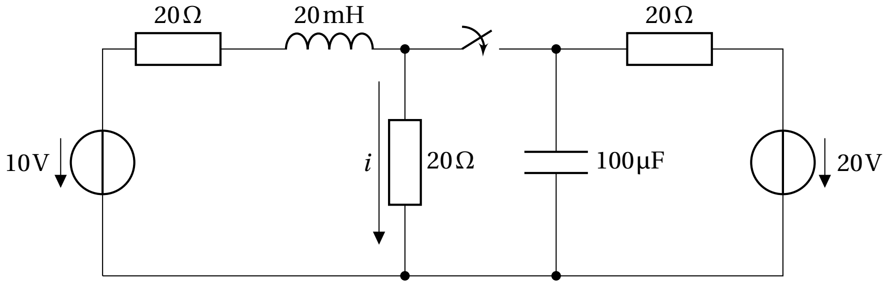
JELEK ÉS RENDSZEREK I (BMEVIHVAA00)
6. gyakorlat

Szerkesztette: Dr. Horváth Péter, BME HVT

2021. március 31.

1. feladat

Határozzuk meg a 1. ábra hálózatában a bejelölt i áram kezdeti, kiindulási és végértékét, ha a kapcsolót $t = 0$ időpontban zárjuk!



1. ábra. Az 1. feladat hálózata

A feladatban a kapcsolót a $t = 0$ időpillanatban zárjuk. Ezért a $t = 0$ kitüntetett szerepet játszik. Fontos különbséget tenni a kapcsoló zárása előtti ($t = -0$) időpillanat és a kapcsoló zárását követő időpillanat ($t = +0$) között. A változók $t = -0$-beli értékeit kiindulási értékeknek, a $t = +0$-beli értékeiket pedig kezdeti értékeknek nevezzük.

1.0.1. Kiindulási ($t = -0$) értékek

A kapcsoló nyitott állapotában ($t < 0$ értékekre) a hálózat valójában két, egymástól független hálózatrészre esik szét. Mindkét forrás egyenfeszültség-forrás. Feltehetjük, hogy a $t = -0$-ban a hálózatra ránézve beállt az állandósult állapot: mindkét forrást „nagyon régen” (mondjuk a $t = -\infty$-ben) kapcsolták a hálózatra, és mire a $t = -0$-hoz érkezünk, a hálózatban minden tranziens folyamat lezajlik. A $t = -0$-hoz közeledve csak egyenfeszültségek és egyenáramok vannak a hálózatban, nincsenek időben változó mennyiségek. A tekercs karakterisztikája:

$$u_L = Li'_L \equiv L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t},$$

azonban időbeli változások híján az időbeli deriváltak értéke zérus. A tekercs feszültsége tehát

$$u_L(-0) = 0,$$

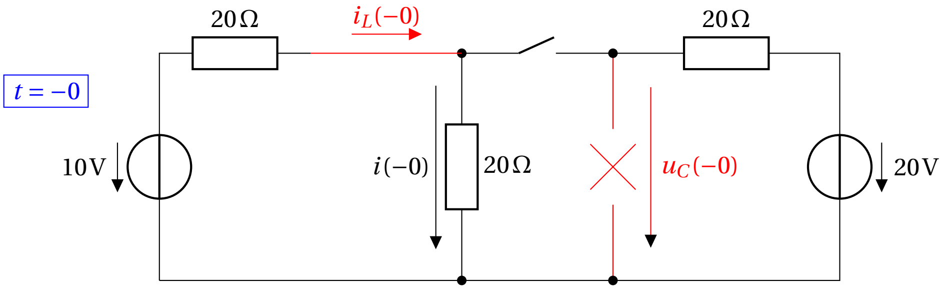
ami azt jelenti, hogy a $t = -0$-ban a tekercset rövidzárral ($u = 0$ karakterisztikájú kétpólus) helyettesíthetjük: az egyenáram számára a tekercs csak „egy darab drót”. A kondenzátor karakterisztikája

$$i_C = Cu'_C \equiv C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t},$$

ami időbeli változások híján

$$i_C(-0) = 0,$$

vagyis a kondenzátor szakadásként viselkedik ($i = 0$ karakterisztikájú kétpólus). A kondenzátoron egyenáram nem folyik, hiszen az két vezető felület között egy ideális elektromos szigetelő. A kondenzátor fel van töltve a 20 V-os forrás feszültségére, a körben áram nem folyik. Ezzel meg tudjuk rajzolni a hálózat $t = -0$ pillanatban érvényes (csak rezisztív komponenseket tartalmazó) helyettesítő képét (2. ábra).



