

JELEK ÉS RENDSZEREK I (BMEVIHVAA00)

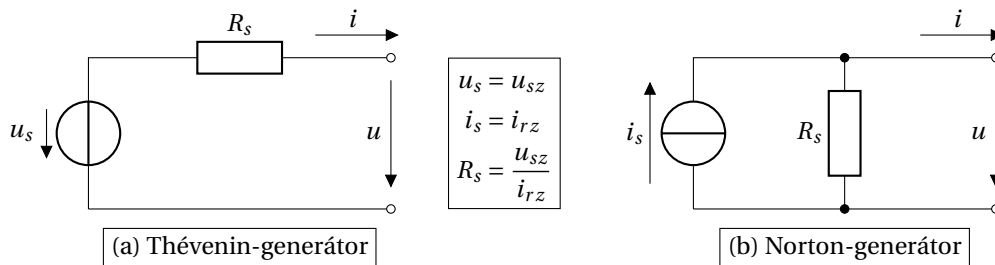
3. gyakorlat

Szerkesztette: Dr. Horváth Péter, BME HVT

2020. október 2.

1. Jelölések

A helyettesítő generátorok tétele értelmében egy lineáris karakterisztikájú kétpólusok összekapcsolásából álló kétpólus helyettesíthető egy Thévenin- vagy egy Norton-generátorral. Ha a generátor áramának a referenciáirányát úgy választjuk, hogy a generátorra kapcsolt lezáró kétpóluson legyen szimmetrikus a feszültség és az áram referenciáiránya (vagyis a generátoron az áram és a feszültség referenciáiránya ellentétes), akkor



a Thévenin-generátorra felírható feszültségtörvény $-u_s + u + iR_s = 0$, amiből a generátor karakterisztikája

$$u = u_s - R_s i.$$

A Norton-generátorra felírható áramtörvény $-i_s + i + \frac{u}{R_s} = 0$, ahonnan

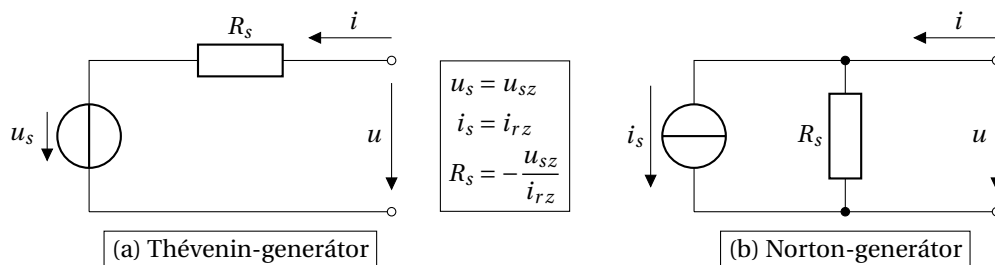
$$i = i_s - \frac{u}{R_s},$$

ahol R_s a generátor belső ellenállása.

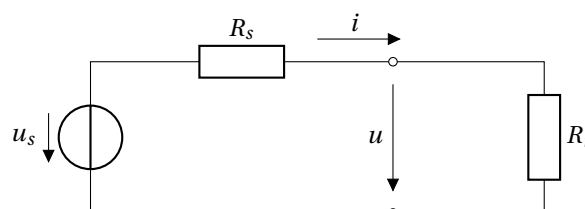
A helyettesítő generátorok paraméterei meghatározhatóak a helyettesítendő kétpólus u_{sz} üresjárási feszültségének és i_{rz} rövidzárási áramának számításával vagy mérésével. Az sz index a szakadással, az rz a rövidzárral való lezárásra utal. A fenti ábra referenciáirányaival

$$u_s = u_{sz}, \quad i_s = i_{rz}, \quad R_s = \frac{u_{sz}}{i_{rz}}$$

Ha a feszültség és áram referenciáirányát a generátoron választjuk szimmetrikusnak, ebből következően a generátorra csatlakozó kétpóluson ellentétesnek, akkor



Az ellenállással lezárt generátor teljesítményviszonyai:



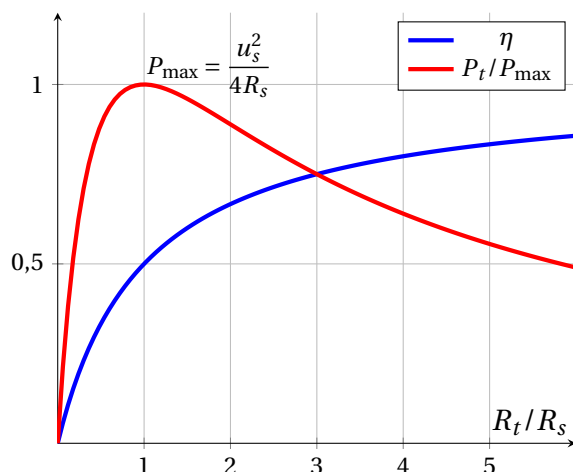
A generátorból kivehető teljesítmény maximális, ha $R_t = R_s$ értékű ellenállás csatlakozik hozzá (avagy $R_t/R_s = 1$). Ekkor $u = u_s/2$ (ill. $i = i_s/2$ a Norton-generátoron), $i = u_s/(2R_s)$ (ill. $u = i_s R_s/2$ a Norton-generátoron), a generátor teljesítménye és a lezáró ellenállás teljesítménye is

$$P = P_{\max} = \frac{u_s}{2} \cdot \frac{u_s}{2R_s} = \frac{u_s^2}{4R_s}.$$

A hatásfok 1/2, mert a lezárás teljesítményével egyenlő teljesítmény a generátor belső ellenállásán is disszipálódik. Az alábbi ábra a generátorra csatlakozó kétpólus teljesítményét és az

$$\eta = \frac{P_t}{P_{\text{forrás}}}$$

hatásfokot mutatja R_t/R_s függvényében:



A helyettesítő generátorok karakterisztikái alapján illusztrálhatjuk a teljesítményviszonyokat. A Thévenin-féle helyettesítő kép alapján

$$u = u_s - R_s i,$$

a forrás teljesítménye

$$P_s = u_s \cdot i,$$

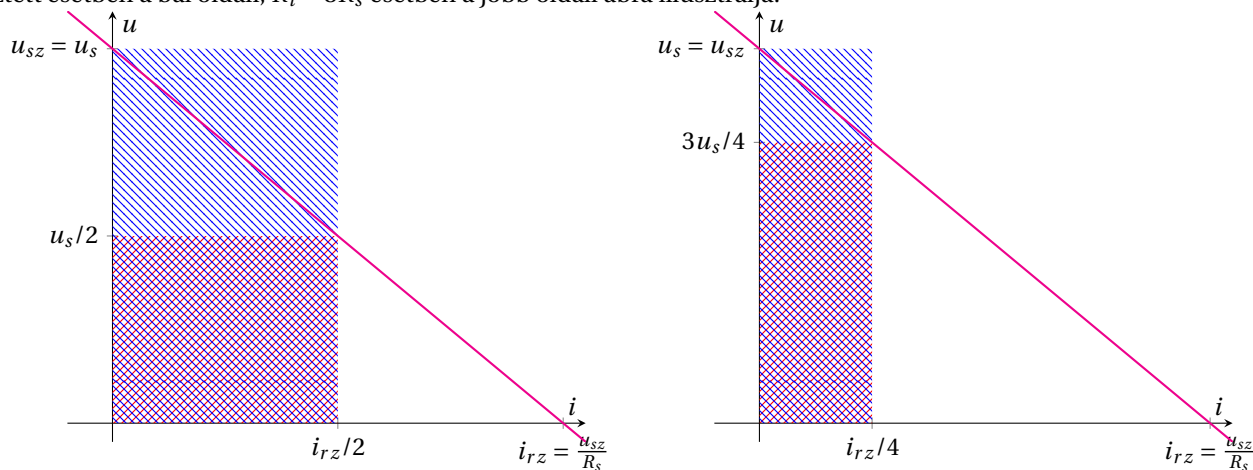
a lezárás teljesítménye

$$P_t = u \cdot i,$$

utóbbi illesztett esetben

$$P_t = \frac{u_s}{2} \cdot \frac{u_s}{2R_s},$$

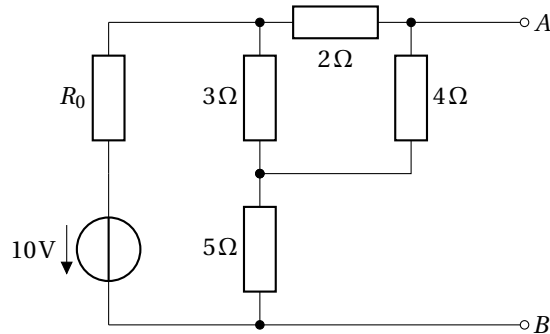
míg pl. $R_t = 3R_s$ esetben $u = u_s \frac{3R_s}{R_s + 3R_s} = \frac{3}{4} u_s$, $i = \frac{u_s}{R_s + 3R_s} = \frac{u_s}{4R_s}$. A $P_t = ui$ szorzatot (piros), és a $P_s = u_s i$ szorzatot (kék) illesztett esetben a bal oldali, $R_t = 3R_s$ esetben a jobb oldali ábra illusztrálja.



2. Feladatok

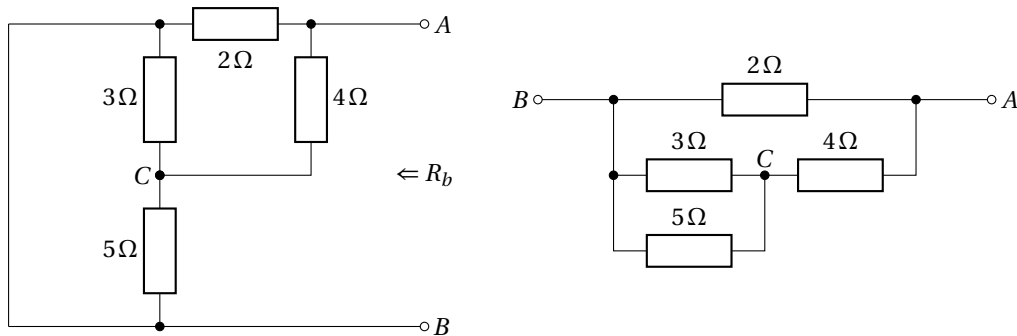
2.1. feladat

Határozzuk meg az AB kétpólus Thévenin-féle, illetve Norton-féle helyettesítő kapcsolásának paramétereit, ha (a) $R_0 = 0$, (b) $R_0 = 0,5\Omega$!



