# A számítástudomány alapjai

Mátrixegyenletek

2022. december 6.

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során?

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

#### Példa:

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

Példa:  

$$x_1 - 3x_3 + 5x_4 = -6$$
  
 $7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$   $\longleftrightarrow$   $\begin{pmatrix} 1 & 0 - 3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$ 

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

Példa:  

$$x_1 - 3x_3 + 5x_4 = -6$$
  
 $7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$   $\longleftrightarrow$   $\begin{pmatrix} 1 & 0 - 3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$   $\longleftrightarrow$   $A\underline{x} = \underline{b}$ 

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

Megf: Az  $(A|\underline{b})$  kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az Ax = b mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix,  $\underline{b}$  a konstansokat,  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^{\top}$  pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

voltaképp egy mátrixegyenlet.

Példa:
$$x_1 - 3x_3 + 5x_4 = -6$$

$$7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$$

$$x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 11$$

$$Az (A|b) kib ogyhómy hoz tartozó lipcáris ogyonletro.
$$A = \underbrace{b}_{11}$$
Mogf: Az (A|b) kib ogyhómy hoz tartozó lipcáris ogyonletro.$$

Megf: Az  $(A|\underline{b})$  kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az  $A\underline{x} = \underline{b}$  mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix,  $\underline{b}$  a konstansokat,  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^{\top}$  pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

**Kínzó kérdés:** Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az  $A\underline{x} = \underline{b}$  lineáris egyenletrendszer megoldható?

Példa:  

$$x_1 - 3x_3 + 5x_4 = -6$$
  
 $7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$   $\longleftrightarrow$   $\begin{pmatrix} 1 & 0 - 3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$   $\longleftrightarrow$   $A\underline{x} = \underline{b}$ 

Megf: Az  $(A|\underline{b})$  kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az  $A\underline{x} = \underline{b}$  mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix,  $\underline{b}$  a konstansokat,  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^{\top}$  pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

**Kínzó kérdés:** Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az  $A\underline{x} = \underline{b}$  lineáris egyenletrendszer megoldható?

Példa:  

$$x_1 - 3x_3 + 5x_4 = -6$$
  
 $7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$   $\leftrightarrow$   $\begin{pmatrix} 1 & 0 - 3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$   $\leftrightarrow$   $A\underline{x} = \underline{b}$ 

Megf: Az  $(A|\underline{b})$  kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az  $A\underline{x} = \underline{b}$  mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix,  $\underline{b}$  a konstansokat,  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^{\top}$  pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

**Kínzó kérdés:** Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az  $A\underline{x} = \underline{b}$  lineáris egyenletrendszer megoldható?

Frappáns válasz: A kérdés voltaképpen az, hogy mikor található olyan  $\underline{x}$  oszlopvektor (konkrét számokkal), amire  $A\underline{x} = \underline{b}$  teljesül.

Példa:  

$$x_1 - 3x_3 + 5x_4 = -6$$
  
 $7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$   $\longleftrightarrow$   $\begin{pmatrix} 1 & 0 - 3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$   $\longleftrightarrow$   $A\underline{x} = \underline{b}$ 

Megf: Az  $(A|\underline{b})$  kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az  $A\underline{x} = \underline{b}$  mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix,  $\underline{b}$  a konstansokat,  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^{\top}$  pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

**Kínzó kérdés:** Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az  $A\underline{x} = \underline{b}$  lineáris egyenletrendszer megoldható?

**Frappáns válasz:** A kérdés voltaképpen az, hogy mikor található olyan  $\underline{x}$  oszlopvektor (konkrét számokkal), amire  $A\underline{x} = \underline{b}$  teljesül. **Láttuk:**  $\forall A, C$  mátrixokra (C előáll C = AB alakban)  $\iff$ 

Példa:  

$$x_1 - 3x_3 + 5x_4 = -6$$
  
 $7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$   $\leftrightarrow$   $\begin{pmatrix} 1 & 0 - 3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$   $\leftrightarrow$   $A\underline{x} = \underline{b}$ 

Megf: Az  $(A|\underline{b})$  kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az  $A\underline{x} = \underline{b}$  mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix,  $\underline{b}$  a konstansokat,  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^{\top}$  pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

**Kínzó kérdés:** Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az  $A\underline{x} = \underline{b}$  lineáris egyenletrendszer megoldható?