2. ábra. Az 1. feladat hálózatának $t = -0$-ban érvényes rezisztív helyettesítő képe

A helyettesítő kép alapján

$$i(-0) = i_L(-0) = \frac{10}{2 \cdot 20} = 0{,}25\,\mathrm{A},$$

a kondenzátor feszültsége pedig

$$u_C(-0) = 20\,\mathrm{V}.$$

1.0.2. Kezdeti ($t = +0$) értékek

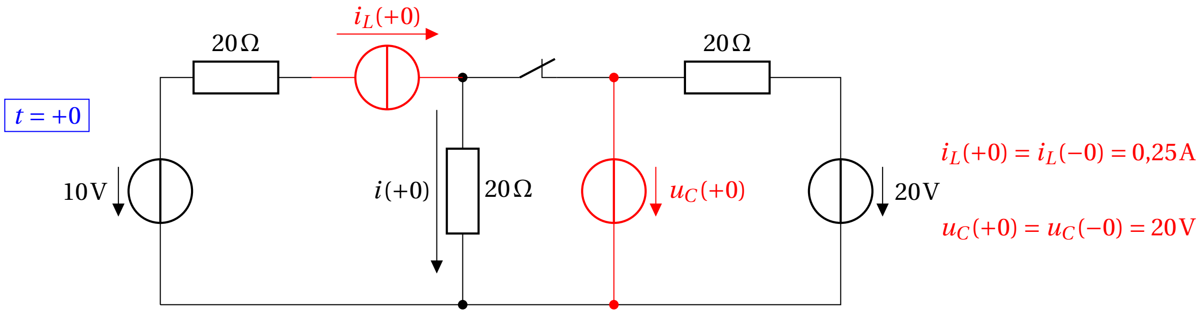
A $t = 0$-ban zárjuk a kapcsolót, a két független hálózatból egyetlen összefüggő hálózat jön létre. A $t = -0$ és a $t = +0$ időpillanatokat azonban összeköti az állapotváltozók folytonossága: a tekercs árama és a kondenzátor feszültsége nem ugorhat, folyamatosan megy át a kapcsolás előtt és utáni időpillanat között. Biztosak lehetünk benne, hogy

$$i_L(+0) = i_L(-0) = 0{,}25\,\mathrm{A},$$

és

$$u_C(+0) = u_C(-0) = 20\,\mathrm{V}.$$

A keresett i áram azonban nem állapotváltozó, értéke ugrásszerűen változhat a kapcsoló zárása következtében. Felvehetünk egy rezisztív helyettesítő képet, ami kizárólag a $t = +0$-ban érvényes, és kifejezi, hogy a tekercs árama, illetve a kondenzátor feszültsége megőrzi a kapcsoló zárása előtti értéket. Ezt úgy érjük el, hogy a tekercset a kiindulási értéknek megfelelő áramú független áramforrással, a kondenzátort a kiindulási értéknek megfelelő feszültségű feszültségforrással helyettesítjük (3. ábra):



3. ábra. Az 1. feladat hálózatának $t = +0$-ban érvényes rezisztív helyettesítő képe

Az Ohm-törvényből

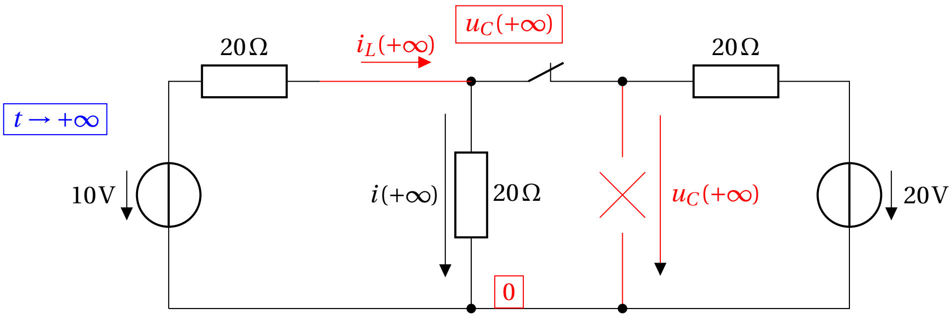
$$i(+0) = \frac{u_C(+0)}{20} = \frac{20}{20} = 1\,\mathrm{A}.$$

Az i áram tehát a $t = 0$-ban felugrik 1A értékre.

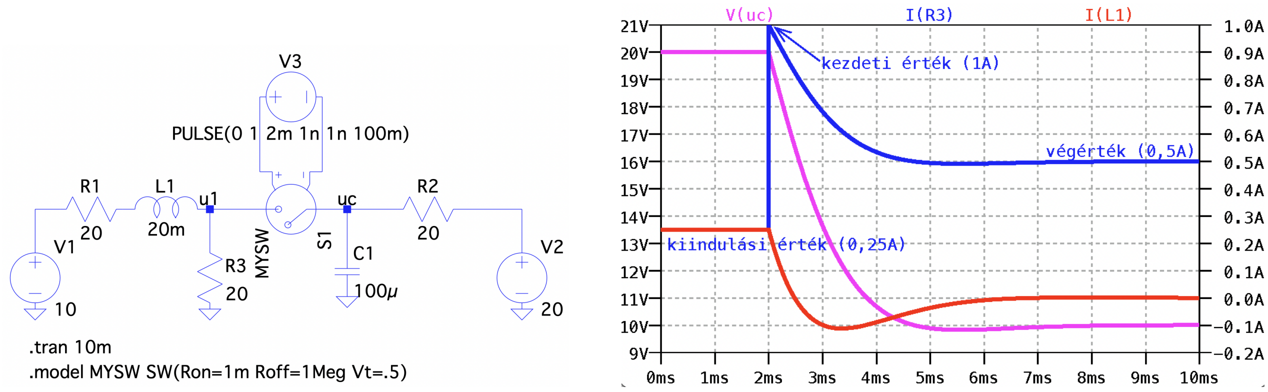
1.0.3. Végértékek ($t \to +\infty$)