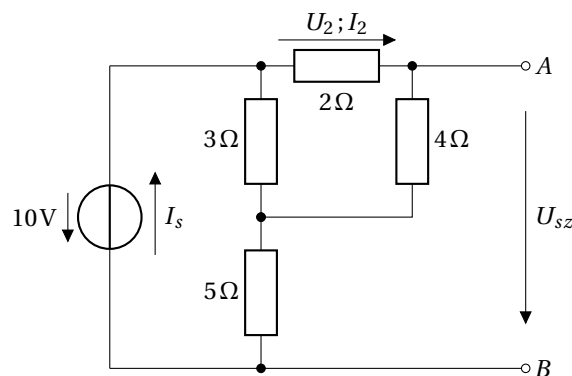
2.1.1. $R_0 = 0$ eset

[V,A,Ω] egységrendszerben számolunk. Mivel csak egyenfeszültségek és -áramok vannak a hálózatban, jelöljük a mennyiségeket nagybetűkkel. Határozzuk meg először a dezaktivizált kétpólus belső ellenállását! A feszültségforrást dezaktivizálva ($U = 0$) rövidzárát kapunk. Elemi műveletekkel



$$R_b = 2 \times [4 + (3 \times 5)] = 2 \times \left[4 + \frac{15}{8}\right] = 2 \times \frac{47}{8} = \frac{47/4}{63/8} = 1,492\Omega.$$

A következő lépésben elemi módszerekkel meg tudjuk határozni az AB kétpólus üresjárási feszültségét:



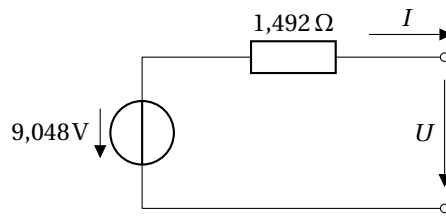
Az üresjárási feszültség a forrásfeszültség és a bejelölt $U_2 = 2 \cdot I_2$ feszültség különbsége. Mivel a kétpólus szakadással van lezárva, a 2 ill. 4 Ω-os ellenállások egyszerű soros kapcsolást alkotnak, az I_2 áram a bejelölt I_s áramból áramosztással kapható meg:

$$U_{sz} = 10 - 2 \cdot I_2 = 10 - 2I_s \cdot \frac{3}{3+2+4} = 10 - 2 \cdot \frac{10}{5+3 \times (2+4)} \cdot \frac{3}{3+2+4} = 10 - \frac{60}{45+18} = 10 - 0,952 = 9,048\text{V}.$$

Az AB kétpólus Thévenin-ekvivalensének paramétereit

$$U_s = U_{sz} = 9,048\text{V} \quad R_s = R_b = 1,492\Omega,$$

az AB kétpólust helyettesítő Thévenin-generátor:



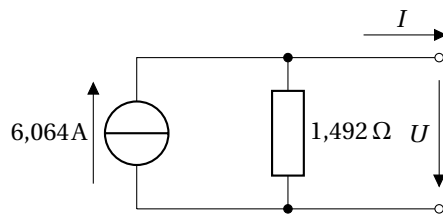
A rövidzárási áram a belső ellenállásból és az üresjárási feszültségből közvetlenül is számolható (a generátoron ellentétes feszültség- és áramirány feltételezése miatt pozitív előjellel):

$$I_{rz} = \frac{U_T}{R_b} = \frac{9,048}{1,492} = 6,064 \text{ A},$$

így a Norton-ekvivalens paraméterei

$$I_s = I_{rz} = 6,064 \text{ A} \quad R_s = R_b = 1,492 \Omega,$$

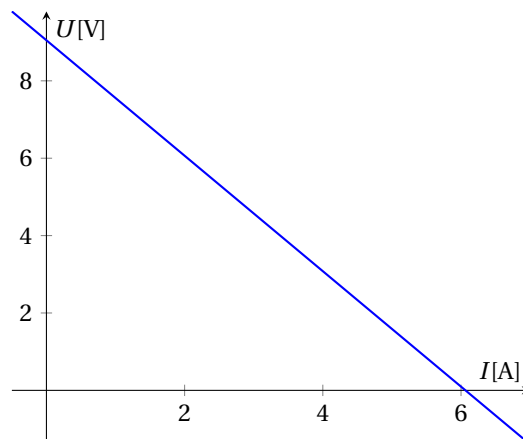
az AB kétpólust helyettesítő Norton-generátor:



Ábrázoljuk a kétpólus karakterisztikáját a helyettesítés révén nyert paraméterek segítségével! A kétpólus karakterisztikája [V, A] egységekben a Thévenin-ekvivalens alapján

$$U = U_s - R_s i = 9,048 - 1,492 I,$$

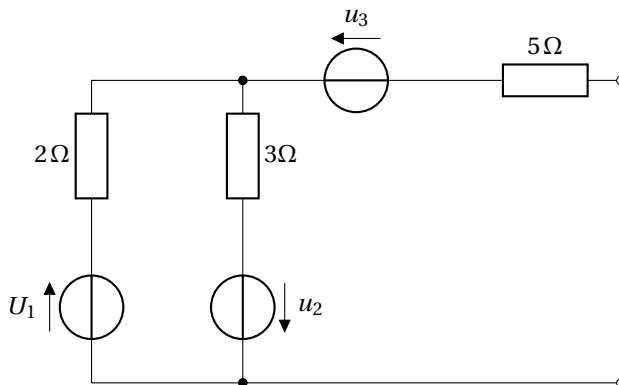
ami az U -tengelyt az üresjárási feszültség értékénél, $U = U_{sz} = 9,048 \text{ V}$ -nál metszi ($I = 0$), míg az I -tengelyt a rövidzárási áram értékénél, $I = I_{rz} = 6,064 \text{ A}$ értéknél metszi ($U = 0$).



