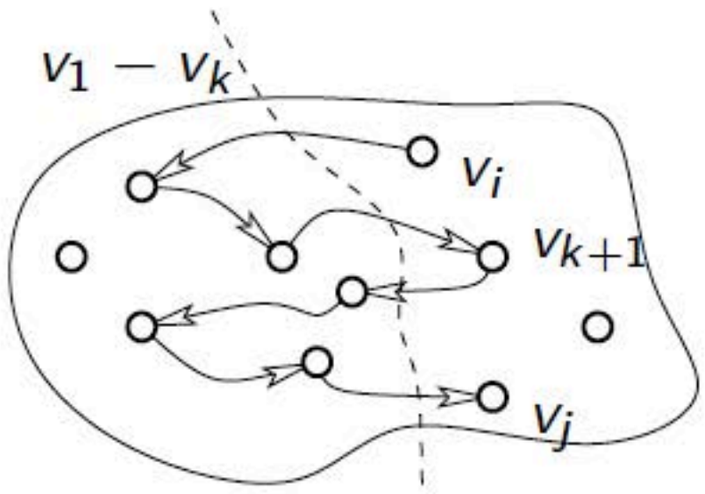
3. fázis



	r	a	b	c	
f_0	0	∞	∞	∞	
f_1	0	∞	-2	∞	
f_2	0	-1	-2	2	
f_3	0	-2	-2	2	

Ford-algoritmus: Input: $G = (V, E)$, $\ell : E \to \mathbb{R}$, $r \in V$.
Output: $dist_\ell(r, v)$ $\forall v \in V$ Működés: f_0 a triv. (r, ℓ)-fb, $|V| = n$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Az i-dik fázis $i = 1, 2, \ldots, n-1$-re az alábbi. f_i-t f_{i-1}-ből kapjuk, az $e_1, \ldots, e_m$ élmenti javítások után.
OUTPUT: $dist_\ell(r, v) = f_{n-1}(v)$ $\forall v \in V$.
Állítás: Ha ℓ konzervatív, akkor $dist_\ell(r, v) = f_{n-1}(v)$ $\forall v \in V$.
Megf: Ha $f_i = f_{i-1}$, akkor a Ford-algoritmust az i-dik fázis után be lehet fejezni, hisz nincs érdemi émj, így $f_{n-1} = f_i$.
Megj: Az $f_{n-1}(v)$-t beállító élek legrövidebb utak fáját alkotják.
„Lépésszámanalízis": Ha a $|V(G)| = n$ és $|E(G)| = m$, akkor minden fázisban $\leq m$ émj, ami $konst \cdot m$ lépés. Ez összesen $\leq konst \cdot (n-1) \cdot m \leq konst \cdot n^3$ lépés, az algoritmus hatékony.

Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 2



Tfh $G = (V, E)$, $\ell : E \to \mathbb{R}$ és $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Jelölje $d^{(k)}(i,j)$ a legrövidebb olyan $v_i v_j$-út hosszát, aminek belső csúcsai csak $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lehetnek.

Megf: (1) $d^{(n)}(i,j) = dist_\ell(v_i, v_j)$. (2) $d^{(0)}(i,i) = 0$,
$v_i v_j \in E \Rightarrow d^{(0)}(i,j) = \ell(v_i v_j)$, különben $d^{(0)}(i,j) = \infty$.
(3) Ha ℓ konzervatív, akkor tetsz. i, j ill. $k \leq n$ esetén
$d^{(k+1)}(i,j) = \min\{d^{(k)}(i,j), d^{(k)}(i,k+1) + d^{(k)}(k+1,j)\}$ teljesül.

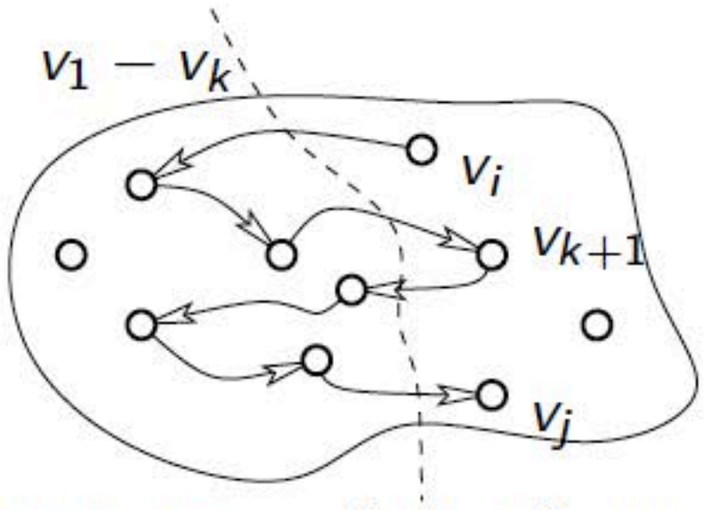
Biz: Tekintsünk egy $d^{(k+1)}(i,j)$-t meghatározó P utat.

I. eset: $v_{k+1} \notin P$. Ekkor $d^{(k+1)}(i,j) = d^{(k)}(i,j)$, és
$d^{(k+1)}(i,j) \leq d^{(k)}(i,k+1) + d^{(k)}(k+1,j)$.

II. eset: $v_{k+1} \in P$. Ekkor $d^{(k+1)}(i,j) \leq d^{(k)}(i,j)$, és
$d^{(k+1)}(i,j) = d^{(k)}(i,k+1) + d^{(k)}(k+1,j)$.

Mindkét esetben helyes a képlet.

Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 2

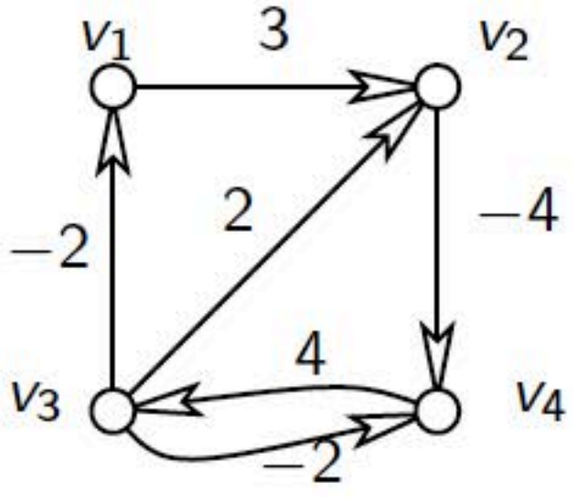


Tfh $G = (V, E)$, $\ell : E \to \mathbb{R}$ és $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Jelölje $d^{(k)}(i,j)$ a legrövidebb olyan $v_i v_j$-út hosszát, aminek belső csúcsai csak $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lehetnek.

Megf: (1) $d^{(n)}(i,j) = dist_\ell(v_i, v_j)$. (2) $d^{(0)}(i,i) = 0$,
$v_i v_j \in E \Rightarrow d^{(0)}(i,j) = \ell(v_i v_j)$, különben $d^{(0)}(i,j) = \infty$.
(3) Ha ℓ konzervatív, akkor tetsz. i, j ill. $k \leq n$ esetén
$d^{(k+1)}(i,j) = \min\{d^{(k)}(i,j), d^{(k)}(i,k+1) + d^{(k)}(k+1,j)\}$ teljesül.

Floyd-algoritmus: Input: $G = (V, E)$, konzervatív $\ell : E \to \mathbb{R}$.
Output: $dist_\ell(u,v)$ $\forall u, v \in V$ Működés: $d^{(0)}$ felírása (2) alapján.
Az i-dik fázis: $d^{(i-1)}$-ből meghatározzuk $d^{(i)}$-t (3) alapján.
OUTPUT: $d^{(n)}(u,v) = dist_\ell(u,v)$ $\forall u, v \in V$.

Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 2



$d^{(0)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	∞	∞
v_2	∞	0	∞	-4
v_3	-2	2	0	-2
v_4	∞	∞	4	0

$d^{(1)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	∞	∞
v_2	∞	0	∞	-4
v_3	-2	1	0	-2
v_4	∞	∞	4	0

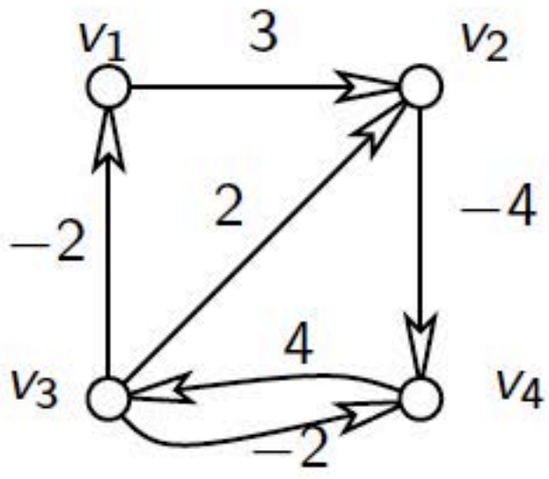
Floyd-algoritmus: Input: $G = (V, E)$, konzervatív $\ell : E \to \mathbb{R}$.

Output: $dist_\ell(u, v)$ $\forall u, v \in V$ Működés: $d^{(0)}$ felírása (2) alapján.

Az i-dik fázis: $d^{(i-1)}$-ből meghatározzuk $d^{(i)}$-t (3) alapján.

OUTPUT: $d^{(n)}(u, v) = dist_\ell(u, v)$ $\forall u, v \in V$.

Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 2

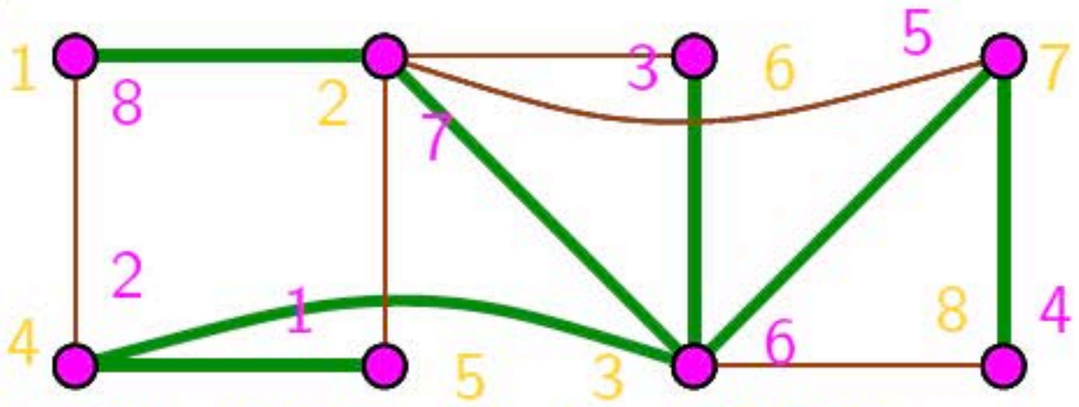


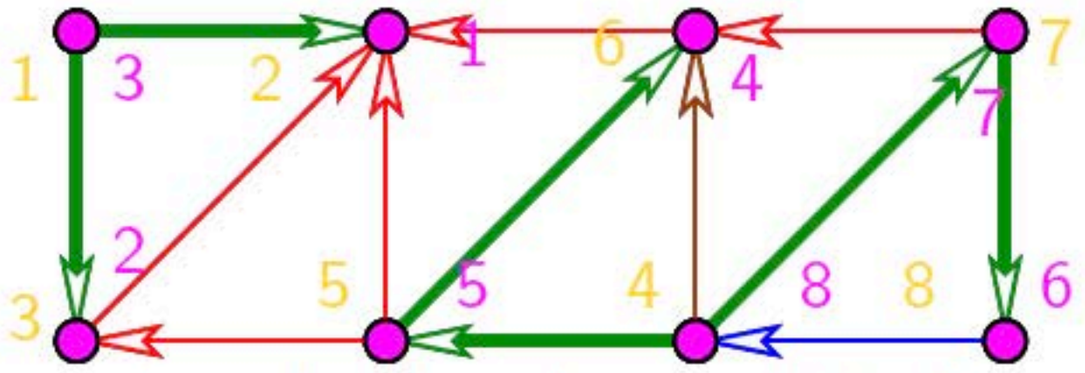
$d^{(3)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	∞	−1
v_2	∞	0	∞	−4
v_3	−2	1	0	−3
v_4	2	5	4	0

