JELEK ÉS RENDSZEREK I (BMEVIHVAA00)
4. gyakorlat

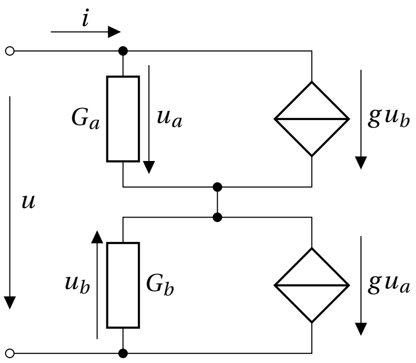
Szerkesztette: Dr. Horváth Péter, BME HVT

2020. szeptember 25.

1. Feladatok

1.1. feladat

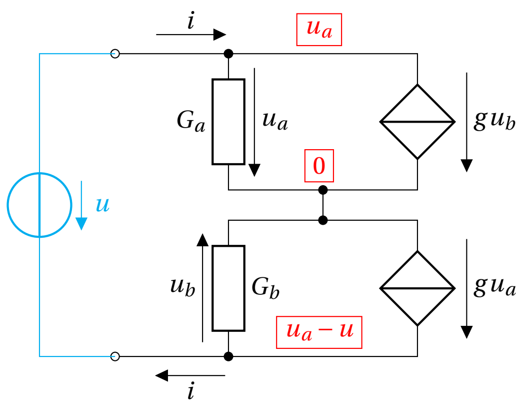
Határozzuk meg az alábbi kétpólus feszültség-áram karakterisztikáját, ha $g \neq 0$ és G_a, G_b pozitív!



Vegyünk fel csomóponti potenciálokat! Legyen a két feszültségvezérelt áramforrás közös kapcsa a nulla potenciál. A felső csomópont potenciálja akkor egyszerűen u_a, míg az alsó csomóponté u_b. Kirchhoff feszültségtörvénye alapján

$$u + u_b - u_a = 0,$$

vagyis $u_b = u_a - u$, ezért eggyel kevesebb ismeretlenre van szükségünk, ha u_b helyett azonnal így fejezzük ki az alsó csomópont potenciálját.



Képzeljünk egy független, u feszültségű feszültségforrást a bemeneti kapcsokra, és fejezzük ki ezzel az i áramot. Két független csomóponti egyenletet tudunk felírni:

$$\left.\begin{aligned} u_a: &\quad -i + G_a u_a + g(u_a - u) = 0 \\ u_a - u: &\quad i + G_b(u_a - u) - g u_a = 0 \end{aligned}\right\}$$

A második egyenletben figyelembe vettük, hogy egy kétpólusba „befolyó” áram meg kell, hogy egyezzen a másik pólusán „kifolyó” árammal. A két egyenletben három ismeretlen mennyiség (u, i, u_a) szerepel, azonban az u és i közötti összefüggést keressük (pl. az u/i hányadost szeretnénk kifejezni), nem külön u és i értékét, ezért két független egyenlet elegendő. Mivel u és i között keresünk összefüggést, próbáljuk u_a-t eliminálni. Az első egyenletből

$$u_a = \frac{i + gu}{G_a + g},$$

míg a másodikból

$$u_a = \frac{G_b u - i}{G_b - g}.$$

A jobb oldalakat egyenlővé téve

$$\frac{i + gu}{G_a + g} = \frac{G_b u - i}{G_b - g},$$

„keresztbe szorozva” és egyszerűsítve

$$i\,(G_a + G_b) = u\left(G_a G_b + g^2\right),$$

amivel az egyik lehetséges explicit karakterisztika

$$\boxed{u = \frac{G_a + G_b}{G_a G_b + g^2}\, i.}$$

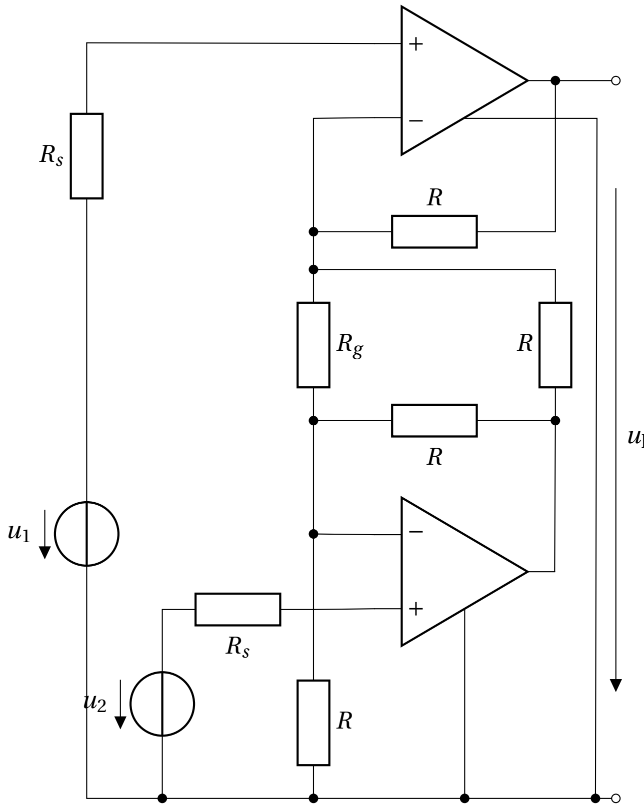
a másik pedig

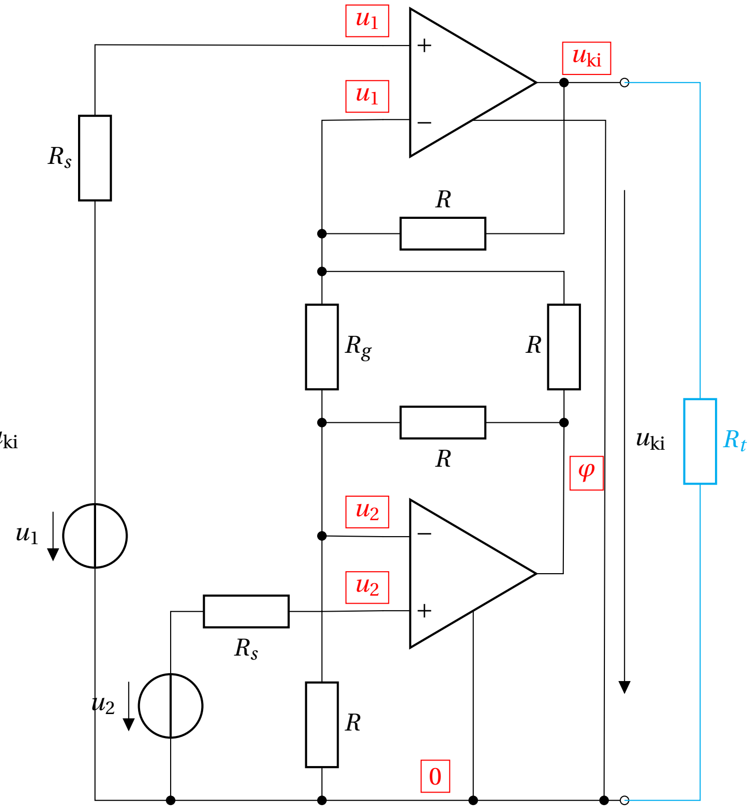
$$\boxed{i = \frac{G_a G_b + g^2}{G_a + G_b}\, u.}$$

Érdekes megfigyelni, hogy a karakterisztikából láthatóan a kétpólus pozitív ellenállásként (ill. pozitív konduktanciaként) viselkedik, g tetszőleges megválasztása mellett, mert mind a számláló, mind a nevező pozitív érték (g^2 mindenképpen pozitív akkor is, ha $g < 0$).