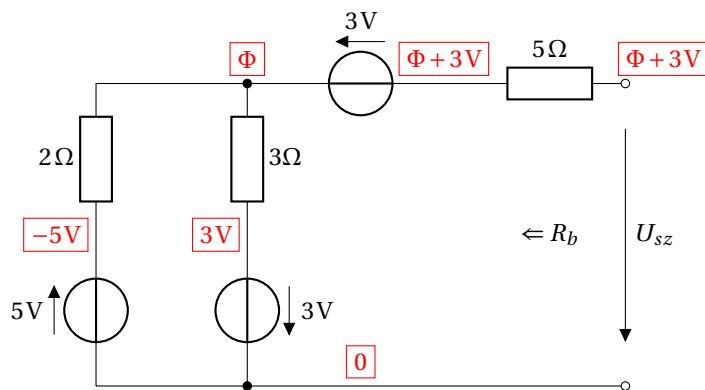
2.2. feladat

Határozzuk meg az alábbi kétpólus Thévenin- és Norton-ekvivalensét! ($R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $U_1 = 5\text{V}$ és

- $u_2 \equiv U_2 = 3\text{V}$, $u_3 \equiv U_3 = 3\text{V}$



Számoljunk (formálisan) a csomóponti potenciálok módszerével! Az alsó csomópont potenciálját nulla értékűre választva egy ismeretlen csomóponti potenciál van, hiszen a kétpólus szakadással van lezárva, az 5Ω -os ellenállás ágában nem folyik áram, azon nem esik feszültség:



A Φ potenciálú csomópontra felírt áramtörvény (ismét hangsúlyozva, hogy az 5Ω -os ellenálláson nem folyik áram):

$$\frac{\Phi - (-5)}{2} + \frac{\Phi - 3}{3} = 0,$$

$$5\Phi = -9,$$

$$\Phi = -\frac{9}{5},$$

a keresett üresjárási feszültség pedig

$$U_{sz} = \Phi + 3 = \frac{6}{5} = 1,2\text{V}.$$

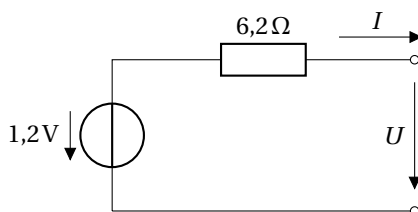
A dezaktivizált kétpólus belső ellenállása minden feszültségforrást rövidzárral helyettesítve számolható:

$$R_b = 5 + (2 \times 3) = 5 + \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} = \frac{31}{5} = 6,2\Omega.$$

A helyettesítő Thévenin-generátor paraméterei:

$$U_s = U_{sz} = 1,2\text{V}, \quad R_s = R_b = 6,2\Omega.$$

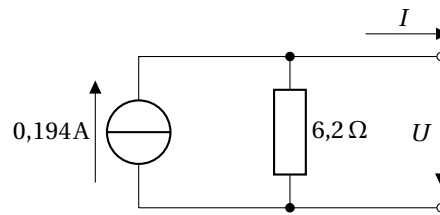
A Thévenin-ekvivalens:



A kétpólus rövidzárási árama a feltüntetett referenciáirányok mellett

$$I_{rz} = \frac{U_{sz}}{R_b} = \frac{1,2}{6,2} = 0,194 \text{ A},$$

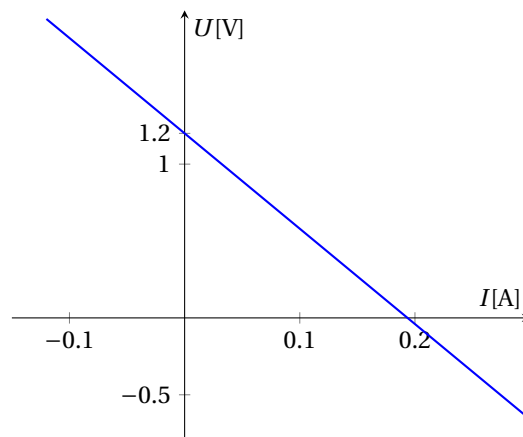
a Norton-ekvivalens:



Ábrázoljuk a kétpólus karakterisztikáját a helyettesítés révén nyert paraméterek segítségével! A kétpólus karakterisztikája [V, A] egységekben a Thévenin-ekvivalens alapján

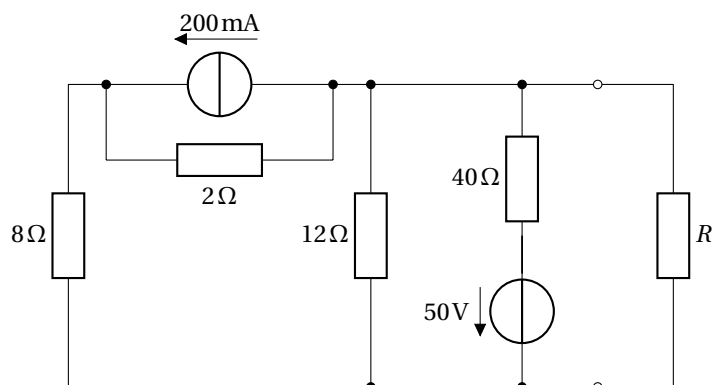
$$U = U_s - R_s I = 1,2 - 6,2 I,$$

ami az U -tengelyt az üresjárási feszültség értékénél, $U = U_{sz} = 1,2 \text{ V}$ -nál metszi ($I = 0$), míg az I -tengelyt a rövidzárási áram értékénél, $I = I_{rz} = 0,194 \text{ A}$ -nál metszi ($U = 0$).

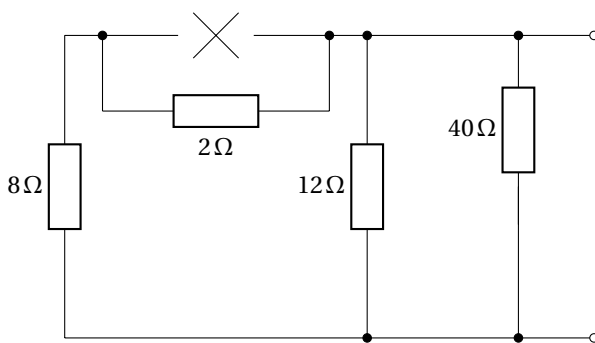


2.3. feladat

Határozzuk meg az R értékét úgy, hogy teljesítménye maximális legyen. Mekkora ez a teljesítmény?