Frappáns válasz: A kérdés voltaképpen az, hogy mikor található olyan  $\underline{x}$  oszlopvektor (konkrét számokkal), amire  $A\underline{x} = \underline{b}$  teljesül. Láttuk:  $\forall A, C$  mátrixokra (C előáll C = AB alakban)  $\iff$  (C minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja)

Példa:  

$$x_1 - 3x_3 + 5x_4 = -6$$
  
 $7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$   $\leftrightarrow$   $\begin{pmatrix} 1 & 0 - 3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$   $\leftrightarrow$   $A\underline{x} = \underline{b}$ 

Megf: Az  $(A|\underline{b})$  kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az  $A\underline{x} = \underline{b}$  mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix,  $\underline{b}$  a konstansokat,  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^{\top}$  pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

**Kínzó kérdés:** Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az  $A\underline{x} = \underline{b}$  lineáris egyenletrendszer megoldható?

Frappáns válasz: A kérdés voltaképpen az, hogy mikor található olyan  $\underline{x}$  oszlopvektor (konkrét számokkal), amire  $A\underline{x} = \underline{b}$  teljesül. **Láttuk:**  $\forall A, C$  mátrixokra (C előáll C = AB alakban)  $\iff$  (C minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja)

Köv: Ha A oszlopai  $A^1, \ldots$ , akkor  $(\exists \underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}) \iff (\underline{b} \in \langle A^1, \ldots \rangle)$   $\iff (\langle A^1, \ldots \rangle = \langle \underline{b}, A^1, \ldots \rangle) \iff (\dim \langle A^1, \ldots \rangle = \dim \langle \underline{b}, A^1, \ldots \rangle)$ 

Lineáris egyenletrendszerek érdekes speciális esete, ha az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik. Ilyenkor az együtthatómátrix négyzetes. Korábban láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

Lineáris egyenletrendszerek érdekes speciális esete, ha az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik. Ilyenkor az együtthatómátrix négyzetes. Korábban láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen. **Kínzó kérdés:** Lehet-e a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrixból következtetni?

Lineáris egyenletrendszerek érdekes speciális esete, ha az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik. Ilyenkor az együtthatómátrix négyzetes. Korábban láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen. Kínzó kérdés: Lehet-e a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrixból következtetni?

**Válasz:** Lehet, de csak akkor, ha az együtthatómátrix négyzetes. Ha a mátrixnak több oszlopa van, mint ahány sora, akkor biztosan nem egyértelmű a megoldás, ha pedig a sorok száma több, akkor az egyértelműség a jobboldali  $\underline{b}$  vektoron is múlik.

Lineáris egyenletrendszerek érdekes speciális esete, ha az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik. Ilyenkor az együtthatómátrix négyzetes. Korábban láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen. Kínzó kérdés: Lehet-e a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrixból következtetni?

**Válasz:** Lehet, de csak akkor, ha az együtthatómátrix négyzetes. Ha a mátrixnak több oszlopa van, mint ahány sora, akkor biztosan nem egyértelmű a megoldás, ha pedig a sorok száma több, akkor az egyértelműség a jobboldali  $\underline{b}$  vektoron is múlik.

Állítás: Ha  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :  $(A\underline{x} = \underline{b} \text{ egyért. megoldható}) \iff (|A| \neq 0)$ 

Lineáris egyenletrendszerek érdekes speciális esete, ha az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik. Ilyenkor az együtthatómátrix négyzetes. Korábban láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen. Kínzó kérdés: Lehet-e a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrixból következtetni?