1.2. feladat

Fejezzük ki u_{ki} értékét u_1 és u_2 értékével!





Kövessük az ideális erősítőnél szokásos szabályokat:

- Csomóponti potenciálokkal számolunk.
- A nulla potenciált vegyük fel az erősítő „4. lábára” csatlakozó csomópontra.
- Az erősítő kimenetére nem írunk fel csomóponti egyenletet, mert a kimeneti kétpólusra nem vonatkozik karakterisztika.
- Ugyanezen okból nem írunk fel csomóponti egyenletet a referencia-csomópontra sem.

Oldjuk meg azt a látszólag bonyolultabb feladatot, hogy a kétpólusra egy R_t ($R_t > 0$) terhelő ellenállást is kötünk. Igazolni fogjuk, hogy az u_{ki} feszültség értéke független ennek a lezáró ellenállásnak az értékétől. Vegyük fel a csomóponti potenciálokat!

- Az erősítők neminvertáló bemeneteinek potenciálja egyenlő az u_1 ill. u_2 forrásfeszültséggel, mert az erősítő bemeneti árama nulla ($i = 0$ karakterisztika). Emiatt az R_s ellenállásokon nem esik feszültség. A megoldásnak is függetlennek kell lennie R_s-től (a meghajtó generátorok szakadást „látnak”).
- Az erősítők invertáló bemeneteinek potenciálja egyenlő a neminvertáló bemenetek potenciáljával ($u = 0$ karakterisztika).
- A felső erősítő kimenetének potenciálja a keresett u_{ki}.
- Az alsó erősítő kimenetének potenciálja ismeretlen φ.

Írjunk fel csomóponti egyenleteket! Két ismeretlen potenciál (u_{ki}, φ) meghatározásához két független egyenletet kell felírni. Bár az ismeretlen potenciálok az erősítő kimeneti potenciáljai, a kimenetekre nem tudunk áramtörvényt felírni, mert nincs összefüggés a kimeneti áram értékére vonatkozóan. A két invertáló bemenetre tudunk értelmes egyenletet felírni, figyelembe véve, hogy a neminvertáló bemenetekbe sem folyik áram:

$$\left.\begin{aligned} u_1^- :\quad & \frac{u_1 - u_{\text{ki}}}{R} + \frac{u_1 - \varphi}{R} + \frac{u_1 - u_2}{R_g} = 0 \\ u_2^- :\quad & \frac{u_2}{R} + \frac{u_2 - \varphi}{R} + \frac{u_2 - u_1}{R_g} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Rendezve:

$$\left.\begin{aligned} u_1(2R_g+R)-Ru_2-R_g u_{\mathrm{ki}}-R_g\varphi=0 \\ -Ru_1+(2R_g+R)u_2-R_g\varphi=0 \end{aligned}\right\}$$

Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat:

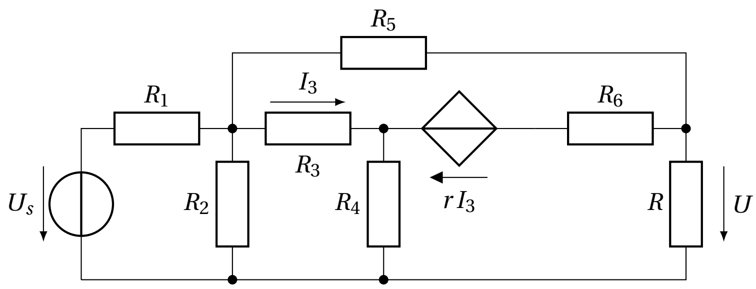
$$(2R+2R_g)(u_1-u_2)=R_g u_{\mathrm{ki}},$$

$$\boxed{u_{\mathrm{ki}}=\left[2+\frac{2R}{R_g}\right](u_1-u_2)}$$

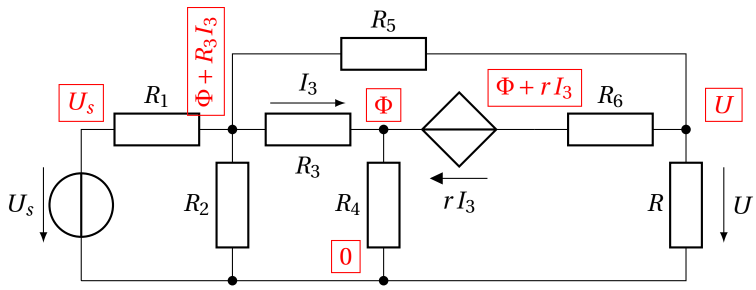
A hálózat differenciális feszültségerősítőt (egyszerű ún. műszererősítőt) realizál: a két bemeneti feszültség különbségét erősíti, az erősítés pontos értéke az R és R_g megfelelő megválasztásával állítható be. Továbbá az eredményben nem jelenik meg az R_t esetleges terhelő ellenállás értéke: az erősítők tetszőleges $R_t>0$ esetén képesek az üresjárási feszültséggel megegyező feszültséget fenntartani a terhelő ellenálláson.

1.3. feladat

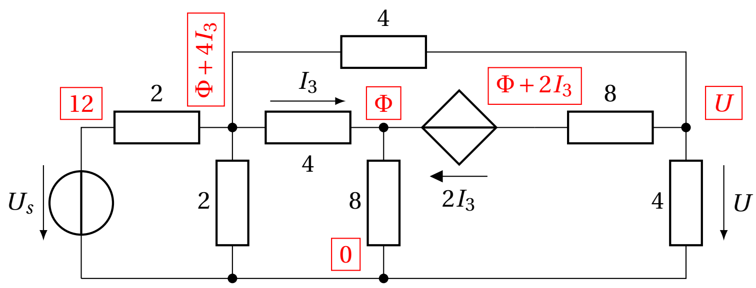
Határozzuk meg a bejelölt U feszültséget! ($R = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 8\,\mathrm{k\Omega}$, $R_5 = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $R_6 = 8\,\mathrm{k\Omega}$, $r = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $U_s = 12\,\mathrm{V}$)



Vegyünk fel csomóponti potenciálokat úgy, hogy lehetőleg kevés ismeretlent vegyünk fel. Egy lehetséges megoldás az, hogy meghagyjuk ismeretlenként az áramvezérelt feszültségforrás vezérlő áramát, I_3-at, és bevezetünk egy ismeretlen Φ csomóponti potenciált az ábra szerint. Ezzel három ismeretlenünk marad (I_3, Φ, U).



