JELEK ÉS RENDSZEREK I (BMEVIHVAA00)
1. gyakorlat

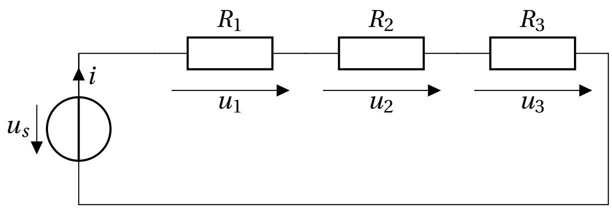
Szerkesztette: Dr. Horváth Péter, BME HVT

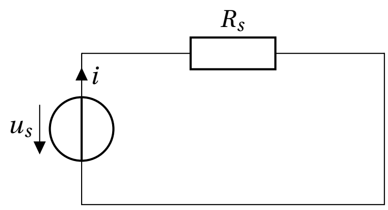
2020. február 24.

1. Számítási módszerek

1.1. Ellenállások soros kapcsolása

1.1.1. Az eredő ellenállás



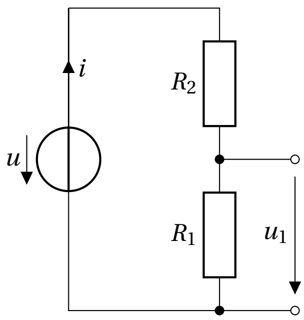


$$u_1 = iR_1 \quad u_2 = iR_2 \quad u_3 = iR_3$$

$$u_s = u_1 + u_2 + u_3 = i(R_1 + R_2 + R_3) = iR_s$$

$$\boxed{R_s = R_1 + R_2 + R_3 = \sum_n R_n}$$

1.1.2. Feszültségosztás

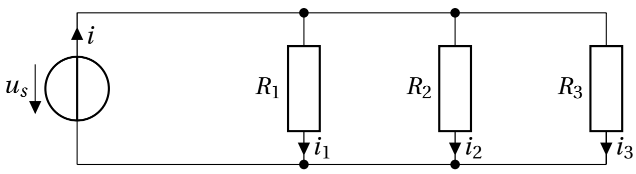


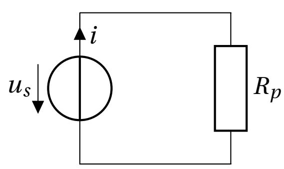
$$u_1 = iR_1 = \frac{u}{R_1 + R_2} R_1$$

$$\boxed{u_1 = u\frac{R_1}{R_1 + R_2} \equiv u\frac{R_1}{R_s}}$$

1.2. Ellenállások párhuzamos kapcsolása

1.2.1. Eredő ellenállás





$$i_1 = u_s G_1 = \frac{1}{R_1} u_s \quad i_2 = u_s G_2 = \frac{1}{R_2} u_s \quad i_3 = u_s G_3 = \frac{1}{R_3} u_s$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = u_s(G_1 + G_2 + G_3) = u_s G_p$$

$$G_p = G_1 + G_2 + G_3 = \sum_n G_n = \sum_n \frac{1}{R_n}$$

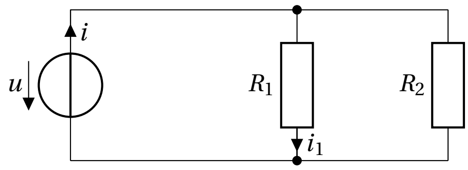
$$\boxed{\frac{1}{R_p} = \sum_n \frac{1}{R_n} \equiv \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}}$$

Speciálisan két ellenállásra

$$\boxed{R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \equiv R_1 \times R_2,}$$

ahol $a \times b$ a replusz (reciprok plusz) művelet.

1.2.2. Áramosztás



$$i_1 = uG_1 = \frac{i}{G_p} G_1 = \frac{G_1}{G_p} i, \tag{1}$$

speciálisan két ellenállásra

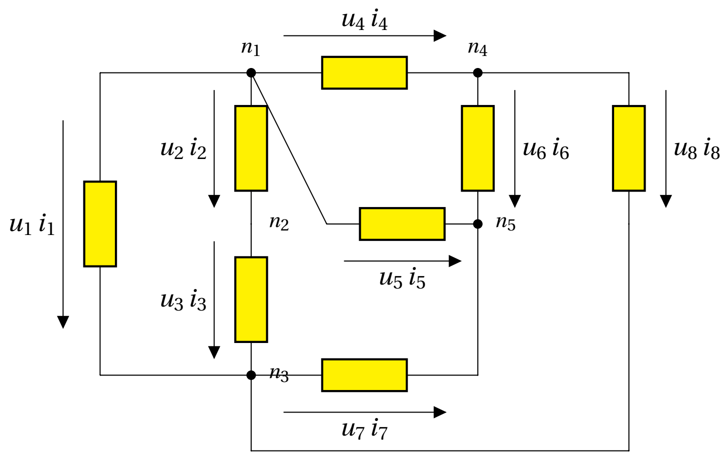
$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} i,$$

$$\boxed{i_1 = i \frac{R_2}{R_1 + R_2}} \tag{2}$$

2. Feladatok

2.1. Kirchhoff törvényei

Oldjuk meg az alábbi feladatokat az ábrán látható, általános kétpólusokat tartalmazó hálózatban! A hálózatban bejelöltük a kétpólusok feszültségeinek, ill. áramainak referenciairányát, és megjelöltük a hálózat csomópontjait.



