Jelek és rendszerek - 9.előadás

Ugrásválasz, impulzusválasz, rendszeregyenlet, állapotváltozós rendszerleírás

Mérnök informatika BSc

Pécsi Tudományegyetem, Pollack Mihály Műszaki Kar
Műszaki Informatika és Villamos Intézet
Műszaki Informatika Tanszék

Ismétlés

Ugrásválasz, impulzusválasz, rendszeregyenlet

Ugrásválasz, impulzusválasz, rendszeregyenlet

2. Az ugrásválasz és alkalmazása
   - Definíció
3. Az impulzusválasz és alkalmazása
   - Definíció
   - A válasz számítása
   - Gerjesztés-válasz stabilitás
4. A rendszeregyenlet
   - A rendszeregyenlet előállítása hálózatból
   - A rendszeregyenlet megoldása
   - Gerjesztés-válasz stabilitás
   - A rendszeregyenlet megoldása

Ugrásválasz, impulzusválasz, rendszeregyenlet

Állapotváltozós rendszerleírás

5 Az állapotváltozós rendszerleírás
- Definíció
- Az állapotváltozós leírás előállítása hálózat alapján
- Az állapotváltozós leírás megoldása
- Aszimptotikus stabilitás

Összefoglalás

6 Összefoglalás

1. Fontosabb DI jelek

A DI egységugrás $\varepsilon[k]$ és egységimpulzus $\delta[k]$

Definíció (Egységugrás)

$$\varepsilon[k] = \begin{cases} 0 & \textit{ha } k < 0, \\ 1 & \textit{ha } k \geq 0, \end{cases}$$

azaz az egységugrás értéke a $k < 0$ *ütemekre* 0*, nemnegatív egészekre pedig* 1*.*

Eltolt egységugrás

$$\varepsilon[k-i] = \begin{cases} 0 & \text{ha } k < i, \\ 1 & \text{ha } k \geq i, \end{cases}$$

Definíció (Egységimpulzus)

$$\delta[k] = \begin{cases} 0 & \textit{ha } k < 0, \\ 1 & \textit{ha } k = 0, \\ 0 & \textit{ha } k > 0, \end{cases}$$

azaz az egységimpulzus értéke a $k = 0$ *helyen* 1*, bármely más helyen értéke nulla.*

Eltolt egységimpulzus

$$\delta[k-i] = \begin{cases} 0 & \text{ha } k < i, \\ 1 & \text{ha } k = i, \\ 0 & \text{ha } k > i, \end{cases}$$

DI jelek megadása eltolt egységimpulzusokkal

Pl.

$$x[k] = \begin{cases} 0 & \text{ha } k < 0, \\ 4 \cdot 0.5^k & \text{ha } k \geq 0, \end{cases} = 4\delta[k] + 2\delta[k-1] + \delta[k-2] + \dots$$

Tetszőleges $x[k]$ jel megadása

$$x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\delta[k-i],$$

tehát az $x[k]$ jelet eltolt egységimpulzusok súlyozott összegeként, más néven szuperpozíciójaként írhatjuk fel.

Az egységugrás és az egységimpulzus kapcsolata

Az egységugrásjel kifejezhető egységimpulzusokkal

$$\varepsilon[k] = \sum_{i=0}^{\infty} \delta[k-i] = \delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-2] + \ldots,$$

Az egységimpulzus pedig megadható az egységugrással

$$\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1],$$

melynek általánosításával juthatunk el a folytonos idejű ablakhoz hasonló diszkrét idejű ablakhoz.

$$x[k] = \begin{cases} 0 & \text{ha } k < 0, \\ 1.1k & \text{ha } 0 \leq k < 4 \\ 0 & \text{ha } k \geq 4, \end{cases} \quad \rightarrow \quad x[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-4]\}1.1k$$

Az ugrásválasz

Definíció (Ugrásválasz)

Egy $y[k] = \mathcal{W}\{s[k]\}$ *rendszer* $v[k]$ *ugrásválasza az* $\varepsilon[k]$ *gerjesztésre adott válasz.*

$$v[k] = \mathcal{W}\{\varepsilon[k]\},$$

Pl.

Az $y[k] = \mathcal{W}\{s[k]\}$ lineáris invariáns (LI) rendszer esetén, ha az ugrásválasz

$$v[k] = \varepsilon[k](0.3)^k,$$

akkor

$$\begin{aligned}
s[k] = 2\varepsilon[k] \quad &\Rightarrow \quad y[k] = 2\varepsilon[k](0.3)^k, \\
s[k] = \varepsilon[k-3] \quad &\Rightarrow \quad y[k] = \varepsilon[k-3](0.3)^{k-3} \\
s[k] = 3\{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-4]\} \quad &\Rightarrow \quad y[k] = 3\{\varepsilon[k](0.3)^k - \varepsilon[k-4](0.3)^{k-4}\}
\end{aligned}$$

Az impulzusválasz

Definíció (Impulzusválasz)

Egy $y[k] = \mathcal{W}\{s[k]\}$ *rendszer* $w[k]$ *impulzusválasza a* $\delta[k]$ *gerjesztésre adott válasz.*

$$w[k] = \mathcal{W}\{\delta[k]\},$$

Pl.