Konkrét számértékekkel [V, mA, kΩ] egységrendszerben:



A hálózat $n = 6$ csomópontot tartalmaz, az áramtörvények fundamentális rendszere $r = n - 1 = 5$ egyenletet tartalmaz. A két feszültségforrás jelenlétében az ismeretlen potenciálok száma kettővel csökkenthető, továbbá az egyik ismeretlen potenciált az I_3 vezérlő árammal fejezzük ki. A csomóponti egyenletek:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi + 4I_3:&\quad I_3 + \frac{\Phi + 4I_3 - 12}{2} + \frac{\Phi + 4I_3}{2} + \frac{\Phi + 4I_3 - U}{4} = 0\\
U:&\quad \frac{U}{4} + \frac{U - (\Phi + 4I_3)}{4} + \frac{U - (\Phi + 2I_3)}{8} = 0\\
(\Phi, \Phi + 2I_3):&\quad \frac{\Phi}{8} - I_3 + \frac{(\Phi + 2I_3) - U}{8} = 0
\end{aligned}\right\}$$

ahol az utolsó egyenletre úgy is tekinthetünk, hogy a Φ és a $\Phi + 2I_3$ csomópontokat (lényegében a vezérelt forrást) tartalmazó vágatra írtuk fel, hogy a vezérelt forrás áramát ne kelljen új ismeretlenként felvennünk. De úgy is tekinthetünk erre, hogy a vezérelt forrás áramát a vele sorba kapcsolódó ellenállás áramával fejeztük ki.
Rendezés után

$$\left.\begin{aligned}
24I_3 + 5\Phi - U &= 24\\
-10I_3 - 3\Phi + 5U &= 0\\
-6I_3 + 2\Phi - U &= 0
\end{aligned}\right\}$$

A háromismeretlenes egyenletrendszerből U-t kifejezve a keresett feszültség

$$\boxed{U = 2{,}7636\,\mathrm{V}.}$$

1.3.1. Numerikus megoldás Matlab/Octave segítségével

A háromismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldható Matlab/Octave segítségével. Az egyenletrendszer vektor-mátrix alakban:

$$\begin{pmatrix} 24 & 5 & -1 \\ -10 & -3 & 5 \\ -6 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 \\ \Phi \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

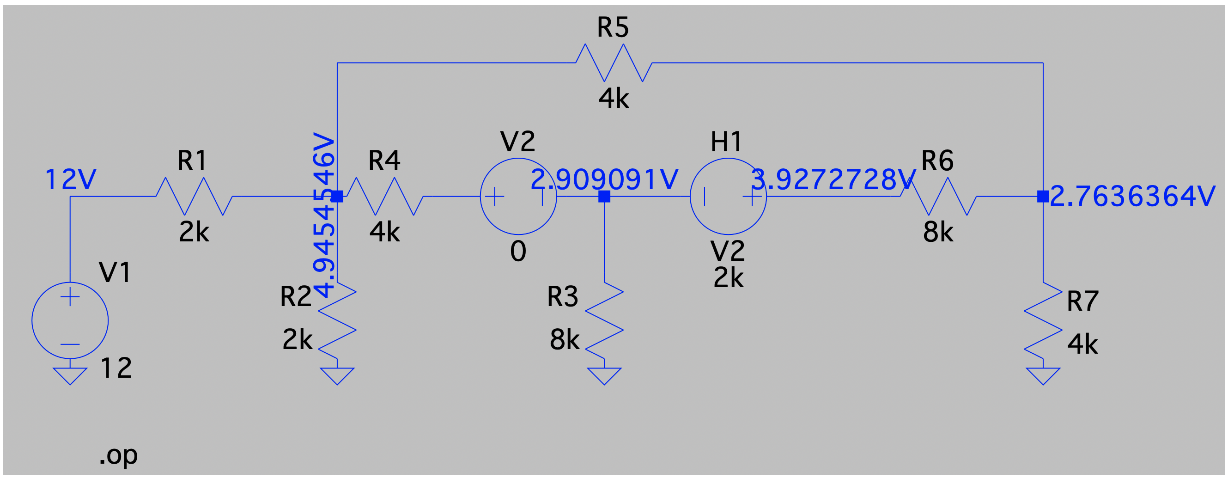
alakú lineáris egyenletrendszer megoldásának meghatározására a Matlabban külön operátor, a backslash (\) szolgál. Ez funkcióját tekintve $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$-t számolja ki ($\mathbf{b}$-t balról megszorozza $\mathbf{A}$ inverzével), azonban olyan numerikus módszereket használ, amelyek előnyösebbek lehetnek a direkt mátrixinvertálásnál. Az alábbi kód mutatja, hogyan definiáljuk a 3x3-as **A** mátrixot soronként, az egyes sorokat pontosvesszővel elválasztva, illetve a **b** oszlopvektort. Végül megkapjuk a megoldást mindhárom ismeretlenre:

```
>> A=[24 5 -1; -10 -3 5; -6 2 -1]

A =

    24     5    -1
   -10    -3     5
    -6     2    -1

>> B=[24;0;0]

B =

    24
     0
     0

>> A\B

ans =

    0.5091
    2.9091
    2.7636
```

Ez alapján tehát $I_3 = 0{,}5091\,\mathrm{mA}$, $\Phi = 2{,}9091\,\mathrm{V}$, míg a keresett $U = 2{,}7636\,\mathrm{V}$.

1.3.2. Ellenőrzés áramkörszimulátorral

Az LTSpice-ban az áramvezérelt feszültségforrás a „H” komponens, amelynek vezérlő árama csak egy másik feszültségforrás árama lehet. Ezért iktattuk be az I_3 „mérésére” a nulla feszültségű $V2$ feszültségforrást (ügyelve a referenciairányokra, különösen az áramirányokra). A „feszültségnyíl” a feszültségforrások + kapcsából a - kapocs felé mutat, és az áram referenciairánya is ezzel egyező. A H forrás két paramétere sorrendben a vezérlő feszültségforrás indexe és a transzfer rezisztencia, esetünkben $r = 2\,\mathrm{k\Omega}$.