2.1.1. Határozzuk meg az i_8 áramot, ha ismert...

1. $i_4 = 2\,\mathrm{mA}$, $i_6 = 3\,\mathrm{mA}$

$$i_8 = i_4 - i_6 = -1\,\mathrm{mA}.$$

2. $i_1 = 5\,\mathrm{mA}$, $i_3 = (4\cos\omega t)\mathrm{mA}$, $i_7 = 3\,\mathrm{mA}$

$$i_8 = -i_1 - i_3 + i_7 = (-2 - 4\cos\omega t)\mathrm{mA}.$$

3. $i_1 = 4\,\mathrm{A}$, $i_2 = (-3\sin\omega t)\mathrm{A}$, $i_7 = 6\,\mathrm{A}$

   Mivel $i_3 = i_2$ (soros kapcsolás),

$$i_8 = -i_1 - i_2 + i_7 = (2 + 3\sin\omega t)\mathrm{A}$$

4. $i_1 = 6\,\mathrm{A}$, $i_4 = 2\,\mathrm{A}$, $i_5 = 1\,\mathrm{A}$

   Ezek az áramok nem határozzák meg az i_8 áramot, mert nincs olyan zárt felület, amelyen csak ezek az áramok folynak át. (A megadott áramok nem alkotnak vágatot a hálózat gráfjában.)

2.1.2. Hány lineárisan független áramtörvény írható fel a hálózatra? Írjuk fel az áramtörvények egy fundamentális (maximális lineárisan független) rendszerét!

Mivel a csomópontok száma $n = 5$, ezért $r = n - 1 = 4$ lineárisan független áramtörvény írható fel. Pl. az n_1, n_2, n_3, n_4 csomópontokra

$$n_1 : i_1 + i_2 + i_4 + i_5 = 0$$

$$n_2 : -i_2 + i_3 = 0$$

$$n_3 : -i_1 - i_3 + i_7 - i_8 = 0$$

$$n_4 : -i_4 + i_6 + i_8 = 0$$

2.1.3. Határozzuk meg az u_8 feszültséget, ha ismertek...

1. $u_6 = 3\,\mathrm{V}$, $u_7 = -2\,\mathrm{V}$

$$u_8 = u_6 - u_7 = 5\,\mathrm{V}$$

2. $u_4 = 2\,\mathrm{V}$, $u_5 = 3\,\mathrm{V}$, $u_7 = (-2\cos\omega t)\mathrm{V}$

$$u_8 = -u_4 + u_5 - u_7 = (1 + 2\cos\omega t)\mathrm{V}$$

3. $u_1 = 5\,\mathrm{mV}$, $u_2 = -4\,\mathrm{mV}$, $u_5 = 2\,\mathrm{mV}$

   Ezek a feszültségek nem határozzák meg u_8-at, mert nem alkotnak vele hurkot.

2.1.4. Hány lineárisan független feszültségtörvény írható fel maximálisan a hálózatra?

A hálózatban található kétpólusok száma $b = 8$. A független hurkok száma $l = b - n + 1 = b - r = 4$. (Mivel a hálózat gráfja síkba rajzolható, az „ablaktábla-módszer" célravezető.)

2.1.5. Felírható-e egy huroktörvény az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 jelű kétpólusok feszültségére?

2.1.6. Jelölje az n_1 csomópont potenciálját φ_1, az n_2-ét φ_2 stb. Fejezzük ki az u_1, u_2, u_3 feszültségeket csomóponti pontenciálok segítségével.

$$u_1 = \varphi_1 - \varphi_3, u_2 = \varphi_1 - \varphi_2, u_3 = \varphi_2 - \varphi_3.$$

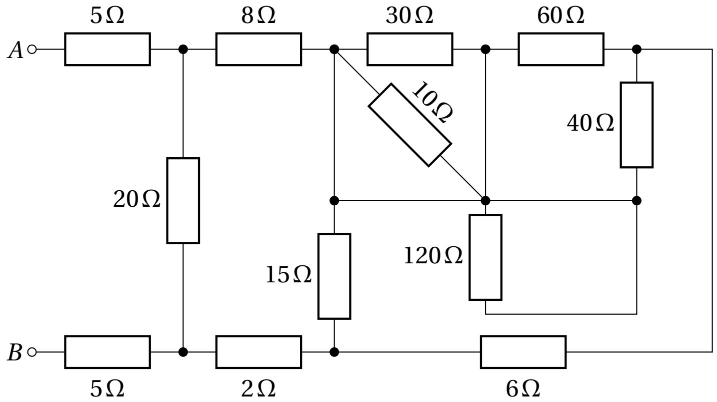
A feszültségtörvény:

$$u_2 + u_3 - u_1 = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) - (\varphi_1 - \varphi_3) \equiv 0.$$