Az $y[k] = \mathcal{W}\{s[k]\}$ lineáris invariáns (LI) rendszer esetén, ha az impulzusválasz

$$v[k] = \delta[k] + 3\varepsilon[k](0.3)^k,$$

akkor

$$\begin{aligned}
s[k] = 2\delta[k] \quad &\Rightarrow \quad y[k] = 2\delta[k] + 6\varepsilon[k](0.3)^k, \\
s[k] = \delta[k-3] \quad &\Rightarrow \quad y[k] = \delta[k-3] + 3\varepsilon[k-3](0.3)^{k-3} \\
s[k] = 2\delta[k] - \delta[k-3] \quad &\Rightarrow \quad \begin{aligned} y[k] &= 2\delta[k] + 6\varepsilon[k](0.3)^k \\ &\quad - 2\delta[k-3] - 3\varepsilon[k-3](0.3)^{k-3} \end{aligned}
\end{aligned}$$

FIR és IIR típusú rendszerek

FIR (Finite Impulse Response) rendszerek

- impulzusválasza véges ($w[k] \equiv 0, \;\text{ha}\; k > K$),
- $w[k]$ véges tartójú jel,
- hálózatos realizációja csak előrecsatolást tartalmaz.

IIR (Infinite Impulse Response) rendszerek

- impulzusválasza nem véges ($\nexists K : w[k] \equiv 0, \;\text{ha}\; k > K$),
- $w[k]$ nem véges tartójú jel,
- hálózatos realizációja előrecsatolást és visszacsatolást is tartalmaz,
- rekurziv.

Válaszjel számítása

$s[k]$ leírása eltolt impulzusokkal $\longrightarrow$ válaszjel

$$s[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i]\delta[k-i],$$

ahonnan egy LI $y[k] = \mathcal{W}\{s[k]\}$ rendszer esetén

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i]w[k-i], \qquad \text{DI konvolúció}$$

ugyanis

$$s[k] \longrightarrow \boxed{\text{LI rsz.}} \longrightarrow y[k]$$

$$\delta[k] \longrightarrow \boxed{\text{LI rsz.}} \longrightarrow w[k]$$

$$C\delta[k-K] \longrightarrow \boxed{\text{LI rsz.}} \longrightarrow Cw[k-K]$$

A konvolúció

DI konvolúció

$$y[k]=\sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i]w[k-i] \quad \xrightarrow{\text{jelölése}} \quad y[k]=s[k]*w[k],$$

ha a rendszer kauzális ($w[k]$ belépő)

$$y[k]=\sum_{i=-\infty}^{k} s[i]w[k-i] \quad , w[k]\equiv 0,\ \text{ha } k<0$$

kauzális rendszer + belépő gerjesztés

$$y[k]=\sum_{i=0}^{k} s[i]w[k-i] \quad , w[k]\equiv 0, s[k]\equiv 0,\ \text{ha } k<0$$

A konvolúció tulajdonságai

Tulajdonságok

Kommutatív:

$$s[k] * w[k] = w[k] * s[k], \quad \sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i]w[k-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} w[i]s[k-i],$$

kauzális rendszer $\boxed{\text{+ belépő gerjesztés}}$

$$\sum_{i=-\infty}^{k} s[i]w[k-i] = \sum_{i=0}^{\infty} w[i]s[k-i], \boxed{\textstyle\sum_{i=0}^{k} s[i]w[k-i] = \sum_{i=0}^{k} w[i]s[k-i]},$$

Asszociatív:

$$(f[k] * g[k]) * h[k] = f[k] * (g[k] * h[k]).$$

Disztributív:

$$(f[k] + g[k]) * h[k] = f[k] * h[k] + g[k] * h[k].$$

A $v[k]$ ugrásválasz és $w[k]$ impulzusválasz kapcsolata

Vizsgálójelek és válaszok kapcsolata

$$\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1], \quad \Rightarrow \quad \boxed{w[k] = v[k] - v[k-1]},$$

ahonnan

$$\begin{aligned} v[k] &= w[k] + v[k-1], \\ v[k-1] &= w[k-1] + v[k-2], \qquad (w[k-1] = v[k-1] - v[k-2]), \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} v[k] &= w[k] + w[k-1] + v[k-2], \\ v[k-2] &= w[k-2] + v[k-3], \qquad (w[k-2] = v[k-2] + v[k-3]), \end{aligned}$$

