12. Az $\mathbb{R}^n$ **tér**, vektorműveletek azonosságai, (generált) **altér** (példák), (triviális) **lineáris kombináció**, alterek metszete, **generátorrendszer**, **lineáris függetlenség** (kétféle definíció). Lin.ftn rendszer hízlalása, generátorrendszer ritkítása, kicserélési lemma, **FG-egyenlőtlenség** és következménye.

1. Az $\mathbf{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk.

Példa:
$\begin{pmatrix} e \\ \pi \\ 42 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, ill. $\underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, utóbbi esetben az 1-es felülről az i-dik helyen áll.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e}_i$
(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

Konvenció: A jelölés során az oszlopvektorokat aláhúzással különböztetjük meg a skalároktól.

Megj: A vektorok tehát itt és most nem „irányított szakaszok”, hanem ennél általánosabb fogalmat takarnak: az irányított szakaszok is tekinthetők vektornak, de egy vektor a mi tárgyalásunkban nem feltétlenül irányított szakasz.

2. Vektorműveletek azonosságai

Állítás: Az $\mathbb{R}^n$ tér vektoraival történő számolásban néhány fontos szabály sokat segít. Tetsz. $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárokra az alábbiak teljesülnek
(1) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (az összeadás kommutatív)
(2) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ (az összeadás asszociatív)
(3) $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$ (egyik disztributivitás)
(4) $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}$ (másik disztributivitás)
(5) $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u})$ (skalárral szorzás asszociativitása)

Biz: Mivel mindkét művelet koordinátánként történik, elég az egyes azonosságokat koordinátánként ellenőrizni. Ezek viszont éppen a valós számokra (azaz a skalárokra) vonatkozó, jól ismert szabályok. $\square$

Konvenció: $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $-\underline{v} := (-1) \cdot v$.
Megj: Vektorok között nem csak az összeadás, hanem a kivonás is értelmezhető: $\underline{u} - \underline{v} := \underline{u} + (-1)\underline{v}$. Ezáltal a kivonás is egyfajta összeadás, tehát az összadásra vonatkozó szabályok értelemszerű változatai a kivonásra is érvényesek.

A vektorokkal történő számoláskor érvényes szabályok nagyon hasonlók a valós számok esetén megszokott szabályokhoz.

3. Generált altér(példák)

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$. (3) $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$. **Def:** $\mathbb{R}^n$ triviális alterei: $\{\underline{0}\}, \mathbb{R}^n$.

4. Triviális lineáris kombináció

Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Biz: $\Rightarrow$: $\lambda_i \underline{x}_i \in V \ \forall i$ esetén, így a $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ összegük is V-beli.
$\Leftarrow$: Ha $\underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\underline{x} + \underline{y}$ ill. $\lambda\underline{x}$ lineáris kombinációk. Mivel V zárt a lináris kombinációra, ezért $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$. Ez tetszőleges $\underline{x}, \underline{y}, \lambda$ esetén fennáll, tehát V zárt a műveletekre, vagyis altér. □

5. Alterek metszete

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$. (3) $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$. **Def:** $\mathbb{R}^n$ triviális alterei: $\{\underline{0}\}, \mathbb{R}^n$.

6. Generátorrendszer

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Példa: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ generátorrendszere, hisz minden $\mathbb{R}^n$-beli vektor előáll az egységvektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\langle \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n \rangle = \mathbb{R}^n$.
Ha $\mathbb{R}^2$-ben ha $\underline{u}$ és $\underline{v}$ nem párhuzamosak, akkor $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ generátorrendszer, hiszen bármely $\underline{z}$ vektor előállítható $\underline{u}$ és $\underline{v}$ lineáris kombinációjaként. (Ehhez $\underline{u}$ és $\underline{v}$ egyenesére kell a „másik" vektorral párhuzamosan vetíteni az előállítandó $\underline{z}$ vektort.)
Hasonlóan, ha $\mathbb{R}^3$-ban három vektor nem esik ugyanarra az origón átmenő síkra, akkor ez a három vektor generátorrendszert alkot.

