

Általános gráfbejárás: a csúcsok állapotváltozása, a bejárás általános lépése, a bejáráshoz tartozó sorrend ill. az élek osztályozása bejárás után. A BFS és tulajdonságai, legrövidebb utak fájának létezése.

- **Általános gráfbejárás & BFS:** A gráfbejárás algoritmus az inputgráf csúcsait és éleit fedezi fel. Minden csúcs az eléretlen  $\rightarrow$  elért  $\rightarrow$  befejezett állapotokat veszi fel. A bejárás akkor ér véget, amint minden csúcs befejezetté vált.

1. Van elért csúcs. Választunk egyet, mondjuk  $u$ -t.
  - (1a) Ha van olyan  $uv$  él, amire  $v$  eléretlen, akkor  $v$  elértté válik.
  - (1b) Ha nincs ilyen  $uv$  él, akkor  $u$  befejezetté válik.
1. Nincs elért csúcs.
  - (2a) Ha van eléretlen  $u$  csúcs, akkor  $u$ -t elértté tesszük.
  - (2b) Ha nincs eléretlen csúcs (azaz  $\forall$  csúcs fejezett), akkor END.

### Szélességi bejárás (BFS) szabálya:

Az 1. esetben mindig a legkorábban elért  $u$ -t választjuk.

**Input:**  $G = (V, E)$  (ir/ir.tatlan) gráf, ( $v \in V$  gyökérpont<sup>1</sup>).

**Output:** (1) A csúcsok elérési és befejezési sorrendje. (2) Az élek osztályozása:

**faél:** Olyan él, ami mentén egy csúcs elértté vált.

$uv$  **előreél:** nem faél, de  $u$ -ból  $v$ -be faélekből irányított út vezet.

$uv$  **visszaél:**  $v$ -ből  $u$ -ba faélekből irányított út vezet.

**keresztél:** minden más él ( $u$  és  $v$  közt nincs leszármazott viszony).

(3) A **bejárás fája:** a faélek alkotta részgráf. (A bejárás fája valójában egy gyökereiből kifelé irányított erdő.)

**Megf:** Irányítatlan esetben az előreél és a visszaél ugyanazt jelenti.

**Terminológia:** Ha a bejárás fájában  $u$ -ból  $v$ -be irányított út vezet, akkor  $u$  a  $v$  őse és  $v$  az  $u$  leszármazottja. A faél és az előreél tehát ősből leszármazottba, a visszaél leszármazottból ősbé vezet.

A bejárás során kialakul a csúcsok egy **elérési** ill. egy **befejezési** sorrendje, továbbá minden csúcshoz feljegyezzük azt is, hogy melyik él mentén értünk el (ha van ilyen él). Ez utóbbi élek (faélek) alkotják a **bejárás fáját** (ami egyrészt **irányított**, másrészt pedig **erdő**). A  $G$  gráf további  $uv$  éle **előreél**  $\Rightarrow$ , ha  $u$  a bejárás fájában a  $v$  őse, ha  $u$  a  $v$  **leszármazottja**, akkor **visszaél**. Minden más pedig **keresztél**. (Irányítatlan gráf bejárásakor minden élt oda-vissza irányított ének tekintünk.)

### • A BFS tulajdonságai

Nézzük meg egy **irányított** gráf BFS bejárását is.

**Állítás:** Tfh  $G = (V, E)$  BFS bejárása után a csúcsok elérési sorrendje  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Ekkor az alábbiak teljesülnek.

(1) Ha  $i < j$ , akkor  $v_i$ -t hamarabb fejezzük be, mint  $v_j$ -t, továbbá  $v_i$  gyerekei megelőzik  $v_j$  gyerekeit az elérési sorrendben.

