JELEK ÉS RENDSZEREK I (BMEVIHVAA00)
9. gyakorlat

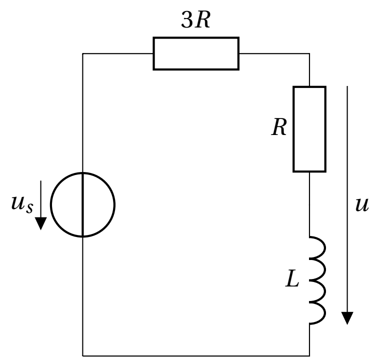
Szerkesztette: Dr. Horváth Péter, BME HVT

2020. május 18.

1. Feladatok

1.1. feladat

Az alábbi hálózat által reprezentált rendszer gerjesztése u_s, válasza a bejelölt u feszültség. Határozzuk meg a rendszer ugrás- és impulzusválaszát!



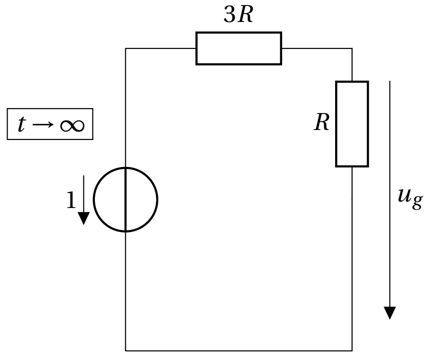
A keresett ugrás- és impulzusválaszt több módszerrel is kiszámítjuk.

1.1.1. Az ugrásválasz meghatározása

Ugrásválasz számításához a gerjesztés $u(t) \equiv \varepsilon(t)$, a rendszer nyilvánvalóan kauzális, ezért $t < 0$-ra energiamentes és gerjesztetlen, $t > 0$-ra konstans 1 gerjesztést kap. Az elsőrendű dinamikus rendszer tetszőleges változójára érvényes formula („magic-formula") alapján

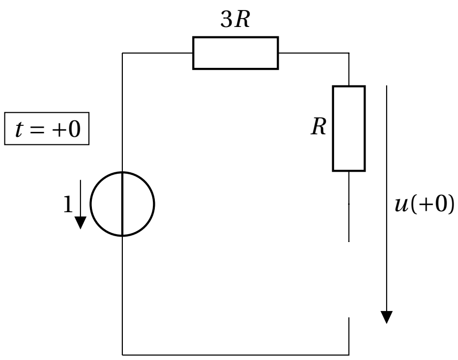
$$u(t) = u_g(t) + \left[u(+0) - u_g(+0)\right] e^{-t/\tau}, \quad t > 0$$

ahol $u_g(t)$ a keresett válasz gerjesztett összetevője. Ez konstans gerjesztés esetén ugyancsak állandó, és elemi úton meghatározható: a tekercs árama állandósul, deriváltja zérus, emiatt a tekercs rövidzárral helyettesíthető:



$$u_g = U_g = 1 \cdot \frac{R}{R + 3R} = 0{,}25$$

Az $u(+0)$ meghatározásához a $t = +0$-ban érvényes rezisztív helyettesítő kép:



ami alapján

$$u(+0) = 1.$$

A τ időállandót a dinamikus elemre csatlakozó dezaktivizált kétpólus eredő ellenállásával ($R_e = R + 3R = 4R$) fejezhetjük ki:

$$\tau = \frac{L}{4R},$$

amivel

$$u(t) = U_g + \left[u(+0) - U_g\right] e^{-t/\tau} = 0{,}25 + (1 - 0{,}25)e^{-t/\tau} \quad t > 0$$

és

$$u(t) = 0, \quad t < 0.$$

Összefoglalva

$$\boxed{g(t) = \varepsilon(t)\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-t/\tau}\right), \quad \tau = \frac{L}{4R}}$$

Az ugrásválasz ebben az esetben dimenzió nélküli mennyiség, annak ellenére, hogy a rendszer válasza feszültség[1].

