Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

A számítástudomány alapjai

Összefoglaló jegyzet

Készítette: Illyés Dávid

Ez a jegyzet nagyon hasonlóan van struktúrálva az előadás jegyzetekhez és fő célja, hogy olyan módon adja át a "A Programozás Alapjai 1" nevű tárgy anyagát, hogy az teljesen kezdők számára is könnyen megérthető és megtanulható legyen.

October 28, 2023

Tartalomjegyzék

Oldal

1 A gráfelmélet alapjai

1.1 Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf

Példa: Ha $V \neq 0$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$, ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$. V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak), E pedig G éleinek halmaza.

Példa: $G = (\{a, b, c, d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf diagramja a G egy olyan lerajzolása, amiben V-nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u-t és v-t összekötő görbe felel meg.

Terminológia & konvenciók: Gráf alatt rendszerint egyszerű, irányítatlan gráfot értünk. Ha G egy gráf, akkor $V(G)$ a G csúcshalmazát, $E(G)$ pedig G élhalmazát jelöli, azaz $G = (V(G), E(G))$. Az $e = \{u, v\}$ élt röviden uv-vel jelöljük.

Ekkor e az u és v csúcsokat köti össze. Továbbá u és v az e végpontjai, amelyek az e élre illeszkednek, és e mentén szomszédosak.

1.2 Multigráfok és irányított gráfok

Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

Def: Az n-pontú út, n-pontú kör, ill. n-pontú teljes gráf jele rendre P_n, C_n, ill. K_n. (P_1, P_2, P_3 elfajulók.) **Megf:** $K_1 = P_1, P_2 = C_2, C_3 = K_3$

Def: $c \in V(G)$ esetén a v-re illeszkedő élek száma a v fokszáma. Jelölése $d_g(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít. (Irányított gráf esetén $\delta(v)$ ill. $\rho(v)$ a v ki- ill. befokát jelöli.)

Def: A G gráf maximális ill. minimális fokszáma $\Delta(G)$ ill. $\delta(G)$. G reguláris, ha minden csúcsának foka ugyanannyi: $\Delta(G) = \delta(G), G$ pedig k-reguláris, ha minden csúcsának pontosan k a fokszáma.

Megf: Minden kör 2-reguláris, K_n pedig $(n - 1)$-reguláris.

1.3 Handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(V) = |E|$, azaz a csúcsok ki- és befokainak összege is az élszámot adja meg.

A KFL bizonyítása: Készítsükel a G' digráfot úgy, hogy G minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítjük. Ekkor

$$\sum_{v \in V} d_G(V) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)| \qquad \square$$

Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna az általánosított kéfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. 0-elű (üres)gráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 1-gyel növeli az élszámot is és a ki/befokok összegét is.

Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna a kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-vel növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszámösszeget is.

1.4 Komplementer és izomorfia

Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V, (G), \binom{v}{2} \setminus E(G))$.

Megj: G és $\overline{G}$ csúcsai megegyeznek, és két csúcs pontosan akkor szomszédos $\overline{G}$-ben, ha nem szomszédosak G-ben.

Példa:

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gárf és a $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}} = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsra.

Def: A G és G' gráfok akkor izomorfak, ha mindekét gráf csúcsai őgy számozhatók meg az 1-től n-ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G-ben, mint az u-nak és v-nek megfelelő sorszámú csúcsok között G'-ben. Jelölése: $G \cong G'$.

Példa:

Megf: Ha $G \cong G'$, akkor G és G' lényegében ugyanúgy néznek ki. Így például minden fokszám ugyanannyiszor lép fel G-ben mint G'-ben, ugyan annyi C_{42} kör található G-ben, mint G'-ben, stb.

1.5 Gráfoperációk

Def: Éltörlés, csúcstörlés, élhozzáadás.

Def: Feszítő részgráf: éltörlésekkel kapható gráf.

Feszített részgráf: csúcstörlésekkel kapható gráf.

Részgráf: él- és csúcstörlésekkel kapható gráf.

Példa: H_1, H_2, H_3: a G feszítő, feszített, jelzőnélküli részgráfjai.

Megf: H a G részgráfja $\iff V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$.

H a G feszítő részgráfja $\iff V(H) = V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$.

H a G feszített részgráfja $\iff V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H)$ a H.

Megj: A gráf definíciója megengedi, hogy a gráf egyik részéből egyáltalán ne vezessen él a gráf maradék részébe, azaz a gráf egyik csúcsából ne lehessen eleken keresztül eljutni a gráf egy másik csúcsába. Ez történik pl. az üresgráf (alias $\overline{K_n}$) esetén.

1.6 Háromféle elérhetőség, összefüggőség

Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$. (Tkp egyik csúcsból eljutunk egy másik csúcsba mindig élek mentén haladva.)

Séta: olyan élsorozat, amelyikban nincsen ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Terminológia: Ha a kezdőpont u, a végpont v, akkor uv-élsorozatról, uv-sétáról, ill. uv-útról beszélünk. Ha hangsúlyozni szeretnénk, hogy $u = v$, de a kezdő (és vég)pontot nem akarjuk megnevezni, akkor zárt élsorozatról, körsétáról ill. körről beszélünk.

Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat $\square$

Állítás: G-ben $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út $\square$

Def: G ir.tatlan gráf u-ból v **elérhető** ($u \sim v$), ha $\exists uv$-út G-ben.

Def: A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

Megj: (1) Az összefüggőség szokásos definíciója nem a $\sim$ reláció segítségével történik, hanem valahogy így: a G irányítatlan gráfot akkor mondjuk öszefüggőnek, ha G bármely két csúcsa között vezet út G-ben.

Megj: (2) Az előző definíciót irányított fráfokra is kterjeszthető: a G irányított gráfot akkor mondjuk **erősen összefüggő**nek, ha G bármely $u, v \in V(G)$ esetén van **irányított** uv-út G-ben.

Megj: (3) Irányított gráf másfajta összefüggősége is értelmezhető: a G irányított gráfot akkor mondjuk **gyengén összefügő**nek, ha a G-nek megfelelő irányítatlan gráf összefüggő.