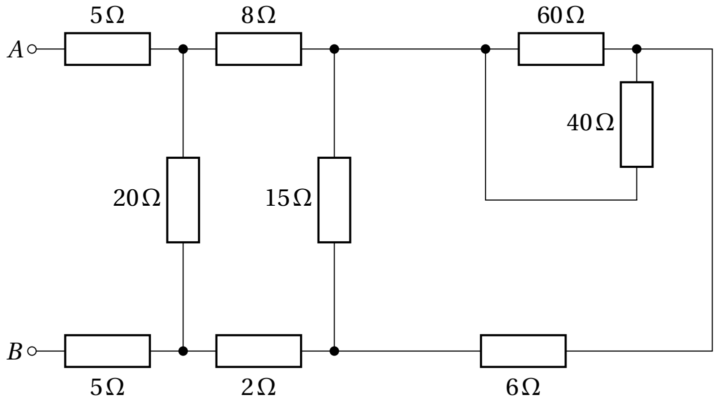
(A csomóponti potenciálok módszerével Kirchhoff feszültségtörvénye automatikusan teljesül.)

3. Speciális hálózatszámítási módszerek

3.1. Határozza meg az A-B kétpólus eredő ellenállását!



Több ellenállás ekvipotenciális csomópontok közé kapcsolódik (30 Ω, 10 Ω, 120 Ω). Ezeket elhagyva:



$$60\,\Omega \times 40\,\Omega = \frac{60 \cdot 40}{100} = 24\,\Omega$$

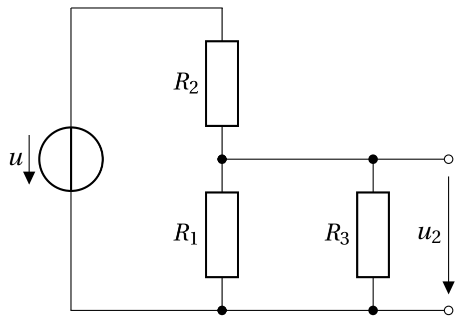
$$(24\,\Omega + 6\,\Omega) \times 15\,\Omega = \frac{30 \cdot 15}{30 + 15} = 10\,\Omega$$

$$2\,\Omega + 10\,\Omega + 8\,\Omega = 20\,\Omega$$

$$R_e = 5\,\Omega + 20\,\Omega \times 20\,\Omega + 5\,\Omega = 5\,\Omega + 10\,\Omega + 5\,\Omega = 20\,\Omega$$

3.2. Fejezze ki a bejelölt u_2 feszültséget!

(Ún. terhelt feszültségosztó)



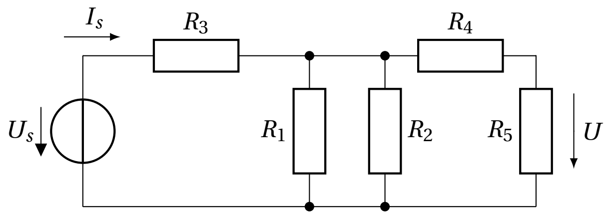
$$u_2 = u\frac{R_1 \times R_3}{R_2 + R_1 \times R_3} = u\frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

$$u_2 = u\frac{R_1}{R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}},$$

ami $R_3 \to \infty$ esetben visszaadja az egyszerű feszültségosztó formuláját.

3.3. Határozzuk meg a bejelölt feszültséget és áramot!

$R_1 = R_4 = 100\,\Omega$, $R_2 = 200\,\Omega$, $R_3 = 40\,\Omega$, $R_5 = 500\,\Omega$, $U_s = 30\,\mathrm{V}$



V, A, Ω egységrendszerben számolunk. A forrás felől nézve az eredő ellenállás:

$$R_e = R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4+R_5}} = 40 + \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{600}} = 40 + \frac{600}{10} = 100\,\Omega,$$

a keresett

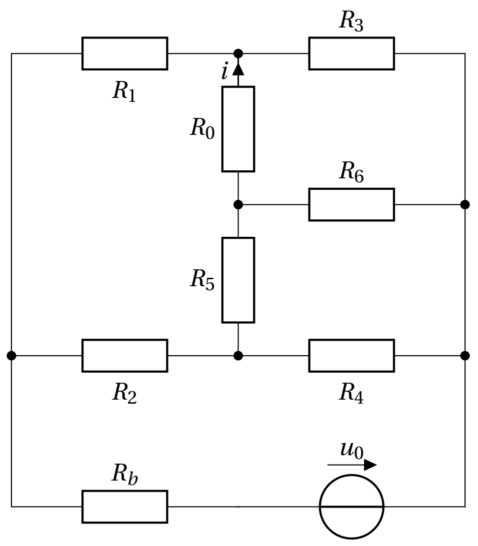
$$I_s = \frac{U_s}{R_e} = 0{,}3\,\mathrm{A}.$$