1.1.2. Az impulzusválasz meghatározása

Az ugrásválasz alapján. Az ugrásválaszból (általánosított) deriválással

$$h(t) = g'(t) = \left[\varepsilon(t)\underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-t/\tau}\right)}_{\nu(t)}\right]'$$

Tudjuk, hogy ha egy $f(t) = \nu(t)\varepsilon(t)$ alakú jelet kell deriválnunk, amelyben $\nu(t)$ egy folytonos függvény, akkor az általánosított derivált

$$f'(t) = \nu'(t)\varepsilon(t) + \nu(+0)\delta(t)$$

formában adódik (a deriválthoz a $t = +0$-ban annyi Dirac-deltát adunk, amekkora $\nu(t)$ ugrása a $t = 0$ pillanatban). A feladatbeli ugrásválasz deriváltja ezzel

$$h(t) = g'(t) = \varepsilon(t)\left(-\frac{1}{\tau}\right)\frac{3}{4}e^{-t/\tau} + 1 \cdot \delta(t)$$

$$\boxed{h(t) = \delta(t) - \frac{3}{4\tau}\varepsilon(t)e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{L}{4R}}$$

Az impulzusválasz dimenziója ebben az esetben 1/idő.
Ellenőrzésképpen fordítsuk meg a relációt[2]:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \int_{-\infty}^{t} \left[\delta(\alpha) - \frac{3}{4\tau}\varepsilon(\alpha)e^{-\alpha/\tau}\right] \mathrm{d}\alpha$$

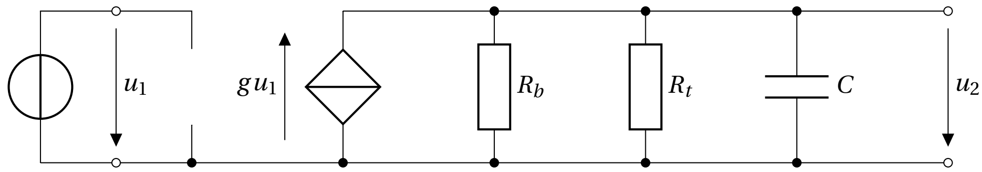
$$g(t) = \int_{-0}^{t} \delta(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha - \int_{0}^{t} \varepsilon(t)\frac{3}{4\tau}e^{-\alpha/\tau}\,\mathrm{d}\alpha = 1 \cdot \varepsilon(t) - \varepsilon(t)\left[\frac{\frac{3}{4\tau} \cdot e^{-\alpha/\tau}}{-1/\tau}\right]_0^t = \varepsilon(t) + \frac{3}{4}\varepsilon(t)\left(e^{-t/\tau} - 1\right) = \varepsilon(t)\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-t/\tau}\right)$$

ami valóban az ugrásválasz, amit vissza kellett kapnunk.

[1] Elevenítsük fel az ugrásválasz méréséről tanultakat.
[2] Mivel a τ szimbólumot elhasználtuk az időállandó jelölésére, a „kamu” idő jellegű integrálási változó legyen α.

1.2. feladat

Az alábbi hálózat által reprezentált rendszer gerjesztése u_1, válasza a bejelölt u_2 feszültség. Adja meg a rendszer ugrás- és impulzusválaszát!



A kondenzátor feszültsége u_2, a rendszer egyetlen állapotváltozója. Válasszuk az alsó csomópont potenciálját zérusnak. u_2-re, az egyetlen ismeretlen potenciálú csomópontra az áramtörvény:

$$Cu_2' + \frac{u_2}{R_b \times R_t} - gu_1 = 0,$$

ahonnan az állapotegyenlet normálalakja az $R_e = R_b \times R_t$ párhuzamos eredő bevezetésével

$$u_2' = -\frac{1}{R_e C} u_2 + \frac{g}{C} u_1,$$

a válaszjel pedig maga az állapotváltozó, u_2.

Az ugrásválasz meghatározásához ezt az állapotegyenletet kell megoldanunk $u_1(t) = \varepsilon(t)$ gerjesztésre. A rendszer $t < 0$-ra gerjesztetlen, és mivel kauzális, ezért biztosan energiamentes is. $t > 0$-ra a gerjesztés konstans 1. A megoldás három lépése szokás szerint alakul.

1. A szabad összetevő. A homogén DE:

$$u_{2,h}' = -\frac{1}{R_e C} u_{2,h},$$

amelynek megoldása az elsőrendű esetre megismert

$$u_{2,h}(t) = Ke^{-t/\tau}, \quad \tau = R_e C, \quad t > 0,$$

egyelőre ismeretlen K konstanssal[3].