$I_3 = \frac{4{,}945-2{,}909}{4} = 0{,}509\,\mathrm{mA}$, ahogy a számítás alapján is.

1.3.3. Szimbolikus megoldás Matlabbal

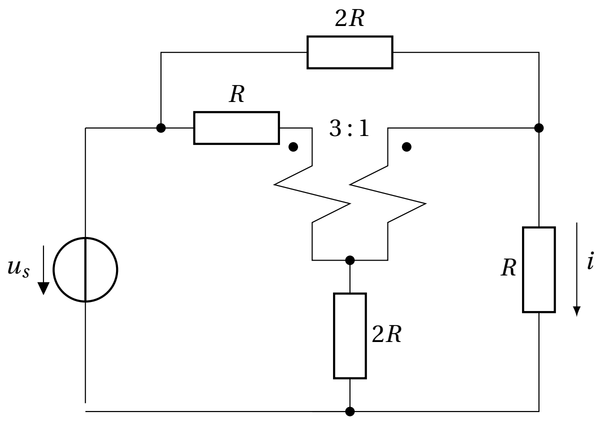
Újabb Matlab-verziókban lehetséges a lineáris egyenletrendszert rendezés nélkül, szimbolikusan is megoldatni. Az alábbi kódrészlet a Matlab számára szimbólumként definiálja az `i3` (I_3), `phi` (Φ) és `u` (U) szimbólumokat, megadja a három csomóponti egyenlet rendezetlen alakját, és kifejezteti a Matlabbal a megoldást:

```
syms phi i3 u
eq1 = i3 + (phi + 4*i3 - 12)/2 + (phi + 4*i3)/2 + (phi + 4*i3-u) / 4 == 0;
eq2 = u/4 + (u-(phi+4*i3))/4 + (u - (phi + 2*i3))/8 == 0;
eq3 = phi/8 + (phi + 2*i3 - u)/8 -i3 == 0;
[A, B] = equationsToMatrix([eq1, eq2, eq3], [u phi i3]);
X = linsolve(A, B)

X =

 152/55
  32/11
  28/55
```

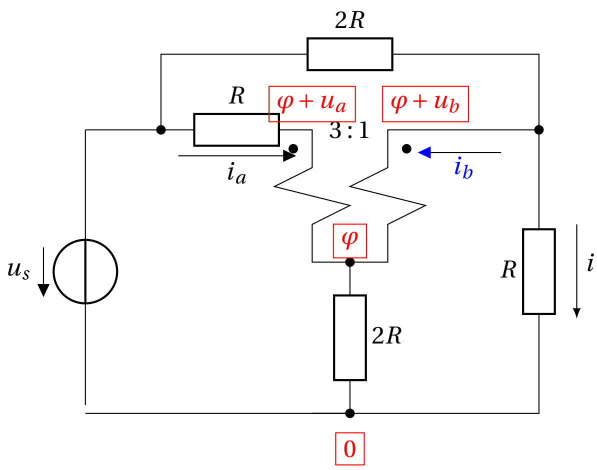
A keresett feszültség pontos értéke $U = \frac{152}{55} = 2{,}76363\,\mathrm{V}$. A módszer gyors ellenőrzésre használható, de ne feledjük, hogy mind a házi feladatokban, mind a számonkéréseken elvárjuk a részletes számolás „kézi” végrehajtását!

1.4. feladat

Határozzuk meg az alábbi hálózatban a megjelölt ellenállás i áramát és a forrás teljesítményét, ha $u_s = 2\,\mathrm{V}$ és $R = 50\,\Omega$!



Vegyünk fel csomóponti potenciálokat! Első lépésben jelölje u_a, i_a illetve u_b, i_b a transzformátor primer, illetve szekunder tekercsének feszültségét, áramát a szokásos referenciairányokkal. Az IT közös csomópontjának ismeretlen potenciálja legyen φ. A transzformátor két tekercsének feszültsége legyen balról jobbra u_a illetve u_b.



Az IT karakterisztikája a bejelölt mennyiségekkel és referenciairányokkal kifejezve

$$u_a = 3u_b,$$

$$i_b = -3i_a.$$

A hálózat csomópontjainak száma $n = 5$, az áramtörvények fundamentális rendszere $r = n - 1 = 4$ egyenletből áll. Csomóponti potenciálok használata esetén a feszültségforrás az ismeretlenek, így a felírandó egyenletek számát is eggyel csökkenti, a hálózatra célszerűen három független áramtörvény-egyenletet tudunk felírni, ha nem akarjuk a feszültségforrás áramát is új ismeretlenként bevezetni. Ehhez vesszük az ideális transzformátor karakterisztikájának két egyenletét.

A csomóponti egyenletek és a karakterisztika:

$$\left.\begin{array}{rl}
\varphi + u_a: & \dfrac{\varphi + u_a - u_s}{R} + i_a = 0 \\
\varphi + u_b: & i_b + \dfrac{\varphi + u_b - u_s}{2R} + \dfrac{\varphi + u_b}{R} = 0 \\
\varphi: & -i_a - i_b + \dfrac{\varphi}{2R} = 0 \\
\mathrm{IT1}: & u_a = 3u_b \\
\mathrm{IT2}: & i_b = -3i_a
\end{array}\right\}$$

Összesen 5 ismeretlenre $(\varphi, u_a, u_b, i_a, i_b)$ 5 független egyenlet áll rendelkezésre. Mivel a feladatban kérdezett áramot

$\varphi + u_b$ ismeretében tudjuk kiszámítani, helyettesítsük be u_a-t a karakterisztikából, valamint i_b-t. Ezzel

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi + 3u_b - u_s}{R} + i_a &= 0 \\ -3i_a + \frac{\varphi + u_b - u_s}{2R} + \frac{\varphi + u_b}{R} &= 0 \\ -i_a + 3i_a + \frac{\varphi}{2R} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

A harmadik egyenletből fejezzük ki $i_a = -\frac{\varphi}{4R}$ értékét, és helyettesítsük az első két egyenletbe:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi + 3u_b - u_s}{R} - \frac{\varphi}{4R} &= 0 \\ -\frac{3\varphi}{4R} + \frac{\varphi + u_b - u_s}{2R} + \frac{\varphi + u_b}{R} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Mindkét egyenletet $4R$-el szorozva

$$\left.\begin{aligned} 4\varphi + 12u_b - 4u_s - \varphi &= 0 \\ -3\varphi + 2\varphi + 2u_b - 2u_s + 4\varphi + 4u_b &= 0 \end{aligned}\right\}$$

látjuk, hogy a potenciálok függetlenek R értékétől. Összevonva

$$\left.\begin{aligned} 3\varphi + 12u_b &= 4u_s \\ 3\varphi + 6u_b &= 2u_s \end{aligned}\right\}$$

ahonnan

$$\varphi = 0, \quad u_b = \frac{u_s}{3}$$

a keresett i áram pedig

$$i = \frac{\varphi + u_b}{R} = \frac{u_s}{3R}.$$

A $\varphi = 0$ azt jelenti, hogy a $2R$ ellenálláson nem folyik áram, mert ekvipotenciális pontok közé kapcsolódik. A feszültségforrás árama megegyezik i-vel. A feszültségforrás teljesítménye, figyelembe véve, hogy a teljesítmény definíciója szimmetrikus (azonos) referenciairányok mellett érvényes, jelen esetben pedig szimmetrikus referenciairánnyal értelmezve a forrás árama $(-i)$:

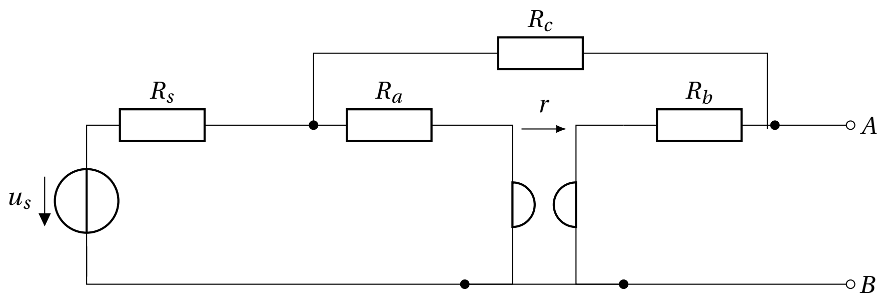
$$P_s = -iu_s = -\frac{-u_s^2}{3R}.$$

Behelyettesítve a feladat paramétereit, $u_s = U_s = 2\,\mathrm{V}$ és $R = 50\,\Omega$ értékekkel

$$\boxed{i = \frac{2}{150}\mathrm{A} \approx 13{,}3\,\mathrm{mA}, \qquad P_s = -\frac{4}{150}\mathrm{W} \approx -26{,}7\,\mathrm{mW}}$$

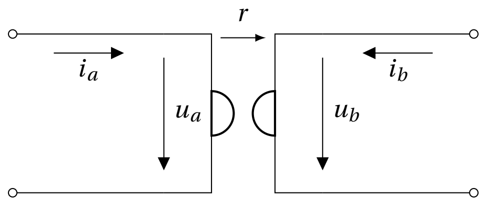
1.5. feladat

Határozzuk meg az alábbi kétpólus Norton- és Thévenin-ekvivalensét!
($R_s = R_a = R_b = R_c = 10\,\Omega$, $u_s(t) \equiv U_s = 10\,\text{V}$, $r = 40\,\Omega$)



1.5.1. Az üresjárási feszültség meghatározása

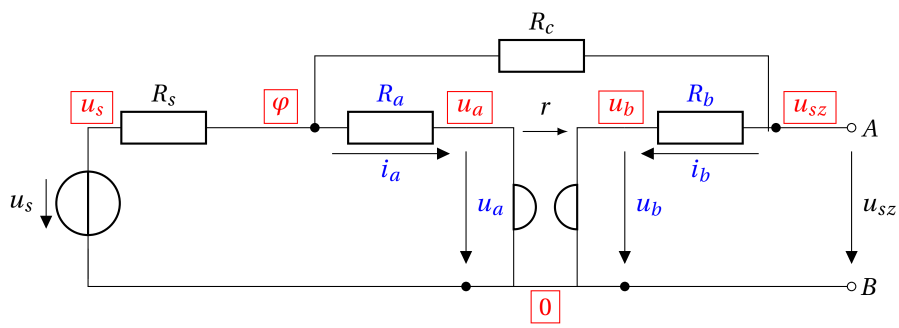
A girátor karakterisztikája:



$$u_b = r\,i_a$$

$$u_a = -r\,i_b$$

Válasszunk csomóponti potenciálokat! Üresjárásban a hálózat csomópontjainak száma 6, a feszültségforrás miatt az ismeretlen potenciálok száma 5, és így négy független áramtörvény írható fel. Legyen az alsó csomópont potenciálja zérus. Jelölje u értékét üresjárásban u_{sz}, akkor az A kapocs potenciálja is u_{sz}. Jelöljük a girátor kétpólusainak feszültségét u_a ill. u_b-vel. A maradék két ismeretlen potenciál egyenlő ezzel a két feszültséggel.



A csomóponti egyenlet a φ csomópontra:

$$\varphi: \qquad \frac{\varphi - u_s}{R_s} + \frac{\varphi - u_{sz}}{R_c} + \frac{\varphi - u_a}{R_a} = 0$$

A girátor karakterisztikája alapján $u_b = r\,i_a$, de i_a egyben R_a árama is, így

$$u_b = r\,i_a = r\frac{\varphi - u_a}{R_a}.$$

Hasonlóan

$$u_a = -r\,i_b = -r\frac{u_{sz} - u_b}{R_b} = r\frac{u_b - u_{sz}}{R_b}.$$

Végül az A kapocsra, mivel a kétpólus üresjárásban van, az A kapocsba nem folyik be áram,

$$u_{sz}: \qquad \frac{u_{sz} - \varphi}{R_c} + \frac{u_{sz} - u_b}{R_b} = 0.$$

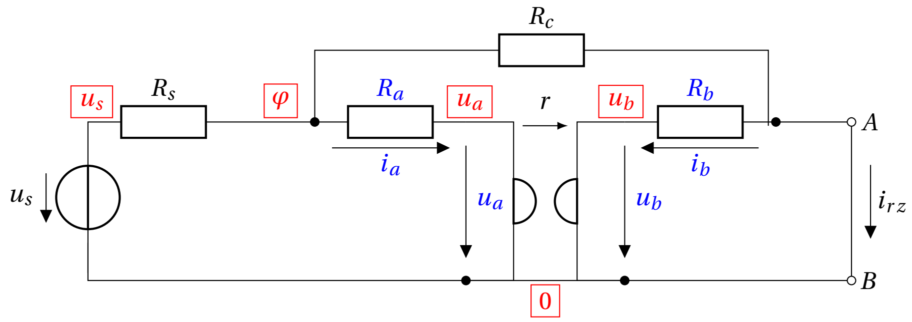
Négy ismeretlen mennyiségre (u_{sz}, u_a, u_b, φ) négy független egyenlet áll rendelkezésre.
A keresett üresjárási feszültség:

$$u_{sz} = 10\,\mathrm{V}.$$

Megjegyzés: az üresjárási feszültség a hurokáramok módszerével egyszerűbben kiszámítható, hiszen csak három hurok felvételére van szükség.

1.5.2. A rövidzárási áram meghatározása

Vegyük fel a rövidzárási áramot a kétpólusból kifelé mutató referenciairánnyal! Az előbbihez képest eggyel kevesebb ismeretlen potenciál van.