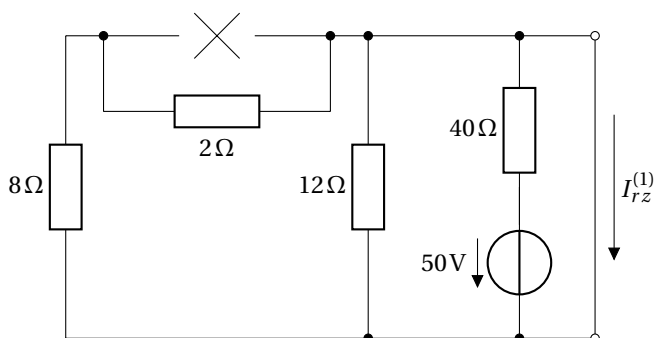


A feladat megoldásához szükségünk van a kétpólus Norton- vagy Thévenin-ekvivalensére. Számoljunk $[V, A, \Omega, W]$ egységekben! Határozzuk meg a helyettesítő generátorok belső ellenállását a dezaktivizált kétpólus belső ellenállásának kiszámításával! A dezaktivizált feszültségforrás rövidzár ($U = 0$), az áramforrás szakadás ($I = 0$):



$$R_b = \frac{1}{\frac{1}{8+2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{40}} = 4,8 \Omega.$$

A kétpólus rövidzársi árama könnyen meghatározható, valószínűleg egyszerűbben, mint az üresjárási feszültsége. Például a superpozíció módszerével, először az áramforrást dezaktivizálva rövidre zárjuk („söntöljük”) a három bal oldali ellenállást,

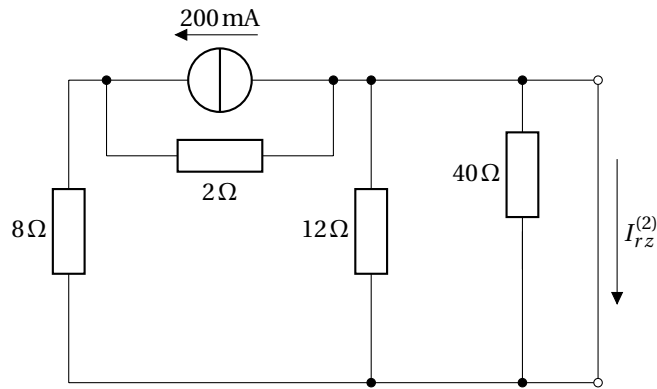


ezzel

$$I_{rz}^{(1)} = \frac{50}{40} = 1,25 A.$$

A feszültségforrást dezaktivizálva söntöljük a 12 és a 40 Ω-os ellenállásokat, a rövidzársi áram a 8 Ω-os ellenállás árama, áramosztással

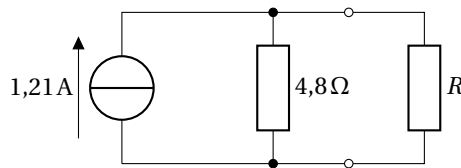
$$I_{rz}^{(2)} = -0,2 \frac{2}{2+8} = -0,04 A.$$



A szuperponált rövidzárási áram tehát

$$I_{rz} = I_{rz}^{(1)} + I_{rz}^{(2)} = 1,21 \text{ A},$$

az ennek megfelelő Norton-generátor ($I_s = I_{rz}$, $R_s = R_b$):



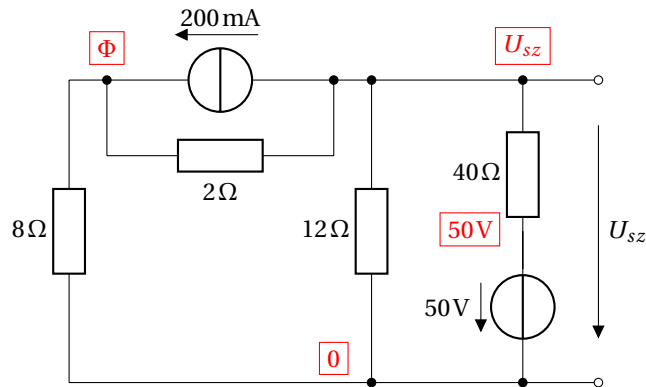
A generátorból kivehető teljesítmény illesztett esetben maximális, vagyis ha $R = R_s = 4,8 \Omega$. Ekkor a generátor forrásáramának fele folyik a terhelésen, amivel mind a generátor, mind a terhelés maximális teljesítménye

$$P_{\max} = \left(\frac{I_{rz}}{2} \right)^2 R_s = \frac{(1,21)^2}{4} \cdot 4,8 = 1,76 \text{ W}.$$

Ellenőrzésképpen tekintsük a Thévenin-ekvivalenst is. A Thévenin-generátor feszültségparamétere:

$$U_s = U_{sz} = I_{rz} \cdot R_b = 1,21 \cdot 4,8 = 5,808 \text{ V}.$$

Számítsuk ki csomóponti potenciálokkal is az üresjárási feszültséget! Válasszuk az alsó csomópont potenciálját nulla értékűnek, és vegyük fel a két ismeretlen csomóponti potenciált, amelyek közül az egyik ilyen választás mellett egyben az üresjárási feszültség számértékét is adja majd.