2. A gerjesztett összetevő. A gerjesztés $t > 0$-ra konstans 1, ezért a gerjesztett összetevőt is konstans alakban keressük (U_2), amelynek deriváltja nulla. A gerjesztett összetevő kielégíti az inhomogén differenciálegyenletet:

$$0 = -\frac{1}{R_e C} U_2 + \frac{g}{C} \cdot 1,$$

ahonnan

$$U_2 = gR_e.$$

3. A kezdeti feltételek érvényesítése. A teljes megoldás:

$$u_2(t) = u_{2,h}(t) + U_2 = Ke^{-t/\tau} + gR_e, \quad t > 0.$$

Mivel a rendszer $t < 0$-ra energiamentes, a kondenzátor feszültségének kiindulási értéke nulla. A kezdeti feltétel: $u_2(+0) = u_2(-0) = 0$. A megoldásba helyettesítve

$$u_2(+0) = Ke^{0/\tau} + gR_e,$$

ahonnan

$$K = -gR_e.$$

A megoldás, egyben a rendszer ugrásválasza

$$\boxed{g(t) = \varepsilon(t) gR_e \left[1 - e^{-t/\tau}\right], \quad \tau = R_e C}$$

Ebből a deriváltat képezve kapjuk az impulzusválaszt. Az ugrásválasz folytonos $t = 0$-ban (a válasz egy kondenzátor feszültsége, a gerjesztés véges, ezért a válasz biztosan nem ugorhat), így egyszerű deriválással

$$h(t) = (g(t))' = \frac{1}{\tau} gR_e \varepsilon(t) e^{-t/\tau} = \frac{1}{R_e C} gR_e \varepsilon(t) e^{-t/\tau}$$

[3] Az időállandóban felismerjük a kondenzátor kapcsaira csatlakozó dezaktivizált kétpólus belső ellanállását.

$$\boxed{h(t) = \frac{g}{C}\varepsilon(t)e^{-t/\tau}, \quad \tau = R_e C}$$

Az ugrásválaszt a magic formula alapján közvetlenül is megkaphattuk volna:

$$g(t) = U_2 + [u_2(+0) - U_2]\, e^{-t/\tau},$$

ahol U_2 a kondenzátor feszültsége $t \to \infty$ mellett, ami a hálózatból kiolvashatóan

$$u_2 = g u_1 R_e = g \cdot 1 \cdot R_e.$$

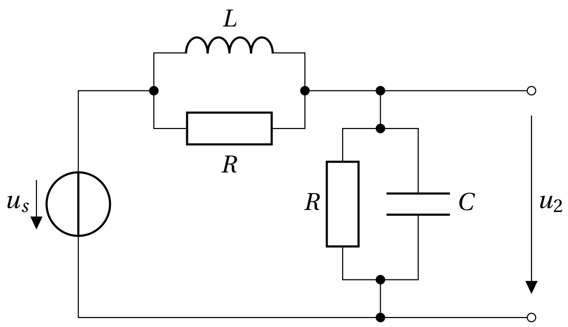
Bekapcsolási folyamatról lévén szó, $u_2(+0) = 0$. Ezzel

$$g(t) = g \cdot 1 \cdot R_e + (-g \cdot 1 \cdot R_e)e^{-t/\tau}, \quad \tau = R_e C,$$

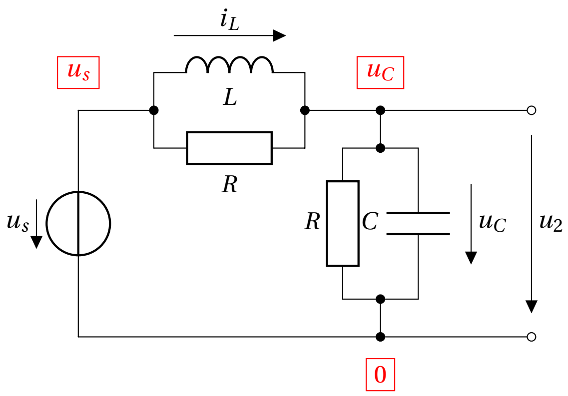
ahol az időállandó továbbra is a kondenzátorra csatlakozó dezaktivizált kétpólus belső ellenállása. (A dezaktivizálás a vezérelt forrásokra nem vonatkozik, de jelen példában a független forrás dezaktivizálása a vezérelt forrás áramát nullára állítja, amiatt a vezérelt forrás is inaktívvá, szakadássá válik).

1.3. feladat

Az alábbi hálózat által reprezentált rendszer gerjesztése a forrásfeszültség, válasza a bejelölt u_2 feszültség. Adja meg a rendszer ugrás- és impulzusválaszát, ha $R = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $L = 0{,}2\,\mathrm{H}$, és $C = 0{,}25\,\mathrm{uF}$.