A csomóponti egyenlet a φ csomópontra:

$$\varphi: \qquad \frac{\varphi - u_s}{R_s} + \frac{\varphi}{R_c} + \frac{\varphi - u_a}{R_a} = 0$$

A girátor karakterisztikái alapján

$$u_b = r i_a = r\frac{\varphi - u_a}{R_a},$$

illetve

$$u_a = -r i_b = -r\frac{0 - u_b}{R_b} = r\frac{u_b}{R_b}.$$

Itt három ismeretlenre (u_a, u_b, φ) három független egyenletünk van. Behelyettesítve

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi - 10}{10} + \frac{\varphi}{10} + \frac{\varphi - u_a}{10} &= 0 \\ 40\frac{\varphi - u_a}{10} &= u_b \\ 40\frac{u_b}{10} &= u_a. \end{aligned}\right\}$$

Innen egyszerű visszahelyettesítésekkel adódik, hogy

$$\varphi = 4{,}857\,\mathrm{V}, \quad u_a = 4{,}57\,\mathrm{V}, \quad u_b = 1{,}143\,\mathrm{V}.$$

Végül az A kapocsra felírt áramtörvény értelmében

$$i_{rz} + \frac{0 - u_b}{R_b} + \frac{0 - \varphi}{R_c} = 0,$$

$$i_{rz} = \frac{u_b}{R_b} + \frac{\varphi}{R_c} = \frac{1{,}143}{10} + \frac{4{,}857}{10} = 0{,}6\,\mathrm{A}.$$

A helyettesítő generátorok belső ellenállása a választott referenciairányok mellett

$$R_g = \frac{u_{sz}}{i_{rz}} = 10{,}67\,\Omega.$$

A helyettesítő generátorok belső ellenállása természetesen a dezaktivizált kétpólus eredő ellenállásaként is meghatározható lenne.
A helyettesítő Thévenin-generátor paraméterei

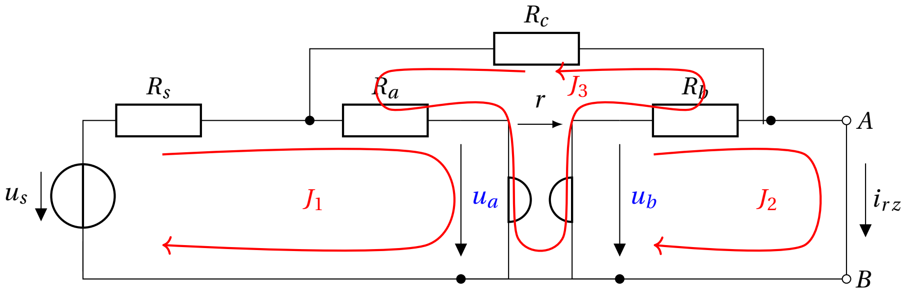
$$\boxed{u_g = 10\,\mathrm{V} \qquad R_g = 16{,}67\,\Omega,}$$

a Norton-generátoré

$$\boxed{i_g = 0{,}6\,\mathrm{A} \qquad R_g = 16{,}67\,\Omega.}$$

1.5.3. A rövidzárási áram meghatározása hurokáramok módszerével

A rövidre zárt kétpólus csomópontjainak száma $n = 5$, a kétpólusok száma, beleértve a girátort alkotó kétpólusokat is, $b = 7$. A fundamentális hurokrendszer $l = b - n + 1 = 7 - 5 + 1 = 3$ hurokból áll. A hálózat síkba rajzolható, ezért az „ablaktábla-módszer" alkalmazható a fundamentális hurokrendszer felvételére. Vegyük fel a hálózatban a következő hurokáramokat!



Látható, hogy a keresett rövidzárási áram a J_2 hurokárammal egyezik meg.
A girátor karakterisztikája alapján

$$u_b = r\,i_a = r\,(J_3 + J_1)\,,$$

valamint

$$u_a = -r\,i_b = -r\,(-J_2 - J_3) = r\,(J_3 + J_2)\,.$$

A következő feszültségtörvények írhatóak fel a választott hurokban:

$$\begin{aligned}
J_1: &\quad R_s J_1 + R_a\,(J_1 + J_3) + u_a - u_s = 0,\\
J_2: &\quad -u_b + R_b\,(J_2 + J_3) = 0,\\
J_3: &\quad R_a\,(J_1 + J_3) + u_a - u_b + R_b(J_2 + J_3) + R_c J_3 = 0.
\end{aligned}$$

Ezekbe behelyettesítve $R_s = R_a = R_b = R_c \equiv R$, valamint u_a és u_b értékét a karakterisztika alapján, három független egyenletet kapunk a három hurokáramra (J_1, J_2, J_3):

$$\left.\begin{aligned}
R J_1 + R\,(J_1 + J_3) + r\,(J_2 + J_3) - u_s = 0\\
-r\,(J_3 + J_1) + R\,(J_2 + J_3) = 0\\
R\,(J_1 + J_3) + r\,(J_3 + J_2) - r\,(J_3 + J_1) + R(J_2 + J_3) + R J_3 = 0
\end{aligned}\right\}$$

A fenti egyenleteket rendezve:

$$\left.\begin{aligned}
2R J_1 + r J_2 + (R + r)\,J_3 = u_s\\
-r J_1 + R J_2 + (R - r)\,J_3 = 0\\
(R - r)\,J_1 + (-r - R)\,J_2 + 3R J_3 = 0
\end{aligned}\right\}$$

A feladat adatait behelyettesítve a következő megoldásokat kapjuk:

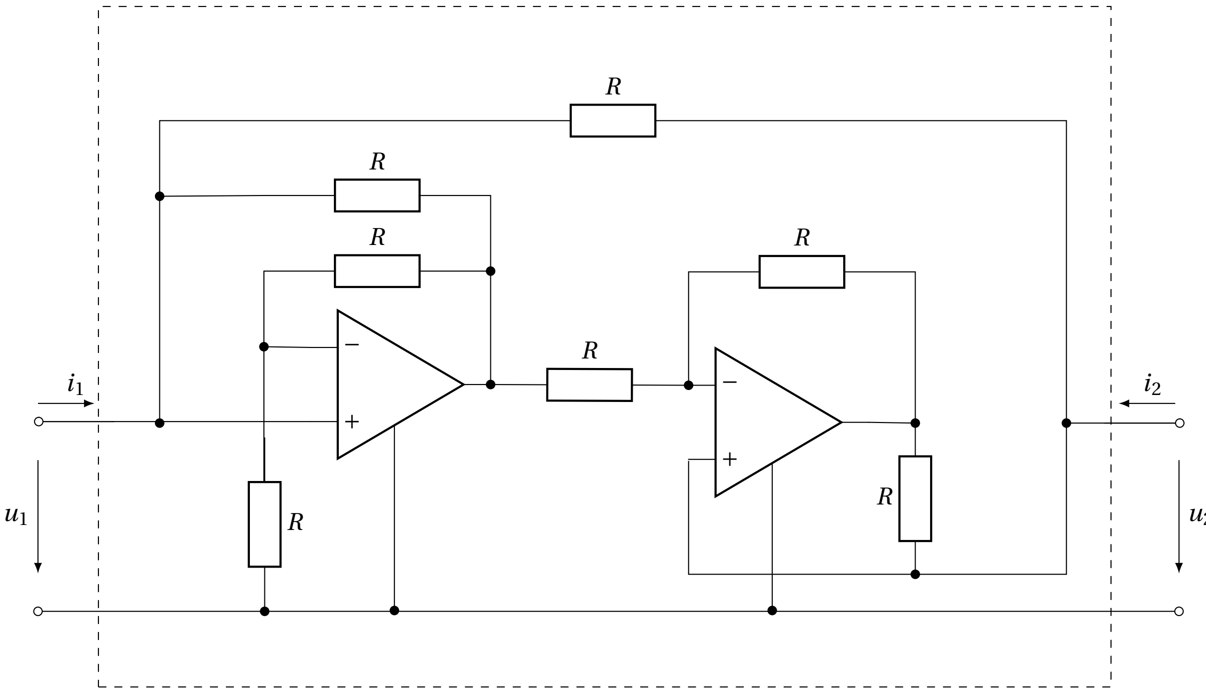
$$J_1 = 0{,}514\,\mathrm{A}, \quad J_2 = 0{,}6\,\mathrm{A}, \quad J_3 = -0{,}486\,\mathrm{A}.$$

A keresett rövidzárási áram:

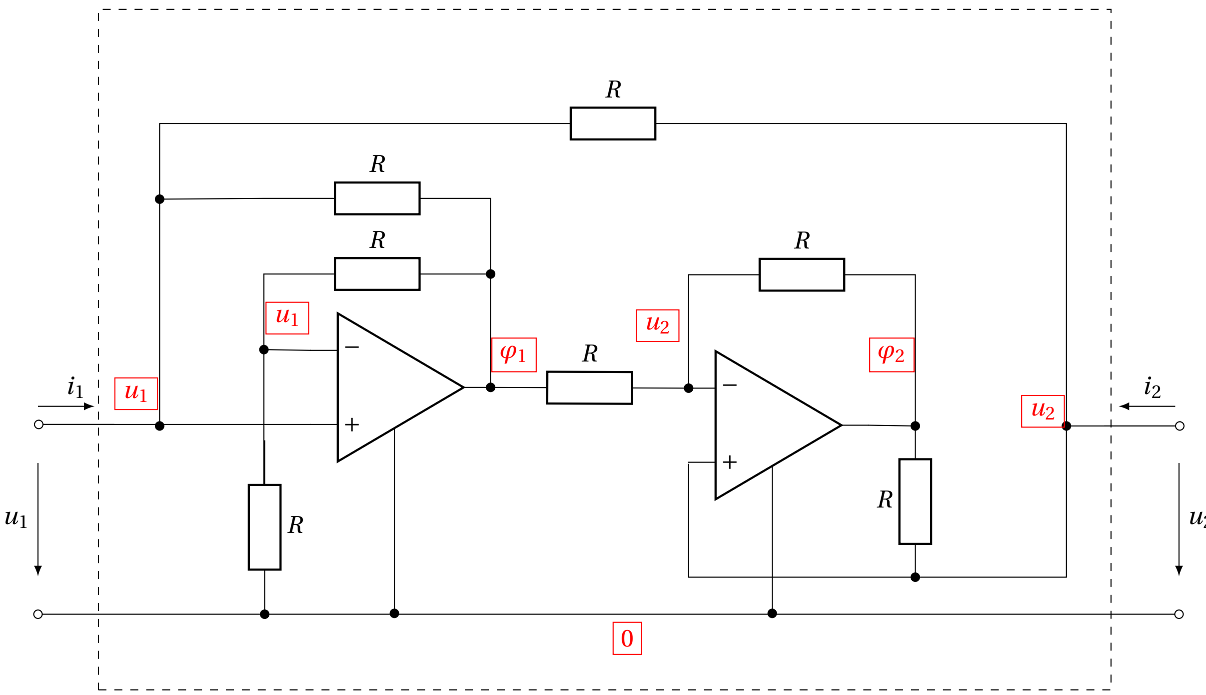
$$i_{\mathrm{rz}} = J_2 = 0{,}6\,\mathrm{A}.$$

1.6. feladat

Fejezzük ki az alábbi négypólusnál a bejelölt u_1, u_2 feszültségeket a bejelölt i_1, i_2 áramok segítségével! Mit realizál a hálózat?



Az ideális erősítő analízisét az aranyszabályok figyelembe vételével végezzük. Az erősítők „negyedik lába" a referencia-csomópont. Az erősítők kimenetére és a referencia-csomópontra NEM írunk fel egyenletet. Az $u = 0$ karakterisztika figyelembe vételével az erősítők invertáló és neminvertáló bemeneteinek potenciálja egyenlő. Ezen kényszerekkel két ismeretlen potenciál (φ_1, φ_2) és két kifejezendő potenciál (u_1, u_2) adódik az alábbi ábra alapján:



Az összesen négy ismeretlen mennyiség kifejezéséhez négy független egyenletre van szükségünk. Mindkét erősítő mindkét bemenetére lehet értelmes csomóponti egyenleteket írni. Tudva, hogy az $i = 0$ karakterisztika miatt az erősítők bemeneti áramai zérus értékűek, a következő egyenletek adódnak:

$$\left.\begin{array}{ll} u_1^-: & \dfrac{u_1}{R}+\dfrac{u_1-\varphi}{R}=0 \\ u_1^+: & -i_1+\dfrac{u_1-\varphi_1}{R}+\dfrac{u_1-u_2}{R}=0 \\ u_2^-: & \dfrac{u_2-\varphi_1}{R}+\dfrac{u_2-\varphi_2}{R}=0 \\ u_2^+: & -i_2+\dfrac{u_2-\varphi_2}{R}+\dfrac{u_2-u_1}{R}=0 \end{array}\right\}$$

Az első egyenlet alapján

$$\varphi_1=2u_1,$$

ezt a második egyenletbe helyettesítve

$$Ri_1=2u_1-u_2-\varphi_1=u_2,$$

a harmadik egyenlet alapján

$$\varphi_2=2(u_2-u_1),$$

amit a negyedik egyenletbe helyettesítve

$$Ri_2=2u_2-u_1-\varphi_2=2u_2-u_1-2(u_2-u_1)=u_1$$

adódik. Összefoglalva

$$\boxed{u_2=-Ri_1, \qquad u_1=Ri_2}$$

Ebből látható, hogy a hálózat egy R girációs rezisztenciájú girátort realizál, azzal a megkötéssel, hogy a girátort alkotó kétpólusok 1-1 kapcsa egymással össze van kötve, míg a „tankönyvi" girátornál a két kétpólus egymástól galvanikusan független. Ezért a fenti hálózat a girátort, mint csatolt kétpólust abban a speciális esetben realizálja, ha annak 1-1 kivezetése egymással összekötve, hárompólusú elrendezést alkot.