A csomóponti egyenletek:

$$\begin{aligned} \frac{U_{sz} - 50}{40} + \frac{U_{sz}}{12} + 0,2 + \frac{U_{sz} - \Phi}{2} &= 0 \\ -0,2 + \frac{\Phi}{8} + \frac{\Phi - U_{sz}}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$292U_{sz} - 240\Phi = 504$$

$$-4U_{sz} + 5\Phi = 1,6$$

Az egyenletrendszerből valóban

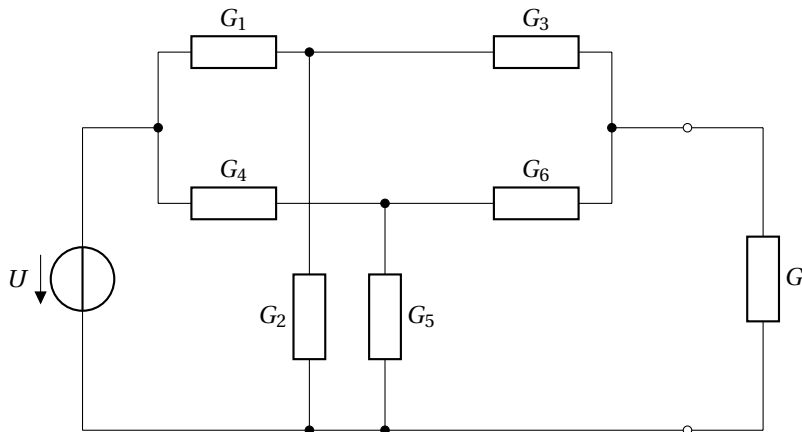
$$U_{sz} = 5,808 \text{ V},$$

a generátorból kivehető maximális teljesítmény, egyben az illesztett terhelés teljesítménye

$$P_{\max} = \frac{U_{sz}^2}{4R_s} = 1,76 \text{ W}.$$

2.4. feladat

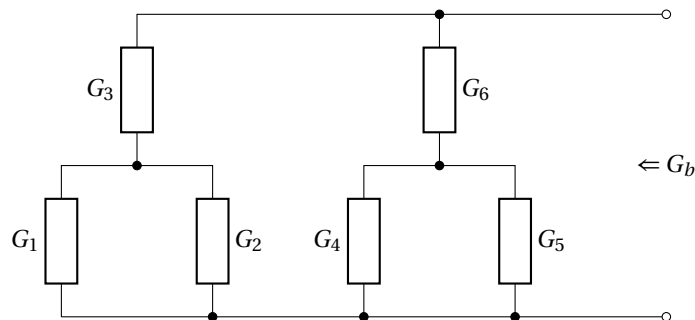
Határozzuk meg az ábrán látható kétpólusra csatlakozó G konduktancia értékét úgy, hogy a teljesítménye maximális legyen! Mekkora ez a teljesítmény? ($G_1 = 50 \text{ mS}$, $G_2 = 30 \text{ mS}$, $G_3 = 120 \text{ mS}$, $G_4 = 50 \text{ mS}$, $G_5 = 30 \text{ mS}$, $G_6 = 20 \text{ mS}$, $U = 4 \text{ V}$.)



A feladat megoldásához szükségünk van a kétpólus üresjárási feszültsége, a rövidzárási árama és a dezaktivizált kétpólus belső ellenállása közül kettőre. Ennek a konkrét feladatnak többféle célszerű megoldása is lehetséges, ezért több ekvivalens megoldást is bemutatunk, a speciális megoldásokkal kezdve. A megoldás során $[V, \text{mS}, k\Omega, \text{mA}, \text{mW}]$ egységrendszerben számolunk.

2.4.1. A dezaktivizált kétpólus belső ellenállása

A kétpólust dezaktivizálva (a forrásfeszültséget $U = 0$ értékre állítva, vagyis a feszültségforrást rövidzárral helyettesítve) ábrázolhatjuk a hálózatot:



A hálózat visszavezethető soros és párhuzamos eredők számítására. Két konduktancia soros eredője éppen úgy a replusz művelettel számítható, mint két rezisztencia párhuzamos eredője (ún. duális hálózat), vagyis az eredő konduktancia:

$$G_b = (G_1 + G_2) \times G_3 + (G_4 + G_5) \times G_6 = (50 + 30) \times 120 + (50 + 30) \times 20 = \frac{80 \cdot 120}{80 + 120} + \frac{80 \cdot 20}{80 + 20} = 48 + 16 = 64 \text{ mS},$$

egyben ez a helyettesítő generátorok belső konduktanciája is. Tehát

$$G = G_b = 64 \text{ mS}$$

választással maximalizálható a kétpólusra csatlakozó ellenállás teljesítménye.

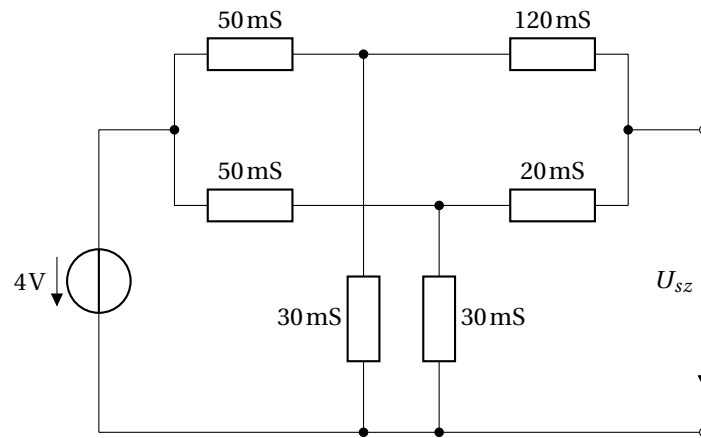
Természetesen ellenállásokkal számolva is ugyanerre az eredményre jutunk:

$$G_b = \frac{1}{\frac{1}{G_1 + G_2} + \frac{1}{G_3}} + \frac{1}{\frac{1}{G_4 + G_5} + \frac{1}{G_6}} = 64 \text{ mS}.$$