Vegyük fel az állapotváltozókat és a csomóponti potenciálokat:



Áramtörvény az u_C potenciálú csomópontra:

$$-i_L + \frac{u_C - u_s}{R} + \frac{u_C}{R} + C u_C' = 0,$$

és egy feszültségtörvény:

$$L i_L' + u_C - u_s = 0.$$

Ebből az állapotváltozós leírás normálalakja

$$\left.\begin{aligned} u_C' &= -\frac{2}{RC}u_C + \frac{1}{C}i_L + \frac{1}{RC}u_s \\ i_L' &= -\frac{1}{L}u_C + \frac{1}{L}u_s \end{aligned}\right\}$$

a válasz pedig

$$u_2 = u_C.$$

Helyettesítsük be az elemértékeket [V, kΩ, mA, H, uF, ms] koherens egységrendszerben!

$$\left.\begin{aligned} u_C' &= -4u_C + 4i_L + 2u_s \\ i_L' &= -5u_C + 5u_s \end{aligned}\right\}$$

1.3.1. Az ugrásválasz kiszámítása

Oldjuk meg az állapotváltozós leírást $u_s(t) = \varepsilon(t)$ gerjesztésre! Kövessük a standard megoldás három lépését!
A szabad összetevő. A szabad összetevő a homogén differenciálegyenlet megoldása:

$$\left.\begin{aligned} u'_{C,f} &= -4u_{C,f} + 4i_{L,f} \\ i'_{L,f} &= -5u_{C,f} \end{aligned}\right\}$$

A rendszermátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix},$$

a karakterisztikus egyenlet

$$D(\lambda) \equiv \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0,$$

vagyis

$$D(\lambda) \equiv \det\begin{pmatrix} \lambda - 4 & -4 \\ 5 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 20 = 0,$$

amiből a rendszermátrix két sajátértéke

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm 4j.$$

A szabad összetevőt az egyelőre ismeretlen K konstanssal és az $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2^*$ sajátvektorokkal fejezzük ki. A kézi számolás során is megpróbálnánk a sajátvektorok első rendezőjét 1 értékűre választani, tegyük most is ezt:

$$\begin{pmatrix} u'_{C,f} \\ i'_{L,f} \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 1 \\ m_{1,2} \end{pmatrix} \cdot e^{(-2+4j)t} + K^* \begin{pmatrix} 1 \\ m_{1,2}^* \end{pmatrix} \cdot e^{(-2-4j)t}.$$

A feladat megoldásához csak a kondenzátor feszültségére van szükségünk, a tekercs áramát nem is kell kiszámolnunk, ezért az egyenletrendszernek csak az első sora érdekes számunkra. Ezért el is kerülhetjük a sajátvektorok második koordinátájának kiszámítását, és az első egyenletre koncentrálhatunk. A kondenzátor feszültségének szabad összetevője:

$$u_{C,f}(t) = K \cdot e^{(-2+4j)t} + K^* \cdot e^{(-2-4j)t}, \qquad t > 0.$$

A gerjesztett összetevő. Az $u_s(t) = \varepsilon(t)$ gerjesztés azt jelenti, hogy $t > 0$-ra a gerjesztés konstans 1. A hálózatból könnyen ki tudjuk olvasni, hogy az állapotváltozók értéke hova tart $t \to \infty$ esetben: a kondenzátor szakadássá, a tekercs rövidzárrá válik, a kondenzátor feszültsége a gerjesztés értékéhez, 1-hez tart:

$$u_{C,g}(t) \equiv U_c = 1.$$

Ugyanezt az inhomogén diff. egyenletből is kiszámolhattuk volna.
A kezdeti feltételek érvényesítése. A teljes megoldás a szabad és a gerjesztett összetevő összege:

$$u_C(t) = u_{C,f}(t) + u_{C,g}(t) = Ke^{(-2+4j)t} + K^* e^{(-2-4j)t} + 1, \qquad t > 0$$

Bekapcsolási folyamatról lévén szó, a rendszer $t < 0$-ra energiamentes: $u_C(-0) = 0$. Véges gerjesztés hatására az állapotváltozók folytonosan mennek át, ezért a kezdeti feltétel $u_C(+0) = 0$. Ezt érvényesítve:

$$u_C(+0) = Ke^{(-2+4j)0} + K^* e^{(-2-4j)0} + 1 = K + K^* + 1 = 2\mathscr{R}e\{K\} + 1 = 0$$

$$\mathscr{R}e\{K\} = -0{,}5$$

és $\mathscr{I}m\{K\} = 0$. Az ugrásválasz:

$$g(t) = \varepsilon(t)\left(-0{,}5e^{(-2+4j)t} - 0{,}5e^{(-2-4j)t} + 1\right) = \varepsilon(t)\left[-0{,}5e^{-2t}\underbrace{(e^{4jt} + e^{-4jt})}_{2\cos 4t} + 1\right]$$