Köv: Ha G irányítatlan gráf, akkor $\sim$ ekvivalenciareláció:

(1) $\forall u \in V(G) : u \sim u$, (2) $\forall u, v \in V(G) : u \sim v \Rightarrow v \sim u$, és (3) $\forall u, v, w \in V(G) : u \sim v \sim w \Rightarrow u \sim w$. $\square$

Def: A G gráf **(összefüggő) komponense** a $\sim$ ekvivalenciaosztálya. Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

1.7 Gráfok összefüggősége a gyakorlatban

Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in$ esetén $v \sim v'$.

(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. $\square$

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. $\square$

Élhozzáadási lemma (ÉHL): Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.

(1) G és G' komponensei megegyeznek, de G'-nek több köre van, mint G-nek.

(2) G és G' körei megegyeznek, de G'-nek eggyel keveseb komponense van, mint G-nek.

1.8 Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük. Az öszefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.

Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa.

Példa:

Megf: (1) P_n fa minden $n \geq 1$ egész esetén. (2) Fához egy új csúcsot egy éllel bekötve fát kapunk:

Lemma: G n-csúcsú, k-komponensű erdő $\Rightarrow |E(G)| = n - k$.

Köv: Ha F egy n-csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.

Állítás: Tetsz. n-csúcsú G gráf esetén az alábbi három tulajdonság közül bármely kettőből következik a harmadik. (a) G körmentes. (b) G összefüggő. (c) $|E(G)| = n - 1$.

$(a) + (c) \Rightarrow (b)$: Építsük fel G-t élek egyenkénti behúzásával. $n - 1$ él egyikének behúzása se hoz létre kört, ezért az ÉHL miatt minden él zöld, és 1-gyel csökkenti a komponensszámot. Végül $n - (n - 1) = 1$ komponens marad, tehát G összefüggő.

$(b) + (c) \Rightarrow (a)$: Építsük fel G-t élek egyenkénti behúzásával. Mivel a komponensek száma végül 1 lesz, ezért $n - 1$ zöld élt kellett behúzni. (c) miatt G összes éle zöld, piros éle nincs. Az ÉHL miatt G körmentes. $\square$

1.9 Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor

(1) $(F - e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.

(2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.

(3) $(F + e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re.

(4) Ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa levél, ha $d(v) = 1$.

1.10 Feszítőfák

Építsük fel a G gráfot az élek egymás utái behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével! Legyen G' a G gráf piros élei törlésével keletkező feszítő részgráf! G' biztosan körmentes lesz, hiszen a zöld élek sosem alkottak kört a korábbi élekkel. G' minden K' komponense részhalmaza G egy K komponensének. Ha $K' \neq K$, akkor G-nek van olyan éle, ami kilép K'-ből. Ezen élek mind pirosak K' definíciója miatt. Legyen e ezek közül az elsőnek kiszínezett. Az e él nem tudott kört alkotni a korábbn kiszínezettekel, így nem leht piros: ellentmondás. Ezek szerint G egy G' komponensei megegyeznek.

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. □

Def: F a G gráf feszítőfája (ffája), ha F egy G-ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: (G-nek van feszítőfája) $\iff$ (G összefüggő)

$\Leftarrow$: Építsük fel G-t az álek egyenkénti behúzásával és kiszínezésével. Láttuk, hogy a zöld élek egy F erdőt alkotnak, aminek egyetlen komponense van, hiszen G is egykomponensű. Ezek szerint F olyan fa, ami G-ből éltörlésekkel kapható. □

Megj: Ha egy nem feltétlenül összefüggő G gráf éleit a fenti módon kiszínezzük, akkor a zöld élek G minden komponensének egy F feszítőfáját alkotják. Nem összefüggő G esetén a zöld élek alkotta feszítő részgráf neve a G feszítő erdeje.

2 Minimális költségű feszítőfák

2.1 Alapkörrendszer, alap vágás renszer

Adott egy G gráf és G-nek egy Frögzített feszítőfája. Ekkor G minden éléhez F meghatározza G éleinek egy fontos részhalmazát. Attól függően, hogy az adott él F-hez tartozik-e vagy sem, különböző fajta részhalmazról van szó.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak. Az $e \in E(G) \backslash E(F)$ éléhez tarozó alapkör pedig az $F + e$ köre.

Megf: Tfh $f \in F$ és $e \in E(G) \backslash E(F)$. Ekkor ($F - f + e$ ffa) $\iff$ (f benne van e alapkörében) $\iff$ (e benne van f alap vágásában).

Köv: Az $e \in E(G) \backslash E(F)$ alapkörét e mellett azon F-beli élek alkotják, amelyek alapvágása e-t tartalmazza. Az $f \in F$ alapvágást f mellett a G azon élei alkotják, amelyek alapköre f-t tartalmazza.

2.2 Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(F)$.

Az $F \subseteq E$ élhalmaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.

Az $F \subseteq E$ élhalmaz G-ben minimális költségű feszítő erdeje, ha
(1) (V, F) a G feszítő erdeje, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítő erdejére.

Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.

Ötlet: Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élk egyenkénti behúzásával, az ÉHL szerint zöldre színezett élek halmazaként.

Zöld él: olyan él, ami nem alkot kört a korábban felépített élekkel.

Mohó stratégia: A feszítőfa építésekor költség szerint növekvő sorrendben döntsünk az élekről, hátha mkffát kapunk a végén.

Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \cdots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = 0$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes.} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \qquad F := F_m$$

2.3 Minimális költségű feszítőfák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nak: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtotott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_l\}, k(f_1) \leq k(f_2) \leq \cdots \leq k(f_l)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_l\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \cdots \leq k(f'_l)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq l$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

Köv: (2) Az F' élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje G-nek, ha $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \leq 0$-ra.

Köv: (3) Ha a G gárf összefüggő, akkor G feszítő erdeje a G feszítő fája, így a Kruskal-algoritmus mkffát talál. A (2) következmény pedig G mkffáit karakterizálja.

2.4 Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.
Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.
Tfh n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.
A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Élek költség szerinti sorbarendezése
2. Döntés az egyes élekről a fenti sorrendben.

1. m szám sorbarendezéséhez a buborékrendezés legfeljebb $\binom{m}{2}$ összehasonlítást használ.

1. n csúcsú G gráf esetén egy élről döntés megoldható $konst \cdot \log_2 n$ lépésben az adatstruktúra karbantartásával együtt is. Az összes döntéshez tehát elegendő $konst \cdot n \cdot \log_2 n$ lépés. A Kruskal-algoritmus lépésszáma ezért felülről becsülhető $konst \cdot (n + m) \cdot \log_2(n + m)$-mel.