$\vdots$

$$v[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} w[i].$$

A válaszjel számítása

Pl.1

$w[k] = \varepsilon[k](0.2)^k, \quad s[k] = \varepsilon[k], \quad y[k] = ?$

$$y[k] = \sum_{i=0}^{k} s[i]w[k-i] = \sum_{i=0}^{k} 0.2^{k-i} = 0.2^k \sum_{i=0}^{k} 0.2^{-i} = 0.2^k \sum_{i=0}^{k} 5^i$$

$$\stackrel{(*)}{=} 0.2^k \left(\frac{1-5^{k+1}}{1-5}\right) = \frac{-0.2^k + 0.2^k 5^k 5}{4} = \frac{-0.2^k + 5(0.2\cdot 5)^k}{4}$$

$$= -\frac{1}{4}(0.2)^k + \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{belépő válasz}} = \varepsilon[k]\left\{-\frac{1}{4}(0.2)^k + \frac{5}{4}\right\}$$

(*) (geometriai sor összegzése):

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} q^i = \frac{q^{i_0}}{1-q} \Rightarrow \sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$$

A válaszjel számítása

Pl.2

$w[k] = \varepsilon[k](0.2)^k, \quad s[k] = \varepsilon[k](0.6)^k, \quad y[k] = ?$

$$y[k] = \sum_{i=0}^{k} s[i]w[k-i] = \sum_{i=0}^{k} 0.6^i 0.2^{k-i} = 0.2^k \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{0.6}{0.2}\right)^i = 0.2^k \sum_{i=0}^{k} 3^i$$

$$= 0.2^k \left(\frac{1-3^{k+1}}{1-3}\right) = \frac{-0.2^k + 0.2^k 3^k 3}{2} = \frac{-0.2^k + 3(0.2\cdot 3)^k}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(0.2)^k + \frac{3}{2}(0.6)^k \xrightarrow{\text{belépő válasz}} \varepsilon[k]\left\{-\frac{1}{2}(0.2)^k + \frac{3}{2}(0.6)^k\right\}$$

A válaszjel számítása

Pl.3

$$w[k] = \varepsilon[k-1]((0.6)^{k-1} - (0.2)^{k-1}), \quad s[k] = \varepsilon[k](0.2)^k, \quad y[k] = ?$$

$$y[k] = \sum_{i=0}^{k-1} s[i]w[k-i] = \sum_{i=0}^{k-1} 0.2^i \left(0.6^{k-i-1} - 0.2^{k-i-1}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} 0.2^i 0.6^{k-i-1} - \sum_{i=0}^{k-1} 0.2^i 0.2^{k-i-1} = 0.6^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{0.2}{0.6}\right)^i - 0.2^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} 1$$

$$= 0.6^{k-1} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^k}{1-\frac{1}{3}} - k \cdot 0.2^{k-1} = \frac{0.6^{k-1} - 0.6^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k}{\frac{2}{3}} - k \cdot 0.2^{k-1}$$

$$= \frac{3 \cdot 0.6^{k-1} - 3 \cdot 0.6^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k}{2} - k \cdot 0.2^{k-1}$$

$$= \frac{3}{2} 0.6^{k-1} - \frac{3}{2} 0.6^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - k \cdot 0.2^{k-1} \xrightarrow{\text{belépő válasz}}$$

$$= \varepsilon[k-1] \left(\frac{3}{2} 0.6^{k-1} - \frac{1}{2} 0.2^{k-1} - k \cdot 0.2^{k-1}\right)$$

Gerjesztés-válasz stabilitás

GV stabilitás

$$\text{LI rendszer GV stabil} \iff \sum_{k=-\infty}^{\infty} |w[k]| < \infty$$

Biz., $s[k]$ korlátos $\Rightarrow |s[k]| < M$

$$|y[k]| \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} |w[i]||s[k-i]| \leq M \sum_{i=-\infty}^{\infty} |w[i]|$$

$$\Downarrow$$

$$|y[k]| < \infty \iff \sum_{i=-\infty}^{\infty} |w[i]| < \infty$$

Gerjesztés-válasz stabilitás (folyt.)

GV stabilitás, kauzális rendszer ($w[k] \equiv 0, \text{ ha } k < 0$)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |w[k]| < \infty \xrightarrow{w[k]\equiv 0, \text{ ha } k<0} \sum_{k=0}^{\infty} |w[k]| < \infty \Rightarrow \lim_{k\to\infty} w[k] = 0$$

FIR rendszerek ($w[k] \equiv 0, \text{ ha } k > K$)

Minden FIR rendszer GV stabilis

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |w[k]| < \infty, \quad \text{mindig igaz.}$$