**Biz:** A  $v_i$ -t befejezésének pillanatában  $v_i$  minden gyereke elért, de  $v_j$ -nek még egy gyereke sem az. Ezért  $v_j$  gyerekeit a  $v_i$  csúcs befejezése után érjük el, majd ezt követően fejezzük be  $v_j$ -t.  $\square$

(2) **Az elérési és befejezési sorrend (BFS esetén) megegyezik.**

**Biz:** Ha  $v_i$ -t korábban érjük el, mint  $v_j$ -t, akkor (1) miatt  $v_i$ -t korábban is fejezzük be  $v_j$ -nél. Ezért bármely két csúcs sorrendje ugyanaz az elérési sorrendben mint befejezési sorrendben. Tehát az elérési sorrendnek meg kell egyeznie a befejezési sorrenddel.  $\square$

(3) **Gréfél nem ugorhat át falét:** ha  $k < i < j \leq l$  és  $v_i v_j$  faél, akkor  $v_k v_l$  nem lehet gráfél.

**Biz:** Ha  $v_k v_l \in E(G)$ , akkor  $v_l$  szülője  $v_k$  vagy egy  $v_k$ -t megelőző csúcs. (1) miatt  $v_j$  szülője sem következhet  $v_k$  után, vagyis  $v_i$  nem lehet  $v_j$  szülője.

(4) **Nincs előreél.** (Irányítatlan eset: csak faél és keresztél van.)

**Biz:** Indirekt: ha  $v_i v_j$  előreél lenne, akkor  $v_i$ -ből  $v_j$ -be irányított út vezetne a BFS-fában, és  $v_i v_j$  ennek a faélekből álló útnak az utolsó élt átugraná.  $\square$

<sup>1</sup>A gyökérben kezdetben elért állapotú, ezért kivétel az általános szabály alól.

(5) Ha a BFS-fában  $k$ -élű irányított út vezet  $u$ -ból  $v$ -be, akkor  $G$ -ben nincs  $k$ -nál kevesebb élű  $uv$ -út.

**Biz:** Ha lenne a BFS fa-beli útnál kevesebb élű út  $G$ -ben, akkor lenne olyan gráfél, ami faélt ugrik át.  $\square$

(6) **A BFS-fa egy legrövidebb utak fája:** a BFS-fa  $v_1$  gyökeréből bármely  $v_i$  csúcsba vezető faút a  $G$  egy legkevesebb élű  $v_1 v_i$ -útja.

- **Legrövidebb utak**

**Def:** Adott  $G$  (ir) gráf és  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény esetén egy  **$P$  út hossza** a  $P$  éleinek összhossza:  $l(P) = \sum_{e \in E(P)} l(e)$ .

Az  $u$  és  $v$  csúcsok **távolsága** a legrövidebb  $uv$ -út hossza:  $dist_l(u, v) := \min\{l(P) : P \text{ } uv\text{-út}\}$  ( $\nexists uv$ -út  $\Rightarrow dist_l(u, v) = \infty$ .) Az  $l$  hosszfüggvénye **nemnegatív**, ha  $l(e) \geq 0$  teljesül minden  $e$  élre. Az  $l$  hosszfüggvény **konzervatív**, ha  $G$ -ben  $\nexists$  negatív összhosszú ir. kör.

**Cél:** Legrövidebb út keresése irányított/irányítatlan gráfban.

**Megf:** Ha  $l(e) = 1$  a  $G$  minden  $e$  élére, akkor  $l(P)$  a  $P$  élszáma. Ezért a BFS-fa minden gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből, azaz a szélességi bejárás tekinthető egy legrövidebb utat kereső algoritmusnak is.

**Def:** Adott  $G$  (ir) gráf,  $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvény és  $r \in V(G)$ .  **$(r, l)$ -felső becslés** olyan  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, ami felülről becsli minden csúcs  $r$ -től mért távolságát:  $dist_l(r, v) \geq f(v) \forall v \in V(G)$ .

**Triviális**  $(r, l)$ -felső becslés:  $f(v) = \begin{cases} 0 & v = r \\ \infty & v \neq r \end{cases}$

**Pontos**  $(r, l)$ -felső becslés:  $f(v) = dist_l(r, l) \forall v \in V(G)$ .