3 Gráfbejárások és legrövidebb utak

3.1 Általános gráfbejárás & BFS

A gráfbejárási algoritmus az inputgráf csúcsait és éleit fedezi fel. Minden csúcs az eléretlen $\to$ elért $\to$ befejezett állapotokat veszi fel. A bejárás akkor ér véget, amint minden csúcs befejezetté vált.

1. Van elért csúcs. Választunk egyet, mondjuk u-t.

(1a) Ha van olyan uv él, amire v eléretlen, akkor v elérté válik.

(1b) Ha nincs ilyen uv él, akkor u befejezetté válik.

2. Nincs elért csúcs.

(2a) Ha van eléretlen u csúcs, akkor u-t elértté tesszük.

(2b) Ha nincs eléretlen csúcs (azaz $\forall$ csúcs fejezett), akkor END.

Szélességi bejárás (BFS) szabálya:

Az 1. esetben mindeg a legkorábban elért u-t választjuk.

Input: $G = (V, E)$ (ir/ir.tatlan) gráf, ($v \in V$ gyökérpont[1]).

Output: (1) A csúcsok elérési és befejezési sorrendje. (2) Az élek osztályozása:

faél: Olyan él, ami mentén egy csúcs elértté vált.

uv **előreél:** nem faél, de u-ból v-be faélekből irányított út vezet.

uv **visszaél:** v-ből u-ba faélekből irányított út vezet.

keresztél: minden más él (u és v közt nincs leszármazott viszony).

(3) A **bejárás fája:** a faélek alkotta részgráf. (A bejárás fája valójában egy gyökereiből kifelé irányított erdő.)

Megf: Irányítatlan esetben az előreél és a visszaél ugyanazt jelenti.

Terminológia: Ha a bejárás fájában u-ból v-be irányított út vezet, akkor u a v őse és v az u leszármazottja. A faél és az előreél tehát őszből leszármazottba, a visszaél leszármazottból ősbe vezet.

3.2 A BFS tulajdonságai

Nézzük meg egy **irányított** gráf BFS bejárását is.

Állítás: Tfh $G = (V, E)$ BFS bejárása után a csúcsok elérési sorrendje $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

(1) Ha $i < j$, akkor v_i-t hamarabb fejezük be, mint v_j-t, továbbá v_i gyerekei megleőzik v_j gyerekeit az elérési sorrendben.

(2) **Az elérési és befejezési sorrend (BFS esetén) megegyezik.**

(3) **Gréfél nem ugorhat át falét:** ha $k < i < j \leq l$ és $v_i v_j$ faél, akkor $v_k v_l$ nem lehet gráfél.

(4) **Nincs előreél.** (Irányítatlan eset: csak faél és keresztél van.)

(5) Ha a BFS-fában k-élű irányított út vezet u-ból v-be, akkor G-ben nincs k-nál kevesebb élű uv-út.

(6) **A BFS-fa egy legrövidebb utak fája:** a BFS-fa v_1 gyökeréből bármely v_i csúcsba vezető faút a G egy legkevesebb élű $v_1 v_i$-útja.

3.3 Legrövidebb utak

Def: Adott G (ir) gráf és $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény esetén egy P *út hossza* a P éleinek összhossza: $l(P) = \sum_{e \in E(P)} l(e)$.

[1] A gyökérben kezdetben elért állapotú, ezért kivétel az általános szabály alól.

Az u és v csúcsok távolsága a legrövidebb uv-út hossza: $dist_l(u,v) := \min\{l(P) : P\ uv\text{-út}\}$ ($\nexists uv$-út$\Rightarrow dist_l(u,v) = \infty$.) Az l hosszfüggvénye nemnegatív, ha $l(e) \geq 0$ teljesül minden e élre. Az l hosszvüggvény konzervatív, ha G-ben $\nexists$ negatív összhosszú ir. kör.

Cél: Legrövidebb út keresése irányított/irányítatlan gráfban.

Megf: Ha $l(e) = 1$ a G minden e élére, akkor $l(P)$ a P élszáma. Ezért a BFS-fa minden gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből, azaz a szélességi bejárás tekinthető egy legrövidebb utat kereső algoritmusnak is.

Def: Adott G (ir) gráf, $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény és $r \in V(G)$. (r,l)-felső becslés olyan $f : V(G) \to \mathbb{R}$ függvény, ami felülről becsli minden csúcs r-től mért távolságát: $dist_l(r,v) \geq f(v) \forall v \in V(G)$.

Triviális (r,l)-felső becslés: $f(v) = \begin{cases} 0 & v = r \\ \infty & v \neq r \end{cases}$

Pontos (r,l)-felső becslés: $f(v) = dist_l(r,l)\ \forall v \in V(G)$.

3.4 Az elméleti javítás

Def: Tfh f egy (r,l)-felső becslés és $uv \in E(G)$. Az f uv-elméleti javítása az az f', amire $f'(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq v \\ min\{f(v), f(u) + l(uv)\} & z = v \end{cases}$

Megf: Tfh az $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény konzervatív és $f(r) = 0$.

Ekkor (1) Az $f(r,l)$-felső becslés élmenti javítása mindig (r,l)-felső becslést ad.

(2) $f(r,l)$-felső becslés (pontosan) $\iff$ (f-en $\nexists$ érdemi élmenti javítás).

Köv: Adott G, konzervatív l és $r \in V(G)$ esetén ha kiindulunk a triviális (r,l)-felső becslésből, és addig végzünk émj-kat, amíg lehet, akkor a végén megkapjuk minden csúcs r-től való távolságát.

Itt a jegyzet 17. oldaláról az utolsó kettő pont hiányzik, mivel nem tudom, hogy mennyire lényegesek.

Def: Tfh f egy (r,l)-felső becslés és $uv \in E(G)$. Az f uv-élmenti javítása az az f', amire $f'(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq v \\ min\{f(v), f(u) + l(uv)\} & z = v \end{cases}$

Megf: Tfh az $l : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény konzervatív és $f(r) = 0$. Ekkor (1) Az $f(f,l)$-felső becslés élmenti javítása mindig (r,l)-felső becslést ad. (2) $f(r,l)$-felső becslés (pontosan) $\Leftrightarrow$ (f-en $\nexists$ érdemi élmenti javítás).