A kapcsoló zárt állásában, ha elég sok idő telik el, ismét beáll az állandósult állapot ($t \to +\infty$). A megfontolások ugyanazok, mint a $t = -0$ kiindulási értékek meghatározásánál (a tekercs rövidzárrá, a kondenzátor szakadássá válik), de a hálózatban most zárva van a kapcsoló, más a topológia.
Az 4. ábra alapján, ha az alsó csomópont potenciálja zérus, akkor az egyetlen ismeretlen potenciálú csomópontra

$$\frac{u_C(+\infty) - 10}{20} + \frac{u_C(+\infty) - 20}{20} + \frac{u_C(+\infty)}{20} = 0,$$



4. ábra. Az 1. feladat hálózatának $t \to \infty$-re érvényes rezisztív helyettesítő képe



(a) LTSpice hálózat

(b) Az állapotváltozók (lila: u_C, vörös: i_L) és az i válasz (kék) időfüggvénye. Ügyeljünk a kettős y-tengelyre!

5. ábra. Az 1. feladat LTSpice-ban

$$3u_C(+\infty) = 30,$$

$$\boxed{u_C(+\infty) = 10\,\mathrm{V}}$$

Ez a hálózatra ránézve azonnal elhihető, mert a jobb oldali és az alsó ellenállás a 20V-os forrás feszültségét 1:1 arányban osztja, és arra csatlakozik a 10 V-os forrás a bal oldali ellenálláson keresztül. Vagyis a három ellenállás közös csomópontja 10 V potenciálon van, a bal oldali ellenállás ekvipotenciális csomópontok közé csatlakozik, árama zérus. Emiatt a tekercs árama is zérus, a keresett i áramot pedig csak a 20 V-os forrás állítja elő. Emiatt

$$\boxed{i_L(+\infty) = 0, \qquad i(+\infty) = \frac{10}{20} = 0{,}5\,\mathrm{A}.}$$

1.1. Ellenőrzés szimulációval

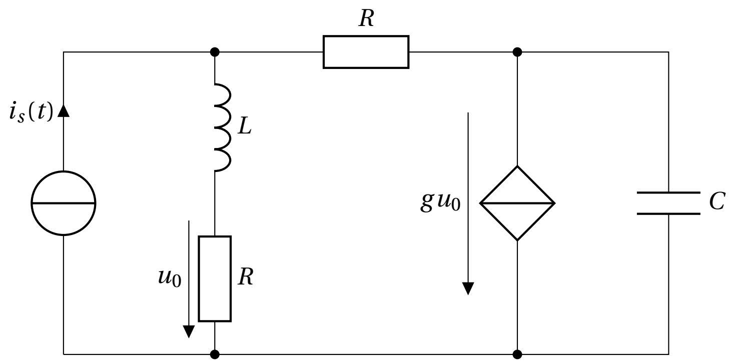
A megoldást szimulációval is ellenőrizhetjük, egyben pedig azt is láthatjuk, hogy pontosan hogyan viselkednek a mennyiségek $t > 0$-ra. Az ideális kapcsoló helyett egy valós (véges R_{on} be- és véges kikapcsolási R_{off} ellenállással jellemezhető) feszültségvezérelt kapcsolót használhatunk. Ha a vezérlő feszültség a V_t küszöbnél magasabb, akkor a kapcsoló bekapcsolt (R_{on}) állásban van. A kapcsoló modelljében ezeket a mennyiségeket egy direktívával adjuk meg. A bekapcsolt ellenállás nagyságrendekkel kisebb, a kikapcsolt pedig nagyságrendekkel nagyobb a hálózatban szereplő ellenállások értékénél, ezért a kialakuló áramokat és feszültségeket nem befolyásolja. A kapcsolóra kötött impulzusgenerátor feszültsége a $t = 2\,\mathrm{ms}$-ban 0V-ról 1V-ra ugrik 1 ns felfutási idővel (ami jóval kisebb, mint a hálózat időállandója, ami az ábráról leolvasható módon a milliszekundum nagyságrendjébe esik). A szimulációban tehát $t = 2\,\mathrm{ms}$ felel meg a számítás $t = 0$ időpontjának, de ezt az eltolást csak azért építettük be, hogy a hálózat előélete is jól látható legyen. Az LTSpice akkor is helyesen határozza meg a kiindulási értékeket, ha a kapcsolót valóban a $t = 0$-ban zárnánk, csak az eredmények kevésbé lennének követhetők az ábrán. A b) ábrán ellenőrizhetők a kiszámolt mennyiségek: az állapotváltozók valóban folytonosan megy át a kapcsolás pillanatában, míg az i áramnak ugrása van. Az ábráról leolvasható -0-beli, $+0$-beli és $t \to \infty$-beli értékek megfelelnek az általunk számítottaknak. A jelek pontos időbeli lefolyásának kiszámításához fel kellene írnunk és meg kellene oldanunk az ÁVLNA-t, amit a következő gyakorlatokon fogunk megtenni, azonban a szimulációból látszik, hogy ennek a másodrendű rendszernek rezgő jellegű szabad válasza van. A kapcsolási tranziens 10 ms után lecseng, beáll az állandósult állapot, a mennyiségek elérik a végértéküket. Az ábrán az i áram általunk kiszámolt kiindulási-, kezdeti- és végértékeit is bejelöltük.