$d^{(4)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	3	−1
v_2	−2	0	0	−4
v_3	−2	1	0	−3
v_4	2	5	4	0

Floyd-algoritmus: Input: $G = (V, E)$, konzervatív $\ell : E \to \mathbb{R}$.
Output: $dist_\ell(u, v)$ $\forall u, v \in V$ Működés: $d^{(0)}$ felírása (2) alapján.
Az i-dik fázis: $d^{(i-1)}$-ből meghatározzuk $d^{(i)}$-t (3) alapján.
OUTPUT: $d^{(n)}(u, v) = dist_\ell(u, v)$ $\forall u, v \in V$.
„Lépésszámanalízis”: A $d^{(0)}$ felírása $konst \cdot n^2$ lépés. Minden fázis $konst' \cdot n^2$. Mivel összesen n fázis van, a lépésszám legfeljebb $konst'' \cdot n^3$ lépés, az algoritmus hatékony.
Ford vs Floyd: Konzervatív hosszfüggvényre működnek helyesen.
Mindkét algoritmus talál bizonyítékot, ha ℓ nem konzervatív. (!!)
A Ford csak egy gyökérből, a Floyd bmely két csúcs között talál legrövidebb utat. (!!)
A Ford ritka gráfokra jelentősen olcsóbb, sok él esetén a Floyd nem sokkal drágább.

Depth First Search



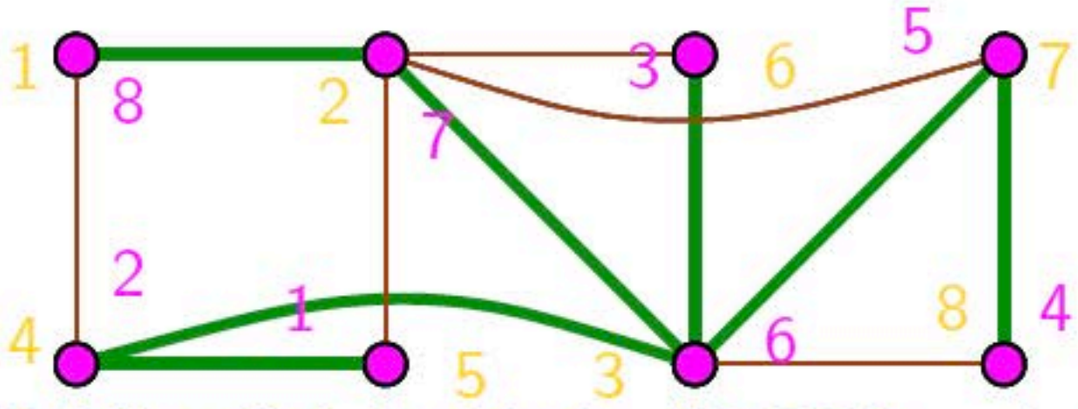


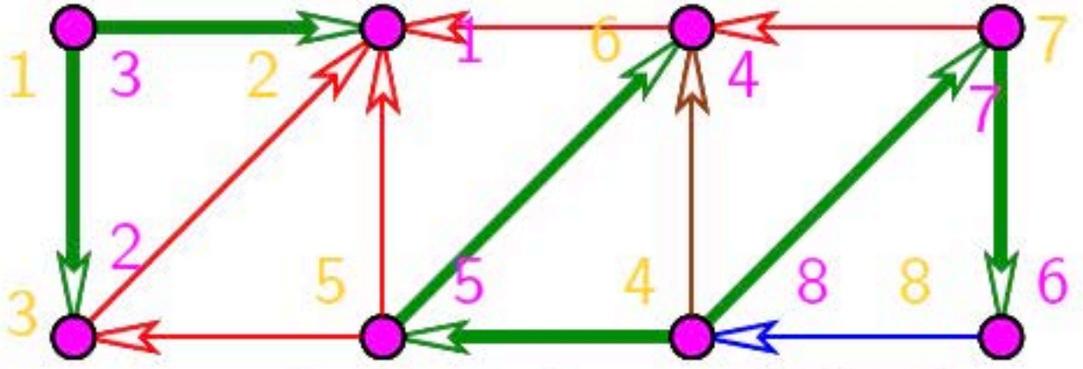
Mélységi bejárás (DFS): a bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az 1. esetben.

Mélységi és befejezési számozás: DFS után $m(v)$ ill. $b(v)$ a v csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

Megj: A BFS konkrét megvalósításában szükség van arra, hogy az elért csúcsokat úgy tároljuk, hogy könnyű legyen kiválasztani az elért csúcsok közül a legkorábban elértet. Erre egy célszerű adatstruktúra a *sor* (avagy *FIFO lista*). Ha a BFS megvalósításában ezt az adatstruktúrát *veremre* (más néven *LIFO listára*) cseréljük, akkor a DFS egy megvalósítása adódik.

Depth First Search





Mélységi bejárás (DFS): a bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az 1. esetben.