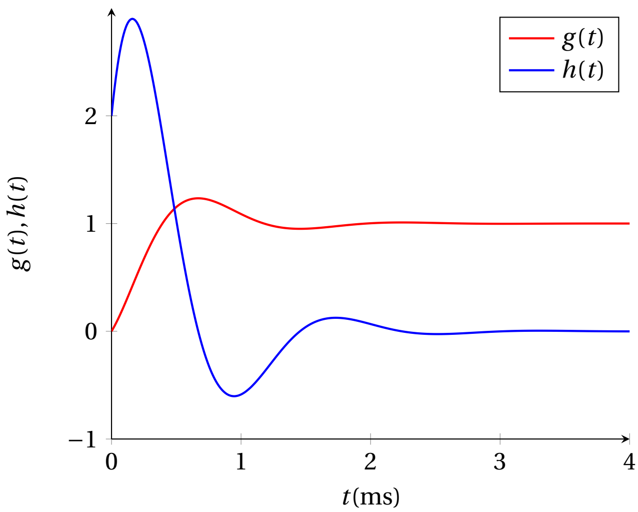
$$\boxed{g(t) = \varepsilon(t)\left(1 - e^{-2t}\cos 4t\right)}$$

Az ugrásválasz folytonos a $t = 0$-ban (a kondenzátor feszültsége nem ugrik), ezért egyszerű deriválással kapjuk az ugrásválaszt az impulzusválaszból, a szorzat deriválási szabályát követve:

$$h(t) = g'(t) = \varepsilon(t)\left((-2)(-e^{-2t}\cos 4t) + (-e^{-2t})(-4)\sin 4t\right) = \varepsilon(t)\left(2e^{-2t}\cos 4t + 4e^{-2t}\sin 4t\right)$$

$$\boxed{h(t) = 2e^{-2t}\varepsilon(t)\left(\cos 4t + 2\sin 4t\right) = 2\sqrt{5}e^{-2t}\varepsilon(t)\cos\left(4t - 63{,}43°\right) \qquad \mathrm{ms}^{-1}}$$

Ábrázoljuk a rendszerjellemző függvényeket! Az időállandó a sajátértékek valós részének negatív reciproka, $\tau = 0{,}5$ ms.



1.4. feladat

Egy rendszer ugrásválasza

$$g(t) = \varepsilon(t)\left(2 - 3e^{-t}\right),$$

gerjesztése pedig egy T hosszúságú impulzus:

$$u(t) = \begin{cases} U_0, & 0 < t < T \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Adjuk meg a rendszer válaszjelét!
A gerjesztés kifejezhető egységugrásokból képzett ablakfüggvény formájában is:

$$u(t) = U_0\varepsilon(t) - U_0\varepsilon(t - T).$$

A rendszer lineáris és invariáns (hiszen létezik ugrásválasza), ezért a gerjesztésben levő két tagra adott válasz külön-külön meghatározható, és a két összetevő szuperponálható:

- A rendszer $\varepsilon(t)$ gerjesztésre adott válasza $y(t) = g(t)$ (definíció).
- A rendszer $U_0\varepsilon(t)$ gerjesztésre adott válasza $y(t) = U_0 g(t)$ (linearitás).
- A rendszer $\varepsilon(t - T)$ gerjesztésre adott válasza $y(t) = g(t - T)$ (invariancia).
- A rendszer $U_0\varepsilon(t - T)$ gerjesztésre adott válasza $y(t) = U_0 g(t - T)$ (linearitás és invariancia).

Ezért

$$y(t) = U_0 g(t) - U_0 g(t - T) = U_0\varepsilon(t)\left(2 - 3e^{-t}\right) - U_0\varepsilon(t - T)\left(2 - 3e^{-(t-T)}\right)$$

1.5. feladat

Egy rendszer impulzusválasza

$$h(t) = \varepsilon(t) A e^{-\alpha t}.$$

Milyen speciális tulajdonságokkal rendelkezik a rendszer? Határozzuk meg a rendszer válaszát az

$$u(t) = \varepsilon(t)\left[1 - e^{-\beta t}\right]$$

gerjesztésre!

