

# Alapfogalmak

Bilicz-Horváth

2021. február 8.

Megadjuk a változó, a jel, a rendszer, és a hálózat fogalmának értelmezését.

## Jelek

A folyamatok mérhető mennyiségei a fizikai mennyiségek. Egy **változó** egy fizikai mennyiség matematikai leírása. Egy **jel** a változó azon részének matematikai leírása, amely a számunkra lényeges információt hordozza. A továbbiakban a változó és a jel fogalmát nem különböztetjük meg.

A tárgy keretében a jel mindig egyetlen független változó által meghatározott. Ennek neve **idő**, amelyet **folytonos idejű esetben  $t$ -vel** (pl.  $x(t)$ ), **diszkrét idejű esetben  $k$ -val** fogunk jelölni.

## Jelek osztályozása

**Időfüggés** tekintetében megkülönböztetünk *folytonos idejű* (FI) jeleket:

$$x(t), -\infty < t < \infty \quad \text{vagy } t \in \mathbb{R},$$

ahol  $t$  gyakran a köznapi értelemben vett fizikai időt jelenti, amelynek egysége a szekundum:

$$[t] = s \text{ (szekundum)};$$

illetve *diszkrét idejű* (DI) jeleket:

$$x[k], \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \text{ vagy } k \in \mathbb{Z}.$$

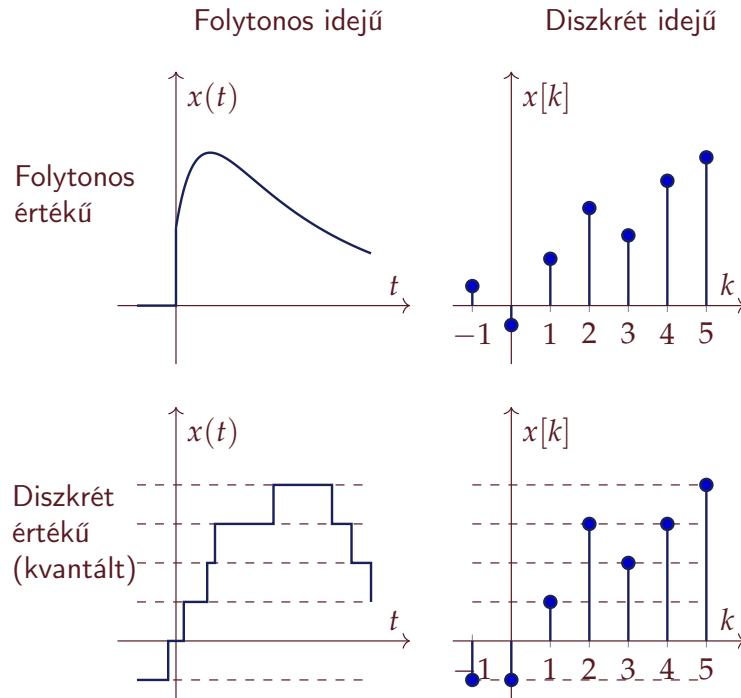
A  $k$ -adik diszkrét időpillanatra a  $k$ . *ütem* elnevezés is használatos.

**Értékkészlet** tekintetében egy  $x$  jel *folytonos értékű*, ha  $x$  bármilyen valós vagy komplex értéket felvehet (természetes megszorításokkal, pl. a konkrét jel nem lehet nagyobb egy bizonyos értéknél, vagy csak pozitív értékű lehet stb.), míg egy  $x$  jel *diszkrét értékű* vagy *kvantált*, ha az csak meghatározott  $b_i$  értékeket vehet fel. A folytonos idejű és folytonos értékű jeleket gyakran *analóg*, a diszkrét idejű és kvantált jeleket *digitális* jelnek is szokás nevezni. A tárgyban csak folytonos értékű jelekkel foglalkozunk, a kvantálás hatását később szaktárgyak keretében ismerjük meg. A jelek besorolását az 1. ábra szemlélteti.

Egy jel **belépő**, ha értéke  $t$  ill.  $k$  negatív értékeire azonosan nulla. Az 1. ábra jelei közül a bal felső belépő, a többi nem belépő.

## Rendszerek

A **rendszer** egy fizikai objektum modellje, amely fizikai változókkal leírható. Ezen változók közül egy vagy több lehet adott, ezek



1. ábra: Jelek csoportosítása

a rendszer bemenő jelei vagy *gerjesztései*, egyet vagy többet pedig meg akarunk határozni, ezek a rendszer kimenő jelei vagy *válaszai*. A fizikai változókat a hozzájuk rendelt jellel, az objektumot pedig a rendszerrel írjuk le.

Matematikai értelemben a rendszernek a gerjesztés(ek)re gyakorolt hatását egy *transzformációval* jellemezhetjük, amely az adottnak tekintett gerjesztő jel(ek)hez válaszjel(ek)et rendel. A tárgyban egy-bemenetű, egy-kimenetű (angolul Single Input, Single Output, SISO) rendszerek vizsgálatára szorítkozunk. Egy ilyen rendszer  $u = u(t)$  ill.  $u = u[k]$  gerjesztéséhez egy  $y = y(t)$  ill.  $y = y[k]$  választ rendel, amely leképezést az  $\mathcal{Y}$  operátor (transzformáció) írja le:

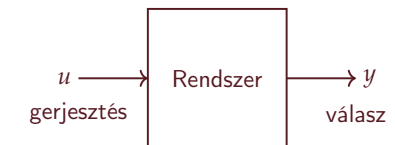
$$y = \mathcal{Y}\{u\}.$$

### A rendszerek osztályozása

A tárgyban kitüntetett szerepet játszanak az alábbi általános *rendszer-tulajdonságok*:

- **Linearitás:** Egy rendszer akkor lineáris, ha a  $y = \mathcal{Y}\{u\}$  gerjesztés-válasz kapcsolatában szereplő  $\mathcal{Y}$  operátor lineáris, más szóval a rendszerre érvényes a **szuperpozíció elve**.

Formálisan, ha a rendszer gerjesztése tetszőleges  $u_a$  és  $u_b$  gerjesztő jelek szuperpozíciója, akkor a linearitás megköveteli, hogy



2. ábra: A rendszer

Ebből következik, hogy lineáris rendszerekre speciálisan

$$\mathcal{Y}\{cu\} = c\mathcal{Y}\{u\}$$

teljesül, emiatt az  $u = 0$  gerjesztéshez  $y = 0$  válasz kell, hogy tartozzon.

$$\mathcal{Y}\{c_a u_a + c_b u_b\} = c_a \mathcal{Y}\{u_a\} + c_b \mathcal{Y}\{u_b\}$$

teljesüljön, minden  $c_a \in \mathbb{R}, c_b \in \mathbb{R}$  mellett.

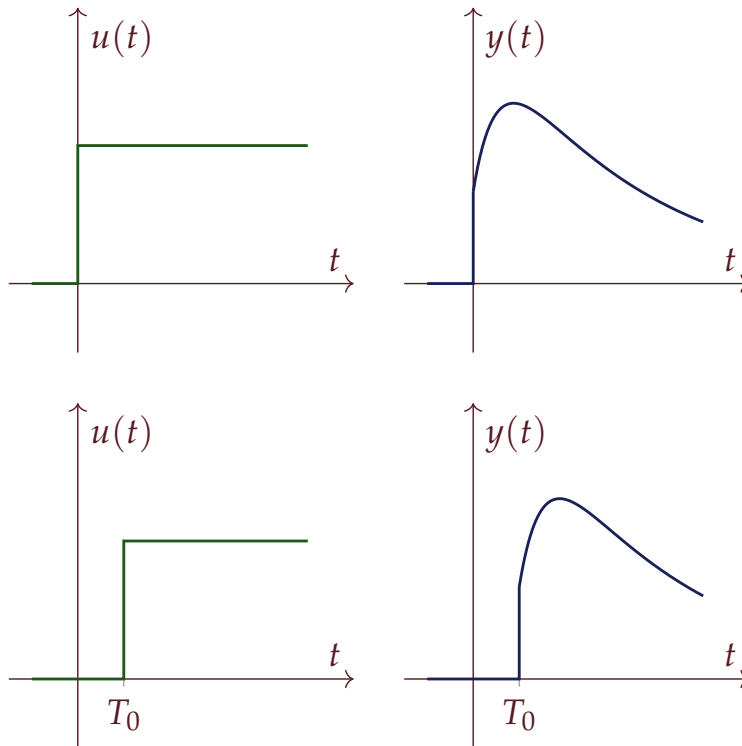
Ha a rendszer nem lineáris, akkor *nemlineáris* rendszernek nevezzük. Utóbbiakkal a JR2 keretében foglalkozunk.

- **Invariancia:** egy rendszer akkor (*idő*)*invariáns*, ha a gerjesztés időbeli eltolása csak egy ugyanakkora időbeli eltolást okoz a válaszban. Formálisan a rendszer akkor invariáns, ha

$$y(t) = \mathcal{Y}\{u(t)\} \Rightarrow y(t - T_0) = \mathcal{Y}\{u(t - T_0)\}$$

tetszőleges  $T_0 \in \mathbb{R}$  esetén. Röviden, a gerjesztés-válasz kapcsolat *időfüggetlen*. A nem invariáns rendszer *variáns*.

A tárgyban kitüntetett szerepet játszanak a lineáris, invariáns rendszerek. Ezeknek angol rövidítése Linear, Time Invariant (LTI).



3. ábra: Egy invariáns rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatának szemléltetése

- **Kauzalitás:** a rendszer *kauzális*, ha az  $y(t_1)$  válasz az  $u(t)$  gerjesztésnek csak olyan értékeitől függ, amelyekre  $t < t_1$  teljesül. Röviden, a rendszer válasza csak a gerjesztés múltbeli értékeitől függ, a rendszer nem képes „jósolni”, követi a fizikai világban tapasztalt ok-okozati összefüggéseket. Ha a rendszer nem kauzális, akkor *akauzális*. A 3. ábrán illusztrált rendszer kauzális.
- **Stabilitás:** egy lineáris, invariáns rendszer akkor és csak akkor *gerjesztés-válasz stabilis*, ha **tetszőleges** korlátos  $u$  gerjesztéshez

Az angol terminológia a belépő *jel* és a *kauzális rendszer* megnevezésére is a *causal* kifejezést használja, magyarul azonban ezt élesebben megkülönböztetjük.

Később további stabilitásfogalmakat is megismerünk majd.

korlátos  $y$  válasz tartozik. A nem stabil rendszert labilis vagy instabil rendszernek nevezzük.

- **Dinamika:** egy rendszer akkor **memóriamentes**, ha a  $t_1$  időpillanatban a válaszjele csak a gerjesztésnek ugyanezen  $t_1$  időpillanatbeli értékétől függ. Ellenkező esetben a rendszer **dinamikus**.

Memóriamentes pl. az  $y(t) = u^2(t)$ ,  
dinamikus pl. az

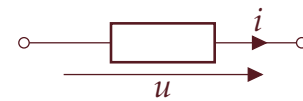
$$y(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

gerjesztés-válasz kapcsolató rendszer.

### Hálózatok

A *hálózat* komponensek összekapcsolásából áll. Minden komponenshez egy vagy több változó van hozzárendelve. A hálózatot a komponensek viselkedését leíró *karakterisztikák*, másrészt az összekapcsolási szabályokat leíró *összekapcsolási kényszerek* határozzák meg. A tárgyban kétféle hálózattal fogunk találkozni:

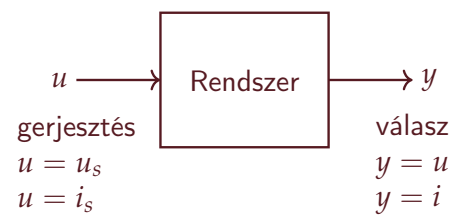
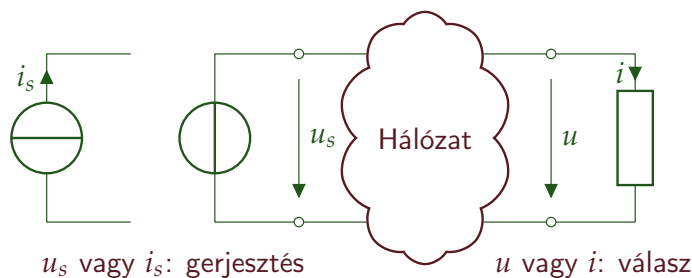
- A **Kirchhoff-típusú hálózatok** komponensei a **kétpólusok** (4. ábra), amelyeket két változó, a feszültség ( $u$ ) és az áram ( $i$ ) jellemez, amelyek általában a  $t$  idő függvényei. A komponensek karakterisztikái a feszültség és az áram kapcsolatát írják le, az összekapcsolási kényszereket pedig Kirchhoff áram- és feszültségtörvénye adja. A kétpóluson feltüntetett nyilak a változók *referenciáirányát* jelölik.
- **Jelfolyamhálózatok:** ezekkel a JR2 tárgyban foglalkozunk majd.



4. ábra: Kétpólus

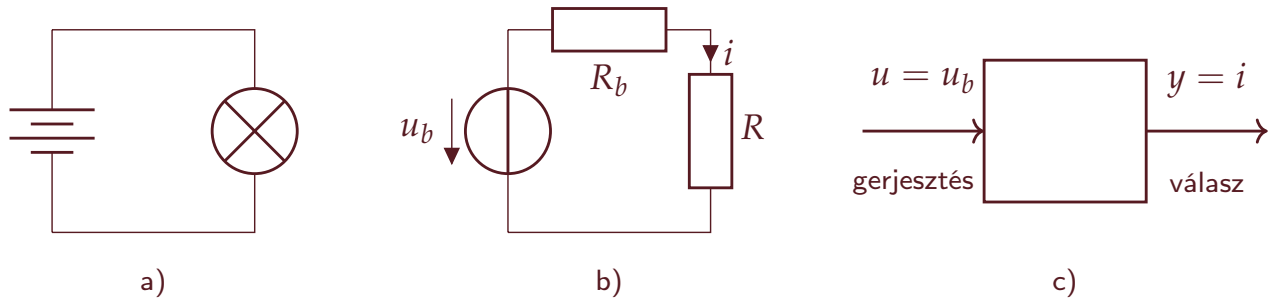
### Kirchhoff-típusú hálózat által reprezentált rendszer

A villamos hálózatban található forrás (adott/előírt  $u_s$  feszültségű *feszültségforrás*, illetve  $i_s$  áramú *áramforrás*) forrásmennyiségét tekintjük a hálózat által reprezentált rendszer gerjesztésének, míg a hálózat egy tetszőleges, kijelölt kétpólusának feszültségét vagy áramát a rendszer válaszjelének (5. ábra). Ügyeljünk rá, hogy az  $u$  a hálózatban egy feszültséget, a rendszerben a rendszer gerjesztő jelét jelöli, ami feszültség és áram is lehet.



5. ábra: Kirchhoff-típusú hálózat és az általa reprezentált rendszer

Egy villamos példán keresztül szemléltetjük a modellezés lépéseit (6. ábra). Egy akkumulátoros zseblámpa izzóján átfolyó áramot határozzuk meg. Magát a fizikai objektumot az a) ábra mutatja, a bal oldalon az akkumulátort, a jobb oldalon az izzólámpát tüntettük fel. A b) ábra mutatja az általunk felállított hálózati modellt. Az akkumulá-



6. ábra: Példa a Kirchhoff-típusú hálózat által reprezentált rendszerre

tort, amely nem ideális feszültségforrásnak tekinthető, egy ideális,  $u_b$  forrásfeszültségű feszültségforrás, és egy  $R_b$  *belső ellenállás* soros eredőjével modellezhetjük (ún. Thévenin-generátor, lásd később). Az izzólámpát egy  $R$  értékű lineáris ellenállásként vesszük figyelembe. Keressük a körben folyó  $i$  áramot, ami egyben az izzólámpa árama is. Az Ohm-törvény alapján

$$i = \frac{1}{R + R_b} u_b. \quad (1)$$

A c) ábrán a hálózat által reprezentált rendszer sematikus rajza látható. A rendszer  $u$  gerjesztése az  $u_b$  forrásfeszültség, a rendszer  $y$  válaszejele a hálózatban kijelölt  $i$  áram. Ebben az egyszerű példában egyszerűen meg is adhatjuk a rendszer explicit gerjesztés-válasz kapcsolatát:

$$y = \frac{1}{R + R_b} u. \quad (2)$$

A hálózati modellben elhanyagoltunk több fizikai jelenséget: a valóságos izzólámpa ellenállása nő a rajta átfolyó áram növekedésével (nemlineáris komponens); az akkumulátor folyamatosan merül, így az  $u_b$  folyamatosan csökken, és az akkumulátor öregedésével a belső ellenállás is nő (nem invariáns komponens), stb.

Ezért a modell nem jól írja le az elem-lámpa áramát a közvetlenül a bekapcsolást követően, vagy ha órákon át vizsgáljuk a rendszert. Helyes viszont a modell bekapcsolt állapotban egy rövid ideig. A mérnöki gyakorlatban igyekszünk a legegyszerűbb, de a vizsgált probléma szempontjából helyes modellt megalkotni.

# A villamos hálózatok alaptörvényei

Bilicz-Horváth

2021. február 10.

Ebben a fejezetben tárgyaljuk a villamos alapmennyiségeket (feszültség, áramerősség, ellenállás), valamint a villamos hálózatokat alkotó kétpólusok legfontosabb jellemzési szempontjait. Megfogalmazzuk a Kirchhoff-törvényeket, amelyek a kétpólusok összekapcsolási kényszereit fejezik ki. A hálózatra felírható egyenletek egy része a hálózatot alkotó kétpólusok karakterisztikáiból, más része pedig a Kirchhoff-törvényekből áll. Megvizsgáljuk, hogy az egyes egyenlettipusokból mennyit lehet és kell egy hálózatra felírni, és foglalkozunk a megoldhatóság kérdésével. Végül szólunk a villamos hálózat gráf-reprezentációjáról.

## A villamos hálózatok alaptörvényei

A Kirchhoff-típusú hálózatokra (ún. *koncentrált paraméterű villamos hálózatokra*) is igaz, hogy a hálózatot azt alkotó *komponensek karakterisztikái* és az *összekapcsolási kényszerek* együttesen határozzák meg. A következőkben áttekintjük a villamos hálózatokat felépítő komponenseket, a *kétpólusok* (két kivezetéssel rendelkező elemek) jellemzését, és az összekapcsolási kényszereket leíró Kirchhoff-törvényeket, amelyek a kétpólusok változóit, a feszültségeket és az áramokat írják le.

### Villamos alapmennyiségek

- Az **áramerősség**. Az elektromos töltések mozgása az elektromos áram. Ha egy felületen (pl. egy vezető keresztmetszetén)  $\Delta t$  idő alatt  $\Delta Q$  töltés áramlik át, akkor határártmenetet képezve megkapjuk az áram kifejezését:

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}.$$

Az áram irányát a pozitív töltések mozgásának irányával azonosítjuk.

- A **feszültség**. Az elektromos töltéseknek az elektromos térben való mozgatásához *munkát* kell végezni. Ez a munka az elektromos energia, amit a tárgyban  $w(t)$ -vel jelölünk. Az elektromos *feszültséget* a tér két pontja, illetve két kapocs (legyen  $A$  és  $B$ ) között értelmezzük: az  $u_{AB}$  feszültség mérőszáma az a munka, amely egy  $dQ$  töltésű próbatöltésnek  $A$  pontból  $B$  pontba mozgatásához szükséges:

$$u_{AB} = \frac{dw_{AB}}{dQ}.$$

Az áramerősség SI mértékegysége

$$[i] = \text{A} \quad (\text{Amper}).$$

A feszültség egysége

$$[u] = \text{V} \quad (\text{Volt}).$$

- A **teljesítmény**. Tudjuk, hogy a teljesítmény az egységnyi idő alatt végzett munka,

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt}.$$

Láttuk, hogy  $dw(t) = u(t)dQ$ . Formálisan  $dt$ -vel osztva

$$\frac{dw(t)}{dt} = u(t)\frac{dQ}{dt} = u(t)i(t),$$

így a pillanatnyi teljesítmény kifejezése

$$p(t) = u(t)i(t)$$

A pillanatnyi teljesítmény a két alapvető – és a gyakorlatban könnyen megmérhető – villamos mennyiséggel kifejezhető.

A teljesítmény egysége

$$[p] = W \quad (\text{Watt}).$$

Semmilyen fizikai rendszer nem lehet végtelen nagy teljesítmény forrása, ezért a teljesítmény mindig *vég*es.

### Villamos kétpólusok

A Kirchhoff-típusú hálózatok alapvető komponensei a **kétpólusok**. Minden kétpólushoz hozzárendelhetjük a rajta átfolyó  $i = i(t)$  áramot és a pólusai között fellépő  $u = u(t)$  feszültséget, amelyek általánosságban időtől függő (időben változó) mennyiségek lehetnek. Az áram nyila a pozitív töltések feltételezett áramlási irányát (az ún. technikai áramirányt) jelöli, a feszültség nyila a nagyobbban feltételezett potenciálú pólustól a kisebb felé mutat. A kétpóluson feltüntetett nyilak a változóknak nem a tényleges irányát jelölik (sok esetben azt számítás nélkül nem is tudnánk előre megmondani), hanem a – gyakran önkényesen felvett – ún. *referenciáirányukat* jelölik. A komponensek pólusai a hálózat *csomópontjaiban* egyesíthetők.

#### A KÉTPÓLUSOK karakterisztikája

a kétpóluson átfolyó áram és a kapcsokon fellépő feszültség kapcsolatát leíró összefüggés.

Ennek alakja lehet

$$u = \mathcal{U}\{i\} \quad \text{ill.} \quad i = \mathcal{I}\{u\}$$

ún. *explicit* forma (valamely változóra kifejezhető) összefüggés. Bizonyos kétpólusokat viszont csak

$$\mathcal{F}\{u, i\} = 0$$

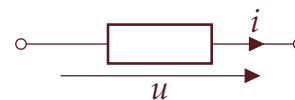
alakú ún. *implicit* karakterisztikával jellemezhetünk, mert az explicit karakterisztikák egyike sem fejezhető ki.

#### A kétpólusok csoportosítása

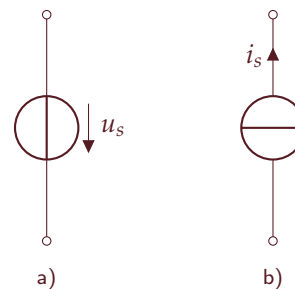
A **források** olyan kétpólusok, amelyeknek vagy a feszültsége, vagy az árama ismert (adott):

$$u = u_s(t), \quad i = i_s(t),$$

ahol  $u_s(t)$  a feszültségforrás *forrásfeszültsége*,  $i_s(t)$  az áramforrás *forrásárama*.



1. ábra: Kétpólus



2. ábra: a) feszültségforrás, b) áramforrás

A KÉTPÓLUS **lineáris**, ha érvényes rá a szuperpozíció elve, vagyis a kétpólust leíró  $\mathcal{U}$  ill.  $\mathcal{I}$  operátor *lineáris*. Ha például létezik a kétpólus feszültségét az árama ismeretében kifejező  $\mathcal{U}$  operátor, akkor azzal a linearitás feltétele

$$\boxed{\text{lineáris kétpólus} \Leftrightarrow \mathcal{U}\{c_a i_a + c_b i_b\} = c_a \cdot \mathcal{U}\{i_a\} + c_b \cdot \mathcal{U}\{i_b\}} \quad (1)$$

Ha a szuperpozíció elve nem érvényesül, a szóban forgó kétpólus *nemlineáris*. A lineáris kétpólusok és források összekapcsolásából álló hálózatot *lineáris hálózatnak* nevezzük.

Lineáris kétpólus az **ellenállás**, amelynek karakterisztikája az Ohm-törvény:

$$\boxed{R = \frac{u}{i}},$$

ahol  $R$  a *rezisztencia* (vagy ellenállás). Az ellenállás SI egysége

$$[R] = \Omega \quad (\text{ohm}).$$

A KÉTPÓLUS **rezisztív (memóriamentes)**, ha a kétpólust leíró operátorok *függvények*, vagyis a kétpólus feszültsége egy rögzített  $t_0$  időpillanatban csak az áramának  $t_0$ -beli értékétől függ, vagy fordítva, pl.

$$u(t_0) = \mathcal{U}\{i(t_0)\} = U(i(t_0), t_0).$$

A nemrezisztív kétpólus **dinamikus**. A dinamikus komponensek karakterisztikájában gyakran integrális viszonyban állnak a mennyiségek, ami arra utal, hogy ezek a komponensek energiatárolásra képesek. Például a *kondenzátor* dinamikus komponens, karakterisztikája

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} \equiv C u'_C, \quad (2)$$

illetve

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau, \quad (3)$$

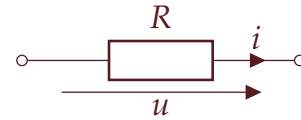
ahol  $C$  a kondenzátort jellemző *kapacitás*, melynek egysége  $[C] = \text{F}$  (farad).

A KÉTPÓLUS **invariáns**, ha változóinak kapcsolatát (a karakterisztikát) az időbeli eltolás nem befolyásolja. Formálisan

$$\mathcal{U}\{i(t)\} = u(t) \Rightarrow \mathcal{U}\{i(t - T_0)\} = u(t - T_0)$$

tetszőleges  $T_0$  eltolás mellett. A továbbiakban csak invariáns kétpólusokat tárgyalunk.

A források nemlineáris komponensek.

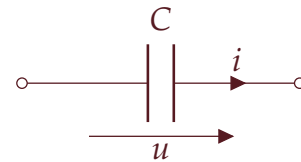


3. ábra: Az ellenállás

Az ellenállás rezisztív (ahogy a tulajdonság elnevezése is utal rá), és lineáris. Egy tipikus nemlineáris rezisztív komponens a *dióda*, amelynek karakterisztikája

$$i = I_0 \exp\left(\frac{u}{U_0} - 1\right)$$

jellegű ( $I_0$  és  $U_0$  az eszközt jellemző állandók). A rezisztív komponensek karakterisztikáját gyakran grafikusán (is) megadhatjuk



4. ábra: A kondenzátor



A KÉTPÓLUS **passzív**, ha bármelyik összetartozó  $u, i$  párra a  $w(t)$  munkafüggvény nemnegatív:

$$\text{passzív kétpólus} \Leftrightarrow w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau \geq 0, \forall t \quad (4)$$

Ha ez nem áll fenn, akkor a kétpólus **aktív**. A passzivitás azt jelenti, hogy az adott kétpólus semmilyen körülmények között nem termelhet villamos energiát. A passzivitás speciális eseteként **nonenergikus** az a kétpólus, amelynek a teljesítménye azonosan nulla:

$$\text{nonenergikus kétpólus} \Leftrightarrow p(t) \equiv 0$$

A munkafüggvény elnevezése mögött az a megfontolás áll, hogy a  $W(t_1, t_2)$  függvény megadja a kétpólus által a  $[t_1, t_2]$  időintervallumban fogyasztott villamos energiát az alábbi formában:

$$W(t_1, t_2) = w(t_2) - w(t_1)$$

### A Kirchhoff-törvények

Kirchhoff-típusú hálózatban az összekapcsolási kényszereket Gustav Kirchhoff német fizikus 1845-ben írta le. A kétpólusok pólusai a hálózat *csomópontjaiban* egyesíthetők. Jelölje a hálózatban levő kétpólusok számát  $b$  (*branch*), a csomópontok számát pedig  $n$  (*node*). Kirchhoff áramtörvénye a töltésmegmaradás, feszültségtörvénye az energiamegmaradás elvéből származtatható. Az 5. ábra hálózatában általános kétpólusokat tüntettünk fel ( $b = 5$ ), és bekereteztük a három csomópontot ( $n = 3$ ).

#### Kirchhoff áramtörvénye

Válasszunk a hálózatban egy zárt felületet, amelyen a kétpólusok áramai legfeljebb egyszer folynak át. Kirchhoff I. törvénye értelmében az áramok *algebrai* összege bármely ilyen zárt felületre, minden időpontban nulla:

$$\sum_k i_k(t) = 0, \quad \text{minden zárt felületre, } \forall t$$

A 6. ábra hálózatában találomra felvettük az áramok referencia-irányát, és bejelöltünk három zárt görbét (az a és c 1-1 csomópontot, a b görbe két csomópontot is magában foglal). Az ezekre vonatkozó áramtörvények:

$$\begin{aligned} \text{a: } & i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ \text{b: } & i_1 + i_3 + i_4 + i_5 = 0 \\ \text{c: } & -i_1 - i_4 - i_3 - i_5 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

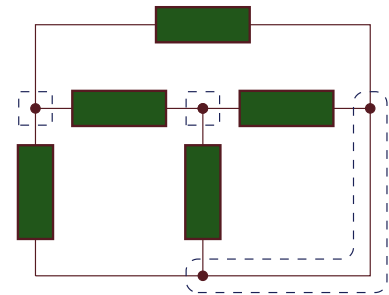
Az  $R > 0$  értékű ellenállás passzív kétpólus: az  $u = Ri$  karakterisztika alapján  $p = ui = Ri^2 \geq 0$ , ha  $R > 0$ , emiatt  $w \geq 0$  is biztosan teljesül.

A passzivitásnak *elégséges* feltétele, hogy a kétpólus teljesítménye nemnegatív:

$$p(t) \geq 0 \Leftrightarrow w(t) \geq 0,$$

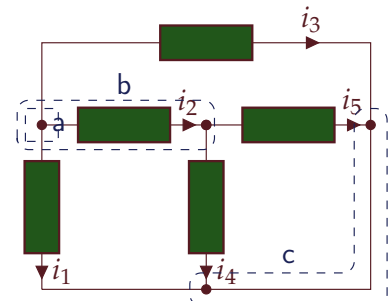
azonban ez csak rezisztív kétpólusok esetén *szükséges* feltétel is egyben.

Az ellenállással modellezhetjük az elektronikában használt ellenállás nevű alkatrészt, amely a betáplált elektromos teljesítményt hővé alakítja. De ellenállással modellezhetjük egy mobiltelefon-antenna ún. sugárzási ellenállását is. Az antenna a betáplált elektromos teljesítményt (részben) elektromágneses sugárzás formájában adja le.



5. ábra: Példahálózat

A zárt felületből *kifolyó* áramokat tekintjük pozitívnak, az oda befolyó áramokat negatívnak.



6. ábra: Példa Kirchhoff áramtörvényére

Látható, hogy a b) és a c) felületre felírható egyenletek nem függetlenek egymástól, jelen esetben a két egyenlet egymásnak ellentettje. Egy  $n$  csomópontot tartalmazó összefüggő hálózatra  $r = n - 1$  független áramtörvény írható fel. A hálózatra felírható áramtörvények egy olyan rendszerét, amely a maximális számú független egyenletet tartalmaz, az **áramtörvények fundamentális rendszerének** nevezzük.

### Kirchhoff feszültségtörvénye

A hálózatban a **hurok** egy irányított, zárt görbe, amely a hurok által érintett kétpólusokon úgy halad át, hogy egyik kétpólust sem tartalmazza egynél többször. Kirchhoff 2. törvénye értelmében bármely hurokra a hurkot alkotó kétpólusok feszültségeinek *algebrai* összege bármely időpillanatban nulla:

$$\sum_k u_k(t) = 0, \quad \text{a hurok feszültségeire,} \quad \forall t$$

A 7. ábrán a példahálózatra felvettünk három irányított hurkot. A hozzájuk tartozó feszültségtörvények:

$$\begin{aligned} \text{(i):} \quad & u_1 - u_4 - u_2 = 0 \\ \text{(ii):} \quad & u_4 - u_5 = 0 \\ \text{(iii):} \quad & u_2 + u_5 - u_3 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Felvehetünk továbbá egy hurkot úgy, hogy az az 1., 4., 5., és 3. kétpólusokon haladjon át, pozitív irányítással. Az erre vonatkozó feszültségtörvény:

$$u_1 - u_4 + u_5 - u_3 = 0 \quad (7)$$

Jól látható, hogy utóbbi egyenlet nem független a korábbiaktól: az (i) és a (iii) egyenlet összeadásával is előáll. A hálózatra felírható független feszültségtörvények száma is korlátozott. Egy  $n$  számú csomópontot és  $b$  számú kétpólust tartalmazó, összefüggő hálózatban  $l = b - r = b - n + 1$  független feszültségtörvény írható fel.

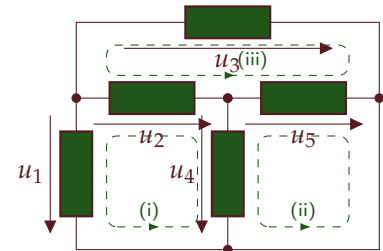
A feszültségtörvények egy maximális számú független egyenletet alkotó rendszerét a **feszültségtörvények fundamentális rendszerének** nevezzük. A fundamentális rendszer előállítható például úgy, hogy mindegyik új hurok tartalmazzon egy olyan kétpólust, amely a meglevő hurokban még nem szerepelt.

### Tellegen tétele

Egy tetszőleges,  $b$  számú kétpólust tartalmazó hálózatban minden kétpólus 1-1 ágfeszültséggel, illetve ágárammal jellemezhető. Jelölje  $u'_1, u'_2, \dots, u'_b$  a kétpólusok feszültségeinek egy rendszerét, amelyek

Az áramtörvények egy fundamentális rendszerét kapjuk, ha egy kivétellel minden *csomópont*ra felírjuk az áramtörvényt, azonban bizonyos feladatokban ennél célszerűbb választással is élhetünk.

A hurok által érintett kétpólus feszültségét pozitív előjellel vesszük figyelembe, ha iránya megegyezik a hurok irányításával, különben pedig negatív előjellel.



7. ábra: Példa Kirchhoff feszültségtörvényére

Itt  $l$  a hurokok számára, angolul *loop*-ra utal.

Ha a hálózat gráfja síkba rajzolható, akkor az „ablaktábla-módszerrel” választott hurok maximális számú független feszültségtörvényre vezetnek. A 7. ábrán ezzel a módszerrel vettük fel az (i)–(iii) hurokokat.

kielégítik Kirchhoff feszültségtörvényének egy fundamentális rendszerét. Jelölje a hálózat ágáramainak egy rendszerét  $i_1'', i_2'', \dots, i_b''$ , amelyek kielégítik Kirchhoff áramtörvényének egy fundamentális rendszerét. Tellegen tétele szerint

$$\sum_{k=1}^b u_k' \cdot i_k'' = 0.$$

A tétel akkor is igaz, ha az  $u_j'$  és  $i_j''$  értékek nem ugyanahhoz a gerjesztéshez tartoznak, sőt, a tétel akkor is igaz, ha két különböző hálózathoz vesszük az  $u_j'$  és  $i_j''$  értékeket mindaddig, amíg a két hálózat topológiája (gráfja) megegyezik.

### A hálózati egyenletek teljes rendszere

Az  $n$  csomópontú,  $b$  számú kétpólusból álló hálózatban összesen  $2b$  számú ismeretlen változó van, mert minden kétpólust két mennyiség, a hozzá tartozó  $u_k$  ágfeszültség és az  $i_k$  ágáram jellemzi. A hálózatszámítási feladatokban ezen ismeretlenek közül egy vagy több ismert (adott), így a hálózatban levő feszültségforrások feszültsége, illetve áramforrások árama adott, a többi ismeretlen mennyiséget pedig ki szeretnénk számítani. Ezekkel együtt összesen  $2b$  számú független egyenletre van szükségünk. Ebből  $b$  számú egyenletet a  $b$  számú kétpólus *karakterisztikája* jelent, a maradék  $b$  számú egyenletet pedig a Kirchhoff-törvények alkalmazásával kell előállítanunk. Az áramtörvények fundamentális rendszere  $n$  csomópontú hálózatban  $r = n - 1$  független egyenletet, a feszültségtörvények fundamentális rendszere  $l = b - r = b - n + 1$  független egyenletet eredményez. Összesen valóban  $n - 1 + b - n + 1 = b$  számú független Kirchhoff-egyenletet írhatunk fel. Ezt az egyenletrendszert nevezzük a **hálózati egyenletek teljes rendszerének**. Ha ez a  $2b$  ismeretlenes egyenletrendszer megoldható, akkor megkapjuk az összes keresett feszültséget és áramot. Ha az egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor a hálózat **nem reguláris**, nem tekintjük egy fizikai rendszer helyes modelljének. *Lineáris hálózatban* a megoldás egyértelmű, nemlineáris komponenset tartalmazó hálózatban több megoldás is lehetséges.

**PÉLDA:** A 8. ábra hálózatában  $b = 4$  kétpólus és  $n = 3$  csomópont található. A hálózati egyenletek teljes rendszerét  $b = 4$  karakterisztika,  $r = n - 1 = 2$  áramtörvény és  $l = b - n + 1 = 4 - 3 + 1 = 2$  feszültségtörvény alkotja, összesen  $2b = 8$  független egyenlet:

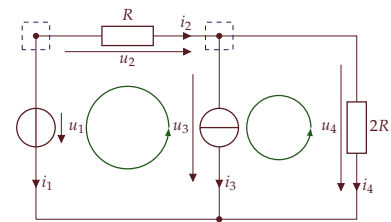
$u_1 = u_s$ (adott)		
$u_2 = Ri_2$ (Ohm-tv.)	áramtv.:	fesz. tv.:
$i_3 = i_s$ (adott)	$i_1 + i_2 = 0$	$u_1 - u_3 - u_2 = 0$
$u_4 = 2Ri_4$ (Ohm-tv.)	$i_3 + i_4 - i_2 = 0$	$u_3 - u_4 = 0$

**PÉLDA NEMREGULÁRIS HÁLÓZATRA:** A 9. ábrán látható hálózatban a karakterisztikák, illetve az áramforrások közös csomópontjára

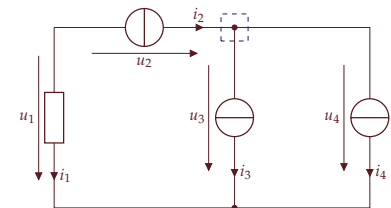
A tétel abban a speciális esetben, ha  $u_k' = u_k$  és  $i_k'' = i_k$  ugyanannak a kétpólusnak ugyanabban a hálózatban ugyanarra a gerjesztésre vonatkozó értéke, akkor  $p_k = u_k \cdot i_k$  a kétpólus teljesítményét adja, Tellegen tétele pedig a teljesítmény-egyensúlyt (vagy az energiamegmaradás elvét) fogalmazza meg a hálózatra:

$$\sum_{k=1}^b u_k \cdot i_k = \sum_{k=1}^b p_k = 0.$$

A hálózatot alkotó kétpólusok által fogyasztott és termelt teljesítmény összege minden pillanatban nulla.



8. ábra: Példa a hálózati egyenletek teljes rendszerére



9. ábra: Példa nemreguláris hálózatra

felírható áramtörvény:

$$\begin{array}{ll} u_1 = Ri_1 & \text{(Ohm-tv.)} \\ i_2 = i_{s,2} & \text{(adott)} \\ i_3 = i_{s,3} & \text{(adott)} \\ i_4 = i_{s,4} & \text{(adott)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{áramtv.:} \\ i_3 + i_4 - i_2 = 0 \end{array}$$

Ez a négy egyenlet azonban ellentmondásra vezet: a három előírt forrásáram nem feltétlenül elégíti ki az áramtörvényt (pl. ha  $i_{s,2} = 2 \text{ A}$ ,  $i_{s,3} = 3 \text{ A}$ ,  $i_{s,4} = 4 \text{ A}$ , akkor nyilván nem teljesülhet  $i_3 + i_4 - i_2 = 0$ ). A példabeli hálózat tehát nem reguláris, a hálózati egyenletek teljes rendszere nem oldható meg, vagy nem egyértelmű a megoldás annak ellenére, hogy lineáris a hálózat.

Általában, ha a hálózatban található kizárólag áramforrások alkotta zárt felület (vágat), vagy a kizárólag feszültségforrások alkotta hurok, akkor a hálózat nem reguláris. Feszültségforrások párhuzamos, ill. áramforrások soros kapcsolása ilyen elrendezést alkot.

A HÁLÓZAT EGYENLETEK TELJES RENDSZERE a gyakorlatban túl sok ismeretlen bevezetését igényli, ezért sem kézi számításhoz, sem komplex hálózatok gépi analíziséhez nem skálázható előnyösen. Meg fogunk ismerni olyan számítási eljárásokat, amelyek lényegesen kevesebb ismeretlen bevezetését igénylik.

### *A hálózat gráfja*

A Kirchhoff-típusú hálózathoz kézenfekvő módon hozzárendelhető a hálózat irányított gráfja: a hálózat csomópontjai a gráf csúcsaival, a hálózat komponensei pedig a gráf éleivel reprezentálhatók. Ez a gráf-reprezentáció egyfelől lehetővé teszi, hogy a hálózati egyenletek felírására szisztematikus, jól programozható eljárásokat alkalmazzunk (ez a hálózatanalízis-szoftverek alapja). Másfelől pedig gráfelméleti módszerekkel igazolható a fundamentális áramtörvény- ill. feszültségtörvény-rendszer számosságára közölt fenti eredmény is. A hálózat gráfjával azonban a továbbiakban nem foglalkozunk.

### 3. Rezisztív hálózatok analízise

Bilicz-Horváth

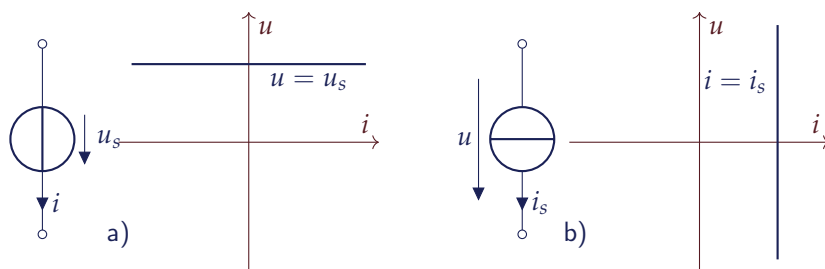
2021. február 19.

A hálózatanalízisben a Kirchhoff-egyenletek teljes rendszerének felírása helyett hatékonyabb módszereket is találhatunk: általános esetben a csomóponti potenciálok módszere és a hurokáramok módszere, kifejezetten lineáris hálózatokban a szuperpozíció elvének kihasználása jóval hatékonyabb, akár kézi számítás, akár gépi hálózatanalízis során. Ebben az előadásban ezeket a módszereket ismerjük meg, egyelőre rezisztív hálózatok példáján keresztül.

#### Rezisztív hálózatok

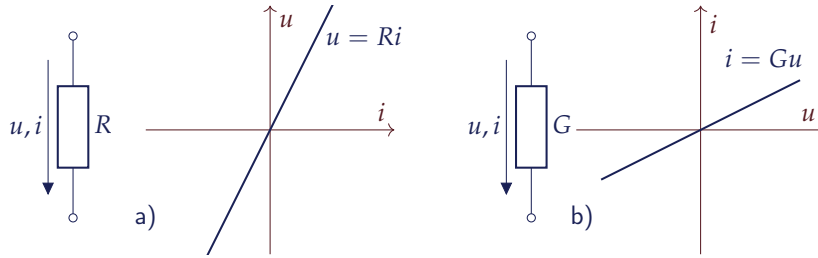
Az új hálózatszámítási eljárásokat a lineáris, rezisztív hálózatok körében vezetjük be, és később lineáris dinamikus, majd – a szuperpozíció módszere kivételével, amely csak lineáris hálózatokban érvényes – nemlineáris hálózatokban is alkalmazni fogjuk. A lineáris rezisztív hálózatban források és lineáris rezisztív kétpólusok vannak, a rezisztív kétpólusok nem tárolnak energiát, és gyakran a gerjesztések időben állandó mennyiségek: *egyenfeszültségek*, illetve *egyenáramok*. Ha a továbbiakban hangsúlyozni kívánjuk, hogy időben állandó mennyiségekkel dolgozunk, akkor azt nagybetűs jelöléssel emeljük ki:  $u_s(t) = U_s$ , ill.  $i_s(t) = I_s$ . A hálózat feszültségeit és áramait egy lineáris, *algebrai* egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. Ismétlésképpen tekintjük át az eddig megismert lineáris, rezisztív kétpólusokat, és a karakterisztikájuk grafikus ábrázolását. Az 1. ábra

Az *algebrai* egyenletet azért hangsúlyozzuk, mert a dinamikus hálózatokat *differenciálegyenletek*, ill. azok rendszerei írják le.



1. ábra: a: feszültségforrás, b: áramforrás

a) részén a feszültségforrás karakterisztikája látható: a kétpólus feszültsége minden pillanatban az előírt (állandó, vagy időben változó) feszültség,  $i$  áramának értékét pedig a csatlakozó hálózat alakítja ki. A b) ábrán az áramforrás látható: árama minden pillanatban az előírt  $i_s$  forrásáram, feszültségét pedig a csatlakozó hálózat alakítja ki. A 2. ábrán az ellenállás és karakterisztikája látható. Az a) ábrán az  $R$  ellenállás (rezisztencia) paraméterrel megfogalmazva, a b) ábrán



2. ábra: a: ellenállás, b: vezetés (figyeljünk az  $u - i$  tengelyek felcserélésére!)

pedig az ellenállás reciprokának, a  $G$  vezetés (konduktancia) segítségével megfogalmazva. Mindkét felírásban origón átmenő lineáris az összefüggés a feszültség és az áram között.

### Hálózati egyenletek

Az előző előadásban megismertük a hálózati egyenletek teljes rendszerét, amelyben az  $n$  csomópontú,  $b$  kétpólust tartalmazó hálózat minden változóját (1-1 feszültség, ill. áram) leíró  $2b$  változóhoz szükséges  $2b$  független egyenletet a következőképpen állítjuk fel: a  $b$  számú kétpólus  $b$  karakterisztikája,  $r = n - 1$  Kirchhoff-áramtörvény és  $l = b - r = b - n + 1$  Kirchhoff-feszültségtörvény. Ez a séma alkalmazható rezisztív hálózatokban is. Továbbra is probléma az ismeretlenek nagy száma.

AZ ISMERETLENÉK SZÁMA megfeleezhető, ha a hálózati egyenletek felírása során a  $b$  számú karakterisztika alapján behelyettesítjük minden kétpólus feszültségét vagy áramát, és csak a másik mennyiséget tartjuk meg változóként. Ezzel az ismeretlenek száma legfeljebb  $b$ -re csökken, majd az adódó egyenletrendszer megoldása után az esetleg szükséges további változókat a karakterisztikába visszahelyettesítve számítjuk. Ezt nevezzük a **hálózati egyenletek egy redukált rendszerének**.

A 3. ábrán látható hálózatban az áramtörvényt a két bejelölt csomópontokra, a feszültségtörvényt a két bejelölt hurokra írjuk fel úgy, hogy az egyenletekben bekeretezett tagokat a karakterisztikából azonnal be is helyettesítjük:

$$\left. \begin{aligned} i_1 + i_2 &= 0 \\ -i_2 + \boxed{i_s} + \boxed{\frac{u_4}{2R}} &= 0 \\ \boxed{u_s} - u_3 - \boxed{Ri_2} &= 0 \\ u_3 - u_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

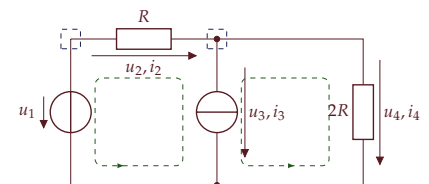
Az egyenletrendszer valóban redukált rendszer, az ismeretlenek:  $i_1, i_2, u_3, u_4$ , összesen  $b$  számú ismeretlen.

A konduktancia egysége

$$[G] = S \quad (\text{siemens})$$

Ritkán előfordul az ohm megfordítása  $\mathcal{U}$  (mho) szimbólum is.

Ugyanarra a hálózatra sokféle redukált rendszert írhatunk fel attól függően, hogy mely változókat fejezzük ki a karakterisztikákkal



3. ábra: Példahálózat a hálózategyenletek redukált rendszerére  
A példa egyenletrendszerét átrendezzük úgy, hogy a gerjesztés jellegű tagok a jobb oldalra kerüljenek:

$$\left. \begin{aligned} i_1 + i_2 &= 0 \\ -i_2 + \frac{1}{2R}u_4 &= -i_s \\ -u_3 - Ri_2 &= -u_s \\ u_3 - u_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

A LINEÁRIS REZISZTÍV hálózat *reguláris*, ha a hálózati egyenletrendszer **egyértelműen** megoldható. Mind a teljes, mind a redukált rendszer egy algebrai egyenletrendszerre vezet, amelynek általános alakja

$$Ax = g,$$

ahol  $x$  az ismeretlen feszültségekből, illetve áramokból képzett oszlopvektor,  $g$  a gerjesztéseket tartalmazó vektor,  $A$  pedig egy négyzetes együtthatómátrix.

A hálózat akkor és csak akkor reguláris, ha az  $A$  mátrix invertálható. Ekkor a megoldás

$$x = A^{-1}g.$$

A HÁLÓZATI egyenletek redukált rendszere továbbra is nagyon sok ismeretlenes egyenletrendszerek kezelését igényli. A továbbiakban olyan praktikus hálózatszámítási eljárásokat ismertetünk, amelyek lényegesen kisebb méretű egyenletrendszerre vezetnek.

### A csomóponti potenciálok módszere

A módszer alkalmazásához új ismeretleneket, a csomópontokhoz rendelhető *potenciálokat* vezetünk be. Válasszuk ki a hálózat egy csomópontját, és tekintsük ezt bázis- vagy referencia-csomópontnak, és rendeljük ehhez a  $\varphi_0 = 0$  potenciálértéket. A hálózat maradék  $r = n - 1$  csomópontjához rendeljünk  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$  ismeretlen csomóponti potenciálokat. A fizikából ismert potenciál értelmezésének megfelelően a hálózat ágfeszültségei kifejezhetők a megfelelő csomóponti potenciálok különbségeként. Az előjelkonvenciót a 4. ábra példáján szemléltethetjük. Néhány ágfeszültség kifejezése:

$$u_1 = \varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_1; \quad u_2 = \varphi_1 - \varphi_2; \quad u_3 = \varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_1$$

HA AZ ÁGFESZÜLTSEGEKET csomóponti potenciálok különbségeként fejezzük, ki akkor **Kirchhoff feszültségtörvénye automatikusan teljesül**. Ezért a feszültségtörvények felírása nem hordoz többletinformációt, a fundamentális hurokrendszer felállítását és a feszültségtörvények felírását mellőzhetjük.

