Alapfogalmak

Bilicz-Horváth

2021. február 8.

Megadjuk a változó, a jel, a rendszer, és a hálózat fogalmának értelmezését.

Jelek

A folyamatok mérhető mennyiségei a fizikai mennyiségek. Egy **változó** egy fizikai mennyiség matematikai leírása. Egy **jel** a változó azon részének matematikai leírása, amely a számunkra lényeges információt hordozza. A továbbiakban a változó és a jel fogalmát nem különböztetjük meg.

A tárgy keretében a jel mindig egyetlen független változó által meghatározott. Ennek neve *idő*, amelyet folytonos idejű esetben t-vel (pl. $x(t)$), diszkrét idejű esetben k-val fogunk jelölni.

Jelek osztályozása

Időfüggés tekintetében megkülönböztetünk *folytonos idejű* (FI) jeleket:

$$x(t), -\infty < t < \infty \quad \text{vagy } t \in \mathbb{R},$$

ahol t gyakran a köznapi értelemben vett fizikai időt jelenti, amelynek egysége a szekundum:

$$[t] = s \,(\text{szekundum});$$

illetve *diszkrét idejű* (DI) jeleket:

$$x[k], \quad k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \text{vagy } k \in \mathbb{Z}.$$

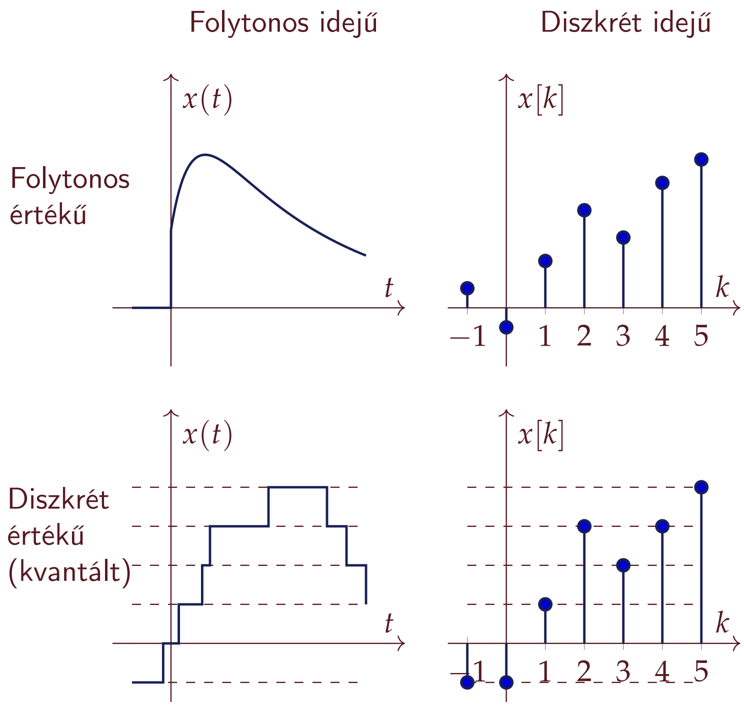
A k-adik diszkrét időpillanatra a *k. ütem* elnevezés is használatos.

Értékkészlet tekintetében egy x jel *folytonos értékű*, ha x bármilyen valós vagy komplex értéket felvehet (természetes megszorításokkal, pl. a konkrét jel nem lehet nagyobb egy bizonyos értéknél, vagy csak pozitív értékű lehet stb.), míg egy x jel *diszkrét értékű* vagy *kvantált*, ha az csak meghatározott b_i értékeket vehet fel. A folytonos idejű és folytonos értékű jeleket gyakran *analóg*, a diszkrét idejű és kvantált jeleket *digitális* jelnek is szokás nevezni. A tárgyban csak folytonos értékű jelekkel foglalkozunk, a kvantálás hatását később szaktárgyak keretében ismerjük meg. A jelek besorolását az 1. ábra szemlélteti.

Egy jel **belépő**, ha értéke t ill. k negatív értékeire azonosan nulla. Az 1. ábra jelei közül a bal felső belépő, a többi nem belépő.