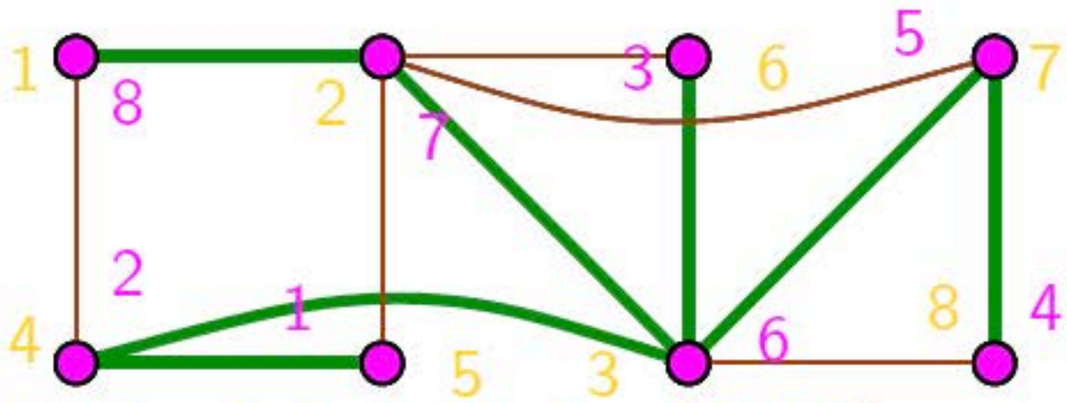
Mélységi és befejezési számozás: DFS után $m(v)$ ill. $b(v)$ a v csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

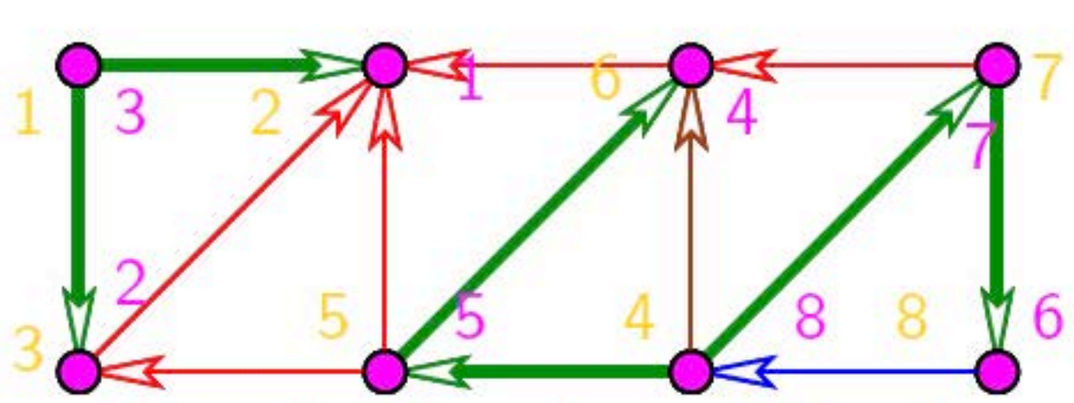
Megf: Tfh a G gráf éleit DFS után osztályoztuk.

(1) Ha uv faél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

Biz: v-t u-ból értük el, ezért $m(u) < m(v)$. A v elérésekor u és v elért állapotúak. A DFS szerint v-t u előtt fejezzük be. □

Depth First Search





Mélységi bejárás (DFS): a bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az 1. esetben.

Mélységi és befejezési számozás: DFS után $m(v)$ ill. $b(v)$ a v csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

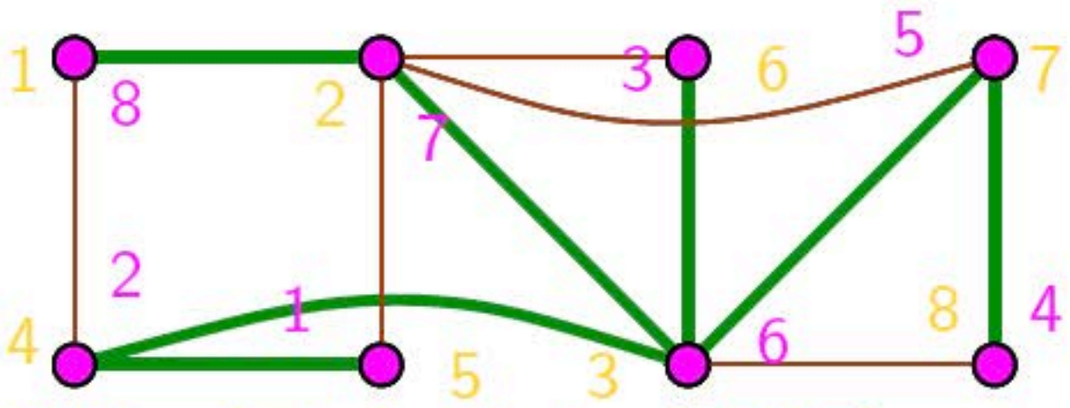
Megf: Tfh a G gráf éleit DFS után osztályoztuk.

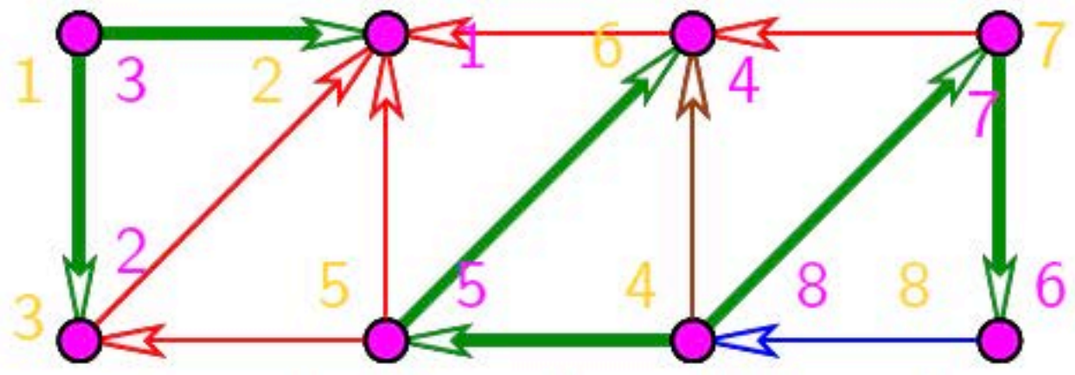
(1) Ha uv faél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

(2) Ha uv előreél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

Biz: u-ból v-be faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, a befejezési csökken. □

Depth First Search





Mélységi bejárás (DFS): a bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az 1. esetben.