Dijkstra-algoritmus: Input: $G = (V,E), l : E \to \mathbb{R}_+, r \in V$. Output: $dist_l(r,v) \forall v \in V$
Működés: $U_0 := \emptyset$, f_0 a triviális. (r,l)-felső becslés.

Az i-dik fázis:

1. Legyen $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$, ahol u_i olyan csúcs a $V \setminus U_{i-1}$ halmazból, amelyre $f_{i-1}(v)$ minimális.

2. $f_i : f_{i-1}$ élmenti javítása minden U_i-ből kivezető $u_i x$ élen. Output: $f_{|V|}$. Megjelöljük a végső $f_{|V|}(V)$ értékeket beállító éleket.

3.5 Dijkstra, egy példán

Dijkstra-algoritmus: Input: $G = (V,E), l : E \to \mathbb{R}_+, r \in V$. Output: $dist_l(r,v) \forall v \in V$
Működés: $U_0 := \emptyset$, f_0 a triviális. (r,l)-felső becslés.

Az i-dik fázis:

1. Legyen $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$, ahol u_i olyan csúcs a $V \setminus U_{i-1}$ halmazból, amelyre $f_{i-1}(v)$ minimális.

2. $f_i : f_{i-1}$ élmenti javítása minden U_i-ből kivezető $u_i x$ élen. Output: $f_{|V|}$. Megjelöljük a végső $f_{|V|}(V)$ értékeket beállító éleket.

Megf: Ha a v-be vezet megjelölt él, akkor vezet r-ből v-be megjelölt éleken út, és ennek hozza megegyezik $f_{|V|}(v)$-vel.

Köv: Ha a Dijsktra-algoritmus helyes, akkor az algoritmus végén a megjelölt élek egy legrövidebb utak fáját alkotják r gyökérrel.

3.6 Dijkstra helyessége

Megf: Tfh $u_1, u_2, \ldots, u_n$ a G csúcsainak sorrendje a Dijkstra-algoritmus végrehajtása után.
(1) Ekkor $f_{|V|}(u_i) \leq f_{|V|}(u_{i+1})$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq n$.
(2) $f_{|V|}(u_1) \leq f_{|V|}(u_2) \leq \cdots \leq f_{|V|}(u_n)$
(3) A Dijsktra-algoritmus outputjaként kaptt $f_{|V|}$-n élmenti javítás nem tud változtatni.

Tétel: A Dijsktra-algoritmus helyesen működik, azaz G minden csúcsára igaz, hogy $dist(r, v) = f_{|V|}(v)$.

„Lépésszámanalízis": Ha a G gráfnak n csúcsa és m éle van, akkor a Dijkstra-algoritmus n-szer keresi meg legfeljebb n szám minimumát, ami összességében legfeljebb $konst \cdot n^2$ lépést igényel. Ezen kívül legfeljebb m élmenti javítást véges, ami $konst' \cdot m$ lépés. Összességében tehát legfeljebb $konst'' \cdot (n^2 + m)$ lépésre van szükség, az algoritmus hatékony.

4 Legrövidebb utak, DFS, PERT

4.1 Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 1

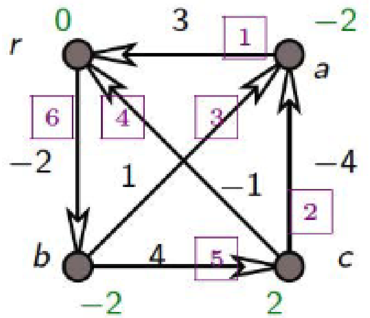
Könnyű olyan példát találni, ahol a Dijkstra-algoritmus konzervatív hosszüggvény esetén hibás eredményt ad. Azonban konzervatív hosszüffvény esetén is igaz, hogy

- (r, l)-fb élmenti javítása (r, l)-fb-t eredményez, ill.
- ha egy (r, l)-fb-ben nem végezhető erdemi élmenti javítás, akkor pontos.

konzervatív hosszfüggvény esetén is hasonló startégiát követünk: Élmenti javításokat végzünk a triviális (r, l)-fb-en, míg van érdemi javítás.

Ford-algoritmus: Input: $G = (V, E), l : E \to \mathbb{R}, r \in V$. Output: $dist_l(r, l)\forall v \in V$ Működés: f_0 a triviális (r, l)-fb, $|V| = n$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Az i-dik fázis $i = 1, 2, \dots, n-1$-re az alábbi. f_i-t f_{i-1}-ből kapjuk, az $e_1, \dots, e_m$ élmenti javítások után. OUTPUT: $dist_l(r, v) = f_{n-1}(v)\forall v \in V$.

3. fázis



	r	a	b	c
f_0	0	∞	∞	∞
f_1	0	∞	-2	∞
f_2	0	-1	-2	2
f_3	0	-2	-2	2

Állítás: Ha l konzervatív, akkor $dist_l(v)\forall v \in V$.

Megf: Ha $f_i = f_{i-1}$, akkor a Ford-algoritmust az i-dik fázis után be lehet fejezni, hisz nincs érdemi élmenti javítás, így $f_{n-1} = f_i$.

Megj: Az $f_{n-1}(v)$-t beállító élek legrövidebb utak fáját alkozják.

"Lépésszámanalízis": Ha a $|V(G)| = n$ és $|E(G)| = m$, akkor minden fázisban $\leq m$ élmenti javítás, ami $konst \cdot m$ lépés. Ez összesen $\leq konst \cdot (n-1) \cdot m \leq konst \cdot n^3$ lépés, az algoritmus hatékony.

4.2 Legrövidebb utak konzervatív hosszfüggvény esetén 2

Tegyük fel, hogy $G = (V, E), l : E \to \mathbb{R}$ és $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Jelölje $d^{(k)}(i, j)$ a legrövidebb olyan v_iv_j-út hosszát, aminek belső csúcsai csak $v_1, v_2, \dots, v_k$ lehetnek.

Megf: (1) $d^{(n)}(i, j) = dist_l(v_i, v_j), v_iv_j \in E \Rightarrow d^{(0)}(i, j) = l(v_i, v_j)$ (2) $d^{(0)}(i, j) = 0$, különben $d^{(0)}(i, j) = \infty$. (3) Ha l konzervatív, akkor tetszőleges i, j ill. $k \leq n$ esetén $d^{(k+1)}(i, j) = min\{d^{(k)}(i, j), d^{(k)}(i, k+1) + d^{(k)}(k+1, j)\}$ teljesül.