7. Lineáris függetlenség 1.

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.
Példa: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ lin. ftn $\mathbb{R}^n$-ben, hisz ha $\lambda_1 \underline{e}_1 + \ldots \lambda_n \underline{e}_n = \underline{0}$ akkor az i-dik koordináta 0 volta miatt $\lambda_i = 0$, tehát a lineáris kombináció triviális.
$\mathbb{R}^2$-ben két vektor akkor lin.öf, ha párhuzamosak. Tehát ha nem párhuzamosak, akkor lin. ftn-ek. ($\underline{0}$ minden vektorral párhuzamos.)
$\mathbb{R}^3$-ban pedig az igaz, hogy ha három vektor nem esik ugyanarra az origón átmenő síkra, akkor ez a három vektor lineárisan független rendszert alkot.

Megj: A lin.ftn-ség (akárcsak a lin.öf tulajdonság) vektorok egy halmazára és nem az egyes vektorokra vonatkozik. Hasonló igaz a generátorrendszerre. Az, hogy egy konrét $\underline{v}$ vektor benne van egy lin.ftn (vagy lin.öf vagy generátor-) rendszerben lényegében semmi információt nem ad $\underline{v}$-ről.

8. Lineáris függetlenség 2.

Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\Longleftrightarrow$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.
Biz: A fenti állítások tagadásainak ekvivalenciáját igazoljuk.
1. Tfh $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ **nem** lineárisan független, azaz $\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0}$ és $\lambda_i \neq 0$. Ekkor $\underline{x}_i$ előállítható a többiből:
$\underline{x}_i = \frac{-1}{\lambda_i} \cdot (\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k)$.
2. Most tfh valamelyik x_i előáll a többi lineáris kombinációjaként:
$\underline{x}_i = \lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k$. Ekkor $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ nem lineárisan független, hiszen a nullvektor megkapható nemtriviális lineáris kombinációként:
$\underline{0} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + (-1) \cdot \underline{x}_i + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k$. □
Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G \rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G \rangle)$
Megj: A fenti állítás tkp azt mondja ki, hogy egy V altér generátorrendszeréből pontosan akkor tudunk egy elemet elvenni úgy, hogy a maradék vektorok továbbra is generátorrendszert alkossanak, ha a kihagyott elem előáll a maradék elemek lineáris kombinációjaként.
Biz: $\Rightarrow$: Mivel $\langle G \rangle = V = \langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle$, ezért $\underline{v} \in V$ és $\underline{v} \in \langle G \rangle$.
$\Leftarrow$: Tetsz. $\underline{u} \in V$ elemről azt kell megmutatni, hogy $\underline{u} \in \langle G \rangle$.
Mivel $\underline{v} \in \langle G \rangle$, feltehető, hogy $\underline{v} = \sum_{\underline{g} \in G} \lambda_{\underline{g}} \underline{g}$.
Tudjuk, hogy $\underline{u} \in V = \langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle$, ezért $\underline{u} = \lambda \underline{v} + \sum_{\underline{g} \in G} \mu_{\underline{g}} \underline{g}$.
Ebbe behelyettesítve a fenti kifejezést $\underline{u} = \sum_{\underline{g} \in G} (\mu_{\underline{g}} + \lambda \cdot \lambda_{\underline{g}}) \underline{g}$ adódik, azaz $\underline{u} \in \langle G \rangle$. Ez bmely $\underline{u} \in V$-re igaz, így $\langle G \rangle = V$. □

9. Lin.ftn rendszer hízlalása

Megf: (1) A $\{\underline{0}\}$ nem lineárisan független: $1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$.
(2) Két vektor akkor lin.ftn, ha nem egymás skalárszorosai.
(3) $\mathbb{R}^2$-ben két vektor pontosan akkor lineárisan független, ha (irányított szakaszként) nem párhuzamosak. Bármely két nem párhuzamos $\mathbb{R}^2$-beli vektor generálja $\mathbb{R}^2$-t. (ábra)
(4) Ha $\langle G \rangle = V$ és $G \subseteq G' \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\langle G' \rangle = V$, azaz generátorrendszert (V-n belül) hízlalva generátorrendszer marad.
(5) $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $F' \subseteq F$, akkor F' is lin.ftn, azaz lin.ftn rendszert ritkítva lin.ftn marad.