2. feladat

Határozzuk meg a 6. ábra hálózatában a bejelölt u_0 feszültség kezdeti, kiindulási és állandósult állapotbeli értékeit, ha

$$i_s(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ I_0, & t > 0 \end{cases}$$

Írjuk fel a hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírásának normálalakját is, ha a gerjesztés a forrásáram, a válasz pedig az u_0 feszültség!



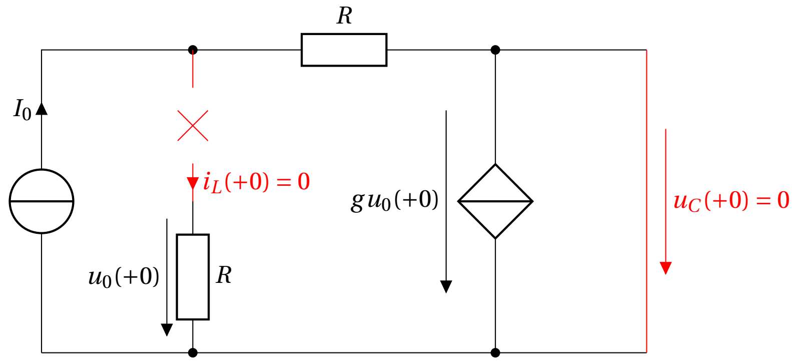
6. ábra. A 2. feladat hálózata

2.1. A kiindulási ($t = -0$) állapot

A gerjesztés $t < 0$-ra $i_s \equiv 0$, a hálózat energiamentes (bekapcsolási folyamatról van szó), ezért minden mennyiség kiindulási értéke is zérus.

2.2. A kezdeti ($t = +0$) állapot

$t > 0$-ra a forrásáram $i_s(t) \equiv I_0$ (állandó). Az állapotváltozók folytonossága miatt $u_C(+0) = u_C(-0) = 0$ (a kondenzátor a $t = +0$-ban rövidzár) és $i_L(+0) = i_L(-0) = 0$ (a tekercs a $t = +0$-ban szakadás). Ezért



7. ábra. A 2. feladat hálózatára a $t = +0$-ban érvényes helyettesítő kép

$$u_0(+0) = Ri_L(+0) = 0$$

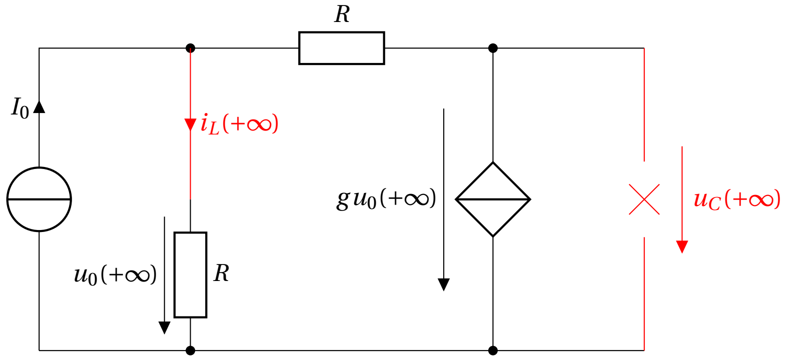
2.3. A végértékek

$t \to \infty$ mellett arra számítunk, hogy az állandó I_0 gerjesztés mellett a tranziensek lecsillapodását követően beáll az állandósult állapot. Ezt a 8. ábra helyettesítő képe alapján vizsgáljuk, ahol az állandó gerjesztés miatt a tekercs rövidzárral, a kondenzátor szakadással helyettesíthető. A független forrás és az ellenállások közös csomópontjára felírt áramtörvény