Mélységi és befejezési számozás: DFS után $m(v)$ ill. $b(v)$ a v csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

Megf: Tfh a G gráf éleit DFS után osztályoztuk.

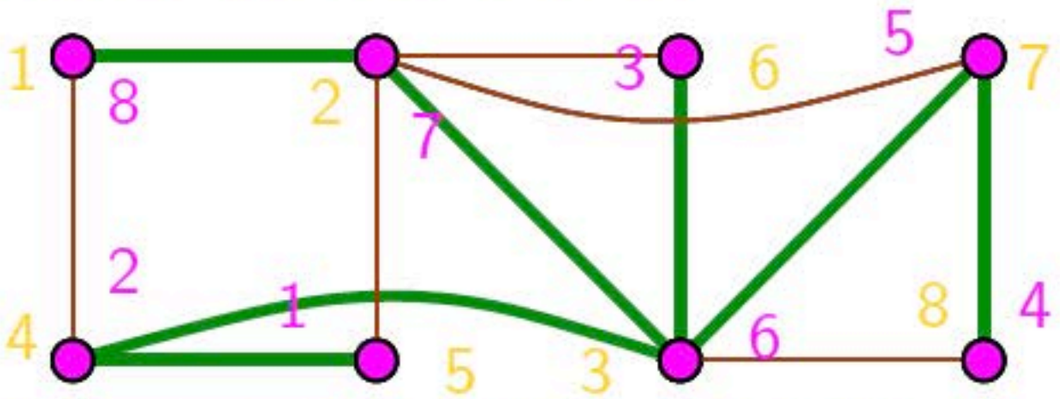
(1) Ha uv faél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

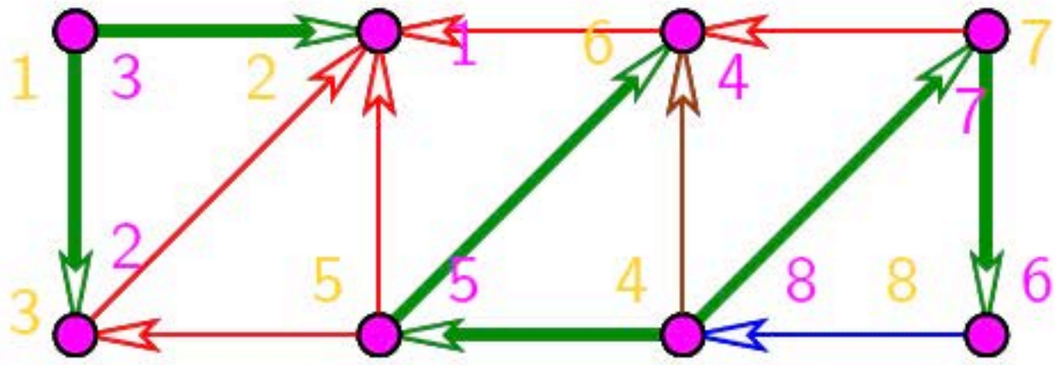
(2) Ha uv előreél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

(3) Ha uv visszaél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) < b(v)$.

Biz: v-ből u-ba faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, a befejezési csökken. □

Depth First Search





Mélységi bejárás (DFS): a bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az 1. esetben.

Mélységi és befejezési számozás: DFS után $m(v)$ ill. $b(v)$ a v csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

Megf: Tfh a G gráf éleit DFS után osztályoztuk.

(1) Ha uv faél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

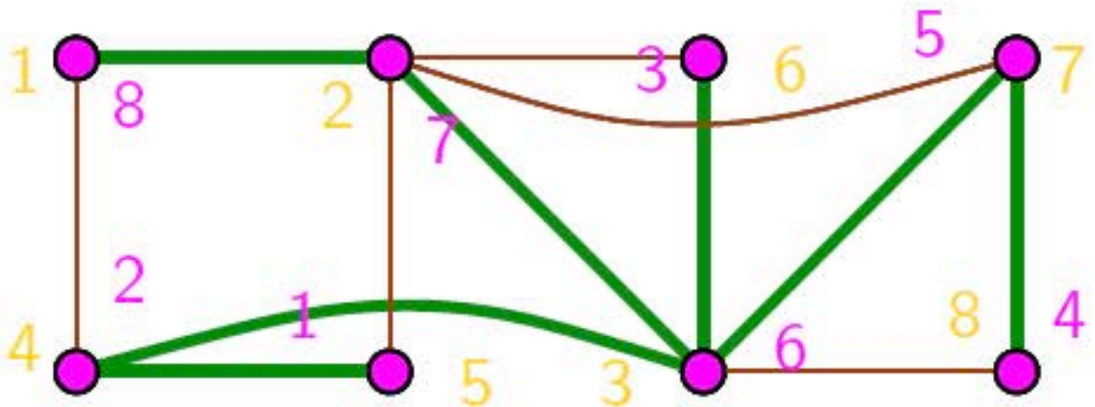
(2) Ha uv előreél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