A CSOMÓPONTI potenciálok módszerében általánosságban Kirchhoff áramtörvényét írjuk fel az  $r = n - 1$  ismeretlen potenciálú csomópontra. A rezisztív kétpólusok áramára a 5. ábrán összefoglalt szabályok vonatkoznak.

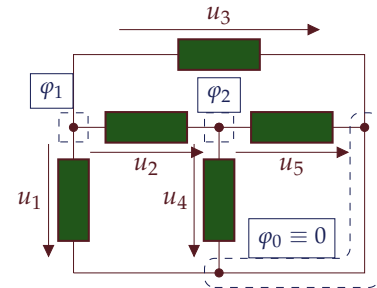
- Az ellenálláson folyó áramot az Ohm-törvény alapján fejezzük ki, szimmetrikus referenciairányok mellett  $u = \varphi_p - \varphi_q$ , amivel  $i = \frac{u}{R} = \frac{\varphi_p - \varphi_q}{R}$ .

A példában ezek a vektorok/mátrixok

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix};$$

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2R} \\ 0 & -R & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



4. ábra: A csomóponti potenciálok értelmezése

Tekintsük például az  $u_1, u_2, u_4$  hurkot. Fejezzük ki a feszültségtörvényt:

$$u_1 - u_4 - u_2 = (\varphi_1 - \varphi_0) - (\varphi_2 - \varphi_0) - (\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

- Az áramforrás árama adott, változatlan formában jelenik meg az áramtörvényben. A szokásos előjelkonvenciót követve továbbra is a csomópontból/vágatból kifolyó áramot tekintjük pozitívnak.
- Az előírt feszültségű feszültségforrás kapcsolatot teremt a két pólusának a potenciálja között: ha a feszültségnyíl „hegyénél” a potenciál  $\varphi_q$  értékű, akkor a másik pólus potenciálja ehhez van kötve,  $\varphi_p + u_s$  értékű. Gyakran el tudjuk kerülni, hogy a feszültségforrás bármelyik pólusára egyenletet kelljen felírunk, ha viszont egyenletet kell felírunk, akkor figyelembe kell vennünk, hogy a forráson egy ismeretlen  $i_u$  áram folyik, amelynek értékére nem vonatkozik karakterisztika. Ezt új ismeretlenként be kellene vezetnünk, és a feszültségforrás pólusaira felírt áramtörvényekben figyelembe kellene vennünk. Ezt elkerülhetjük azzal, ha nem a pólusokhoz tartozó csomópontokra írunk fel 1-1 egyenletet, hanem a forrást magában foglaló, két csomópontból álló *vágatra* írunk fel egyetlen áramtörvényt. Az  $i_u$  áram nem metszi ezt a vágatot, ezért az egyenletben nem kell szerepeltetnünk, az ismeretlenek számát nem növeli, ha pedig szükséges a kiszámítása, utólag külön megtehető (lásd alább). Ezzel a módszerrel tehát a két csomópontból álló vágatra egyetlen egyenletet írunk fel, de a két csomópont csak egy ismeretlen potenciált tartalmaz, ezért az egy egyenlet elegendő.

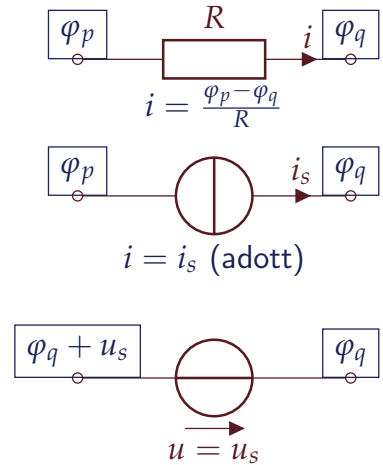
A felírandó csomóponti egyenletek száma tehát legfeljebb  $r = n - 1$ , de az egyenletek száma a hálózatban levő feszültségforrások számával csökkenthető.

HA A FESZÜLTSGFORRÁSOK áramára nem vezettünk be új ismeretlent, akkor azok az összes potenciál meghatározását követően egy-egy áramtörvényből kiszámíthatók. Ezt illusztrálja a 7. ábra: ha a  $\varphi$  potenciált már meghatároztuk, egy következő lépésben felírjuk az áramtörvényt az  $u_s$  potenciálú csomópontra is, amelyben a  $\varphi$  mennyiség már *ismert*. Innen kifejezhető a keresett  $i_u$  áram.

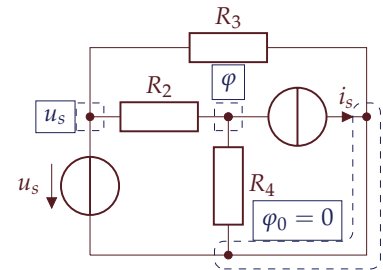
A csomóponti potenciálok módszere nem csak a kézi számításokban hatékony módszer, de a gépi hálózatanalízis szoftverek is ezen a módszeren alapulnak, ezekben is definiálni kell a referencia- („föld”)-pontot. Ennek megfelelően az általuk szolgáltatott elsődleges eredmények is csomóponti potenciálok. A módszer értelemszerűen nemlineáris hálózatokban is alkalmazható.

### A hurokáramok módszere

A hálózati egyenletek rendszerének mérete csökkenthető fiktív (fizikai jelentéssel nem bíró) ún. *hurokáramok* bevezetésével is. A  $b$  számú kétpólust és  $n$  csomópontot tartalmazó hálózatban felvesszünk egy



5. ábra: Az áramtörvények felírása



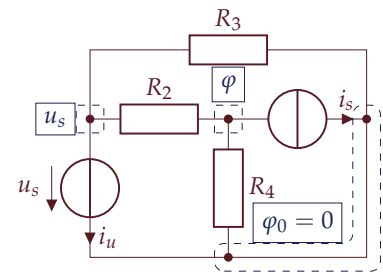
6. ábra: Példa a csomóponti potenciálok módszerére

A 6. ábra hálózatában az alsó csomópontot referencia-csomópontnak választjuk, a másik kettő közül az egyik potenciálja a feszültségforrás által adott kényszer miatt ismert,  $u_s$ , csak a bejelölt  $\varphi$  potenciál ismeretlen. Az erre vonatkozó áramtörvény (a sor elején érdemes megadni, hogy melyik csomópontra vonatkozik az egyenlet):

$$\varphi : \frac{\varphi - u_s}{R_2} + \frac{\varphi - 0}{R_4} + i_s = 0$$

Az egyenlet megoldása elemi átrendezéssel

$$\varphi = \frac{R_4}{R_2 + R_4} (u_s - R_2 i_s)$$



7. ábra: A feszültségforrás áramának meghatározása



$l = b - r = b - n + 1$  számú hurkot tartalmazó *fundamentális hurokrendszer*, és minden hurokhoz egy benne körbe folyó  $i_{h,1}, i_{h,2}, \dots, i_{h,l}$  hurokáramot rendelünk. A  $k$ . kétpólus (tényleges)  $i_k$  ágárama a rajta átfolyó összes hurokáram értékének előjeles összege.

A 8. ábrán látható, síkba rajzolható hálózatban az „ablaktáblamódszernek” megfelelően felvettük a fundamentális hurokrendszer, és bevezettük a hurkokhoz tartozó  $i_{h,p}$  hurokáramokat. A kétpólusok tényleges áramai ezekkel kifejezve

$$\begin{aligned} i_1 &= i_{h,1} \\ i_2 &= i_{h,3} - i_{h,1} \\ i_3 &= -i_{h,3} \\ i_4 &= i_{h,2} - i_{h,1} \\ i_5 &= i_{h,3} - i_{h,2}. \end{aligned}$$

A MÓDSZER a csomóponti potenciálok módszerének duális sémája: alkalmazása során Kirchhoff feszültségtörvényeit írjuk fel a hurkokra, az áramtörvény pedig mindig automatikusan teljesül, ha az ágáramokat hurokáramokkal fejezzük ki. Ezért az áramtörvények nem hordoznak új információt, azokat külön nem kell felírunk. A feszültségtörvények felírásakor az alábbiak alapján járunk el:

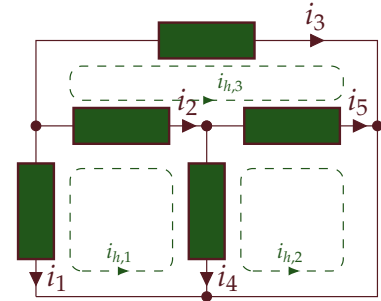
- Az ellenállások áramát kifejezzük a rajtuk áthaladó hurokáramok algebrai összegeként, az ellenállás feszültségét az Ohm-törvény alapján írjuk fel. A  $p$ . hurokra felírt feszültségtörvényben a  $p$ . hurok irányításával megegyezően felvett hurokáramokat számítjuk pozitív előjellel.
- A feszültségforrások adott feszültségét előjelhelyesen vesszük figyelembe: ha a forrásfeszültség referenciairánya egyezik a hurok irányításával, akkor pozitív előjellel tüntetjük fel.
- Az áramforrások esetén az  $i_s$  forrásáram adott, azonban az áramforráson eső ismeretlen  $u_i$  feszültség szerepel (előjelhelyesen) a vonatkozó hurokegyenletben. Emiatt  $u_i$ -t járulékos ismeretlenként fel kell vennünk. Ehhez egy további egyenletet kapunk annak a kényszernek a kihasználásával, hogy az áramforráson áthaladó hurokáramok algebrai összege az  $i_s$  forrásáramot adja.

A gyakorlatban fundamentális hurokrendszer felvétele során arra törekszünk, hogy a hálózatban levő áramforrások mindegyike csak 1-1 hurokban szerepeljen. Ha ugyanis az áramforráson egyetlen hurokáram halad át, akkor a forrásáram maga azonosítható ezzel a hurokárammal, és az ismeretlen hurokáramok száma eggyel csökken. Ekkor arra a hurokra nem szükséges sem egyenletet felírunk, sem

Az  $u_s$ -re vonatkozó áramtörvény:

$$u_s : i_u + \frac{u_s - \varphi}{R_2} + \frac{u_s - \varphi_0}{R_3} = 0$$

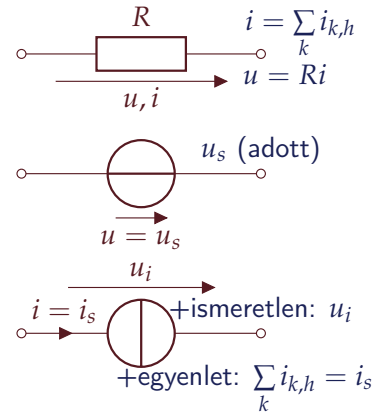
Szokás a hurokáramokat  $j_1, j_2, \dots, j_l$  jelöléssel is ellátni.



8. ábra: A hurokáramok bevezetése

A középső csomópontokra felírt áramtörvény példaul

$$\begin{aligned} -i_2 + i_4 + i_5 &= -(i_{h,3} - i_{h,1}) + \\ &+ (i_{h,2} - i_{h,1}) + (i_{h,3} - i_{h,2}) \equiv 0. \end{aligned}$$



9. ábra: A hurokáramok alkalmazási szabályai

az áramforrás feszültségét új ismeretlenként bevezetnünk. Ha szükséges, az összes ismeretlen hurokáram meghatározását követően, egy második lépésben, további feszültségtörvényekből meghatározhatók az áramforrás feszültségei. Az ismeretlenek, és a felírandó egyenletek száma tehát  $l$ -nél annnyival kevesebb, ahány áramforrás áramát tudjuk hurokáramnak választani.

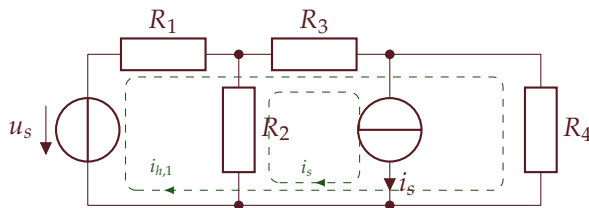
A fenti elveket illusztrálja a 10. ábra hálózata. Itt  $b = 5$ ,  $n = 3$ , amiből a fundamentális hurokrendszer hurokjainak száma  $l = b - n + 1 = 3$ . Ha nem az „ablaktábla-módszer” szerint, hanem pl. az ábrán látható módon veszünk fel hurokrendszert, az áramforráson csak egy hurok megy keresztül, ezért árama hurokáramként használható. Az ismeretlenek száma 3 helyett csak kettő,  $i_{h,1}$  és  $i_{h,2}$ . Az áramforrás feszültségét nem vesszük fel ismeretlenként, és a hozzá tartozó hurokra sem írunk fel egyenletet, mert a másik két hurokra felírható két független feszültségtörvény elegendő a két ismeretlen hurokáram meghatározásához, a következőképpen:

$$\begin{aligned} i_{h,1} : \quad & u_s + R_4(i_{h,1} + i_s) + R_2 i_{h,1} = 0 \\ i_{h,2} : \quad & u_s + R_3 i_{h,2} = 0 \end{aligned}$$

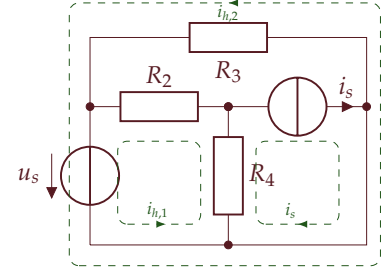
Ha mégis szükségünk van az áramforrás  $i_u$  feszültségére, a két másik hurokáram meghatározását követően az  $i_s$  hurokra felírunk egy feszültségtörvényt, amelyben az  $i_{h,1}$  és  $i_{h,2}$  már ismert mennyiségek (11. ábra). A példában

$$i_s : \quad u_i + R_4(i_s + i_{h,1}) = 0 \rightarrow u_i = \dots$$

GYAKORI ELVI HIBA, hogy olyan hurokrendszert választunk, amely ugyan lefedi a hálózat minden kétpólusát, de nem maximális. Így kisebb méretű egyenletrendszerre jutunk, amely egyértelműen megoldható, de a megoldás helytelen lesz. Ezért mindig célszerű azzal kezdeni a számolást, hogy kiszámoljuk a fundamentális hurokrendszer méretét. A 12. ábra hálózatában  $n = 4$ ,  $b = 6$ , így  $l = 3$  hurokból



áll a fundamentális hurokrendszer. Az ábrán látható módon sikerül lefedni minden kétpólust két hurokárammal, amelyek közül az

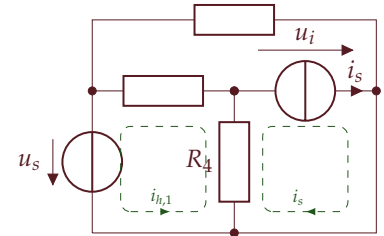


10. ábra: Példa a hurokáramok módszerére

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} i_{h,1} &= -\frac{1}{R_2 + R_4} (u_s + R_4 i_s) \\ i_{h,2} &= -\frac{1}{R_3} u_s \end{aligned}$$

Ezzel a hálózat minden árama és feszültsége meghatározható.



11. ábra: Az áramforrás feszültségének kiszámítása

12. ábra: Hiányos hurokrendszer

egyiket ráadásul az áramforrás áramával tudjuk azonosítani. Így – látszólag – egyetlen ismeretlen hurokárammal kell számolnunk:

$$i_{h,1} : -u_s + R_1 i_{h,1} + R_3(i_{h,1} + i_s) + R_4 i_{h,1} = 0$$

amelyből az  $i_{h,1}$  könnyen kiszámítható, azonban az így kapott megoldás hibás. A hurokáramok módszere is alkalmazható nemlineáris hálózatban.

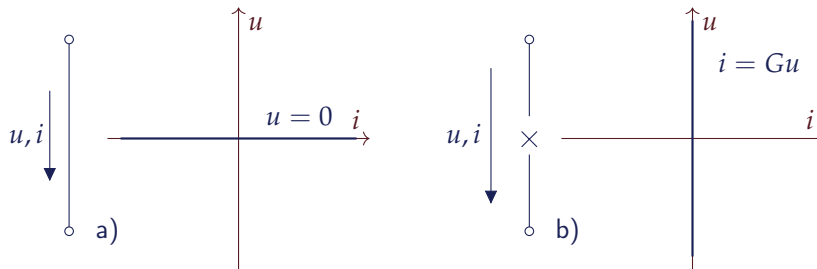
### A szuperpozíció elve

Lineáris hálózatokban érvényes a szuperpozíció elve. Ennek kihasználásával egy speciális hálózatszámítási eljárást írhatunk le, amelynek elvi jelentősége is van, de bizonyos esetekben a kézi hálózatszámítást is egyszerűbbé teszi (ha pl. csomóponti analízis helyett elemi módszerekkel, pl. feszültség- vagy áramosztással célt érünk). Ha egy *lineáris* hálózat egynél több független forrást tartalmaz, akkor a hálózat minden egyes árama ill. feszültsége úgy számítható, hogy meghatározzuk az egyes források által létrehozott feszültséget vagy áramot, és ezeket előjelesen összegezzük (szuperponáljuk). Ha a hálózatban  $S$  számú forrás van, akkor egy  $u_k$  feszültség felírható

$$u_k = \sum_{j=1}^S u_k^{(j)}$$

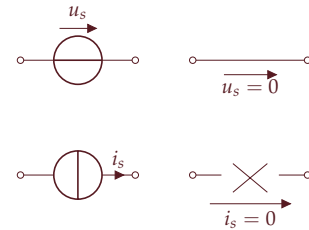
alakban. Az  $u_k^{(j)}$  számítása során a  $j$ . forrást tekintjük aktívnak, a többi forrást *deaktivizáljuk*, a forrásmennyiségüket nullának tekintjük.

Az  $u_s$  feszültségforrás deaktivizálása  $u_s = 0$  karakterisztikájú kétpólust eredményez, aminek a hálózatelméletben külön neve is van: ez a *rövidzár*. Az  $i_s$  áramforrás deaktivizálása  $i_s = 0$  karakterisztika, aminek kétpólusként a neve *szakadás*. Előbbit egy  $R = 0$  értékű, utóbbit egy  $R = \infty$  ( $G = 0$ ) ellenállásnak is tekinthetjük.



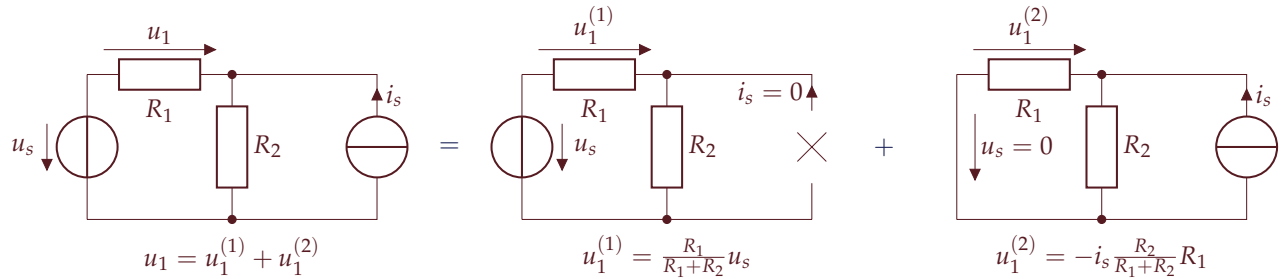
A 15. ábrán illusztráljuk a módszert. A középső hálózatban egy feszültségosztásra, a jobb oldali hálózatban egy áramosztásra vezethető vissza a megoldás.

A helyes megoldáshoz például felvehetnénk egy további  $i_{h,2}$  hurokáramot a feszültségforrás,  $R_1$  és  $R_2$  által alkotott hurokra.



13. ábra: Források deaktivizálása

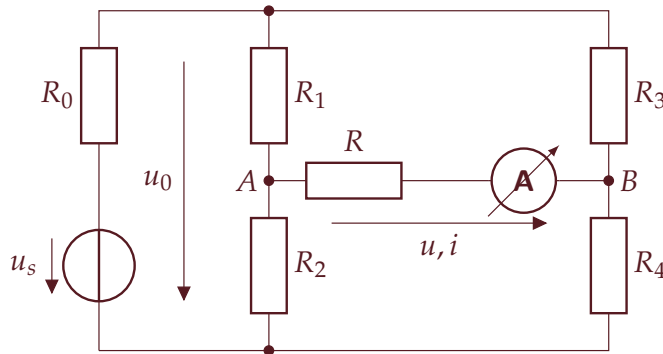
14. ábra: a: rövidzár, b: szakadás



15. ábra: Példa a szuperpozíció módszerének alkalmazására

### A Wheatstone-féle hídkapcsolás

A 16. ábrán látható elrendezésben  $R_1, R_2, R_3, R_4$  ellenállások alkotta ún. hídkapcsolás, a rezisztív Wheatstone-híd látható. Az elnevezés a geometriai elrendezésre utal. A hidat tápláló feszültségforrással sorba kapcsolva szerepel egy  $R_0$  ellenállás, ami a tápláló generátor véges (nem nulla) belső ellenállását jelképezheti (lásd az 5. előadás anyagát). A híd ún. *átlójában* egy ideális árammérőt tüntettünk fel. Az



Az ideális árammérő belső ellenállása zérus (rövidzárként viselkedik, hogy ne zavarja meg annak a körnek az áramát, amelybe beiktatták). A valós árammérő (pl. egy multiméter) egy ideális árammérő és egy ellenállás soros kapcsolásával modellezhető, ezt a célt szolgálhatja az  $R$  ellenállás. Az ideális feszültségmérő belső ellenállása végtelen (szakadásként viselkedik, hogy ne befolyásolja a mért feszültséget). A valós feszültségmérőt egy ideális feszültségmérő és egy vele párhuzamosan kapcsolt belső ellenállás eredőjeként modellezhetjük.

16. ábra: A rezisztív Wheatstone-híd

árammérő helyett egy feszültségmérőt is használhatunk. A hálózat áramainak és feszültségeinek kiszámítása a hálózat látszólagos egyszerűsége ellenére nem vezethető vissza egyszerűsített módszerekre, hanem csomóponti vagy hurokanalízist célszerű végezni. Azonban a hídkapcsolásoknál kitüntetett szerepet játszik a **kiegyenlített** hídkapcsolás, amikor a híd átlójában nem folyik áram, mert az A és B csomópontok ekvipotenciálisak. Ebben az esetben a híd átlójában nem folyik áram, függetlenül attól, hogy mi alkotja a híd átlóját, jelen esetben az árammérőt és az  $R$  ellenállást kiegyenlített esetben nem kell figyelembe venni. A híd kiegyenlítettségének feltétele 1-1 feszültségosztás alapján meghatározható: a hidat tápláló  $u_0$  feszültséget az  $R_1 - R_2$  ellenállások, ill. az  $R_3 - R_4$  ellenállások ugyanolyan arányban

A Wheatstone-híd gyakori alkalmazása ismeretlen ellenállások mérése, illetve ellenállás jellegű jelet szolgáltató érzékelők (pl. nyúlásmérő bélyegek, ellenállás-hőmérők) jelének feszültség- vagy áramjellé alakítása.

összák. Ez alapján

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

teljesülése esetén kiegyenlített a híd. Innen

$$i = 0 \Rightarrow R_1 R_4 = R_2 R_3, \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

A kiegyenlítés feltétele független  $R_0$  értékétől. Ha például a hidat egy ismeretlen értékű  $R_1$  ellenállás értékének a meghatározására akarjuk felhasználni, akkor  $R_4$  helyére egy kalibrált változtatható ellenállást (ún. potenciométert) kapcsolva  $R_1$  értéke

$$R_1 = \frac{R_3}{R_4} R_2.$$

## 4. Rezisztív csatolt kétpólusok

Bilicz-Horváth

2021. február 24.

### Csatolt kétpólusok

A hálózateleméletben sok fontos komponens két vagy több egymással összefüggő (csatolt) kétpólusként modellezhető. Ilyen például a két- vagy többtekercses transzformátor: a primer tekercs feszültsége függ a szekunder tekercs feszültségétől is.  $M$  számú csatolt kétpólushoz  $M$  feszültség és  $M$  áram rendelhető (1-1 feszültség és áram minden kétpólushoz). Az  $M$  kétpólusból álló csatolt kétpólus karakterisztikája  $M$  számú független egyenlet. Ezeknek az egyenleteknek általában egy explicit (vagy a feszültségre, vagy az áramra kifejezhető) alakját ismerjük. A tárgyban csak az  $M = 2$  (két csatolt kétpólus, csatolt kétpólus-pár) esetét tárgyaljuk. Általánosságban két csatolt kétpólus karakterisztikája például

$$\begin{cases} u_1 = \mathcal{U}_1(i_1, i_2) \\ u_2 = \mathcal{U}_2(i_1, i_2) \end{cases}$$

alakú lehet, ahol  $\mathcal{U}_1$  és  $\mathcal{U}_2$  egy-egy operátor. Összesen hatféle explicit karakterisztikát rendelhetünk két csatolt kétpólushoz, azonban adott kétpólusra ennél kevesebb karakterisztika lehet értelmezett. Csatolt rezisztív (nem dinamikus, memóriamentes) kétpólusok esetén – a csatolatlan kétpólusokhoz hasonlóan –  $\mathcal{U}_1(i_1, i_2) = U_1(i_1, i_2)$  egyszerűen egy függvény. A Kirchhoff-törvények nem függenek a komponensek karakterisztikáitól, ezért csatolt kétpólusokra is ugyanúgy érvényesek.

A CSATOLT KÉTPÓLUS teljesítményét kézenfekvő módon az azt alkotó kétpólusok teljesítményének összegeként értelmezhetjük:

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t),$$

a kétpólus munkafüggvényét

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau$$

adja meg. A csatolt kétpólus passzív, ha

$$\text{passzív} \Leftrightarrow w(t) \geq 0.$$

Speciálisan, ha  $p(t) \equiv 0$ , a csatolt kétpólus is *nonenergikus*.

### Rezisztív csatolt kétpólusok

A fenti keretben számos csatolt kétpólus definiálható. Az alábbiakban ezek közül összefoglaljuk azt a néhányat, amelynek elvi és/vagy gyakorlati jelentősége miatt a tárgyban használni fogunk.

#### Az ideális transzformátor (IT)

Az ideális transzformátor a fizika tárgyból is ismert, reális kétércses transzformátor legegyszerűbb modellje. Az IT paramétere az  $n$  **áttétel**, ami lehet pozitív vagy negatív is, és nem feltétlenül egész szám. A karakterisztika

$$\begin{aligned} u_1 &= nu_2 \\ i_2 &= -ni_1 \end{aligned}$$

Az IT rajzjelen a pöttyök az áram referenciáirányát jelölik ki: a felírt karakterisztika akkor érvényes, ha az áramok referenciáirányát a pöttyöktől „távolodva” vesszük fel. Ha a referenciáirányokat a pöttyökhöz képest nem szimmetrikusan vesszük fel, akkor a karakterisztikákban  $n$  helyére  $(-n)$  írandó.

Az IT TELJESÍTMÉNYE kifejezhető a karakterisztika alapján

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = (nu_2) i_1 + u_2 (-ni_1) \equiv 0,$$

**az IT nonenergikus (passzív) komponens.** A fizikai csatolt tekercses transzformátorra is érvényes, hogy a primer tekercs teljesítménye és a szekunder tekercs teljesítménye egyenlő, a transzformátor veszteség nélkül változtatja meg a feszültségeket és áramokat.

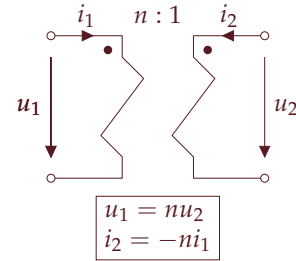
AZ ELLENÁLLÁSSAL LEZÁRT ideális transzformátor, mint kétpólus (2. ábra) egy  $R_B$  eredő („bemeneti”) ellenállással helyettesíthető:

$$R_B = \frac{u_1}{i_1} = \frac{n \cdot u_2}{-i_2/n} = n^2 \left( -\frac{u_2}{i_2} \right) = n^2 R,$$

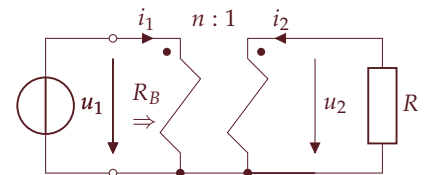
amelyből látható, hogy az IT az ellenállást (és az impedanciát) az áttétel négyzetének arányában transzformálja.

#### A vezérelt források

A vezérelt források olyan csatolt kétpólusok, amelyekben az egyik kétpólus (a vezérlő kétpólus) feszültsége vagy árama határozza meg egy feszültség- vagy áramforrás forrásmennyiségét. Mind a vezérlő, mind a vezérelt kétpóluson szimmetrikus referenciáirányokat vesszünk fel, a felírt karakterisztikák erre az esetre érvényesek. Csak lineáris forrásokkal foglalkozunk, ekkor a négy lehetséges variáns



1. ábra: Az ideális transzformátor  
Az ideális transzformátor a hálózatelméletben egy definiált komponens, és nem a csatolt tekercspárral realizált transzformátor modellje. Ezért nem foglalkozunk azzal, hogy míg egy reális transzformátor nem működne időben állandó feszültségekkel és áramokkal, az ideális transzformátorként definiált komponens igen. Az áttétel értelmezése azonban megegyezik a fizikai transzformátor menetszám-áttételének (a tekercsek menetszám-arányának) értelmezésével.



2. ábra: Az ellenállással lezárt ideális transzformátor

Ez a tulajdonsága kihasználható a teljesítményillesztési feladatok megoldására, lásd a következő előadás anyagában.

(a vezérlő és a vezérelt feszültség is lehet feszültség és áram is) a következő:

A feszültségvezérelt feszültségforrás (FF, 3. ábra) karakterisztikája

$$u_2 = \mu u_1,$$

ahol a kétpólus paramétere a  $\mu$  dimenzió nélküli *feszültségerősítési tényező*. A másik karakterisztika-egyenlet

$$i_1 = 0,$$

azonban ezt külön nem szoktuk felírni, ill. kihasználni. A vezérlő kétpólust (a szakadást) általában nem tüntetjük fel külön, csak bejelöljük a vezérlő feszültséget (hiszen a hálózat bármely két csomópontja között definiálható egy szakadás).

ENNEK ANALÓGIÁJÁRA bevezethetjük a másik három vezérelt forrást.

A feszültségvezérelt áramforrás (FÁ, 4. ábra) karakterisztikája

$$i_2 = g u_1,$$

ahol a  $g$  paraméter neve *átviteli (transzfer) konduktancia*. A konduktancia arra utal, hogy a mennyiség vezetés dimenziójú:  $[g] = S$ , az „átviteli” jelző pedig arra, hogy az 1. kétpólus mennyiségét (feszültségét) a 2. kétpólus mennyiségébe (itt a feszültségébe) viszi át. A továbbiakban a vezetés dimenziójú átviteli mennyiségeket általában  $g$ -vel fogjuk jelölni.

Az áramvezérelt források hasonlóan definiálhatók, azzal a különbséggel, hogy a vezérlő kétpólus egy rövidzár, és a 2. karakterisztika-egyenlet az  $u_1 = 0$ .

Az áramvezérelt feszültségforrás (ÁF, 5. ábra) karakterisztikája

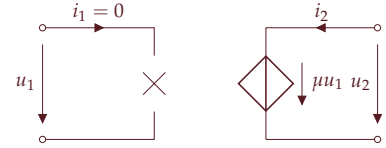
$$u_2 = r i_1,$$

ahol  $r$  egy ellenállás dimenziójú mennyiség, az *átviteli (transzfer) rezisztencia*. A továbbiakban az ellenállás dimenziójú átviteli mennyiségeket  $r$ -el fogjuk jelölni. Végül az áramvezérelt áramforrás (ÁÁ, 6. ábra) karakterisztikája

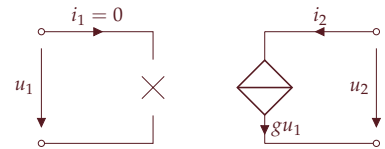
$$i_2 = \alpha i_1,$$

ahol  $\alpha$  egy dimenzió nélküli mennyiség, a forrás *áramerősítési tényezője*. Mind a négy vezérelt forrásnál a vezérlő kétpólus teljesítménye zérus (a szakadás és a rövidzár is nonenergikus kétpólus), a teljesítmény a forrás teljesítménye:

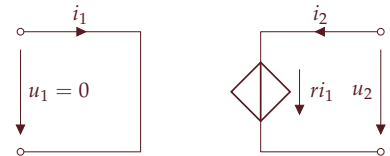
$$p = u_2 i_2 \neq 0$$



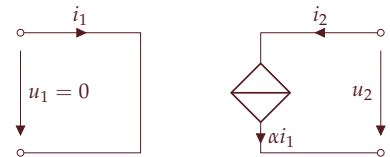
3. ábra: Feszültségvezérelt feszültségforrás



4. ábra: Feszültségvezérelt áramforrás



5. ábra: Áramvezérelt feszültségforrás



6. ábra: Áramvezérelt áramforrás



mivel  $i_2$  tényleges iránya (nem az általunk felvett referenciairány) a forrásra csatlakozó hálózattól függően egybeeshet  $u_2$  irányával, vagy azzal ellentétes lehet (a vezérelt forrás az első esetben teljesítményt vesz fel, a második esetben teljesítményt ad le), a vezérelt forrás – a korábban tárgyalt független forrásokhoz hasonlóan – **aktív komponens**.

A vezérelt források egyrészt (legalább közelítőleg) megvalósíthatók elektronikus eszközökkel, erre példákat is fogunk látni. Másrészt pl. fizikai folyamatokat leképező Kirchhoff-hálózati modellekben is jól használhatók, az Elektronika tárgyakban a különféle tranzisztorok hálózati modelljeiben vezérelt forrásokat találunk.

### A girátor

A girátor, mint definiált (hipotetikus) csatolt kétpólus bevezetését Tellegen javasolta a hálózatelméletben 1948-ban. A girátor (7. ábra) karakterisztikája

$$\begin{cases} u_2 = ri_1 \\ u_1 = -ri_2 \end{cases}$$

A kétpólus  $r$  paraméterének neve a dimenziójára való tekintettel *girációs rezisztencia*. Ritkán használatos ennek reciproka, a  $g = 1/r$  girációs konduktancia is. A girátor teljesítményét kifejezve

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = (-ri_2)i_1 + (ri_1)i_2 \equiv 0,$$

a girátor tehát **nonenergikus** (egyben passzív) komponens.

A girátort egy  $R_2$  ellenállással lezárva adódó kétpólus  $R_B$  eredő ellenállása (8. ábra)

$$R_B = \frac{u_1}{i_1} = \frac{-ri_2}{u_2/r} = -r^2 \left( \frac{i_2}{u_2} \right) = \frac{r^2}{R_2} = r^2 G_2,$$

ahol kihasználtuk, hogy a feltüntetett referenciairányok mellett

$$R_2 = -\frac{u_2}{i_2},$$

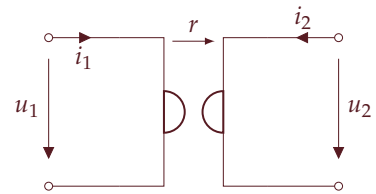
és  $G_2 = 1/R_2$ . Minél nagyobb  $R_2$ , annál kisebb az eredő ellenállás.

A girátort egy kondenzátorral lezárva adódó kétpólus (9. ábra) karakterisztikája

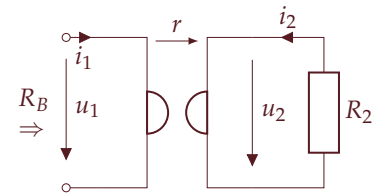
$$u_1 = -ri_2 = rCu_2' = \underbrace{r^2 C}_{L} i_1',$$

ahol kihasználtuk, hogy a felvett referenciairányok mellett a kondenzátor árama és feszültsége között

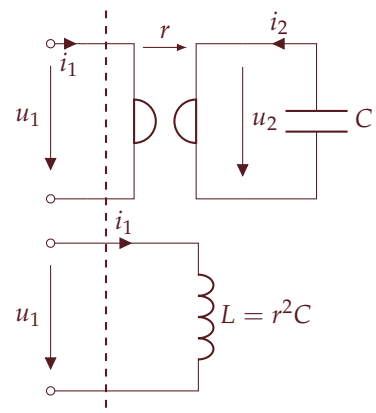
$$i_2 = -Cu_2'$$



7. ábra: A girátor



8. ábra: Ellenállással lezárt girátor



9. ábra: Kondenzátorral lezárt girátor

összefüggés van. A kondenzátorral lezárt girátor úgy viselkedik, mint egy  $L = r^2 C$  induktivitású tekercs.

Gyakorlaton látni fogjuk, hogy a hárompólusú girátor ideális erősítővel realizálható, továbbá közelítőleg realizálható a girátor elektronikus eszközökkel is. A cirkulátor rádiófrekvenciákon (néhány 100 MHz... néhány 10 GHz frekvencián) közelítőleg megvalósítható speciális mágneses anyagok felhasználásával, illetve elektronikus áramkörökkel is.

### Az ideális erősítő

Az ideális erősítő egy végtelen erősítésű feszültségvezérelt feszültségforrás. A jelentőségét többek között az adja, hogy nagyon jó közelítéssel alkalmazható az elektronikában *műveleti erősítő* (operational amplifier, röviden op-amp) néven ismert áramkör leírására, amely az egyik legfontosabb integrált analóg elektronikai építőelem.

Az ideális erősítőre vonatkozó karakterisztikák (10. ábra):

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ i_1 = 0, \end{cases}$$

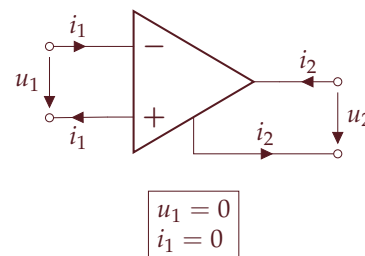
ami azt jelenti, hogy a két bemeneti (az erősítő bal oldalán feltüntetett) pólus ekvipotenciális, és nem folyik áram egyik bemeneti pólusba sem. A - jellel jelölt pólus az *invertáló bemenete*, a + jellel ellátott pedig a *neminvertáló bemenet*. Az ideális erősítő **aktív** komponens, mert bár a bemeneti kétpólus teljesítménye zérus, a kimeneti kétpólus feszültsége, illetve árama tetszőleges lehet (a csatlakozó hálózattól függően), így a teljesítménye lehet negatív is.

### Az ideális erősítő származtatása

Az ideális erősítőre felírt karakterisztikák jellege meglepőnek tűnhet. Ha azonban megvizsgáljuk az erősítőnek a reális feszültségvezérelt feszültségforrás (műveleti erősítő) alapján történő származtatását, jobban érthetővé válik. A 11. ábrán egy ideális feszültségvezérelt feszültségforrást tüntettük fel, amelynek feszültségerősítése  $-A$  értékű, ahol a negatív előjel arra utal, hogy a vezérlő feszültség valójában nem  $u_1$ , hanem  $-u_1$ , amely az neminvertáló (+) és az invertáló (-) bemenet potenciáljának különbsége.  $u_2$  tehát nő, ha a (+) bemenet potenciálját növeljük, és csökken, ha a (-) bemenet potenciálját növeljük; ez a magyarázata a jelölésnek is.

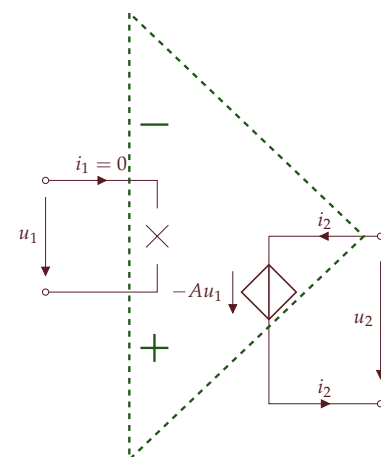
A bemeneti kétpólus szakadás, ezért  $i_1 = 0$  biztosan teljesül (2. karakterisztika-egyenlet). Az ideális erősítőben  $A \rightarrow \infty$ : a feszültségerősítési tényező végtelen nagy. Mivel  $u_1 = -\frac{u_2}{A}$ , ez matematikai értelemben indokolja, hogy véges  $u_2$  érték mellett miért lesz  $u_1 = 0$

A girátort használják analóg integrált áramkörökben induktivitások realizálására, mert félvezetős technikával a tekercs közvetlenül nem valósítható meg.



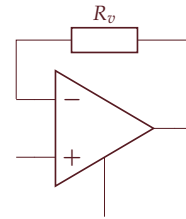
10. ábra: Az ideális erősítő

Figyeljük meg, hogy mindkét egyenlet a bemeneti póluspárra vonatkozik, a kimeneti póluspárra (az erősítő jobb oldalára rajzolt póluspárra) nem vonatkozik karakterisztika!



11. ábra: Az ideális erősítő származtatása

(1. karakterisztika-egyenlet). Utóbbinak a fizikai magyarázata és egyben feltétele az, hogy a hálózatban ún. negatív visszacsatolás (negative feedback) legyen: a kimenet és az invertáló (-) bemenet között legyen egy kétpólus, amely (minden releváns frekvencián) gondoskodik arról, hogy a kimeneti feszültség változása visszahasson az invertáló bemenet potenciáljára (12. ábra).



12. ábra: Negatív visszacsatolás

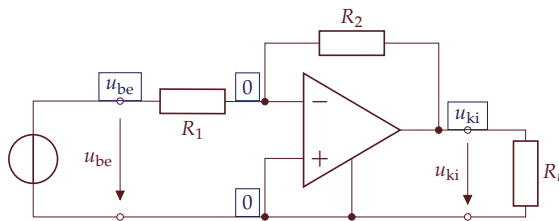
A neminvertáló (+) pólus potenciálját változatlanak feltételezve, a kimenet potenciáljának emelkedésével együtt a visszacsatolás miatt az invertáló (-) bemenet potenciálja is emelkedik, az  $u_1$  vezérlő feszültség csökken. A kimenet potenciálja addig nő, amíg a vezérlő oldalon beáll az  $u_1 = 0$  egyensúlyi pont, azaz az invertáló bemenet potenciálja egyenlővé válik a neminvertáló bemenet potenciáljával. Az ideális erősítő a reális műveleti erősítő jó modellje olyan hálózatokban, amelyekben negatív visszacsatolás van (és az „erősebb”, mint az esetleg szintén meglevő pozitív visszacsatolás).

### Az invertáló erősítő

Az ideális erősítőt tartalmazó hálózatok analízise során az alábbi szabályokat követjük:

- A csomóponti potenciálok módszerét alkalmazzuk.
- A hálózat referencia-csomópontját ott vesszük fel, ahova az erősítő „4. pólusa” csatlakozik.
- Az erősítő kimeneti póluspárjára nem írunk fel a csomóponti analízis során áramtörvényt, mert nem vonatkozik karakterisztika a kimeneti póluspár áramára. Ezért az erősítő kimeneti pólusain folyó áramot új ismeretlenként fel kellene vennünk, ami nagyobb egyenletrendszerre vezetne.

A 3. pont miatt a kimenetre (és a referencia-csomópontra sem) írunk fel egyenletet, ha pedig az erősítő kimeneti áramára szükségünk van, egy utólagos lépésben tudjuk meghatározni. A fenti elveket a 13.



13. ábra: Az invertáló erősítő

13. ábra hálózatában is érvényesítjük. A hálózat gerjesztése a feszültségforrás, a válasz pedig az  $R_t$  „terhelő” ellenállás  $u_{ki}$  feszültsége. Az erősítő bemeneti pólusai között nincs potenciálkülönbség, ezért, mivel a neminvertáló bemenet 0 potenciálon van, az invertáló bemenet

potenciálja is ismert, szintén zérus. Egyedül az  $u_{ki}$  potenciál ismeretlen, azonban erre a csomópontra a fentiek értelmében nem érdemes csomóponti egyenletet felírni. Értelmes viszont az invertáló bemenetre felírni az áramtörvényt, annak ellenére, hogy ezen csomópont potenciálja tudottan zérus:

$$\frac{0 - u_{be}}{R_1} + \frac{0 - u_{ki}}{R_2} + 0 = 0,$$

mert az erősítő bemeneti árama az  $i_1 = 0$  karakterisztika miatt nulla. Innen

$$u_{ki} = \underbrace{\left(-\frac{R_2}{R_1}\right)}_{<0} u_{be}.$$

A hálózat a bejelölt kapcsok között egy feszültségvezérelt feszültségforrást realizál:  $u_{ki}$  a gerjesztő forrás feszültségével arányos, ahol az erősítést a két ellenállás arányának megválasztásával állíthatjuk be. Az  $u_{ki}$  értéke az  $R_t$  terhelő ellenállás értékétől függetlenül (amíg  $R > 0$ ) a beállított érték lesz, a hálózat ideális (nulla belső ellenállású, lásd később) feszültségforrásként viselkedik. A negatív visszacsatolás révén a „végtelen” feszültségerősítésű ideális erősítőt véges erősítésű erősítővé alakítottuk.

#### A neminvertáló erősítő

A 14. ábra hálózatában a gerjesztés a neminvertáló bemenetre csatlakozik. Az  $u_1 = 0$  karakterisztika miatt az invertáló bemenet potenciálja is  $u_{be}$ ; az egyetlen ismeretlen potenciál itt is  $u_{ki}$ . Az erősítő kimenetére nem írunk fel egyenletet, ismét az invertáló bemenetre vonatkozó áramtörvényt tudjuk felírni:

$$\frac{u_{be}}{R_1} + \frac{u_{be} - u_{ki}}{R_2} = 0,$$

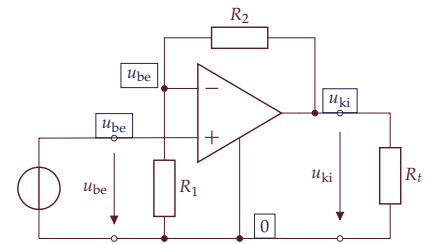
ahonnan

$$u_{ki} = \underbrace{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}_{>1} u_{be}.$$

Ez a hálózat is feszültségvezérelt feszültségforrást realizál, a visszacsatoló hálózat révén beállítható feszültségerősítési tényezővel, amely pozitív (sőt, 1-nél nagyobb) értékű, szintén az  $R_t$  értékétől függetlenül. Ráadásul a gerjesztő forrás árama zérus (mert az erősítő bemenetén nem folyik áram), ezért a forrás ún. *üresjárási* üzemállapotban (szakadás lezárás mellett) működik, az erősítő „nem terheli” a forrást. Ennek jelentőségét (előnyét) a generátorok tárgyalásakor fogjuk látni. Térjünk vissza az erősítő  $i_2$  kimeneti áramának meghatározására (15.

A hálózat az elektronikában invertáló erősítő alkapcsolásként ismert, ahol az invertálás az erősítés negatív előjelére utal.

A számítás nagyon jó közelítéssel a reális műveleti erősítő esetén is pontos. A valódi erősítő erősítése nagyon nagy (10000...100000-es nagyságrendű), de nem végtelen, és „nem jól kézben tartható”, mert nagy a konkrét példányok gyártási szórása, hőmérsékletfüggése, stb. A negatív visszacsatolás hatására ezek a nem ideális hatások a gyakorlatban legtöbbször elhanyagolhatóvá válnak.



14. ábra: A neminvertáló erősítő

ábra)! Miután kiszámítottuk az  $u_{ki}$  értékét, egy utólagos lépésben már felírhatunk egy Kirchhoff-áramtörvényt a kimeneti csomópontra:

$$i_2 + \frac{u_{ki}}{R_t} + \frac{u_{ki} - u_{be}}{R_2} = 0; \Rightarrow i_2 = \dots$$

Az ideális (és a reális műveleti-) erősítő „működését” szemlélteti, ha a neminvertáló erősítő példáján megvizsgáljuk a teljesítményviszonyokat. A terhelő ellenállás teljesítménye

$$p_t = \frac{u_{ki}^2}{R_t},$$

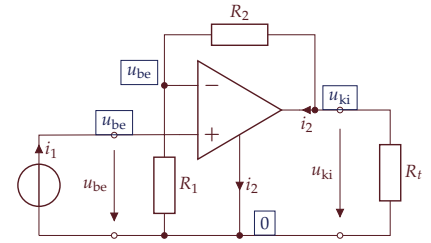
amely a terhelő ellenállás értékének csökkentésével tetszőlegesen nagy lehet. Az  $u_{be}$  feszültségforrás teljesítménye azonosan zérus, mert az erősítőbe nem folyik áram ( $i_1 = 0$  a karakterisztika alapján). Ezért a terhelő ellenállás (és a visszacsatoló hálózat) teljesítményét csak az ideális erősítő szolgáltathatja: a kimeneten folyó  $i_2$  áram minden esetben olyan értéket vesz fel, hogy a kimeneti potenciál éppen  $u_{ki}$  legyen.

#### \*További vicces fogalmak

Az ideális erősítő (és közelítőleg a negatívan visszacsatolt reális erősítő) két definiált hálózatelméleti komponens csatolásaként is felfogható. A bemeneti póluspár egy ún. *nullátor*, amelyre egyszerre igaz, hogy  $u = 0$  és  $i = 0$ , tehát egyszerre rövidzár és szakadás is. A kimeneti póluspár pedig a hálózatelméletben *norátorként* ismert két-pólussal helyettesíthető, amelynek árama és feszültsége is tetszőleges lehet. A kialakuló feszültséget és áramot teljes mértékben a norátorra csatlakozó hálózat határozza meg, ahogy azt az előző szakaszokban láthattuk a gyakorlatban is. Az így definiált kétpólusok csatolásával előálló csatolt kétpólus a *nullor*.

#### Hálózatszámítási módszerek

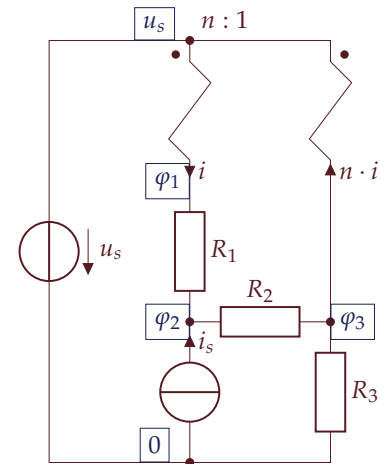
Vizsgáljuk meg a 16. ábrán látható hálózatot a csomóponti potenciálok módszerével! A hálózatban  $b = 5$  kétpólus van (a transzformátor 2 db kétpólusnak számít), és  $n = 5$  csomópont. Az áramtörvények fundamentális rendszere  $r = n - 1 = 4$  egyenletből áll, a csomóponti potenciálok módszerének alkalmazásához ennél eggyel kevesebb ismeretlen csomópontot ( $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ) kell bevezetnünk, mert a feszültségforrás két csomópont potenciálját összefüggésbe hozza egymással. A csomóponti potenciálokat az ábrán látható módon vettük fel. A transzformátor áramait szintén nem ismerjük, ezért az egyik pólus-párjának az áramát ( $i$ ) új ismeretlenként kényszerülünk bevezetni.