I. eset: $v_{k+1} \notin P$. Ekkor $d^{(k+1)}(i, j) = d^{(k)}(i, j)$, és $d^{(k+1)}(i, j) \leq d^{(k)}(i, k+1) + d^{(k)}(i, k+1) + d^{(k)}(k+1, j)$.

II. eset: $v_{k+1} \in P$. Ekkor $d^{(k+1)}(i, j) \leq d^{(k)}(i, j)$, és $d^{(k+1)}(i, j) = d^{(k)}(i, k+1) + d^{(k)}(k+1, j)$.
Mindkét esetben helyes a képlet. $\square$

Floys-algoritmus: Input: $G = (V, E)$, konzervatív $l : E \to \mathbb{R}$. Output: $dist_l(u, v)\forall u, v \in V$ Működés: $d^{(0)}$ felírása (2) alapján. Az i-dik fázis: $d^{(i-1)}$-ből meghatározzuk $d^{(i)}$-t (3) alapján. OUTPUT: $d^{(n)}(u, v) = dist_l(u, v)\ \forall u, v \in V$.

"Lépésszámanalízis": A $d^{(0)}$ felírása $konst \cdot n^2$ lépés. Minden fázis $konst' \cdot n^2$. Mivel összesen n fázis van, a lépésszám legfeljebb $konst" \cdot n^3$ lépés, az algoritmus hatékony.

Ford vs Floyd: Konzervatív hosszfüggvényre működnek helyesen. Mindkét algoritmus talál bizonítékot, ha l nem konzervatív. (!!) A Ford csak egy gyökérből, a Floyd bármely két csúcs között talál legrövidebb utat. (!!) A Ford ritka gráfokra jelentősen olcsóbb, sok él eletén a Floyd nem sokkal drágább.

4.3 Depth First Search (DFS)

"Mélységi bejárás (DFS): A bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az $\boxed{1.}$ esetben.

Mélységi és befejezési számozás: DFS után $m(v)$ ill. $b(v)$ a v csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

Megj: A BFS konkrét megvalósításában szükség van arra, hogy az elért csúcsokat úgy tároljuk, hogy könnyű legyen kiválasztani az elért csúcsok közül a legkorábban elértet. Erre egy célszerű adatstruktúra a *sor* (avagy *FIFO lista*). Ha a BFS megvalósításában ezt az adatstruktúrát *veremre* (más néven *FIFO listára*) cseréljük, akkor a DFS egy megvalósítása adódik.

Megf: Tegyük fel, hogy a G gráf éleit DFS után osztályoztuk.

(1) Ha uv faél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.
(2) Ha uv előreél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.
(3) Ha uv visszaél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) < b(v)$.
(4) Ha uv keresztél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) > b(v)$.
(5) Irányítatlan gráf DFS bejárása után nincs keresztél.
(6) Ha DFS után van visszaél, akkor G tartalmaz irányított kört.
(7) Ha DFS után nincs visszaél, akkor G-ben nincs irányított kör.

4.4 Direct Acyclic Graphs

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf aciklikus (más néven DAG), ha G nem tartalmaz irányított kört.

Példa: DAG-ot úgy kaphatunk, hogy egy G irányítatlan gráf csúcsait csupa különbözőszámmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobba irányítunk.

Ha ugyanis lenne az így megirányított gráfban irányított kör, akkor az élei mentén a számok végig növekednének, ami lehetetlen. Azt fogjuk ihazolni, hogy a fenti példa minden DAG-ot leír.

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcsainak topologikus sorrendje alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba. $(V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, v_iv_j \in E \Rightarrow i < j)$

Tétel: (G irányított gráf DAG) $\Leftrightarrow$ ($V(G)$-nek $\exists$ topologikus sorrendje).

Köv: Irányított gráf aciklikussága DFS-sel gyorsan eldönthető: ha van visszaél, akkor a visszaél DFS-fabeli alapköre G egy irányított köre, így G nem DAG. Ha pedig nincs visszaél, akkor a fordított befejezési sorrend a G egy topologikus sorrendje, G tehát DAG.

Megj: DAG-ban topologikus sorrendet forráskeresések és forrástörlések alkalmazásával is találhatunk.

4.5 Leghosszabb út keresése

Ötlet: Az $l'(uv) = -l(uv)$ élhosszokkal a leghosszabb utak legrövidebbekké válnak. Olyanokat pedig tudunk keresni.

Gond: A módszerünk csak konzervatív élhosszokra működik. Irányítatlan gráfon ez nemnegatív élhosszokat jelent, ezért ez az ötlet itt nem segít. Itányított esetben nem baj a negatív élhossz, feltéve, hogy G DAG. Ekkor Ford, Floyd bármelyike használható.

Jó hír: Van egy még gyorsabb módszer: a dinamikus programozás. Ennek segítségével tetszőleges G DAG minden v csúcsához ki tudjuk számítani a v-be vezető leghosszabb utat. (Sőt! . . .)

Leghosszabb út DAG-ban: Input: $G=(V,E) DAG, l: E \to \mathbb{R}$. $\underline{Output}$: $max\{l(P): P v$-be vezető út$\}$ minden $v \in V$ csúcsra. Működés: $\boxed{1}$ $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ topologikus sorrend meghatározása. $\boxed{2}$ $i=1,2,\ldots,n: f(v_i)=max\{max\{f(v_j)+l(v_jv_i): v_jv_i \in E\}, 0\}$ Output: $f(v)\ \forall v \in V$

Helyesség: Ha a v_i-be veeztő leghosszabb út utolsó előtti csúcsa v_j, akkor $f(v_i)=f(f_j)+l(v_jv_i)$.

Megj: Ha a fenti algoritmusban minden csúcsra megjelöljük az $f(v)$ értéket beállító élt (éleket), akkor a megjelölt élek minden v csúcsba megadnak egy leghosszabb utat. Sőt: minden v-be vezető leghosszabb megkapható így.

4.6 A PERT probléma

Egy $a, b, \ldots$ tevékenységekből álló projektet kell végrehajtanunk.

Precedeniafeltételek: bizonyos (u, v) párok esetén előírás, hogy az u tevékenységet a v előtt kell elvégezni, ezért v az u kezdetét követően $c(uv)$ időkorlát elteltável kezdhető.