Rendszeregyenlet

DI Rendszeregyenlet általános alakja

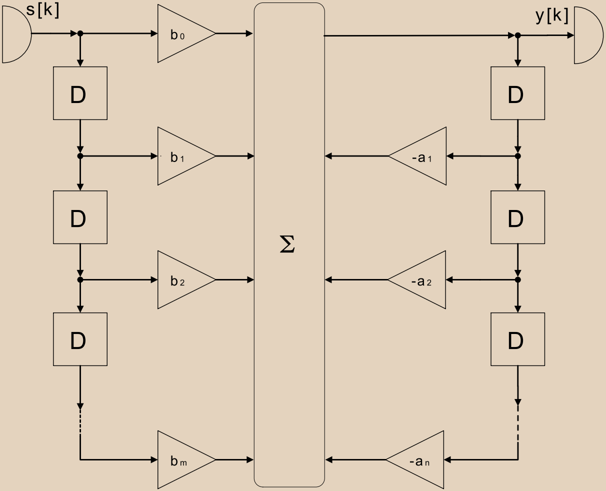
$$y[k]+a_1 y[k-1]+a_2 y[k-2]+\cdots+a_n y[k-n]=$$
$$=b_0 s[k]+b_1 s[k-1]+b_2 s[k-2]+\cdots+b_m y[k-m]$$

vagy kompaktabb formában

$$y[k]+\sum_{i=1}^{n} a_i y[k-i]=\sum_{j=0}^{m} b_j s[k-j]$$

Rendszeregyenlet hálózatos reprezentációja

DI Rendszeregyenlet hálózattal



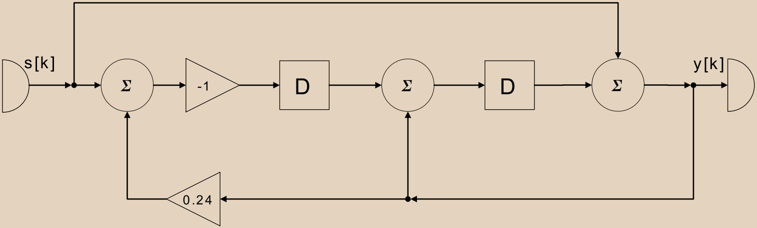
$$y[k] + \sum_{i=1}^{n} a_i y[k-i] = \sum_{j=0}^{m} b_j s[k-j]$$

$$\Downarrow$$

$$y[k] = -\sum_{i=1}^{n} a_i y[k-i] + \sum_{j=0}^{m} b_j s[k-j]$$

Rendszeregyenlet megadása hálózatból

DI Rendszeregyenlet hálózatból



a hálózat alapján

$$y[k] = s[k] + y[k-1] - s[k-2] - 0.24y[k-2],$$

$$\Downarrow$$

$$y[k] - y[k-1] + 0.24y[k-2] = s[k] - s[k-2].$$

Rendszeregyenlet megoldása

DI Rendszeregyenlet megoldása

$$y[k] + \sum_{i=1}^{n} a_i y[k-i] = \sum_{j=0}^{m} b_j s[k-j] \quad \xrightarrow{mo.} \quad y[k] = y_{tr}[k] + y_{st}[k]$$

Tranziens összetevő

$$y_{tr}[k] + \sum_{i=1}^{n} a_i y_{tr}[k-i] = 0 \quad \leftarrow \boxed{y_{tr}[k] = M\lambda^k}$$

$$M\lambda^k + \sum_{i=1}^{n} a_i M\lambda^{k-i} = 0 \Rightarrow M\lambda^k + M\lambda^k \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{-i} = 0$$

$$M\lambda^k \left(1 + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{-i}\right) = 0 \Rightarrow 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{-i} = 0 \text{ (kar.egyenlet)}$$

Rendszeregyenlet megoldása (folyt.)

A karakterisztikus egyenlet és a sajátértékek

$$1 + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{-i} = 0$$

$$1 + a_1\lambda^{-1} + a_2\lambda^{-2} + \cdots + a_n\lambda^{-n} = 0, \quad / \cdot \lambda^n$$

$$\boxed{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0}$$

$\Downarrow$ gyökei

$\boxed{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n}$ sajátértékek.

1. egyszeres sajátértékek,
2. egy vagy több többszörös sajátérték,
3. komplex konjugált párok

Rendszeregyenlet megoldása (folyt.)

A tranziens összetevő

1. Egyszeres sajátértékek:

$$y_{tr}[k] = \sum_{i=1}^{n} M_i \lambda_i^k$$

2. Többszörös sajátértékek:

$$y_{tr}[k] = \sum_{i=1}^{s-1} M_i \lambda_i^k + \sum_{p=0}^{m_p-1} M_p k^p \lambda_{s_1}^k + \sum_{q=0}^{m_q-1} M_q k^q \lambda_{s_2}^k, (n = s-1+m_p+m_q)$$

3. Komplex konjugált pár:

$$\lambda_i = r_i e^{j\vartheta_i}, \ \lambda_{i+1} = r_i e^{-j\vartheta_i}, \quad M_i = N_i e^{j\varphi_i}, \ M_{i+1} = N_i e^{-j\varphi_i}$$

Rendszeregyenlet megoldása (folyt.)