Áramosztással (az I_s áram eloszlik R_1 és R_2 párhuzamos eredője, valamint R_4 és R_5 soros eredője között)

$$U = R_5 \cdot I_s \cdot \frac{R_1 \times R_2}{R_1 \times R_2 + R_4 + R_5}$$

$$U = 500 \cdot 0{,}3 \cdot \frac{100 \times 200}{100 \times 200 + 100 + 500} = 150 \cdot \frac{2/3 \cdot 100}{2/3 \cdot 100 + 600} = 150 \cdot \frac{200}{2000} = 15\,\mathrm{V}.$$

3.4. Határozza meg a hálózatban R_1 értékét úgy, hogy a bejelölt i áram zérus legyen!



Az R_0 ellenállás árama nulla, ha ekvipotenciális csomópontok közé kapcsolódik. Ebben az esetben R_0 elhagyható. Az R_4, R_5, R_6 ellenállásokat eredőjükkel helyettesítjük:

$$R_x = (R_5 + R_6) \times R_4$$

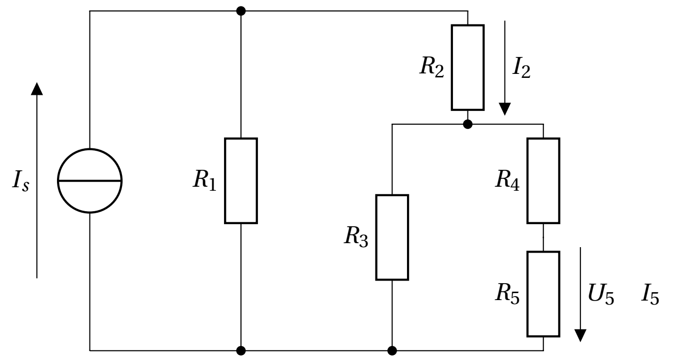
$$\frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_x}{R_x + R_2} \cdot \frac{R_6}{R_5 + R_6}$$

Átrendezve

$$R_1 = R_3 \left[\frac{R_2}{R_4} + \frac{R_2 + R_5}{R_6} + \frac{R_2 R_5}{R_4 R_6} \right].$$

(Vegyük észre, hogy $R_5 = 0$ [rövidzár], $R_6 \to \infty$ [szakadás] esetben az egyszerű Wheatstone-hidat kapjuk, a formula vissza is adja a kiegyenlítés feltételét.)

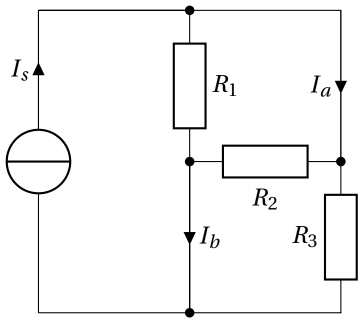
3.5. Határozzuk meg a bejelölt U_5 feszültséget!



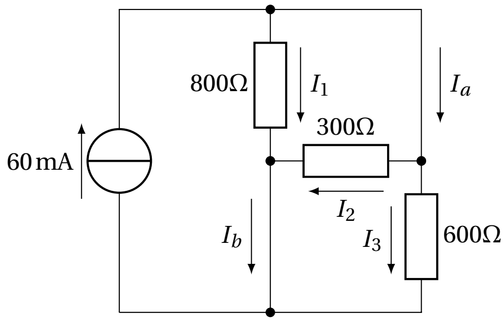
$$U_5 = I_5 \cdot R_5 = I_2 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4 + R_5} \cdot R_5 = I_s \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3 \times (R_4 + R_5)} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4 + R_5} \cdot R_5$$

3.6. Határozzuk meg az ábra hálózatában I_a és I_b áramok értékét!

$R_1 = 800\,\Omega$, $R_2 = 300\,\Omega$, $R_3 = 600\,\Omega$, $I_s = 60\,\text{mA}$.

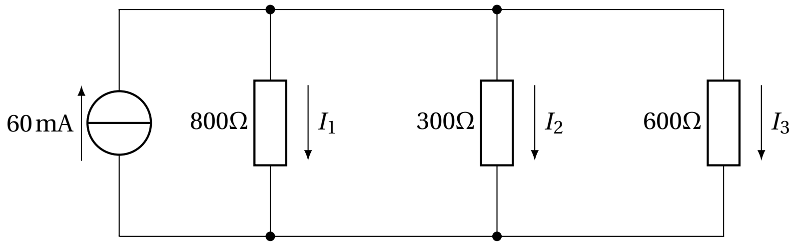


A három ellenállás párhuzamosan van kapcsolva:



Áramosztással[1]:

$$I_1 = 60 \cdot \frac{300 \times 600}{800 + 300 \times 600} = 60 \cdot \frac{200}{1000} = 12 \text{ mA}$$
$$I_2 = 60 \cdot \frac{600 \times 800}{300 + 600 \times 800} = 60 \cdot \frac{200}{1000} = 32 \text{ mA}$$