Rendszerek

A **rendszer** egy fizikai objektum modellje, amely fizikai változókkal leírható. Ezen változók közül egy vagy több lehet adott, ezek

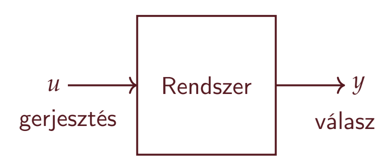


1. ábra: Jelek csoportosítása

a rendszer bemenő jelei vagy *gerjesztései*, egyet vagy többet pedig meg akarunk határozni, ezek a rendszer kimenő jelei vagy *válaszai*. A fizikai változókat a hozzájuk rendelt jellel, az objektumot pedig a rendszerrel írjuk le.

Matematikai értelemben a rendszernek a gerjesztés(ek)re gyakorolt hatását egy *transzformációval* jellemezhetjük, amely az adottnak tekintett gerjesztő jel(ek)hez válaszjel(ek)et rendel. A tárgyban egy-bemenetű, egy-kimenetű (angolul Single Input, Single Output, SISO) rendszerek vizsgálatára szorítkozunk. Egy ilyen rendszer $u = u(t)$ ill. $u = u[k]$ gerjesztéséhez egy $y = y(t)$ ill. $y = y[k]$ választ rendel, amely leképezést az $\mathcal{Y}$ *operátor* (transzformáció) írja le:

$$y = \mathcal{Y}\{u\}.$$



2. ábra: A rendszer

A rendszerek osztályozása

A tárgyban kitüntetett szerepet játszanak az alábbi általános *rendszer-tulajdonságok*:

- **Linearitás**: Egy rendszer akkor lineáris, ha a $y = \mathcal{Y}\{u\}$ gerjesztés-válasz kapcsolatában szereplő $\mathcal{Y}$ operátor lineáris, más szóval a rendszerre érvényes a **szuperpozíció elve**.

  Formálisan, ha a rendszer gerjesztése tetszőleges u_a és u_b gerjesztő jelek szuperpozíciója, akkor a linearitás megköveteli, hogy

Ebből következik, hogy lineáris rendszerekre speciálisan

$$\mathcal{Y}\{cu\} = c\mathcal{Y}\{u\}$$

teljesül, emiatt az $u = 0$ gerjesztéshez $y = 0$ válasz kell, hogy tartozzon.

$$\mathcal{Y}\left\{c_a u_a + c_b u_b\right\} = c_a \mathcal{Y}\left\{u_a\right\} + c_b \mathcal{Y}\left\{u_b\right\}$$

teljesüljön, minden $c_a \in \mathbb{R}, c_b \in \mathbb{R}$ mellett.

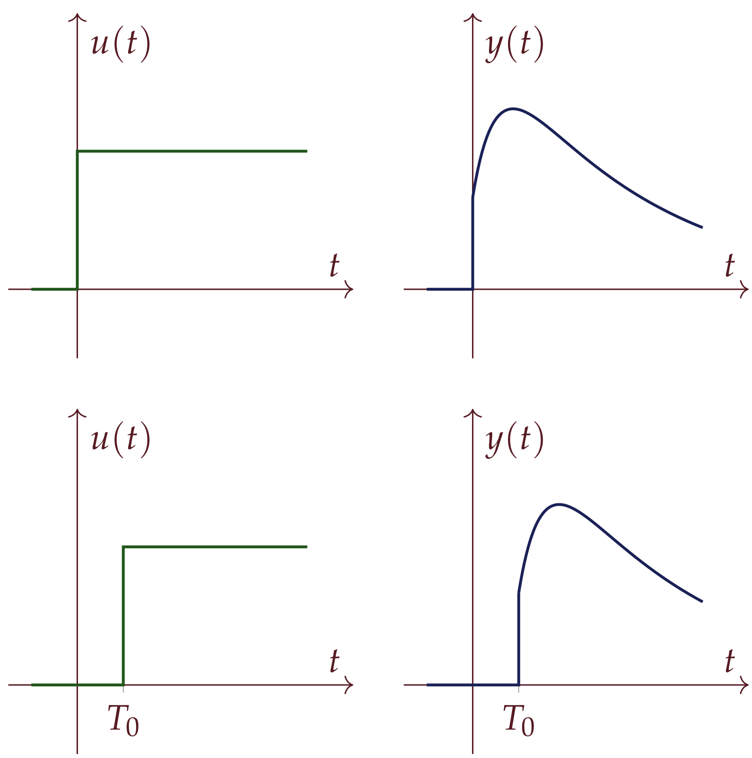
Ha a rendszer nem lineáris, akkor *nemlineáris* rendszernek nevezzük. Utóbbiakkal a JR2 keretében foglalkozunk.