$$-I_0 + i_L(+\infty) + gu_0(+\infty) = 0,$$

azaz

$$i_L(+\infty) = I_0 - gu_0(+\infty) = I_0 - gRi_L(+\infty),$$



8. ábra. A 2. feladat hálózatára a $t\to\infty$-ben érvényes helyettesítő kép

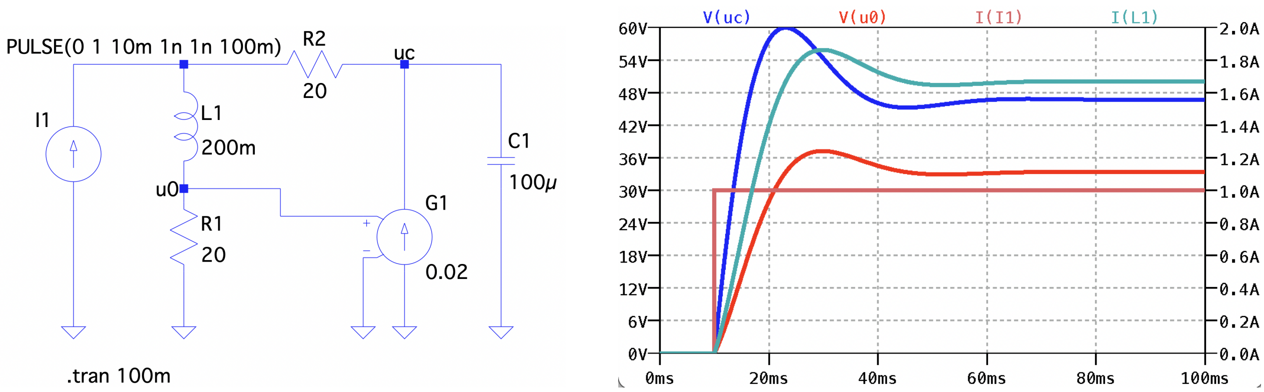
ahonnan

$$i_L(+\infty)=\frac{I_0}{1-gR},$$

és a válasz végértéke pedig

$$u_0(+\infty)=Ri_L(+\infty)=\frac{R\cdot I_0}{1-gR}.$$

A kifejezés $g=\frac{1}{R}$ esetben azonban értelmetlen, mert a nevező zérus. Ilyen paraméterválasztás mellett nem áll be az állandósult állapot, a rendszer instabil. A dinamikus rendszerek stabilitásával később foglalkozunk majd. A stabilitás például a rendszermátrix sajátértékeinek vizsgálatával dönthető el. Ebben a konkrét esetben az derül ki, hogy minden $g\geq\frac{1}{R}$ értékre instabil a rendszer, a hálózat feszültségei és áramai korlátos gerjesztés mellett is minden határon túl növekednek. Az instabilitás azért fordulhat elő, mert a hálózat a gerjesztő forráson kívül is tartalmaz aktív komponenst, a vezérelt áramforrást. Ilyen esetben mindig meg kell vizsgálni a rendszer stabilitását, mielőtt feltételeznénk, hogy véges gerjesztés mellett beáll az állandósult állapot.
Az eredményeket LTSpice-ban ellenőrizhetjük (9. ábra). A feszültségvezérelt áramforrást a G komponens valósítja meg (utalva a paraméterének diemenziójára). Látható, hogy $g=0{,}02\,\mathrm{S}$ választással beáll az állandósult állapot, szintén rezgő jellegű sajátválaszra utaló módon. Ha a g értékét 50 mS-nél nagyobbra választjuk, a szimulációban is láthatóvá válik az instabilitás.



(a) LTSpice hálózat

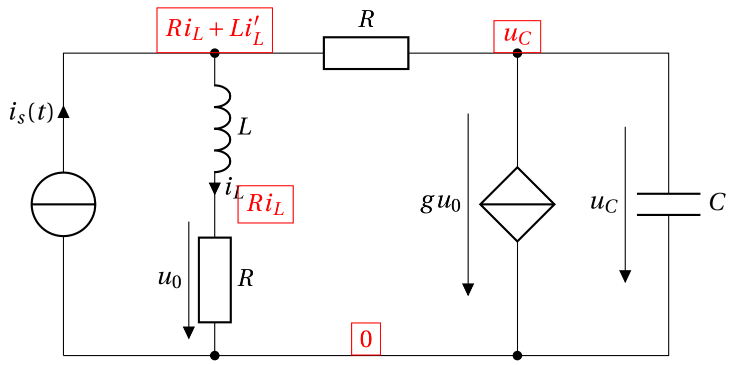
(b) Az állapotváltozók és az u_0 válasz időfüggvénye. Az áramforrás árama a $t=10\,\mathrm{ms}$-ban kapcsol be. Ügyeljünk a kettős y-tengelyre!

9. ábra. A 2. feladat LTSpice-ban

2.4. Az állapotváltozós leírás

A 10. ábrán bejelölt referenciairányokkal és csomóponti potenciálokkal számolunk. Az Ri_L potenciálú csomópontra vonatkozó áramtörvényt ($i_L=u_0/R$) közvetlenül felhasználva a másik két ismeretlen csomópontra vonatkozó áramtörvények:

$$\left.\begin{aligned}u_C:&\quad Cu_C'+gu_0+\frac{u_C-(Ri_L+Li_L')}{R}=0\\ Ri_L+Li_L':&\quad -i_s+i_L+\frac{(Ri_L+Li_L')-u_C}{R}=0\end{aligned}\right\}$$



10. ábra. Az állapotváltozók és a csomóponti potenciálok a 2. feladat hálózatában

Átrendezve és az első egyenletből i_L'-at kiküszöbölve megkapjuk az ÁVL normálalakját:

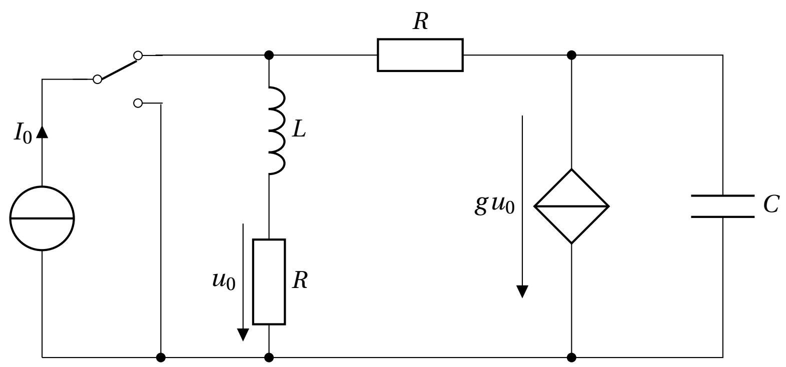
$$\left.\begin{aligned} u_C' &= \frac{1+gR}{C} i_L + \frac{1}{C} i_s \\ i_L' &= \frac{1}{L} u_C - \frac{2R}{L} i_L + \frac{R}{L} i_s \end{aligned}\right\}$$

a válaszra vonatkozó egyenlet pedig

$$u_0 = Ri_L.$$

2.5. Ugyanaz a feladat másképpen

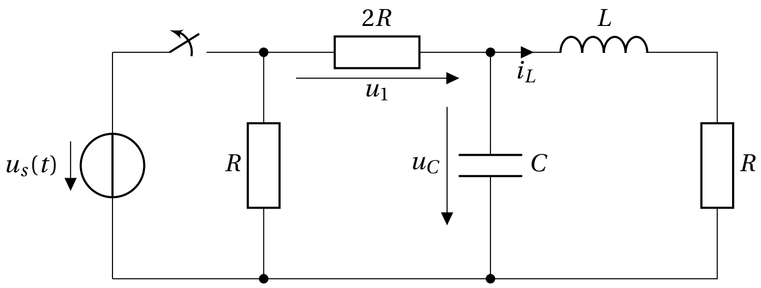
Gondoljuk végig, hogy a 11. ábra hálózatában, ha a kapcsolót a $t = 0$ időpillanatban az alsó állásból a felső állásba váltjuk, ugyanolyan viszonyok maradnak érvényben, mint az eredeti feladatkitűzés szerint!



11. ábra. A 2. feladat hálózata

3. feladat

Határozzuk meg a 12. ábra hálózatában az u_1 feszültség kezdeti-, kiindulási- és végértékeit, ha a kapcsolót $t = 0$ időpontban nyitjuk, és $u_s(t) = U_0$ (állandó)! Írjuk fel a hálózat állapotváltozós normálalakját a kapcsoló zárt állása mellett, ha a gerjesztés az $u_s(t)$ forrásfeszültség, a válasz pedig a bejelölt u_1 feszültség! Használja a bejelölt referenciairányokat!



12. ábra. A 3. feladat hálózata

3.1. A kiindulási értékek ($t = -0$)

A kiindulási állapot vizsgálatához (13. ábra) tudjuk, hogy $t < 0$-ra a kapcsoló zárt, és a feladat kitűzése szerint a forrás feszültsége állandó. Az állandó gerjesztés hatására a kondenzátor szakadásként, a tekercs rövidzárként tekinthető:
Az $u(-0)$ feszültségosztással

$$u_1(-0) = U_0 \frac{2R}{2R+R} = \frac{2}{3} U_0,$$

az állapotváltozók kiindulási értékei

$$u_C(-0) = U_0 \frac{R}{2R+R} = \frac{1}{3} U_0,$$

illetve

$$i_L(-0) = \frac{U_0}{2R+R} = \frac{U_0}{3R}.$$

(A bal oldali R ellenállás értékétől nyilvánvalóan függetlenül).

3.2. A kezdeti értékek ($t = +0$)

A $t = 0$-ban a kapcsolót nyitjuk, aminek hatására a hálózat gerjesztése megszűnik (ún. kikapcsolási folyamat). Mivel a gerjesztés $t = 0$-ban véges, az állapotváltozók értéke $t = +0$-ban nem ugrik. A gerjesztő feszültségforrást a kapcsoló leválasztja a hálózatról, azt a továbbiakban nem kell figyelembe venni. A $t = +0$-beli kezdeti értékeket fiktív forrásokkal vesszük figyelembe az alábbi helyettesítő képben (14. ábra): Itt

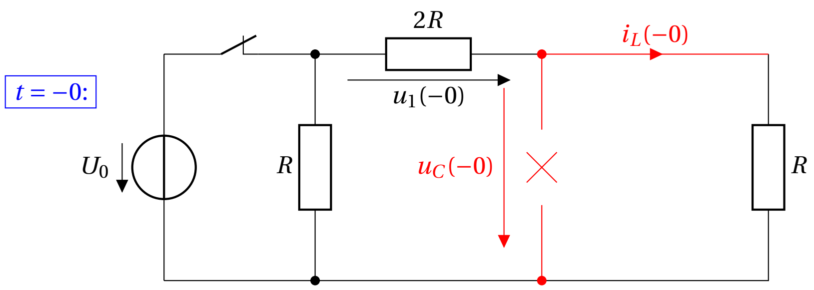
$$u_C(+0) = u_C(-0) = \frac{1}{3} U_0,$$