15. ábra: A neminvertáló erősítő kimeneti árama

A reális műveleti erősítő éppen ezért tápellátást igényel.

Ma is tanultunk valami hasznosat :)



16. ábra: Példahálózat csomóponti analízisre

A másik póluspár árama az IT karakterisztikája alapján azonnal kifejezhető; az áramok közötti összefüggésben levő negatív előjelet a jobb oldali áramirány megfordításával fejeztük ki. Összesen 4 ismeretlenünk mellett felírhatunk 3 csomóponti egyenletet. A szükséges 4. egyenletet az IT feszültségeire vonatkozó karakterisztikából kapjuk úgy, hogy a feszültségeket csomóponti potenciálok különbségeként írjuk fel. Eszerint

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 : -i + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_1} = 0 \\ \varphi_2 : \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_1} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_2} - i_s = 0 \\ \varphi_3 : n \cdot i + \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_2} + \frac{\varphi_3}{R_3} = 0 \\ IT : u_s - \varphi_1 = n(u_s - \varphi_3) \end{array} \right\}$$

A négy független egyenletből meghatározható a három ismeretlen potenciál és az IT bal oldali póluspárjának az árama is.

A hurokáramok módszerének alkalmazásához a transzformátor egyik póluspárjának a feszültségét kényszerülünk új ismeretlenként bevezetni, a másik póluspár feszültségét a karakterisztika alapján célszerű ugyanezzel az ismeretlennel kifejezni. A hurokegyenletek mellett egy további egyenletet szolgáltat az IT áramaira vonatkozó karakterisztika-egyenlet, amelyben az áramokat a hálózat hurokármaival fejezzük ki.

## 5. Összetett rezisztív kétpólusok helyettesítése

Bilicz-Horváth

2021. március 2.

Az alábbiakban belátjuk, hogy tetszőlegesen bonyolult, lineáris kétpólusokat tartalmazó, de független forrást nem tartalmazó kétpólusok egy eredő ellenállással helyettesíthetők, ha pedig független forrás(ok) is van(nak) a kétpólusban, akkor egy forrásból és egy belső ellenállásból álló kételemű helyettesítőkép (Thévenin- vagy Norton-generátor) alkalmazható. A helyettesítő generátorok fontos alkalmazását, a teljesítményillesztés problémáját is tárgyaljuk.

### Összetett kétpólusok

A korábbiakban láttuk, hogy a rezisztív *elemi kétpólusok* (akár csatlatlan kétpólusok, mint az ellenállás vagy a független források, akár csatolt kétpólusok, mint az ideális transzformátor vagy a vezérelt források) feszültség-áram kapcsolata (karakterisztikája) lineáris: a független források kivételével az origón átmenő (homogén) lineáris függvény. Most olyan *összetett kétpólusok* karakterisztikáját vizsgáljuk, amelyet a felsorolt elemi kétpólusok tetszőlegesen bonyolult összekapcsolását tartalmazhatnak. Megmutatjuk, hogy tetszőlegesen bonyolult lineáris kétpólus helyettesíthető egy egy- vagy kételemű helyettesítő kapcsolással, amelynek a karakterisztikája ( $u - i$  kapcsolata) megegyezik az összetett kétpólus karakterisztikájával.

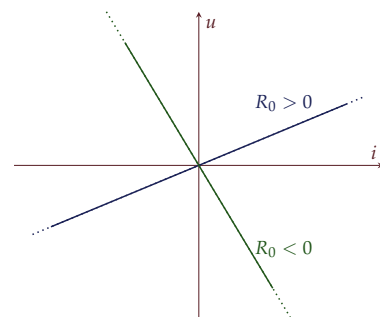
### Független forrást nem tartalmazó kétpólusok

Ha a kétpólusban csak rezisztív, lineáris kétpólusok találhatók, a kétpólus tehát lineáris, akkor a karakterisztikája biztosan átmegy az origón. Egyrészt független forrást nem tartalmaz, gerjesztés nélkül  $u = 0$  mellett biztosan  $i = 0$ , és viszont; továbbá a lineáris kétpólus  $u - i$  kapcsolata biztosan egy lineáris összefüggés. Ezért a kétpólus egyetlen elemből álló helyettesítő képpel helyettesíthető, amelyben egyetlen ellenállás, az  $R_0$  *eredő ellenállás* szerepel:

$$i = \frac{1}{R_0} u, \quad u = R_0 i$$

Ahogy az ellenállás tárgyalásánál láttuk,  $R_0 \geq 0$  esetén az ellenállás *passzív*, míg  $R_0 < 0$  esetén *aktív*. Ezért kézenfekvő, hogy passzív kétpólusoknál az eredő ellenállás nemnegatív, míg aktív (pl. erősítőt vagy vezérelt forrást is tartalmazó) kétpólusoknál  $R_0 < 0$  lehet.

Az *EREDŐ* ellenállás fogalmát már használtuk korábban az ellenállások soros és párhuzamos eredőjének meghatározásakor. Két ellenállás



1. ábra: Független forrást nem tartalmazó kétpólus karakterisztikája

lás soros eredőjét Kirchhoff feszültségtörvénye alapján számolhatjuk (2. ábra), figyelembe véve, hogy az áramtörvény értelmében a soros kapcsolás miatt mindkét ellenállás árama  $i$ :

$$u = u_1 + u_2 = i \underbrace{(R_1 + R_2)}_{=R_0}.$$

Két ellenállás párhuzamos eredőjét az áramtörvény alapján számolhatjuk (3. ábra), figyelemben véve, hogy a feszültségtörvény értelmében a két párhuzamosan kapcsolt ellenállás  $u$  feszültsége egyenlő:

$$i = i_1 + i_2 = u \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \equiv R_1 \times R_2.$$

Mindkét esetben igaz, hogy  $R_1, R_2 \geq 0$  mellett  $R_0 \geq 0$ , a helyettesítő kép is passzív.

EGY MÁSIK PÉLDÁBAN vezérelt forrást (aktív komponens) is tartalmaz a kétpólus (4. ábra). A hálózatra az áramtörvény

$$-i + \alpha i + \frac{u_2}{R_2} = 0, \quad u_2 = R_2(1 - \alpha)i$$

amivel

$$u = R_1 i + u_2 = R_1 i + (1 - \alpha) R_2 i,$$

$$u = \underbrace{[R_1 + R_2(1 - \alpha)]}_{R_0} i,$$

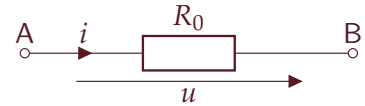
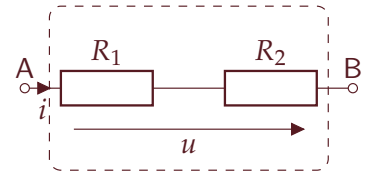
amely passzív ( $R_0 \geq 0$ ), ha  $\alpha \leq \frac{R_1 + R_2}{R_2}$ , ha  $R_1, R_2 > 0$ ; különben pedig aktív.

*Független forrást is tartalmazó kétpólusok*

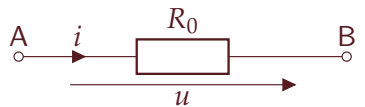
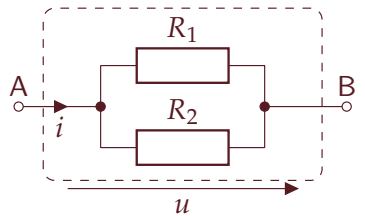
Ha a kétpólusban a lineáris rezisztív komponenseken kívül független forrás(ok) is van(nak), a kétpólus  $u - i$  kapcsolata továbbra is lineáris kell, hogy legyen, de elképzelhető, hogy  $u = 0$  mellett  $i \neq 0$ , vagy fordítva: a karakterisztika egy inhomogén (nem origón áthaladó) lineáris összefüggés:

$$u = U_0 + R_0 i, \quad i = -\frac{U_0}{R_0} + \frac{1}{R_0} u$$

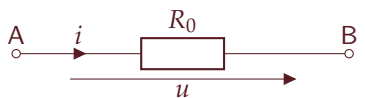
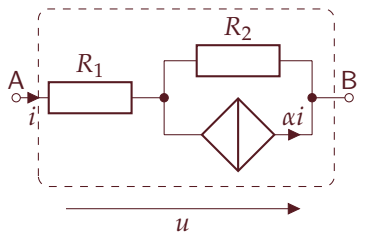
A karakterisztikát két paraméter határozza meg (a meredekség és a tengelymetszet értéke). Mindkét alak alapján felrajzolhatunk 1-1 egyszerű, két elemű helyettesítő képet, amely egy tetszőlegesen bonyolult lineáris kétpólus helyettesítésére alkalmas.



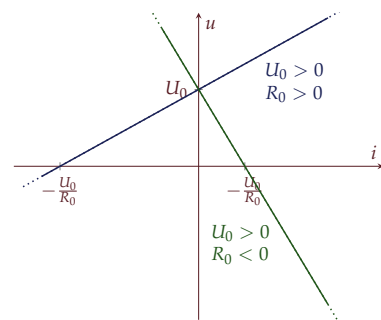
2. ábra: Soros eredő ellenállás, mint helyettesítő kép



3. ábra: Párhuzamos eredő ellenállás, mint helyettesítő kép



4. ábra: Aktív kétpólus helyettesítése



5. ábra: Független forrást is tartalmazó kétpólus karakterisztikája



A THÉVENIN-GENERÁTOR (Helmholtz, 1853; Thévenin, 1883) az  $u = U_0 + R_0 i$  alakból adódik: az  $U_0$  tagok egy  $u_s = U_0$  feszültségű feszültségforrással, az  $R_0 i$  tagot egy  $R_s = R_0$  ellenállással realizáljuk; végül a feszültségek összegzése miatt a két komponens sorba kapcsolandó. Az így adódó kétpólus nagyon fontos kitüntetett szerepet játszik a villamosmérnöki gyakorlatban, a neve *Thévenin-generátor* vagy *feszültséggenerátor* (6. ábra).  $R_s \rightarrow 0$  esetén a generátor egy feszültségforrásba megy át.

Vizsgáljuk meg a viszonyokat két *extrém lezárás* mellett! Ha a Thévenin-generátort szakadással zárjuk le (7. ábra), akkor  $i = 0$ , és

$$u = u_{sz} = u_s,$$

mivel nem esik feszültség a belső ellenálláson. Ez az üzemállapot az *üresjárás*, a generátoron mérhető  $u_{sz}$  feszültség a generátor **üresjárási** (szakadási) **feszültsége**.

Ha a Thévenin-generátor kapcsait rövidre zárjuk (8. ábra), akkor a körben folyó áram a *rövidzárási áram*, értéke

$$i_{rz} = -\frac{u_s}{R_s},$$

ahol a negatív előjel akkor érvényes, ha az áram referenciairánya a bejelölt módon a generátoron szimmetrikus. A generátor belső ellenállása kifejezhető az üresjárási feszültség és a rövidzárási áram hányadosaként:

$$R_s = -\frac{u_{sz}}{i_{rz}}.$$

Ha az áram referenciairányát fordítva vesszük fel, akkor a két utóbbi formulában a negatív előjel értelemszerűen nem szerepel.

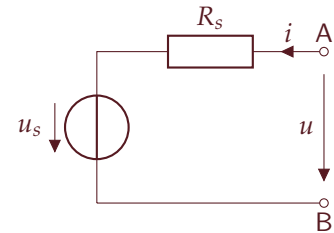
A NORTON-GENERÁTOR (Mayer, 1926; Norton, 1926) az  $i = -\frac{U_0}{R_0} + \frac{1}{R_0} u$  kifejezés alapján rajzolható fel: az  $i_s = -\frac{U_0}{R_0}$  tagnak egy áramforrás, a  $\frac{1}{R_0} u$  tagnak egy  $G_s = \frac{1}{R_0}$  konduktanciájú ellenállás feleltethető meg. Az áramok összegzését a két komponens párhuzamos kapcsolásával fejezhetjük ki. Az így kapott kétpólus a 9. ábrán látható *Norton-generátor* vagy *áramgenerátor*.  $G_s \rightarrow 0$  mellett a generátor egy áramforrásba megy át.

Vizsgáljuk ismét a viszonyokat a két extrém lezárás mellett! A rövidre zárt Norton-generátor belső ellenállását söntöli a rövidzár, ezért a rövidzárási áram egyenlő a forrásárammal (11. ábra):

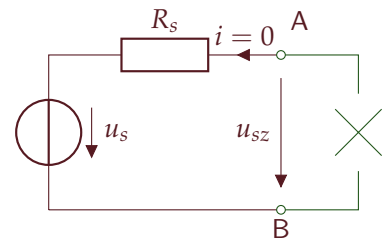
$$i_{rz} = i_s.$$

Üresjárásban (11. ábra) a kétpóluson mérhető üresjárási feszültség

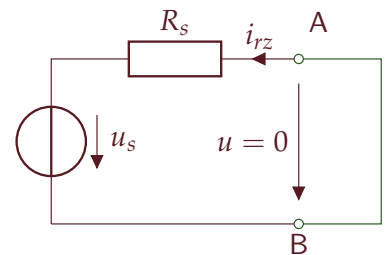
$$u_{sz} = -R_s i_s,$$



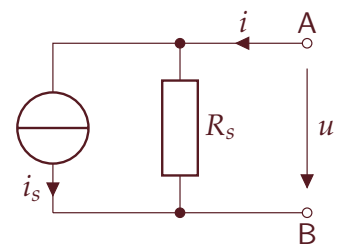
6. ábra: A Thévenin-generátor



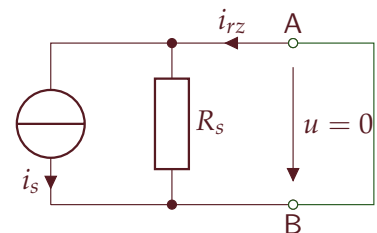
7. ábra: A Thévenin-generátor üresjárásban ( $u_{sz}$ : üresjárási feszültség)



8. ábra: A Thévenin-generátor rövidzárási ( $i_{rz}$ : rövidzárási áram)



9. ábra: A Norton-generátor



10. ábra: A Norton-generátor rövidzárási ( $i_{rz}$ : rövidzárási áram)

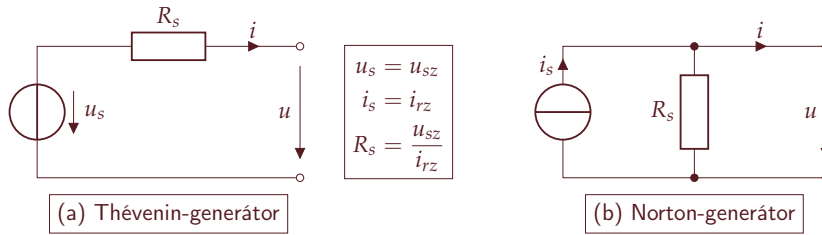
ezzel a generátor belső ellenállása szintén

$$R_s = -\frac{u_{sz}}{i_{rz}}$$

alakban számítható.

A HELYETTESÍTŐ GENERÁTOROK TÉTELE értelmében egy tetszőleges, lineáris karakterisztikájú kétpólusok és források összekapcsolásából álló *kétpólus* helyettesíthető egy Thévenin- vagy egy Norton-generátorral.

Az eddigiekben a generátor áramának referenciairányát a *generátoron* tételeztük fel szimmetrikusnak. Gyakran célszerűbb az áram referenciairányát a generátorra csatlakozó lezáráson szimmetrikusnak feltételezni (éppen ellentétes referenciairányt feltételezni). Az eredmények az utóbbi feltételezéssel is érvényesek, egyedül a belső ellenállás kiszámításánál szereplő negatív előjel marad el, az  $i - u$  karakterisztika ábráját pedig tükrözni kell az  $u$  tengelyre. Ezt a konvenciót foglalja össze a 12. ábra.

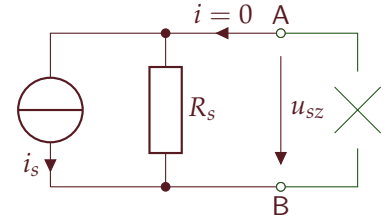


Ezzel a konvencióval élve pl. a Thévenin-generátor karakterisztikája (később *munkaegyenest*nek is fogjuk nevezni) a 13. ábrán látható.

### A helyettesítő generátorok paramétereinek meghatározása

A generátorokat három paraméterük,  $u_{sz}$ ,  $i_{rz}$  és  $R_s$  jellemzi, ebből bármelyik kettő ismeretében egyértelműen adódik a harmadik paraméter. A paraméterek meghatározására két módszert használunk.

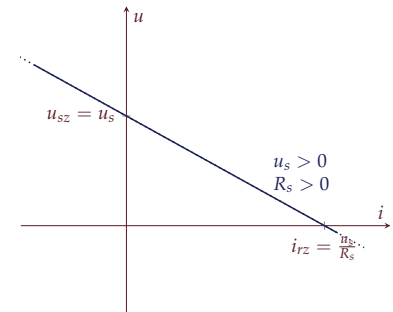
AZ ELSŐ MÓDSZERNÉL tudjuk, hogy a Thévenin- és Norton-generátor karakterisztikája is egyenes, ezért a generátor karakterisztikáját két összetartozó  $u - i$  értékpár alapján fel tudjuk venni, mert erre a két pontra tudunk egyenest illeszteni. Számítástechnikailag előnyös a generátor üresjárás, illetve rövidzárási üzemiállapotát vizsgálni. Az első módszer alkalmazása során az üresjárás feszültséget és a rövidzárási áramot számítjuk ki. Ezt a módszert illusztráljuk a 14. ábra hálózatában, ehhez a kétpólushoz keresünk helyettesítő generátort. Először az



11. ábra: A Norton-generátor üresjárásban ( $u_{sz}$ : üresjárási feszültség)

A tárgyban konzekvensen különbséget teszünk az ideális feszültségforrás (voltage source) és a feszültséggenerátor (Thévenin-generátor) között. Sok helyen azonban a feszültségforrást nevezik feszültséggenerátornak.

12. ábra: Thévenin- és Norton-generátor összefüggései (szimmetrikus referenciairány a generátorra kapcsolt terhelésen)



13. ábra: Thévenin-generátor karakterisztikája (szimmetrikus referenciairány a generátorra kapcsolt terhelésen)

Ha azonban méréssel akarjuk egy generátor paramétereit meghatározni, érthető okból a generátor rövidre zárása a gyakorlatban nem mindig elfogadható opció. Sok esetben (pl. rádió-adóberendezések esetén) az üresjárás is károsíthatja a berendezést.

üresjárási feszültséget számoljuk ki. Üresjárásban (szakadás lezárásával, 15. ábra)  $i = 0$ , emiatt az  $R_2$  ellenálláson nem esik feszültség, az A kapocs potenciálja is egyenlő  $\Phi$ -vel, és  $u = u_{sz} = \Phi$ . Az  $u_{sz} = \Phi$  csomóponttra felírható áramtörvény

$$\frac{u_{sz} - U_0}{R_1} + g u_{sz} = 0,$$

amelyből a keresett üresjárási feszültség

$$u_{sz} = \frac{U_0}{1 + R_1 g}.$$

A rövidzárási áram számításához képzeletben rövidre zárjuk az AB kapcsokat (16. ábra) Ezzel  $u = 0$ ,  $i = i_{rz}$ , és az A kapocs potenciálja egyenlő a B kapocséval, azaz nulla. Ismét a  $\Phi$  potenciálú csomópont-ra írunk fel áramtörvényt, amelyben a vezérelt forrás árama nulla, mert az  $u$  vezérlő feszültség nulla (a vezérelt forrás szakadással helyettesíthető):

$$\frac{\Phi - U_0}{R_1} + \frac{\Phi}{R_2} = 0,$$

ahonnan

$$\Phi = \frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2},$$

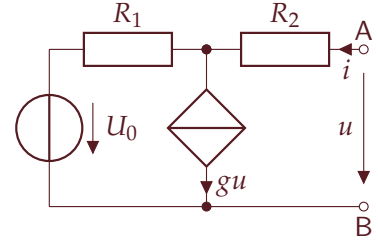
(vagy észrevehetjük, hogy egyszerű feszültségosztásra jutottunk). A keresett rövidzárási áram

$$i_{rz} = -\frac{\Phi}{R_2} = -\frac{U_0}{R_1 + R_2},$$

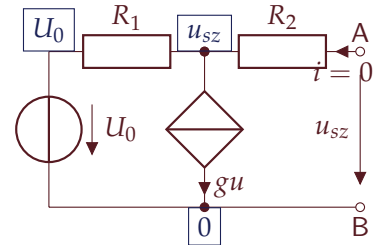
a generátor belső ellenállása pedig

$$R_s = -\frac{u_{sz}}{i_{rz}} = \frac{R_1 + R_2}{1 + R_1 g}.$$

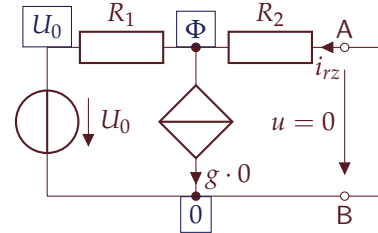
A GENERÁTOR BELSŐ ellenállását közvetlenül is meghatározhatjuk. Ekkor elegendő az üresjárási feszültség és a rövidzárási áram közül csak az egyiket kiszámolni. Tekintsük például a független forrást is tartalmazó kétpólus Thévenin-ekvivalensét (17. ábra). A célunk az  $R_0$  belső ellenállás közvetlen meghatározása. A kétpólus linearitása miatt nyilvánvaló, hogy a dezaktivizált (független források deaktiválása révén nyert) kétpólus eredő ellenállása ugyanaz, mint az eredeti kétpólusé. Ezért a dezaktivizált kétpólus eredő ellenállása közvetlenül megadja a helyettesítő generátor belső ellenállását. A dezaktivizálás során a szokásos módon a független feszültségforrásokat rövidzárral, a független áramforrásokat szakadással helyettesítjük. A módszer elsősorban akkor célszerű, ha az eredő ellenállás számítása elemi lépésekkel, pl. soros-párhuzamos eredőkre visszavezetéssel kiszámolható.



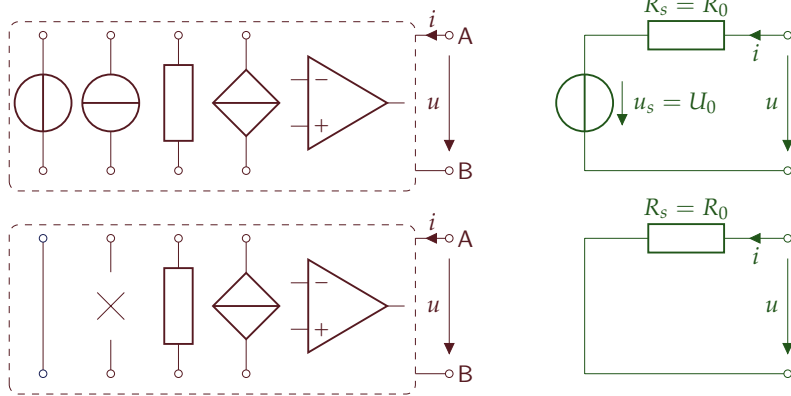
14. ábra: Példa-kétpólus



15. ábra: Példa-kétpólus üresjárásban



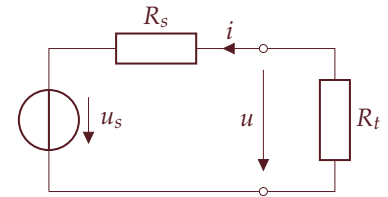
16. ábra: Példa-kétpólus rövidzárbán



17. ábra: Belső ellenállás közvetlen meghatározása

### A teljesítményillesztés

Adott egy Thévenin-generátor, amelyre egy  $R_t$  terhelő (vagy lezáró) ellenállás csatlakozik (18. ábra). A feladat az  $R_t$  ellenállás értékének megválasztása úgy, hogy a terhelő ellenállás  $p_t = -u \cdot i$  teljesítménye („a generátorból kivehető teljesítmény”) maximális legyen. A Thévenin-generátor paramétereit rögzítjük, és az  $R_t$  értékét tekintjük változónak (ezt hangsúlyozzuk a  $p_t(R_t)$  írásmóddal is). A kérdésfelvetés értelmes, mert egyrészt  $R_t \rightarrow 0$  értékekre az  $u$  feszültség nagyon kicsi, mert a forrásfeszültség a belső ellenálláson esik, így  $p_t$  is elenyésző. Ha  $R_t \gg R_s$ , akkor ugyan  $u \approx u_s$ , de a körben folyó  $i$  áram nagyon kicsi, ezért  $p_t$  szintén elenyésző. Ezért joggal várhatjuk, hogy találhatóunk köztes  $R_t$  értéket, amelynél a  $p_t$  teljesítmény számottevő.



18. ábra: A teljesítményillesztés modellje

AZ  $R_t$  ELLENÁLLÁS teljesítményének kifejezése

$$p_t(R_t) = -u \cdot i = R_t i^2 = R_t \left( \frac{-u_s}{R_s + R_t} \right)^2 = \frac{u_s^2 R_t}{(R_s + R_t)^2}.$$

A kifejezésnek szélsőértéke lehet, ahol a  $p_t(R_t)$  kifejezés első deriváltja eltűnik.

$$\frac{dp_t(R_t)}{dR_t} = u_s^2 \frac{(R_s + R_t)^2 - 2R_t(R_s + R_t)}{(R_s + R_t)^4} = 0 \Leftrightarrow \boxed{R_t = R_s}$$

Az ellenállás teljesítménye (a generátorból kivehető teljesítmény) maximális, ha a terhelő ellenállás egyenlő a generátor belső ellenállásával. A lezárás ilyen értékű választását *illesztett lezárásnak* nevezzük. Illesztett esetben  $u = u_s/2$ , a lezáró ellenállás teljesítménye

$$p_{t,\max} = p_t(R_s = R_t) = -\frac{u_s}{2} \cdot \frac{-u_s}{2R_s} = \frac{u_s^2}{4R_s},$$

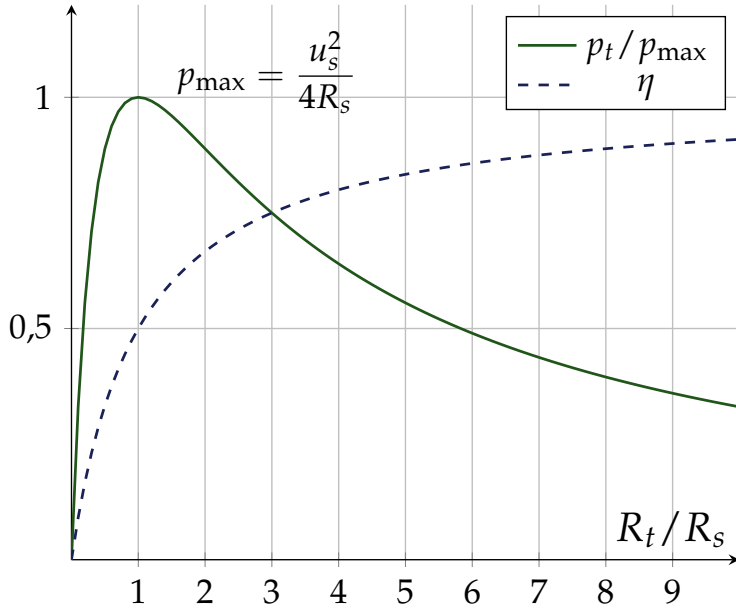
Mivel a teljesítmény  $p_t = i^2 R_t$  kifejezésében az áram négyzete szerepel, az eredményt nem befolyásolja, az  $i$  referenciáirányának megválasztása.

Belátható, hogy a második derivált ebben a pontban negatív, a kifejezés maximumát találjuk meg.

és a szimmetria okán ugyanakkora a generátor belső ellenállásának is a teljesítménye. Ha a hatásfokot az ellenállás és a generátorban levő forrás teljesítményeinek hányadosaként definiáljuk,

$$\eta = \frac{p_t}{p_{\text{forrás}}},$$

akkor világos, hogy az illesztett esetben a hatásfok 50 %, mert a forrás teljesítményének a fele a terhelésen, a másik fele a belső ellenálláson jelenik meg. A 19. ábra folytonos görbéje mutatja a  $p_t/p_{t,\max}$



19. ábra: A generátorból kivehető teljesítmény és a hatásfok az  $R_t/R_s$  függvényében

értékét az  $R_t/R_s$  függvényében. A görbe  $R_t = R_s$ -ben eléri a maximumot, majd  $R_t > R_s$  értékekre újra csökken. A szaggatott görbe a hatásfokot mutatja, amely az  $R_t$  növekedésével monoton nő,  $R_s = R_t$ -nél 50 %. A hatásfok kifejezése

$$\eta(R_t) = \frac{p_t}{p_{\text{forrás}}} = \frac{i^2 R_t}{i^2 (R_s + R_t)} = \frac{R_t/R_s}{1 + R_t/R_s}.$$

A 19. ábra alapján érthető, hogy a kivehető teljesítmény maximalizálása és a hatásfok maximalizálása két különböző feladat. Egy rádióvevőantenna a vett elektromágneses jelet feszültségjellé alakítja. Az antenna Thévenin-generátorként is modellezhető, az antenna kialakításától függő belső ellenállással (tipikus érték pl. az  $R_s = 50 \Omega$ ). A rádióvételezésben igyekszünk a maximális teljesítményt kinyerni az antennából, ezért teljesítményillesztésre törekszünk, a vevőberendezés lehetőleg  $R_s$  értékű bemeneti ellenállást mutat az antenna felé, a hatásfok másodlagos. Ezzel szemben egy autóakkumulátor, – ami szintén modellezhető Thévenin-generátorként – belső ellenállása a  $0.01 \Omega$  nagyságrendjébe esik. A rá kapcsolt fogyasztók (az önindítómotort leszámítva) ennél nagyságrendekkel nagyobb ellenállásúak,  $R_t/R_s \gg 1$ . Ebben az esetben a hatásfok eleve nagy, és nem célunk az, hogy az akkumulátorból a maximális teljesítményt kivegyük. Ilyenkor az akkumulátorban hővé alakuló teljesítmény csekély.

## 6. Lineáris rezisztív kétkapuk jellemzése

Bilicz-Horváth

2021. március 8.

### Többpólusú komponensek

Eddig kétpólusokkal foglalkoztunk. Akár csatolatlan, akár csatolt kétpólusok egy  $u$  feszültséggel és egy  $i$  árammal jellemezhetők, amelyek között a karakterisztika teremt kapcsolatot. Abban a speciális esetben, ha a kétpólusban csak lineáris rezisztív komponensek találhatók, a karakterisztika pl.  $u = R_0 i$  ill.  $u = U_0 + R_0 i$  helyettesítő képpel jellemezhető, ahol az utóbbi akkor érvényes, ha a kétpólusban független forrás(ok) is találhatók (1. ábra).

A hálózatemelésben foglalkozunk többpólusú eszközökkel is. A legegyszerűbb ilyen komponens 2. ábrán látható *hárompólus*. A három póluson három áramot értelmezhetünk, azonban mindhárom pólust metsző vágatra Kirchhoff-áramtörvény értelmében az egyik pólus áramát meghatározza a másik kettő, pl.

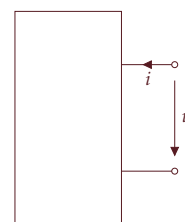
$$i_0 = -(i_1 + i_2)$$

Hasonlóan, a három pólus között három feszültség értelmezhető, azonban ezek közül kettő egyértelműen meghatározza a harmadikat a feszültségtörvény értelmében. Ezért a hárompólust két pólus árama és két feszültség teljes mértékben jellemzi. A négy mennyiség közül formálisan bármelyik kettő választható függő változóként, ezeknek az értékét a két másik változó értékével ki tudjuk fejezni. A karakterisztika a négy változó közötti kapcsolatot leíró két egyenlet. Ha a hárompólus speciálisan rezisztív és lineáris, egy ilyen lehetséges karakterisztika például a következő:

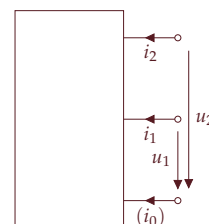
$$\left. \begin{aligned} u_1 &= c_{11}i_1 + c_{12}u_2 \\ i_2 &= c_{21}i_1 + c_{22}u_2 \end{aligned} \right\}$$

Itt a  $c_{ij}$  konstansok értéke a hárompólus belső felépítésétől függ. Egy konkrét hárompólus esetén nem biztos, hogy minden kombináció létező leírást eredményez.

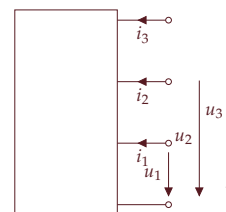
Az általános négypólusú komponens (*négypólus*, 3. ábra) hasonló gondolatmenet mentén három pólus áramával és három feszültséggel, összesen 6 változóval jellemezhető. A hat változó között három karakterisztika-egyenlet teremt kapcsolatot. A hat változó közül hármat független, a három másikat függő változónak tekinthetjük. A



1. ábra: A kétpólus



2. ábra: A hárompólus

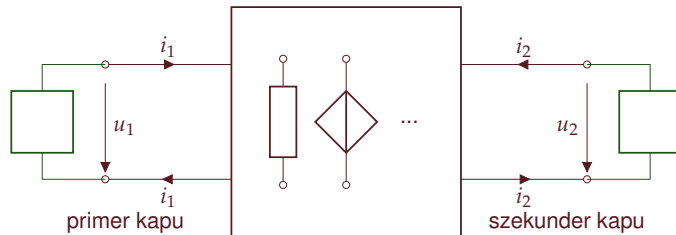


3. ábra: A négypólus

Ha a négypólus lineáris és rezisztív, egy lehetséges karakterisztika az alábbi:

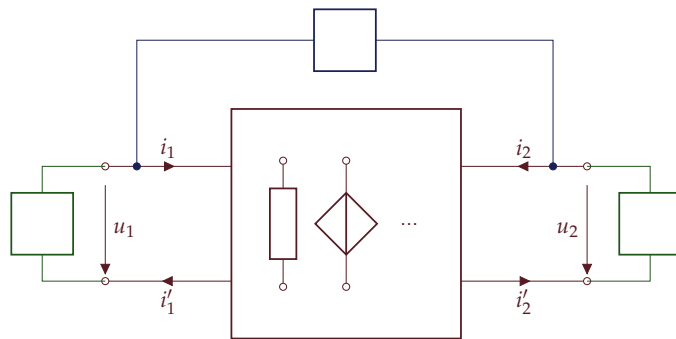
$$\left. \begin{aligned} u_1 &= c_{11}i_2 + c_{12}i_3 + c_{13}u_3 \\ u_2 &= c_{21}i_2 + c_{22}i_3 + c_{23}u_3 \\ i_1 &= c_{31}i_2 + c_{32}i_3 + c_{33}u_3 \end{aligned} \right\}$$

lineáris, rezisztív négypólus ezek szerint összesen kilenc paraméterrel jellemezhető. A gyakorlatban azonban egy fontos speciális eset az, amelyben a négy pólust két összetartozó póluspárként (ún. *kapu*) kezeljük, és mindkét kaput egy-egy kétpólus zárja le. Az így előálló speciális négypólus neve *kétkapu* (4. ábra). A lezáró kétpólusok garantálják, hogy a kaput alkotó két póluson folyó áram egyenlő. Ezért



4. ábra: A kétpólusokkal lezárt kétkapu, mint speciális négypólus

a kétkapu kevesebb paraméterrel írható le, mint az általános négypólus, rezisztív esetben 4 paraméter elegendő. A kétkaput jellemző négy változó ( $u_1$ ,  $u_2$ ,  $i_1$ ,  $i_2$ ) neve *kapuváltozó*. Azt is feltételezzük, hogy a kétkapuban nincsenek független források, hanem azok a lezáró kétpólusokban foglalhatnak helyet. A továbbiakban a lineáris, rezisztív kétkapuk jellemzésével foglalkozunk. A kétkapuk alkalmazási területeit a következő előadás tárgyalja majd. A 5. ábrán látható el-



5. ábra: Példa a kétkapu meg nem engedett lezárására

Fontos hangsúlyozni, hogy *formailag* egy csatolt kétpólus és egy kétkapu karakterisztikája megegyezik. Lényeges különbség azonban, hogy a kétkaput a karakterisztikája csak akkor jellemzi, ha mindkét kapuja egy-egy kétpólussal van lezárva. Egy csatolt kétpólus esetén – mivel eleve kétpólusok alkotják – ilyen megkötés nincsen.

rendezésben a kétkapura kapcsolódó hálózat megsérti azt a feltételt, hogy a kapu két pólusán folyó áramok egyenlőek legyenek:  $i_1 \neq i'_1$  és  $i_2 \neq i'_2$ , ezért ennek a hálózatnak az analízise nem végezhető el a kétkapu-paraméterek segítségével.

### Kétkapu-karakterisztikák

A négy kapuváltozóból kettőt választhatunk független, kettőt függő változónak. Ennek megfelelően a két karakterisztika-egyenletnek  $\binom{4}{2} = 6$  különböző alakja lehet. Ezt a hat karakterisztikát az alábbiakban tárgyaljuk, azonban egy konkrét kétkapu esetén nem garantálható, hogy mind a hat lehetséges karakterisztika létezik majd.

### Az impedanciakarakterisztika

Az impedanciakarakterisztika a kétkapu feszültségeit fejezi ki a kétkapu áramainak segítségével. A függő változók tehát az  $u_1, u_2$  feszültségek, a független változók az  $i_1, i_2$  áramok:

$$\begin{cases} u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 \\ u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 \end{cases} \quad (1)$$

Az  $R_{ij}$  ellenállás (rezisztencia) dimenziójú ( $[R_{ij}] = \Omega$ ), a kétkapu felépítésére jellemző állandókat impedanciaparamétereknek nevezzük. Az impedanciakarakterisztika azt fejezi ki, hogy a kétkapu kapuáramai függetlenül előírhatók, és azok ismeretében a kapufeszültségek számíthatók. Ha az áramforrásokkal lezárt kétkapu nem-reguláris hálózatra vezet, akkor az adott kétkapunak nem értelmezett az impedanciakarakteristikája (6. ábra). Az egyes impedanciaparaméterek külön-külön is értelmezhetők. Az (1) első egyenletéből

$$R_{11} = \left. \frac{u_1}{i_1} \right|_{i_2=0},$$

ahol az  $i_2 = 0$  feltétel értelme, hogy a szekunder kapu üresjárásban (szakadással lezárva) üzemel, miközben a primer kapun az  $i_1$  áramot egy áramforrással „írjuk elő” (7. ábra). Ezért az  $R_{11}$  paramétert szokás „primer oldali üresjárási bemeneti rezisztencia” elnevezéssel illetni. Az  $R_{22}$  paramétert a primer kapu üresjárása mellett kapjuk,

$$R_{22} = \left. \frac{u_2}{i_2} \right|_{i_1=0},$$

ezért a mennyiség neve szekunder oldali üresjárási bemeneti rezisztencia. Ugyancsak az első egyenlet alapján

$$R_{12} = \left. \frac{u_1}{i_2} \right|_{i_1=0},$$

aminek értelmezése „hátraviteli üresjárási átviteli rezisztencia”, amelyben az üresjárás utal a primer kapu üresjárására ( $i_1 = 0$ , miközben a szekunder kapura áramforrást kapcsolunk). Az „átviteli” jelleg olyan mennyiséget jelent, ami eltérő kapukhoz tartozó kapuváltozók között teremt kapcsolatot, a hátravitel pedig a szekunder kapuról a primer kapura irányuló átvitelre utal. Az  $R_{21}$  mennyiség ennek megfelelően előreviteli üresjárási átviteli rezisztencia.

### Az admittanciakarakterisztika

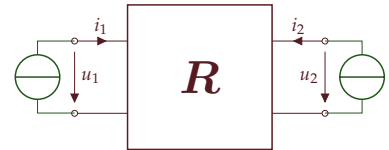
Az admittancia- (vezetés-) paraméterek az áramokat, mint függő változókat a feszültségekkel fejezik ki:

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases} \quad (2)$$

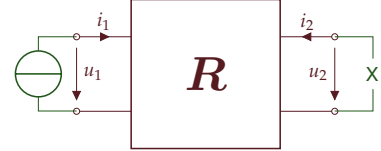
Az elnevezés a fizika tárgyból már megismert, Z-vel jelölt impedancia nevű mennyiségre utal, ami az ellenállás általánosításának tekinthető szinuszos áramú hálózatokban. Ezt a félév második felében tárgyaljuk majd. A szakirodalomban az impedanciaparamétereket gyakran  $z_{ij}$ -vel vagy  $Z_{ij}$ -vel jelölik.

A (1) egyenletrendszert vektor-mátrix alakban is szokás írni:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}.$$



6. ábra: Az impedanciakarakterisztika



7. ábra: Az  $R_{11}$  paraméter értelmezése

Ezek az összefüggések a paraméterek mérésére vonatkozó utasításként is értelmezhetők:  $R_{11}$  méréséhez a szekunder kaput szakadásban hagyjuk, közben megmérjük az egységnyi áramot szolgáltató primer oldali áramforrás feszültségét.



A  $G_{ij}$  vezetés (konduktancia) dimenziójú ( $[G_{ij}] = S$ ) állandókat admittanciaparamétereknek nevezzük. Az admittanciakarakterisztika létezik, ha a kétkapu mindkét kapufeszültsége függetlenül előírható, azaz mindkét kapura feszültségforrást kapcsolva reguláris hálózatot kapunk (8. ábra). Ellenkező esetben a karakterisztika az adott kétkapura nem értelmezett. Az egyes paraméterek külön-külön értelmezhetők, pl. (2) 1. egyenletéből

$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{u_1} \right|_{u_2=0},$$

ami a kétkapu primer kapujának bemeneti vezetését adja, miközben a szekunder kapu rövidzártban van ( $u_2 = 0$ , 9. ábra).

Az impedancia- és az admittanciakarakterisztika között érvényes összefüggés:

$$G = R^{-1}; \quad R = G^{-1},$$

ha mindkét mátrix létezik (egyik sem szinguláris). Azonban általában

$$R_{ij} \neq \frac{1}{G_{ij}},$$

már csak azért sem, mert az  $R_{ij}$  értékeket üresjárásban, a  $G_{ij}$  értékeket pedig rövidzártban értelmezzük.

### A hibridkarakterisztika

A hibridkarakterisztikában a függő változók  $u_1$  és  $i_2$ :

$$\begin{cases} u_1 = H_{11}i_1 + H_{12}u_2 \\ i_2 = H_{21}i_1 + H_{22}u_2 \end{cases} \quad (3)$$

Az egyenletekből kiolvashatóan  $[H_{12}] = [H_{21}] = 1$  (dimenzió nélküli mennyiség),  $[H_{11}] = \Omega$ , és  $[H_{22}] = S$ . A paraméterek az előzőekhez hasonlóan értelmezhetők, pl.

$$H_{11} = \left. \frac{u_1}{i_1} \right|_{u_2=0},$$

azaz  $H_{11}$  a rövidzártosi bemeneti rezisztencia értékét adja. A karakterisztika létezik, ha a primer kapura áramforrást, a szekunder kapura feszültségforrást kapcsolva reguláris hálózathoz jutunk.

### Az inverz hibridkarakterisztika

A hibridkarakterisztikában a függő változók  $i_1$  és  $u_2$ :

$$\begin{cases} i_1 = K_{11}u_1 + K_{12}i_2 \\ u_2 = K_{21}u_1 + K_{22}i_2 \end{cases} \quad (4)$$

A (2) egyenletrendszer vektor-mátrix alakban is szokás írni:

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}.$$



8. ábra: Az admittanciakarakterisztika



9. ábra: Az  $G_{11}$  paraméter értelmezése  
Az elnevezés az impedancia reciprokára, az  $Y$ -al jelölt admittancia nevű mennyiségre utal, amelyet később fogunk megismerni. A szakirodalomban az admittanciaparamétereket gyakran  $y_{ij}$ -vel vagy  $Y_{ij}$ -vel jelölik.



10. ábra: A hibridkarakterisztika értelmezése

Emlékezzünk, hogy  $R_{11}$  az üresjárási bemeneti rezisztencia.

A dimenziókat tekintve  $[K_{11}] = S$ ,  $[K_{22}] = \Omega$ , és  $[K_{12}] = [K_{21}] = 1$ . A karakterisztika létezik, ha a primer kapu feszültségét, és a szekunder kapu áramát függetlenül előírhatjuk (11. ábra). A hibrid- és az inverzi hibridkarakterisztika között érvényes összefüggés:

$$K = H^{-1}; \quad H = K^{-1},$$

ha mindkét mátrix létezik.

Az eddig felsorolt négy karakterisztikát *hibrid típusú* karakterisztikának mondjuk, mert azokban a függő változók különböző kapukhoz tartoznak.

#### A lánc- és az inverz lánc karakterisztika

A két utolsó karakterisztika ún. *lánc típusú* karakterisztika: egyrészt a függő változók ugyanahhoz a kapuhoz tartoznak, másrészt a szekunder kapun az áram referenciáirányát megfordítjuk a hibrid típusú karakterisztikákhoz képest (*lánc-referenciáirány*, 12. ábra). Ennek előnyét a kétkapuk összekapcsolásánál (ún. lánckapcsolásánál) fogjuk látni.

Ezzel a konvencióval a *lánc karakterisztika*:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= A_{11}u_2 + A_{12}i_2 \\ i_1 &= A_{21}u_2 + A_{22}i_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ahol az  $A_{ij}$  *láncparaméterekre*  $[A_{11}] = [A_{22}] = 1$ ,  $[A_{12}] = \Omega$  és  $[A_{21}] = S$ . Ha a szekunder kapun a lánc-referenciáirány helyett szimmetrikus referenciáirányt veszünk fel,  $A_{12}$  és  $A_{22}$  előjele megváltozik. Az első egyenlet alapján például

$$A_{11} = \left. \frac{u_1}{u_2} \right|_{i_2=0},$$

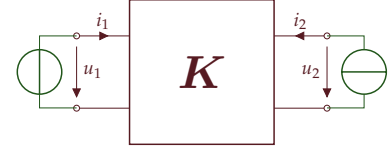
amihez nem tudunk üresjárás vagy rövidzársi állapotban értelmes jelentést tulajdonítani (a szekunder kapu feszültségét kellene előírni, miközben ott szakadásnak kell lennie). A paraméterek reciprokának azonban van ilyen értelmezése, pl.

$$\frac{1}{A_{11}} = \left. \frac{u_2}{u_1} \right|_{i_2=0}$$

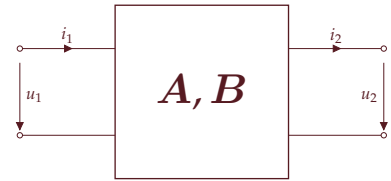
egy üresjárás átviteli feszültségerősítési tényező: a szekunder kapu üresjárásában a primer kapura feszültségforrást kapcsolva a szekunder kapu feszültségét mérjük.

AZ UTOLSÓ, a gyakorlatban ritkán használatos karakterisztika az *inverz lánc karakterisztika*, amelynek alakja

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= B_{11}u_1 + B_{12}i_1 \\ i_2 &= B_{21}u_1 + B_{22}i_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$



11. ábra: Az inverz hibridkarakterisztika értelmezése



12. ábra: A lánc-referenciáirány

Ha mindkét lánc típusú karakterisztika létezik, akkor

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}.$$

#### *A kétkapuParaméterek meghatározása*

Egy. a gyakorlatban is fontos esetben ismert a kétkapú felépítése, és szükségünk van valamelyik kétkapuParaméterrendszerre. Adott például a 13. ábra kétkapuja (egy  $\pi$ -tag), keressük ennek  $H_{11}$  paraméterét.

A  $H_{11}$ -et tartalmazó karakterisztika-egyenlet

$$u_1 = H_{11}i_1 + H_{12}u_2,$$

ahonnan

$$H_{11} = \left. \frac{u_1}{i_1} \right|_{u_2=0},$$

amelynek fizikai értelmezése: keressük a primer kapu feszültségét, ha a primer kapura áramot kényszerítünk, a szekunder kapu pedig rövidzártban van ( $u_2 = 0$ ). Az ennek megfelelő lezárásokat zölddel jelöltük az ábrán. Az ábra alapján az  $R_3$  ellenállást „söntöli” (rövidre zárja) a szekunder kapun levő rövidzár,  $u_1$  és  $i_1$  között  $R_1$  és  $R_2$  párhuzamos eredője adja a kapcsolatot:

$$u_1 = (R_1 \times R_2)i_1,$$

amiből

$$H_{11} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

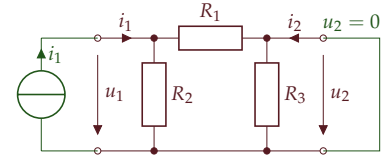
Ez a módszer gyakran célravezető, ha csak 1-2 paramétert kell meghatározunk, azonban a teljes karakterisztikát általában nem így célszerű számolni.

AZ ÖSSZES PARAMÉTER egyszerre meghatározható úgy, ahogy azt a 14. ábra kétkapuján demonstráljuk. Keressük a kétkapú admittanciakarakteristikáját ( $G$ ).