Tranziens összetevő komplex konjugált pár esetén

$$\lambda_i = r_i e^{j\vartheta_i},\ \lambda_{i+1} = r_i e^{-j\vartheta_i}, \quad M_i = N_i e^{j\varphi_i},\ M_{i+1} = N_i e^{-j\varphi_i}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} y_{tr}[k] &= M_i \lambda_i^k + M_{i+1}\lambda_{i+1}^k = N_i e^{j\varphi_i} r_i^k e^{jk\vartheta_i} + N_i e^{-j\varphi_i} r_i^k e^{-jk\vartheta_i} \\ &= N_i r_i^k e^{j(\varphi_i + k\vartheta_i)} + N_i r_i^k e^{-j(\varphi_i + k\vartheta_i)} = N_i r_i^k \left(e^{j(\varphi_i + k\vartheta_i)} + e^{-j(\varphi_i + k\vartheta_i)} \right) \end{aligned}$$

$\Downarrow$ Euler-formulák

$$y_{tr}[k] = 2N_i r_i^k \cos(k\vartheta_i + \varphi_i).$$

Csökkenő amplitúdójú szinuszos jel, ha $|r_i| = |\lambda_{i,i+1}| < 1$.

Rendszeregyenlet megoldása (folyt.)

Stacioner összetevő, próbafüggvények

	Az $s[k]$ gerjesztés	Az $y_{st}[k]$ stacioner összetevő
Konstans	C	A
$q \neq \lambda_i$	Cq^k	Aq^k
szinuszos $s[k]$	$C\cos(\vartheta k) + D\sin(\vartheta k)$	$A\cos(\vartheta k) + B\sin(\vartheta k)$
λ r-szeres gyök	$C\lambda^k$	$Ak^r\lambda^k$

Stacioner összetevő = Inhomogén differenciaegyenlet partikuláris megoldása

$$y_{st}[k] + \sum_{i=1}^{n} a_i y_{st}[k-i] = \sum_{j=0}^{m} b_j s[k-i] \Rightarrow \text{Lin. egyenletrendszer}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y[k] = y_{tr}[k] + y_{st}[k]}$$

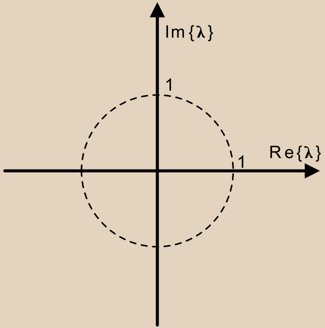
GV stabilitás

DI rendszer GV stabilitása

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad \text{(kar.e.)}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{s.é.}$$

$$\Downarrow$$



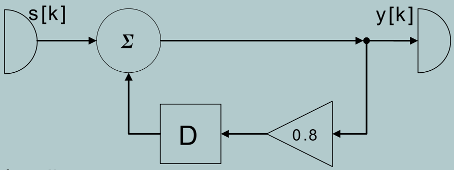
$$y_{tr}[k] = \sum_{i=1}^{n} M_i \lambda_i^k$$

$$\Downarrow$$

$$|\lambda_i| < 1, \ \forall i, \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Rendszeregyenlet megoldása

Pl.4



$$y[k] - 0.8y[k-1] = s[k],$$

$$v[k] = ?, w[k] = ?$$

Néhány ütem:

$$v[k] = 0.8v[k-1] + \varepsilon[k],$$
$$v[0] = 0.8v[-1] + \varepsilon[0] = 0 + 1 = 1, \quad (s[k] \text{ belépő} \Rightarrow v[-1] = 0)$$
$$v[1] = 0.8v[0] + \varepsilon[1] = 0.8 \cdot 1 + 1 = 1.8,$$
$$v[2] = 0.8v[1] + \varepsilon[2] = 0.8 \cdot 1.8 + 1 = 2.44,$$
$$v[3] = 0.8v[2] + \varepsilon[3] = 0.8 \cdot 2.44 + 1 = 2.952,$$

$\vdots$ (számítógéppel nem gond)

Rendszeregyenlet megoldása

Pl.4 (folyt.) Összetevőkre bontással

$$\boxed{v[k] = v_{tr}[k] + v_{st}[k]}, \quad v_{tr}[k] = M\lambda^k, (\lambda \text{ s.é.}),$$

Hom.e.: $M\lambda^k - 0.8M\lambda^{k-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad M\lambda^k(1 - 0.8\lambda^{-1}) = 0$

Kar.e.: $1 - 0.8\lambda^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda - 0.8 = 0} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.8$

$$v_{tr}[k] = M \cdot 0.8^k, \quad (M \text{ a keztedi feltételből } y_{st}[k] \text{ után})$$

$$v_{st}[k] - 0.8v_{st}[k-1] = \varepsilon[k] \xrightarrow{v_{st}=A} A - 0.8A = 1 \Rightarrow \boxed{A = 5} \quad ({\color{red}k \geq 0})$$

$$v[k] = M \cdot 0.8^k + 5, \quad (k \geq 0), \xrightarrow{v[-1]=0} v[-1] = M \cdot 0.8^{-1} + 5 \Rightarrow \boxed{M = -4},$$