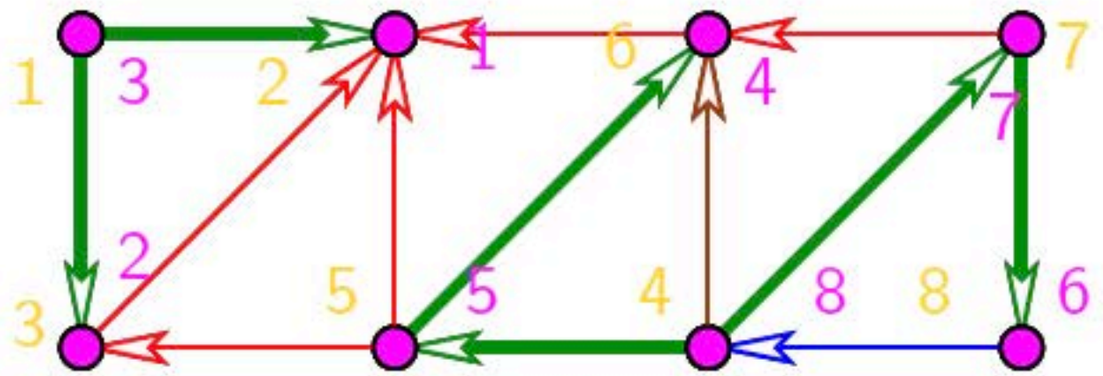
(3) Ha uv visszaél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) < b(v)$.

(4) Ha uv keresztél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

Biz: $m(u) < m(v)$ esetén a DFS miatt v az u leszármazottja lenne. Ezért $m(u) > m(v)$.Ha u-t a v befejezése előtt érnénk el, akkor u a v leszármazottja lenne. Ezért az alábbi sorrendben történik u és v evolúciója: v elérése, v befejezése, u elérése, u befejezése.

Depth First Search





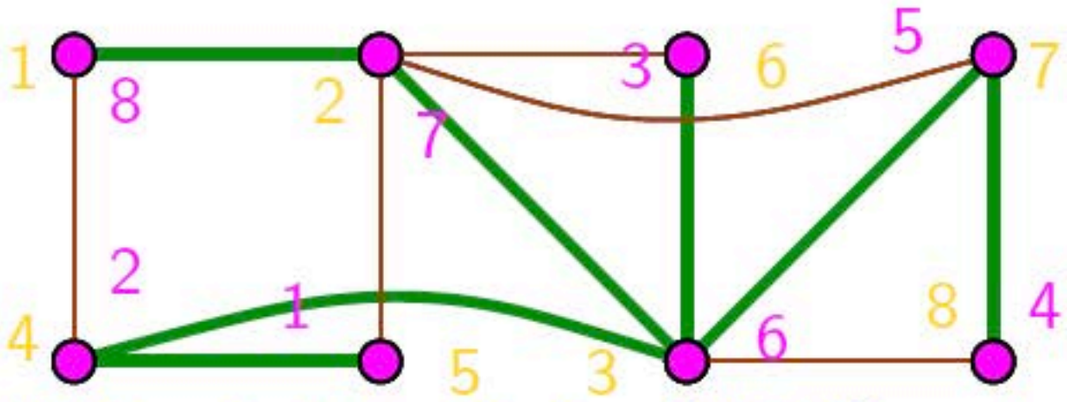
Mélységi bejárás (DFS): a bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az 1. esetben.

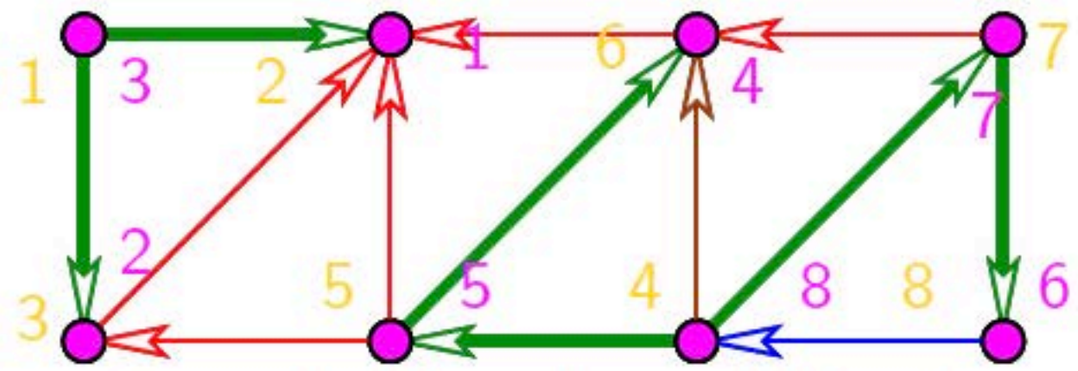
Mélységi és befejezési számozás: DFS után $m(v)$ ill. $b(v)$ a v csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

Megf: Tfh a G gráf éleit DFS után osztályoztuk.
(1) Ha uv faél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.
(2) Ha uv előreél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.
(3) Ha uv visszaél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) < b(v)$.
(4) Ha uv keresztél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) > b(v)$.
(5) Irányítatlan gráf DFS bejárása után nincs keresztél.

Biz: Indirekt. Ha uv keresztél, akkor (4) miatt $m(u) > m(v)$, továbbá vu is keresztél, ezért $m(v) > m(u)$. Ellentmondás. □

Depth First Search





Mélységi bejárás (DFS): a bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az 1. esetben.

Mélységi és befejezési számozás: DFS után $m(v)$ ill. $b(v)$ a v csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

Megf: Tfh a G gráf éleit DFS után osztályoztuk.

(1) Ha uv faél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

(2) Ha uv előreél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

(3) Ha uv visszaél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) < b(v)$.