**Válasz:** Lehet, de csak akkor, ha az együtthatómátrix négyzetes. Ha a mátrixnak több oszlopa van, mint ahány sora, akkor biztosan nem egyértelmű a megoldás, ha pedig a sorok száma több, akkor az egyértelműség a jobboldali  $\underline{b}$  vektoron is múlik.

**Állítás:** Ha  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :  $(A\underline{x} = \underline{b} \text{ egyért. megoldható}) \iff (|A| \neq 0)$  **Biz:**  $\Rightarrow$ : Tfh A oszlopai nem lin.ftn-ek, azaz  $\exists \underline{y} \neq \underline{0}$ :  $A\underline{y} = \underline{0}$ . Ha  $A\underline{x} = \underline{b}$ , akkor  $A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$ , tehát mégsem egyértelmű az  $A\underline{x} = \underline{b}$  megoldása, hisz  $\underline{x} + \underline{y} \neq \underline{x}$  is megoldás. Ez ellentmondás, tehát A oszlopai lin.ftn-ek, ezért  $|A| \neq 0$ .

Lineáris egyenletrendszerek érdekes speciális esete, ha az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik. Ilyenkor az együtthatómátrix négyzetes. Korábban láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen. Kínzó kérdés: Lehet-e a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrixból következtetni?

Válasz: Lehet, de csak akkor, ha az együtthatómátrix négyzetes. Ha a mátrixnak több oszlopa van, mint ahány sora, akkor biztosan nem egyértelmű a megoldás, ha pedig a sorok száma több, akkor az egyértelműség a jobboldali b vektoron is múlik.

Allítás: Ha  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :  $(Ax = b \text{ egyért. megoldható}) \iff (|A| \neq 0)$ **Biz:**  $\Rightarrow$ : Tfh A oszlopai nem lin.ftn-ek, azaz  $\exists y \neq 0$ : Ay = 0. Ha  $A\underline{x} = \underline{b}$ , akkor  $A(\underline{x} + y) = A\underline{x} + Ay = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$ , tehát mégsem egyértelmű az Ax = b megoldása, hisz  $x + y \neq x$  is megoldás. Ez ellentmondás, tehát A oszlopai lin.ftn-ek, ezért  $|A| \neq 0$ .

 $\Leftarrow: |A| \neq 0$ , ezért A-nak van inverze. Így

$$\begin{bmatrix} A\underline{x} = \underline{b} \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \underline{x} = (A^{-1}A)\underline{x} = A^{-1}(A\underline{x}) = A^{-1}\underline{b} \end{bmatrix}.$$



Dec 14 10:00, IB028(?): 2. pótZH 23 pont feletti ZH nem rontható 24 alá.

Dec 14 10:00, IB028(?): 2. pótZH

23 pont feletti ZH nem rontható 24 alá.

Dec 20 10:00, IB027(?): 1. vizsgaalkalom & ppZH

Az jöhet ppZH-ra, akinek csak egy ZH hiányzik az aláíráshoz.

IMSC pontot itt már nem lehet szerezni, viszont jelentkezni kell a neptunban, és különeljárási díjat kell fizetni.

Dec 14 10:00, IB028(?): 2. pótZH

23 pont feletti ZH nem rontható 24 alá.

Dec 20 10:00, IB027(?): 1. vizsgaalkalom & ppZH

Az jöhet ppZH-ra, akinek csak egy ZH hiányzik az aláíráshoz.

IMSC pontot itt már nem lehet szerezni, viszont jelentkezni kell a neptunban, és különeljárási díjat kell fizetni.

A szóbeli vizsgák előtti napokon konzultáció lesz, részletek a kurzus honlapján jelennek meg. A tételsor még a héten kikerül a honlapra.

Dec 14 10:00, IB028(?): 2. pótZH

23 pont feletti ZH nem rontható 24 alá.