$$\underline{v[k] = \varepsilon[k]\left(5 - 4 \cdot 0.8^k\right)}$$

Rendszeregyenlet megoldása

Pl.4 (folyt.) Impulzusválasz

Néhány ütem:

$$\begin{aligned} w[k] &= 0.8w[k-1] + \delta[k], \\ w[0] &= 0.8w[-1] + \delta[0] = 0 + 1 = 1, \quad (\delta[k] \text{ belépő} \Rightarrow w[-1] = 0) \\ w[1] &= 0.8w[0] + \delta[1] = 0.8 \cdot 1 + 0 = 0.8, \\ w[2] &= 0.8w[1] + \delta[2] = 0.8 \cdot 0.8 + 0 = 0.64 \\ &\vdots \qquad \text{(számítógéppel nem gond)} \end{aligned}$$

Ha $\boxed{s[k] = \delta[k] \Rightarrow}$ a próbafüggvény és az $y_{st}[k] = 0$, ha $k \geq 1 \Rightarrow \boxed{y[k] = y_{tr}[k]}$

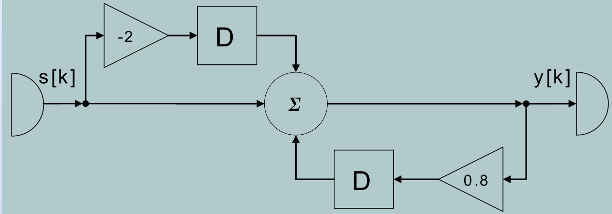
$$w[k] = M\lambda^k \xrightarrow{\lambda=0.8} w[k] = M \cdot 0.8^k \quad (k \geq 1)$$

$$w[k] = M \cdot 0.8^k \xrightarrow{w[0]=1} w[0] = M \cdot 0.8^0 \Rightarrow \boxed{M = 1}$$

$$\underline{w[k] = \varepsilon[k] \cdot 0.8^k}$$

Rendszeregyenlet megoldása

Pl.5



$$y[k] - 0.8y[k-1] = s[k] - 2s[k-1],$$

$$v[k] = ?, w[k] = ?$$

Néhány ütem:

$$v[k] = 0.8v[k-1] + \varepsilon[k] - 2\varepsilon[k-1],$$
$$v[0] = 0.8v[-1] + \varepsilon[0] - 2\varepsilon[-1] = 0 + 1 - 0 = 1, \quad (\varepsilon[k] \text{ belépő} \Rightarrow v[-1] = 0)$$
$$v[1] = 0.8v[0] + \varepsilon[1] - 2\varepsilon[0] = 0.8 \cdot 1 + 1 - 2 = -0.2,$$
$$v[2] = 0.8v[1] + \varepsilon[2] - 2\varepsilon[1] = 0.8 \cdot (-0,2) + 1 - 2 = -1.16$$

$\vdots$ (számítógéppel nem gond)

Rendszeregyenlet megoldása

Pl.5 (folyt.) Összetevőkre bontással

$$\boxed{v[k] = v_{tr}[k] + v_{st}[k]}, \quad v_{tr}[k] = M\lambda^k, (\lambda \text{ s.é.}),$$

Hom.e.: $M\lambda^k - 0.8M\lambda^{k-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad M\lambda^k(1 - 0.8\lambda^{-1}) = 0$

Kar.e.: $1 - 0.8\lambda^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda - 0.8 = 0} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.8$

$$v_{tr}[k] = M \cdot 0.8^k, \quad (M \text{ a keztedi feltételből } y_{st}[k] \text{ után})$$

$$v_{st}[k] - 0.8v_{st}[k-1] = \varepsilon[k] - 2\varepsilon[k-1] \xrightarrow{v_{st}=A} A - 0.8A = 1 - 2 \Rightarrow \boxed{A = -5}, \ (k \geq 1)$$

$$v[k] = M \cdot 0.8^k - 5, \quad (k \geq 1), \xrightarrow{v[0]=1} v[0] = M \cdot 0.8^0 - 5 \Rightarrow \boxed{M = 6},$$

$$\underline{v[k] = \varepsilon[k]\left(6 \cdot 0.8^k - 5\right)}$$

Rendszeregyenlet megoldása

Pl.5 (folyt.) Impulzusválasz

Néhány ütem:

$$w[k] = 0.8w[k-1] + \delta[k] - 2\delta[k-1],$$
$$w[0] = 0.8w[-1] + \delta[0] - 2\delta[-1] = 0 + 1 - 0 = 1, \quad (\delta[k] \text{ belépő} \Rightarrow w[-1] = 0)$$
$$w[1] = 0.8w[0] + \delta[1] - 2\delta[0] = 0.8 \cdot 1 + 0 - 2 = -1.2,$$
$$w[2] = 0.8w[1] + \delta[2] - 2\delta[1] = 0.8 \cdot (-1.2) + 0 - 0 = -0.96$$
$$\vdots \qquad \text{(számítógéppel nem gond)}$$