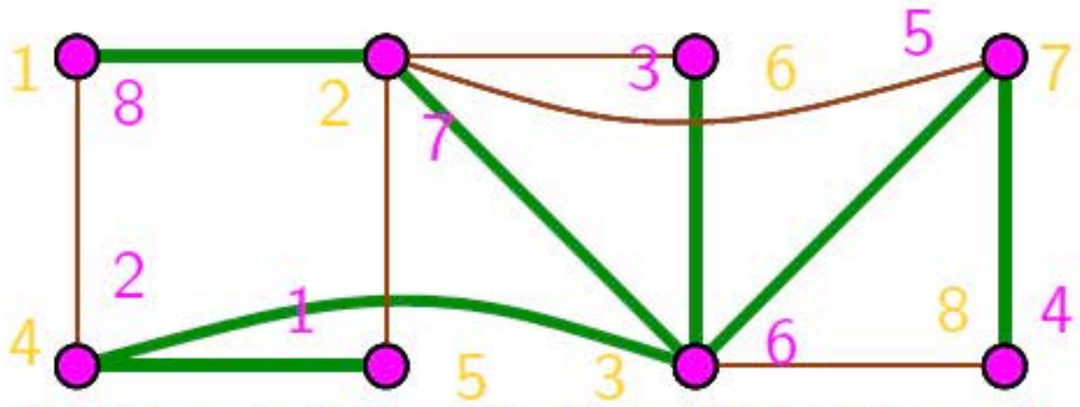
(4) Ha uv keresztél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

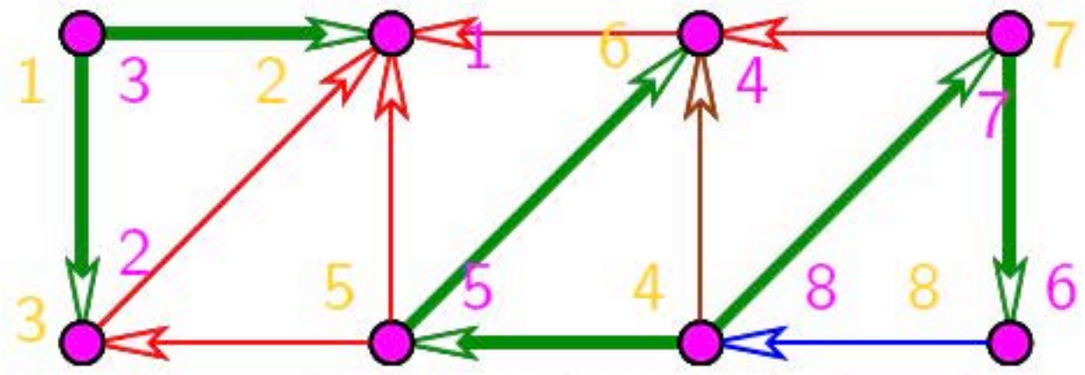
(5) Irányítatlan gráf DFS bejárása után nincs keresztél.

(6) Ha DFS után van visszaél, akkor G tartalmaz irányított kört.

Biz: A DFS fa visszaélhez tartozó alapköre a G egy irányított köre. □

Depth First Search





Mélységi bejárás (DFS): a bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az 1. esetben.

Mélységi és befejezési számozás: DFS után $m(v)$ ill. $b(v)$ a v csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

Megf: Tfh a G gráf éleit DFS után osztályoztuk.

(1) Ha uv faél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

(2) Ha uv előreél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

(3) Ha uv visszaél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) < b(v)$.

(4) Ha uv keresztél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

(5) Irányítatlan gráf DFS bejárása után nincs keresztél.

(6) Ha DFS után van visszaél, akkor G tartalmaz irányított kört.

(7) Ha DFS után nincs visszaél, akkor G-ben nincs irányított kör.

Biz: Bmely irányított körnek van olyan uv éle, amire $b(u) < b(v)$. Ez az él csak visszaél lehet. □

Directed Acyclic Graphs

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf aciklikus (más néven DAG), ha G nem tartalmaz irányított kört.

Példa: DAG-ot pl úgy kaphatunk, hogy egy G irányítatlan gráf csúcsait csupa különböző számmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobba irányítunk.

Ha ugyanis lenne az így megirányított gráfban irányított kör, akkor az élei mentén a számok végig növekednének, ami lehetetlen.

Azt fogjuk igazolni, hogy a fenti példa minden DAG-ot leír.

Directed Acyclic Graphs

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf aciklikus (más néven DAG), ha G nem tartalmaz irányított kört.

Példa: DAG-ot pl úgy kaphatunk, hogy egy G irányítatlan gráf csúcsait csupa különböző számmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobba irányítunk.

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcsainak topologikus sorrendje alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba. $(V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, v_i v_j \in E \Rightarrow i < j)$

Tétel: (G irányított gráf DAG) $\Longleftrightarrow$ ($V(G)$-nek $\exists$ top. sorrendje).

Biz: Tfh $\exists$ top. sorrend. Láttuk, hogy G ekkor DAG. ✓

Directed Acyclic Graphs

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf aciklikus (más néven DAG), ha G nem tartalmaz irányított kört.

Példa: DAG-ot pl úgy kaphatunk, hogy egy G irányítatlan gráf csúcsait csupa különböző számmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobba irányítunk.

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcsainak topologikus sorrendje alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba. $(V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, v_i v_j \in E \Rightarrow i < j)$

Tétel: (G irányított gráf DAG) $\Longleftrightarrow$ ($V(G)$-nek $\exists$ top. sorrendje).

Biz: Most tfh G DAG, és futtassunk rajta egy DFS-t. Láttuk, hogy a DFS után nem lesz visszaél, ezért minden uv irányított élre $b(u) > b(v)$ teljesül. Ezért a csúcsok befejezési sorrendjének megfordítása a G csúcsainak egy topologikus sorrendje. □

Directed Acyclic Graphs

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf aciklikus (más néven DAG), ha G nem tartalmaz irányított kört.

Példa: DAG-ot pl úgy kaphatunk, hogy egy G irányítatlan gráf csúcsait csupa különböző számmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobba irányítunk.

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcsainak topologikus sorrendje alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba. $(V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, v_i v_j \in E \Rightarrow i < j)$

Tétel: (G irányított gráf DAG) $\Longleftrightarrow$ ($V(G)$-nek $\exists$ top. sorrendje).

