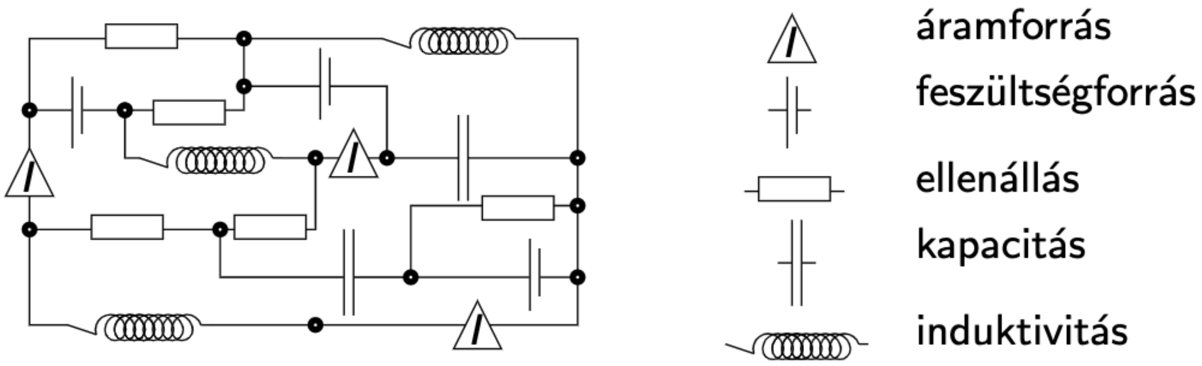
Minimális költségű feszítőfa, mkffák struktúrája, **Kruskal-algoritmus** helyessége, villamos hálózathoz tartozó normál fa keresése.

- **Minimális költségű feszítőfa:** Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(F)$.
  Az $F \subseteq E$ élhalmaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
  (1) (V, F) a G feszítőfája, és
  (2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
  $$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes.} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \qquad F := F_m$$
- **Minimális költségű feszítőfa:** olyan $F \in E$ élhalmaz, amire (V, F) fa, és $k(F)$ minimális.
- Mkkfák struktúrája: $G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nak: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.
  Megf: A G gráfon futtotott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.
  Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_l\}, k(f_1) \leq k(f_2) \leq \cdots \leq k(f_l)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_l\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \cdots \leq k(f'_l)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq l$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.
  Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.
  Köv: (2) Az F' élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje G-nek, ha $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \leq 0$-ra.
  Biz: A Lemma bizonyítja az elégségességet.
- **Kruskal algoritmus:**
  - Input: $G = (V, E)$ gráf, és $k : E \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény.
  - Output: minimális költségű feszítőfa.
  - Működés: minden lépésben megépítjuk a legolcsóbb élt, ami nem hoz létre kört. Mohó algoritmus, mert csak azzal törődik, ami éppen a legalacsonyabb költségű. Az így keletkezett fa a G gráf egy minimális költségű (súlyú) feszítőfája.
  - Helyességének bizonyítása: tegyük fel, hogy az algoritmus helytelen, ekkor létezik egy f él, amit e helyére bevéve olcsóbb feszítőfát kapunk. Ekkor azonban f költsége kisebb, mint e költsége, így f-et az algoritmussal korábban már ellenőriztük, tehát ellentmondásra jutottunk, azaz a feszítőfa minimális költségű.
- Villamos hálózatohoz tartozó normál fa keresése:



  - Tegyük fel, hogy egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tulajdonképpen egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Az, hogy mi történik (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), a Kirchoff- ill. Ohm-törvényekkel írható le.
  - **Csomóponti törvény:** a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.
  - **Huroktörvény:** a gráf tetszőleges köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.

- Mikor "értelmes" egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Bizonyítható, hogy ha a fenti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat "értelmes". Ennek a a bizonyítéka a normál fa: G olyan feszítőfája, ami minden feszültségforrást tartalmaz, de egyetelen árramforrást sem (és mindemellett a legtöbb kapacitást és a lehető legkevesebb induktivitás tartalmazza).
- **Normál fa keresése:** fesz.forrás (1), kapacitás (2), ellenállás (3), induktivitás (4), áramforrás (5) élköltségekhez keressünk mkffát! Ha ez tartalmaz áramforrást, vagy nem tartalmaz minden feszültségforrást, akkor nincs normál fa, egyébként a mkffa egy normál fa és egyértelmű a megoldás "értelmes" a hálózat.