Cél: minden v tevékenységhez olyan $k(v) \geq 0$ kezdési időpont meghatározása, ami nem sérti a preferenciafeltételeket, és a projekt végrehajtási ideje (a legnagyobb $k(v)$ érték) minimális.

G **irányított gráf** csúcsai a tevékenységek, élei pedig a precedenciafeltételek, az uv él hossza $c(uv)$.

Megf: (1) Ha G nem DAG, akkor a projekt nem hajtható végre. (2) Ha G DAG, akkor minden v tevékenység legkorábbi kezdási időpontja a v-be vezető leghosszabb út hossza.

Köv: A PERT probléma megoldása nem más, mint a G DAG minden csúcsára az oda vezető leghosszabb út meghatározása.

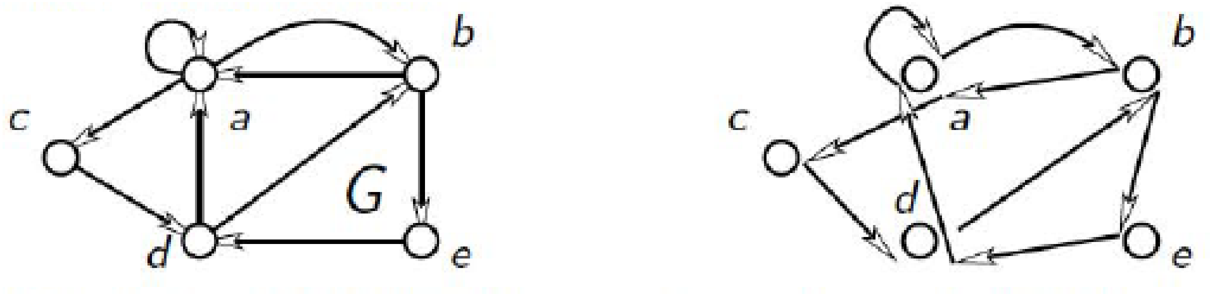
Terminológia: G leghosszabb útja kritikus út, amivől több is lehet. Kritikus út csúcsai a kritikus tevékenységek.

Megf: Ha egy kritikus tevékenység nem kezdődik el a lehető legkorábbi időpontban, akkor az egész projekt végrehajtása csúszik.

5 Euler-séták és Hamilton-körök

5.1 Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.



Megj: (1) A fenti definíció 2×2 fogalmat definiál: az Euler-sétát és az Euler-körsétát irányítatlan és irányított gráfra is. (2) Szokás a definíciót abban a formában kimondani, hogy az Euler-(kör)séta G minden élét **pontosan** egyszer tartalmazza. Tekintettel arra, hogy egy séta nem mehet át kétszer ugyanazon az élen, ez redundáns kívánalom, hiszen következménye az általunk használt definíciónak. Használatos ezen kívül az Euler-kör ill. Euler-út megnevezés is a fenti fogalmakra. (3) Irányítatlan Euler-séta: "G egy vonallal lerajzolható".

Cél: Gyors módszer az Euler-(kör)séta megtalálására, létezésének ellenőrzésére.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(b) Ha végighaladunk az Euler-körsétán, akkor a v csúcsba pontosan annyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk onnan. A körséta G minden élét pontosan egyszer érinti: $\rho(v) = \delta(v)$ $\square$

Megf: (2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

(b) G-ben minden fokszám páros.

Megf: (3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor

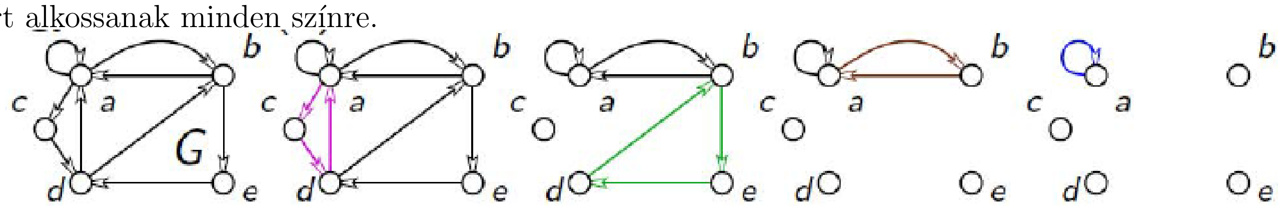
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

(b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Megj: A fenti Megfigyelés segítségével bizonyos esetekben azonnal látszik, hogy G-nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

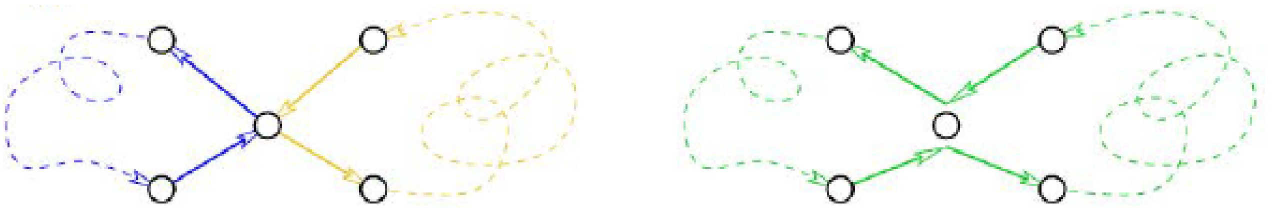
G irányítatlan Euler-gráf, ha G minden v csúcsra $d(v)$ páros.

Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (irányított) kört alkossanak minden színre.



Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\iff$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő)

(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\iff$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve összefüggő)



Tétel: (3) (G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája) $\Longleftrightarrow$ (G izolált pontoktól eltekintve összefüggő és 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.)

Euler-körséta keresése Euler-gráfban: $E(G)$-t felbontjuk körsétákra, amiket összevarrunk. Körsétát a felbontáshoz pl. úgy is kereshetünk, hogy addig követünk egy sétát, amíg tudunk. Előbb-utóbb elakadunk, de ez csakis a séta kiindulási pontjában történhet meg. Ezért a bejárt séta egy körséta, amit a felbontásban felhasználunk.