Köv: Irányított gráf aciklikussága DFS-sel gyorsan eldönthető: ha van visszaél, akkor a visszaél DFS-fabeli alapköre G egy irányított köre, így G nem DAG. Ha pedig nincs visszaél, akkor a fordított befejezési sorrend a G egy topologikus sorrendje, G tehát DAG.

Megj: DAG-ban topologikus sorrendet forráskeresések és forrástörlések alkalmazásával is találhatunk.

Leghosszabb út keresése

Első pillantásra haszontalannak tűnik, de matematikailag érdekes kérdés egy gráf két csúcsa között a leghosszabb út megtalálása. Legrövidebb utat tudunk keresni, tudunk vajon leghosszabbat is?

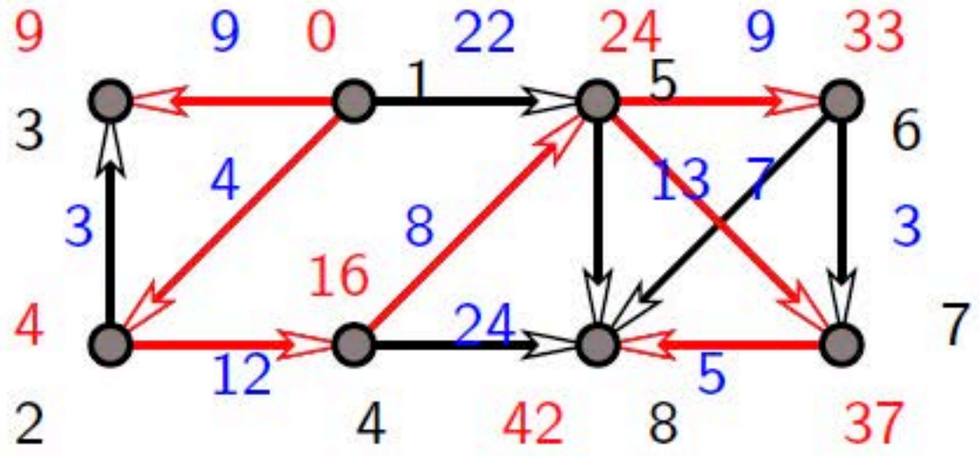
Ötlet: Az $\ell'(uv) = -\ell(uv)$ élhosszokkal a leghosszabb utak legrövidebbekké válnak. Olyanokat pedig tudunk keresni.

Gond: A módszerünk csak konzervatív élhosszokra működik. Irányítatlan gráfon ez nemnegatív élhosszokat jelent, ezért ez az ötlet itt nem segít. Irányított esetben nem baj a negatív élhossz, feltéve, hogy G DAG. Ekkor Ford, Floyd bármelyike használható.

Jó hír: Van egy még gyorsabb módszer: a dinamikus programozás. Ennek segítségével tetsz. G DAG minden v csúcsához ki tudjuk számítani a v-be vezető leghosszabb utat. (Sőt! ...)

Leghosszabb út DAG-ban Input: $G = (V, E)$ DAG, $\ell : E \to \mathbb{R}$.
Output: $\max\{\ell(P) : P$ v-be vezető út$\}$ minden $v \in V$ csúcsra.
Működés: $\boxed{1}$ $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ top. sorrend meghatározása.
$\boxed{2}$ $i = 1, 2, \ldots, n$: $f(v_i) = \max\{\max\{f(v_j) + \ell(v_j v_i) : v_j v_i \in E\}, 0\}$
Output: $f(v)$ $\forall v \in V$

Leghosszabb út keresése



Leghosszabb út DAG-ban Input: $G = (V, E)$ DAG, $\ell : E \to \mathbb{R}$.
Output: $\max\{\ell(P) : P$ v-be vezető út$\}$ minden $v \in V$ csúcsra.

Működés: $\boxed{1}$ $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ top. sorrend meghatározása.
$\boxed{2}$ $i = 1, 2, \ldots, n$: $f(v_i) = \max\{\max\{f(v_j) + \ell(v_j v_i) : v_j v_i \in E\}, 0\}$
Output: $f(v)$ $\forall v \in V$

Helyesség: Ha a v_i-be vezető leghosszabb út utolsó előtti csúcsa v_j, akkor $f(v_i) = f(v_j) + \ell(v_j v_i)$. □

Megj: Ha a fenti algoritmusban minden csúcsra megjelöljük az $f(v)$ értéket beállító élt (éleket), akkor a megjelölt élek minden v csúcsba megadnak egy leghosszabb utat. Sőt: minden v-be vezető leghosszabb megkapható így.

Kínzó kérdés: Van bármi értelme leghosszabb utakat keresni?

A PERT probléma

Egy $a, b, \ldots$ tevékenységekből álló projektet kell végrehajtanunk.
Precedenciafeltételek: bizonyos (u, v) párok esetén előírás, hogy az u tevékenységet a v előtt kell elvégezni, ezért v az u kezdetét követően $c(uv)$ időkorlát elteltével kezdhető.
Cél: minden v tevékenységehez olyan $k(v) \geq 0$ kezdési időpont meghatározása, ami nem sérti a preferenciafeltételeket, és a projekt végrehajtási ideje (a legnagyobb $k(v)$ érték) minimális.
G **irányított gráf** csúcsai a tevékenységek, élei pedig a precedenciafeltételek, az uv él hossza $c(uv)$.
Megf: (1) Ha G nem DAG, akkor a projekt nem hajtható végre. (2) Ha G DAG, akkor minden v tevékenység legkorábbi kezdési időpontja a v-be vezető leghosszabb út hossza.
Köv: A PERT probléma megoldása nem más, mint a G DAG minden csúcsára az oda vezető leghosszabb út meghatározása.
Terminológia: G leghosszabb útja kritikus út, amiből több is lehet. Kritikus út csúcsai a kritikus tevékenységek.
Megf: Ha egy kritikus tevékenység nem kezdődik el a lehető legkorábbi időpontban, akkor az egész projekt végrehajtása csúszik.