A rendszer lineáris és invariáns, mert csak ilyen rendszereknek van impulzusválasza. A rendszer kauzális, mert impulzusválasza belépő ($h(t) \equiv 0$, $t < 0$). A rendszer gerjesztés-válasz (GV-) stabil, ha impulzusválasza abszolút integrálható:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,\mathrm{d}t < \infty,$$

amelynek szükséges feltétele, hogy az impulzusválasz aszimptotikusan eltűnjön:

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0.$$

Ez a feltétel $\alpha > 0$ értékekre teljesül. A rendszer tehát $\alpha > 0$-ra GV-stabil, egyéb értékekre instabil.

A választ konvolúcióval határozhatjuk meg, amelynek általános alakja

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cdot h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \equiv u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \equiv h(t) * u(t).$$

A feladat megoldása során az első alakot használjuk, mert $u(t)$ alakja bonyolultabb, ezért abban célszerű meghagyni a τ argumentumot, és $h(t)$ formulájában írni $t-\tau$-t.

1.5.1. Az integrálási határok

Az első alakot figyelembe véve az integrálási határok egyszerűsíthetők. Mivel $u(\tau)$ belépő jel ($u(t) \equiv 0, \quad t < 0$), azért a τ szerinti integrálásnál az integrandus nulla, ahol $u(\tau) = 0$, ami $\tau < 0$ értékekre biztosan teljesül:

$$y(t) = \int_{-0}^{\infty} u(\tau)\cdot h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{(belépő gerjesztés)}$$

A -0 alsó határ a gerjesztésben levő esetleges $\delta(t)$ összetevő figyelembe vétele miatt szükséges. Másrészt ha az impulzusválasz maga is belépő, ami egyben azt is jelenti, hogy kauzális a rendszer, ezért az integrandus szintén nulla azon τ értékekre, ahol $h(t-\tau)$ nulla. Ez belépő impulzusválasz esetén azt jelenti, hogy $h(t-\tau) \equiv 0$, ha $\tau > t$, mert ekkor az impulzusválasz argumentuma negatív érték. Ezért az integrálás felső határának elegendő t-t, pontosabban $t+0$-t választani, hogy az impulzusválaszban levő esetleges $\delta(t)$ összetevőt is figyelembe vegyük:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t+0} u(\tau)\cdot h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{(kauzális rendszer [belépő impulzusválasz])}$$

Végül kauzális rendszer belépő gerjesztésre adott válasza mindkét egyszerűsítést figyelembe véve

$$y(t) = \int_{-0}^{t+0} u(\tau)\cdot h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{(kauzális rendszer [belépő impulzusválasz], belépő gerjesztés)}$$

1.5.2. A konvolúció kiszámítása

Az előző pontban meghatározott integrálási határokkal, figyelembe véve, hogy sem $u(t)$, sem $h(t)$ nem tartalmaz Dirac-összetevőt, -0 ill. $t+0$ helyett egyszerűen 0 ill. t írható, és az alábbi integrált kell kiszámítanunk:

$$y(t) = \int_{0}^{t} u(\tau)\cdot h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{0}^{t} \varepsilon(\tau)\left[1 - e^{-\beta\tau}\right]\varepsilon(t-\tau) A e^{-\alpha(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau$$

Nemnegatív t értékekre az integradusban szereplő $\varepsilon(t)$ jellegű tényezőket az integrálási határokkal már kifejeztük, mindkét $\varepsilon(t)$ tag 1 értéket ad $t \geq 0$-ra, egyszerűen elhagyhatóak lennének. Azonban $t < 0$-ra is érvényes formulát kell adnunk. Negatív t értékek esetén τ a teljes integrálási tartományon negatív, az integranduszban levő $\varepsilon(\tau)$ tényező azonosan nulla. Ezt kifejezhetjük azzal, hogy a válaszjel formulája elé egy $\varepsilon(t)$ szorzót írunk, az integranduszból pedig egyszerűen elhagyjuk az egységugrás jellegű tényezőket:

$$y(t) = \varepsilon(t)\int_0^t \left[1 - e^{-\beta\tau}\right] Ae^{-\alpha(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau$$

Vegyük ki az integrálból az integrálási változótól, τ-tól független tényezőket, és bontsuk fel a zárójelet:

$$y(t) = Ae^{-\alpha t}\varepsilon(t)\int_0^t \left[e^{\alpha\tau} - e^{(\alpha-\beta)\tau}\right]\mathrm{d}\tau$$

Bontsuk fel két tagra az integrált, és határozzuk meg tagonként a primitívfüggvényt:

$$y(t) = Ae^{-\alpha t}\varepsilon(t)\left[\frac{e^{\alpha\tau}}{\alpha} - \frac{e^{(\alpha-\beta)\tau}}{\alpha-\beta}\right]_0^t$$