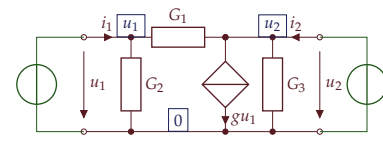
Az admittanciakarakterisztika alakja

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 &= G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

A továbbiakban a karakterisztika független változóit (a példában  $u_1$  és  $u_2$ ) *formálisan ismertnek* tekintjük, és keressük azt a két összefüggést, amelyek révén  $i_1$  és  $i_2$  kifejezhető. A példában szereplő elrendezés szintén egy  $\pi$ -elrendezés, amelyet mindig a csomóponti potenciálok módszerével célszerű vizsgálni. A karakterisztikának megfelelően kiegészítjük a kétkaput a két feszültségforrással egy teljes hálózattá, a hálózat három csomóponti potenciálját pedig az ábrán



13. ábra: Példa a  $H_{11}$  hibridparaméter kiszámítására



14. ábra: Példa a  $G$  admittanciakarakterisztika kiszámítására

bejelölt módon vesszük fel. Az  $u_1$  és az  $u_2$  potenciálú csomópontra felírjuk az áramtörvényeket (az ellenállások a konduktanciájukkal adottak!):

$$\left. \begin{aligned} u_1 : & -i_1 + G_1 u_1 + G_2(u_1 - u_2) = 0 \\ u_2 : & -i_2 + G_3 u_2 + g u_1 + G_2(u_2 - u_1) = 0 \end{aligned} \right\}$$

A két egyenletből átrendezés után közvetlenül adódik a keresett karakterisztika, a  $G$ -paraméterek együttható-összehasonlítással kiolvashatók:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \underbrace{(G_1 + G_2)}_{G_{11}} u_1 + \underbrace{(-G_2)}_{G_{12}} u_2 \\ i_2 &= \underbrace{(g - G_2)}_{G_{21}} u_1 + \underbrace{(G_3 + G_2)}_{G_{22}} u_2 \end{aligned} \right\}$$

SOK ESETBEN a kétkapu valamely karakterisztikája ismert, és egy másik paraméterrendszerre van szükségünk. Az átszámítás egy lineáris egyenletrendszer megoldása, matematikai úton, elemi átalakításokkal elvégezhető, ha mindkét paraméterrendszer létezik. Példaképpen nézzük meg, hogyan lehet az impedanciakarakterisztika alapján a hibridkarakterisztika elemeit meghatározni! A kiindulási  $R$  és a keresett  $H$  karakterisztika:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= R_{11} i_1 + R_{12} i_2 \\ u_2 &= R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} u_1 &= H_{11} i_1 + H_{12} u_2 \\ i_2 &= H_{21} i_1 + H_{22} u_2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

A keresett karakterisztikában  $u_1$  és  $i_2$  a függő változók, a független változók,  $i_1$  és  $u_2$  értékét formálisan ismertnek tekintjük. A második kiindulási egyenletből közvetlenül kifejezhetjük  $i_2$ -t:

$$i_2 = \underbrace{\left(-\frac{R_{21}}{R_{22}}\right)}_{H_{21}} i_1 + \underbrace{\frac{1}{R_{22}}}_{H_{22}} u_2$$

A másik egyenlet hosszadalmas számolás után adódik:

$$u_1 = \underbrace{\left(R_{11} - \frac{R_{12} \cdot R_{21}}{R_{22}}\right)}_{H_{11}} i_1 + \underbrace{\frac{R_{12}}{R_{22}}}_{H_{12}} u_2$$

Ha az átalakítás nem végezhető el (mint ebben a példában, ha  $R_{22} = 0$ ), akkor a keresett karakterisztika nem létezik. A kézi számolás csak akkor vezet gyorsan eredményre, ha a kiindulási karakterisztikában több zérus elem van. Egyéb esetekben a konverzióhoz táblázatokat használunk (lásd tankönyv), vagy a Matlab szimbolikus toolboxát hívhatjuk segítségül. A példa megoldása Matlabbal:

```

syms R11 R12 R21 R22 u1 u2 i1 i2
Req1 = u1 == R11 * i1 + R12 * i2;
Req2 = u2 == R21 * i1 + R22 * i2;
[s_u1, s_i2] = solve([Req1, Req2], [u1, i2])

```

A megoldás:

```

s_u1 =
(R12*u2 + R11*R22*i1 - R12*R21*i1)/R22
s_i2 =
(u2 - R21*i1)/R22

```

ami megegyezik a kézi számolás eredményével.

## 7. A kétkapuleírások alkalmazása

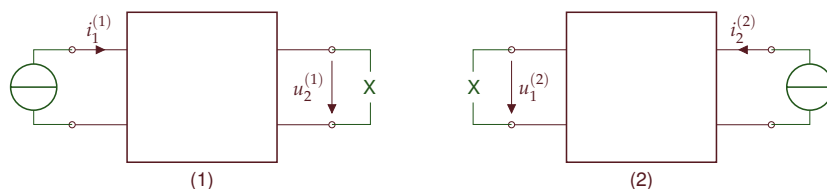
Bilicz-Horváth

2021. március 14.

### Kétkapuk speciális tulajdonságai

A rezisztív kétkapuk három speciális tulajdonságát definiáljuk: a reciprok és a szimmetrikus kétkapuk egyszerűbben (kevesebb paraméterrel) jellemezhetőek, mint az általános kétkapuk. A passzivitás pedig a kétkapuk esetében is olyan lényeges tulajdonság, mint a kétpólusok esetén. A három tulajdonság eldöntésére szolgáló kritériumokat is tárgyalunk.

### A reciprocitás



1. ábra: A reciprocitás definíciójához

A reciprocitás vizsgálatához végezzünk el egy (gondolat)kísérletet egy lineáris, rezisztív kétkapuvál (1. ábra). Az (1) felső indexszel jelölt 1. kísérletben a kétkapú primer kapujára áramforrást kapcsolunk, a szekunder kapu üresjárásban van. A (2) felső indexes 2. kísérletben a lezárásokat felcseréljük: az áramforrás a szekunder kapura kerül. Ha az áramforrás forrásáramának változatlan értéke mellett az üresjárásban maradó kapun mérhető feszültség ugyanakkora, mint a másik kísérletben, akkor az adott kétkapú *reciprok*.

$$\text{reciprok kétkapú: } i_1^{(1)} = i_2^{(2)} \Rightarrow u_2^{(1)} = u_1^{(2)}$$

A RECIPROCITÁS rezisztív lineáris esetben egyértelműen eldönthető a kétkapú-karakterisztikák ismeretében. Ha például ismert és létezik a kétkapú impedanciakarakterisztikája, az 1. ábra (1) kísérletében ( $i_2^{(1)} = 0$  miatt)

$$u_2^{(1)} = R_{21} \cdot i_1^{(1)},$$

A kísérlet fizikai értelmezése: az ideális feszültségmérő szakadásnak tekinthető, ezért a reciprocitás ezen definíciója szerint a kétkapú reciprok, ha az egyik kapura kapcsolt áramforrás és a másik kapura kapcsolt ideális feszültségmérő egymással felcserélhető, ugyanazt a feszültséget mérhetjük. Ezzel ekvivalens definíció vonatkozik a feszültségforrás és az ideális árammérő (rövidzár) felcserélhetőségére.

Emlékeztetőül az impedanciakarakterisztika kifejezése

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= R_{11}i_1 + R_{12}i_2 \\ u_2 &= R_{21}i_1 + R_{22}i_2 \end{aligned} \right\}$$

a (2) kísérletben pedig  $i_1^{(2)} = 0$  miatt)

$$u_1^{(2)} = R_{12} \cdot i_2^{(2)}.$$

A jobb oldalakat egyenlővé téve a keresett feltétel

$$\text{lineáris rezisztív kétkapu reciprok} \Leftrightarrow R_{12} = R_{21}$$

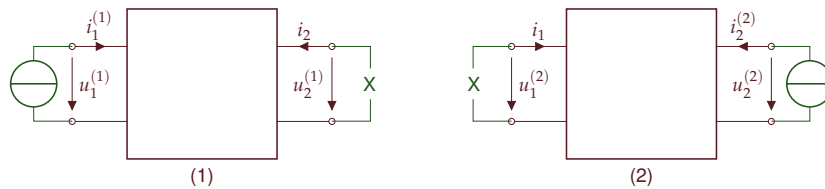
Míg az általános rezisztív kétkapu négy, a reciprok kétkapu mindössze három paraméterrel ( $R_{11}, R_{12} = R_{21}, R_{22}$ ) jellemezhető. Igazolható, hogy csak ellenállásokat és ideális transzformátort tartalmazó kétkapu biztosan reciprok. Kivételesen más komponenseket (pl. vezérelt forrást) tartalmazó kétkapu is lehet reciprok.

A másik két gyakran használt paraméterrel hasonlóan adódik, hogy a reciprocitás feltétele

$$G_{12} = G_{21}, H_{12} = -H_{21}.$$

### A szimmetria

A kétkapu szimmetriája a reciprocitásnál látott kísérlettel dönthető el (2. ábra). Ha a kísérletben nem csak a szakadások feszültségei,



2. ábra: A szimmetria definíciójához

hanem az áramforrásokon mérhető feszültség is egyenlő, akkor a kétkapu *szimmetrikus* is:

$$\text{szimmetrikus kétkapu: } i_1^{(1)} = i_2^{(2)} \Rightarrow u_2^{(1)} = u_1^{(2)} \text{ és } u_1^{(1)} = u_2^{(2)}$$

A szimmetrikus kétkapu kapuinak szerepe felcserélhető, a két kapu egyenértékű. Az impedanciakarakterisztika ismeretében a szimmetriára is adható kritérium. Az  $u_1^{(1)} = u_2^{(2)}$  feltétel teljesüléséhez

$$u_1^{(1)} = R_{11} i_1^{(1)},$$

$$u_2^{(2)} = R_{22} i_2^{(2)},$$

amiből

$$\text{lineáris rezisztív kétkapu szimmetrikus} \Leftrightarrow R_{12} = R_{21} \text{ és } R_{11} = R_{22}$$

A szimmetrikus kétkapu értelemszerűen reciprok is. A szimmetrikus *felépítésű* kétkapu pedig biztosan szimmetrikus, de nem szimmetrikus *felépítésű* kétkapu is lehet szimmetrikus. A szimmetrikus kétkapu 4 helyett mindössze kettő paraméterrel ( $R_{11} = R_{22}$  és  $R_{12} = R_{21}$ ) jellemezhető.

Két további kritérium:

$$G_{12} = G_{21} \text{ és } G_{11} = G_{22}$$

$$H_{12} = -H_{21} \text{ és } \Delta_H = 1,$$

ahol  $\Delta_H$  a  $\mathbf{H}$  hibridmátrix determinánsa.

### A passzivitás

A kétkapu passzivitásának is az a feltétele, hogy a munkafüggvénye nem-negatív legyen:  $w(t) \geq 0$ . Rezisztív kétkapukra azonban itt is egyszerűbb feltételt adhatunk: a munkafüggvény nem-negatív, ha a kétkapu teljesítménye nem-negatív ( $p(t) \geq 0$ ), mint a rezisztív kétpólusok esetén. A rezisztív kétkapu teljesítménye a kapuk teljesítményeinek az összege, szimmetrikus referenciairányok mellett

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t).$$

A csak passzív komponenseket ( $R > 0$  ellenállás, ideális transzformátor, girátor) tartalmazó kétkapu nyilvánvalóan passzív, míg az aktív komponenseket is tartalmazó általában aktív. A kétkapu is nonenergikus, ha  $p(t) \equiv 0$ . A passzivitás a karakterisztikák alapján egyértelműen eldönthető, pl. az impedanciakarakterisztika ismeretében belátható, hogy egy rezisztív, lineáris kétkapu akkor és csakis akkor passzív, ha

$$R_{11} \geq 0, R_{22} \geq 0, \text{ és } R_{11} \cdot R_{22} \geq \left( \frac{R_{12} + R_{21}}{2} \right)^2.$$

A passzivitás feltétele egyébként mind a négy hibrid típusú karakterisztikával ugyanúgy fejezhető ki:

$$F_{11} \geq 0, F_{22} \geq 0,$$

$$\text{és } F_{11} \cdot F_{22} \geq \left( \frac{F_{12} + F_{21}}{2} \right)^2,$$

ahol  $F_{ij}$  lehet  $G_{ij}$ ,  $R_{ij}$ ,  $H_{ij}$  vagy  $K_{ij}$  is.

### Kétkapuk helyettesítő kapcsolásai

Eddig elsősorban azt a feladatot vizsgáltuk, amelyben a kétkapu felépítésének ismeretében kell előállítanunk valamelyik kétkapukarakterisztikát (kétkapuk analízise). A gyakorlatban a fordított feladattal is szembesülünk: egy tervezési feladat eredményeként kapunk egy kétkapu-karakterisztikát, ami egy elvárt működést megvalósít, és ehhez keressük a lehető legegyszerűbb hálózati *realizációt*. Máskor a kétkapus jellemzést fizikai folyamatok „fekete doboz” jellegű leírására használjuk, pl. egy tranzisztor, mint kétkapu belső működését leíró bonyolult egyenletekhez társítunk egyszerű hálózati modellt. Ezen feladatok megoldásához használható helyettesítő kapcsolásokat tárgyalunk a következő fejezetben.

### Reciprok kétkapuk helyettesítő kapcsolásai

A reciprocitás fogalmát azért is vezettük be, mert láttuk, hogy a reciprok rezisztív kétkapu három paraméterrel jellemezhető. Belátható, hogy tetszőleges rezisztív reciprok kétkapu helyettesíthető egy 3 ellenállásból álló T- vagy  $\pi$ - helyettesítő képpel. A három ellenállás értéke szintén három szabad paraméter, az elemértékek és a karakterisztika értékei közötti összefüggést az alábbi módon határozhatjuk meg.



A T-TAG (3. ábra) szoros kapcsolatban van az  $R$  impedanciakarakterisztikával. Egészítsük ki ezért a T-tagot 1-1 áramforrással hálózattá! Nyilvánvaló, hogy az  $i_1$  és  $i_2$  áramok, az áramforrások áramai, hurokáramként használhatók, a hálózatot a hurokáramok módszerével célszerű vizsgálni. A két egyenlet:

$$\left. \begin{aligned} i_1 : -u_1 + R_a i_1 + R_b(i_1 + i_2) &= 0 \\ i_2 : -u_2 + R_c i_2 + R_b(i_1 + i_2) &= 0 \end{aligned} \right\}'$$

amelyből átrendezéssel adódik a kétkapú impedanciakarakterisztikája:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \underbrace{(R_a + R_b)}_{R_{11}} i_1 + \underbrace{R_b}_{R_{12}} i_2 \\ u_2 &= \underbrace{R_b}_{R_{21}} i_1 + \underbrace{(R_c + R_b)}_{R_{22}} i_2 \end{aligned} \right\}$$

Látható, hogy a T-tagra is teljesül, hogy  $R_{12} = R_{21}$ . A feladat  $R_{ij}$  ismeretében az  $R_a, R_b, R_c$  ellenállásértékek meghatározása. A karakterisztikából kiolvasható összefüggések egy háromismeretlenes egyenletrendszerre vezetnek, amelynek megoldása adja a keresett elemértékeket:

$$\left. \begin{aligned} R_a &= R_{11} - R_{12} \\ R_c &= R_{22} - R_{21} \\ R_b &= R_{12} \equiv R_{21} \end{aligned} \right\}.$$

A helyettesítő kép biztosan létezik, ha az impedanciakarakterisztika létezik.

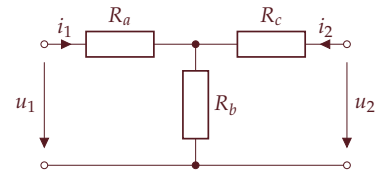
A  $\pi$ -TAG a T-tag duális elrendezése, az ellenállásokat vezetésre, a csillagkapcsolást deltára cseréljük (4. ábra). A  $\pi$ -tag az admittanciakarakterisztikával van szoros kapcsolatban, ezért a kétkaput feszültségforrásokkal zárjuk le, a forrásokkal kiegészített kétkaput a csomóponti potenciálok módszerével vizsgáljuk.

Az alsó csomópont potenciálját zérusnak választva a másik két potenciál  $u_1$  ill.  $u_2$ , a két áramtörvény pedig

$$\left. \begin{aligned} u_1 : -i_1 + G_A u_1 + G_B(u_1 - u_2) &= 0 \\ u_2 : -i_2 + G_C u_2 + G_B(u_2 - u_1) &= 0 \end{aligned} \right\}'$$

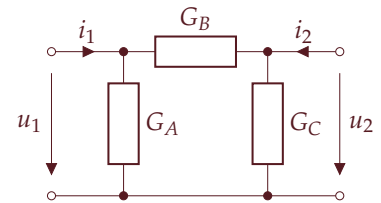
amiből az admittanciakarakterisztika kiolvasható.

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \underbrace{(G_A + G_B)}_{G_{11}} u_1 + \underbrace{(-G_B)}_{G_{12}} u_2 \\ i_2 &= \underbrace{(-G_B)}_{G_{21}} u_1 + \underbrace{(G_C + G_B)}_{G_{22}} u_2 \end{aligned} \right\}$$



3. ábra: Reciprok kétkapú T-helyettesítőképe

Az így adódó elemértékek között bizonyos esetekben negatív értékek is szerepelhetnek. Negatív ellenállást egy vezérelt forrással „realizálhatunk”.



4. ábra: Reciprok kétkapú  $\pi$ -helyettesítőképe

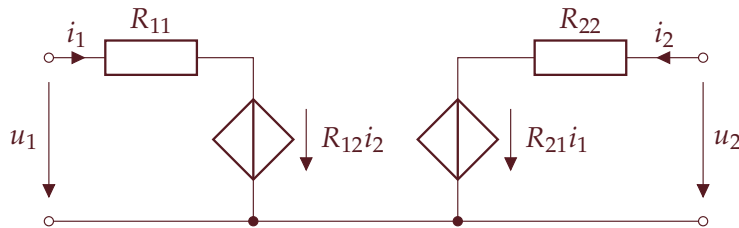
Látható, hogy teljesül a reciprok kétkapura elvárt  $G_{12} = G_{21}$  összefüggés. A helyettesítő kép elemértékeit az egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} G_A &= G_{11} + G_{12} \\ G_C &= G_{22} + G_{21} \\ G_B &= -G_{12} \equiv -G_{21} \end{aligned} \right\}.$$

A  $\pi$ -helyettesítőkép létezik, ha az admittanciakarakterisztika létezik.

### Természetes helyettesítő képek

Általános, nemreciprok kétkapuk helyettesítésére kézenfekvő módszer a realizálandó hibrid típusú karakterisztika közvetlen megvalósítása. Ehhez minden esetben két ellenállásra (ill. konduktanciára), és két vezérelt forrásra van szükség. Az  $R$  mátrixával adott kétkapu helyettesítése (5. ábra) az 1. egyenlet értelmében: (i) a primer kapu  $u_1$  feszültsége két másik feszültség összege, azaz két kétpólus soros kapcsolásával realizálható, (ii) az  $R_{11}i_1$  feszültséget egy  $R_{11}$  értékű ellenállással, (iii) az  $R_{12}i_2$  feszültséget egy áramvezérelt feszültségforrással állíthatjuk elő. A szekunder kapu feszültsége ezzel analóg módon bontható fel. A helyettesítő kép elemértékei egyszerűen megfeleltet-

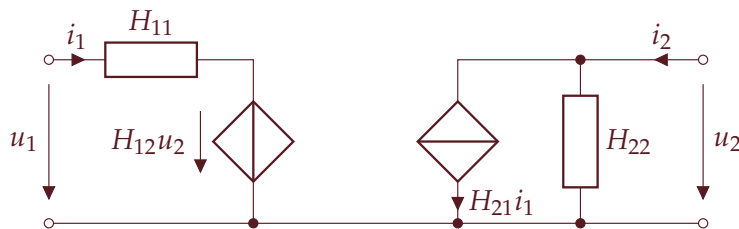


5. ábra: Természetes helyettesítő kép  $R$  alapján. A karakterisztika egyenletei:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= R_{11}i_1 + R_{12}i_2 \\ u_2 &= R_{21}i_1 + R_{22}i_2 \end{aligned} \right\}$$

hetők a karakterisztika értékeinek, ezért nevezzük természetesnek ezt az elrendezést.

A hibridkarakterisztikát realizáló természetes helyettesítő kép a 6. ábrán látható. Az első egyenletben két feszültség összegét ismét



6. ábra: Természetes helyettesítő kép  $H$  alapján. A karakterisztika egyenletei:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= H_{11}i_1 + H_{12}u_2 \\ i_2 &= H_{21}i_1 + H_{22}u_2 \end{aligned} \right\}$$

kétpólusok soros kapcsolásával, a második egyenletben két áram összegét kétpólusok párhuzamos kapcsolásával valósítjuk meg. A primer kapu  $u_1$  feszültségét egy  $H_{11}$  értékű ellenállás és egy, az  $u_2$

feszültséggel vezérelt feszültségforrás állítja elő. A szekunder kapu  $i_2$  áramát egy, az  $i_1$  árammal vezérelt áramforrás és egy  $H_{22}$  értékű vezetés révén állítjuk elő. A másik két karakterisztikára érvényes természetes helyettesítő képek hasonló gondolatmenettel képezhetők.

### Hibrid T és hibrid $\pi$ helyettesítő képek

A természetes helyettesítő képek hátránya, hogy két vezérelt forrást tartalmaznak. Az olyan (nemreciprok) kétkapukat, amelyeknek létezik az impedancia- vagy admittanciakarakterisztikája, helyettesíthetünk olyan, számítástechnikailag és megvalósítási szempontból is előnyösebb hálózatokkal, amelyek csak egy vezérelt forrást tartalmaznak három ellenállás mellett. Ezek a hibrid-T, illetve hibrid- $\pi$  helyettesítő képek, amelyek ugyanúgy négy paraméterrel jellemezhetők, mint a nemreciprok kétkapu.

HA A KÉTKAPUNAK létezik az impedanciakarakterisztikája, helyettesíthetjük egy hibrid T-helyettesítő képpel, amelyben a három ellenállás valamelyikével sorba kapcsolódik egy vezérelt feszültségforrás. Egy ilyen képet mutat a 7. ábra.

A kétkaput két áramforrással hálózattá egészítjük ki, és az áramforrások  $i_1$ ,  $i_2$  áramát hurokáramnak használjuk. A hálózatra felírható hurokegyenletek:

$$\left. \begin{aligned} i_1 : & -u_1 + R_a i_1 + R_b(i_1 + i_2) + r_b i_1 = 0 \\ i_2 : & -u_2 + R_c i_2 + R_b(i_1 + i_2) + r_b i_1 = 0 \end{aligned} \right\}'$$

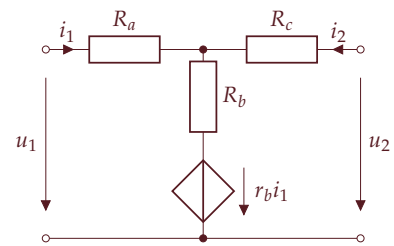
átrendezve

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \underbrace{(R_a + R_b + r_b)}_{R_{11}} i_1 + \underbrace{R_b}_{R_{12}} i_2 \\ u_2 &= \underbrace{(R_b + r_b)}_{R_{21}} i_1 + \underbrace{(R_c + R_b)}_{R_{22}} i_2 \end{aligned} \right\}$$

A helyettesítő kép négy elemértékére vonatkozó egyenletrendszer megoldása pedig

$$\left. \begin{aligned} R_a &= R_{11} - R_{21} \\ R_b &= R_{12} \\ R_c &= R_{22} - R_{12} \\ r_b &= R_{21} - R_{12} \end{aligned} \right\}$$

Látható, hogy reciprok kétkapura, ahol  $R_{12} = R_{21}$ , a hibrid T-tag egyszerű T-tagga egyszerűsödik, mert  $r_b = 0$  adódik (a forrás helyett rövidzár). Számos különféle hibrid T-tag definiálható (összesen 20): a vezérelt forrás bármelyik ágba beiktatható, a vezérlő mennyiség pedig a négy közül bármelyik kapuváltozó lehet.



7. ábra: Rezisztív kétkapu egy lehetséges hibrid T-helyettesítőképe

HA LÉTEZIK admittanciakarakterisztika, akkor a kétkapu valamelyik hibrid  $\pi$ -taggal is helyettesíthető. Ezek közül egy látható a 8. ábrán.

Az alsó csomópont potenciálját zérusnak választva a másik két potenciál  $u_1$  ill.  $u_2$ , a két áramtörvény pedig

$$\left. \begin{aligned} u_1 : -i_1 + G_A u_1 + G_B(u_1 - u_2) + g_B u_1 &= 0 \\ u_2 : -i_2 + G_C u_2 + G_B(u_2 - u_1) - g_B u_1 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

amiből az admittanciakarakterisztika kiolvasható.

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \underbrace{(G_A + G_B + g_B)}_{G_{11}} u_1 + \underbrace{(-G_B)}_{G_{12}} u_2 \\ i_2 &= \underbrace{(-G_B - g_B)}_{G_{21}} u_1 + \underbrace{(G_C + G_B)}_{G_{22}} u_2 \end{aligned} \right\}$$

A helyettesítő kép elemértékeit az egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

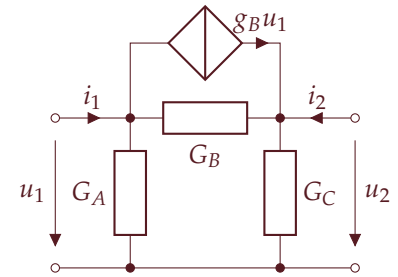
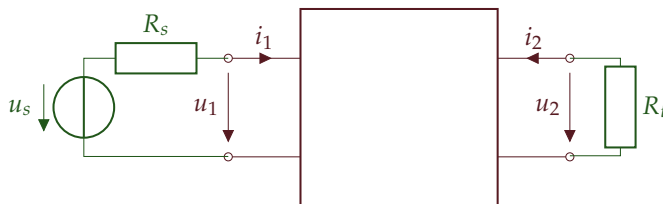
$$\left. \begin{aligned} G_A &= G_{11} + G_{21} \\ G_B &= -G_{12} \\ G_C &= G_{22} + G_{12} \\ g_B &= G_{12} - G_{21} \end{aligned} \right\}.$$

### Kétpólusokkal lezárt kétkapuk

A kétkapus leírás egyik legfőbb előnye, hogy a kétkapu különböző lezárásai mellett egyszerűen meg lehet határozni a kapuáramokat és -feszültségeket. A gyakorlatban gyakran a kétkapunak legalább az egyik kapujára egy generátor (Norton- vagy Thévenin-generátor) csatlakozik, a másik kapura pedig egy „terhelő”-ellenállás. (Mindkét lezárás lehet egy-egy bonyolultabb kétpólus helyettesítő képe is.)

### Hálózatszámítás kétkaput tartalmazó hálózatokban

A lezárt kétkapuk számításának elvét egy tipikus példán, a 9. ábrán látható hálózattal illusztráljuk. A hálózatban ismertlen a négy kapuváltozó ( $u_1, u_2, i_1, i_2$ ). A négy ismeretlen meghatározására négy



8. ábra: Rezisztív kétkapu egy lehetséges hibrid  $\pi$ -helyettesítőképe

9. ábra: Példa lezárt kétkapu számítására

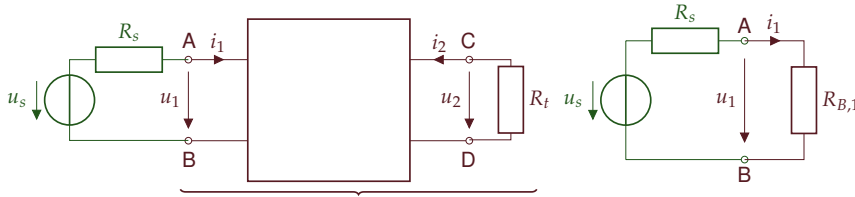
független egyenlet áll rendelkezésünkre. Példaképpen ismét az impedanciakarakterisztika ismeretében fejezzük ki a keresett mennyiségeket.

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_s - R_s i_1 \quad (\text{a primer oldali generátor karakterisztikája}) \\ u_2 &= -R_t i_2 \quad (\text{a szekunder oldali lezárás karakterisztikája}) \\ u_1 &= R_{11} i_1 + R_{12} i_2 \quad (\text{a kétkapu 1. egyenlete}) \\ u_2 &= R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \quad (\text{a kétkapu 2. egyenlete}) \end{aligned} \right\}$$

Ha a lezárásokkal kiegészített kétkapu reguláris hálózatot alkot, az egyenletrendszer egyértelműen megoldható. A lezárások karakterisztikájának felírásakor különösen ügyelni kell a referenciairányokra.

#### Bemeneti rezisztenciák számítása

A 10. ábra bal oldalán látható hálózatban az AB kétpólust a kétkapu és a szekunder kapura csatlakozó  $R_t$  ellenállás alkotja. A kétpólusban nincs független forrás, ezért biztos, hogy egy  $R_{B,1}$  eredő ellenállással helyettesíthető, ahogy az ábra jobb oldalán látható. Az 1 index az első kapura utal. Ez az eredő ellenállás a lezárt kétkapunak a primer kapu felől mutatott bemeneti rezisztenciájának tekinthető. Ennek



10. ábra: Kétkapu primer oldali bemeneti rezisztenciájának értelmezése

definíciója értelemszerűen

$$R_{B,1} = \left( \frac{u_1}{i_1} \right)_{R_t}^{(1)},$$

ahol az (1) felső index az 1. kapura, az  $R_t$  alsó index pedig a szekunder kapu lezárására utal. Példaképpen nézzük a bemeneti rezisztencia számítását az impedanciakarakterisztika ismeretében. A szekunder kapu lezárására és a kétkapura vonatkozó három független egyenlet:

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= -R_t i_2 \quad (\text{a szekunder oldali lezárás karakterisztikája}) \\ u_1 &= R_{11} i_1 + R_{12} i_2 \quad (\text{a kétkapu 1. egyenlete}) \\ u_2 &= R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \quad (\text{a kétkapu 2. egyenlete}) \end{aligned} \right\}$$

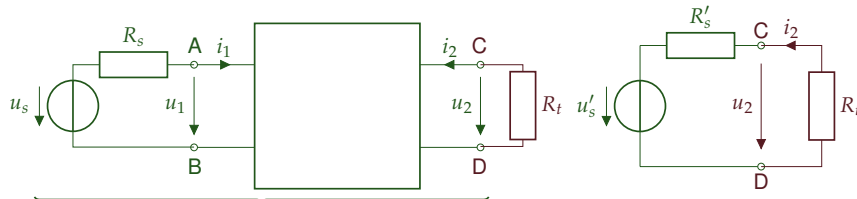
Az egyenletek továbbra is négy ismeretlen kapuváltozót tartalmaznak, azonban a célunk nem minden változó értékének meghatározása, hanem  $u_2$  és  $i_2$  eliminálása után az  $u_1 / i_1$  hányados meghatározása.

Emlékezzünk, hogy korábban is találkoztunk a primer oldali bemeneti rezisztenciával, de csak olyan esetben, ha a szekunder kapun szakadás ( $R_{11}$  értelmezése) ill. rövidzár ( $H_{11}$  értelmezése) volt.

(Másképpen: a három egyenlet a három ismeretlenre,  $u_2, i_2$  és  $u_1/i_1$ -re elegendő). A három egyenletből a keresett  $u_1/i_1$  viszonyt kifejezve

$$R_{B,1} = \left( \frac{u_1}{i_1} \right)_{R_t}^{(1)} = R_{11} - \frac{R_{12} \cdot R_{21}}{R_{22} + R_t}. \quad (1)$$

A SZEKUNDER OLDALI bemeneti rezisztencia illusztrálására tekintsük a 11. ábrát. Az ábra bal oldali hálózatában a CD kétpólus (a primer kapura csatlakozó generátor és a kétkapu együttese) független forrást tartalmaz, ezért maga is egy (másik) Thévenin-generátorral helyettesíthető, amelynek a paramétereit jelölje  $u'_s$  és  $R'_s$  (általában  $u_s \neq u'_s$ ,  $R_s \neq R'_s$ ). A jobb oldali ábrán a CD kétpólust ezzel a Thévenin-generátorral helyettesítettük. A szekunder kapura is kézenfekvő



Az (1) kifejezés a szekunder kapu üresjárása mellett ( $R_t \rightarrow \infty$ ) valóban visszaadja a korábban látott primer oldali üresjárási bemeneti rezisztenciát:

$$R_{B,1} = \left( \frac{u_1}{i_1} \right)_{\infty}^{(1)} = R_{11}.$$

11. ábra: Kétkapu szekunder oldali bemeneti rezisztenciájának értelmezéséhez. A primer kapura csatlakozó generátor és a kétkapu együttesen alkotja a CD kétpólust, amelyet egy  $u'_s, R'_s$  paraméterű Thévenin-generátorral helyettesítünk.

módon értelmezhetjük a bemeneti rezisztenciát:

$$R_{B,2} = \left( \frac{u_2}{i_2} \right)_{R_s}^{(2)},$$

ami a CD pólusok felől nézve a kétpólus belső ellenállásaként értelmezhető. Az  $u'_s, R'_s$  paramétereket kétféleképpen is meghatározhatjuk, ahogy azt korábban a kétpólusok helyettesítésénél megismertük: (i) kiszámítjuk  $u_2$  értékét a CD kétpólus üresjárásában, valamint  $i_2$  értékét, ha a CD kapcsokat rövidre zárjuk; vagy (ii) meghatározzuk az előbbi kettő közül valamelyiket, és hozzá a dezaktivizált CD kétpólus belső ellenállását. A CD kétpólus dezaktivizálása az  $u_s = 0$  feltétel érvényesítését jelenti, vagyis a keresett belső ellenállás éppen a fenti bemeneti rezisztenciával egyenlő:

$$R'_s = R_{B,2}.$$

Mindkét módszerrel ugyanarra az eredményre jutunk.

### Lezárt kétkapu átviteli mennyiségei

A kétpólusokkal lezárt kétkapu bemeneti rezisztenciái mellett gyakorlati jelentősége az olyan átviteli jellegű mennyiségeknek, amelyek

A CD kétpólusból kivehető teljesítmény maximális, ha  $R_t = R_{B,2}$ .

Az  $R_{B,2}$  szimmetriaokból (1) egyenletből a primer és a szekunder kapu szerepének cseréjével

$$R_{B,2} = \left( \frac{u_2}{i_2} \right)_{R_s}^{(2)} = R_{22} - \frac{R_{21} \cdot R_{12}}{R_{11} + R_s},$$

értékre adódna.

a szekunder kapura csatlakozó kétpólus feszültségét vagy áramát a primer kapu feszültségéhez, ill. áramához viszonyítják. Ilyen mennyiségek értelmezhetők a 9. ábra jelöléseit követve az alábbiak szerint:

$$H_u = \left( \frac{u_2}{u_1} \right)_{R_t} \quad (\text{feszültségátviteli tényező})$$

$$H_i = - \left( \frac{i_2}{i_1} \right)_{R_t} \quad (\text{áramátviteli tényező})$$

$$R_T = \left( \frac{u_2}{i_1} \right)_{R_t} \quad (\text{átviteli rezisztencia})$$

$$G_T = - \left( \frac{i_2}{u_1} \right)_{R_t} \quad (\text{átviteli konduktancia})$$

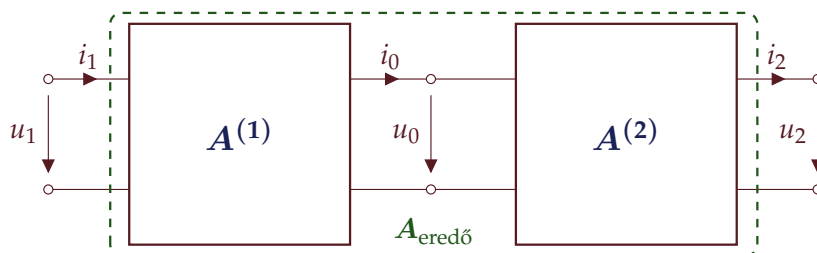
A formulákban a negatív előjellel azt tükrözi, hogy a terhelés  $i_t$  árama ellentétes az  $i_2$  kapuárammal.

Ha a feladat egy áramjelet szolgáltató szenzor jelének erősítése és feszültségjellé alakítása (pl. egy ún. transzimpedancia-erősítővel), akkor lényeges kérdés, hogy az adott  $R_t$  lezáró ellenálláson mekkora feszültséget hoz létre egységnyi áram a primer kapun. Éppen ezt fejezi ki az  $R_T$  paraméter.

Gyakran ezektől eltérően definiált átviteli mennyiségek is használatosak, pl. egy másik feszültségátviteli tényezőt eredményezne a 9. ábra hálózatában az  $A_u = u_2/u_s$  hányadossal definiált mennyiség.

### Kétkapuk lánckapcsolása

A lánc típusú karakterisztikák ismeretében két (vagy több) kétkapuk lánckapcsolásából adódó „eredő” kétkapuk karakterisztikája egyszerűen meghatározható. A 12. ábrán két, láncmátrixával adott kétkapuk lánckapcsolása látható. A lánc-referenciáirány előnye, hogy a bal



12. ábra: Kétkapuk lánckapcsolása. A szekunder kapu áramát a lánc-referenciáirányának megfelelően vesszük fel. Az eredő láncmátrix:

$$A_{\text{eredő}} = A^{(1)} \cdot A^{(2)}$$

oldali kétkapuk szekunder kapujának árama egyben a jobb oldali kétkapuk primer kapujának áramaként is használható, ez az oka a lánc-referenciáirány választásának. Jelölje a kétkapuk közös kapujának változóit  $u_0$  és  $i_0$ . A bal oldali kétkapuk lánckarakterisztikája

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = A^{(1)} \begin{pmatrix} u_0 \\ i_0 \end{pmatrix},$$

a jobb oldalié pedig

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ i_0 \end{pmatrix} = A^{(2)} \begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix}.$$

A második egyenletet az elsőbe helyettesítve

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\left( A^{(1)} \cdot A^{(2)} \right)}_{A_{\text{eredő}}} \begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix},$$

amiből látható, hogy a lánckapcsolásnál az eredő láncmátrix az összetevő kétkapuk láncmátrixának mátrixszorzataként adódik. (Ez igaz az inverz lánckarakterisztikára is). A mátrixszorzás nem kommutatív, ezért a szorzást olyan sorrendben kell elvégezni, amilyen sorrendben a kétkapuk egymás után vannak kapcsolva.



## 8. Dinamikus hálózatok analízise

Bilicz-Horváth

2021. március 17.

A tisztán rezisztív hálózatokról áttérünk a dinamikus elemeket is tartalmazó hálózatok tárgyalására. Megadjuk a legfontosabb dinamikus komponensek karakterisztikáját, majd a dinamikus hálózatot reprezentáló rendszer leírására alkalmas differenciálegyenlet-rendszer, az állapotváltozós leírás normálalakjának felírását tárgyaljuk.

### A dinamikus hálózatok komponensei

#### A kondenzátor

A kondenzátor (1. ábra) két, szigetelővel elválasztott vezető elektróda hálózatelméleti modellje, ami a rajta felhalmozott, egyenlő abszolútértékű és ellentétes előjelű villamos töltés révén elektromos energiát tárol. A *lineáris* kondenzátor által tárolt töltés arányos a kondenzátor feszültségével:  $q_C = Cu_C$ , ahol a  $C$  arányossági tényező a kondenzátor *kapacitása*.

A töltést az árammal kifejezve a kondenzátor feszültsége

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau,$$

vagy a kapcsolatot megfordítva a karakterisztika

$$i_C = Cu'_C.$$

A kapcsolat alakjából következik, hogy a kondenzátor valóban dinamikus komponens: az  $u_C(t_0)$ -beli értéke minden  $i_C(t)$ ,  $t \leq t_0$  időpontbeli áramértéktől függ. Az integrális alak variáns (időfüggő) kapacitásra is érvényes, a derivált forma csak állandó  $C$  értékre.

A FELVETT TELJESÍTMÉNY kifejezése

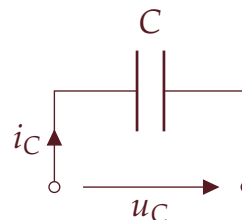
$$p_C = u_C i_C = u_C C u'_C \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} C \cdot u_C^2 \right), \quad (1)$$

ennek időbeli integrálja a munkafüggvény:

$$w_C(t) \equiv \int_{-\infty}^t p_C(\tau) d\tau,$$

ami alapján, ha  $u_C(-\infty) = 0$ , az (1) egyenletben szereplő zárójeles tagban felismerjük a kondenzátor munkafüggvényét:

$$w_C = \frac{1}{2} C u_C^2$$



1. ábra: A kondenzátor

A kapacitás egysége  $[C] = \text{F}$  (farad). A gyakorlatban pF (pikofarad,  $10^{-12}$  F), sőt fF (femtofarad,  $10^{-15}$  F) egységekkel is találkozunk, míg a felejtő memóriák táplálására szánt „szuperkondenzátorok” több ezer F kapacitásúak is lehetnek.

A továbbiakban az idő szerinti derivált mennyiségeket vesszővel jelöljük:

$$u'_C \equiv u'_C(t) \equiv \frac{du_C(t)}{dt}.$$

Ezt a mennyiséget azonosíthatjuk a kondenzátorban tárolt energiával, ha kézenfekvő módon az  $u_C = 0$  feszültséghez a  $w_C = 0$  energiát rendeljük. A munkafüggvény mindig nemnegatív értékű, ezért a kondenzátor *passzív* komponens, annak ellenére, hogy a pillanatnyi teljesítménye akár pozitív (pl. kondenzátor feltöltése egy feszültségforrással), akár negatív (pl. feltöltött kondenzátor kisütése egy ellenálláson keresztül) is lehet; a kondenzátor időlegesen lehet az elektromos energia fogyasztója és termelője is, azonban (pl. egy forrással ellentétben) mindig csak annyi teljesítményt adhat le, amennyit korábban felvett.

### A tekercs

A tekercs (2. ábra) egy árammal átjárt vezető hálózatelméleti modellje, amely a mágneses tere formájában mágneses energiát tárol.

A tekercsben a mágneses fluxus értéke arányos a tekercs áramával:  $\Psi = Li_L$ , az arányossági tényező a tekercs *induktivitása*. Néha a tekercset, mint elektronikai komponenst is induktitásnak nevezik. A tekercs feszültsége a fluxus időbeli deriváltja,  $u_L = \Psi' = Li_L'$ , a tekercs karakterisztikája tehát

$$u_L = Li_L'$$

A kapcsolat megfordításával,  $i_L(-\infty) = 0$  mellett

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau.$$

A TEKERCs által felvett teljesítmény

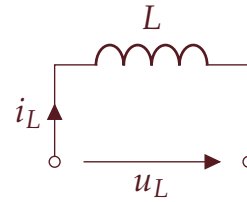
$$p_L = u_L i_L = Li_L' i_L \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L \cdot i_L^2 \right), \quad (2)$$

ahol a zárójeles tag a tekercs munkafüggvénye. Ezt  $i_L(-\infty) = 0$  feltétel mellett a tekercsben tárolt energiával azonosíthatjuk:

$$w_L = \frac{1}{2} Li_L^2$$

és a tekercs is *passzív* komponens, mert  $w_L(t) \geq 0$  biztosan igaz tetszőleges  $i_L(t)$  áramra. Az árammentes állapothoz rendeljük az energiamentes állapotot. A tekercs teljesítménye időlegesen lehet negatív is:  $p_L(t) > 0$ , amikor a mágneses mező felépül, és  $p_L(t) < 0$ , amikor a mező lebomlik.

Idézzük fel, hogy egy kétpólus passzív, ha a munkafüggvénye nemnegatív. Rezisztív komponensek esetén ezzel ekvivalens kritérium az, hogy a kétpólus teljesítménye minden időpillanatban nemnegatív. Dinamikus komponensek esetén azonban az eredeti definícióhoz kell visszanyúlnunk.



2. ábra: A tekercs (induktivitás)

Az induktitás egysége  $[L] = \text{H}$  (henry).

Az integrális összefüggés alapján, ha ismert a tekercs árama egy  $t_0$  időpillanatban, akkor egy későbbi  $t_1$  időpillanatban az áram

$$i_L(t_1) = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t_1} u_L(\tau) d\tau,$$

amiből az is következik, hogy a tekercs áramának ugrásszerű megváltozása nem lehetséges véges  $u_L$  értékek mellett.

### A csatolt tekercspár

Két olyan tekercs, amelyek egymás fizikai közelségében, a másik tekercs mágneses terével kapcsolatban vannak, egy csatolt tekercspárral modellezhető.

A csatolt tekercspár csatolt kétpólus (3. ábra), amelyben a két tekercs az  $L_1 \equiv L_{11}$ ,  $L_2 \equiv L_{22}$  öninduktivitásával, valamint a csatolás mértékét jellemző  $L_{12} \equiv L_{21} \equiv M$  kölcsönös induktivitásával jellemezhető. A csatolt tekercspár karakterisztikája

$$\left. \begin{aligned} u_{L_1} &= L_1 i'_{L_1} + M i'_{L_2} \\ u_{L_2} &= M i'_{L_1} + L_2 i'_{L_2} \end{aligned} \right\}$$

A rajzzelen a pöttyök az áramok referenciáirányát jelölik ki az ideális transzformátornál megismert konvencióhoz hasonlóan. A csatolt tekercspár teljesítménye az alkotó kétpólusok teljesítményeinek összege:

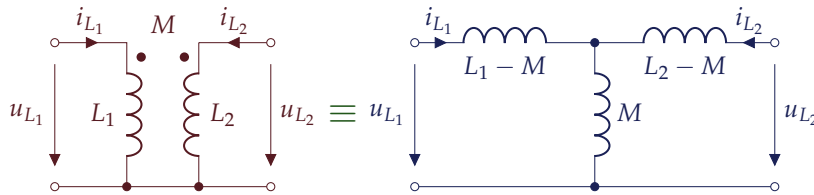
$$p = u_{L_1} i_{L_1} + u_{L_2} i_{L_2} = i_{L_1} (L_1 i'_{L_1} + M i'_{L_2}) + i_{L_2} (M i'_{L_1} + L_2 i'_{L_2})$$

$$p = \frac{d}{dt} \underbrace{\left( \frac{1}{2} L_1 i_{L_1}^2 + \frac{1}{2} L_2 i_{L_2}^2 + M i_{L_1} i_{L_2} \right)}_{w(t)},$$

ahol a zárójelben található kifejezés a munkafüggvény. Fizikai szemléletünk alapján két csatolt tekercsnek passzívnak kell lennie, azonban harmadik tag előjele negatív is lehet. Ezért a csatolt tekercspár csak akkor passzív komponens, ha a kölcsönös induktivitásra teljesül, hogy

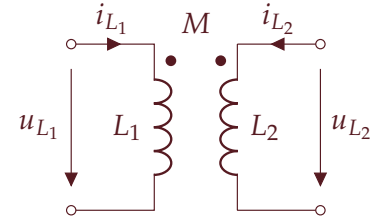
$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}.$$

Ha a csatolt tekercspár a 4. ábrán látható módon hárompólust alkot, helyettesíthető a jobb oldalon látható, csak *csatolatlan* tekercseket tartalmazó T-helyettesítőképével is, ami számítástechnikai szempontból előnyös lehet. A helyettesítő képben ugyanis az  $i_{L_1}$ ,  $i_{L_2}$  áramokat



hurokáramként használva a két hurokegyenlet

$$\begin{aligned} u_{L_1} &= (L_1 - M) i'_{L_1} + M (i'_{L_1} + i'_{L_2}) \\ u_{L_2} &= M (i'_{L_1} + i'_{L_2}) + (L_2 - M) i'_{L_2}, \end{aligned}$$



3. ábra: A csatolt tekercspár

Az  $L_{12} = L_{21}$  kikötés a valós csatolt tekercspár fizikai reciprocitásából következik. Ez a kétkapuknál látott reciprocitás-fogalom általánosításának tekinthető, és az elektromágnesesség számos jelenségére teljesül.

A csatolás mértékének leírására használatos a kölcsönös induktivitás mellett a  $k$  csatolási tényező is, amelynek definíciója

$$k = \sqrt{\frac{M^2}{L_1 L_2}} < 1,$$

ahol nagyobb  $k$  érték szorosabb csatolást jelent.

4. ábra: A hárompólust alkotó csatolt tekercspár T-helyettesítőképe, amely csatolatlan tekercsekből áll

ami összevonás után megegyezik az eredeti csatolt tekercspár karakterisztikájával.

### Az állapotváltozós leírás (ÁVL)

A dinamikus elemeket tartalmazó hálózat által reprezentált rendszer válaszána meghatározása sokkal összetettebb feladat, mint az algebrai egyenletekkel leírható, tisztán rezisztív hálózaté. A számítási feladat célkitűzése a következőképpen foglalható össze. Adott a hálózat struktúrája és a benne található komponensek karakterisztikái, valamint ismert a hálózat „előélete” (a  $t < 0$  időre). Utóbbi egy speciális időpillanatban, a *kiindulási időpillanatnak* nevezett  $t = -0$ -ban érvényes **kiindulási értékekkel** adjuk meg, ha a rendszer válaszejének *időfüggvényét* a  $t > 0$  időkre kívánjuk meghatározni. A keresett időfüggvények közönséges **differenciálegyenlet**(-rendszer) megoldásaként adódnak.

AZ ÁLLAPOTVÁLTOZÓS LEÍRÁS a hálózati egyenletek célszerű alakja, amely a differenciálegyenletek megoldását a matematikában jól ismert módszerekkel lehetővé teszi. Ezek a megoldási módszerek lehetnek zárt alakú (analitikus) vagy számítógépi, numerikus módszerek. Utóbbiakkal a JR2-ben foglalkozunk majd. Az ÁVL változói a rendszer gerjesztése,  $u(t)$  és válasza,  $y(t)$ . Ezek mellett szerepel a rendszer  $N$  számú, speciális kritériumok alapján választható *belső változója* is. Ezen változók neve az **állapotváltozó**.

### Az állapotváltozók definíciója

Az állapotváltozók a rendszer, illetve a rendszert reprezentáló hálózat belső változóinak azon **minimális** halmaza, amelyekre igaz, hogy egy  $t_a$  időpillanatbeli értéküket ismerve, adott gerjesztés mellett mind az állapotváltozók meghatározhatók egy későbbi  $t_b$  időpillanatban, mind a rendszer válaszele egyértelműen megadható a  $t_a$  időpillanatban. A rendszer állapotváltozóinak száma,  $N$ , a rendszer **rendszáma**. Az állapotváltozók természetesen maguk is időfüggvények, amelyeket egy oszlopvektorba foglalva adunk meg. Ennek a vektornak a neve **állapotvektor**:

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_N(t)]^T$$

### Az állapotváltozós leírás normálalakja (ÁVLNA)

Az állapotváltozós leírás normálalakja szigorú alaki követelményeknek felel meg. Áll egyrészt  $N$  számú differenciálegyenletből, minden

A továbbiakban legtöbbször a  $t = 0$  az a kitüntetett időpillanat, amikor a rendszer gerjesztésének a jellege megváltozik (pl. be- vagy kikapcsoljuk a gerjesztő forrást), és a megváltozott gerjesztés miatt egy ún. *transziens* lép fel. Gyakran maga a hálózat topológiája is változik a  $t = 0$ -ban, pl. egy kapcsolóval beiktatunk vagy leválasztunk egy-egy hálózatrészt. A továbbiakban feltételezzük, hogy a hálózat  $t > 0$  időkre lineáris és invariáns.