A felső csomópontra felírható áramtörvény:

$$-60 + I_1 + I_a = 0$$

Ebből

$$I_a = 60 - I_1 = 60 - 12 = 48\,\text{mA}$$

A középső csomópontra felírt áramtörvény:

$$-I_1 - I_2 + I_b = 0$$

amiből

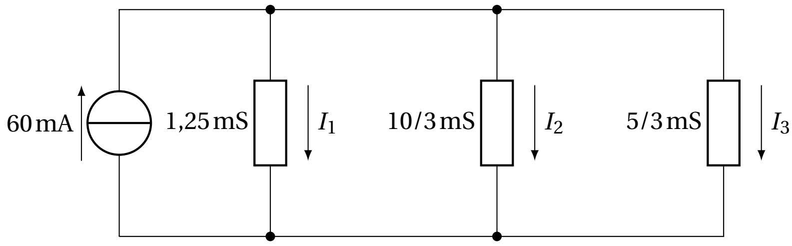
$$I_b = I_1 + I_2 = 12 + 32 = 44\,\text{mA}.$$

$$I_1 = 60 \cdot \frac{300 \times 600}{800 + 300 \times 600} = 60 \cdot \frac{200}{1000} = 12 \text{ mA}$$
$$I_2 = 60 \cdot \frac{600 \times 800}{300 + 600 \times 800} = 60 \cdot \frac{200}{1000} = 32 \text{ mA}$$

[1] Ügyeljünk rá, hogy a számlálóban a „másik” ág rezisztenciája, a nevezőben a két ág rezisztenciájának összege, nem pedig párhuzamos eredője áll

3.6.1. Konduktanciákkal számolva

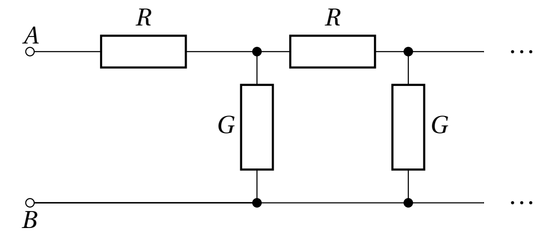
Az ismételt áramosztást elkerülhetjük, ha vezetésekkel számolunk az (1) formula alapján. Ügyeljünk rá, hogy ebben az esetben nem a „másik” ág vezetése van a számlálóban!



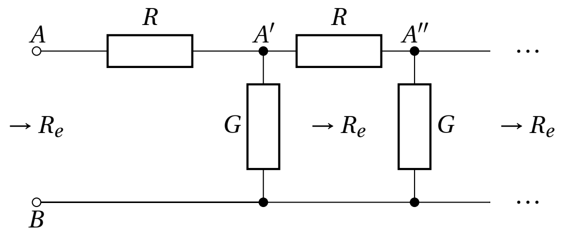
$$I_1 = 60 \cdot \frac{1,25}{1,25 + 10/3 + 5/3} = 60 \cdot \frac{1,25}{6,25} = 12 \text{ mA}$$

$$I_2 = 60 \cdot \frac{10/3}{1,25 + 10/3 + 5/3} = 60 \cdot \frac{10/3}{6,25} = 32 \text{ mA}.$$

3.7. Határozzuk meg az alábbi végtelen ellenállás-hálózat eredő ellenállását!



Mivel a hálózat végtelen hosszan folytatódik, az AB kétpólus eredő ellenállása egyenlő az A' csomóponttól jobbra eső hálózat eredő ellenállásával, ami egyenlő az A" csomóponttól jobbra esővel, s. í. t.



Emiatt az R_e eredő ellenállás

$$R_e = R + \left[\frac{1}{G} \times R_e\right] = R + \frac{R_e/G}{1/G + R_e}.$$

Innen

$$(R_e - R)\left(\frac{1}{G} + R_e\right) = \frac{R_e}{G},$$

$$R_e^2 - RR_e - \frac{R}{G} = 0.$$

A megoldás:

$$R_e = \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 4R/G}}{2} = \frac{R}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{RG}}\right],$$

ami abban a speciális esetben, ha $R = 1/G$,

$$R_e = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) R \approx 1{,}618R$$

eredményre vezet (a mínusz előjelhez tartozó megoldás nyilvánvalóan értelmetlen, hiszen $R > 0$ esetben negatív eredő ellenállást adna). R_e és R aránya az aranymetszésnek megfelelően alakul, amely sok más, általában rendkívül hasznos tudományos probléma megoldásánál, pl. a nyulak szaporodását modellező Fibonacci-sorozatnál is felbukkan.[2]

[2] Másrészt ha az $|RG|$ szorzat sokkal kisebb, mint 1, akkor az eredő ellenállás

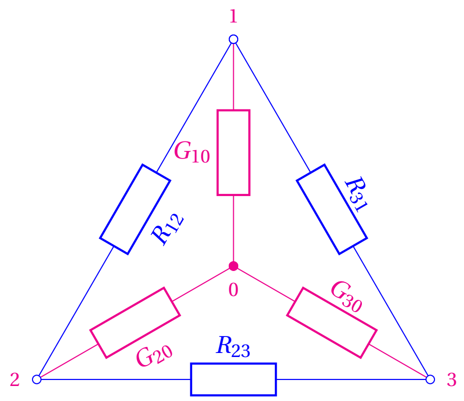
$$R_e = \frac{R}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4}{RG}}\right] \approx \frac{R}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{RG}}\right],$$

$$R_e \approx \sqrt{\frac{R}{G}},$$

ami a későbbi tanulmányainkban gyakran vissza fog köszönni.