A helyettesítési értékekkel ($e^0 = 1$):

$$y(t) = Ae^{-\alpha t}\varepsilon(t)\left[\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha} - \frac{e^{(\alpha-\beta)t}-1}{\alpha-\beta}\right] = A\varepsilon(t)\left[\frac{1-e^{\alpha t}}{\alpha} - \frac{e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}}{\alpha-\beta}\right]$$

Ezzel a keresett válasz

$$\boxed{y(t) = A\varepsilon(t)\left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha-\beta}e^{-\beta t} - \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha-\beta}\right)e^{-\alpha t}\right]}$$

A válaszjelben azonosíthatunk gerjesztett és tranziens összetevőket, bár nem közvetlenül hajtottuk végre az összetevőkre bontásos ÁVL megoldást. A válaszban az $e^{-\alpha t}$ jellegű tranziens összetevő könnyen azonosítható. A további tagok nevezhetők a válasz gerjesztett összetevőjének, amelyek ebben az egyszerű esetben a gerjesztés formulájához való hasonlatosságuk alapján is azonosíthatóak. Azonban hosszú idő múlva a válasz konstans értékhez tart. Fizikailag indokoltabb ezt a konstans tagot tekinteni a gerjesztett összetevőnek.
A rendszer gerjesztés-válasz stabilitásának szükséges és elégséges feltétele az impulzusválasz abszolút integrálhatósága. Jelen esetben ez $\alpha > 0$-ra teljesül, és akkor az $e^{-\alpha t}$ jellegű tranziensek $t \to \infty$ mellett lecsengenek, eltűnnek. Ellenkező esetben minden határon túl nőnek, a válasz korlátos gerjesztés mellett sem korlátos. A konvolúció azonban ebben az esetben is helyesen adja meg a válasz kifejezését.

1.6. feladat

Egy lineáris, invariáns rendszer impulzusválasza [V, kΩ, ms] egységekkel koherens egységrendszerben

$$h(t) = \varepsilon(t)\left(8e^{-0,5t} - 4e^{-0,1t}\right)\,\mathrm{k}\Omega\cdot\mathrm{ms}^{-1}$$

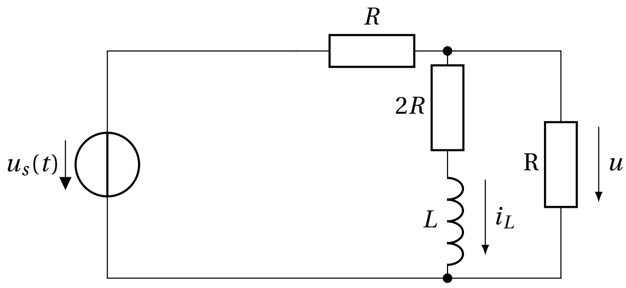
Adja meg a rendszer válaszát az

$$u(t) = 1 + \varepsilon(t)$$

nem belépő gerjesztésre!