Formálisan:

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t_a), \dots, x_N(t_a) \quad (\text{ismert}) \\ u(t) \quad (\text{adott}) \end{array} \right\}$$

ismeretében tetszőleges  $t_b > t_a$  időpillanatban meghatározható

$$x_1(t_b), \dots, x_N(t_b) \quad \text{és} \quad y(t_b).$$

egyenlet bal oldalán pontosan 1-1 állapotváltozó időfüggvényének deriváltja áll, a jobb oldalon pedig az összes állapotváltozó, valamint a gerjesztés tetszőleges lineáris kombinációja áll. Ez az **állapot-egyenlet**. Az  $N + 1$ . egyenlet pedig az állapotváltozók és a gerjesztés lineáris kombinációjaként a válaszjel időfüggvényét fejezi ki. Az állapotegyenlet általános alakja:

$$\left. \begin{aligned} x'_1(t) &= \sum_{p=1}^N A_{1p}x_p(t) + B_1u(t) \\ &\vdots \\ x'_N(t) &= \sum_{p=1}^N A_{Np}x_p(t) + B_Nu(t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

a válasz kifejezése pedig

$$y(t) = \sum_{p=1}^N C_px_p(t) + Du(t) \quad (4)$$

A továbbiakban az időfüggésre utaló  $(t)$  jelölést nem írjuk ki, de tudjuk, hogy az egyenletekben *időfüggvények* szerepelnek. Az állapotegyenlet matematikai értelemben elsőrendű *differentiálegyenletek* rendszere, amelynek a megoldásai az  $x_1(t), \dots, x_N(t)$  időfüggvények. Ezt az  $N + 1$  egyenletet nevezzük az ÁVL **normálalakjának** (ÁVLNA). A normálalakhoz ragaszkodás a matematikai megoldást könnyíti meg. Az egyenletekben szereplő  $A_{lp}, B_l, C_l, D$  konstansok a hálózat struktúrájára és a benne levő komponensek karakterisztikáira jellemző állandók. Az ÁVLNA-t legtöbbször vektor-mátrix alakban rövidítve adjuk meg. A (3) egyenletnek

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_N \end{bmatrix}}_{x'} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix}}_B u, \quad (5)$$

a (4) egyenletnek pedig

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & \dots & C_N \end{bmatrix}}_{C^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}}_x + Du \quad (6)$$

felel meg.

Az ÁVLNA tömör alakja ezekkel a jelölésekkel

$$\left. \begin{aligned} x' &= Ax + Bu \\ y &= C^T x + Du \end{aligned} \right\}$$

Beláthatjuk, hogy az ÁVLNA valóban alkalmas mind az állapotvektor, mind a válasz egy későbbi időpillanatban vett értékének a kiszámítására. Az ÁVLNA alapján, ha ismert  $x(t_a)$ -beli értéke, akkor  $t_b = t_a + dt$  időpillanatban

$$\begin{aligned} x(t_a + dt) &= x(t_a) + x'(t_a)dt = \\ &= x(t_a) + (Ax(t_a) + Bu(t_a))dt, \end{aligned}$$

a kifejezés jobb oldalán csak ismert mennyiségek állnak, így a bal oldal meghatározható. Hasonlóan a válasza vonatkozó egyenlet:

$$y(t_a) = C^T x(t_a) + Du(t_a),$$

amelynek jobb oldalán szintén minden mennyiség ismert.

Az  $N \times N$  méretű  $A$  mátrix neve **rendszer mátrix**, amelynek ismeretében számos fontos rendszertulajdonságra tudunk majd következtetni. Az állapotváltozók elvileg többféleképpen is megválaszthatók, azonban a Kirchhoff-típusú hálózatok analízise során általában közvetlenül a **kondenzátorok  $u_C$  feszültségét, ill. a tekercsek  $i_L$  áramát** választjuk állapotváltozónak. Ez a választás kézenfekvő, hiszen a kondenzátor  $i_C = Cu'_C$ , ill. a tekercs  $u_L = Li'_L$  karakterisztikája tartalmazza ezen változók deriváltjait. Később további megfontolások is igazolják majd, hogy célszerű így választani az állapotváltozókat. Kirchhoff-típusú hálózatok által reprezentált *rendszer* gerjesztése továbbra is a *hálózat* egy forrásfeszültsége vagy forrásárama:  $u = u_s$  vagy  $u = i_s$ , míg a *rendszer*  $y(t)$  válaszjele a *hálózat* egy tetszőleges feszültsége vagy árama lehet.

#### Példa az ÁVLNA felírására

Az ÁVLNA felírását az 5. ábra hálózatán illusztráljuk. A hálózat által reprezentált rendszer gerjesztése  $u \equiv u_s$ , a válasz pedig a bejelölt  $y \equiv u_1$  feszültség.

A megoldáshoz a csomóponti potenciálok módszerét alkalmazzuk. A hálózat állapotváltozói a kondenzátor  $u_C$  feszültsége és a tekercs  $i_L$  árama, az ábrán bejelölt referenciáirányokkal. Az állapotvektor tehát

$$x = \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

A csomóponti potenciálok kifejezésében közvetlenül felhasználjuk  $u_C$ -t, valamint az  $u_L = Li'_L$  karakterisztika alapján a tekercs áramát. Ezért csak a két állapotváltozó ismeretlen ( $u_C, i_L$ ), kifejezésükhöz két áramtörvényt írunk fel:

$$\left. \begin{aligned} u_C : \quad & \frac{u_C - u_s}{R_1} + Cu'_C + \frac{u_C - Li'_L}{R_2} = 0 \\ Li'_L : \quad & \frac{Li'_L - u_C}{R_2} + i_L = 0 \end{aligned} \right\}$$

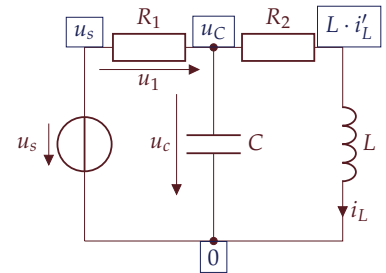
Rendezés után megkapjuk az állapotegyenlet normálalakját:

$$\left. \begin{aligned} u'_C &= -\frac{1}{R_1 C} u_C - \frac{1}{C} i_L + \frac{1}{R_1 C} u_s \\ i'_L &= \frac{1}{L} u_C - \frac{R_2}{L} i_L \end{aligned} \right\}$$

a válaszra vonatkozó egyenlet pedig

$$u_1 = u_s - u_C.$$

Utóbbi szintén megfelel a normálalak követelményeinek, mert a jobb oldalon a (nem derivált) állapotváltozó, és a gerjesztés szerepelnek.



5. ábra: Példahálózat az ÁVL felírására

Vektor-mátrix alakban az állapotegyenlet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u'_C \\ i'_L \end{bmatrix}}_{x'} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{bmatrix}}_B u_s,$$

a válaszra vonatkozó egyenlet pedig

$$u_1 = \underbrace{[-1 \quad 0]}_{C^T} \underbrace{\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}}_x + \underbrace{1}_D u_s$$

alakú.

### Kezdeti és kiindulási értékek

A rendszer válaszának számítása során kitüntetett szerepet játszik a  $t = 0$  időpillanat, amikor az általunk kitűzött feladatokban változik a gerjesztés jellege, illetve a hálózat struktúrája. A  $t > 0$ -ra érvényes válasz meghatározásához ismernünk kell a hálózat  $t < 0$ -ra érvényes „előéletét”, konkrétan a rendszer állapotváltozóinak értékét. A legtöbb esetben azonban nem ismerjük, és nem is szükséges azokat ismernünk a teljes  $t < 0$  intervallumon, elegendő a  $t = -0$ -beli, ún. **kiindulási** értéküket ismernünk. A rendszer **kiindulási állapota** alatt a

$$x(-0) \equiv \lim_{t \rightarrow -0} x(t) \quad (\text{kiindulási érték})$$

vektort értjük, ami az állapotváltozók értékét hordozza közvetlenül azt megelőzően, hogy a  $t = 0$ -ban a gerjesztés vagy a hálózat struktúrája változna. A gyakorlatban sokszor előfordulnak ún. *bekapcsolási jelenségek*, amelyekben a hálózat  $t < 0$ -ra energiamentes. Bekapcsolási folyamatokra nyilvánvalóan  $x(-0) = 0$ .

KORLÁTOS GERJESZTÉS mellett az állapotváltozók időben folytonosak (az értékük nem ugorhat). Az

$$x' = Ax + Bu$$

állapotegyenlet alapján ugyanis az állapotváltozó deriváltja véges, ha

$$x' \neq \infty \Leftrightarrow |Ax + Bu| \neq \infty.$$

Ezt az eredményt alkalmazhatjuk a rendszer állapotváltozóinak a kiindulási, valamint a  $t = +0$ -ban értelmezett **kezdeti értékének** összekötésére.

$$x(+0) \equiv \lim_{t \rightarrow +0} x(t) \quad (\text{kezdeti érték})$$

Ha a rendszer gerjesztése korlátos a  $t = 0$ -ban, akkor az állapotváltozók kezdeti értékei egyenlők a kiindulási értékeivel:

$$x(+0) = x(-0), \quad \text{ha} \quad |u(0)| \neq \infty.$$

Speciálisan *bekapcsolási folyamatnál*  $x(+0) = 0$  (ha a gerjesztés korlátos  $t = 0$ -ban).

A későbbiekben olyan gerjesztéssel is találkozunk majd, amely nem korlátos a  $t = 0$ -ban (Dirac-delta).

KIRCHHOFF-TÍPUSÚ hálózat által reprezentált rendszerekben az állapotváltozók folytonossága azt jelenti, hogy a kondenzátor feszültsége, illetve a tekercs árama korlátos gerjesztés mellett folytonos, kezdeti értékük egyenlő a kiindulási értékükkel. A kondenzátorban tárolt energia a feszültségének négyzetével, a tekercsben tárolt energia az áramának négyzetével arányos. Ha az állapotváltozók nem

lennének folytonosak, ugrásuk egyben a tárolt energia ugrását jelentené, ami végtelen teljesítményfelvételt implicálna. Véges gerjesztés mellett végtelen teljesítmény nem léphet fel.

#### Kezdeti értékek kiolvasása a hálózathoz

Tekintsük az előző példa hálózatát (6. ábra), és vizsgáljuk egy olyan ugrásszerű gerjesztés hatását, amely

$$u_s(t) = \begin{cases} U_0, & t < 0 \\ 2U_0, & t > 0 \end{cases}$$

alakú ( $U_0$  konstans feszültség). A folyamat egy ún. *átkapcsolási* (nem bekapcsolási) jelenség, mert a hálózat  $t < 0$ -ra nem energiamentes. Ezért külön meg kell vizsgálnunk az állapotváltozók kiindulási értékeinek alakulását.

$t < 0$  IDŐKRE a hálózat gerjesztése állandó ( $u_s(t) \equiv U_0$ ), továbbá feltételezzük, hogy ez a gerjesztés olyan régen fennáll, hogy bármilyen esetleges tranzienst lezajlott, mire  $t = -0$ -ban a hálózatot vizsgáljuk.

Mivel a gerjesztés konstans, és minden tranzienst lezajlott, ezért a hálózat minden belső változója is konstans (időben állandó). Ennek megfelelően az összes idő szerinti derivált eltűnik:

$$\frac{d}{dt} \equiv 0,$$

ami az  $i_C = Cu'_C$  karakterisztikájú kondenzátor esetén  $i_C \equiv 0$ , az  $u_L = Li'_L$  karakterisztikájú kondenzátor esetén  $u_L \equiv 0$  mennyiségeket eredményez. A kondenzátor tehát szakadásként, a tekercs rövidzárként viselkedik a hálózatban, ahogy az a komponensek fizikai képéből is következik: a kondenzátoron nem folyik egyenáram, a tekercs pedig „egy darab drót”. A dinamikus elemeket rövidzárral, ill. szakadással helyettesítve előáll a  $t = -0$ -ban érvényes *rezisztív* helyettesítő kép (7. ábra), amiből a kiindulási értékek egyszerűen kiolvashatók:

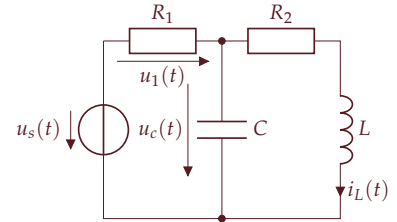
$$i_L(-0) = \frac{U_0}{R_1 + R_2},$$

$$u_C(-0) = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

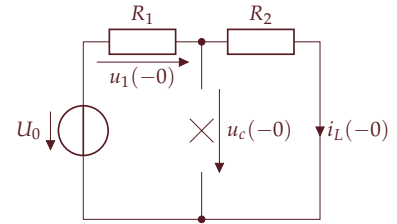
a válaszra pedig

$$u_1(-0) = U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

vonatkozik.



6. ábra: Példa kiindulási és kezdeti értékek kiolvasására



7. ábra: A  $t = -0$ -ban érvényes rezisztív helyettesítő kép



A  $t = 0$  IDŐPILLANATBAN az állapotváltozókra korlátos gerjesztés mellett érvényes folytonossági feltétel alapján

$$u_C(+0) = u_C(-0),$$

amiből az következik, hogy kifejezetten (és kizárólag) a  $t = +0$ -ban a kondenzátor egy  $u_C(-0)$  feszültségű feszültségforrással helyettesíthető. Mivel ez egy adott pillanatban érvényes rezisztív helyettesítő kép, és a hálózatban valójában egy kondenzátor található, ez egy *fiktív* forrás. Hasonlóan, a tekercs árama nem ugrik, ezért

$$i_L(+0) = i_L(-0),$$

és a tekercs a  $t = +0$ -ban egy  $i_L(-0)$  feszültségű *fiktív* áramforrással helyettesíthető (8. ábra).

A  $t = +0$ -ban érvényes helyettesítő képből kiolvasható a válasz kezdeti értéke is:

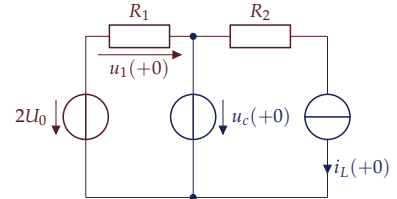
$$u_1(+0) = 2U_0 - u_C(+0) = U_0 \left( 2 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right).$$

A válaszjel értéke tehát ebben az esetben *ugrásszerűen* változik a  $t = 0$ -ban, azonban az ellenállás feszültsége nem állapotváltozó, arra nem vonatkozik folytonossági feltétel. Általánosan elmondható, hogy a folytonossági feltételek kihasználásával kaphatjuk a hálózat kiindulási állapota alapján a kezdeti értékeket. Utóbbiakra van szükségünk az állapotváltozók időfüggvényének a teljes  $t > 0$  intervallumban érvényes formulájának meghatározásához, amellyel a következő előadásban fogunk foglalkozni.

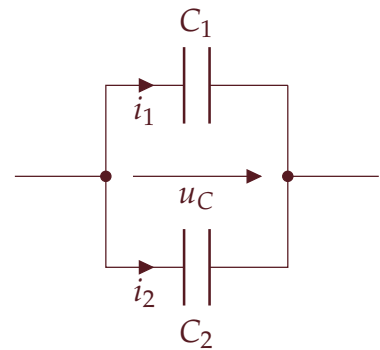
### A dinamikus hálózat regularitása

A hálózatot regulárisnak nevezzük, ha a hálózategyenletek minden változójukra egyértelműen megoldhatók tetszőleges forrásmennyiségek esetén. A hálózat regularitásának szükséges és elégséges feltétele, hogy előállítható az állapotváltozós leírás normálalakja, amelyben a kondenzátorok feszültségét és a tekercsek áramát tekintjük állapotváltozónak. Nemreguláris egy olyan hálózat, amelyben kondenzátorokból és feszültségforrásokból álló hurok található (pl. egy feszültségforrás és egy kondenzátor párhuzamosan kapcsolódik), hiszen a forrás feszültsége ugorhat, a kondenzátoré viszont nem. Hasonlóan az áramforrásokból és tekercsekből álló vágatot (pl. áramforrás és tekercs soros kapcsolását) tartalmazó hálózat sem reguláris.

Egy érdekes, de a gyakorlatban kevésbé fontos speciális eset a kondenzátorokból álló hurok, ill. a tekercsekből álló vágat problémája. A 9. ábrán egy hálózat részlete látható. A két párhuzamosan kapcsolt kondenzátor feszültsége nyilvánvalóan egyenlő kell, hogy legyen.



8. ábra: A  $t = +0$ -ban érvényes helyettesítő kép. A forrásfeszültség felvette új értékét ( $2U_0$ ).



9. ábra: Példa kváziregularitást okozó hálózatrészre

Ezért a közös  $u_C$  feszültség választandó állapotváltozónak, emiatt azonban a hálózat  $N$  rendszáma (az állapotváltozók száma) ebben az esetben kisebb lesz, mint a hálózatban található kondenzátorok és tekercsek számának az összege. Ilyenkor is problémát okoz az  $i_1$  és  $i_2$  áramok egyértelmű meghatározása. Az ilyen hálózatot kváziregulárisnak tekintjük.

## 9. Elsőrendű hálózatok analízise az időtartományban

Bilicz-Horváth

2021. március 23.

### Az elsőrendű rendszer állapotváltozós leírása

Az elsőrendű Kirchhoff-típusú hálózat által reprezentált rendszer elsőrendű ( $N = 1$ ), az állapotváltozós leírás normálalakja egyetlen elsőrendű differenciálegyenlet (az állapotegyenlet) és a válaszra vonatkozó egyenlet összessége:

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \right\}$$

Az egyenletekben az  $u(t)$  gerjesztés és az  $y(t)$  válasz mellett egyetlen állapotváltozó,  $x(t)$  szerepel. Az állapotváltozó a kondenzátor  $u_C$  feszültsége, vagy a tekercs  $i_L$  árama lehet. Az állapotváltozós leírás megoldásának célkitűzése továbbra is az, hogy megtaláljuk az  $y(t)$  válaszjel *időfüggvényét*  $t > 0$ -ra, ha adott a gerjesztés időfüggvénye  $t > 0$ -ra, valamint ismert a rendszer *kiindulási állapotának* megfelelő

$$x(-0) \equiv \lim_{t \rightarrow -0} x(t)$$

érték. A megoldás két lépésben történik: először megoldjuk az állapotegyenletet, amelyből megkapjuk az  $x(t)$  állapotváltozó *időfüggvényét*  $t > 0$ -ra, majd a második lépésben ezt a függvényt behelyettesítjük a válaszra vonatkozó egyenletbe. Az állapotegyenlet megoldására az *összetevőkre bontás módszerét* használjuk. A második lépés maga triviális, az első lépés pedig – annak ellenére, hogy általában differenciálegyenletekről nem tanultunk – szisztematikusan végrehajtható.

### Az összetevőkre bontás módszere

A normálalakjával adott differenciálegyenlet megoldását olyan módon keressük, hogy a megoldást két összetevő összegeként keressük:

$$x(t) = x_f(t) + x_g(t)$$

ahol  $x_f(t)$  a megoldás **szabad összetevője**,  $x_g(t)$  pedig a megoldás **gerjesztett összetevője**. A megoldás fizikai tartalmára utalva  $x_f(t)$ -t *transziens összetevőnek*,  $x_g(t)$ -t *állandósult összetevőnek* is nevezzük. Matematikai értelemben  $x_f(t)$  a *homogén* differenciálegyenlet megoldása,  $x_g(t)$  pedig az *inhomogén* differenciálegyenlet egy ún. partikuláris

Teljes rendszertani nevén közönséges, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlet.

megoldása. Az összetevőkre bontás maga is három lépés végrehajtását igényli. Ezek az alábbiak.

### 1. A szabad összetevő meghatározása

A szabad összetevő az

$$x'_f(t) = Ax_f(t)$$

ún. *homogén* (a gerjesztést reprezentáló tag elhagyásával előálló) differenciálegyenlet (HDE) általános megoldása: keressük azt az  $x_f(t)$  függvényt, amelynek első idő szerinti deriváltja önmagának a konstansszorososa. Tudjuk, hogy az exponenciális függvény rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, ezért a szabad összetevő mindig

$$x_f(t) = Me^{\lambda t}$$

alakú ( $t > 0$ ), ahol  $M \neq 0$  egy valós konstans, amelynek minden értéke mellett teljesül a homogén differenciálegyenletet. Az  $M$  értékének konkretizálása a 3. lépésben történik. A

$$\lambda = A$$

konstans érték neve **sajátérték**, ami a rendszerre jellemző szám (az  $1 \times 1$ -es „rendszer mátrix”). A szabad összetevő fizikai jelentése a nyugalmi helyzetéből kitérített, majd „magára hagyott” (gerjesztetlen,  $u(t) \equiv 0$ ) dinamikus rendszer *sajátválasza*. Ha a rendszer gerjesztésének jellege (vagy maga a rendszer) változik, *transziens* lép fel. Ez a transziens mindig exponenciális időfüggést mutat, a rendszerre jellemző lecsengési idővel.

### 2. A gerjesztett összetevő meghatározása

A második lépésben szükségünk van az eredeti (inhomogén) állapotegyenletnek a konkrét  $u(t)$  gerjesztés mellett érvényes, egyetlen tetszőleges megoldására, amit  $x_g$ -vel jelölünk. Keressük tehát az

$$x'_g(t) = Ax_g(t) + Bu(t)$$

egy ilyen (ún. *partikuláris*) megoldását, amelyet az állapotváltozó gerjesztett (a gerjesztő jel által kikényszerített) összetevőjeként fogunk azonosítani. Látszólag ennek a megoldásnak a meghatározása semmiben nem különbözik a teljes megoldásától, ez azonban nem így van. Egy partikuláris megoldást általában könnyen találhatunk, akár a rendszert reprezentáló Kirchhoff-hálózat vizsgálatával, akár tisztán matematikai módszerrel. A gerjesztett összetevő alakja ugyanis követi a gerjesztés időfüggvényének az alakját. Ha a gerjesztés konstans,

Az  $x_f(t) = Me^{\lambda t}$  alakú megoldás deriváltja

$$(Me^{\lambda t})' = \lambda Me^{\lambda t},$$

amit a HDE-be helyettesítve azonosságot kapunk:

$$\lambda Me^{\lambda t} = A Me^{\lambda t}$$

akkor a gerjesztett összetevőt is konstans alakban keressük:

$$u(t) = U_0 = \text{állandó} \Rightarrow x_g(t) = X_g = \text{állandó},$$

és a feladat ennek az állandónak a meghatározására egyszerűsödik. Márpedig az elmúlt előadásban is láttuk, hogy konstans gerjesztésre a dinamikus hálózat egyszerű rezisztív helyettesítő képekkel helyettesíthető. Általánosságban a módszer neve a *próbafüggvények módszere*, és alapötlete, hogy a  $\lambda < 0$  feltétel teljesülése esetén a rendszer szabad válaszában az exponenciális kifejezés előbb-utóbb lecseng, ezért

$$x_f(t) \rightarrow 0, \quad x(t) \rightarrow x_g(t), \quad \text{ha } t \rightarrow \infty.$$

Az állítás fizikai értelme, hogy  $\lambda < 0$  mellett a tranziens összetevő eltűnése után az állapotváltozó alakja követi a gerjesztés alakját, amiből az is következik, hogy a rendszer összes belső változója és a válasza is ugyanígy viselkedik. A két legfontosabb gyakorlati eset: állandó gerjesztés állandó gerjesztett összetevőt, szinuszos gerjesztés szinuszos gerjesztett összetevőt implicál. Utóbbi esetben  $x_g(t)$  frekvenciája megegyezik a gerjesztés frekvenciájával, amplitúdója és kezdőfázisa azonban eltérhet a gerjesztésétől.

### 3. A kezdeti feltételek érvényesítése

Az első két lépésben kapott eredmények alapján a keresett időfüggvény

$$x(t) = x_f(t) + x_g(t) = Me^{\lambda t} + x_g(t), \quad t > 0$$

alakú, ahol  $x_g(t)$  ismert (pl. állandó  $X_g$ ), azonban  $M$  értéke ismeretlen. Matematikai értelemben tetszőleges  $M \neq 0$  érték érvényes megoldása az állapotegyenletnek, azonban ezek közül csak egyetlen  $M$  érték írja le a fizikai valóságot. Ennek meghatározása a kezdeti feltételek illesztése alapján végezhető el. Láttuk, hogy véges gerjesztés mellett az állapotváltozók biztosan *folytosak*. Továbbra is azt feltételezzük, hogy a  $t = 0$  időpillanattól kezdve keressük a megoldást, ezért a folytonossági feltételt erre az időpillanatra érvényesítjük. A **teljes** megoldásnak folytonosnak kell lennie a  $t = 0$ -ban (a kiindulási és a kezdeti értékek egyenlőek):

$$x(+0) = x(-0).$$

A feladat kitűzéséből az  $x(-0)$  kiindulási érték kikövetkeztethető, az  $x(+0)$  kezdeti érték pedig a megoldás alapján

$$x(+0) = x_f(+0) + x_g(+0) = Me^{\lambda \cdot 0} + x_g(+0),$$

amely egy algebrai egyenlet, amiből  $M$  egyértelműen meghatározható:

$$M = x(+0) - x_g(+0) = x(-0) - x_g(-0).$$

Ezzel megkaptuk  $x(t)$  kifejezését. Innen az is látható, hogy a tranzienst annál nagyobb, minél inkább eltér a kiindulási érték és a gerjesztett összetevő kezdeti értéke.

Az  $y(t)$  válasz kifejezését a válaszra vonatkozó egyenletbe helyettesítve kapjuk.

### Bekapcsolási jelenségek

Az alábbiakban példákön keresztül illusztráljuk a módszert. Bekapcsolási jelenségnek neveztük az olyan folyamatot, amelyben a hálózat  $t < 0$ -ra energiamentes, ezért a rendszer *kiindulási* állapota zérus,  $x(-0) = 0$ . Ebből következik, hogy  $t = 0$ -ban véges gerjesztés mellett a *kezdeti* állapot is zérus:

$$x(+0) = 0 \quad (\Leftarrow |u(0)| < \infty)$$

A soros RC-TAG egyenfeszültségre kapcsolásának folyamatát az 1. ábra hálózata alapján vizsgáljuk. A rendszer gerjesztése a forrásfeszültség ( $u \equiv u_s$ ), a válasz pedig az ellenállás bejelölt  $u$  feszültsége ( $y \equiv u$ ). Az állapotváltozó a kondenzátor  $u_C$  feszültsége a bejelölt, önkényesen választott referenciáiránnyal. A forrás feszültségének időfüggvénye  $t = 0$ -ban 0-ról  $U_0$  értékre ugrik. Ezzel ekvivalens feladatnak megfelelő hálózat látható a 2. ábrán, amelyben a hálózatra  $t = 0$ -ban  $U_0$  feszültségű egyenfeszültség-forrást kapcsolunk.

A hálózatra felírható feszültségtörvény, tudva, hogy  $i_C = Cu'_C$ :

$$-u_s + RCu'_C + u_C = 0,$$

amelyből az ÁVLNA

$$\left. \begin{aligned} u'_C &= -\frac{1}{RC}u_C + \frac{1}{RC}u_s \\ u &= -u_C + u_s \end{aligned} \right\}$$

Az állapotegyenlet megoldása az összetevőkre bontással történik:

$$u_C(t) = u_{C,f}(t) + u_{C,g}(t), \quad t > 0.$$

1. A homogén DE:

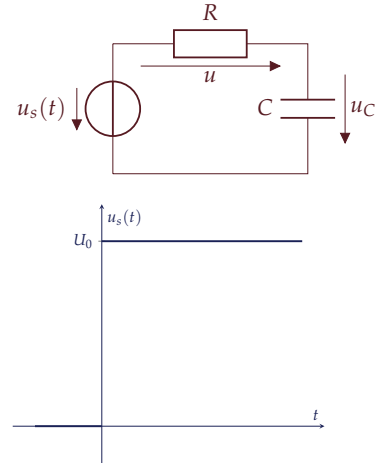
$$u'_{C,f} = -\frac{1}{RC}u_{C,f},$$

amelynek általános megoldása a  $\lambda = A = -\frac{1}{RC}$  sajátértékkel kifejezve

$$u_{C,f}(t) = Me^{\lambda t} = Me^{-\frac{1}{RC}t},$$

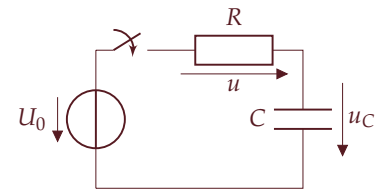
az egyelőre ismeretlen  $M \neq 0$  állandóval. Az exponenciális függvény kitévőjében bevezethetjük a

$$\tau = -\frac{1}{\lambda}$$



1. ábra: Példahálózat bekapcsolási folyamatra. A forrásfeszültség kifejezése

$$u_s(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U_0, & t > 0 \end{cases}$$



2. ábra: Az 1. ábra feladatával ekvivalens feladatkitűzés

**időállandót**, amely a szabad összetevő lecsengésének ütemét jellemzi (kizárólag a  $\lambda < 0$  esetben van értelme a bevezetésének). Jelen esetben  $\tau = -\frac{1}{\lambda} = R \cdot C$ , a szabad összetevő pedig

$$u_{C,f}(t) = Me^{-t/\tau}, \quad \tau = RC. \quad (1)$$

A szabad összetevő grafikonja a 3. ábrán látható.

2. A gerjesztett összetevő meghatározása. A gerjesztés  $t > 0$ -ra állandó:

$$u_s(t) = U_0 = \text{állandó}, \quad t > 0,$$

ezért az állapotváltozó gerjesztett összetevőjét is állandó alakban keressük:

$$u_{C,g} = U_{C,g} = \text{állandó}.$$

Ennek értékét mind matematikai módszerrel, mind a hálózat alapján meg tudjuk határozni. (a) A matematikai megoldásnál tudjuk, hogy a gerjesztett összetevő is kielégíti az inhomogén differenciálegyenletet. A konstans időfüggvényt és az adott gerjesztést az állapotegyenletbe helyettesítve

$$\underbrace{(U_{C,g})'}_{\equiv 0} = -\frac{1}{RC}u_{C,g} + \frac{1}{RC}u_s = -\frac{1}{RC}U_{C,g} + \frac{1}{RC}U_0,$$

ahol a bal oldal nulla, mert konstans függvény deriváltja nulla. Ebből adódik, hogy

$$U_{C,g} = U_0.$$

(b) A hálózatot tekintve, konstans gerjesztés mellett, ha a  $t = 0$ -beli tranziens lezajlik, a hálózat minden feszültsége és árama konstanssá válik  $t \rightarrow \infty$  mellett. Állandó feszültségen a kondenzátor szakadássá válik, a körben folyó áram nullára csökken, és a teljes forrásfeszültség a kondenzátoron esik (4. ábra), ahogy az előző előadásban a rezisztív kép kapcsán tárgyaltuk. Ezzel a megfontolással is

$$U_{C,g} = U_0$$

adódik a gerjesztett megoldásra.

3. A kezdeti feltételek érvényesítése. Mivel bekapcsolási folyamatról van szó, az állapotváltozó kezdeti értéke zérus:

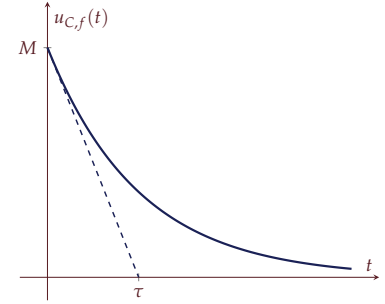
$$x(+0) \equiv u_C(+0) = u_C(-0) = 0,$$

és a teljes megoldásnak is ezt kell tükröznie a  $t = +0$ -ban érvényesítve:

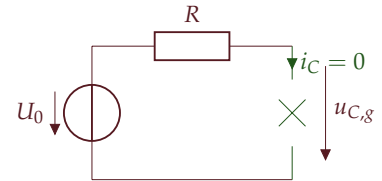
$$0 = u_C(+0) = u_{C,f}(+0) + u_{C,g}(+0) = Me^0 + U_0,$$

ahonnan

$$M = -U_0,$$



3. ábra: A szabad összetevő időfüggvénye. (2) egyenlet,  $\tau = RC$ , a hálózat időállandója. Az exponenciális görbe kezdeti meredeksége  $-M/\tau$ .  $t = \tau$  idő elteltével a kezdeti érték  $e^{-1} = 0,368$ -szorosára,  $t = 3\tau$  elteltével  $e^{-3} = 0,05$ -szöröské, míg  $t = 5\tau$  elteltével  $e^{-5} = 0,007$ -szeresére csökken, ami kevesebb, mint a kezdeti érték 1%-a. Ezért általában  $5\tau$ -ig ábrázoljuk a görbét.



4. ábra: A szabad összetevő meghatározására szolgáló helyettesítő hálózat  $t \rightarrow \infty$ -re

az állapotváltozó kifejezése pedig

$$u_C(t) = u_{C,f}(t) + u_{C,g}(t) = -U_0 e^{-t/\tau} + U_0, \quad t > 0.$$

Összefoglalva a  $t < 0$ -ra is érvényes alakkal (5. ábra)

$$u_C(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U_0(1 - e^{-t/\tau}), \tau = RC, & t > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Az ellenállás feszültsége, mint keresett válaszjel kifejezése ezek után

$$u(t) = -u_C(t) + u_s(t) = U_0 e^{-t/\tau} - U_0 + U_0 = U_0 e^{-t/\tau}, \quad t > 0.$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U_0 e^{-t/\tau}, & t > 0 \end{cases} \quad (3)$$

A válaszjel időfüggvénye a 6. ábrán látható. A válaszjelnek ugrása van a  $t = 0$ -ban.

Az eredményt úgy értelmezhetjük, hogy a kondenzátort  $U_0$  feszültségre feltöltő  $i > 0$  áram időfüggvénye

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau},$$

az ezen áram által szállított összes töltés a kezdetben energiamentes kondenzátoron

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau} dt = \tau \frac{U_0}{R} = CU_0$$

töltést halmoz fel, ami valóban egy  $U_0$  feszültségre töltött,  $C$  kapacitású kondenzátor töltése.

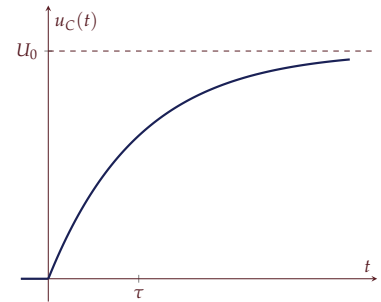
### Példa átkapcsolási folyamatra

A  $t < 0$  időre nem energiamentes hálózatok számítását a 7. ábra hálózatán keresztül tárgyaljuk.

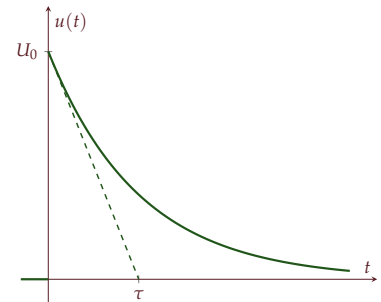
A  $t = 0$  időpillanatban a korábban zárt kapcsolót kinyitjuk. A keresett válasz az  $R_1$  ellenállás bejelölt  $u(t)$  feszültsége. A hálózat által reprezentált rendszer egyetlen állapotváltozója a tekercs  $i_L$  árama.

### A kiindulási értékek meghatározása

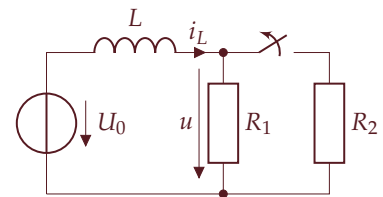
Előzetesen határozzuk meg az állapotváltozó kiindulási ( $t = -0$ -beli) értékét!  $t < 0$ -ra a kapcsoló zárva van. A gerjesztés állandó, és feltehetjük, hogy a  $t = -0$ -hoz érve már minden esetleges tranzienst



5. ábra: A kondenzátor feszültségének (2) időfüggvénye



6. ábra: A válaszjel (3) időfüggvénye



7. ábra: Példahálózat átkapcsolási folyamatra



lezajlott, a hálózat minden árama és feszültsége állandósult. Ezért minden idő szerinti derivált eltűnik, a tekercs az  $u_L = Li'_L = 0$  karakterisztika miatt rövidzárral helyettesíthető. A  $t = -0$ -ban érvényes rezisztív helyettesítő kép alapján (8. ábra)

$$i_L(-0) = \frac{U_0}{R_1 \times R_2}.$$

Mivel a gerjesztés  $t = 0$ -ban véges, a folytonossági feltétel miatt a tekercs árama nem ugrik, kezdeti értéke is

$$i_L(+0) = i_L(-0) = \frac{U_0}{R_1 \times R_2}.$$

#### Az állapotváltozós leírás megoldása

Ebben a példában a hálózat különbözik  $t < 0$ -ra és  $t > 0$ -ra. Mivel a megoldást  $t > 0$ -ra keressük, az ÁVLNA-t a  $t > 0$ -ra érvényes hálózati struktúrára (a kapcsoló nyitott állására) írjuk fel a 9. ábra szerint.

A hálózatra felírható feszültségtörvény

$$u_s = Li'_L + R_1 i_L,$$

amiből az ÁVLNA

$$\begin{aligned} i'_L &= -\frac{R_1}{L} i_L + \frac{1}{L} u_s \\ u &= R_1 i_L \end{aligned}$$

Az állapotegyenlet megoldását összetevőkre bontással keressük

$$i_L = i_{L,f} + i_{L,g}$$

alakban. Az 1. lépés a homogén DE megoldása:

$$i'_{L,f} = -\frac{R_1}{L} i_{L,f},$$

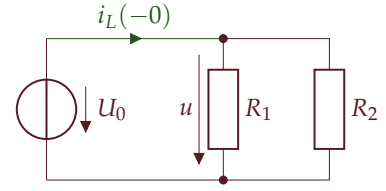
aminek az általános megoldása a  $\lambda = A = -\frac{R_1}{L}$  sajátértékkel kifejezve

$$i_{L,f} = Me^{-\frac{R_1}{L}t} = Me^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{L}{R_1},$$

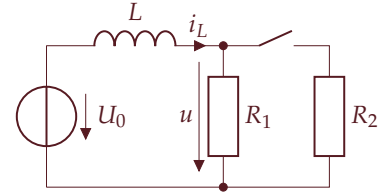
ahol bevezettük a  $\tau = L/R_1$  időállandót.

A 2. LÉPÉS a gerjesztett összetevő megkeresése. A gerjesztés állandó, ezért a gerjesztett összetevőt is konstans alakban keressük.

$$u_s(t) = U_0 \rightarrow i_{L,g} = I_{L,g} = \text{állandó}$$



8. ábra: A 7. ábra hálózatának  $t < 0$ -ra érvényes rezisztív helyettesítő képe. A tekercs rövidzárral helyettesíthető az  $u_L = Li'_L$  karakterisztika alapján, ha  $i'_L = 0$ .



9. ábra: A 7. ábra hálózata  $t > 0$ -ra.

Ennek értékét kiszámíthatjuk az inhomogén rendszeregyenletbe helyettesítéssel:

$$\underbrace{(I_{L,g})'}_{\equiv 0} = -\frac{R_1}{L} I_{L,g} + \frac{1}{L} U_0,$$

ahonnan

$$I_{L,g} = \frac{U_0}{R_1}.$$

Ugyanezt a hálózathoz is meghatározhatjuk:  $t \rightarrow \infty$  mellett a hálózatban a tranzienst eltűnik, minden feszültség és áram állandósul, a tekercs pedig rövidzárral helyettesíthető (10. ábra). A rezisztív helyettesítő kép alapján elemi úton ugyancsak

$$I_{L,g} = \frac{U_0}{R_1}.$$

adódik.

A 3. LÉPÉS a kezdeti feltételek érvényesítése. Előzetesen meghatároztuk a tekercs áramának *kiindulási* értékét, ami a folytonossági feltételből következően nem ugrik a kapcsoló nyitása után sem. A  $t > 0$ -ra érvényes teljes megoldásnak ezt az értéket kell visszaadnia. Egyrészt

$$i_L(+0) = i_L(-0) = \frac{U_0}{R_1 \times R_2},$$

másrészt a rendszeregyenlet teljes megoldása

$$i_L(t) = i_{L,f}(t) + i_{L,g}(t) = Me^{-t/\tau} + \frac{U_0}{R_1}, \quad t > 0$$

ami  $t = +0$ -ra kiértékelve

$$i_L(+0) = Me^0 + \frac{U_0}{R_1},$$

ahonnan

$$M = \frac{U_0}{R_2}.$$

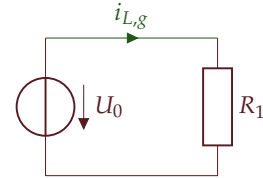
A tekercs áramának kifejezését az alábbi formában foglalhatjuk össze:

$$i_L(t) = \begin{cases} \frac{U_0}{R_1 \times R_2}, & \text{ha } t < 0 \\ U_0 \left( \frac{1}{R_2} e^{-t/\tau} + \frac{1}{R_1} \right), & (\tau = L/R_1) \text{ ha } t > 0 \end{cases}$$

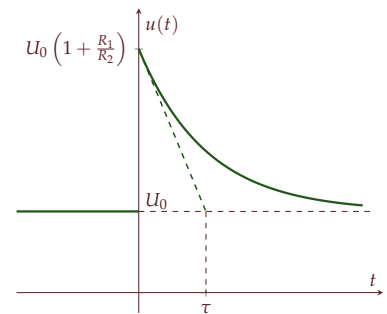
Végül a keresett  $u$  választ  $i_L(t)$  kifejezésének a válaszra vonatkozó egyenletbe helyettesítésével kapjuk (11. ábra):

$$u(t) = R_1 i_L(t) = \begin{cases} U_0, & \text{ha } t < 0 \\ U_0 \left( \frac{R_1}{R_2} e^{-t/\tau} + 1 \right), & (\tau = L/R_1) \text{ ha } t > 0 \end{cases}$$

Az ellenállás feszültsége ugrik  $t = 0$ -ban.



10. ábra: A 7. ábra hálózatában  $t \rightarrow \infty$  mellett a gerjesztett összetevő meghatározására szolgáló rezisztív helyettesítő kép



11. ábra: A 7. ábra hálózatában az  $u$  válaszjel időfüggvénye. Figyeljük meg, hogy az  $u$  feszültség maximális értéke nagyobb, mint az  $U_0$  forrásfeszültség.

## 10. Első- és másodrendű hálózatok analízise az idő-tartományban

Bilicz-Horváth

2021. április 5.

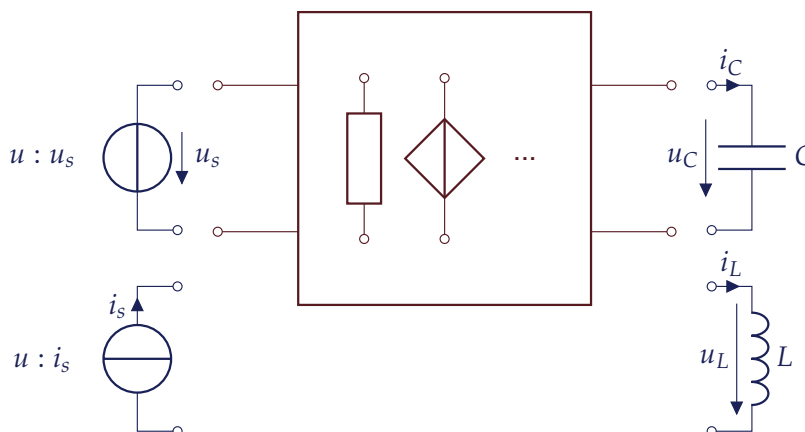
Az elsőrendű hálózat által reprezentált rendszer válaszjele, különösen állandó gerjesztésre, az állapotegyenlet explicit megoldása nélkül is egyszerűen meghatározható. Levezetjük a rendszer időállandója és a dezaktivizált hálózat belső ellenállása közötti kapcsolatot. Végül a másodrendű rendszerek általános vizsgálatát tárgyaljuk.

### Feszültségek és áramok elsőrendű hálózatokban

Láttuk, hogy az elsőrendű (egy tárolós, egyetlen tekercset vagy kondenzátort tartalmazó hálózatot reprezentáló) rendszer állapotváltozós leírásának normálalakja

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \right\}$$

Az állapotegyenlet egy elsőrendű differenciálegyenlet, adott gerjesztés és ismert kezdeti értékek mellett megoldva megkapjuk az állapotváltozó időfüggvényét, amit a válaszegyenletbe helyettesítve adódik a keresett válaszjel időfüggvénye. Azt is láttuk, hogy a differenciálegyenlet szabad összetevője mindig exponenciális időfüggvény, amelynek időállandója  $\tau = -1/A$ . Ha az elsőrendű hálózat gerjesztése szakaszonként állandó, a hálózat tetszőleges áramát vagy feszültségét kifejezhetjük anélkül, hogy az állapotváltozós leírást felírnánk és megoldanánk.



1. ábra: Elsőrendű hálózatok vizsgálata. A forrást és a dinamikus komponens kivesszük a hálózathoz, a hálózat maradvékát egy kétkapuval helyettesítjük

A MEGOLDÁSHOZ gondolatban vegyük ki a kérdéses hálózathoz a gerjesztő feszültség- vagy áramforrást, és vegyük ki a dinamikus elemet (a tekercset, ill. kondenzátort) is. Azt a póluspárt, amire a gerjesztő forrás csatlakozik, egy kétkapu primer kapujának, míg a dinamikus elemre csatlakozó póluspárt a kétkapu szekunder kapujának tekintjük (1. ábra).

Ha a dinamikus elem egy  $C$  kapacitású kondenzátor, akkor az állapotváltozó a kondenzátor  $u_C$  feszültsége, az állapotegyenlet pedig

$$u'_C = Au_C + Bu$$

alakú, ahol  $u$  helyére a gerjesztő mennyiség,  $u_s$  vagy  $i_s$  írható. Mindkét oldalt  $C$ -vel szorozva

$$\underbrace{Cu'_C}_{i_C} = ACu_C + BCu,$$

ahol a bal oldalon felismerjük a kondenzátor áramát. Ha a hálózatot dezaktivizáljuk ( $u \equiv 0$ ), akkor a sajátérték

$$A = \frac{1}{C} \frac{u_C}{i_C} \Big|_{u \equiv 0} = -\frac{1}{CR_B},$$

ahol  $R_B$  a kérdéses kétkapu szekunder oldali bemeneti rezisztenciája (pontosan annak  $(-1)$ -szerese a feltüntetett referenciairányok mellett). Ha a dinamikus elem egy  $L$  induktivitású tekercs, akkor az állapotegyenlet

$$i'_L = Ai_L + Bu$$

alakú. Mindkét oldalt  $L$ -el szorozva

$$\underbrace{Li'_L}_{u_L} = LAi_L + LBu,$$

amiből a sajátérték kifejezhető, ha a gerjesztő forrást dezaktivizáljuk:

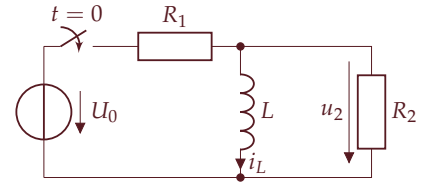
$$A = \frac{1}{L} \frac{u_L}{i_L} \Big|_{u \equiv 0} = -\frac{R_B}{L}.$$

Összefoglalva, az állapotegyenlet sajátértéke

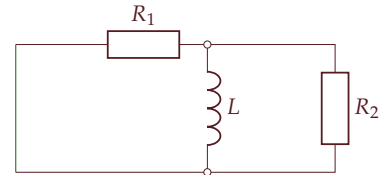
$$A = \begin{cases} -\frac{1}{R_B C} \\ -\frac{R_B}{L} \end{cases}$$

Az általános megoldás tárgyalásakor beláttuk, hogy a szabad válasz kifejezésében szereplő  $\tau$  időállandó ennek a  $\lambda = A$  sajátértéknek a negatív reciproka. Ez alapján a szabad összetevőben szereplő exponenciális függvény időállandója kifejezhető az  $R_B$  belső ellenállással:

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{A} = \begin{cases} R_B C \\ L/R_B \end{cases}$$



2. ábra: Elsőrendű példahálózat. A kapcsolót a  $t = 0$  időpillanatban zárjuk. A keresett válaszjel a bejelölt  $u_2$  feszültség. Az állapotváltozó a tekercs  $i_L$  árama a bejelölt referenciairánnyal.



3. ábra: A 2. ábra hálózatában az időállandó meghatározásához a dinamikus komponensre csatlakozó kétpólust dezaktivizáljuk, majd meghatározzuk a dezaktivizált kétpólus belső ellenállását a dinamikus komponens felől nézve. A kétpólus a két ellenállás párhuzamos kapcsolása, az eredő ellenállás

$$R_B = R_1 \times R_2,$$

a válasz szabad összetevőjében szereplő időállandó pedig

$$\tau = \frac{L}{R_B} = \frac{L}{R_1 \times R_2}.$$

Az  $R_B$  belső ellenállás egyszerűen úgy határozható meg, hogy a dinamikus elemre csatlakozó hálózat maradékát egy kétpólusnak tekintve, a benne található független forrást dezaktivizáljuk, és meghatározzuk ezen dezaktivizált kétpólus belső ellenállását a „dinamikus elem felől nézve”. Ez sok esetben elemi számítási módszerekkel (soros ill. párhuzamos eredőkre visszavezetéssel) elvégezhető.