4. Csillag-delta (Π-T) átalakítás

Az ábrán látható kétféle hárompólus (piros: csillag- vagy T-kapcsolás, kék: delta/háromszög- vagy Π-kapcsolás) egymásba alakítható könnyen megjegyezhető formulák felhasználásával.

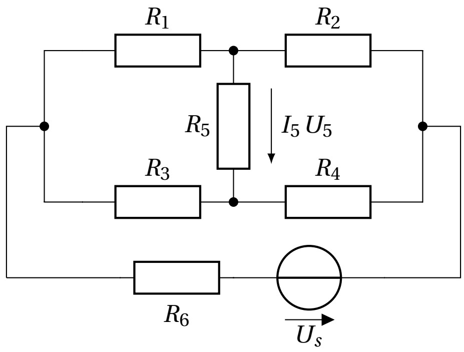


Csillag (T)	Δ (Π)
$G_* = G_{10} + G_{20} + G_{30}$	$R_\Delta = R_{12} + R_{23} + R_{31}$
$R_{10} = \dfrac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_\Delta}$	$G_{12} = \dfrac{G_{10} \cdot G_{20}}{G_*}$
$R_{20} = \dfrac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_\Delta}$	$G_{23} = \dfrac{G_{20} \cdot G_{30}}{G_*}$
$R_{30} = \dfrac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_\Delta}$	$G_{31} = \dfrac{G_{30} \cdot G_{10}}{G_*}$

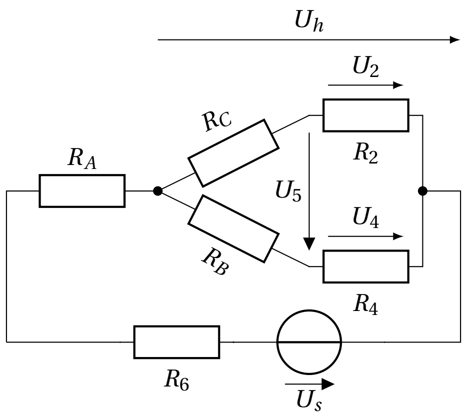
A delta->csillag átalakítás formulája könnyen megjegyezhető: a csillag $R_{\mu 0} = \frac{1}{G_{\mu 0}}$ ellenállása a két közrefogó delta-ellenállás szorzata osztva a háromszög kerületi ellenállásával. A fordított irány konduktanciákkal kifejezve ezzel teljesen analóg módon adódik.

4.1. Határozzuk meg a bejelölt áramot!

$R_1 = 110\,\Omega$, $R_2 = 100\,\Omega$, $R_3 = 90\,\Omega$, $R_4 = 100\,\Omega$, $R_5 = 200\,\Omega$, $R_6 = 50\,\Omega$, $U_s = 12\,\text{V}$.



Alakítsuk át a hálózatot a bal oldali delta-elrendezést csillag-elrendezésre változtatva:



$$R_\Delta = R_1 + R_3 + R_5 = 400\,\Omega,$$

$$R_A = \frac{R_1 R_3}{R_\Delta} = 24{,}75\,\Omega,$$

$$R_B = \frac{R_3 R_5}{R_\Delta} = 45\,\Omega,$$

$$R_C = \frac{R_1 R_5}{R_\Delta} = 55\,\Omega.$$

Határozzuk meg a bejelölt U_2 és U_4 feszültséget, tudva, hogy az $U_5 + U_4 - U_2 = 0$, vagyis

$$U_5 = U_2 - U_4$$

alakban fejezhető ki. A bejelölt U_h feszültség meghatározható feszültségosztással:

$$U_h = U_s \cdot \frac{(R_4 + R_B) \times (R_2 + R_C)}{(R_4 + R_B) \times (R_2 + R_C) + R_A + R_6} = 12 \frac{(100 + 45) \times (100 + 55)}{(100 + 45) \times (100 + 55) + 24{,}75 + 50} = 12 \frac{145 \times 155}{145 \times 155 + 74{,}75} = 6\,\text{V}.$$

Ismételt feszültségosztással:

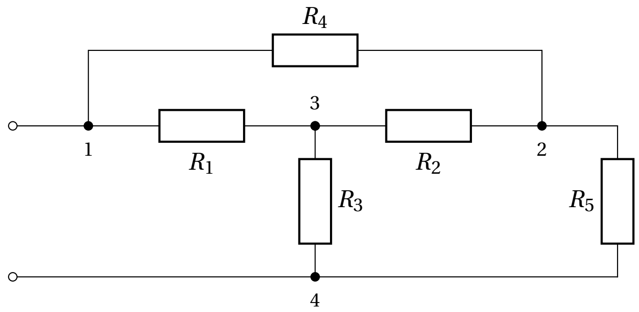
$$U_2 = U_h \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_C} = 6 \frac{100}{100 + 55} = 3{,}87\,\text{V},$$

$$U_4 = U_h \cdot \frac{R_4}{R_4 + R_B} = 6 \frac{100}{100 + 45} = 4{,}14\,\text{V},$$

$$I_5 = \frac{U_5}{R_5} = \frac{U_2 - U_4}{R_5} = \frac{3{,}87 - 4{,}14}{200} = -1{,}35\,\text{mA}.$$