Megjegyzés: vegyük észre, hogy mivel nem folyik áram az erősítőbe, pl. a bal oldali erősítő invertáló bemenetére csatlakozó két ellenállás egy egyszerű $R-R$ feszültségosztót realizál, ami a feszültséget felezi. Ezért rögtön írhattuk volna a 2. egyenlet helyett, hogy

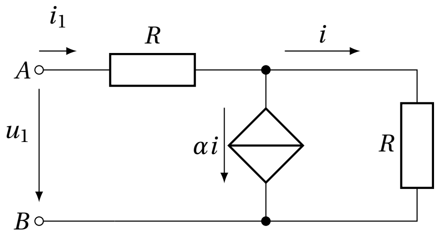
$$u_1=\varphi_1\cdot\frac{R}{R+R}=\frac{\varphi_1}{2},$$

vagyis

$$\varphi_1=2u_1.$$

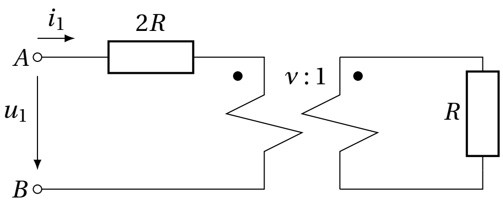
2. Házi feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi hálózat eredő ellenállását ($R_e = u_1 / i_1$)!



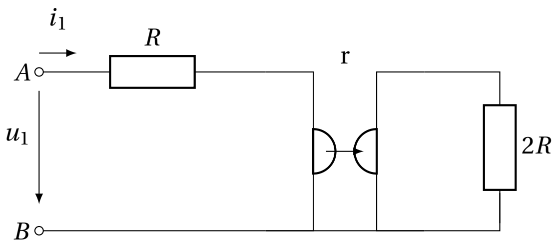
$\left(R_e = R\,\frac{2+\alpha}{1+\alpha}\right)$

2. Határozzuk meg az alábbi hálózat eredő ellenállását ($R_e = u_1 / i_1$)!



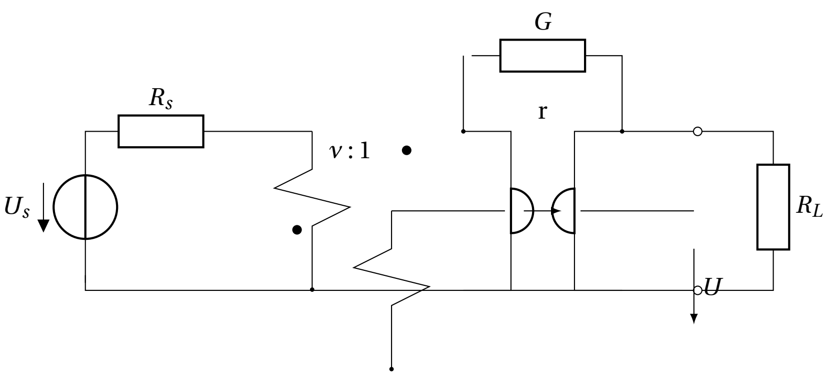
$\left(R_e = R(2+\nu^2)\right)$

3. Határozzuk meg az alábbi hálózat eredő ellenállását ($R_e = u_1 / i_1$)!



$\left(R_e = \frac{2R^2+r^2}{2R}\right)$

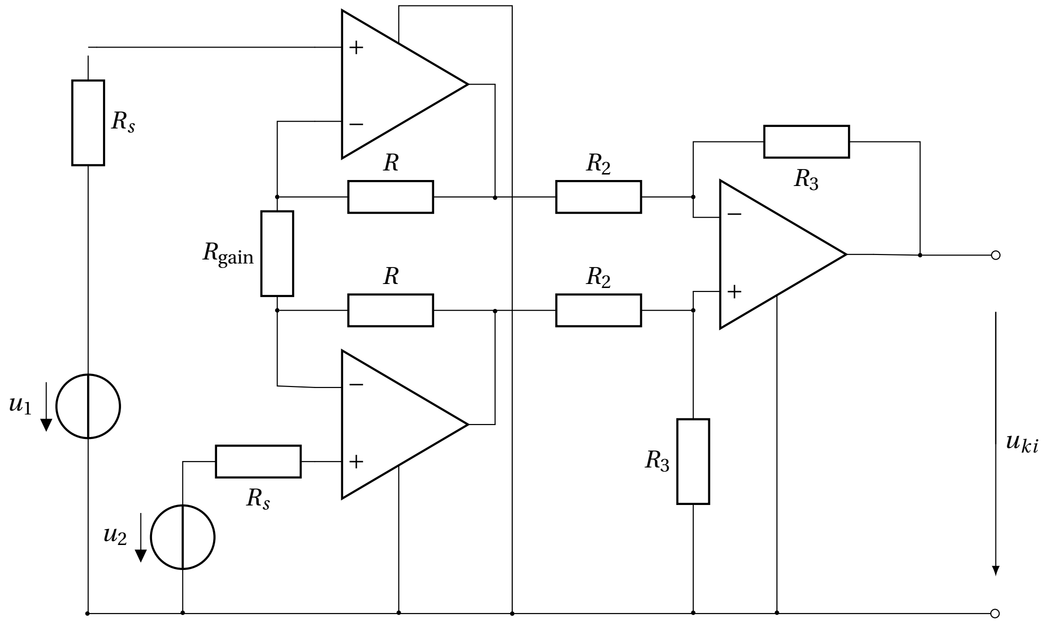
4. Határozzuk meg az alábbi hálózatban az U feszültséget! ($U_s = 100$ V, $\nu = 5, R_s = 10\ \Omega$, $r = 10$, $G = 10$ S, $R_L = 10\ \Omega$)



($U = 19{,}23$ V)

5. Fejezzük ki az alábbi hálózatban (u_{ki}) értékét a két bemeneti feszültség (u_1, u_2) függvényében! („Műszererősítő” kapcsolás[1].)

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Instrumentation_amplifier



$$\left(u_{ki} = \left(1 + \frac{2R}{R_{\text{gain}}}\right) \cdot \frac{R3}{R2} \cdot (u_2 - u_1)\right)$$