2.4.2. A kétpólus üresjárási feszültsége

Észrevehetjük, hogy üresjárásban $G_1 / G_2 = G_4 / G_5$, vagyis G_3 és G_6 soros eredője ekvipotenciális pontok közé kapcsolódik (egy kiegyenlített Wheatstone-híd átlóját képezik), ezért nem folyik rajtuk áram. A kétpólus üresjárási feszültsége ezért egyenlő akár a G_1 - G_2 , akár a G_4 - G_5 ellenállások által alkotott feszültségosztók feszültségével. Ismét a dualitást kihasználva (feszültségosztás konduktanciákkal kifejezve formailag analóg az áramosztás ellenállások kifejezésével) az üresjárási feszültség:

$$U_{sz} = U \frac{G_1}{G_1 + G_2} = 4 \cdot \frac{50}{50 + 30} = 2,5 \text{ V}$$



Vagy ellenállásokkal számolva

$$U_{sz} = 4 \cdot \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{30} + \frac{1}{50}} = 2,5V.$$

A kétpólus Thévenin-ekvivalensének paraméterei tehát

$$U_s = 2,5V, \quad G_s = 64mS.$$

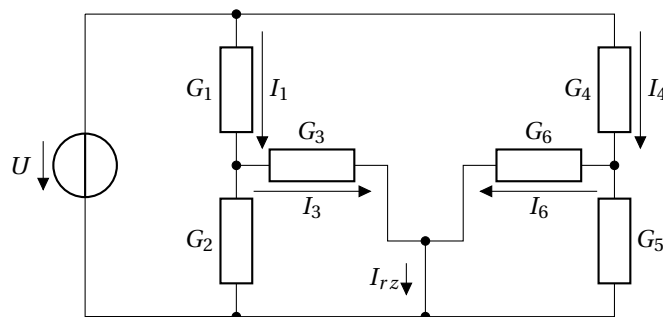
A jól ismert formulával a generátorból maximálisan kivehető teljesítmény, egyben az illesztett lezárás mellett a lezárás keresett teljesítménye:

$$P_{\max} = \frac{U_s^2}{4R_s} = \frac{U_s^2 G_s}{4} = \frac{2,5^2 \cdot 64}{4}$$

$P_{\max} = 100mW.$

2.4.3. A kétpólus rövidzárási árama

Ha nem vesszük észre, hogy kiegyenlített hídról van szó, általánosabban is számolhatunk. A rövidre zárt kétpólust ábrázolhatjuk az alábbiak szerint:



A rövidzárási áram kiszámítása is visszavezethető elemi lépésekre. Áramosztással

$$I_{rz} = I_3 + I_6 = I_1 \frac{G_3}{G_2 + G_3} + I_4 \frac{G_6}{G_5 + G_6},$$

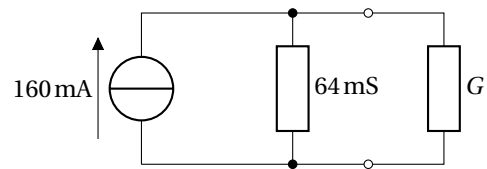
ahol az áramok kifejezhetők a következőképpen (két ellenállás soros eredője konduktanciákkal kifejezve replusz művelettel számolható):

$$I_{rz} = U [G_1 \times (G_2 + G_3)] \frac{G_3}{G_2 + G_3} + U [G_4 \times (G_5 + G_6)] \frac{G_6}{G_5 + G_6}.$$

$$I_{rz} = U \frac{G_1 \cdot (G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3} \cdot \frac{G_3}{G_2 + G_3} + U \frac{G_4 \cdot (G_5 + G_6)}{G_4 + G_5 + G_6} \cdot \frac{G_6}{G_5 + G_6} = U \left[\frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} + \frac{G_4 G_6}{G_4 + G_5 + G_6} \right],$$

$$I_{rz} = 4 \left[\frac{50 \cdot 120}{200} + \frac{50 \cdot 20}{100} \right] = 4(30 + 10) = 160mA.$$

Az elrendezés Norton-ekvivalense ($I_s = I_{rz} = 160mA$, $G_s = G_b = 64mS$):



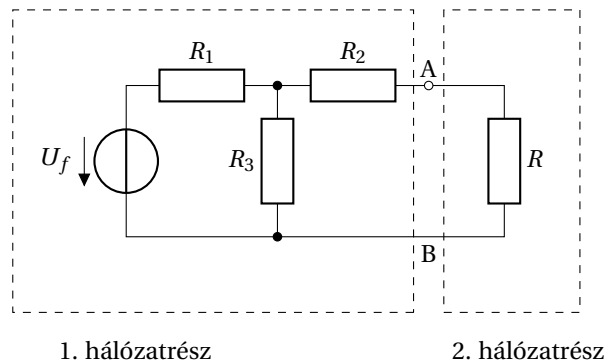
A maximális teljesítmény $G = G_s = 64 \text{ mS}$ választással a helyes

$$P_{\max} = \frac{I_{rz}^2}{4G_s} = \frac{(160)^2}{4 \cdot 64} = 100 \text{ mW}$$

értéknek adódik.