Dec 20 10:00, IB027(?): 1. vizsgaalkalom & ppZH

Az jöhet ppZH-ra, akinek csak egy ZH hiányzik az aláíráshoz.

IMSC pontot itt már nem lehet szerezni, viszont jelentkezni kell a neptunban, és különeljárási díjat kell fizetni.

A szóbeli vizsgák előtti napokon konzultáció lesz, részletek a kurzus honlapján jelennek meg. A tételsor még a héten kikerül a honlapra.

Szóbelik: Neptunban jelentkezni kell, létszámkorlát van.

Tételsorból egy tételt sorsolunk, arra kell 45 perc alatt önállóan vázlatot készíteni. Ez alapján felelet + kis kérdések. (A ZH által le nem fedett részbe belekérdezünk.)

Dec 14 10:00, IB028(?): 2. pótZH

23 pont feletti ZH nem rontható 24 alá.

Dec 20 10:00, IB027(?): 1. vizsgaalkalom & ppZH

Az jöhet ppZH-ra, akinek csak egy ZH hiányzik az aláíráshoz.

IMSC pontot itt már nem lehet szerezni, viszont jelentkezni kell a neptunban, és különeljárási díjat kell fizetni.

A szóbeli vizsgák előtti napokon konzultáció lesz, részletek a kurzus honlapján jelennek meg. A tételsor még a héten kikerül a honlapra.

Szóbelik: Neptunban jelentkezni kell, létszámkorlát van.

Tételsorból egy tételt sorsolunk, arra kell 45 perc alatt önállóan vázlatot készíteni. Ez alapján felelet + kis kérdések. (A ZH által le nem fedett részbe belekérdezünk.)

**Ismétlő/javító vizsga**: alanyi jogon egyszer jár, felülírja a korábbi eredményt. A második ismétlő vizsga díjköteles, de 6 sikertelen vizsga egyazon kurzusból kötelező elbocsátással jár.

Dec 14 10:00, IB028(?): 2. pótZH

23 pont feletti ZH nem rontható 24 alá.

Dec 20 10:00, IB027(?): 1. vizsgaalkalom & ppZH

Az jöhet ppZH-ra, akinek csak egy ZH hiányzik az aláíráshoz.

IMSC pontot itt már nem lehet szerezni, viszont jelentkezni kell a neptunban, és különeljárási díjat kell fizetni.

A szóbeli vizsgák előtti napokon konzultáció lesz, részletek a kurzus honlapján jelennek meg. A tételsor még a héten kikerül a honlapra.

Szóbelik: Neptunban jelentkezni kell, létszámkorlát van.

Tételsorból egy tételt sorsolunk, arra kell 45 perc alatt önállóan vázlatot készíteni. Ez alapján felelet + kis kérdések. (A ZH által le nem fedett részbe belekérdezünk.)

**Ismétlő/javító vizsga**: alanyi jogon egyszer jár, felülírja a korábbi eredményt. A második ismétlő vizsga díjköteles, de 6 sikertelen vizsga egyazon kurzusból kötelező elbocsátással jár.

Megfontolandó tanács: Igyekezzünk tervszerűen felkészülni és időben vizsgázni. Az utolsó vizsgaalkalmak nagyon zsúfoltak, a férőhely nem garantált.

Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenlettel ekvivalens

- Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenlettel ekvivalens
- ► A megoldhatóság jellemezhető a <u>b</u> vektor és az A együtthatómátrix oszlopai generálta altér viszonyával

- Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenlettel ekvivalens
- A megoldhatóság jellemezhető a <u>b</u> vektor és az A együtthatómátrix oszlopai generálta altér viszonyával
- n × n egyenletrendszer egyértelmű megoldhatósága és az együtthatómátrix regularitása

- Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenlettel ekvivalens
- A megoldhatóság jellemezhető a <u>b</u> vektor és az A együtthatómátrix oszlopai generálta altér viszonyával
- n × n egyenletrendszer egyértelmű megoldhatósága és az együtthatómátrix regularitása

# Köszönöm a figyelmet!