---

10. Generátorrendszer ritkítása

Megf: (1) A $\{\underline{0}\}$ nem lineárisan független: $1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$.
(2) Két vektor akkor lin.ftn, ha nem egymás skalárszorosai.
(3) $\mathbb{R}^2$-ben két vektor pontosan akkor lineárisan független, ha (irányított szakaszként) nem párhuzamosak. Bármely két nem párhuzamos $\mathbb{R}^2$-beli vektor generálja $\mathbb{R}^2$-t. (ábra)
(4) Ha $\langle G \rangle = V$ és $G \subseteq G' \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\langle G' \rangle = V$, azaz generátorrendszert (V-n belül) hízlalva generátorrendszer marad.
(5) $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $F' \subseteq F$, akkor F' is lin.ftn, azaz lin.ftn rendszert ritkítva lin.ftn marad.

---

11. Kicserélési lemma

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor ($F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.) $\iff$ ($\underline{f} \notin \langle F \rangle$)
Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G \rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.
Megj: A kicserélési lemma szerint bárhogy is törlünk a V altér egy ftn rendszeréből egy vektort, az pótolható V generátorrendszerének egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer lin.ftn marad.
Biz: Legyen $F' := F \setminus \{\underline{f}\}$. Indirekt bizonyítunk.
Tfh $F' \cup \{\underline{g}\}$ egyetlen $\underline{g} \in G$-re sem lin. ftn. Ekkor az előző lemma miatt $\underline{g} \in \langle F' \rangle$ teljesül minden $\underline{g} \in G$-re. Ezért $G \subseteq \langle F' \rangle$, ahonnan $\langle G \rangle \subseteq \langle F' \rangle$ következik. Ebből pedig $\underline{f} \in V = \langle G \rangle \subseteq \langle F' \rangle$, azaz $\underline{f} \in \langle F' \rangle$ adódik. A fenti lemma miatt $\{f\} \cup F' = F$ nem lin. ftn, ami ellentmondás.
Az indirekt feltevés hamis, így $\exists\ \underline{g} \in G$, amire $F' \cup \{\underline{g}\}$ lin.ftn. $\square$

---

12. FG-Egyenlőtlenség

FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.
Megj: Magyarul: altérben egy ftn. rendszer sosem nagyobb, mint egy generátorrendszer.
Biz: Legyen $F_0 := F$. Ha $F_0 \subseteq G$, akkor $|F_0| \leq |G|$. Ha $F_0 \not\subseteq G$, akkor $F_0 \setminus G \neq \emptyset$, legyen mondjuk $\underline{f} \in F_0 \setminus G$. A kicserélési lemma miatt van olyan $\underline{g} \in G$, amire $F_1 := F_0 \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ lin.ftn. Ezzel az F_1-gyel ugyanezt folytatva kapjuk az F_2, $F_3, \ldots,$ lin.ftn rendszereket. Előbb-utóbb olyan F_i-hez jutunk, amivel ez már nem folytatható, mert $F_i \subseteq G$. Ekkor $|F_0| = |F_1| = \ldots = |F_i| \leq |G|$, győztünk. $\square$

Köv: Ha $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn, akkor $|F| \leq n$.
Biz: Láttuk, hogy $G = \{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ az $\mathbb{R}^n$ generátorrendszere. Az FG-egyenlőtlenség miatt $|F| \leq |G| = n$. $\square$

Állítás: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\underline{f} \in \langle F \rangle$. Ekkor $\underline{f}$ egyértelműen áll elő F-beli vektorok lin.komb.-jaként.
Biz: Mivel $f \in \langle F \rangle$, ezért $\underline{f}$ előáll az F-beliek lin.komb.-jaként. Tfh $\underline{f} = \lambda_1 \underline{f}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{f}_k = \mu_1 \underline{f}_1 + \ldots + \mu_k \underline{f}_k$ két előállítás. Ekkor $\underline{0} = \underline{f} - \underline{f} = (\lambda_1 - \mu_1)\underline{f}_1 + \ldots + (\lambda_k - \mu_k)\underline{f}_k$.
Mivel F lin.ftn, a JO-on álló lineáris kombináció triviális, azaz $\lambda_i = \mu_i \ \forall i$. Így a két fenti előállítás megegyezik, vagyis f csak egyféleképp áll elő az F-beliek lin.komb-jaként. $\square$