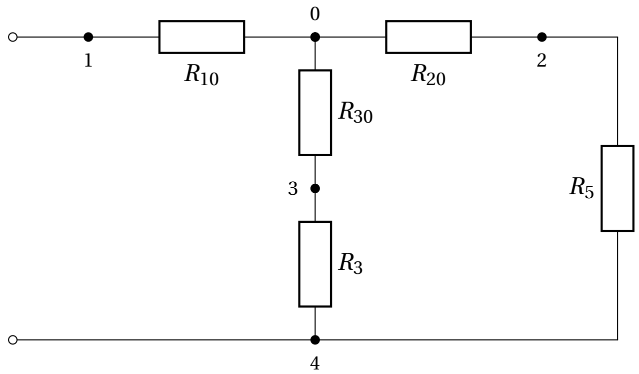
4.2. Határozza meg az alábbi kétpólus (áthidalt T-tag) eredő ellenállását!

$R_1 = R_2 = R_5 = 600\,\Omega$, $R_3 = 360\,\Omega$, $R_4 = 1000\,\Omega$.



4.2.1. Delta-csillag átalakítással

Alakítsuk az R_1, R_2, R_4 Π-elrendezésű hálózatrészt T-elrendezéssé!



$$R_\Delta = R_1 + R_2 + R_4 = 2200\,\Omega,$$

$$R_{10} = \frac{R_1 R_4}{R_\Delta} = 272{,}73\,\Omega,$$

$$R_{30} = \frac{R_1 R_2}{R_\Delta} = 163{,}64\,\Omega,$$

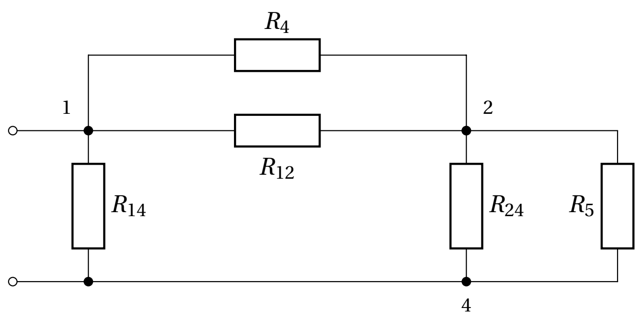
$$R_{20} = \frac{R_2 R_4}{R_\Delta} = 272{,}73\,\Omega.$$

($R_{10} = R_{20}$, mert az eredeti delta-elrendezés is szimmetrikus.) Ezzel

$$R_e = 272{,}73\,\Omega + (272{,}73\,\Omega + 600\,\Omega) \times (163{,}64\,\Omega + 360\,\Omega) = 600\,\Omega.$$

4.2.2. Csillag-delta átalakítással

Alakítsuk az R_1, R_2, R_3 elemekből álló T-elrendezést ekvivalens Π-kapcsolássá!



$$G_* = \frac{1}{600} + \frac{1}{600} + \frac{1}{360} = \frac{1}{1800}\,\mathrm{S}.$$

$$R_{12} = \left(\frac{G_1 G_2}{G_*}\right)^{-1} = 2200\,\Omega,$$

$$R_{24} = \left(\frac{G_2 G_3}{G_*}\right)^{-1} = 1320\,\Omega,$$

$$R_{14} = \left(\frac{G_1 G_3}{G_*}\right)^{-1} = 1320\,\Omega,$$

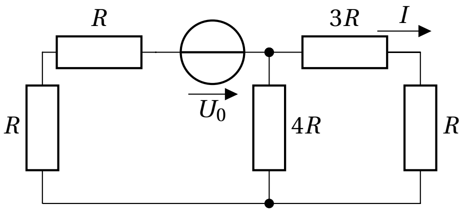
(szintén szimmetrikus, mert az eredeti csillag (pi)-elrendezés is szimmetrikus). Ezzel