- **Invariancia**: egy rendszer akkor *(idő)invariáns*, ha a gerjesztés időbeli eltolása csak egy ugyanakkora időbeli eltolást okoz a válaszban. Formálisan a rendszer akkor invariáns, ha

  $$y(t) = \mathcal{Y}\left\{u(t)\right\} \Rightarrow y(t - T_0) = \mathcal{Y}\left\{u(t - T_0)\right\}$$

  tetszőleges $T_0 \in \mathbb{R}$ esetén. Röviden, a gerjesztés-válasz kapcsolat *időfüggetlen*. A nem invariáns rendszer *variáns*.

A tárgyban kitüntetett szerepet játszanak a lineáris, invariáns rendszerek. Ezeknek angol rövidítése Linear, Time Invariant (LTI).



3. ábra: Egy invariáns rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatának szemléltetése

- **Kauzalitás**: a rendszer *kauzális*, ha az $y(t_1)$ válasz az $u(t)$ gerjesztésnek csak olyan értékeitől függ, amelyekre $t < t_1$ teljesül. Röviden, a rendszer válasza csak a gerjesztés múltbeli értékeitől függ, a rendszer nem képes „jósolni”, követi a fizikai világban tapasztalt ok-okozati összefüggéseket. Ha a rendszer nem kauzális, akkor *akauzális*. A 3. ábrán illusztrált rendszer kauzális.

Az angol terminológia a belépő *jel* és a kauzális *rendszer* megnevezésére is a *causal* kifejezést használja, magyarul azonban ezt élesebben megkülönböztetjük.

- **Stabilitás**: egy lineáris, invariáns rendszer akkor és csak akkor *gerjesztés-válasz stabilis*, ha **tetszőleges** korlátos u gerjesztéshez

Később további stabilitásfogalmakat is megismerünk majd.

korlátos y válasz tartozik. A nem stabil rendszert labilis vagy instabil rendszernek nevezzük.

- **Dinamika**: egy rendszer akkor **memóriamentes**, ha a t_1 időpillanatban a válaszjele csak a gerjesztésnek ugyanezen t_1 időpillanatbeli értékétől függ. Ellenkező esetben a rendszer **dinamikus**.

Memóriamentes pl. az $y(t) = u^2(t)$, dinamikus pl. az

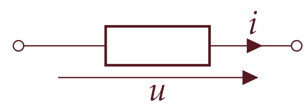
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau$$

gerjesztés-válasz kapcsolatú rendszer.

Hálózatok

A *hálózat* komponensek összekapcsolásából áll. Minden komponenshez egy vagy több változó van hozzárendelve. A hálózatot a komponensek viselkedését leíró *karakterisztikák*, másrészt az összekapcsolási szabályokat leíró *összekapcsolási kényszerek* határozzák meg. A tárgyban kétféle hálózattal fogunk találkozni:

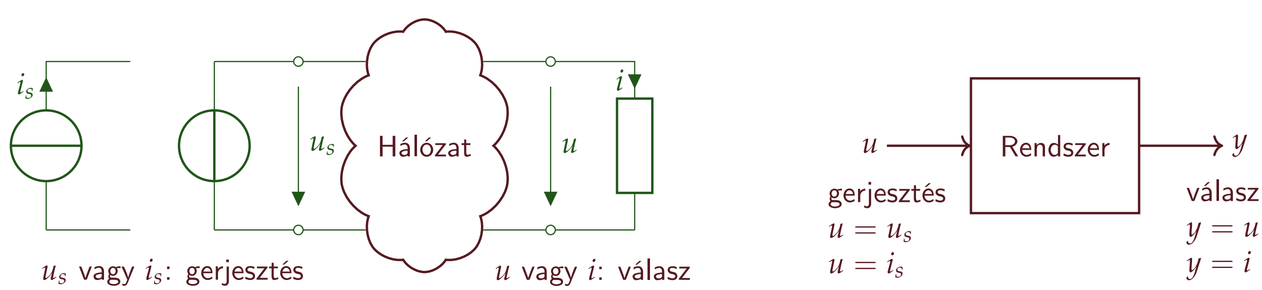
- A **Kirchhoff-típusú hálózatok** komponensei a **kétpólusok** (4. ábra), amelyeket két változó, a feszültség (u) és az áram (i) jellemez, amelyek általában a t idő függvényei. A komponensek karakterisztikái a feszültség és az áram kapcsolatát írják le, az összekapcsolási kényszereket pedig Kirchhoff áram- és feszültségtörvénye adja. A kétpóluson feltüntetett nyilak a változók *referenciairányát* jelölik.
- **Jelfolyamhálózatok**: ezekkel a JR2 tárgyban foglalkozunk majd.