EZEK UTÁN az állapotváltozó időfüggvénye az összetevőkre bontás módszere alapján a szabad és a gerjesztett összetevő összegeként írható fel:

$$x(t) = x_f(t) + x_g(t) = Me^{-t/\tau} + x_g(t),$$

az egyelőre ismeretlen  $M$  valós állandóval. Az állapotváltozó *kezdeti* értéke

$$x(+0) = M + x_g(+0),$$

amiből a kezdeti érték és a gerjesztett összetevő ismeretében  $M$  is meghatározható:

$$M = x(+0) - x_g(+0).$$

Az állapotváltozó időfüggvénye tehát

$$x(t) = x_g(t) + [x(+0) - x_g(+0)] e^{-t/\tau}.$$

Láttuk korábban azt is, hogy konstans gerjesztés ( $u = U_0 = \text{áll.}$  feszültség vagy áram) esetén a gerjesztett összetevő maga is állandó:

$$x_g(t) = X_g = \text{állandó},$$

vagyis

$$x(t) = X_g(t) + [x(+0) - X_g] e^{-t/\tau}.$$

Az állapotváltozó időfüggvényét a válasza vonatkozó egyenletbe helyettesítve kapjuk a válasz kifejezését:

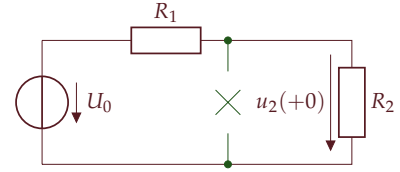
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = Cx(t) + DU_0, \quad t > 0,$$

$$y(t) = \underbrace{CX_g + DU_0}_{Y_g} + \underbrace{C[x(+0) - X_g]}_{y(+0) - Y_g} e^{-t/\tau}$$

Ez alapján a hálózat tetszőleges feszültségének vagy áramának (beleértve természetesen magának az állapotváltozónak) az időfüggvénye állandó  $U_0$  gerjesztés mellett

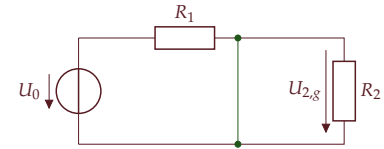
$$\boxed{y(t) = Y_g + [y(+0) - Y_g] e^{-t/\tau}, \quad (t > 0).} \quad (1)$$

A formulában  $Y_g$  és  $y(+0)$  egyszerű rezisztív helyettesítő képek alapján,  $\tau$  pedig az előző szakaszban leírt kétpólus belső ellenállásának számításával határozható meg. A (1) egyenletet a 6. ábra segítségével



4. ábra: A 2. ábra hálózatában a válaszjel kezdeti ( $t = +0$ -beli) értékének meghatározására alkalmas rezisztív helyettesítő kép. A hálózat  $t < 0$ -ra energiamentes, ezért az állapotváltozó kiindulási értéke zérus,  $i_L(-0) = 0$ . A gerjesztés véges, ezért az állapotváltozó folytonosan megy át, kezdeti értéke egyenlő a kiindulási értékkel:  $i_L(+0) = 0$ . Ezért a tekercs a  $t = +0$ -ban szakadással helyettesíthető. Az  $u_2$  válaszjel kezdeti értéke ezek után feszültségosztással

$$u_2(+0) = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



5. ábra: A 2. ábra hálózatában a válasz gerjesztett összetevőjének meghatározására alkalmas helyettesítő kép.  $t \rightarrow \infty$  mellett a szabad (tranzien) összetevő lecseng, a hálózat minden árama és feszültsége állandó, a tekercs szakadássá válik, és rövidre zárja a vele párhuzamos ellenállást, a rajta eső feszültség nullává válik. A gerjesztett összetevő

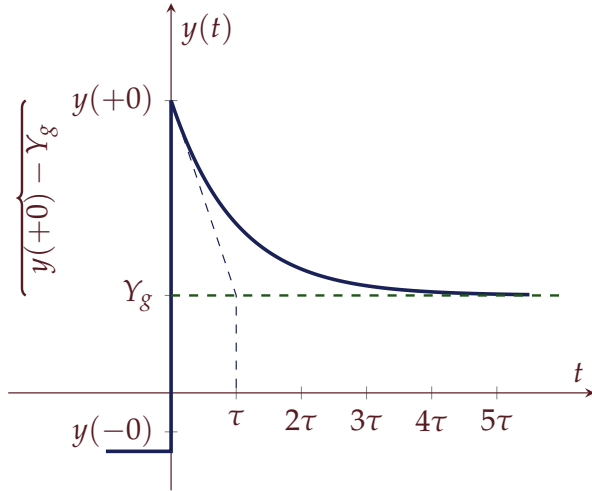
$$u_{2,g} = U_{2,g} = 0.$$

Itt  $C$  már a válasza vonatkozó egyenletbeli együttható, nem a kapacitás!

A képlet „a magic formula” néven is ismert. A 2. ábra példájában a korábban kiszámolt értékek felhasználásával a keresett  $u_2$  feszültség  $t > 0$ -ra

$$u_2(t) = U_{2,g} + [u_2(+0) - U_{2,g}] e^{-t/\tau}$$

$$u_2(t) = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{L}{R_1 + R_2}$$



6. ábra: A

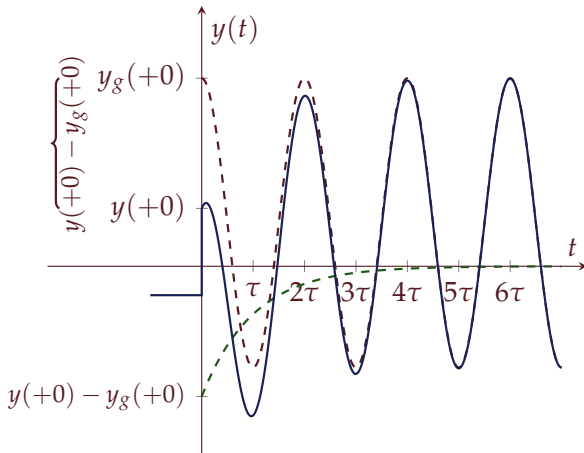
$$y(t) = Y_g + [y(+0) - Y_g] e^{-t/\tau}$$

kifejezés illusztrációja: elsőrendű rendszer tetszőleges feszültsége vagy árama konstans gerjesztés mellett állandó értékhez tart (ha a sajátérték negatív!) A  $t = 0$ -ban a kezdeti- és a végérték közötti amplitúdóval arányos exponenciális tranzienst lép fel, amelynek időállandója a dinamikus elemre csatlakozó deaktivizált kétpólus belső ellenállása révén kiszámítható.

értelmezhetjük állandó gerjesztésre, ami  $t = 0$ -ban ugrik. A módszer nem csak állandó, hanem tetszőleges, időben változó gerjesztésre is érvényes, ha nem kötjük ki a gerjesztett összetevő állandó voltát:

$$y(t) = y_g(t) + [y(+0) - y_g(+0)] e^{-t/\tau}, \quad (t > 0). \quad (2)$$

Nem állandó gerjesztés mellett azonban a gerjesztett összetevő meghatározása nem triviális feladat; ahogy említettük, a próbafüggvények módszerével végezhető el. A (2) egyenlet alkalmazását szinuszos gerjesztésre a 7. ábrán illusztráljuk.



7. ábra: A gyakorlatban kitüntetett jelentősége van a szinuszos gerjesztésnek: szinuszos gerjesztés esetén a lineáris, invariáns rendszer állapotváltozóinak a gerjesztett összetevője szintén szinuszos jel, ugyanazzal a körfrekvenciával, mint a gerjesztés. A jel amplitúdója és kezdetifázisa általában eltér a gerjesztésétől. Az amplitúdó és a fázis meghatározása az impedanciák bevezetésével könnyen elvégezhető, de ezt a félév 3. harmadában fogjuk majd megismerni. Az ábrán a piros szaggatott vonal a válasz gerjesztett összetevője ( $y_g(t)$ ), a zöld az exponenciális tag, a kék folytonos vonal pedig maga az  $y(t)$  válaszjel. Itt is látszik, hogy a tranzienst tag amplitúdója annál nagyobb, minél nagyobb a különbség a gerjesztett összetevő  $+0$ -beli értéke és a teljes válasz  $+0$ -beli értéke között.

### Magasabb rendű rendszerek vizsgálata

A magasabb rendű ( $N > 1$ ) rendszerek válaszát is összetevőkre bontással határozhatjuk meg. A számítás technikailag valamivel bo-

nyolultabb, mint az elsőrendű rendszerek esetén látottak. A másod- vagy magasabb rendű rendszerek azonban olyan jelenséget, konkrétan a szinuszosan rezgő sajátválaszt, tudnak produkálni, amelyet az elsőrendű rendszerek nem képesek.

A PROBLÉMA a következőképpen fogalmazható meg. Adott az állapotváltozós leírás normálalakja, vektor-mátrix alakban az alábbi differenciálegyenlet-rendszer és a válaszra vonatkozó algebrai egyenlet összessége:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}^T\mathbf{x} + Du \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

amelyben  $\mathbf{x}$  az állapotváltozók időfüggvényeiből képzett oszlopvektor. Ismert továbbá a *kiindulási állapot*,

$$\mathbf{x}(-0)$$

és az  $u(t)$  gerjesztés adott  $t \geq 0$ -ra. Keressük a válasz  $y(t)$  időfüggvényének  $t > 0$ -ra érvényes formuláját. Az összetevőkre bontás során mind az  $N$  számú állapotváltozót egy szabad és egy gerjesztett összetevő összegeként keressük:

$$x_k(t) = x_{k,f}(t) + x_{k,g}(t), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

vagy

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_f(t) + \mathbf{x}_g(t).$$

### 1. A szabad összetevő

A szabad összetevő,  $\mathbf{x}_f(t)$  ebben az esetben is az

$$\mathbf{x}'_f = \mathbf{A}\mathbf{x}_f, \quad (4)$$

homogén differenciálegyenlet-rendszer (HDER) általános megoldása, fizikai értelemben a gerjesztetlen („magára hagyott”) rendszer saját válasza. Igazolható, hogy az ilyen alakú egyenletrendszer általános megoldása

$$\boxed{\mathbf{x}_f(t) = \mathbf{m}e^{\lambda t}} \quad (5)$$

alakú függvények szuperpozíciója. A (5) szerinti kifejezés idő szerinti deriváltja

$$\mathbf{x}'_f(t) = \lambda \mathbf{m}e^{\lambda t},$$

amit a (4) homogén egyenletbe helyettesítve

$$\lambda \mathbf{m}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{m}e^{\lambda t},$$

azaz

$$\boxed{\lambda \mathbf{m} = \mathbf{A}\mathbf{m}} \quad (6)$$

adódik. Itt felismerjük a matematika tárgyban a lineáris algebra témakör keretében tárgyalt *sajátérték-problémát*: a HDER általános megoldásában az  $A$  rendszermátrix  $\lambda$  sajátértékei és  $m$  sajátvektori szerepelnek. Abban az esetben, amikor az  $A$  mátrixnak  $N$  különböző sajátértéke és  $N$  lineárisan független sajátvektora van, akkor mindegyik  $\lambda_p, p = 1, 2, \dots, N$  sajátértékhez tartozó függvény külön-külön megoldása a HDER-nek. A probléma lineritása miatt ráadásul ezen függvények tetszőleges lineáris kombinációja is megoldása a HDER-nek. A szabad válasz általános alakja tehát

$$x_f(t) = \sum_{p=1}^N K_p m_p e^{\lambda_p t},$$

ahol a  $K_p$  valós konstansok tetszőleges értéke mellett érvényes megoldást kapunk a HDER-re, de a fizikai értelemmel bíró konkrét  $K_p$  értékek meghatározását a 3. lépésben a kezdeti feltételek érvényesítésével tudjuk majd elvégezni.

## 2. A gerjesztett összetevő

Az  $x_g$  gerjesztett összetevő az

$$x'_g = Ax_g + Bu \quad (7)$$

inhomogén differenciálegyenlet-rendszer egy partikuláris megoldása. (A (7) egyenletrendszer formailag ugyanúgy néz ki, mint az eredeti, (3) szerinti állapotegyenlet. A két probléma között az a különbség, hogy a (7) egyenlet megoldása során nem szabunk kezdeti feltételt). Általában a próbafüggvények módszerével található ilyen megoldás, amely szerint a gerjesztett összetevő alakja követi az  $u(t)$  gerjesztés alakját. Ha például

$$u(t) = U_0 \text{ (állandó),}$$

akkor a gerjesztett összetevő is konstans (minden állapotváltozó egyenként 1-1 konstans érték):

$$x_g = X_g \text{ (állandó).}$$

A gerjesztett összetevőnek fizikai értelmezés is adható, illetve a gerjesztett összetevő egyes esetekben (pl. állandó v. szakaszonként állandó gerjesztés esetén) a hálózati reprezentációból egyszerűen kiolvasható. Ha ugyanis a rendszermátrix minden sajátértéke negatív (komplex konjugált sajátértékpárok esetén a valósrészek negatívak):

$$\Re\{\lambda_p\} < 0, p = 1, 2, \dots, N$$

akkor nyilvánvaló, hogy  $t \rightarrow \infty$  mellett a szabad összetevőben található minden exponenciális tag (a tranziens) lecseng:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_g(t)) = 0,$$

Röviden összefoglaljuk egy  $N \times N$  méretű négyzetes  $A$  mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak számítását. Az  $m$  sajátvektorok a

$$\lambda m = Am$$

egyenlet megoldásai. Ekvivalens átalakítással a

$$\lambda m - Am = (\lambda I - A)m = 0$$

homogén, lineáris algebrai egyenlet-rendszer adódik, amelyben

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

egy  $N \times N$  méretű egységmátrix,  $0$  pedig egy  $N$  elemű oszlopvektor csupa  $0$  bejegyzésekkel. Az egyenletrendszernek akkor van nullától különböző (nemtriviális) megoldása a keresett  $m$  értékekre, ha az egyenlet együtthatómátrixának determinánsa zérus:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{nemtriv. mo.}$$

Ezt az egyenletet *karakterisztikus egyenletnek* nevezzük, kifejtve

$$\underbrace{\lambda^N + d_1 \lambda^{N-1} + \cdots + d_{N-1} \lambda + d_N}_{\text{karakterisztikus polinom}} = 0$$

Az  $N$ -edfokú, valós együtthatós polinomnak  $N$  gyöke (nullhelye) van, ezek a mátrix sajátértékei:

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N,$$

amelyek vagy valósak, vagy komplex konjugált párokat alkotnak ( $\lambda_q = \lambda_p^*$ ). A továbbiakban csak azzal az esettel foglalkozunk, amelyben minden sajátérték különböző értékű. A valós sajátértékek exponenciálisan lecsengő (vagy exponenciálisan növekvő) szabad választ, a komplex konjugált pár pedig exponenciálisan csillapodó (vagy növekvő) koszinuszos rezgő összetevőt eredményez a szabad válaszban. Az  $m_p$  sajátvektorokat a

$$\lambda_p \cdot m_p = A \cdot m_p$$

lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. A sajátértékek és a sajátvektorok a Matlab  **eig** függvényével számolhatók.



a válasz pedig aszimptotikusan a gerjesztett összetevőhöz tart:

$$\boxed{x(t) \rightarrow x_g(t).}$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy beáll az *állandósult állapot*.

### 3. A kezdeti feltételek érvényesítése

Az állapotegyenlet teljes megoldása az első két lépés alapján

$$x(t) = x_f(t) + x_g(t) = \sum_{p=1}^N K_p m_p e^{\lambda_p t} + x_g(t), \quad t > 0. \quad (8)$$

Szükség van még az ismeretlen  $K_p$  együtthatók meghatározására, amit a kezdeti feltételek illesztésével végzünk el. A megoldáshoz ismerjük az  $x(-0)$  *kiindulási* értékeket. Ezek alapján következtetünk az  $x(+0)$  *kezdeti* értékekre: ha a gerjesztés véges a  $t = 0$ -ban, akkor láttuk, hogy az állapotváltozók is folytonosan mennek át:

$$x(+0) = x(-0) \Leftarrow u(t) \text{ véges,}$$

azaz a kezdeti és a kiindulási állapot megegyezik. A (8) egyenletet  $t = +0$ -ban felírva

$$x(+0) = \sum_{p=1}^N K_p m_p + x_g(+0)$$

vagy

$$\sum_{p=1}^N K_p m_p = x(+0) - x_g(+0),$$

ami egy  $N$  ismeretlenes lineáris egyenletrendszer az  $N$  számú ismeretlen  $K_p$  állandóra. Vektor-mátrix alakban

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_N \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_N \end{bmatrix}}_K = x(+0) - x_g(+0)$$

amelyben az  $M$  mátrix az  $N$  sajátvektorból képzett mátrix, az ún. *modális mátrix*. Ebből a kifejezésből a  $K_p$  értékek az egyenletrendszer megoldása révén egyértelműen meghatározhatók. A fenti három lépésben megkaptuk az  $N$  számú állapotváltozó időfüggvényét. Egy utolsó lépésben ezeket az időfüggvényeket behelyettesítjük a válaszra vonatkozó

$$y(t) = C^T x(t) + Du(t)$$

egyenletbe, így megkapjuk a rendszer keresett válaszejét.

Később találkozni fogunk nem véges gerjesztéssel is, amely mellett az állapotváltozók ugorhatnak.

*Példa*

Adott egy másodrendű rendszer állapotváltozós leírásának normálalakja:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}^T \mathbf{x} + Du \end{aligned} \right\}$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0,5 & -1,5 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}; \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}; D = 4.$$

A rendszer gerjesztése

$$u(t) = U_0 = 1, t > 0$$

és a rendszer  $t < 0$ -ra energiamentes (bekapcsolási folyamat), ezért a kiindulási állapot

$$\mathbf{x}(-0) = \mathbf{0}.$$

Határozzuk meg a rendszer válaszjelét! Az adatok egy olyan koherens mértékegység-rendszerben adóttak, amelyben az idő egysége ms. A jobb oldali hasámban a matlabos számítást is bemutatjuk.

1. A SZABAD ÖSSZETEVŐ meghatározásához oldjuk meg a sajátértékegyenletet:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -3 \\ -0,5 & \lambda + 1,5 \end{vmatrix} = 0.$$

A determinánst kifejtve a karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 3,5\lambda + 1,5 = 0,$$

amelynek megoldása a két sajátérték

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -0,5.$$

Az első sajátértékhez tartozó sajátvektor az

$$\begin{bmatrix} -3 + 2 & -3 \\ -0,5 & -3 + 1,5 \end{bmatrix} \mathbf{m}_1 = \mathbf{0}$$

egyenlet megoldása, ahol a sajátvektor két koordinátája

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \end{bmatrix},$$

de mivel a sajátvektor konstansszoros is sajátvektor, az  $m_{11}$  koordinátát 1 értékre választhatjuk. Az egyenletrendszer megoldása  $m_{12} = 3$ , a sajátvektor

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [-2 3; 0.5 -1.5]
A =
```

```
    -2.0000    3.0000
     0.5000   -1.5000
```

```
>> B = [2; -2]
B =
```

```
     2
    -2
>> C = [5 0]
C =
```

```
     5     0
>> D = 4;
```

A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait a Matlab/Octave **eig** függvénye szolgáltatja.  $[\mathbf{M}, \mathbf{D}] = \mathbf{eig}(\mathbf{A})$  alakban az  $\mathbf{M}$  mátrix az  $\mathbf{M}$  modális mátrix (a sajátvektorok egymás mellé ragasztásával képzett mátrix), a  $\mathbf{D}$  mátrix pedig egy olyan diagonális mátrix, aminek a főátlójában a sajátértékek vannak. A sajátvektorokat mindig úgy kapjuk, hogy a normájuk egységnyi legyen. Kézi számításnál általában nem erre törekszünk, hanem az egyik koordinátát magát rögzítjük egységnyi értékre. A feladatbeli értékekkel

```
>> [M, lam] = eig(A)
M =
```

```
   -0.9487   -0.8944
    0.3162   -0.4472
```

```
lam =
```

```
   -3.0000         0
         0   -0.5000
```

Hasonlóan kaphatjuk a másik sajátvektort is:

$$\mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

Ezzel a szabad összetevő általános alakja

$$\mathbf{x}_f(t) = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1/3 \end{bmatrix} e^{-3t} + K_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix} e^{-0,5t},$$

az egyelőre ismeretlen  $K_1, K_2$  állandókkal.

A GERJESZTETT ÖSSZETEVŐT úgy találjuk meg, hogy az állandó gerjesztéshez állandó értékű gerjesztett összetevő tartozik:

$$\mathbf{x}_g(t) = \mathbf{X}_g,$$

ami kielégíti az inhomogén differenciálegyenlet-rendszert:

$$\underbrace{(\mathbf{X}_g)'}_{=0} = \mathbf{A}\mathbf{X}_g + \mathbf{B}\mathbf{U}_0,$$

ahonnan (mivel a konstans deriváltja zérus)

$$\mathbf{X}_g = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_0 = \dots = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Mindkét állapotváltozó a  $-2$  értékhez tart.

A KEZDETI FELTÉTELEK illesztése során a véges gerjesztés miatt tudjuk, hogy a kezdeti állapot megegyezik a kiindulással, ami – bekapcsolási folyamatról lévén szó – zérus:

$$\mathbf{x}(+0) = \mathbf{x}(-0) = \mathbf{0}.$$

Kifejtve

$$\mathbf{x}(+0) = \mathbf{x}_f(+0) + \mathbf{x}_g(+0) = K_1\mathbf{m}_1 + K_2\mathbf{m}_2 + \mathbf{X}_g = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} + \mathbf{X}_g$$

Az  $\mathbf{M}$  modális mátrix inverzével szorozva

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \underbrace{[\mathbf{x}(+0) - \mathbf{X}_g]}_{=0} = \dots = \begin{bmatrix} -1,2 \\ 3,2 \end{bmatrix}$$

Az állapotváltozók időfüggvénye

$$\mathbf{x}(t) = K_1\mathbf{m}_1 e^{\lambda_1 t} + K_2\mathbf{m}_2 e^{\lambda_2 t} + \mathbf{X}_g,$$

Ellenőrizzük, hogy mindkét sajátérték negatív, ezért a szabad összetevő valóban lecsengő, és  $t \rightarrow \infty$  mellett beáll az állandósult állapot: jelen esetben az állandó gerjesztés hatására minden állapotváltozó, és ezzel a rendszer minden belső változója is állandó értékhez tart. A (9) számítás Matlabban:

```
>> Xg = -inv(A)*B*1
Xg =
```

```
-2
-2
```

```
K = inv(M) * ([0; 0] - Xg)
K =
```

```
1.2649
-3.5777
```

Mivel a Matlab egységnyire normált sajátvektorokat hozott ki, a  $K$  konstansok értéke is eltér a kézi számolás eredményétől, de a  $K_p \mathbf{m}_p$  értékek biztosan egyenlőek. Kézi számolással pl.

$$K_1 \mathbf{m}_1 = -1,2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,2 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

a Matlab által számolt értékekkel pedig

$$K_1^{(M)} \mathbf{m}_1^{(M)} = 1,2649 \begin{bmatrix} -0,9487 \\ 0,3162 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,2 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

megegyező értékek.

azaz

$$x_1(t) = -1,2 \cdot 1 \cdot e^{-3t} + 3,2 \cdot 1 \cdot e^{-0,5t} - 2,$$

$$x_2(t) = -1,2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot e^{-3t} + 3,2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-0,5t} - 2,$$

a válaszjel pedig a válaszegyenletbe helyettesítve

$$y(t) = C^T x(t) + Du(t)$$

$$y(t) = \underbrace{K_1 C^T m_1}_{=-6} e^{\lambda_1 t} + \underbrace{K_2 C^T m_2}_{=16} e^{\lambda_2 t} + \underbrace{C^T X_g + D U_0}_{=-6}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -6e^{-3t} + 16e^{-0,5t} - 6, & t > 0 \end{cases}$$

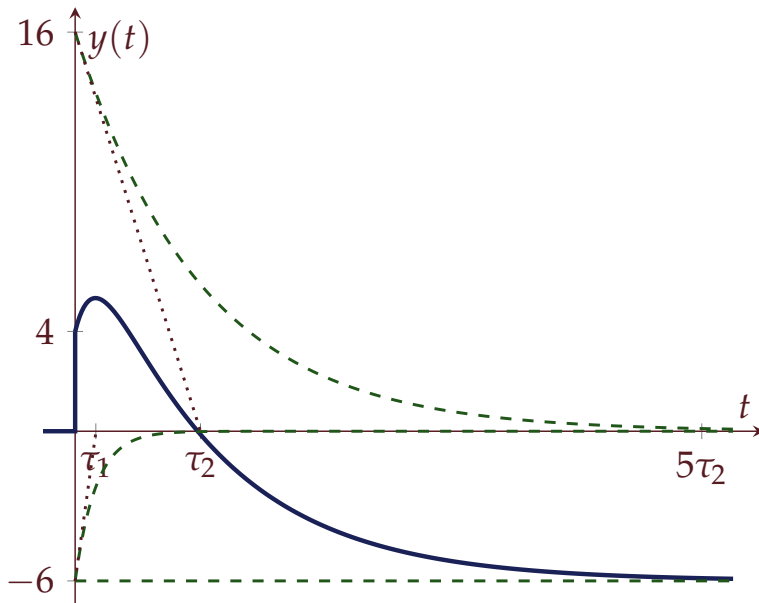
A számolás alapján látható, hogy a rendszermátrix két valós sajátértéke megfeleltethető két időállandónak:

$$\tau_1 = -\frac{1}{\lambda_1} = -\frac{1}{(-3)} = \frac{1}{3} \text{ ms},$$

ill.

$$\tau_2 = -\frac{1}{\lambda_2} = -\frac{1}{(-0,5)} = 2 \text{ ms}.$$

A rendszer szabad válaszát (a tranziens időtartamát) a nagyobbik időállandó,  $\tau_2$  határozza meg. Tudjuk, hogy az exponenciális jel  $5\tau$  alatt maximumának kevesebb, mint 1%-ra csökken, ezért a válaszban 10 ms után tekinthetjük úgy, hogy beáll az állandósult állapot.