Ha $\boxed{s[k] = \delta[k] \Rightarrow}$ a próbafüggvény és az $y_{st}[k] = 0$, ha $k \geq 2 \Rightarrow \boxed{y[k] = y_{tr}[k]}$

$$w[k] = M\lambda^k \xrightarrow{\lambda=0.8} w[k] = M \cdot 0.8^k \quad (k \geq 2)$$

$$w[k] = M \cdot 0.8^k \xrightarrow{w[1]=-1.2} w[1] = M \cdot 0.8^1 \Rightarrow \boxed{M = -1.5}$$

$$w[k] = \delta[k] + \varepsilon[k-1]\left(-1.5 \cdot 0.8^k\right) \rightarrow \underline{w[k] = \delta[k] + \varepsilon[k-1]\left(-1.2 \cdot 0.8^{k-1}\right)}$$

Rendszeregyenlet megoldása

Kezdeti értékekre vonatkozó szabályok

$$y[k] + \sum_{i=1}^{n} a_i y[k-i] = \sum_{j=0}^{m} b_j s[k-j]$$

1. $m > n \;\; \Rightarrow$ a válasz csak a $k = m - n > 0$ ütemig adott kisebb k-kra $\delta[k]$-val vihető be,
2. $m = n \;\; \Rightarrow k = 0$-ban belépő válasz,
3. $m < n \;\; \Rightarrow k < 0$-ra is kapunk választ (nem fontos, belépő gerjesztés)

$\delta[k]$ gerjesztés esetén

Impulzusválasz számítása esetén az m minden szabályban $m + 1$-re módosul!

5 Az állapotváltozós rendszerleírás

- Definíció
- Az állapotváltozós leírás előállítása hálózat alapján
- Az állapotváltozós leírás megoldása
- Aszimptotikus stabilitás

Az állapotváltozós rendszerleírás

Definíció (Állapotváltozók)

Egy diszkrét idejű rendszer $x_i[k], (i = 1, \ldots, N)$ *állapotváltozói a változók olyan minimális halmaza, amelyek a következő tulajdonságokkal bírnak:*

1. *A rendszert megadó állapotváltozós leírás ismeretében az állapotváltozók és a gerjesztés(ek)* k*-adik ütembeli értékéből meghatározható az állapotváltozók* $(k+1)$*-edik ütembeli értéke,*
2. *ugyanezen adatokból meghatározható a rendszer válaszának (válaszainak) értéke a* k*-adik ütemben.*

DI állapotváltozós leírás

$$x_i[k+1] = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j[k] + \sum_{j=1}^{N_s} B_{ij} s_j[k] \quad (i = 1, \ldots, N)$$

$$y_p[k] = \sum_{j=1}^{N} C_{pj} x_j[k] + \sum_{j=1}^{N_s} D_{pj} s_j[k] \quad (p = 1, \ldots, N_y)$$

Az állapotváltozós rendszerleírás

Mátrixos alak

$$x_i[k+1] = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j[k] + \sum_{j=1}^{N_s} B_{ij} s_j[k] \quad (i = 1, \dots, N)$$

$$y_p[k] = \sum_{j=1}^{N} C_{pj} x_j[k] + \sum_{j=1}^{N_s} D_{pj} s_j[k] \quad (p = 1, \dots, N_y)$$

$$\Downarrow \quad \boxed{A_{ij} \leftarrow \mathbf{A}, B_{ij} \leftarrow \mathbf{B}, C_{pj} \leftarrow \mathbf{C}, D_{pj} \leftarrow \mathbf{D}}$$

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{s}[k], \qquad (\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N},\ \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times N_s})$$

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}\mathbf{s}[k], \qquad (\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N_y \times N},\ \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N_y \times N_s})$$

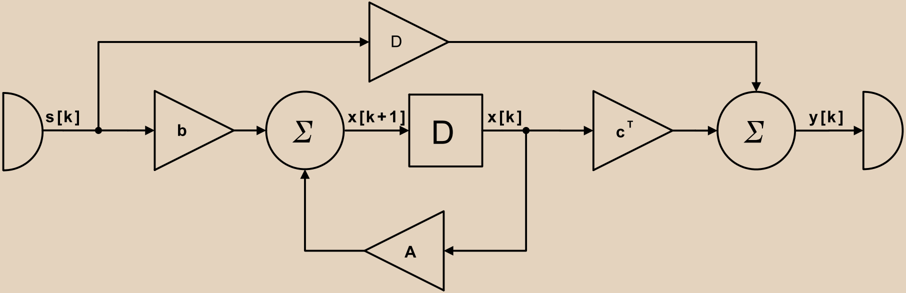
(Differenciaegyenlet-rendszer + egyenletrendszer)

