Mélységi keresés és alkalmazásai (fellépő éltípusok, mélységi- és befejezési számozásból az éltípus meghatározása, irányított kör létezésének eldöntése DFS-sel).

- **Depth First Search (DFS)**

(A mélységi bejárás avagy DFS alatt olyan gráfbejárást értünk, amikor mindig a legutolsónak elért csúcsból kerül elérésre a soron következőnek elért csúcs. Az elérési illetve befejezési sorrendből adódik minden v csúcshoz egy $m(v)$ mélységi ill. $b(v)$ befejezési szám.)

"Mélységi bejárás (DFS): A bejárás során mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk az $\boxed{1.}$ esetben.

Mélységi és befejezési számozás: DFS után $m(v)$ ill. $b(v)$ a v csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

Megj: A BFS konkrét megvalósításában szükség van arra, hogy az elért csúcsokat úgy tároljuk, hogy könnyű legyen kiválasztani az elért csúcsok közül a legkorábban elértet. Erre egy célszerű adatstruktúra a *sor* (avagy *FIFO lista* (First In First Out)). Ha a BFS megvalósításában ezt az adatstruktúrát *veremre* (más néven *LIFO listára* (Last In First Out)) cseréljük, akkor a DFS egy megvalósítása adódik.

Megf: Tegyük fel, hogy a G gráf éleit DFS után osztályoztuk.

(1) Ha uv faél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

Biz: v-t u-ból értük el, ezért $m(u) < m(v)$. A v elérésekor u és v elért állapotúak. A DFS szerint v-t u előtt fejezzük be.

(2) Ha uv előreél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

Biz: u-ból v-be faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, befejezési csökken.

(3) Ha uv visszaél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) < b(v)$.

Biz: v-ből u-ba faéleken keresztül vezet irányított út. (1) miatt az út mentén a mélységi szám növekszik, a befejezési csökken.

(4) Ha uv keresztél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

Biz: $m(u) < m(v)$ esetén a DFS miatt v az u leszármazottja lenne. Ezért $m(u) > m(u)$. Ha u-t a v befejezése előtt érnénk el, akkor u a v leszármazottja lenne. Ezért az alábbi sorrendben történik u és v evolúciója: v elérése, v befejezése, u elérése, u befejezése.

(5) Irányítatlan gráf DFS bejárása után nincs keresztél.

Biz: Indirekt. Ha uv keresztél, akkor (4) miatt $m(u) > m(v)$, továbbá vu is keresztél, ezért $m(v) > m(u)$. Ellentmondás.

(6) Ha DFS után van visszaél, akkor G tartalmaz irányított kört.

Biz: A DFS fa visszaélhez tartozó alapköre a G egy irányított köre.

(7) Ha DFS után nincs visszaél, akkor G-ben nincs irányított kör.

Biz: Bármely irányított körnek van olyan uv éle, amire $b(u) < b(v)$. Ez az él csak visszaél lehet.

A mélységi bejárás lépésszáma lineáris, azaz van olyan c konstans, hogy tetszőleges u csúcsú, m élű gráf DFS-éhez legfeljebb $c(n + m)$ lépés szükséges.

- **Directed Acyclic Graphs**

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf aciklikus (más néven DAG), ha G nem tartalmaz irányított kört.

Példa: DAG-ot úgy kaphatunk, hogy egy G irányítatlan gráf csúcsait csupa különböző számmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobba irányítunk.

Ha ugyanis lenne az így megirányított gráfban irányított kör, akkor az élei mentén a számok végig növekednének, ami lehetetlen. Azt fogjuk igazolni, hogy a fenti példa minden DAG-ot leír.

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcsainak topologikus sorrendje alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba. $(V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, v_i v_j \in E \Rightarrow i < j)$

Tétel: (G irányított gráf DAG) $\Leftrightarrow$ ($V(G)$-nek $\exists$ topologikus sorrendje).

Biz: Tegyük fel, hogy $\exists$ toplogikus sorrend. Láttuk, hogy G ekkor DAG. ✓

Biz: Most tegyük fel, hogy G DAG, és futtassunk rajra egy DFS-t. Láttuk, hogy a DFS után nem lesz visszaél, ezért minden uv irányított élre $b(u) > b(v)$ teljesül. Ezért a csúcsok befejezési sorrendjének megfordítása a G csúcsainak egy topologikus sorrendje.

Köv: Irányított gráf aciklikussága DFS-sel gyorsan eldönthető: ha van visszaél, akkor a visszaél DFS-fabeli alapköre G egy irányított köre, így G nem DAG. Ha pedig nincs visszaél, akkor a fordított befejezési sorrend a G egy topologikus sorrendje, G tehát DAG.

Megj: DAG-ban topologikus sorrendet forráskeresések és forrástörlések alkalmazásával is találhatunk.