```
>> K(1) * C * M(:, 1)
```

```
ans =
```

```
-6.0000
```

```
>> K(2) * C * M(:, 2)
```

```
ans =
```

```
16.0000
```

```
>> C * Xg + D * 1
```

```
ans =
```

```
-6
```

8. ábra: A példabeli válaszjel grafikonja. Kék:  $y(t)$ , a zöld szaggatott görbék pedig a válaszjel három összetevőjét mutatják: a szabad válaszhoz tartozó két exponenciális komponenst ( $\tau_1$  ill.  $\tau_2$  időállandóval), valamint a válasz gerjesztett összetevőjét, ami a konstans gerjesztés miatt szintén konstans,  $Y_g = -6$ . A válasz ugrik a  $t = 0$ -ban:  $y(-0) = 0$ ,  $y(+0) = 4$ .

## 11. Másodrendű rendszerek analízise az időtartományban

Bilicz-Horváth

2021. április 23.

### A soros rezgőkör

Vizsgáljuk meg az 1. ábrán látható hálózatban, az ún. soros rezgőkörben, a kondenzátor feszültségének az időfüggését, ha a gerjesztés az  $u_s(t)$  forrásfeszültség. A továbbiakban ugrás jellegű gerjesztést vizsgálunk, azaz

$$u_s(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U_0, & t > 0. \end{cases}$$

A soros kapcsolás miatt

$$Cu'_c = i_L, \quad (1)$$

a hurokegyenlet pedig

$$Ri_L + u_C + Li'_L - u_s = 0. \quad (2)$$

Innen az állapotegyenlet normálalakja

$$\begin{aligned} u'_C &= \frac{1}{C} i_L \\ i'_L &= -\frac{1}{L} u_C - \frac{R}{L} i_L + \frac{1}{L} u_s \end{aligned} \quad (3)$$

A rendszermátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

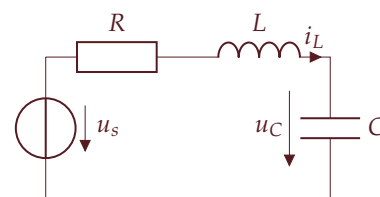
### Az ÁVL megoldása

Az állapotegyenlet megoldását összetevőkre bontással végezzük:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_f(t) + \mathbf{x}_g(t).$$

1. A SZABAD ÖSSZETEVŐ. A szabad megoldás a homogén diff. egyenlet megoldása. Ez

$$\mathbf{x}'_f = \mathbf{A}\mathbf{x}_f,$$



1. ábra: A feszültségforrással gerjesztett soros rezgőkör

aminek a megoldását

$$\mathbf{x}_f = \mathbf{m}e^{\lambda t}$$

alakban keressük, ahol  $\lambda$  a sajátérték,  $\mathbf{m}$  pedig a hozzá tartozó sajátvektor.

A karakterisztikus egyenlet:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

kifejtve

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left( -\frac{R}{L} - \lambda \right) - \frac{1}{C} \left( -\frac{1}{L} \right)$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldása a két sajátérték,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Vezessük be az

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

természetes rezonancia-körfrekvencia és a  $\zeta$  (zeta)

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

ún. *relatív csillapítási tényező* mennyiségeket. Utóbbi elnevezés oka később nyilvánvalóvá válik. Ezekkel a sajátértékek

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2} = \omega_n \left( -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (4)$$

alakban írhatók.

A szabad összetevő a sajátértékekhez tartozó

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} m_{21} \\ m_{22} \end{bmatrix}$$

sajátvektorokkal

$$\mathbf{x}_f(t) \equiv \begin{bmatrix} u_{c,f}(t) \\ i_{L,f}(t) \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + K_2 \begin{bmatrix} m_{21} \\ m_{22} \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

lesz, egyelőre ismeretlen  $K_1$  és  $K_2$  tényezőkkel.

2. A GERJESZTETT ÖSSZETEVŐ. A gerjesztett összetevő az inhomogén differenciaegyenlet egy partikuláris megoldása. Mivel a gerjesztés  $t > 0$ -ra konstans, ezért egy partikuláris megoldás hálózateleméleti megfontolásokkal is megadható, de a próbafüggvények módszere is ugyanazt a megoldást adja.

**Hálózati modell alapján** Nyilvánvaló, hogy a  $t = 0$ -ban bekapcsolt egyenfeszültség a kondenzátort feltölti, így hosszú idő múlva ( $t \rightarrow \infty$ ) a kondenzátor feszültsége  $U_0$ -ra nő, a kondenzátor szakadássá válik. Ezzel nyilvánvalóan a tekercs árama is nullává válik. Ez az állandósult állapotbeli érték a diff. egyenletet ki kell, hogy elégítse, annak egy partikuláris megoldása.

$$\mathbf{x}_g(t) \equiv \begin{bmatrix} u_{c,g}(t) \\ i_{L,g}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**A próbafüggvények módszerével:** Ha a gerjesztés konstans, akkor mindkét állapotváltozót konstans alakban kell keresnünk:

$$\mathbf{x}_g(t) \equiv \begin{bmatrix} u_{c,g}(t) \\ i_{L,g}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_c \\ I_L \end{bmatrix}.$$

A gerjesztett összetevő is kielégíti az inhomogén differenciálegyenletet. A konstans deriváltja nulla, ezért

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_c \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} U_0,$$

ami a két ismeretlen mennyiségre két független egyenletet jelent. Az egyenletrendszer megoldásaként az előző pontban kitalált  $U_c = U_0$ ,  $I_L = 0$  adódik.

3. A KEZDETI FELTÉTELEK ÉRVÉNYESÍTÉSE. Az állapotegyenlet teljes megoldása  $t > 0$ -ra

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_f(t) + \mathbf{x}_g(t),$$

$$\mathbf{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} u_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + K_2 \begin{bmatrix} m_{21} \\ m_{22} \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} + \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel egy sajátvektor konstansszorosa is sajátvektor, rögzítsük a sajátvektorok első koordinátáit egységnyi értékűre:

$$\mathbf{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} u_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ m_{12} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + K_2 \begin{bmatrix} 1 \\ m_{22} \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} + \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Véges gerjesztésről lévén szó, az állapotváltozók a bekapcsolás pillanatában nem ugranak,

$$u_c(+0) = u_c(-0) = 0,$$

$$i_L(+0) = i_L(-0) = 0,$$

ahol egyben figyelembe vettük, hogy bekapcsolási folyamatról van szó, a hálózat  $t < 0$ -ra energiamentes, az állapotváltozók kiindulási értékei zérusok.

Jelen speciális feladatban, ha valóban csak a kondenzátor feszültségét kívánjuk kiszámítani, mellőzhetjük a sajátvektorok kiszámítását, ha figyelembe vesszük, hogy az ÁVL alapján  $i_L = Cu'_c$ , vagyis a kezdeti értékre vonatkozó 2. egyenlet

$$i_L(+0) = Cu'_c(+0) = 0.$$

Emlékeztetőül, (5) első sora azt jelenti, hogy

$$u_c(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + U_0,$$

amiből

$$u'_c(t) = K_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}.$$

A kezdeti feltételek a  $t = +0$ -ban tehát

$$u_c(+0) = 0 = K_1 \cdot 1 + K_2 \cdot 1 + U_0,$$

ill.

$$i_L(+0) = Cu'_c(+0) = 0 = CK_1 \lambda_1 \cdot 1 + CK_2 \lambda_2 \cdot 1.$$

Utóbbi két független egyenletből  $K_1$  és  $K_2$  értéke meghatározható:

$$K_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} U_0,$$

$$K_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} U_0.$$

### *A teljes megoldás*

A fentiek alapján adódik a kondenzátor feszültségének időfüggvénye, ha  $t = 0$ -ban  $U_0$  egyenfeszültségre kapcsoljuk a hálózatot:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ U_0 \left[ 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \right] & t > 0 \end{cases}$$

Az  $A$  mátrix értékeitől, konkrétan a  $\zeta$  csillapítási tényező értékétől függően előfordulhat két valós sajátérték, vagy egy konjugált sajátérték-pár. Vizsgáljuk meg a két esetet!

Ha éppen nulla a diszkrimináns, akkor a két valós sajátérték egyenlő. Ezt az esetet nem vizsgáljuk, határérték-képzéssel kikövetkeztethető a másik két esetből.



*Valós sajátértékek*

Ha a (4) karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa pozitív, akkor két valós sajátértéket kapunk. Ennek feltétele nyilvánvalóan  $\zeta^2 - 1 > 0$ ,  $\zeta^2 > 1$ , vagyis

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Ha tehát a körben kellően nagy az ellenállás a  $\sqrt{\frac{L}{C}}$  mennyiséghez képest, akkor két valós sajátértéket kapunk. Az ellenállás „csillapítja” a körben a rezgést, innen a csillapítási tényező elnevezés.

Példa: legyen  $U_0 = 10 \text{ V}$ ,  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 1 \text{ mH}$ ,  $C = 1/16 \text{ nF}$ . Legyen a koherens egységrendszer [V, mA, k $\Omega$ , mH, nF,  $\mu\text{s}$ , Mrad/s]. Ekkor a karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 10\lambda + 16 = 0,$$

a két sajátérték

$$\lambda_1 = -2\mu\text{s}^{-1}$$

és

$$\lambda_2 = -8\mu\text{s}^{-1}.$$

Mivel valósak a sajátértékek, és mindkettő megjelenik egy-egy exponenciális kifejezés kitevőjében, az elsőrendű hálózatoknál megismert időállandó analógiájára bevezethetők a

$$\tau_1 = -\frac{1}{\lambda_1} = 0,5\mu\text{s}$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{\lambda_2} = 0,125\mu\text{s}$$

időállandók. A kettő közül a  $0,5 \mu\text{s}$  érték dominál, ez fogja meghatározni a feszültség lefolyását.

A kondenzátor feszültségének időfüggvénye  $t > 0$ -ra:

$$u_c(t) = 10 \left[ 1 - \frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-8t} \right].$$

Az időfüggvényt a 2. ábrán ábrázoltuk.

*Komplex konjugált sajátértékek*

Ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa negatív, akkor komplex konjugált sajátértékpárt kapunk. Ennek feltétele a  $\zeta < 1$ ,

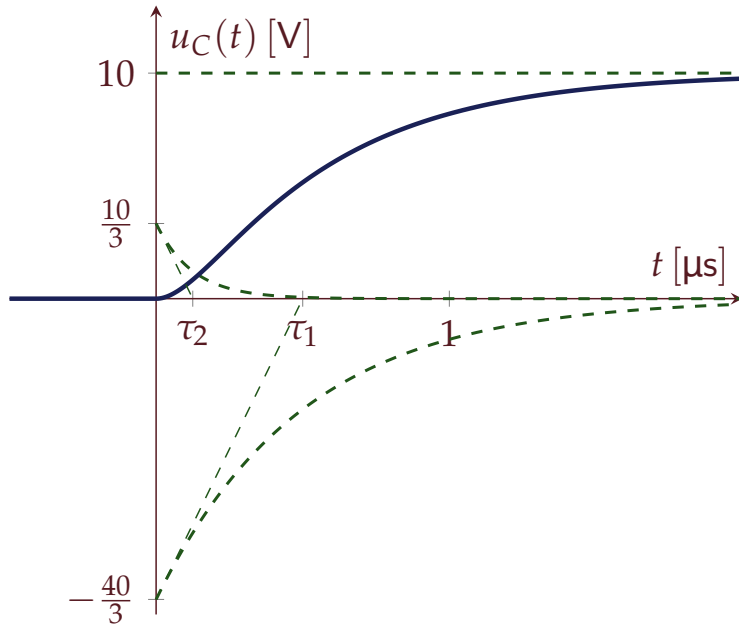
$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Ebben az esetben célszerű a sajátértékeket az alábbi formában kifejezni:

A

$$\sqrt{\frac{L}{C}}$$

mennyiség ellenállás dimenziójú, és gyakran vissza fog térni tanulmányaink során.



2. ábra: Példa: az ugrással gerjesztett soros rezgőkörben a kondenzátor feszültsége valós sajátértékek mellett. A három tagnak a zöld szaggatott vonalak, a kondenzátor feszültségének a kék görbe felel meg. Azt is tudjuk, hogy a  $t = 0$ -ban a görbe érintője vízszintes (deriváltja nulla), mert  $u'_c(+0) = 0$ . Ez valóban jól látható a kék görbén.

$$\lambda_{1,2} = \omega_n \left( -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \equiv -\delta \pm j\omega, \quad (6)$$

ahol bevezettük a

$$\delta = \zeta \omega_n$$

és az

$$\omega = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$$

rövidítéseket. ( $\delta$  a sajátértékek valós részének  $(-1)$ -szerese,  $\omega$  a sajátértékek képzetes része:  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm j\omega$ .)

Ezzel a kondenzátor feszültsége  $t > 0$ -ra

$$u_c(t) = U_0 \left[ 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \right].$$

Az újonnan bevezetett jelölésekkel

$$u_c(t) = U_0 \left[ 1 + \frac{-\delta - j\omega}{2j\omega} e^{(-\delta + j\omega)t} - \frac{-\delta + j\omega}{2j\omega} e^{(-\delta - j\omega)t} \right].$$

A kitevőkből kiemelhető  $e^{-\delta t}$ , amivel

$$u_c(t) = U_0 \left[ 1 + \frac{e^{-\delta t}}{2j} \left( \frac{-\delta - j\omega}{\omega} e^{j\omega t} - \frac{-\delta + j\omega}{\omega} e^{-j\omega t} \right) \right].$$

A belső zárójelben a két tag egymás konjugáltja. Ha egy komplex számból kivonjuk a konjugáltját, akkor

$$(a + jb) - (a - jb) = 2jb,$$

a képzetes rész  $2j$ -szeresét kapjuk. Mivel

$$\Im \left\{ \frac{-\delta - j\omega}{\omega} e^{+j\omega t} \right\} = \Im \left\{ \frac{-\delta - j\omega}{\omega} (\cos \omega t + j \sin \omega t) \right\} \\ = \frac{-\delta}{\omega} \sin \omega t - \cos \omega t,$$

amivel

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ U_0 \left[ 1 - e^{-\delta t} \left( \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t + \cos \omega t \right) \right] & t > 0. \end{cases}$$

A szabad válasz tehát exponenciálisan ( $1/\delta$  időállandóval) lecsengő,  $\omega$  körfrekvenciájú szinuszos rezgés. Az  $\omega$  körfrekvencia a veszteségmentes ( $R = 0$ ) rezgőkör  $\omega_n$  természetes rezonanciafrekvenciájánál valamivel alacsonyabb.

Példa: legyen  $U_0 = 10$  V,  $R = 0,8$  k $\Omega$ ,  $L = 1$  mH,  $C = 1/16$  nF. Legyen a koherens egységrendszer [V, mA, k $\Omega$ , mH, nF,  $\mu$ s, Mrad/s]. Ezzel a rendszermátrix a koherens egységrendszerben

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ -1 & -0,8 \end{bmatrix},$$

és

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 0,8\lambda + 16 = 0,$$

a két sajátérték

$$\lambda_{1,2} = (-0,4 \pm 3,98j)\mu\text{s}^{-1},$$

vagyis  $\delta = 0,4 \mu\text{s}^{-1}$ , aminek a reciprokát ismét tekinthetjük időállandónak, hiszen az exponenciális lecsengést adja meg,

$$\tau = 2,5\mu\text{s}.$$

A sajátérték képzetes részét körfrekvenciának tekintjük,  $\omega = 3,98$  Mrad/s. A rezgőkör természetes rezonanciafrekvenciája  $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 4$  Mrad/s, a csillapított rezgés körfrekvenciája ennél valamivel kisebb. (Minél kisebb a csillapítási tényező, tehát a rezgőkörben levő „terhelő” ellenállás, annál közelebb van  $\omega$  az  $\omega_n$ -hez.)

$t > 0$ -ra

$$u_c(t) = 10 \left[ 1 - e^{-0,4t} \left( \frac{0,4}{3,98} \sin 3,98t + \cos 3,98t \right) \right],$$

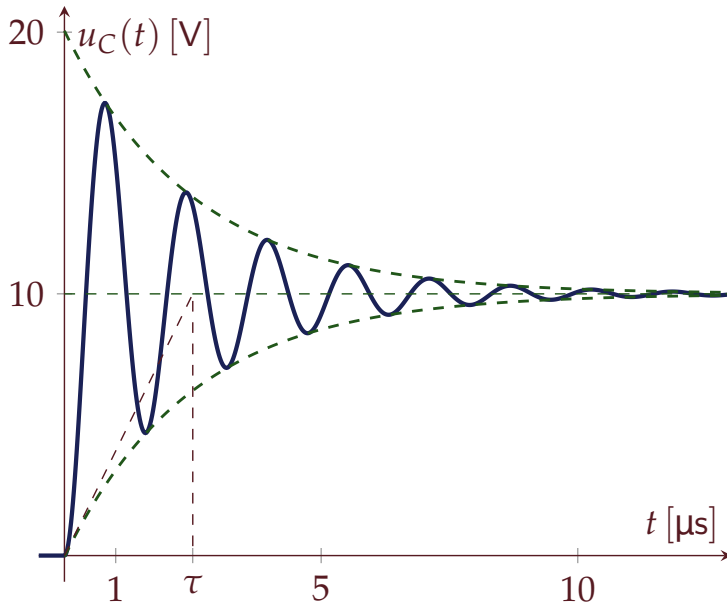
amit egy szinusz- és egy koszinusz összege helyett egyetlen, fázisban eltolt koszinuszos jelként szokás megadni. Kihasználjuk,

Az  $L$  és  $C$  értékek megegyeznek az előző példabeli értékekkel, az  $R$  ellenállás azonban jóval kisebb, a rezgőkör csillapítási tényezője sokkal kisebb (jósági tényezője sokkal nagyobb), mint az előző példában.

hogy  $A \cos \omega t + B \sin \omega t = C \cos(\omega t + \rho)$ , ahol  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$  és  $\rho = -\arctan \frac{B}{A}$ . Ezzel az azonossággal átírva végül

$$u_C(t) = 10 \left[ 1 - 1,005e^{-0,4t} \cos(3,98t - 0,1) \right]. \quad (7)$$

A kondenzátor (7) szerinti feszültségének időfüggvényét a 3. ábrán láthatjuk.



Ezt az azonosságot később könnyen le tudjuk majd vezetni, amikor bevezetjük a fazorokat.

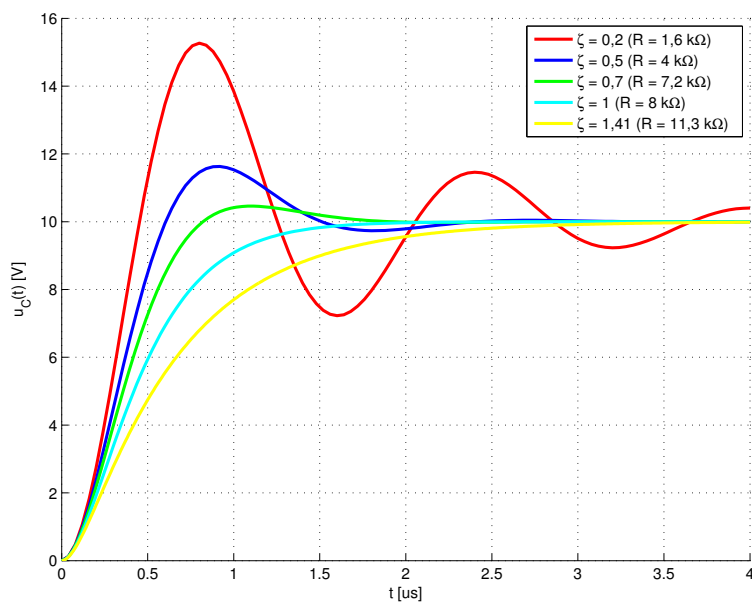
3. ábra: Példa: az ugrással gerjesztett soros rezgőkörben a kondenzátor feszültsége komplex konjugált sajátértékek mellett. A szaggatott vonalak az ún. burkolót mutatják:

$$v(t) = 10 \left[ 1 \pm 1,005e^{-0,4t} \right],$$

amelyek az  $u_C(t)$  minimumát, illetve maximumát jelölik ki, hiszen a koszinuszfüggvény  $\pm 1$  értékek között ingadozik.

A 4. ábrán a  $\zeta$  csillapítási tényező függvényében ábrázoltuk az ugrás gerjesztéshez tartozó kondenzátor-feszültségek időfüggvényét további  $\zeta$  értékekre. Zárójelben az adott csillapítási értékhez tartozó  $R$  ellenállást tüntettük fel. A tekercs és a kondenzátor, valamint a gerjesztő feszültség megegyezik a korábbi példákban látott értékekkel.

Itt is jól látszik, hogy kis csillapítási tényező (kis ellenállás) mellett a szabad válaszban exponenciálisan csillapított szinuszos összetevő van, míg 1-nél nagyobb csillapítási tényezők mellett valós exponenciális, nem rezgő jellegű a szabad válasz.



4. ábra: A kondenzátor feszültsége különböző  $\zeta$  értékekre.  $\zeta > 1$  értékekre két valós sajátértéket, a  $\zeta < 1$  értékek mellett konjugált komplex sajátértékpárt találunk. Az utóbbi miatt a sajátválasz rezgő jellegű. Ez a rezgés azonban csak akkor válik markánsná (pl. a piros görbe), ha  $\zeta$  számottevően kisebb 1-nél. Pl. a  $\zeta = 0,7$  esetén (zöld görbe) még nem indokolt rezgésről beszélni, de minden  $\zeta < 1$  érték mellett fellép a túllendülés jelensége: a jel az állandósult állapot beállta előtt egy vagy több alkalommal átlépi az állandósult értéket. Ennek elsősorban a szabályozástechnikában van jelentősége. A kisebb csillapítási tényezőjű szabályozott rendszer hamarabb eléri az állandósult állapotot, a túllendülés azonban általában nem kívánatos (gondoljunk például egy felvonó vezérlésére).

## 12. A vizsgálójelek módszere

Bilicz-Horváth

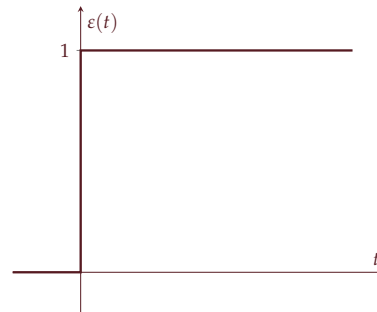
2021. április 28.

A rendszeranalízisben két ún. vizsgálójel, az egységugrás és a Dirac-impulzus kitüntetett szerepet játszik. Bevezetjük a két vizsgálójelre adott választ, az ugrás- és impulzusválaszt, valamint megvizsgáljuk a jelek között fennálló összefüggéseket, továbbá bevezetjük az általánosított derivált műveletét, amellyel szakadáson függvények is deriválhatók.

### Motiváció

Az eddigiekben a lineáris rendszer válaszelét az állapotváltozós leírás megoldásával határoztuk meg. Ez egy két lépéses folyamat: a megoldás során először az állapotváltozók időfüggvényét kell kifejeznünk az összetevőkre bontás módszerével, majd az állapotváltozók időfüggvényét a válaszra vonatkozó egyenletbe kell helyettesítenünk. Az állapotváltozók kifejezése egy differenciálegyenlet-rendszer megoldását igényli, ami jó betekintést ad a rendszer belső „működésébe”, számítástechnikailag egy hosszadalmas művelet.

A VIZSGÁLÓJELEK bevezetésével egy olyan leírasmódot keresünk, amely a rendszer  $u(t)$  gerjesztése és az  $y(t)$  válasza között egy közvetlen, explicit kapcsolatot ad. Ahogy az elnevezés is sugallja, a vizsgálójelek módszerének alkalmazásához ismernünk kell a rendszer válaszelét egy vagy több nevezetes gerjesztő jelre. Lineáris, invariáns rendszer tetszőleges gerjesztésre adott válaszáat ezen vizsgálójelekre adott válasz ismeretében egyszerűen meg lehet határozni. A két legfontosabb vizsgálójel az egységugrás és az ún. Dirac-delta. A rendszernek a Dirac-delta gerjesztésre adott válasza, az impulzusválasz az egyik legfontosabb ún. rendszerjellemező függvény.



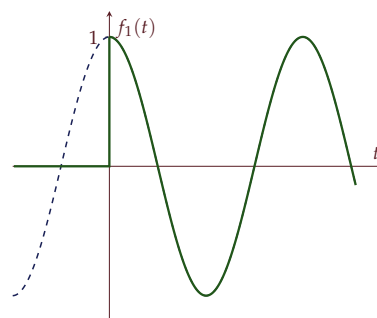
1. ábra: Az egységugrás

### Az egységugrás

Az egyik kitüntetett vizsgálójel az *egységugrás* (Heaviside-féle ugrásfüggvény), amelynek definíciója (1. ábra):

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

A  $t = 0$  időpillanatban a jel nem értelmezett.



2. ábra: Az  $f_1(t) = \varepsilon(t) \cos(\omega t)$  függvény

Az egységugrást használhatjuk belépő jelek (olyan jelek, amelyek  $t < 0$  időkre azonosan zérus értékűek) kifejezésére. Például az

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \cos \omega t, & t > 0 \end{cases}$$

jel kifejezhető

$$f_1(t) = \varepsilon(t) \cos \omega t$$

alakban (2. ábra).

Gyakran használunk olyan ún. *ablakfüggvényeket*, amelyek egy  $T_1 < t < T_2$  intervallumban vesznek fel nem nulla értéket. Például egy  $F_0$  magasságú négyszögletes ablak (vagy négyszögimpulzus) kifejezése

$$f_2(t) = F_0[\varepsilon(t - T_1) - \varepsilon(t - T_2)]$$

(3. ábra).

### Az ugrásválasz

Egy lineáris, invariáns rendszernek az  $u(t) \equiv \varepsilon(t)$  egységugrás gerjesztésre adott válasza az  $y(t) \equiv g(t)$  ugrásválasz.



Lineáris, invariáns Kirchhoff-típusú hálózatok által reprezentált rendszerek ugrásválasza (legalább közelítőleg) meghatározható.

Ha például a hálózat által reprezentált rendszer gerjesztése egy feszültségforrás  $u_s(t)$  feszültsége, a válasz pedig a kondenzátor  $u_C(t)$  feszültsége (5. ábra), akkor a rendszerre  $t = 0$ -ban  $U_0$  feszültségű egyenfeszültséget kapcsolva

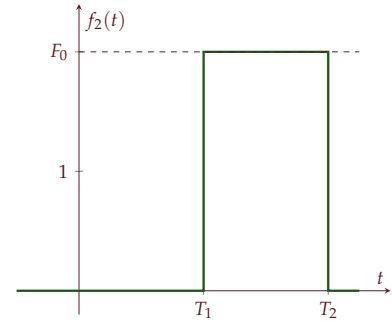
$$u_s(t) = \varepsilon(t)U_0,$$

a kondenzátor feszültsége pedig

$$u_C(t) = \varepsilon(t)U_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad \tau = RC,$$

ahol az  $\varepsilon(t)$  faktorról tömören ki tudjuk fejezni, hogy  $t < 0$ -ra a válasz azonosan nulla (bekapcsolási folyamat). Ebből a rendszer linearitása miatt az ugrásválasz

$$g(t) = \frac{1}{U_0} u_C(t) = \varepsilon(t) \left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$



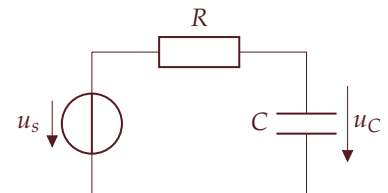
3. ábra: Az

$$f_2(t) = F_0[\varepsilon(t - T_1) - \varepsilon(t - T_2)]$$

függvény

Az ugrásválaszt (angolul *step response*) a rendszer *átmeneti függvényének* is szokás nevezni.

4. ábra: Lineáris, invariáns rendszer ugrásválaszának értelmezése



5. ábra: A kondenzátor kimenetű RC-tag ugrásválaszának méréséhez. A gyakorlatban egy feszültségforrás, pl. egy jelgenerátor, csak véges meredekségű (nem nulla felfutási idejű) ugrást képes produkálni. Amíg a felfutási idő sokkal kisebb, mint a rendszer időállandója (jelen esetben  $\tau = RC$ ), addig a mért válasz jól közelíti az elvi ugrásválaszt.

ami dimenzió nélküli mennyiség, hiszen két feszültség hányadosaként kaptuk. A gerjesztés, ill. a válasz dimenziójától függően az ugrásválasz lehetséges dimenzióit a következő táblázat foglalja össze:

válasz \ gerjesztés	feszültség	áram
	1	ellenállás
feszültség		
áram	vezetés	1

### Az ugrásválasz számítása

A  $g(t)$  ugrásválasz az állapotváltozós leírásból számítható, ha azt  $u(t) \equiv \varepsilon(t)$  gerjesztésre oldjuk meg. A kezdeti értékek, bekapcsolási folyamatról lévén szó,  $x(+0) = \mathbf{0}$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}^T \mathbf{x} + Du \\ u(t) &= \varepsilon(t) \\ \mathbf{x}(+0) &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\}$$

Az összetevőkre bontás során, mivel  $u(t) = 1$ , ha  $t > 0$ , a gerjesztett összetevőt konstans alakban kell keresnünk:

$$\mathbf{x}_g(t) = \mathbf{X}_0 \text{ (állandó).}$$

A feladat megoldására korábban számos példát láttunk.

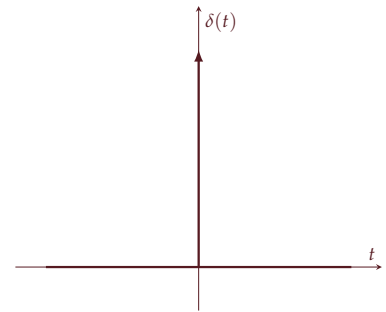
### A Dirac-impulzus

Az egyik legfontosabb vizsgálójel a  $\delta(t)$  Dirac-impulzus (Dirac-delta), amelynek definícióját az alábbi két tulajdonság adja meg:

$$\boxed{\begin{aligned} \delta(t) &= 0, \text{ ha } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1 \end{aligned}} \quad (1)$$

A Dirac-impulzust a 6. ábrán látható nyíllal jelöljük. A Dirac-impulzus matematikai értelemben nem függvény, hanem egy *általánosított függvény* (disztribúció). A Dirac-impulzus értelmezéséből következik, hogy egy tetszőleges  $f(t)$  folytonos függvényre és tetszőleges valós  $t_0$  időpillanatra érvényes, hogy

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0), \quad (2)$$



6. ábra: A Dirac-impulzus



hiszen  $\delta(t - t_0)$  csak a  $t = t_0$ -ban vesz fel nullától különböző értéket.

Ezzel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt,$$

vagyis

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0). \quad (3)$$

### A Dirac-impulzus származtatása

A Dirac-impulzus többféle módon is származtatható. A műszaki gyakorlatban egy „nagyon” rövid impulzus modellezésére használjuk, ezért kézenfekvő, hogy az impulzusból való származtatást tárgyaljuk. Jelölje  $\delta(t, \tau)$  a  $\tau$  szélességű,  $\frac{1}{\tau}$  magasságú négyzetimpulzust (7. ábra):

$$\delta(t, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}, & 0 < t < \tau \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A jelet egységugrások segítségével is leírhatjuk:

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{\tau}[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau)].$$

Az impulzus területe (intenzitása) nyilvánvalóan egységyi:

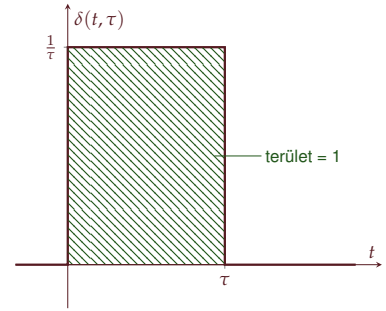
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, \tau)dt = 1.$$

A  $\delta(t, \tau)$  impulzus a  $\tau$  impulzusszélességet minden határon túl csökkentve a Dirac-impulzusba megy át (8. ábra). A Dirac-impulzusra tehát egy „végtelenül” keskeny, egységyi intenzitású impulzusként gondolhatunk. Az  $5\delta(t)$  impulzus intenzitása pedig 5, amit a nyíl mellé írt számmal jelölünk.

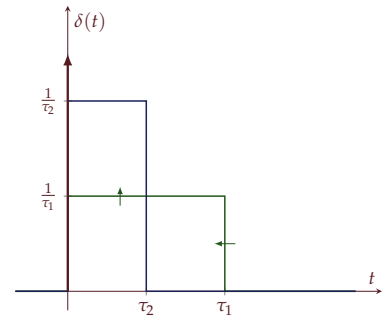
### Az impulzusválasz

A lineáris, invariáns rendszernek az  $u(t) \equiv \delta(t)$  Dirac-impulzus gerjesztére adott  $y(t) \equiv h(t)$  válaszjelét *impulzusválasznak* nevezzük. Egy Kirchhoff-típusú rendszer impulzusválasza közelítőleg mérhető vagy szimulálható, ha a rendszert egy rövid impulzussal gerjesztjük. A 5. ábra RC-tagja esetén a gerjesztés feszültség. Legyen ez egy  $U_0$  amplitúdójú,  $T_0$  szélességű négyzetimpulzus, ahol  $T_0$  elhanyagolható a rendszer időállandójához,  $\tau = RC$ -hez képest:

$$u_s(t) = U_0[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T_0)] = U_0 T_0 \delta(t, T_0).$$



7. ábra: A  $\delta(t, \tau)$  egységyi intenzitású ablakfüggvény



8. ábra: A  $\delta(t, \tau)$  egységyi intenzitású ablakfüggvény  $\tau \rightarrow 0$  határértékben Dirac-impulzusba megy át

Az impulzusválasz (angolul *impulse response*) mellett a *súlyfüggvény* elnevezés is használatos, amelynek az értelmét a válasz számításánál fogjuk látni.



9. ábra: Lineáris, invariáns rendszer impulzusválaszának értelmezése

A rendszer linearitásából következik, hogy az impulzusválasz a rendszer  $u_C(t)$  válaszjeléből

$$h(t) \approx \frac{1}{U_0 T_0} u_C(t)$$

formában számítható. Ebben az esetben az impulzusválasz nyilvánvalóan reciprok idődimenziójú.

#### Az impulzusválasz közvetlen számítása

Az impulzusválasz szintén meghatározható az állapotváltozós leírás megoldásával. A gerjesztés  $u(t) = \delta(t)$ , és tudjuk, hogy a *kiindulási* állapot zérus, mert bekapcsolási folyamatról van szó, a rendszer  $t < 0$ -ra energiamentes. Összefoglalva a megoldandó problémát,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}^T \mathbf{x} + Du \\ u(t) = \varepsilon(t) \\ \mathbf{x}(-0) = \mathbf{0} \\ y(t) = h(t) = ? \end{array} \right\}$$

A JR2 tárgyban közvetlen módszereket is megismerünk majd, amelyek lehetővé teszik, hogy pl. a hálózati leírásból, az állapotváltozós leírás kikerülésével számoljunk impulzus- és ugrásválaszt.

Láttuk, hogy korlátos gerjesztés mellett az állapotváltozók folytonosak (nem ugranak). A Dirac-impulzus azonban nem korlátos a  $t = 0$ -ban, ezért meg kell vizsgálnunk, hogy mi az összefüggés az állapotváltozók kiindulási és kezdeti értéke között. Az állapotváltozók ugrása a  $t = 0$ -ban

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(+0) - \mathbf{x}(-0) = \int_{-0}^{+0} \mathbf{x}' dt = \int_{-0}^{+0} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u) dt.$$

Mivel  $\mathbf{x}(t)$  állapotváltozó (energiával kapcsolatos mennyiségek, pl. kondenzátor feszültsége vagy tekercs árama szerepel benne),  $\mathbf{x}(t)$  maga biztosan korlátos. Az integrandus első tagja tehát korlátos. Ha  $u(t)$  is korlátos az integrandus második tagjában, akkor az integrál értéke nulla, az állapotváltozók nem ugranak. Az  $u(t) = \delta(t)$  gerjesztés azonban nem korlátos a  $t = 0$ -ban. Az integrál értéke

$$\Delta \mathbf{x} = \int_{-0}^{+0} \mathbf{B}\delta(t) dt = \mathbf{B} \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = \mathbf{B}.$$

Ebből a kezdeti értékekre a

$$\mathbf{x}(+0) = \mathbf{x}(-0) + \mathbf{B} = \mathbf{B}$$

összefüggés adódik. Dirac-impulzus gerjesztés mellett tehát az állapotváltozók ugranak, az ugrás mértéke megegyezik az ÁVL  $\mathbf{B}$  vektorával.

Az ÖSSZETEVŐKRE bontás során az

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_f(t) + \mathbf{x}_g(t)$$

alakban keressük a megoldást. Azonban a Dirac-impulzus csak  $t = 0$ -ban vesz fel nem nulla értéket,  $t > 0$ -ra  $u(t) \equiv 0$  (a rendszer gerjesztetlen, magára hagyott), ezért *nincs gerjesztett összetevő*,

$$\mathbf{x}_g(t) \equiv \mathbf{0}.$$

Az állapotváltozók időfüggvényében csak a szabad összetevő jelenik meg. Arra az esetre szorítkozunk, amelyben az  $\mathbf{A}$  rendszermátrixnak egyszeres sajátértékei vannak ( $\lambda_p \neq \lambda_q$ ,  $p \neq q$ ):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_f(t) = \sum_{p=1}^N K_p \mathbf{m}_p e^{\lambda_p t}.$$

Az ismeretlen  $K_p$  állandókat a kezdeti feltételeket  $t = +0$ -ban érvényesítve kapjuk: az

$$\mathbf{x}(+0) = \sum_{p=1}^N K_p \mathbf{m}_p = \mathbf{B}$$

egyenletrendszer megoldásával kell a  $K_p$  értékeket kifejezni. Végezetül az állapotváltozókat a válaszegyenletbe helyettesítve az impulzusválasz formulájára

$$h(t) = \mathbf{C}^T \mathbf{x} + Du = \sum_{p=1}^N K_p \mathbf{C}^T \mathbf{m}_p e^{\lambda_p t} + D\delta(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

vagy egységugrással kifejezve

$$h(t) = \varepsilon(t) \sum_{p=1}^N K_p \mathbf{C}^T \mathbf{m}_p e^{\lambda_p t} + D\delta(t) \quad (5)$$

alakú összefüggést kapunk. Tudjuk, hogy lineáris, invariáns és kauzális rendszernek van állapotváltozós leírása. Egy ilyen rendszer impulzusválasza a (5) alapján belépő jel: belépő exponenciális tagokat, és a  $t = 0$ -ban Dirac-összetevőt tartalmazhat.

Később látni fogjuk, hogy nem kauzális, de lineáris és invariáns rendszereknek is van impulzusválasza, de annak nem kell belépőnek lennie.

### Kapcsolat a vizsgálójelek között

A Dirac-impulzust definiáló két tulajdonság ( $\delta(t) = 0, t \neq 0$  és  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$ ) alapján vizsgáljuk az alábbi integrált:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} = \varepsilon(t),$$

mert az integrandusban csak  $\tau = 0$ -nál szerepel nem nulla érték, ami  $t > 0$  felső határ mellett lép fel. Az egységugrás tehát a Dirac-impulzus integrálja:

$$\boxed{\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau.} \quad (6)$$

Az (6) egyenlet megfordítása adja a két vizsgálójel közötti másik összefüggést:

$$\boxed{\delta(t) = \varepsilon'(t),} \quad (7)$$

ami egy ún. *általánosított derivált* kapcsolatot takar, ugyanis érvényes a  $t = 0$ -beli szakadási helyen is, ahol a közönséges derivált nem értelmezett.

### Az általánosított derivált

Az általánosított derivált értelmezését szakadásos függvényekre egy példán keresztül mutatjuk be. Vizsgáljuk az alábbi jelet:

$$f(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)] \sin \frac{\pi t}{2T},$$

ami egy szinuszel negyed periódusa. A jel deriváltja a szorzat deriválási tétele alapján ( $(uv)' = uv' + u'v$ )

$$f'(t) = \underbrace{[\varepsilon'(t) - \varepsilon'(t - T)]}_{\delta(t) - \delta(t - T)} \sin \frac{\pi t}{2T} + [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)] \cdot \frac{\pi}{2T} \cos \frac{\pi t}{2T}$$

Az első zárójelet felbontva a (2) tulajdonság alapján

$$\delta(t) \sin \frac{\pi t}{2T} = 0$$

és

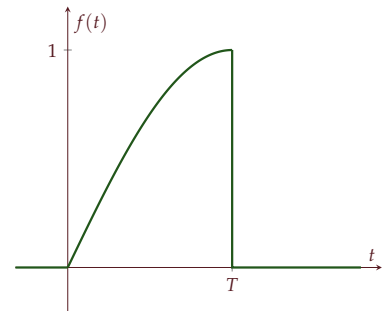
$$\delta(t - T) \sin \frac{\pi t}{2T} = \delta(t - T) \sin \frac{\pi T}{2T} = 1 \cdot \delta(t - T),$$

az általánosított derivált pedig

$$f'(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)] \cdot \frac{\pi}{2T} \cos \frac{\pi t}{2T} - 1 \cdot \delta(t - T).$$

A  $\tau$  változót értelemsszerűen nem időállandóként, hanem integrálási változóként használjuk, a  $t$  változó „helyén”.

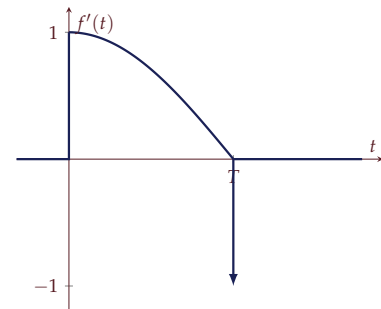
A  $\delta(t) = \varepsilon'(t)$  összefüggést úgy értelmezhetjük, hogy az egységugrás a  $t = 0$  időpillanaton kívül konstans, aminek nulla a deriváltja. A  $t = 0$ -ban, a szakadási helyen a változás sebessége végtelen nagy.



10. ábra: Az

$$f(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)] \sin \frac{\pi t}{2T}$$

jel



11. ábra: Az  $f(t)$  jel általánosított deriváltja

Az általánosított derivált a függvény szakadási helyein annyi Dirac-összetevőt tartalmaz, amekkora a jel ugrása a szakadási helyen. A  $T$  helyen levő szakadás esetén az általánosított deriváltban szerepel egy

$$[f(T+0) - f(T-0)] \cdot \delta(t - T)$$

tag. A tárgyban gyakran találkozunk olyan jelekkel, amelyek a  $t = 0$ -ban lépnek be, és a  $t > 0$ -ra egy  $v(t)$  folytonos függvénnyel jellemezhetők, azaz

$$f(t) = \varepsilon(t)v(t)$$

alakúak. Az  $f(t)$  ugrása  $t = 0$ -ban  $\Delta f = f(+0) - f(-0) = v(+0)$ . Az általánosított derivált ebben az esetben

$$\boxed{f'(t) = \varepsilon(t)v'(t) + \delta(t)v(+0)} \quad (8)$$

alakú: a  $t = 0$ -ban annyi Dirac-összetevőt tartalmaz, amekkora  $f(t)$  ugrása a  $t = 0$ -ban, de  $t > 0$ -ra  $v(t)$  deriváltját a hagyományos értelemben számolhatjuk.

### Az impulzus- és az ugrásválasz kapcsolata

A vizsgálójelekre adott válaszok közötti kapcsolatot egyszerű gondolatmenettel megsejthetjük. Legyen a lineáris, invariáns rendszer explicit gerjesztés-válasz kapcsolatát leíró operátor  $\mathcal{Y}$ :

$$y(t) = \mathcal{Y}\{u(t)\},$$

amit a vizsgálójelekre gerjesztésre alkalmazva

$$g(t) = \mathcal{Y}\{\varepsilon(t)\}; \quad \text{és} \quad h(t) = \mathcal{Y}\{\delta(t)\}.$$

Kihasználva a rendszer linearitását és invariáns tulajdonságát, az időben eltolt és skálázott egységugrásra adott válasz az ugrásválasz eltolt és skálázott megfelelője lesz:

$$\mathcal{Y}\left\{\frac{1}{T_0}[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T_0)]\right\} = \underbrace{\frac{1}{T_0}[g(t) - g(t - T_0)]}_{\approx g'(t)}.$$

A megadott gerjesztés a  $T_0 \rightarrow 0$  határátmenetben Dirac-impulzusba megy át,

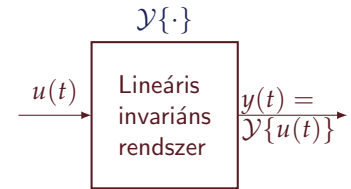
$$\mathcal{Y}\{\delta(t)\} = g'(t),$$

vagyis

$$h(t) = g'(t)$$

kapcsolatot ad: az impulzusválasz az ugrásválasz általánosított deriváltja. Formálisan

$$g(t) = \mathcal{Y}\{\varepsilon(t)\} = \mathcal{Y}\left\{\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau\right\}$$



12. ábra: Lineáris, invariáns rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatát leíró operátor

Az integrálás és az operátor felcserélhetőek, ezért

$$g(t) = \int_{-\infty}^t \underbrace{\mathcal{Y}\{\delta(\tau)\}}_{h(\tau)} d\tau,$$

a két válaszjel között az

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau, \quad h(t) = g'(t)$$

összefüggések teremtenek kapcsolatot. Az impulzusválasz közvetetten kiszámítható úgy, hogy az ÁVL-ből kiszámítjuk az ugrásválaszt, majd annak (általánosított) deriválásával nyerjük az impulzusválaszt. A számítást a 13. ábrán illusztráljuk: az RC-tagot reprezentáló rendszer válaszele legyen most a körben folyó  $i$  áram!

Az  $i$  áramra vonatkozó ugrásválaszt az elsőrendű hálózatokra vonatkozó összefüggés alapján könnyen felírhatjuk. A gerjesztés  $u_s(t) = \varepsilon(t)$ , vagyis  $u(t) = 1, t > 0$ . Az áram kezdeti értéke, mivel a kondenzátor a  $t = +0$ -ban rövidzár,

$$i(+0) = \frac{1}{R},$$

a végértéke pedig 0, hiszen a kondenzátor szakadássá válik. Az ugrásválasz

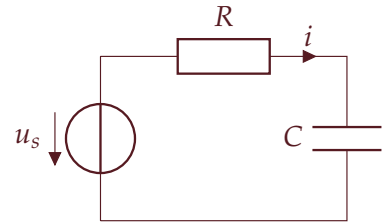
$$g(t) = \varepsilon(t) \frac{1}{R} e^{-t/\tau}, \quad \tau = RC.$$

Az ugrásválasz  $g(t) = \nu(t)\varepsilon(t)$  alakú, ezért az általánosított derivált (8) értelmében

$$h(t) = g'(t) = \nu'(t)\varepsilon(t) + \nu(+0)\delta(t) = \left(-\frac{1}{R\tau}e^{-t/\tau}\right)\varepsilon(t) + \frac{1}{R}\delta(t),$$

az időállandót behelyettesítve

$$h(t) = -\frac{1}{R^2C}e^{-t/\tau} \cdot \varepsilon(t) + \frac{1}{R}\delta(t), \quad \tau = RC.$$



13. ábra: Példa az impulzusválasz indirekt meghatározására

### 13. Az impulzusválasz alkalmazása

Bilicz-Horváth

2021. május 4.

#### A konvolúció

A lineáris, invariáns rendszer  $h(t)$  impulzusválasza a  $\delta(t)$  Dirac-impulzusra, mint vizsgálójelre adott válasz. Először intuitívan, majd formálisan is levezetjük, hogy a rendszer válasza tetszőleges gerjesztésre meghatározható az impulzusválasz ismeretében a *konvolúció* műveletével.

Tetszőleges  $u(t)$  gerjesztéshez tartozó válasz meghatározásához közelítsük az  $u(t)$  függvényt rövid,  $\Delta\tau$  hosszúságú konstans szakaszból álló függvénnyel. Emlékezzünk a  $\delta(t, \Delta\tau)$  egységnyi intenzitású ablakfüggvény definíciójára (1. ábra):

$$\delta(t, \Delta\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta\tau}, & 0 < t < \Delta\tau \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ilyen impulzusok időben eltoltt és skálázott verzióit használjuk  $u(t)$  közelítő előállítására (2. ábra):

$$u(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta\tau, \Delta\tau) u(k\Delta\tau) \Delta\tau.$$

Jelölje a rendszer  $\delta(t, \Delta\tau)$  jelre adott válaszát  $h(t, \Delta\tau)$ :

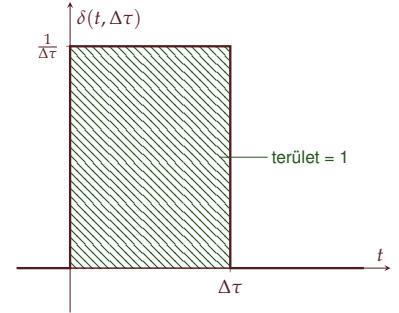
$$h(t, \Delta\tau) = \mathcal{Y}\{\delta(t, \Delta\tau)\}.$$

Kihasználva a rendszer lineáris és invariáns tulajdonságát, az eltoltt és skálázott impulzusokra adott válaszok szuperponálhatók:

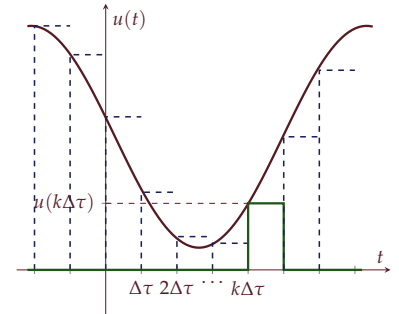
$$y(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - k\Delta\tau, \Delta\tau) u(k\Delta\tau) \Delta\tau,$$

aminek az alakja olyan, mint egy integrálközelítő összeg (téglányösszeg). Ha a  $\Delta\tau$  értékét minden határon túl csökkentjük, akkor a  $k\Delta\tau$  diszkrét lépések egy, az időtengely mentén folytonosan változó  $\tau$  mennyiségbe mennek át. A  $\delta(t, \Delta\tau)$  ablakfüggvény Dirac-impulzushoz, a rendszer  $h(t, \Delta\tau)$  válasza a  $h(t)$  impulzusválaszhoz tart:

$$k\Delta\tau \rightarrow \tau, \quad \Delta\tau \rightarrow d\tau, \quad \delta(t, \Delta\tau) \rightarrow \delta(t), \quad h(t, \Delta\tau) \rightarrow h(t).$$

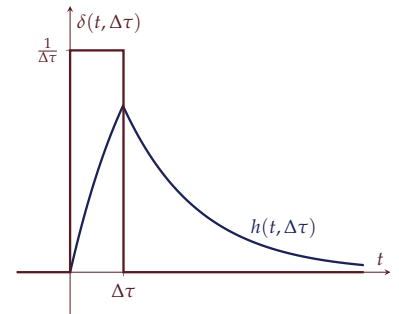


1. ábra: Az  $\delta(t, \Delta\tau)$  egységnyi intenzitású négyzögimpulzus



2. ábra: Az  $u(t)$  gerjesztés szakaszonkénti közelítése eltoltt és skálázott  $\delta(t, \Delta\tau)$  négyzögimpulzusok összegeként. A zölddel kiemelt impulzus a  $k\Delta\tau$  időpillanatban belépő

$\delta(t - k\Delta\tau, \Delta\tau) u(k\Delta\tau) \Delta\tau$   
impulzus.



3. ábra: A  $\delta(t, \Delta\tau)$  négyzögimpulzusra adott  $h(t, \Delta\tau)$  válasz (példa)

Így az integrálközelítő összeg az alábbi integrálba megy át:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \equiv h(t) * u(t) \quad (1)$$

A (1) művelet neve *konvolúció*, és a továbbiakban a  $*$  operátorral jelöljük. Az összefüggés formálisan is belátható. Jelölje a lineáris, invariáns rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatát  $\mathcal{Y}$ :

$$y(t) = \mathcal{Y}\{u(t)\}.$$

Egy tetszőleges, folytonos  $u(t)$  jele igaz, hogy

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad (2)$$

ugyanis (2) egyenletben az integrandus csak ott vesz fel nem nulla értéket, ahol a Dirac-impulzus argumentuma zérus, azaz a  $\tau = t$ -ben. Ennek megfelelően az integrálási határokat is módosíthatjuk, és

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{t-0}^{t+0} \delta(t-\tau)u(\tau)d\tau = u(t) \int_{t-0}^{t+0} \delta(t-\tau)d\tau = u(t),$$

ahol az utolsó két lépésben kihasználtuk a Dirac-impulzus két, korábban megismert tulajdonságát, amit a széljegyzetben megismételtünk. Az összefüggést kihasználva a válasz írhatjuk

$$y(t) = \mathcal{Y} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)u(\tau)d\tau \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathcal{Y}\{\delta(t-\tau)u(\tau)\}}_{h(t-\tau)u(\tau)} d\tau$$

alakban, amelyben a lineáris operátort az integrálással felcserélve a konvolúció műveletét kapjuk. A konvolúció szemléletes értelmezését a 4-6. ábrákon láthatjuk.

#### A konvolúció tulajdonságai

A konvolúció *kommuntatív*, az

$$x = t - \tau, \quad dx = -d\tau$$

változócserevel ugyanis

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{\infty}^{-\infty} h(x)u(t-x)(-dx) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)u(t-x)dx$$

vagyis

$$y(t) = h(t) * u(t) \equiv u(t) * h(t),$$

az operandusok szerepe felcserélhető. A két alak közül szabadon kiválaszthatjuk a kevésbé számolásigényeset.

Emlékezzünk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1,$$

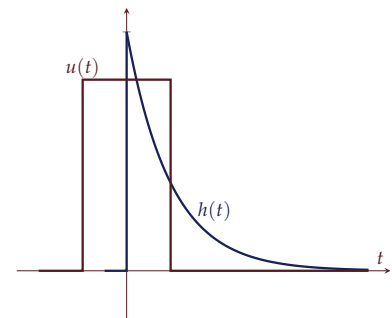
továbbá, a jelölésekkel visszaélve,  $\tau$  változót folytonos időváltozónak,  $t$ -t pedig egy konkrét időpillanatnak tekintve

$$u(\tau)\delta(t-\tau) = u(t)\delta(t-\tau)$$

A (2) összefüggés  $u(t)$  és  $\delta(t)$  konvolúciója:

$$u(t) = u(t) * \delta(t),$$

tetszőleges folytonos jelet Dirac-impulzussal konvolválva önmagát kapjuk vissza.



4. ábra: A konvolúció szemléltetésére használt  $h(t)$  és  $u(t)$  jelek



BELÉPŐ JELEK esetén az integrálási határok szűkíthetők. Ha a gerjesztés belépő ( $u(t) \equiv 0$ , ha  $t < 0$ ):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{-0}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad \Leftarrow u(t) \equiv 0, t < 0.$$

Az integrálás alsó határa  $-0$ , hogy a gerjesztésben esetleg szereplő  $\delta(t)$  összetevőt is figyelembe vegye. Ha a szóban forgó rendszer *kauzális*, akkor az impulzusválasza *belépő*. Az állítás kézenfekvő, mert kauzális rendszer válasza nem előzheti meg a gerjesztést, azonban később be is látjuk majd azt. Kauzális rendszerre  $h(t) \equiv 0$ , ha  $t < 0$ , és a konvolúció

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t+0} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad \Leftarrow h(t) \equiv 0, t < 0,$$

mert  $\tau > t$  értékekre a  $h(t)$  argumentumában negatív értékek állnak. A  $t+0$  határ az impulzusválaszban levő esetleges  $\delta(t)$  komponens miatt szükséges. Végül, ha a gerjesztés is belépő, és a rendszer is kauzális, akkor

$$y(t) = \int_{-0}^{t+0} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad \Leftarrow h(t) \equiv 0, u(t) \equiv 0, t < 0.$$

*Példák a konvolúció számítására*

Legyenek

$$u(t) = \varepsilon(t)e^{\alpha t}, \quad h(t) = \varepsilon(t)e^{\lambda t}.$$

A  $h(t)$  impulzusválasz egy elsőrendű rendszer jellegzetes impulzusválasza, a gerjesztés pedig szintén belépő exponenciális. A válasz, mivel mindkét jel belépő,

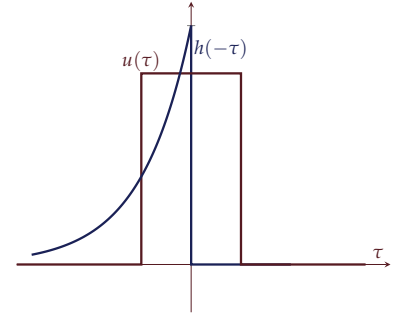
$$y(t) = \int_0^t \varepsilon(t-\tau)e^{\lambda(t-\tau)}\varepsilon(\tau)e^{\alpha\tau}d\tau = \varepsilon(t) \int_0^t e^{\lambda t}e^{(\alpha-\lambda)\tau}d\tau =$$

$$y(t) = \varepsilon(t)e^{\lambda t} \left[ \frac{e^{(\alpha-\lambda)\tau}}{\alpha-\lambda} \right]_0^t = \varepsilon(t) \frac{1}{\alpha-\lambda} (e^{\alpha t} - e^{\lambda t}).$$

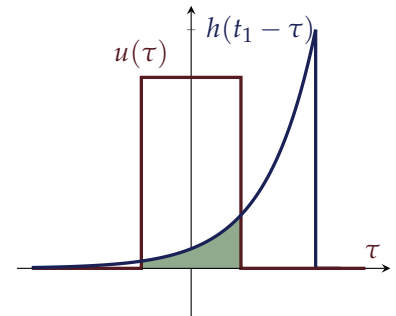
Az  $y(t)$  válasz minden határon túl növekszik  $\lambda > 0$ , illetve  $\alpha > 0$  esetben is.

A KÖVETKEZŐ példában a gerjesztés állandó, az impulzusválasz pedig exponenciális tagot és Dirac-összetevőt tartalmaz, szintén egy elsőrendű rendszert reprezentálva:

$$u(t) = U_0, \quad h(t) = \delta(t) + \varepsilon(t)e^{\lambda t},$$



5. ábra: A konvolúciós integrálban szereplő integrandus értelmezése. Az időtengelyen  $t$  helyett  $\tau$  változót tüntettük fel. A két operandus közül az egyiket (jelen esetben  $h(\tau)$ -t) időben megfordítjuk, ezzel  $h(-\tau)$ -t kapjuk.



6. ábra: A konvolúciós integrált a  $t = t_1$  fix időpillanatban úgy értékeljük ki, hogy az időben megfordított operandust (itt  $h(-\tau)$ -t) a  $t = t_1$ -el a  $\tau$  tengely mentén eltoljuk. A konvolúció eredménye a  $t_1$  időpillanatban a  $\tau$  szerinti integrál, ami a zölddel jelölt terület:

$$y(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - \tau)u(\tau)d\tau$$

A teljes  $y(t)$  függvényt úgy kapjuk, hogy az időben megfordított  $h(\tau)$ -t „végigcsúsztatjuk”  $t = -\infty$  és  $t = \infty$  között, majd minden pozícióban „elvégezzük” az integrálást.

a válasz kifejezésében célszerűen az összetettebb kifejezésben ( $h(t)$ -ben) hagyjuk meg a  $\tau$  argumentumot:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-0}^{\infty} [\delta(\tau) + \varepsilon(\tau)e^{\lambda\tau}] U_0 d\tau = U_0 + U_0 \frac{1}{\lambda},$$

a rendszer tehát nem belépő konstans gerjesztésre konstans válaszjelet produkál.

### Rendszerek stabilitása

Az általunk vizsgált rendszerek stabilitása mind elméleti, mind gyakorlati szempontból lényeges kérdés. Az általunk megvalósítható rendszerek soha sem lineárisak tetszőlegesen nagy értékű gerjesztésre. Ha egy rendszer belső változója vagy válaszjele minden határon túl növekedne, akkor előbb-utóbb elérjük a lineáris működési tartomány határát: az elektronikus áramkörök túlvezérlődnek, telítésbe mennek; a digitális algoritmusoknál túllépjük a számbábrázolás határát, stb. Az instabil rendszer gyakran „rossz” modellje egy fizikai objektumnak, amit el akarunk kerülni.

Léteznek inherensen instabil fizikai objektumok is: egy hegyre állított ceruza, vagy akár egyes vadászgépek egyensúlyi helyzetükből kitérítve nem térnek oda vissza. Ilyen esetekben az lehet a cél, hogy egy másik rendszer, az ún. szabályozó beiktatásával az instabil rendszert stabilizáljuk. Ezzel a területtel a szabályozástechnika foglalkozik.

### A gerjesztés-válasz stabilitás

A lineáris, invariáns rendszer gerjesztés-válasz stabil (GV-stabil), ha **tetszőleges** korlátos gerjesztésre adott válasza korlátos. Képlettel kifejezve

$$\forall u(t) : |u(t)| \leq M < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq L < \infty$$

Ha tudunk találni akár egyetlen olyan korlátos gerjesztést, amelyre a válasz nem korlátos, akkor a rendszer instabil. A stabilitást azonban nehezebb közvetlenül bizonyítani. A GV-stabilitás az impulzusválasz ismeretében könnyen eldönthető: a lineáris, invariáns rendszer akkor és csakis akkor GV-stabil, ha az impulzusválasza abszolút integrálható:

$$\text{Lin. inv. rendszer GV-stabil} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

A kritérium elégséges ( $\Leftarrow$ ) voltának igazolásához fejezzük ki konvolúcióval a válaszjel abszolútértékét:

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)| \underbrace{|u(\tau)|}_{\leq M} d\tau \leq \\ &\leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)| d\tau = M \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt. \end{aligned}$$

Angolul Bounded Input, Bounded Output (BIBO) stability

A GV-stabilitás a rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatára vonatkozik, a rendszer belső változóiról nem hordoz információt.

A kritérium szükséges ( $\Rightarrow$ ) voltát mutassuk meg egy olyan gerjesztő jelre, amit a vizsgált rendszer impulzusválaszának előjelétől teszünk függővé az alábbi módon. Legyen a rendszer gerjesztése

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } h(-t) \geq 0 \\ -1, & \text{ha } h(-t) < 0 \end{cases}$$

ami nyilvánvalóan korlátos jel. A válaszjel értéke a  $t = 0$  időpillanatban konvolúcióval

$$y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau.$$

A választott korlátos gerjesztés mellett csak akkor korlátos a válasz (ill. speciálisan  $y(0)$  akkor véges), ha az impulzusválasz abszolút integrálható.