$$R_e = R_{14} \times (R_4 \times R_{12} + R_5 \times R_{24})$$

$$R_e = 1320 \times (687{,}5 + 412{,}5) = 600\,\Omega.$$

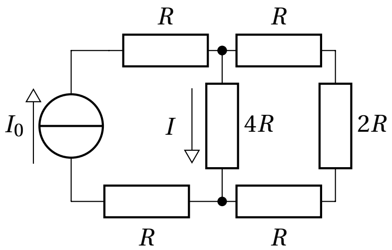
5. Gyakorlófeladatok

1. Fejezze ki I értékét!



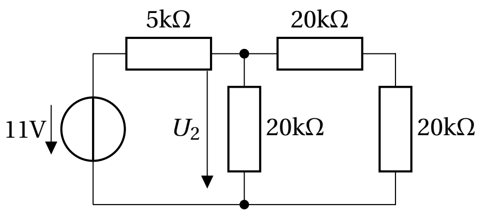
$(I = \frac{U_0}{8R})$

2. Fejezze ki I értékét!



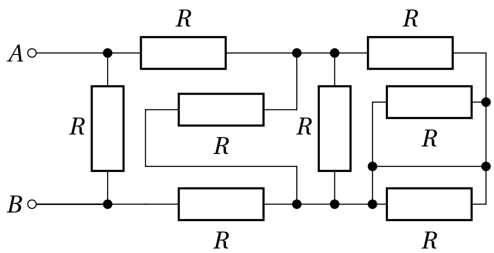
$(I = \frac{I_0}{2})$

3. Adja meg U_2 értékét!



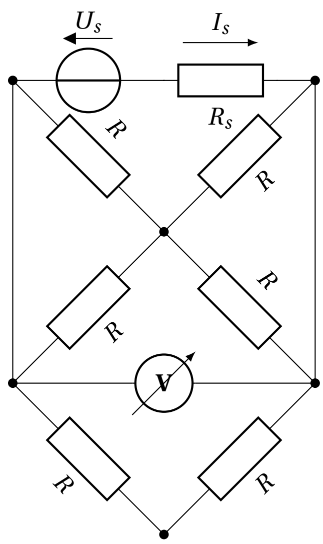
$(U_2 = 8\,\text{V})$

4. Határozzuk meg az alábbi kétpólus eredő ellenállását, ha minden ellenállás $R = 1\,\Omega$ nagyságú!



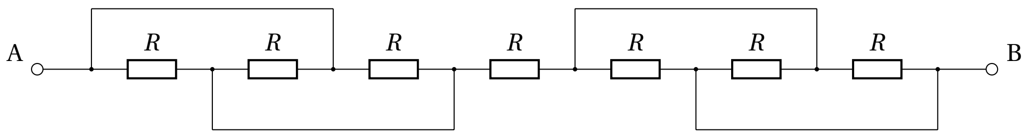
$(0{,}7\,\Omega)$

5. Határozzuk meg az ideális feszültségmérő által mutatott feszültség értéket, ha $R = 60\ \Omega$, $U_s = 9\ \text{V}$, $R_s = 50\ \Omega$! Mekkora az R_s ellenálláson átfolyó I_s áram nagysága? (Az ideális feszültségmérőt szakadásnak tekinthetjük.)



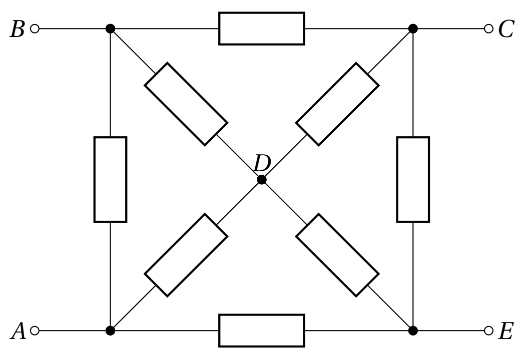
($U = 4\,\mathrm{V}$, $I_s = 100\,\mathrm{mA}$)

6. Számítsa ki az AB kétpólus eredő ellenállását!



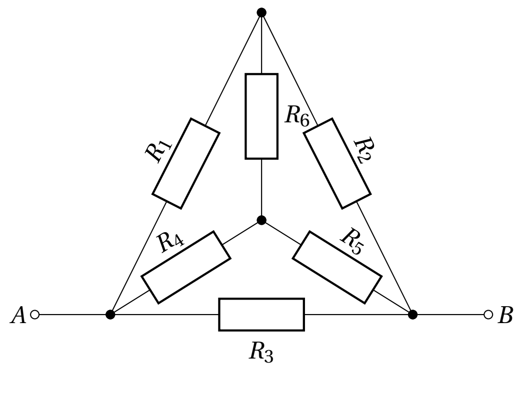
($R_{AB} = \frac{5}{3}R$)

7. Számítsuk ki az alábbi négypólus A és C kapcsai között mérhető eredő ellenállást, ha minden ellenállás értéke R!



($R_e = \frac{2}{3}R$)

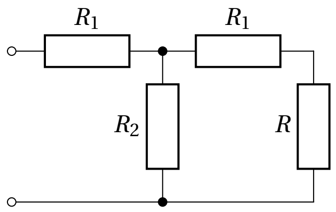
8. Számítsa ki az AB kétpólus eredő ellenállását! ($R_1 = 19\ \Omega$, $R_2 = 7{,}6\ \Omega$, $R_3 = 9{,}5\ \Omega$, $R_4 = 5\ \Omega$, $R_5 = 2\ \Omega$, $R_6 = 4\ \Omega$)



($R_{AB} = 3{,}5\,\Omega$)

9. Az R_1 és R_2 ellenállások értéke adott, pozitív érték. Válasszuk meg R értékét úgy, hogy a kétpólus eredő ellenállása legyen

   - ugyancsak R;
   - előírt R_e! Pozitív R esetén mekkora lehet az eredő R_e minimális és maximális értéke?



(

$$\left(R = R_1\sqrt{1 + \frac{2R_2}{R_1}}\right)$$

ill.

$$\left(R = \frac{(R_1 + R_2)R_e - (R_1 + 2R_2)R_1}{R_1 + R_2 - R_e},\ R_1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} < R_e < R_1 + R_2\right)$$

)