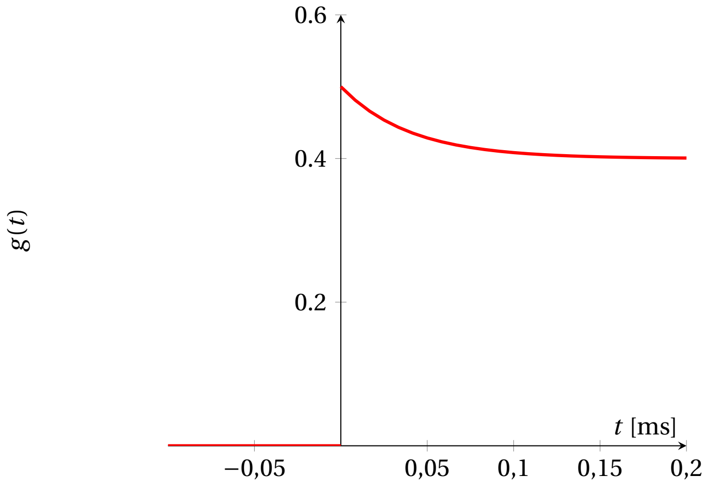
2. Gyakorlófeladatok

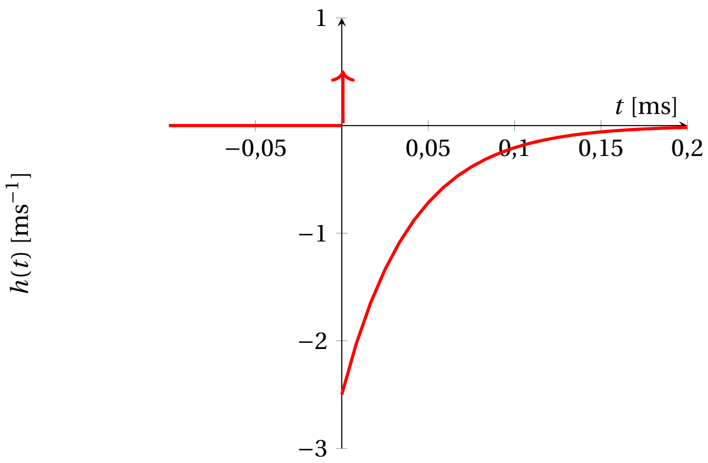
1. Adott az alábbi hálózat. ($R = 1\,\mathrm{k}\Omega, L = 0{,}1\,\mathrm{mH}$)



- Számoljuk ki a hálózat által reprezentált rendszer impulzus- és ugrásválaszát ($h(t)$, $g(t)$) az állapotváltozós leírásból, ha a rendszer válasza $y(t) = u(t)$! Ellenőrizzük a számolást az általánosított derivált segítségével!
- Határozzuk meg a rendszer válaszát, ha [V, ms] egységekkel koherens rendszerben $u_s(t) = 3\,\varepsilon(t) + 2\varepsilon(t-2)$!
- Ábrázoljuk az impulzusválaszt!

$$g(t) = (0{,}4 + 0{,}1e^{-25t})\varepsilon(t)$$
$$h(t) = \left[0{,}5\delta(t) - 2{,}5e^{-25t}\varepsilon(t)\right]\mathrm{ms}^{-1}$$
$$y(t) = (1{,}2 + 0{,}3e^{-25t})\varepsilon(t) + (0{,}8 + 0{,}2e^{-25(t-2)})\varepsilon(t-2)\mathrm{V}$$





2. Egy rendszer impulzusválasza [V, s] egységekkel koherens rendszerben

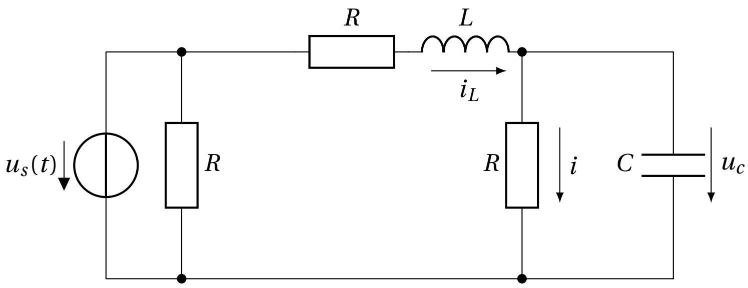
$$h(t) = 2\delta(t) + 4e^{-2t}\varepsilon(t).$$

Számítsuk ki a rendszer válaszát az alábbi gerjesztésekre!

- $u(t) = 3\delta(t)$
- $u(t) = 2\varepsilon(t)$
- $u(t) = e^{-4t}\varepsilon(t)$

$$y(t) = 6\delta(t) + 12e^{-2t}\varepsilon(t)\ \mathrm{V}$$
$$y(t) = 8\varepsilon(t) - 4e^{-2t}\varepsilon(t)\ \mathrm{V}$$
$$y(t) = 2\varepsilon(t)e^{-2t}\ \mathrm{V}$$

3. Adott az alábi hálózat. ($R = 4\,\mathrm{k\Omega}, L = 100\,\mathrm{mH}, C = 160\,\mathrm{nF}$)



- Számoljuk ki a hálózat által reprezentált rendszer impulzus- és ugrásválaszát az állapotváltozós leírásból, ha a rendszer válasza $y(t) = i(t)$! Ellenőrizzük a számolást az általánosított derivált segítségével!
- Ábrázoljuk az impulzusválaszt!
- Határozzuk meg a rendszer válaszát konvolúcióval, ha $u_s(t) \equiv U_s = 12$ V!

$$[\mathrm{mA,\ ms,\ mS}]\ \text{egységekben}\ g(t) = \left(0{,}125 + 0{,}01164e^{-38{,}3t} - 0{,}1366e^{-3{,}26t}\right)\varepsilon(t)$$
$$h(t) = \left(-0{,}446e^{-38{,}3t} + 0{,}446e^{-3{,}26t}\right)\varepsilon(t)$$
$$y(t) = 1{,}5\,\mathrm{mA}$$