és

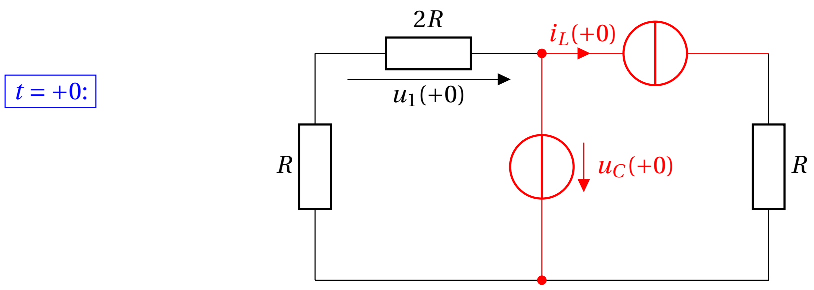
$$i_L(+0) = i_L(-0) = \frac{U_0}{3R}.$$

A keresett válasz kezdeti értéke feszültségosztással

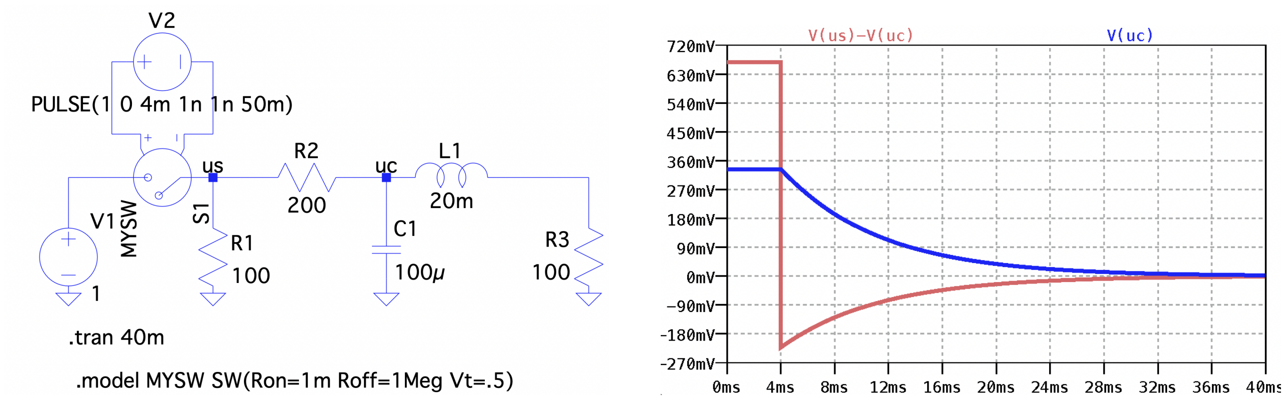
$$u_1(+0) = -u_C(+0) \cdot \frac{2R}{2R+R} = -\frac{1}{3} U_0 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{2}{9} U_0,$$



13. ábra. A kiindulási ($t = -0$) időpontra érvényes rezisztív helyettesítő kép



14. ábra. A kezdeti ($t = +0$) időpontra érvényes rezisztív helyettesítő kép



(a) LTSpice hálózat

(b) Az $u_1 = u_s - u_c$ válaszjel időfüggvénye

15. ábra. A 3. feladat LTSpice-ban: exponenciálisan lecsengő sajátválasz.

$i_L(-0)$ értékétől függetlenül. A válasz egy ellenállás feszültsége, nem állapotváltozó, ezért az értéke ugorhat, ahogy a példában ugrik is.
A változók végértéke ($t \to \infty$-beli határértékek) minden esetben nyilvánvalóan nulla, mert a hálózatban $t > 0$-ra nincs gerjesztés, és minden komponens passzív, ezért a $t = +0$-ban jelen levő energia az idő múlásával elenyészik.
A megoldást szimulációval ellenőrizhetjük, és az érdekesség kedvéért előre is tekinthetünk a következő gyakorlatokra.
A 15. a) ábrán az LTSpice szimulációs hálózat látható. A feszültségvezérelt reális kapcsolót vezérlő feszültség a V2 jelű impulzus-forrás, ami $t = 4\,\text{ms}$-ban kikapcsol (a szimulációban a $t = 4\,\text{ms}$ felel meg a számításban a $t = 0$-nak). A b) ábrán látható, hogy az u_1 feszültség valóban akkorát ugrik, amennyit kiszámoltunk, majd exponenciálisan lecseng. Az előadás alapján tudjuk, hogy a szóban forgó rendszer másodrendű, ezért két sajátérték jellemzi. A megadott elemértékek mellett ezek „ránézésre” valósak, ezért a rendszer a két időállandójával is jellemezhető, amelyek közül a nagyobb szintén „ránézésre” kb. 8 ms lehet (a kezdeti meredekség alapján pontosabban is meghatározható lenne). Ehhez az időállandóhoz képest a vezérlő forrásban beállított 1 ns jelemelkedési idő teljes mértékben elhanyagolható. Ugyancsak elhanyagolható a kapcsoló $R_{\text{on}} = 1\,\text{m}\Omega$ bekapcsolt állapotbeli ellenállása a hálózatban szereplő többi ellenálláshoz képest, a kikapcsolt állapotbeli $R_{\text{off}} = 1\,\text{M}\Omega$ ellenállás pedig olyan nagy ezekhez képest, hogy az szakadásnak tekinthető.
A 16. ábrán ugyanez a hálózat, módosított L és C értékekkel látható. Ebben az esetben a b) ábrán rezgő jellegű sajátválaszt figyelhetünk meg. Az ábrába a kondenzátor feszültségét is berajzoltunk, ami láthatóan folytonos a kikapcsolás pillanatában, és szintén rezgő jellegű.