Az állapotváltozós rendszerleírás

SISO rendszer esetén

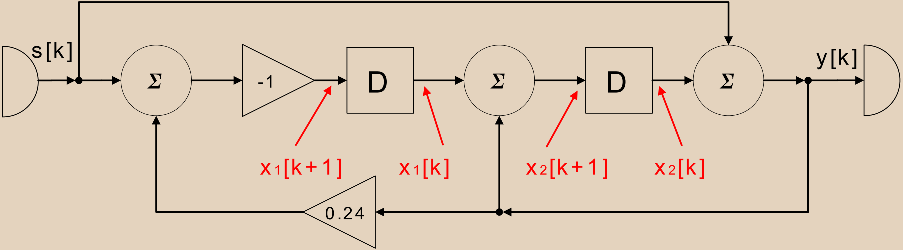
$$\begin{aligned}\mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}s[k],\\ \mathbf{y}[k] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}s[k]\end{aligned} \xrightarrow{\mathbf{B}\leftarrow\mathbf{b},\mathbf{C}\leftarrow\mathbf{c}^T,\mathbf{D}\leftarrow D} \begin{aligned}\mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{b}s[k],\\ y[k] &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}[k] + Ds[k]\end{aligned}$$

SISO rendszer hatásvázlata



Az állapotváltozós rendszerleírás

Előállítás hálózat alapján



$$x_2[k+1] = x_1[k] + y[k], \quad x_1[k+1] = -0.24y[k] - s[k], \quad y[k] = x_2[k] + s[k],$$

$$\Downarrow$$

$$x_1[k+1] = -0.24x_2[k] - 1.24s[k],$$
$$x_2[k+1] = x_1[k] + x_2[k] + s[k],$$
$$y[k] = x_2[k] + s[k]$$

Az állapotváltozós leírás megoldása

Megoldás

$$\mathbf{x}[1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[0] + \mathbf{b}s[0],$$

$$\mathbf{x}[2] = \mathbf{A}\mathbf{x}[1] + \mathbf{b}s[1] \leftarrow \mathbf{x}[1]$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{x}[2] = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}\mathbf{x}[0] + \mathbf{b}s[0]\right) + \mathbf{b}s[1] = \mathbf{A}^2\mathbf{x}[0] + \mathbf{A}\mathbf{b}s[0] + \mathbf{b}s[1],$$

$$\mathbf{x}[3] = \mathbf{A}\mathbf{x}[2] + \mathbf{b}s[2] = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^2\mathbf{x}[0] + \mathbf{A}\mathbf{b}s[0] + \mathbf{b}s[1]\right) + \mathbf{b}s[2]$$

$$= \mathbf{A}^3\mathbf{x}[0] + \mathbf{A}^2\mathbf{b}s[0] + \mathbf{A}\mathbf{b}s[1] + \mathbf{b}s[2]$$

$\Downarrow$ általánosan $\mathbf{x}[k]$-ra

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}^k\mathbf{x}[0] + \sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{A}^{(k-1)-i}\mathbf{b}s[i]$$

$$y[k] = \mathbf{c}^T\mathbf{x}[k] + Ds[k] = \mathbf{c}^T\left(\mathbf{A}^k\mathbf{x}[0] + \sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{A}^{(k-1)-i}\mathbf{b}s[i]\right) + Ds[k]$$

Az állapotváltozós leírás megoldása

Az $y[k]$ formulája $k > 0$-ra érvényes

$$y[k] = \mathbf{c}^T \mathbf{x}[k] + Ds[k] = \mathbf{c}^T \left(\mathbf{A}^k \mathbf{x}[0] + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-1)-i} \mathbf{b} s[i] \right) + Ds[k],$$

$$y[k] = \begin{cases} \mathbf{c}^T \mathbf{x}[0] + Ds[0], & k = 0 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x}[k] + Ds[k] = \mathbf{c}^T \left(\mathbf{A}^k \mathbf{x}[0] + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-1)-i} \mathbf{b} s[i] \right) + Ds[k], & k > 0 \end{cases}$$

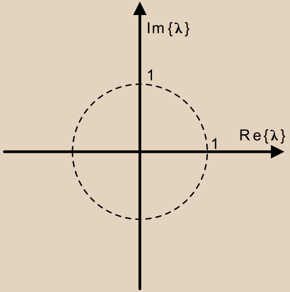
Aszimptotikus stabilitás

Definíció (Aszimptotikus stabilitás)

Egy diszkrét idejű, LI rendszer akkor aszimptotikusan stabilis, ha a gerjesztetlen rendszer állapotvektora $\mathrm{k} \to \infty$ *esetén nullához tart tetszőleges* $\mathbf{x}[0]$ *kezdeti érték esetén*

$$\lim_{\mathrm{k}\to\infty} \mathbf{x}[\mathrm{k}] = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{A}^{\mathrm{k}} \to \mathbf{0}$ azaz $\forall\lambda : |\lambda| < 1$



Az $\mathbf{A}$ mátrix minden sajátértéke az egységsugarú körön belül helyezkedik el.

$\boxed{\text{Aszimptotikus stabilitás} \Rightarrow \text{GV-stabilitás}}$

6 Összefoglalás