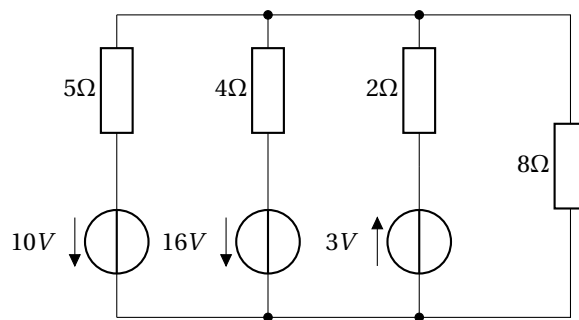
3. Gyakorlófeladatok

- Határozzuk meg a bal oldali hálózatrész Thévenin-féle és Norton-féle helyettesítő kapcsolását, valamint az R ellenállás teljesítményét! Hogyan változtassuk meg R értékét úgy, hogy teljesítménye maximális legyen? Mekkora lehet ez a teljesítmény? ($R = 2 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 6 \text{ k}\Omega$, $U_f = 15 \text{ V}$)



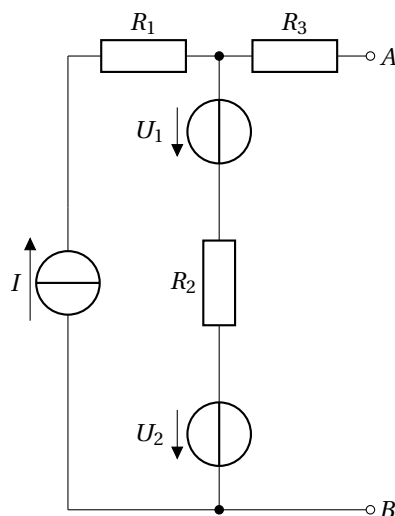
$(U_{sz} = 11,25 \text{ V}, I_{rz} = 2,5 \text{ mA}, R_s = 4,5 \text{ k}\Omega, P_R = 5,99 \text{ mW})$
 $(R = R_s = 4,5 \text{ k}\Omega, P_{\max} = 7,03 \text{ mW})$

- Határozzuk meg a 8Ω -os ellenállás teljesítményét! Maximális-e ez a teljesítmény? Ha nem, akkor mennyire válasszuk az ellenállás értékét, hogy maximális legyen a teljesítménye? Mekkora ez a teljesítmény?



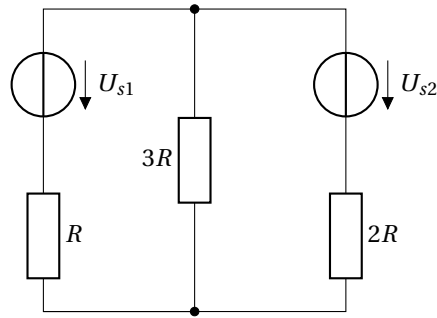
$(P = 2,19 \text{ W})$
 $(\text{Nem}, R = \frac{20}{19} \Omega, P = 5,33 \text{ W})$

- Határozzuk meg az alábbi kétpólus Norton- és Thévenin-féle helyettesítőképét a szuperpozíció módszerével! ($U_1 = 3 \text{ V}$, $U_2 = 7 \text{ V}$, $I = 5 \text{ mA}$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 4 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$)



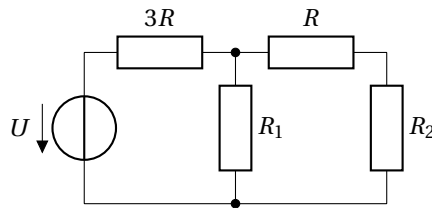
$(U_T = 30 \text{ V}, R_s = 6 \text{ k}\Omega, I_N = 5 \text{ mA})$

4. Az alábbi hálózat ellenállásainak összteljesítménye, ha U_{s2} -t deaktivizáljuk, akkor $P' = 55 \text{ W}$, illetve U_{s1} deaktivizálása esetén $P'' = 176 \text{ W}$. Határozzuk meg az ellenállások összes teljesítményét, ha mindkét forrás aktív!



$$(P_R = 1 \text{ W}, P_{2R} = 50 \text{ W}, P_{3R} = 48 \text{ W})$$

5. U és R adottak.

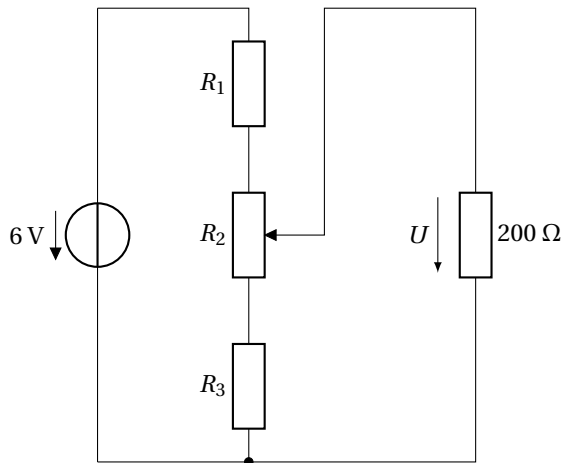


- Határozzuk meg R_1 és R_2 értékét úgy, hogy mindkettőjük teljesítménye egyenlő legyen ($P > 0$).
- Határozzuk meg R_1 és R_2 értékét úgy, hogy $P = P_1 + P_2$ maximális legyen, továbbá ennek viszonyát az (a) szerinti teljesítményhez.

$$(R_1 = 1,5R, R_2 = 2R)$$

$$\left(R_1 = 3R, R_2 = \infty, P_{\max,b} = \frac{U^2}{12R}, P_{\max,a} = \frac{U^2}{18R} \right)$$

6. Az alábbi hálózatban az U feszültséget $U_{\min} = 2 \text{ V}$ és $U_{\max} = 4 \text{ V}$ között akarjuk szabályozni egy változtatható ellenállás (ún. potenciométer) segítségével úgy, hogy a forrásból felvett teljesítmény legfeljebb $P_{\max} = 0,24 \text{ W}$ legyen. Határozzuk meg R_1 , R_2 és R_3 értékét!



$$(R_1 = 50 \Omega, R_2 = 91,05 \Omega, R_3 = 108,9 \Omega)$$