### Az aszimptotikus stabilitás

A lineáris, invariáns rendszer aszimptotikusan stabil, ha a  $t = 0$  időponttól gerjesztetlen („magára hagyott”) rendszer összes állapotváltozója nullához tart **tetszőleges** kezdeti állapot esetén. Formulával

$$\left. \begin{array}{l} u(t) \equiv 0, t > 0 \\ \forall x(+0) \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

A rendszer aszimptotikus stabilitása eldönthető, ha ismerjük az  $A$  rendszermátrixának  $\lambda_p$  sajátértékeit:

$$\text{Lin. inv. kauzális rsz. asz. stabil} \Leftrightarrow \Re\{\lambda_p\} < 0, \forall p = 1, 2, \dots, N$$

A rendszer akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha a rendszermátrix minden sajátértéke a komplex számsík bal félsíkján helyezkedik el. A kritérium egyszerűen belátható (egyszeres sajátértékek esetén) abból kiindulva, hogy a  $t > 0$ -ra gerjesztetlen rendszer válaszában – gerjesztés híján – nincsen gerjesztett összetevő, csak szabad összetevő, amelynek alakja a korábbiak alapján

$$u(t) \equiv 0, t > 0 \Rightarrow x(t) = x_f(t) = \sum_{p=1}^N K_p m_p e^{\lambda_p t}$$

A kifejezésben található exponenciális tagok aszimptotikus viselkedése a sajátértékek függvényében a következőképpen foglalható össze:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_p t} = \begin{cases} 0, & \Re\{\lambda_p\} < 0 \\ \infty, & \Re\{\lambda_p\} > 0 \\ ?, & \Re\{\lambda_p\} = 0 \end{cases}$$

A tetszőleges kezdeti állapot miatt bármelyik  $K_p$  konstans lehet nem nulla értékű, ezért minden sajátértéknek a bal félsíkra kell esnie.

Ha van egyetlen sajátérték a képzetes tengelyen, akkor a rendszer a *stabilitás határhelyzetében* van.

Ha a rendszermátrix konkrét számértékei ismertek, a sajátértékek kiszámolhatók, a stabilitás egyértelműen eldönthető. Gyakran azonban a rendszermátrix paraméteresen adott, vagy más okból el szeretnénk kerülni a sajátértékek kiszámítását a stabilitásvizsgálat során. Kizárólag a

$$F(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^N + d_1 \lambda^{N-1} + d_2 \lambda^{N-2} + \dots + d_{N-1} \lambda + d_N = 0$$

karakterisztikus egyenlet ismeretében is eldönthető, hogy a karakterisztikus egyenlet minden gyöke a bal félsíkra esik-e. Az ilyen tulajdonságú karakterisztikus polinomot *Hurwitz-polinomnak* nevezzük. Ennek *szükséges feltétele*, hogy a polinom minden együtthatója pozitív legyen:

$$F(\lambda) \text{ Hurwitz-polinom} \Rightarrow d_i > 0, i = 1, 2, \dots, N$$

Ez a feltétel „ránézésre” ellenőrizhető. A feltétel  $N = 1$  és  $N = 2$  esetekben *elegendő* is:

$$N = 2 : F(\lambda) \text{ Hurwitz-polinom} \Leftrightarrow d_1 > 0, d_2 > 0$$

$N = 1$  esetben  $d_1 = \lambda$ , az egyetlen sajátérték.

### *A stabilitásfogalmak kapcsolata*

Kauzális rendszerek esetén az aszimptotikus stabilitásból következik a gerjesztés-válasz stabilitás. Jelölje az  $\mathbf{A}$  rendszermátrix sajátértékeinek halmazát  $\Lambda_A$ :

$$\Lambda_A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}.$$

Láttuk, hogy a rendszer impulzusválaszának általános alakja

$$h(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t) \sum_{p=1}^P c_p e^{\lambda'_p t}.$$

Foglaljuk az exponenciális tagok kitevőiben szereplő  $\lambda'_p$  tényezőket egy

$$\Lambda_h = \{\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_P\}$$

halmazba. Belátható, hogy  $\Lambda_h$  valódi részhalmaza  $\Lambda_A$ -nak:

$$\boxed{\Lambda_h \subseteq \Lambda_A}$$

A legtöbbször a két halmaz megegyezik, azaz az impulzusválaszban szereplő exponenciális tagok száma egyenlő a rendszer rendszámával, és a kitevőkben a sajátértékek jelennek meg:

$$N = P, \lambda_i = \lambda'_i,$$

azonban bizonyos speciális esetekben egyes sajátértékek hatása nem jelenik meg a rendszer válaszjelében. Ezért a gerjesztés-válasz kap-

Ennek feltételeit a JR2 tárgyban fogjuk megismerni.

csolat ismeretében nem lehetünk bizonyosak, hogy a magára hagyott rendszer minden sajátértéke aszimptotikusan eltűnik, így a GV-stabilitásból nem következik az aszimptotikus stabilitás. Ha azonban a rendszer aszimptotikusan stabil, akkor a rendszer sajátválasza korlátos, valamint a korlátos gerjesztéshez tartozó próbafüggvény is korlátos. Ezért

aszimptotikus stabilitás $\Rightarrow$ gerjesztés-válasz stabilitás
---

## 14. Hálózatok szinuszos állandósult állapota

Bilicz-Horváth

2021. május 17.

### A szinuszos állandósult állapot fogalma

Vizsgáljuk meg, hogyan lehet megoldani az állapotváltozós leírás normálalakját belépő szinuszos gerjesztésre! Az  $N$ -edrendű ÁVL normálalakja

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t), \end{aligned}$$

a gerjesztés (1. ábra)

$$u(t) = \varepsilon(t)U \cos \omega t,$$

ahol  $U$  a gerjesztő szinuszjel amplitúdója,  $\omega$  pedig a körfrekvenciája.

Mivel kauzális rendszer belépő gerjesztésre adott válaszát számoljuk (bekapcsolási folyamat), az állapotvektor kezdeti értéke

$$\mathbf{x}(+0) = \mathbf{0}.$$

Az állapotvektor időfüggvényét továbbra is az összetevőkre bontás módszerével keressük, amelyben egyedül a szinuszos gerjesztéshez tartozó próbafüggvény az újdonság a korábbiakhoz képest. A megoldást  $t > 0$  időkre keressük

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_f(t) + \mathbf{x}_g(t)$$

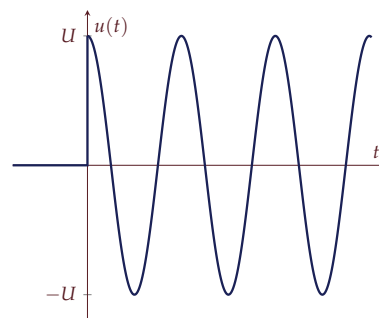
alakban.

1. A SZABAD ÖSSZETEVŐ a homogén DE megoldása, exponenciális függvények összege:

$$\mathbf{x}_f(t) = \sum_{p=1}^N K_p \mathbf{m}_p e^{\lambda_p t},$$

ahol a  $\lambda_p$  és  $\mathbf{m}_p$  értékek rendre az  $\mathbf{A}$  rendszermátrix sajátértékei, ill. sajátvektorai, a  $K_p$  állandók értékét pedig a kezdeti feltételek alapján tudjuk meghatározni.

2. A GERJESZTETT ÖSSZETEVŐT a próbafüggvények módszerével keressük. A gerjesztés  $t > 0$ -ra koszinuszos jel, az ilyen gerjesztéshez tartozó próbafüggvény szintén koszinuszos, méghozzá ugyanazzal a



1. ábra: Az  $u(t) = \varepsilon(t)U \cos \omega t$  belépő koszinuszos gerjesztés

körfrekvenciával, mint a gerjesztés körfrekvenciája, de az amplitúdók és a kezdőfázisok eltérhetnek a gerjesztéstől. A nem nulla kezdőfázisú koszinusz helyett inkább egy tisztán koszinuszos és egy tisztán szinuszos komponens alakjában keressük a választ, ami a számítást valamelyest egyszerűsíti:

$$x_g(t) = X_A \cos \omega t + X_B \sin \omega t,$$

aminek helyességéről az inhomogén állapotegyenletbe helyettesítve meg is győződhetünk, hiszen a gerjesztett megoldásnak is ki kell elégítenie az inhomogén differenciálegyenletet. Eszerint

$$x'_g(t) = Ax_g(t) + Bu(t),$$

azaz

$$-\omega X_A \sin \omega t + \omega X_B \cos \omega t = AX_A \cos \omega t + AX_B \sin \omega t + BU \cos \omega t.$$

Egy konkrét  $\omega$  körfrekvencián valóban egyenlő lehet az egyenlet két oldala egymással. A koszinuszos és a szinuszos tagok együtthatói alapján egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer írható fel:

$$\left. \begin{aligned} -\omega X_A &= AX_B \\ \omega X_B &= AX_A + BU \end{aligned} \right\}$$

Az egyenletrendszer megoldásaiként adódnak  $X_A$  és  $X_B$  vektorok. A teljes megoldás

$$x(t) = \sum_{p=1}^N K_p m_p e^{\lambda_p t} + X_A \cos \omega t + X_B \sin \omega t, \quad t > 0,$$

amit a válaszra vonatkozó egyenletbe helyettesítve a keresett válasz alakja

$$y(t) = C^T x(t) + DU \cos \omega t,$$

$$y(t) = \underbrace{\sum_{p=1}^N a_p e^{\lambda_p t}}_{y_f(t)} + \underbrace{Y_A \cos \omega t + Y_B \sin \omega t}_{y_g(t)}, \quad t > 0$$

amelyben  $y_f(t)$ -t a válasz szabad (tranziens) összetevőjeként,  $y_g(t)$ -t a gerjesztett (állandósult, stacionárius) összetevőjeként azonosíthatjuk. Ha a rendszermátrix minden  $\lambda_p$  sajátértéke a negatív félsíkra esik, azaz a vizsgált rendszer aszimptotikusan stabil, akkor  $t \rightarrow \infty$  mellett a szummában szereplő exponenciális tagok mindegyike lecsengő, a válaszban pedig csak  $\omega$  körfrekvenciájú szinuszos tagok maradnak, azaz a rendszer válaszát a szabad válasz lecsengésével a gerjesztett összetevő határozza meg:

$$y(t) \rightarrow y_g(t) = Y_A \cos \omega t + Y_B \sin \omega t = Y \cos(\omega t + \rho), \quad t \rightarrow \infty.$$

A konkrét  $X_A$ ,  $X_B$  értékek most nem érdekesek, csak a megoldás alakját akarjuk szemléltetni. Figyeljük meg, hogy ezek az értékek az  $U$  gerjesztő amplitúdó mellett  $\omega$  körfrekvencia konkrét értékétől is függenek, azaz a gerjesztett összetevőben szereplő amplitúdók *frekvenciafüggők*.

A tranziens összetevők lecsengését követően beáll a *szinuszos állandósult állapot*, amelyben a válasz egy olyan szinuszos jelhez tart, amelynek körfrekvenciája megegyezik a gerjesztés körfrekvenciájával, amplitúdója és kezdőfázisa azonban eltérhet attól.

### Szinuszos jelek komplex leírása

A továbbiakban a nem belépő szinuszos jelekre adott választ vizsgáljuk. A szinuszos jel általános alakja

$$x(t) = X \cos(\omega t + \rho),$$

ahol (2. ábra)

- $X$  a jel *amplitúdója* vagy *csúcsértéke*, mértékegysége például V vagy A lehet;
- $\omega$  a *körfrekvencia*, egysége a rad/s;
- $\rho$  pedig a *kezdőfázis*, amit fokban vagy radiánban szokás megadni.

A körfrekvencia helyett a gyakorlatban inkább az  $f$  *frekvenciát* használják:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

A szinuszos jel periodikus, azaz

$$x(t) = x(t + T), \forall t.$$

A legkisebb ilyen pozitív  $T$  érték a *periódusidő*, ami idő dimenziójú mennyiség:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

A SZINUSZOS időfüggvény reprezentálható egyetlen skaláris komplex mennyiséggel, a hozzá tartozó *fazorral*. A kettő közötti kapcsolat felírásához tekintsük a komplex számok ekvivalens megadási formáit.

Egy  $\bar{z}$  komplex szám, amelynek valós része  $a$ , képzetes része pedig  $b$ , megadható

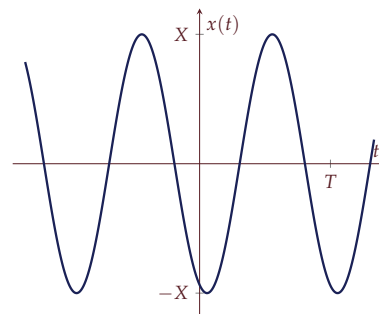
$$\bar{z} = a + jb \equiv re^{j\varphi} = r \cos \varphi + jr \sin \varphi$$

alakban, ahol  $r$  és  $\varphi$  a komplex szám Euler-féle alakját leíró mennyiségek (3. ábra):

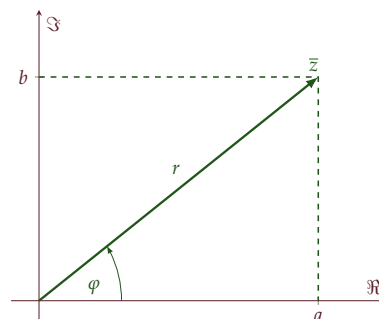
$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

és

$$\varphi = \arctg \frac{b}{a},$$



2. ábra: Az  $x(t) = X \cos(\omega t + \rho)$  koszinuszos jel



3. ábra: A  $\bar{z}$  komplex szám megadása



illetve

$$a = r \cos \varphi \quad b = r \sin \varphi.$$

Visszatérően használni fogjuk az Euler-azonosságokat is:

$$\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}; \quad \sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}.$$

Mivel

$$r \cos \varphi = \Re\{re^{j\varphi}\},$$

az általános szinuszos időfüggvény írható

$$x(t) = X \cos(\omega t + \rho) = \Re\{Xe^{j(\omega t + \rho)}\} = \Re\{Xe^{j\rho}e^{j\omega t}\}$$

alakban. Legyen az

$$\bar{X} = Xe^{j\rho}$$

mennyiség az  $x(t)$  szinuszos időfüggvényhez társítható **fazor** vagy **komplex csúcsérték** (4. ábra), amivel

$$x(t) = \underbrace{X \cos(\omega t + \rho)}_{\text{valós időfüggvény}} = \Re\{\underbrace{\bar{X} \cdot e^{j\omega t}}_{\bar{x}(t)}\},$$

ahol az

$$\bar{x}(t) = \bar{X} \cdot e^{j\omega t}$$

mennyiséget *komplex pillanatértéknek* is szokás nevezni. Speciálisan a koszinuszos jel ( $\rho = 0$ ) fazora tisztán valós,

$$x_c(t) = X \cos \omega t \Leftrightarrow \boxed{\bar{X}_c = X},$$

míg a szinuszos jel ( $\rho = -\frac{\pi}{2}$ ) fazora tisztán képzetes, mert

$$x_s(t) = X \sin \omega t = X \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{\bar{X}_s = Xe^{-j\frac{\pi}{2}} = -jX}.$$

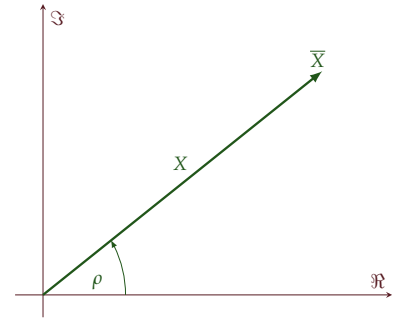
Az időfüggvény és a fazora közötti kapcsolatot az 5. ábra szemlélteti.

### Műveletek fazorokkal

Legyenek  $x(t)$ ,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  és  $v(t)$  szinuszos jelek azonos  $\omega$  körfrekvenciával. Az őket reprezentáló fazorok között három fontos művelet definiálhatunk.

1. Az időfüggvények összege a fazorok összegéként számítható, azaz

$$\boxed{x(t) = x_1(t) + x_2(t) \Leftrightarrow \bar{X} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2} \quad (1)$$



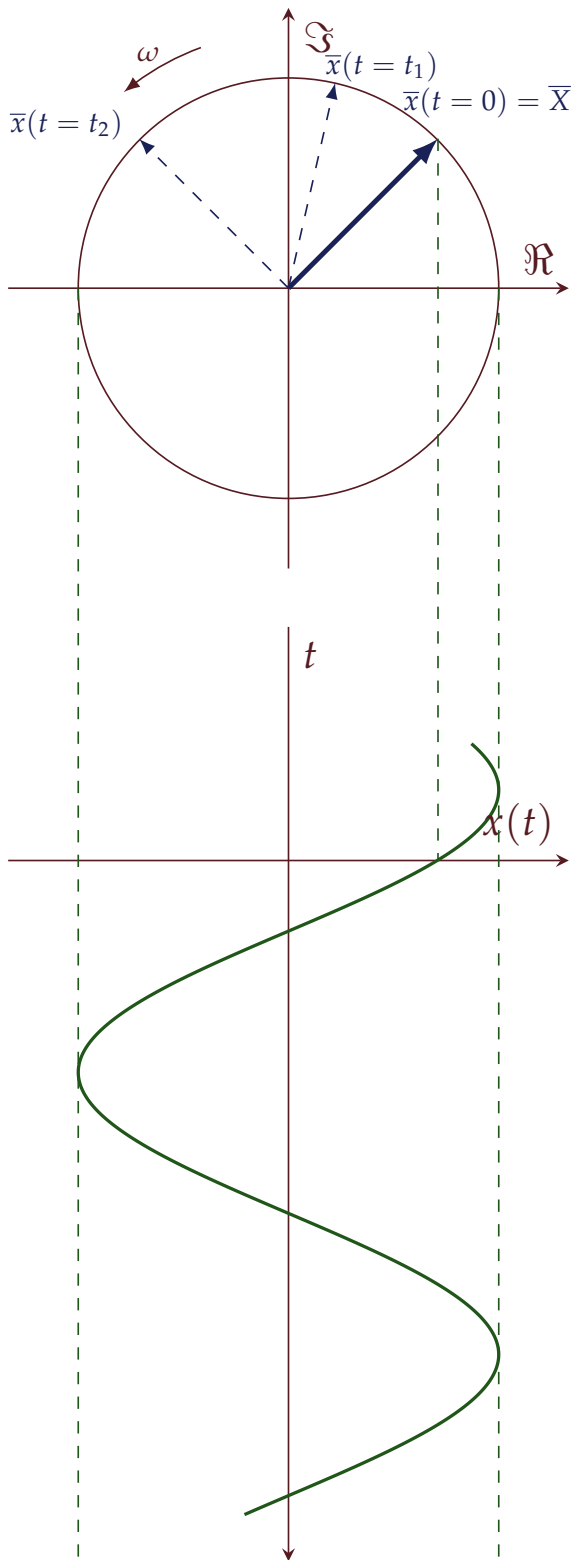
4. ábra: Az  $\bar{X}$  komplex csúcsérték (fazor)

Látni fogjuk, hogy a szinuszos jel fazora minden információt összefoglal, amire szükségünk lesz a számításhoz. A körfrekvencia nem jelenik meg a fazorban; a fazorműveleteket azonos  $\omega$  körfrekvenciájú fazorok között fogjuk értelmezni. A fazor *nem* egyenlő a szinuszos időfüggvénnyel, de a körfrekvencia ismeretében a fazor és az időfüggvény között egyértelmű kapcsolat van.

(1) a komplex pillanatértékekkel kifejezve ugyanis

$$\Re\{\bar{X}_1 e^{j\omega t}\} + \Re\{\bar{X}_2 e^{j\omega t}\} = \Re\{(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) e^{j\omega t}\},$$

aminek minden  $t$  időpillanatra teljesülnie kell. Ez pedig csak akkor teljesülhet, ha nem csak a valós részek, hanem maguk a kifejezések is egyenlők.



5. ábra: Kapcsolat a valós időfüggvény és a fazora között. A felső ábrán az

$$\bar{x}(t) = \bar{X} \cdot e^{j\omega t}$$

komplex értékű függvény, a komplex pillanatérték értelmezése látható. Az  $\bar{X}$  fazort szorzó  $e^{j\omega t}$  komplex szorzófaktor abszolútértéke egységnyi,

$$|e^{j\omega t}| = 1,$$

míg szöge

$$\arg e^{j\omega t} = \omega t,$$

ezért az  $\bar{x}(t)$  egy „forgó vektorként” értelmezhető, ami az origó körül pozitív irányban  $\omega$  szögsebességgel forog körbe. Ennek az  $\omega$  szögsebességgel forgó fazornak a valós tengelyre eső vetülete adja mindent  $t$  időpillanatban a valós időfüggvényt, ahogy az alsó ábrán látható:

$$x(t) = \Re \{ \bar{x}(t) \}.$$

2. A valós skalárral szorzás a fázorok világában is skalárral szorzás:

$$\boxed{v(t) = Kx(t) \Leftrightarrow \bar{V} = K\bar{X}.} \quad (2)$$

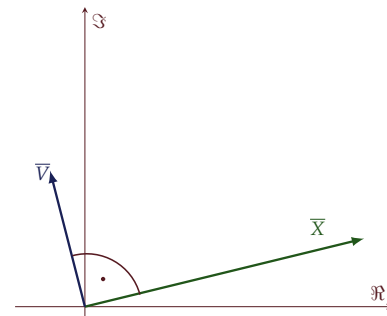
3. Az időfüggvény idő szerinti deriváltja a fázorának  $j\omega$ -val szorzásával fejezhető ki (6. ábra):

$$\boxed{v(t) = x'(t) \Leftrightarrow \bar{V} = j\omega\bar{X},} \quad (3)$$

mert

$$x'(t) = \frac{d}{dt} \Re\{\bar{X}e^{j\omega t}\} = \Re\left\{\frac{d}{dt}(\bar{X}e^{j\omega t})\right\} = \Re\{(j\omega\bar{X})e^{j\omega t}\}.$$

A 3. tulajdonság jelentőségét az adja, hogy a deriválás egy algebrai műveletbe megy át, ezért, ahogy látni fogjuk, a lineáris rendszereket leíró differenciálegyenletek szinuszos állandósult állapotban algebrai egyenletekre egyszerűsödnek.



6. ábra: Derivált jel fazora

PÉLDAKÉPPEN keressük az

$$x_1(t) = 3 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

és az

$$x_2(t) = 5 \cos(\omega t + 1,1)$$

jelek  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  összegjelét (a kezdőfázisokat értelemszerűen radiánban adtuk meg)! A jelekhez tartozó fázorok algebrai alakban

$$\bar{X}_1 = 3e^{-j\frac{\pi}{3}} = 1,5 - j2,6$$

$$\bar{X}_2 = 5e^{j1,1} = 2,27 + j4,46.$$

Az összegjel fazora

$$\bar{X} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 = 3,77 + j1,86 = 4,2e^{j0,46},$$

amiből az összegjel időfüggvénye kiolvasható:

$$x(t) = 4,2 \cos(\omega t + 0,46).$$

Érdekes az alábbi számítást a trigonometriai azonosságok alkalmazásával végzett számítás bonyolultságával összehasonlítani.

A példából is látszik, hogy az eredmény nem függ  $\omega$  konkrét értékétől.

## 15. Hálózat- és rendszeranalízis szinuszos állandósult állapotban

Bilicz-Horváth

2021. május 20.

### A Kirchhoff-hálózatok leírása szinuszos állandósult állapotban

Emlékezzünk vissza, hogy a  $b$  számú kétpólusból álló,  $n$  csomópontú Kirchhoff-típusú hálózatban a hálózati egyenletek teljes rendszerét  $b$  számú kétpólus-karakterisztika,  $r = n - 1$  Kirchhoff-áramtörvény és  $l = b - n + 1$  Kirchhoff-feszültségtörvény alkotja. Vizsgáljuk meg, hogyan írhatók fel a kétpólusok karakterisztikái, illetve az összekapcsolási kényszerek szinuszos állandósult állapotban.

#### Az impedancia

Szinuszos állandósult állapotban a kétpólusok árama és feszültsége szinuszos,

$$u(t) = U \cos(\omega t + \rho_u) \Leftrightarrow \bar{U} = U e^{j\rho_u}$$

illetve

$$i(t) = I \cos(\omega t + \rho_i) \Leftrightarrow \bar{I} = I e^{j\rho_i}$$

Ezen mennyiségeket reprezentáló  $\bar{U}$  ill.  $\bar{I}$  fázorok között a kétpólus  $\bar{Z}$  impedanciája teremt kapcsolatot, amelyet három elemi kétpólus példáján keresztül vezetünk be.

AZ ELLENÁLLÁS karakterisztikája (1. ábra)

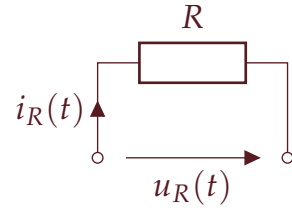
$$u_R(t) = R \cdot i_R(t),$$

amit szinuszos állandósult állapotban a fázorok segítségével is kifejezhetünk:

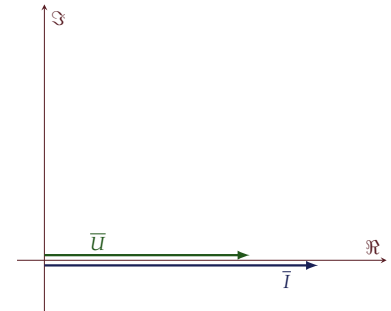
$$\Re \left\{ \bar{U}_R e^{j\omega t} \right\} = R \cdot \Re \left\{ \bar{I}_R e^{j\omega t} \right\} = \Re \left\{ R \cdot \bar{I}_R e^{j\omega t} \right\}.$$

Az egyenlet bal- és jobb oldala minden  $t$  időpontra egyenlő, ami akkor teljesülhet, ha a valósrész-képzésben álló kifejezések egyenlők egymással:

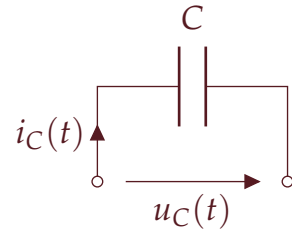
$$\boxed{\bar{U}_R = R \cdot \bar{I}_R}$$



1. ábra: Az ellenállás



2. ábra: Az ellenállás áramának és feszültségének fázorja



3. ábra: A kondenzátor

A KONDENZÁTOR (3. ábra) karakterisztikája

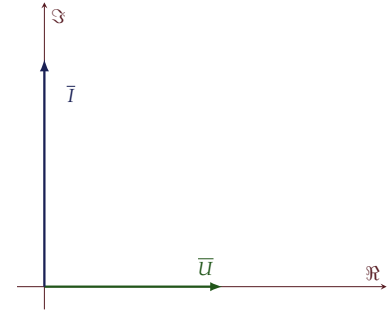
$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt},$$

ami szinuszos állandósult állapotban fazorokkal felírva

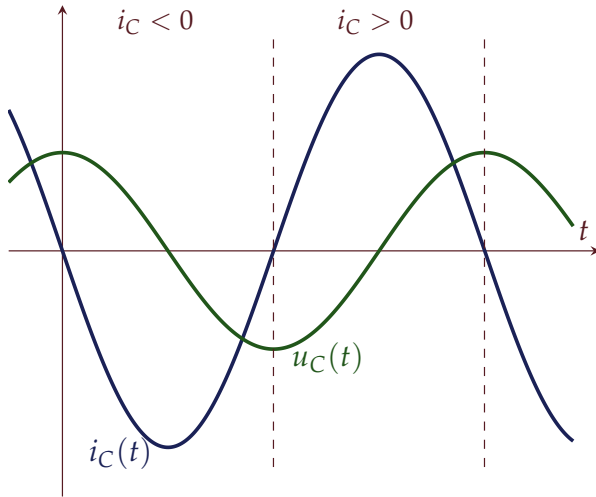
$$\Re \{ \bar{I}_C e^{j\omega t} \} = C \frac{d}{dt} \Re \{ \bar{U}_C e^{j\omega t} \} = \Re \{ j\omega C \cdot \bar{U}_C e^{j\omega t} \},$$

mert a szinuszos időfüggvény deriválása a fazor  $j\omega$ -val szorzásába megy át. Így a fazorok közötti kapcsolat

$$\bar{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \bar{I}_C$$



4. ábra: A kondenzátor áramának és feszültségének fazorja. Az áram 90 fokkal siet a feszültséghez képest.



5. ábra: A kondenzátor áramának és feszültségének időfüggvénye. A kondenzátor minden periódusban feltöltődik, kisül, ellentétes polaritással feltöltődik, majd ismét kisül. Amikor  $i_C(t) < 0$ , a kondenzátoron negatív töltés halmozódik fel, és a töltési ciklus végén, ahol az áram nullára csökken, lesz a töltés és ezzel a feszültség (abszolút értékben) maximális. A következő félperiódusban a pozitív áram kisüti, majd pozitív polaritással maximális feszültségre tölti a kondenzátort. Ez a fizikai magyarázata annak, hogy miért siet az áram a feszültséghez képest.

A TEKERCES karakterisztikája (6. ábra)

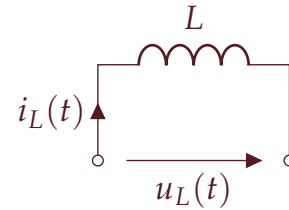
$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt},$$

ami szinuszos állandósult állapotban a megfelelő fazorokkal is kifejezhető:

$$\Re \{ \bar{U}_L e^{j\omega t} \} = L \frac{d}{dt} \Re \{ \bar{I}_L e^{j\omega t} \} = \Re \{ j\omega L \cdot \bar{I}_L e^{j\omega t} \},$$

mert az idő szerinti deriválás  $j\omega$  faktorról való szorzásba megy át. A fazorok közötti kapcsolat tehát

$$\bar{U}_L = j\omega L \cdot \bar{I}_L$$



6. ábra: A tekercs

EGY ÁLTALÁNOS KÉTPÓLUS feszültségének és áramának fazorjai közötti kapcsolatot a kétpólus *impedanciája* írja le, amelynek definíciója (8. ábra)

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}$$

Az impedancia értelemszerűen komplex mennyiség, és általában a különböző  $\omega$  körfrekvenciákon különböző értékű. A három korábban tárgyalt kétpólus impedanciája

$$\bar{Z}_R = R; \quad \bar{Z}_L = j\omega L; \quad \bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Az impedancia ellenállás dimenziójú mennyiség:

$$[\bar{Z}] = \Omega.$$

Az impedancia valós része az  $R$  ellenállás, képzetes része az  $X$  reaktancia:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = R + jX.$$

Például a tekercsre

$$\bar{Z}_L = jX_L = j\omega L,$$

a tekercsnek csak reaktanciája van:

$$X_L = \omega L,$$

ami pozitív értékű, és  $\omega$  növelésével egyre nagyobb. A kondenzátorra az

$$\frac{1}{j} = -j$$

azonosság miatt

$$\bar{Z}_C = jX_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C},$$

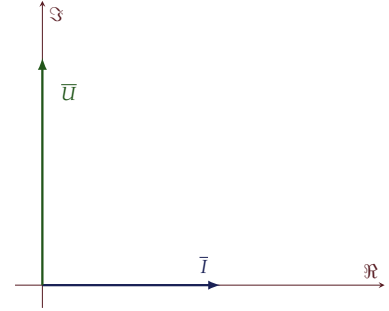
a kondenzátor

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

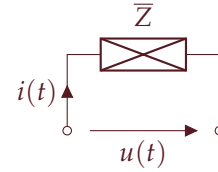
reaktanciája negatív és  $\omega$  növelésével csökken. Az impedancia reciproka az *admittancia*:

$$\bar{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{U}} = \frac{1}{\bar{Z}} = G + jB,$$

amelynek valós része a rezisztív hálózatoknál megismert  $G$  *konduktancia* vagy vezetés, képzetes része pedig a  $B$  *szuszeptancia*.



7. ábra: A tekercs áramának és feszültségének fazorja. Az áram 90 fokkal késik a feszültséghez képest.



8. ábra: Az általános impedancia rajzele

Mivel a tekercs és a kondenzátor impedanciája tisztán képzetes, azokat *reaktáns* komponensnek is szokás nevezni. A pozitív reaktanciát tartalmazó impedanciákat *induktívnak*, a negatív reaktanciát tartalmazókat *kapacitívnak* is mondják.

Ügyeljünk rá, hogy ugyan

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}},$$

de általában

$$G \neq \frac{1}{R}, \text{ ill. } B \neq \frac{1}{X}!$$

### A hálózati egyenletek komplex alakja

Kirchhoff áramtörvénye kimondja, hogy a hálózat minden vágatára (és ezért minden csomópontja is) teljesül, hogy

$$\sum_k i_k(t) = 0.$$

Szinuszos állandósult állapotban a fazorokra áttérve

$$\sum_k \Re \left\{ \bar{I}_k e^{j\omega t} \right\} \equiv \Re \left\{ e^{j\omega t} \sum_k \bar{I}_k \right\} = 0,$$

amiből, mivel minden  $t$  időpillanatra teljesül, következik, hogy szinuszos esetben a vágatot alkotó kétpólusok áramainak fazorát algebrailag összegezve nullát kapunk:

$$\boxed{\sum_k \bar{I}_k = 0}$$

KIRCHHOFF FESZÜLTSGTÖRVÉNYE értelmében a hálózat hurokjaira minden időpillanatban teljesül a

$$\sum_k u_k(t) = 0$$

összefüggés. Fazorokkal kifejezve

$$\sum_k \Re \left\{ \bar{U}_k e^{j\omega t} \right\} \equiv \Re \left\{ e^{j\omega t} \sum_k \bar{U}_k \right\} = 0,$$

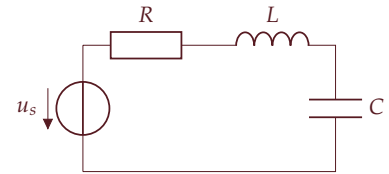
így a hálózat minden hurokjára teljesül, hogy a hurkot alkotó kétpólusok feszültségeinek fazorjaira vett algebrai összeg zérus:

$$\boxed{\sum_k \bar{U}_k = 0.}$$

EBBŐL KÖVETKEZIK, hogy szinuszos állandósult állapotban a rezisztív hálózatoknál megismert minden hálózatszámítási módszer használható, ha az időfüggvényeket fazorokkal, a kétpólusokat az impedanciájukkal helyettesítjük. Mind az elemi módszerek (pl. soros és párhuzamos eredőre visszavezetés), mind a csomóponti potenciálok és a hurokáramok módszere, és a szuperpozíciós módszer is átültethető szinuszos áramú hálózatokra.

### Fazorábrák szerkesztése

Szinuszos állandósult állapotban szokás a hálózat feszültségeit és áramait egy közös vektorábrán megrajzolni. Ez a fazorábra, amely



9. ábra: A soros rezgőkör

általában szintén frekvenciafüggő. Példaképpen a soros rezgőkör (9. ábra) feszültségeit és áramát szemléltetjük. Ehhez helyettesítsük az időfüggvényeket a megfelelő fázorokkal, a komponenseket pedig az impedanciájukkal (10. ábra).

Jelölje a körben folyó áram fázorját  $\bar{I}$ . A hálózatra felírható feszültségtörvény alapján

$$\bar{U}_s = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C. \quad (1)$$

A karakterisztikák alapján

$$\bar{U}_R = R\bar{I} \quad (2)$$

$$\bar{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\bar{I} = -j\frac{1}{\omega C}\bar{I}; \quad \bar{U}_L = j\omega L\bar{I}; \quad (3)$$

Vegyünk fel önkényesen a forrásfeszültség kezdőfázisát zérusnak, azaz a forrásfeszültséghez társítható fázor legyen valós értékű:

$$u_s(t) = U_s \cos \omega t \Leftrightarrow \bar{U}_s = U e^{j0}$$

Tegyük fel, hogy számítással meghatároztuk konkrét  $L, R, C, \omega, U$  értékek ismeretében a körben folyó  $\bar{I}$  áram fázorját, ami a 11. ábrán látható módon az 1. síknegyedbe esik, azaz a körben folyó áram siet a forrásfeszültséghez képest. Ebből azt is tudjuk, hogy a vizsgált körfrekvencián a rezgőkör impedanciája kapacitív (a rezgőkör reaktanciája negatív). Az ellenállás feszültsége (2) miatt biztosan azonos fázisban van a körben folyó árammal, ezért  $\bar{U}_R$  fázorja párhuzamos  $\bar{I}$  fázorjával. A (3) alapján  $\bar{U}_L$  és  $\bar{U}_C$  fázorjai merőlegesek  $\bar{I}$ -re; előbbi 90 fokkal késik, utóbbi 90 fokkal siet az áram fázorához képest, egymással tehát ellentétes irányúak. Végül (1) alapján megkapjuk  $\bar{U}_R$  fázorjának végpontját, ha az  $\bar{I}$  által kijelölt egyenesre merőlegest szerkesztünk úgy, hogy az  $\bar{U}_s$  végpontján haladjon át. Ez az egyenes jelöli ki  $\bar{U}_L$  és  $\bar{U}_C$  irányát is.

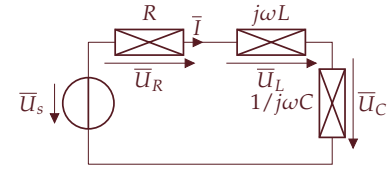
### A frekvenciafüggés vizsgálata

Térjünk most át a lineáris, invariáns, gerjesztés-válasz stabil rendszerek gerjesztés-válasz kapcsolatának leírására szinuszos állandósult állapotban. A rendszer reprezentálható egy Kirchhoff-típusú hálózatot is, de a leírás bármilyen más lineáris, invariáns, gerjesztés-válasz stabil rendszerre alkalmazható.

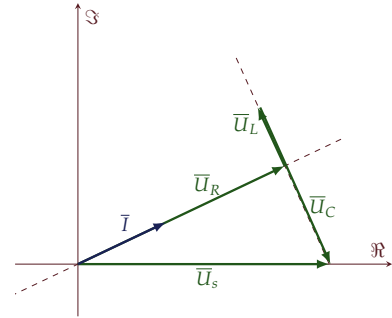
### Az átviteli tényező

Legyen a szokásos jelölésekkel  $u(t)$  a gerjesztés,  $y(t)$  a válasz időfüggvénye. A rendszer gerjesztése nem belépő szinuszos jel. A gerjesztés időfüggvénye, illetve a hozzá társítható fázor

$$u(t) = U \cos(\omega t + \rho_u) \Leftrightarrow \bar{U} = U e^{j\rho_u}.$$



10. ábra: A soros rezgőkör szinuszos állandósult állapotban



11. ábra: A soros rezgőkör fázorábrája egy konkrét elemkészlet mellett. Az  $\bar{U}_C$  és  $\bar{U}_L$  fázorokat nem az origóba rajzoltuk, hogy szemléltethessük a feszültségek közötti viszonyokat. Figyeljük meg, hogy

$$|\bar{U}_s| < |\bar{U}_R| + |\bar{U}_L| + |\bar{U}_C|.$$

Gondoljuk meg, hogy  $\omega$  növelésével az  $\bar{I}$  fázor egyre kisebb szöget zárna be a valós tengellyel, majd átmenne a 4. síknegyedbe, ahogy a rezgőkör impedanciája induktív válik. Az áram tisztán valós a rezgőkör

$$\omega = \frac{1}{LC}$$

rezonancia-körfrekvenciáján.



Ha a gerjesztés szinuszos, akkor biztosak lehetünk benne az összetevőkre bontás kapcsán tárgyalt gondolatmenet alapján, hogy a rendszer minden belső változója, így a válaszjele is szinuszos ugyanazzal az  $\omega$  körfrekvenciával, ami a gerjesztésben szerepel. A válaszjel amplitúdója és kezdőfázisa azonban eltérhet a gerjesztésétől. A válasz általános alakja tehát

$$y(t) = Y \cos(\omega t + \rho_y) \Leftrightarrow \bar{Y} = Y e^{j\rho_y}.$$

Ezek után egy adott (rögzített)  $\omega$  körfrekvencián a rendszer gerjesztését és válaszát leíró fázorok (komplex számok) között egyetlen komplex szám, a  $\bar{H}$  ún. *átviteli tényező* vagy átviteli együttható teremti kapcsolatot:

$$\boxed{\bar{Y} = \bar{H} \cdot \bar{U}} \quad (4)$$

A gyakorlatban a komplex értékű átviteli tényezőnek nem a valós és képzetes része, hanem az abszolútértéke és fázisa bír fizikai jelentéssel. Euler-alakban kifejezve

$$\bar{H} = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}} = K e^{j\varphi},$$

ahol

$$K \equiv |\bar{H}|$$

a rendszer *erősítése*, míg

$$\varphi \equiv \arg \bar{H}$$

a rendszer *fázistolása*  $\omega$  körfrekvencián. Ugyanis (4) kifejtve

$$Y e^{j\rho_y} = H e^{j\varphi} \cdot U e^{j\rho_u} = H \cdot U \cdot e^{j(\rho_u + \varphi)},$$

amiből egyrészt

$$|\bar{Y}| = |\bar{H}| \cdot |\bar{U}| \equiv K \cdot |\bar{U}|,$$

azaz a válaszjel amplitúdója  $K$ -szorosa a gerjesztő jel amplitúdójának, másrészt

$$\rho_y = \rho_u + \varphi,$$

vagyis a válaszjel kezdőfázisa  $\varphi$ -vel tér el a gerjesztés fázisától.

### Az átviteli karakterisztika

Az *átviteli karakterisztika* naiv definíciója szerint az  $\omega$  körfrekvenciának egy olyan komplex értékű függvénye, ami megadja az átviteli tényező értékét a körfrekvencia függvényében:

$$\boxed{H(j\omega) = \bar{H}|_{\omega}}$$

Az argumentumban szereplő  $j\omega$  jelentőségét csak később fogjuk megérteni, egyelőre fogadjuk el ezt a formát. A  $\bar{H}$  és a felülvonás

Ebből az is következik, hogy lineáris, invariáns rendszer válaszában csak olyan frekvenciaösszetevők szerepelhetnek, amelyek a gerjesztésben is megjelennek. Csak nemlineáris rendszerek esetén jelentkezhet a válaszban olyan frekvenciájú komponens, ami a gerjesztésben nincs jelen.

A gyakorlatban előfordul, hogy a rendszer válaszjele egyetlen frekvencián, vagy néhány diszkrét frekvencián érdekes számunkra (pl. a villamos energetikában az 50 Hz-es hálózati frekvencián és annak egész számú többszörösein, ún. felharmonikusain), azonban más esetekben azt vizsgáljuk, hogy egy szélesebb  $\omega$  tartományban hogyan viselkedik a rendszer. Ez motiválja az átviteli karakterisztika bevezetését.

nélküli  $H(j\omega)$  alakot gyakran felcserélhetőnek tartjuk, az utóbbi jelöléssel azt hangsúlyozzuk, hogy a mennyiség frekvenciafüggő. Az átviteli karakterisztika abszolútértékének és fázisának az átviteli tényezővel analóg fizikai jelentése van. Az átviteli karakterisztika abszolútértéke a  $K(\omega)$  *amplitúdó-karakterisztika*,

$$K(\omega) \equiv |H(j\omega)|,$$

aminek az argumentumában viszont egyszerűen  $\omega$ -függést tüntetünk fel.  $K(\omega)$  a rendszer erősítést adja meg a körfrekvencia függvényében. Az átviteli karakterisztika fázis a  $\varphi(\omega)$  *fázis-karakterisztika*,

$$\varphi(\omega) \equiv \arg H(j\omega),$$

ami a rendszer fázistolását adja a körfrekvencia függvényében. Ezzel a felbontással

$$H(j\omega) = K(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

Belátható továbbá, hogy valós bemenetű, valós kimenetű rendszerekre

$$H(-j\omega) = H^*(j\omega),$$

azaz az átviteli karakterisztika konjugált szimmetriát mutat a frekvencia függvényében. Ezért  $K(\omega)$ -ra

$$K(-\omega) = K(\omega)$$

érvényes (az amplitúdó-karakterisztika a körfrekvencia páros függvénye), míg  $\varphi(\omega)$ -ra

$$\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$$

vonatkozik (a fázis-karakterisztika a körfrekvencia páratlan függvénye). Éppen emiatt a karakterisztikákat megadása negatív frekvenciákra redundáns, csak pozitív frekvenciákra szokás szorítkozni.

AZ ÁTVITELI KARAKTERISZTIKA általános alakja, legalábbis azon rendszerek esetén, amelyekkel a tárgy keretében foglalkozunk,  $j\omega$  *racionalis törtfüggvénye*, a felírásnál is meghagyjuk  $(j\omega)$  hatványait:

$$H(j\omega) = \frac{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + \dots + b_m (j\omega)^m}{1 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \dots + a_n (j\omega)^n}, \quad m \leq n$$

A negatív frekvenciájú jelre gondolhatunk úgy, mint amihez egy negatív (az óramutató járásával megegyező) irányban forgó fázor társítható. A későbbiekben hasznos számítástechnikai segédeszköznek fog bizonyulni.

## 17. Teljesítmények szinuszos állandósult állapotban

Bilicz-Horváth

2021. május 21.

### Kétpólusok teljesítménye

Tekintsünk egy általános kétpólust szinuszos állandósult állapotban. Az általánosság megszorítása nélkül rögzítsük a kétpólus feszültségének kezdőfázisát nulla értékűre, a feszültség (valós) csúcserőteke legyen  $U$ . A feszültség időfüggvénye

$$u(t) = U \cos(\omega t).$$

A kétpólus árama szintén szinuszos ugyanezzel a körfrekvenciával, azonban a kezdőfázis a feszültségétől eltérhet. Jelölje  $\varphi$  a feszültség és az áram fázisa közötti eltolódást. Ezzel a kétpólus áramának időfüggvénye az  $I$  (valós) amplitúdóval kifejezve

$$i(t) = I \cos(\omega t - \varphi).$$

Vigyázzunk, hogy a fenti mennyiségek valós időfüggvények, nem pedig fázorok. A fázorokkal való kifejezést később tárgyaljuk majd. A továbbiakban feltételezzük, hogy a feszültség és az áram referenciáirány megegyezik.

### A pillanatnyi teljesítmény

A pillanatnyi teljesítmény korábban megismert definíciója

$$p(t) = u(t) \cdot i(t),$$

amit a szinuszos áramú kétpólusra alkalmazva

$$p(t) = UI \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \varphi),$$

$$p(t) = \frac{1}{2}UI \cos \varphi + \frac{1}{2}UI \cos(2\omega t - \varphi) \quad (1)$$

A pillanatnyi teljesítmény a

$$p_{\text{átlag}} = \frac{1}{2}UI \cos \varphi$$

állandó érték körül  $2\omega$  körfrekvenciával ( $T/2$  periódusidővel),  $\frac{1}{2}UI$  amplitúdóval leng. A  $\varphi = 0$  és a  $\varphi = \pi$  eseteket leszámítva egy perióduson

Ha a szóban forgó kétpólus lineáris és csatolatlan, akkor  $\varphi$  a kétpólus

$$\bar{Z} \equiv Ze^{j\varphi}$$

impedanciájának a szögével egyenlő.

A

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

azonosságot kihasználva.

belül a pillanatnyi teljesítmény pozitív és negatív értékeket is felvesz, a kétpólus tehát felváltva viselkedik fogyasztóként ( $p(t) > 0$ ) és termelőként ( $p(t) < 0$ ). Ha  $\cos \varphi > 0$ , akkor a kétpólus az idő nagyobb részében fogyasztóként (1. ábra), ellenkező esetben termelőként viselkedik.

Említést érdemel a  $\varphi = 0$  eset, amikor a feszültség és az áram fázisban vannak (a kétpólus tisztán rezisztív, 2. ábra). Ekkor a kétpólus mindig fogyasztóként viselkedik. Ilyen kétpólus például egy lineáris ellenállás.

Végül a  $\varphi = \pm\pi/2$  esetben  $\cos \varphi = 0$ , ezért az átlagos teljesítmény zérus. A kétpólus az idő felében fogyasztóként, az idő másik felében termelőként viselkedik (3. ábra). Ilyen kétpólus lehet egy tekercs vagy egy kondenzátor.

Az energiamegmaradás elvéből következik, hogy a pillanatnyi teljesítmények összege a teljes hálózat  $b$  számú kétpólusára mindig zérus:

$$\sum_{k=1}^b p_k(t) = 0$$

### A hatásos teljesítmény

Szinuszos állandósult állapotban további teljesítményfogalmak bevezetése is indokolt, és a továbbiakban ezeket fogjuk előnyben részesíteni a pillanatnyi teljesítménnyel szemben. Tudjuk, hogy a kétpólus által egy  $[t_1, t_2]$  intervallumban felvett energia (a kétpólus által végzett munka) a kétpólus munkafüggvényének integrálja:

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt.$$

Behelyettesítve (1) kifejezést, és az integrálást elvégezve

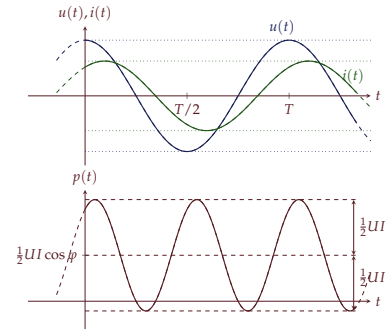
$$W(t_1, t_2) = \frac{1}{2} UI \cos \varphi (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} UI \frac{\sin(2\omega t_2 - \varphi) - \sin(2\omega t_1 - \varphi)}{2\omega},$$

ahol a második tag számlálójának abszolútértéke az intervallum hosszától függetlenül 0 és 2 közé esik. Ha a vizsgált  $[t_1, t_2]$  intervallum sokkal hosszabb, mint a periódusidő, a második tag elhanyagolható az elsőhöz képest:

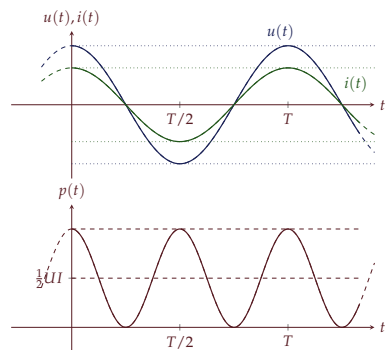
$$W(t_1, t_2) = \frac{1}{2} UI \cos \varphi (t_2 - t_1) \Leftarrow (t_2 - t_1) \gg T \quad (2)$$

Ez alapján bevezethetjük a kétpólus  $P$  hatásos teljesítményét, ami egy időfüggetlen (állandó) érték, definíciója

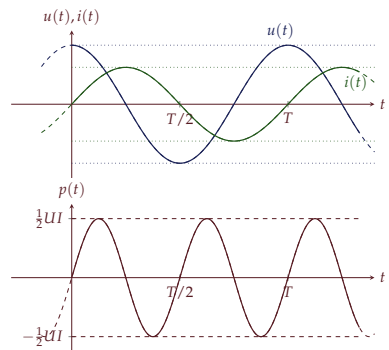
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt,$$



1. ábra: A  $p(t)$  pillanatnyi teljesítmény szinuszos áramú kétpóluson. A görbék a  $0 < \varphi < \pi$  esetre jellemző viselkedést mutatják.



2. ábra: A  $p(t)$  pillanatnyi teljesítmény szinuszos áramú kétpóluson, ha  $\varphi = 0$ .



3. ábra: A  $p(t)$  pillanatnyi teljesítmény szinuszos áramú kétpóluson, ha  $\varphi = \pi/2$ .

A hatásos (átlagos, közepes, „wattos”) teljesítmény munkavégzéshez kapcsolódik, és nem feltétlenül *hasznos* teljesítmény. Pl. egy izzólámpánál a fény- és hőkibocsátás is hatásos teljesítményhez kapcsolódik, de csak az előbbi „hasznos” a felhasználás szempontjából, a hőkibocsátás veszteséget okoz.

a pillanatnyi teljesítménynek egy periódusra vett átlaga. (2) alapján látható, hogy szinuszos esetben a hatásos teljesítmény kifejezése

$$P = \frac{1}{2} UI \cos \varphi$$

A hatásos teljesítmény egysége a pillanatnyi teljesítményhez hasonlóan a watt:

$$[P] = \text{W (watt)}$$

Ha  $P < 0$ , akkor a kétpólus középpértékben *energiát és teljesítményt ad le*, a kétpólus *termelői állapotban van*. Ha  $P > 0$ , akkor a kétpólus középpértékben *energiát és teljesítményt vesz fel*, a kétpólus *fogyasztói állapotban van*. A hatásos teljesítmények összege a hálózat valamennyi kétpólusára szintén zérus:

$$\sum_{k=1}^b P_k = 0$$

(1)-be helyettesítve a pillanatnyi teljesítmény a hatásos teljesítmény körül leng:

$$p(t) = P + \frac{1}{2} UI \cos(2\omega t - \varphi),$$

a kétpólus által  $[t_1, t_2]$  intervallumban felvett energia (végzett munka) pedig közelítőleg

$$W(t_1, t_2) \approx P(t_2 - t_1) \quad \Leftarrow t_2 - t_1 \gg T$$

alakban számítható. Egy csatolatlan kétpólus *passzív*, ha semmilyen körülmények között nem lehet termelői állapotban, azaz  $P > 0$  mindig teljesül. Ezzel szemben az *aktív* kétpólus lehet termelői és fogyasztói állapotban is.

A korábbiak alapján a termelői állapotban levő kétpólus is vehet fel a periódus egy részében teljesítményt, de az átlagos teljesítmény negatív, és viszont.

Reaktáns (csak tekercseket és kondenzátorokat tartalmazó) kétpólusok hatásos teljesítménye nulla.

### A látszólagos teljesítmény

A (1) egyenletben szereplő teljesítménylengés amplitúdóját szokás *látszólagos teljesítményként* bevezetni:

$$S = \frac{1}{2} UI$$

Ezzel a pillanatnyi teljesítmény (1) formulája

$$p(t) = P + S \cos(2\omega t - \varphi)$$

alakban is írható: a pillanatnyi teljesítmény  $P - S$  és  $P + S$  között ingadozik  $2\omega$  körfrekvenciával. A hatásos teljesítmény egysége

$$[S] = \text{VA (voltamper)}$$

A látszólagos teljesítményre nem vonatkozik megmaradási tétel.

A teljesítménylengés jellemzésére a villamos energetikában használatos a *teljesítménytényező* is:

$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos \varphi$$

### A meddő teljesítmény

Térjünk vissza a pillanatnyi teljesítmény (1) formulájához, és végezzünk rajta egy másik átalakítást!

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2}UI \cos \varphi + \frac{1}{2}UI \cos(2\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{1}{2}UI \cos \varphi + \frac{1}{2}UI \cos(2\omega t) \cos \varphi + \frac{1}{2}UI \sin(2\omega t) \sin \varphi = \\ &= \frac{1}{2}UI \cos \varphi [1 + \cos(2\omega t)] + \frac{1}{2}UI \sin \varphi \sin(2\omega t) = \end{aligned}$$

$$p(t) = P[1 + \cos(2\omega t)] + Q \sin(2\omega t), \quad (3)$$

ahol bevezettük a

$$Q = \frac{1}{2}UI \sin \varphi$$

*meddő teljesítmény* nevű mennyiséget, amelynek elsősorban a villamos energetikában van jelentősége. A (3) kifejezés első tagjában szereplő  $\cos(2\omega t)$  lengés olyan értelemben „szükségszerűnek” tekinthető, hogy tisztán rezisztív ( $\varphi = 0$  eset) kétpólusokon is fellépő teljesítménylengést reprezentál, míg a második tag egy olyan járulékos teljesítménylengést ad, amelynek időbeli átlagértéke nulla, azaz középértékben nem lép fel energiafogyasztás vagy -termelés. Mivel a meddő teljesítményhez nem kapcsolódik munkavégzés, külön mérőegységet vezetünk be:

$$[Q] = \text{var} \quad (\text{voltamper reaktív})$$

A hálózat minden kétpólusára a meddő teljesítmények összege zérus:

$$\sum_{k=1}^b Q_k = 0$$

### A komplex teljesítmény

Az eddigiekben a feszültség és az áram valós időfüggvényeivel fejeztük ki a különféle teljesítményeket. Térjünk most át a komplex leírásmódra. Ennek során engedjünk meg a feszültség időfüggvényére tetszőleges  $\rho$  kezdőfázist (hagyjuk el az eddigi önkényesen

Alkalmazzuk a

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

ismert trigonometriai azonosságot, valamint a szinuszfüggvény páratlan tulajdonságát:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

A villamosenergia-átvitelben általában cél a  $P$  hatásos teljesítmény átviteléhez kapcsolódó  $|Q|$  meddő teljesítmény minimalizálása. Ugyan a meddő teljesítményhez nem kapcsolódik közvetlen energiafogyasztás, de a vezetékeket nagyobb áramra kell méretezni, és a nagyobb áram pl. a távvezetéseken nagyobb hőveszteséget okoz. A meddő teljesítmény csökkentéséhez  $\varphi$  értékét 0-hoz ( $\cos \varphi$  értékét 1-hez) kell közelíteni. Ha pl. a kérdéses kétpólus induktív (pl. egy ipartelegen nagy teljesítményű villanymotorok), akkor ezt az induktivitást szokás az ipartelegen elhelyezett kondenzátorokkal lokálisan kompenzálni, hogy a villamos hálózat irányában ne lépjen fel meddőteljesítmény-igény. Reaktáns kétpólusoknak csak meddő teljesítménye van: a tekercsnél  $Q > 0$  („meddőt fogyaszt”), a kondenzátornál  $Q < 0$  („meddőt termel”).

választott korlátozást, hogy a feszültség kezdőfázisa nulla). Legyen a kétpólus feszültsége

$$u(t) = U \cos(\omega t + \rho) \Leftrightarrow \bar{U} = U e^{j\rho},$$

árama pedig ehhez képest  $\varphi$  szöggel késik:

$$i(t) = I \cos(\omega t + \rho - \varphi) \Leftrightarrow \bar{I} = I e^{j(\rho - \varphi)}.$$

Vezessük be az

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{U} \cdot \bar{I}^*$$

komplex teljesítményt, ahol a  $(\cdot)^*$  a komplex konjugálás műveletét jelöli. Mivel

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{U} \cdot \bar{I}^* = \frac{1}{2} U I e^{j\rho} e^{-j(\rho - \varphi)} = \frac{1}{2} U I e^{j\varphi} = \underbrace{\frac{1}{2} U I \cos \varphi}_P + j \underbrace{\frac{1}{2} U I \sin \varphi}_Q,$$

nyilvánvalóan

$$\bar{S} = P + jQ$$

A komplex teljesítmény egysége is voltamper:

$$[\bar{S}] = \text{VA} \quad (\text{voltamper})$$

A hatásos teljesítmény a komplex teljesítmény valós része:

$$P = \frac{1}{2} U I \cos \varphi = \Re \{ \bar{S} \},$$

a meddő teljesítmény a komplex teljesítmény képzetes része:

$$Q = \frac{1}{2} U I \sin \varphi = \Im \{ \bar{S} \},$$

a látszólagos teljesítmény pedig a komplex teljesítmény abszolútértéke:

$$S = \frac{1}{2} U I = |\bar{S}|.$$

A komplex teljesítményre is vonatkozik megmaradási tétel:

$$\sum_{k=1}^b \bar{S}_k = 0$$

*Homogén lineáris kétpólus (impedancia) teljesítményei*

Fejezzük ki egy

$$\bar{Z} = R + jX,$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = G + jB$$

impedancia teljesítményeit! A komplex teljesítmény az impedancia felhasználásával

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{U} \cdot \bar{I}^* = \frac{1}{2} \bar{Z} \cdot \bar{I} \cdot \bar{I}^* = \frac{1}{2} \bar{Z} I^2 = \frac{1}{2} (R + jX) I^2,$$

ahol  $I^2 = |\bar{I}|^2$  a kétpólus áramának amplitúdó-négyzete.

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{Z} I^2,$$

az impedancia hatásos teljesítménye

$$P = \Re \{ \bar{S} \} = \frac{1}{2} R I^2,$$

Innen is látható, hogy az ellenállás meddő teljesítménye, a reaktanciának pedig a hatásos teljesítménye nulla.

meddő teljesítménye pedig

$$Q = \Im \{ \bar{S} \} = \frac{1}{2} X I^2.$$

Hasonlóan fejezhető ki a komplex teljesítmény az admittanciával is:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{U} \cdot \bar{I}^* = \frac{1}{2} \bar{U} \cdot (\bar{Y} \cdot \bar{U})^* = \frac{1}{2} \bar{Y}^* U^2 = \frac{1}{2} (G - jB) U^2,$$

azaz

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{Y}^* U^2; \quad P = \frac{1}{2} G U^2; \quad Q = -\frac{1}{2} B U^2$$

*Az effektív érték*

Egy tetszőleges  $T$  periódusú periodikus  $u(t)$  jel *effektív értéke* egy skaláris érték,

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}.$$

Speciálisan egy (tetszőleges kezdőfázisú) szinuszos jelnél

$$u(t) = U \cos(\omega t),$$

$$u^2(t) = U^2 \left[ \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \right],$$

az effektív érték pedig

$$U_{\text{eff}} = \frac{U}{\sqrt{2}}$$

A teljesítményeket az effektív értékkel kifejezve a rezisztív világban megismert kifejezésekkel analóg formulákat kapunk. A hatásos teljesítmény például

$$P = \frac{1}{2} U I \cos \varphi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$$

alakban számítható.



### Teljesítményillesztés szinuszos állandósult állapotban

A rezisztív hálózatok tárgyalásakor megvizsgáltuk, hogy egy generátorra kapcsolt ellenállás teljesítményét milyen választással lehet maximalizálni: a generátorból akkor vehető ki a maximális teljesítmény, ha a terhelő ellenállás értéke egyenlő a generátor belső ellenállásával. A következőkben ezt a problémát vizsgáljuk szinuszos állandósult állapotban. Tekintsünk adottnak egy aktív kétpólust, amiben lineáris komponensek és  $\omega$  körfrekvenciájú szinuszos források vannak, a generátorra egy

$$\bar{Z}_t = R_t + jX_t$$

impedanciájú lineáris kétpólus csatlakozik. A gyakorlatban általában a lezáró kétpólus *hatásos* teljesítményét kívánjuk maximalizálni, hogyan kell ehhez  $\bar{Z}_t$  értékét megválasztanunk?

Az aktív kétpólust egy szinuszos Thévenin-generátorral helyettesítjük (4. ábra), amelynek forrásfeszültsége  $\bar{U}_s$ , belső impedanciája

$$\bar{Z}_s = R_s + jX_s.$$

A körben folyó áram  $\bar{I}$  fazorja

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}_s}{\bar{Z}_t + \bar{Z}_s},$$

az áram amplitúdójának négyzete

$$I^2 = \frac{U_s^2}{(R_s + R_t)^2 + (X_s + X_t)^2},$$

ahol  $U_s = |\bar{U}_s|$  a forrásfeszültség amplitúdója. A lezáró ellenállás hatásos teljesítménye függ  $R_t$  és  $X_t$  értékétől a következőképpen:

$$P(R_t, X_t) = \frac{1}{2} R_t I^2 = \frac{1}{2} U_s^2 \frac{R_t}{(R_s + R_t)^2 + (X_s + X_t)^2}$$

Nyilvánvaló, hogy  $P$  akkor maximális  $X_t$  függvényében, ha

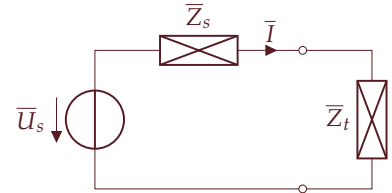
$$X_t = -X_s,$$

ha pedig ez teljesül, akkor visszkapjuk a rezisztív esetről megismert problémát, amelyre az optimális megoldást

$$R_t = R_s$$

adta. Összefoglalva a lezáró ellenállás hatásos teljesítményét a

$$\boxed{\bar{Z}_t = R_s - jX_s = (\bar{Z}_s)^*}$$



4. ábra: Teljesítményillesztés szinuszos állandósult állapotban

választás maximalizálja. Ez a *konjugált illesztési kritérium*. A generátor impedanciájában meglevő esetleges reaktanciát a terhelésben ellentétes előjelű reaktanciával kompenzáljuk. Illesztett esetben a terhelés által felvett (és a belső impedancia) hatásos teljesítménye

$$P_{\max} = \frac{U_s^2}{8R_s}$$

amit a forrásfeszültség effektív értékével kifejezve a rezisztív esetről megismert formával analóg

$$P_{\max} = \frac{U_{s,\text{eff}}^2}{4R_s}$$

alakban is írhatunk.