15. n elem permutációja, a permutáció **inverziószáma**. **Bástyaelhelyezés**, inverzióban álló bástyapárok, **determináns**, **felső háromszögmátrix determinánsa**.

1. N elem permutációja

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Orbitok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetszőleges sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik.
Ugyanez igaz a páros méretű orbitok számára is.

Biz:

Köv: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjére ekvivalensek:
(1) a sorrend ps sok cserével kapható $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n)$-ből,
(2) a sorrend orbitjai számának paritása megegyezik n paritásával,
(3) a sorrend páros méretű orbitjainak száma páros.
Bármelyik teljesül a fentiek közül, akkor a megfelelő hiperkocka térfogata pozitív.

Biz: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrendnek n orbitja van, és ezekből a páros méretűek száma 0. □

Megj: Hagyományosan egy harmadik módszert használunk az előjel meghatározására.

2. **A permutáció inverziószáma**

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű σ permutáció, amelyre $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Példa: Az $(\underline{e}_3, \underline{e}_8, \underline{e}_5, \underline{e}_7, \underline{e}_1, \underline{e}_6, \underline{e}_2, \underline{e}_4)$ sorrendhez az alábbi σ permutáció tartozik:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(i)$	5	7	1	8	3	6	4	2

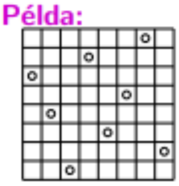
Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az $\{i, j\}$ pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.
Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.
Biz: (1) A két felcserélt vektor viszonya megfordul, minden más pár ugyanolyan marad, mint korábban volt.

Biz: (2) Ha a felcserélt vektorok között k másik vektor van, akkor ugyanez a csere megkapható $2k + 1$ szomszédos vektorpár cseréjének egymásutánjaként. Az inverziószám így $(2k + 1)$-szer változik 1-gyel, ezért összességében páratlannal változik. $\square$

Köv: Az egységvektorok egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma pontosan akkor páros, ha ez a sorrend páros sok vektorcserével kapható az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ sorrendből.
Köv: A σ permutációhoz tartozó hiperkocka térfogatának előjele $(-1)^{I(\sigma)}$. Hogyan határozható meg gyorsan ez az előjel?

3. Bástyaelhelyezés

Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.
Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.
Mit jelent, hogy az $\{i, j\}$ pár σ szerint inverzióban áll?
Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.
Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.
Köv: Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számaval.
Példa:



4. Inverzióban álló bástyapárok

5. Determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme. A $(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, aminek az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

Biz: Az A mátrix bármely bástyaelhelyezését meghatározó elemek $A^\top$-ban is bástyaelhelyezést alkotnak. Két bástya pontosan akkor alkot ÉK-DNy párt A-ban, ha $A^\top$-ban is ÉK-DNy-i párt alkotnak. Ezért $\det(A)$-ban ugyanazokat a kifejtési tagokat (ugyazzal az előjellel) kell összeadni, mint $\det(A^\top)$-ban. $\square$

Köv: Ha egy tulajdonság általában igaz a determináns oszlopaira, akkor a megfelelő tulajdonság a determináns soraira is teljesül.

Megj: Egy $n\times n$ determináns kiszámításához $n!$ kifejtési tagot kell összegezni. Ez rengeteg munka. Gyorsabb módszer adódik, ha megfigyeljük, hogy az ESÁ-ok hogyan változtatják a determinánst.

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|$,

Biz: A bal oldali determináns minden kifejtési tagjának az i-dik oszlopbeli tényezője a $\underline{u}_i$ és $\underline{v}$ egy koordinátájának összege. Ha felbontjuk a zárójelet, a kifejtési tagból két szorzat lesz. Ezek a szorzatok pedig épp a jobb oldali determinánsok kifejtési tagjai. $\square$

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik.

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 42 = 42$$

Megj: A determináns kiszámításához képezhetünk LA mátrixot. Ehhez nem kötelező Gauss-eliminációt használni, bármilyen ESÁ-sal dolgozhatunk a cél érdekében. Nem muszáj v1-ket sem gyártani: elég a felső háromszögmátrixig (vagy csupa0 sorig) eljutni.
Sőt: mindent, amit a sorokkal megtehetünk, azt hasonló módon az oszlopokkal is elvégezhetjük. Ez néha célszerűbb lehet, mint kizárólag csak ESÁ-ok alkalmazása.

6. Felső háromszögmátrix determinánsa

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.
Biz: Ha egy sor v1-e a főátlótól balra van, akkor a felette levő soré is. Az első soré nem ilyen, ezért minden v1 a főátlón vagy attól jobbra áll, így a főátló alatt minden elem 0. □