5.2 Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

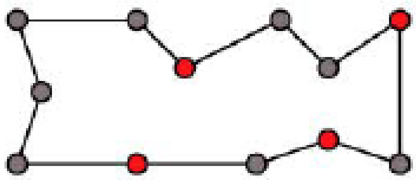
Megj: A célunk hasonló, mint az Euler-(kör)séta esetén, azaz gyors módszer, amivel el lehet dönteni egy gráfról, hogy van-e Hamilton-köre ill. -útja. Sajnos jól használható szükséges **és** elégséges feltételt nem tudunk adni erre a problémára, és jó oka van annak, hogy nem is számítunk ilyen feltétel létezésére. Tudunk viszont jól használható szükséges, és jól használható elégséges feltételt adni, de ezek csak bizonyos gráfok esetén hasznosak.

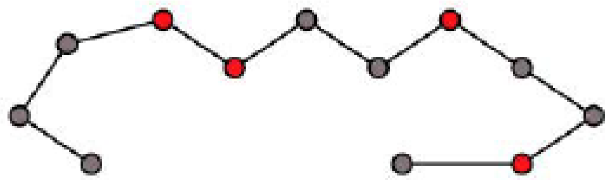
Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

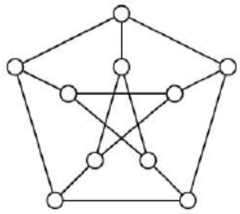
Megj: A fenti feltétel, miszerint k csúcs törlésétől a gráf legfeljebb k (ill. $k+1$) komponensre eshet szét feltétlenül **szükséges** ahhoz, hogy G-nek legyen Hamilton-köre ill. -útja. Abból azonban, hogy G teljesíti a fenti feltételt, nem következik, hogy G-nek csakugyan van Hamilton-köre vagy útja. A szükséges feltételt úgy tudjuk alkalmazni, hogy a segítségével igazoljuk egy konkrét gráfról, hogy nincs Hamilton-köre (vagy -útja). Ha pl. azt látjuk, hogy G-ből 42 csúcsot elhagyva 43 komponens keletkezik, akkor G-nek nincs Hamilton-köre. Ha a komponensszám legalább 44, akkor G-nek Hamilton-útja sincs.



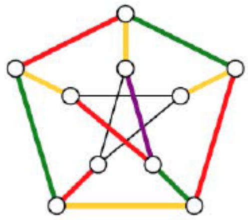


Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.

   (a) Tegyük fel, hogy külső körből k_1, a belsőből k_2 csúcsot hagytunk el. Ha $k_1 = 0$ vagy $k_2 = 0$, akkor a gráf összefüggő marad. Különben a kölső kör legfeljebb k_1, a belső pedig legfeljebb k_2 részre esik szét, vagyis összesen legfeljebb $k_1 + k_2$ komponens létezik. 

2. Nincs Hamilton-köre.

   (a) Ha lenne Hamilton-köre, akkor a Hamilton-kör éleit felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, sárga ill. zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet. 

A továbbiakban elégséges feltételeket fogunk látni Hamilton-kör létezésére. Ezek segítségével (szerencsés esetben) gyorsan és kétséget kizáróan tudjuk bizonyítani, hogy egy adott gráfnak van Hamilton-köre. Az elégséges feltétel vizsgálata azonban nem alkalmas arra, hogy egy gráf a Hamilton-körének hiányát igazoljuk.

Def: Legyen G n-csúcsú, egyszerű gráf.

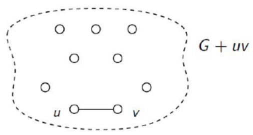
Az $u, v \in V(G)$ csúcspár gazdag, ha $d(u) + d(v) \geq n$. A G gráfra teljesül a Dirac-feltétel, ha $d(v) \geq \frac{n}{2} \forall v \in V(G)$-re. G-re igaz az Ore-feltétel, ha G bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot.

Dirac tétele: Gre igaz a Dirac-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Ore tétele: G-re igaz az Ore-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Megj: A Dirac-feltétel erősebb (többet kíván), mint az Ore. Ezért az Ore-tétel erősebb, mint a Dirac: gyengébb feltételből igazolja ugyanazt. Ezért az Ore-tétel bizonyítása a Dirac-tételt is igazolja.

5.3 A Chvátal-lezárt



Hízlalási lemma: Tegyük fel, hogy G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\iff$ ($G + uv$-nek van Hamiliton köre).

Megj: A hízlalási lemma jelentősségge az, hogy segít eldönteni azt, hogy van-e G-ben Hamilton-kör. Azt mondja ki ugyanin, hogy a gazdag párok közé G-be "ingyen" behúzhatunk éleket, u.i. ez nem változtat azon a tényen, hogy van vagy nincs Hamilton-kör a vizsgált gráfban. Megtehetjük tehát, hogy a lemma segítségével addig húzunk be éleket a gráfba, amíg lehet. Ha az így adódó $\overline{G}$ Chvátal-lezártban találunk Hamilton-kört, akkor G-nek is bizonyosan van Hamiliton-köre. Ha pedig $\overline{G}$ nem tartalmaz Hamilton-kört, akkor persze G-nek nincs Hamilton-köre.

Világos, hogy $v \notin A$ és $v \notin B$, így $|A \cup B| \leq n - 1$. Mivel (u, v) gazdag pár, ezért $|A| + |B| = d(u) + d(v) \geq n$. Ezek szerint $A \cap V \neq \emptyset$, legyen pl. $v_i \in A \cap B$. Ekkor $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}, v_1$ a G egy Hamilton-köre. $\square$

Ore tétele: Ha G bármely két nemszomszédos csúcsa gazdag párt alkot, akkor G-nek van Hamilton-köre.

Dirac-tétele: Ha $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$, akkor G-nek van Hamilton-köre.

6 Síkgráfok

6.1 Síkbarajzolhatóság

Def: Síkbarajzolt (SRt) gráf alatt olyan gráfdiagramot értünk, amiven az élek nem keresztezik egymást.

A G gráf síkbarajzolható (SRható), ha van SRt diagramja.

Síkbarajzolt gráf tartománya (lapja): a diagram komplementerének összefüggő tartománya. A nem korlátos rész neve külső tartomány.

Megj: (1) A fentieket nem csak egyszerű gráfokra definiáltuk. (2) A SRt gráf nem csupán egy gráf, hanem egy **konkrét** diagram. (3) Ugyanannak a SRható gráfnak nagyon sok lényegesen különböző síkbarajzolt diagramja (lerajzolása) lehet. (4) A görbe (tóruszra) rajzolhatóság hasonlóan definiálható.