4. ábra: Kétpólus

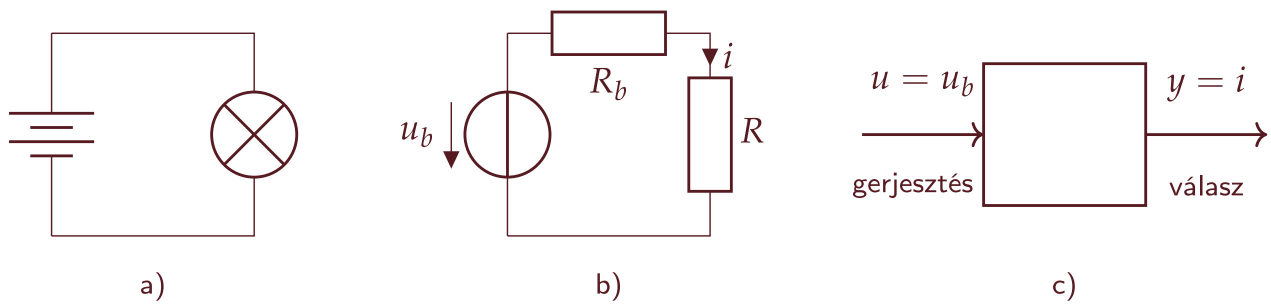
Kirchhoff-típusú hálózat által reprezentált rendszer

A villamos hálózatban található forrás (adott/előírt u_s feszültségű *feszültségforrás*, illetve i_s áramú *áramforrás*) forrásmennyiségét tekintjük a hálózat által reprezentált rendszer gerjesztésének, míg a hálózat egy tetszőleges, kijelölt kétpólusának feszültségét vagy áramát a rendszer válaszjelének (5. ábra). Ügyeljünk rá, hogy az u a hálózatban egy feszültséget, a rendszerben a rendszer gerjesztő jelét jelöli, ami feszültség és áram is lehet.



5. ábra: Kirchhoff-típusú hálózat és az általa reprezentált rendszer

Egy villamos példán keresztül szemléltetjük a modellezés lépéseit (6. ábra). Egy akkumulátoros zseblámpa izzóján átfolyó áramot határozzuk meg. Magát a fizikai objektumot az a) ábra mutatja, a bal oldalon az akkumulátort, a jobb oldalon az izzólámpát tüntettük fel. A b) ábra mutatja az általunk felállított hálózati modellt. Az akkumulá-



6. ábra: Példa a Kirchhoff-típusú hálózat által reprezentált rendszerre

tort, amely nem ideális feszültségforrásnak tekinthető, egy ideális, u_b forrásfeszültségű feszültségforrás, és egy R_b *belső ellenállás* soros eredőjével modellezhetjük (ún. Thévenin-generátor, lásd később). Az izzólámpát egy R értékű lineáris ellenállásként vesszük figyelembe. Keressük a körben folyó i áramot, ami egyben az izzólámpa árama is. Az Ohm-törvény alapján

$$i = \frac{1}{R + R_b} u_b. \tag{1}$$

A c) ábrán a hálózat által reprezentált rendszer sematikus rajza látható. A rendszer u gerjesztése az u_b forrásfeszültség, a rendszer y válaszjele a hálózatban kijelölt i áram. Ebben az egyszerű példában egyszerűen meg is adhatjuk a rendszer explicit gerjesztés-válasz kapcsolatát:

$$y = \frac{1}{R + R_b} u. \tag{2}$$

A hálózati modellben elhanyagoltunk több fizikai jelenséget: a valóságos izzólámpa ellenállása nő a rajta átfolyó áram növekedésével (nemlineáris komponens); az akkumulátor folyamatosan merül, így az u_b folyamatosan csökken, és az akkumulátor öregedésével a belső ellenállás is nő (nem invariáns komponens), stb.

Ezért a modell nem jól írná le az elemlámpa áramát a közvetlenül a bekapcsolást követően, vagy ha órákon át vizsgálnánk a rendszert. Helyes viszont a modell bekapcsolt állapotban egy rövid ideig. A mérnöki gyakorlatban igyekszünk a legegyszerűbb, de a vizsgált probléma szempontjából helyes modellt megalkotni.