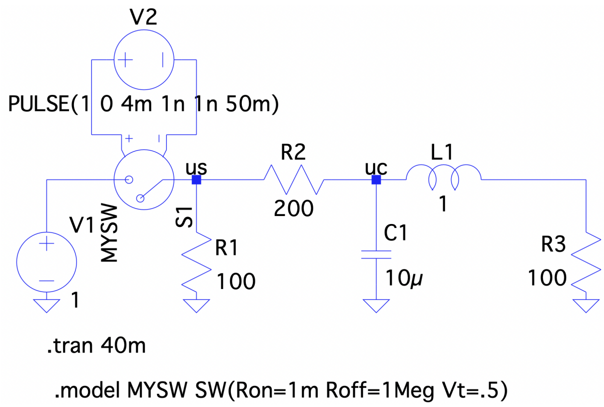
3.3. Az állapotváltozós leírás

A kapcsoló zárt állása mellett, általános $u_s(t)$ forrásfeszültség, mint gerjesztés mellett, a hálózat által reprezentált rendszer válasza u_1. Az állapotváltozók u_C és i_L, a bejelölt referenciairányokkal. Vegyünk fel csomóponti potenciálokat az 17. ábrán látható módon! Láthatjuk, hogy mindkét állapotváltozó értékét sikerült 1-1 csomóponti potenciálhoz kötnünk.
Az u_C ismeretlen csomóponti potenciál meghatározására szolgáló áramtörvény:

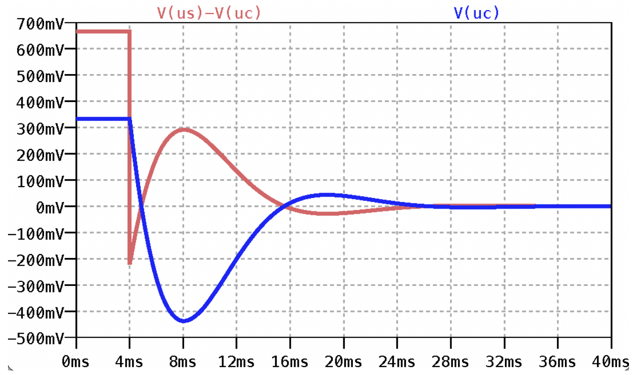
$$u_C: \quad \frac{u_C - u_s}{2R} + C u_C' + i_L = 0,$$

továbbá a tekercs karakterisztikája alapján a jobb oldali hurokra felírható feszültségtörvény alapján

$$u_C = R i_L + L i_L'.$$

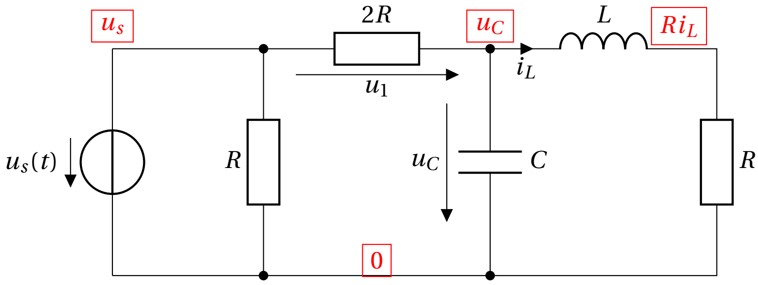


(a) LTSpice hálózat módosított L, C értékekkel



(b) Az $u_1 = u_s - u_c$ válaszjel és az u_C állapotváltozó időfüggvénye

16. ábra. A 3. feladat LTSpice-ban: rezgő jellegű sajátválasz.



17. ábra. Az állapotváltozós leírás felírása

Az első egyenletből

$$u'_C = -\frac{1}{2RC}u_C - \frac{1}{C}i_L + \frac{1}{2RC}u_s,$$

míg a második egyenletből

$$i'_L = \frac{1}{L}u_C - \frac{R}{L}i_L,$$

a válasz kifejezése pedig

$$u_1 = u_s - u_C = -u_C + u_s.$$

Ezzel az ÁVLNA (az állapotegyenletek bal oldalán 1-1 állapotváltozó deriváltja, a jobb oldalán az állapotváltozók és a gerjesztés; a válaszegyenlet jobb oldalán szintén az állapotváltozók és a gerjesztés áll):

$$\left.\begin{aligned} u'_C &= -\frac{1}{2RC}u_C - \frac{1}{C}i_L + \frac{1}{2RC}u_s \\ i'_L &= \frac{1}{L}u_C - \frac{R}{L}i_L \\ u_1 &= -u_C + u_s. \end{aligned}\right\}$$

Vektor-mátrix alakban az <u>állapotegyenlet</u>

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u'_C \\ i'_L \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2RC} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{u_s}_{u},$$

a válaszra vonatkozó egyenlet pedig

$$\underbrace{u_1}_{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{1}_{D} \cdot \underbrace{u_s}_{u}.$$

A kapcsos zárójelek a „rendszer mennyiségeit” jelölik.