Állítás: (A G gráf SRható) $\Longleftrightarrow$ (G gömbre rajzolható)

Köv: SRt gráf külső tartománynak nincs kitüntetett szerepe.

1. Vetítsük fel a diagramot a gömbre.
2. Állítsuk az $\acute{E}$-t a kiválasztott tartománynak megfelelő gömbi tartomány belsejébe.
3. Vetítsük vissza a gömbre rajzolt gráfot a síkra. $\square$

Köv: Bármely konvex poliéder élhálója SRható gráf.

Megj: A kx poliéder élgráfjának tartományai a poliéder lapjainak felelnek meg.

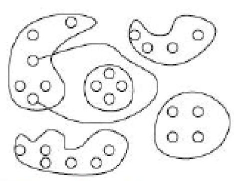
Terminológia: SRt G gráf esetén n, e, t ill. k jelöli rendre a G csúcsai, élei, tartományai és komponensei számát.

Duális kézfogáslemma (DKFL): Ha G SRt gráf, akkor $\sum_{i=1}^{t} l_i = 2e$ ahol l_i az i-dik lapot határoló élek számát jelöli.

Megj: A DKFL akkor hasznos, ha a SRt gráf lapjairól, a KFL pedig akkor, ha a fokszámokról van információnk.

Fáry-Wagner-tétel: Ha G egyerű SRható gráf, akkor olyan síkbarajzolása is van, amiben minden él egyenes szakasz.

6.2 Az Ezler-féle poliéderformula, síkgráfok karakterizációja



Tétel: Ha G SRt gráf, akkor $n + t = e + k + 1$.

$\boxed{1.}$ u és v különböző komponenshez tartoznak. Ekkor k értéke 1-gyel csökken, e-é pedig 1-gyel nő. Az ÉHL miatt nem keletkezik kör, tehát nem zárunk körül új tartományt, vagyis t nem változik. Az összefüggés fennmarad.

$\boxed{2.}$ u és v ugyanahhoz a komponenshez tartoznak. Ekkor k nem változik, e viszont 1-gyel nő. Az ÉHL miatt keletkezik kör, tehát kettévágjuk az uv élt tartalmazó korábbi tartományt. Ezért t is 1-gyel nő, az összefüggés ismét fennmarad. $\square$

Köv: **(1)** Ha G SRható, akkor t nem függ a síkbarajzolástól.

(2) (**Euler-formula**) Ha G összefüggő SRt gráf, akkor $n + t = e + 2$

(3) Ha G egyszerű, SRható és $n \geq 3$, akkor $e \leq 3n - 6$.

(4) G egyszerű, SRható, C_3-mentes és $n \geq 3 \Rightarrow e \leq 2n - 4$.

(5) Ha G egyszerű, SRható, akkor $\delta(G)\ \leq 5$ (azaz $\exists v : d(v) \leq 5$).

(6) A K_5 és $K_{3,3}$ gráfok egyike sem SRható.

Megj: Könnyen látható, hogy ha G SRható, akkor $G + e$ tóruszra rajzolható bármely e él behúzása esetén. Nem nehéz látni, hogy K_6 is tóruszra rajzolható. Sőt: még K_7 is az, de K_8 már nem.

Def: Élfelosztás: az élre egy új, másodfokú csúcs ültetése. Élüsszehúzás: az él törlése és két végpontjának azonosítása. Topologikus G (soros bővítés): G-ből élfelosztásokkal képzett gráf.

Megf: Az éltörlés, csúcstörlés, élfelosztás, élösszehúzás operációk mindegyike megőrzi a gráf SRható tulajdonságát.

Köv: (1) Top. K_5 top. $K_{3,3}$ nem SRható. (2) Ha G SRható, akkor G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja.

Kuratowski tétele: (G SRható) $\iff$ (G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja) **Példa:** Petersen-gráf

6.3 Síkgráfok duálisa

Def: A G SRt gráf duálisa a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A SRt G gráf G^* duálisa SRható. (n^*, e^*, t^*, k^*) (2) $n^* = t, e^* = e, k^* = 1$. (3) Ha v az i-dik laphoz tartozó duális csőcs, akkor $d_{G^*}(v) = l_i$.

Köv: KFL a duálisra $\sum_{i=1}^{t} l_i = \sum_{v\ \in V(G^*)} d_{G^*}(v) = 2e^* = 2e$.

Def: A $Q \subseteq E(G)$ élhalmaz a G gráf vágása, ha $G - Q$ szétesik (több komponense van, mint G-nek), de $Q' \subsetneq Q$ esetén $G - Q'$ nem esik szét. Elvágó él: egyélű vágás. Soros élek: kétélű vágás.

Kör-vágás dualitása: Tegyük fel, hogy G^* a G SRt gráf duálisa. Ekkor (C a G köre) $\iff$ (C^* a G^* vágása) ill. (Q a G vágása) $\iff$ (Q^* a G^* köre).

Köv: Hurokél duálisa elvágó él, soros élpáré párhuzamos élpár.

6.4 Whitney

Whitney tétele: Tegyük fel, hogy G^* a G SRt gráf duálisa. Ekkor H pontosan akkor duálisa a G egy alkalmas síkbarajzolásának, ha H előáll G^*-ból a fenti Whitney-operációk alkalmas egymásutánjával.

Def: A $\varphi : E(G) \to E(H)$ kölcsönös egyenértékű leképezés kör-vágás dualitás G és H között, ha C pontosan akkor G köre, ha $\varphi(C)H$ vágása.

Whitney másik tétele: Tegyük fel, hogy G és H között kör-vágás dualitás van. Ekkor G SRható, és H a G egy alkalmas síkbarajzolásának duálisa.

Megj: Egy G gráf által leírt villamos hálózat viselkedését az Ohm-él Kirchhoff-törvények írják le. Ezek a G gráf éleire, köreire és vágásaira vonatkoznak. Ha G és H közt kör-vágás dualitás van, akkor H-n elkészíthető az előző hálózat duálisa. Az eredeti hálózat megoldásában ha az I és U értékeket felcseréljük, az utóbbi hálózat megoldását kapjuk. Whitney másik tétele miatt ez a különös szimmetria csak SRható gráfok által leírt hálózatokon lehetséges.