Kuratowski gráfok síkbarajzolhatósága, **soros bővítés,** ***Kuratowski-tétel*** **könnyű iránya**. **Síkbarajzolt gráf duálisa**, a duális paraméterei. Vágás, elvágó él, soros élek. *Kör-vágás dualitása*, különféle élek duálisai. Whitney két tétele, Whitney operációk.

- **Kuratowski gráfok** síkbarajzolhatósága, **soros bővítés,** ***Kuratowski-tétel*** **könnyű iránya**.

  (6) A K_5 és $K_{3,3}$ gráfok egyike sem síkbarajzolható.

  Biz: A K_5 gráf egyszerű, de nem teljesül **(3)**, hiszen $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10 \not\leq 9 = 3 \cdot 5 - 6$. Ezért K_5 nem síkbarajzolható. A $K_{3,3}$ gráf egyszerű és C_3-mentes, de nem teljesül rá **(4)**, u.i. $|E(K_{3,3})| = 9 \not\leq 8 = 2 \cdot 6 - 4$. Ezrét $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható. $\square$

  Megj: Könnyen látható, hogy ha G síkbarajzolható, akkor $G + e$ tóruszra rajzolható bármely e él behúzása esetén. Nem nehéz látni, hogy K_6 is tóruszra rajzolható. Sőt: még K_7 is az, de K_8 már nem.

  *****Def:** Élfelosztás: az élre egy új, másodfokú csúcs ültetése. Élösszehúzás: az él törlése és két végpontjának azonosítása. Topologikus G (soros bővítés): G-ből élfelosztásokkal képzett gráf.

  Megf: Az éltörlés, csúcstörlés, élfelosztás, élösszehúzás operációk mindegyike megőrzi a gráf síkbarajzolható tulajdonságát.

  Köv:

  (1) Top. K_5 top. $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható.

  (2) Ha G síkbarajzolható, akkor G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja.

  *****Kuratowski tétele:** (G síkbarajzolható) $\iff$ (G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja) **Példa:** Petersen-gráf

- **Síkbarajzolt gráf duálisa**, a duális paraméterei. Vágás, elvágó él, soros élek. *Kör-vágás dualitása*, különféle élek duálisai.

  Def: A G síkba rajzolt gráf duálisa a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

  Megf: (1) A síkbarajzolt G gráf G^* duálisa síkbarajzolható. (n^*, e^*, t^*, k^*) (2) $n^* = t, e^* = e, k^* = 1$. (3) Ha v az i-dik laphoz tartozó duális csőcs, akkor $d_{G^*}(v) = l_i$.

  Köv: KFL a duálisra $\sum_{i=1}^{t} l_i = \sum_{v\ \in V(G^*)} d_{G^*}(v) = 2e^* = 2e$.

  Def: A $Q \subseteq E(G)$ élhalmaz a G gráf vágása, ha $G - Q$ szétesik (több komponense van, mint G-nek), de $Q' \subsetneq Q$ esetén $G - Q'$ nem esik szét. Elvágó él: egyélű vágás. Soros élek: kétélű vágás.

  Kör-vágás dualitása: Tegyük fel, hogy G^* a G síkbarajzolt gráf duálisa. Ekkor (C a G köre) $\iff$ (C^* a G^* vágása) ill. (Q a G vágása) $\iff$ (Q^* a G^* köre).

  Köv: Hurokél duálisa elvágó él, soros élpáré párhuzamos élpár.

- Whitney két tétele, Whitney operációk.

  Whitney tétele: Tegyük fel, hogy G^* a G síkbarajzolt gráf duálisa. Ekkor H pontosan akkor duálisa a G egy alkalmas síkbarajzolásának, ha H előáll G^*-ból a fenti Whitney-operációk alkalmas egymásutánjával.

  Def: A $\varphi : E(G) \to E(H)$ kölcsönös egyenértékű leképezés kör-vágás dualitás G és H között, ha C pontosan akkor G köre, ha $\varphi(C)H$ vágása.

  Whitney másik tétele: Tegyük fel, hogy G és H között kör-vágás dualitás van. Ekkor G síkbarajzolható, és H a G egy alkalmas síkbarajzolásának duálisa.

  Megj: Egy G gráf által leírt villamos hálózat viselkedését az Ohm-él Kirchhoff-törvények írják le. Ezek a G gráf éleire, köreire és vágásaira vonatkoznak. Ha G és H közt kör-vágás dualitás van, akkor H-n elkészíthető az előző hálózat duálisa. Az eredeti hálózat megoldásában ha az I és U értékeket felcsréljük, az utóbbi hálózat megoldását kapjuk. Whitney másik tétele miatt ez a különös szimmetria csak síkbarajzolható gráfok által leírt hálózatokon lehetséges.