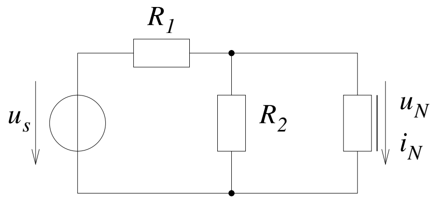
JR1: nemlineáris hálózatok gyakorlat

Szerkesztette: Dr. Horváth Péter, BME HVT

2023. május 7.

1. feladat

A hálózatban szereplő nemlineáris kétpólus karakterisztikája: $i_N = K u_N^2$, ha $u_N \geq 0$, és $i_N = 0$ egyébként. Paraméterek: $R_1 = 12\,\Omega$, $R_2 = 24\,\Omega$, $K = 45\,\mathrm{mA/V^2}$. A forrásfeszültség $u_s(t) = (30 + 1{,}5\cos\omega t)\,\mathrm{V}$. Határozza meg az $i_N(t)$ áram időfüggvényét a munkaponti linearizálás módszerének alkalmazásával.



A munkaponti linearizálás során a hálózat áramait és feszültségeit felbontjuk az állandó munkaponti érték és a munkapont körüli kis megváltozás összegére. A forrásfeszültségre alkalmazva

$$u_s(t) = \overline{U}_s + \tilde{u}_s(t),$$

és az $i_N(t)$ áramot is ezzel a feltételezéssel keressük:

$$i_N(t) = \overline{I}_N + \tilde{i}_N(t).$$

Első lépésben a munkaponti értékeket határozzuk meg, majd a nemlineáris elem munkapontjának ismeretében a nemlineáris ellenállást egy lineáris ellenállással helyettesítve meghatározzuk a változó összetevőt is. Utolsó lépésben ellenőriznünk kell, hogy valóban jogosan tekintettük-e a munkapont körüli megváltozást kicsinek, valóban alkalmazható volt-e a munkaponti linearizálás módszere.

1.1. A munkapont meghatározása

A forrásfeszültségnek csak az állandó összetevőjét tekintjük:

$$u_s(t) = \overline{U}_s = 30\,\mathrm{V},$$

és keressük a nemlineáris kétpólus ezen gerjesztéshez tartozó $\overline{U}_N$, $\overline{I}_N$ értékekeit, a nemlineáris komponens munkapontját.
A munkaponti értékekre közvetlenül felírhatunk egy áramtörvényt. Ha $\overline{U}_N$-et csomóponti potenciálnak tekintjük,

$$\frac{\overline{U}_N - \overline{U}_s}{R_1} + \frac{\overline{U}_N}{R_2} + \overline{I}_N = 0.$$

A nemlineáris karakerisztikából $\overline{I}_N$ értékét behelyettesítve

$$\frac{\overline{U}_N - \overline{U}_s}{R_1} + \frac{\overline{U}_N}{R_2} + K\overline{U}_N^2 = 0.$$

A konkrét számértékekkel [V, A, Ω] koherens egységrendszerben

$$\frac{\overline{U}_N - 30}{12} + \frac{\overline{U}_N}{24} + 0{,}045\overline{U}_N^2 = 0.$$

Ezt a másodfokő egyenletet megoldva a munkaponti feszültség

$$\overline{U}_N = 6{,}193\,\mathrm{V},$$

az áram pedig

$$\overline{I}_N = 0{,}045 \cdot 6{,}193^2 = 1{,}726\,\mathrm{A}.$$

A munkapontot meghatározhattuk volna a Thévenin-ekvivalensre visszavezetéssel is, lásd a következő feladat megoldását.

1.2. A változó összetevő meghatározása

Az előző alpontban kiszámított munkapont környezetében linearizáljuk a hálózatot: meghatározzuk a nemlineáris kétpólus dinamikus ellenállását, és a megváltozásokra (a „kisjelű” összetevőkre) vonatkozó hálózatban a nemlineáris komponenst a dinamikus ellenállásával helyettesítjük.
A megadott karakterisztikában az áramot fejezzük ki a feszültséggel, ezért közvetlenül a dinamikus vezetés (konduktancia) fejezhető ki, a dinamikus ellenállás ennek a reciproka. A dinamikus vezetés meghatározásához képezzük a karakterisztika deriváltját, és helyettesítsük abba a munkaponti feszültség értékét:

$$G_d = \left.\frac{di_N}{du_N}\right|_{u_N=\overline{U}_N} = 2Ku_N|_{u_N=\overline{U}_N} = 0{,}09\overline{U}_N = 0{,}557\,\mathrm{S},$$

a dinamikus ellenállás pedig

$$R_d = \frac{1}{G_d} = 1{,}79\,\Omega.$$

A dinamikus ellenállás árama áramosztással[1], mivel $\tilde{u}_s = 1{,}5\cos\omega t$,

$$\tilde{i}_N(t) = \frac{1{,}5\cos\omega t}{12 + 24 \times 1{,}79} \cdot \frac{24}{24 + 1{,}79} = 0{,}102\cos\omega t.$$

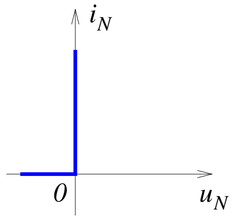
A nemlineáris kétpólus árama

$$\underline{\underline{i_N(t) = \overline{I}_N + \tilde{i}_N(t) = [1{,}726 + 0{,}102\cos\omega t]\,\mathrm{A}}}$$

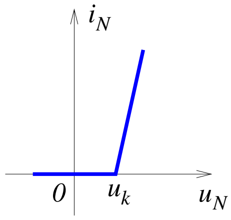
[1] A Thévenin-ekvivalense visszavezetve ez is egyszerűsödik.

2. feladat

Legyen az 1. feladat hálózatában a nemlineáris komponens egy dióda, amelynek karakterisztikáját az alábbi törtvonalas közelítésekkel adottnak tekintjük. A b) esetben $u_k = 0{,}6\,\mathrm{V}$, és e fölött a karakterisztika meredeksége $g = 50\,\mathrm{S}$. Legyen a forrásfeszültség $u_s(t) = 9\,\mathrm{V}$ (konstans). Határozza meg az u_N feszültséget és az i_N áramot a dióda karakterisztikájának a) és b) szerinti közelítése esetén.



a)



b)

[V, A, Ω, S] koherens egységrendszerben számolunk. Ha az a) szerinti ideális dióda-karakterisztikát vesszük figyelembe, akkor a kétpólus $u_N < 0$ mellett szakadás ($i_N = 0$), míg $u_N > 0$ mellett rövidzár (mivel a rajta eső feszültség tetszőleges $i_N > 0$ mellett nulla). Mivel az adott hálózatban „ránézésre” biztosak lehetünk benne, hogy $u_N > 0$, a diódát rövidzárral helyettesítjük. A dióda rövidre zárja a $24\,\Omega$-os ellenállást, ezért

$$\underline{\underline{u_N = 0, \quad i_N = \frac{9\,\mathrm{V}}{12\,\Omega} = 0{,}75\,\mathrm{A}.}}$$

A b) szerinti törtvonalas közelítésnél helyettesítsük a forrást és a két lineáris ellenállást tartalmazó kétpólust, amire a nemlineáris ellenállás csatlakozik, a Thévenin-ekvivalenssel. A kétpólus üresjárási feszültsége

$$U_z = 9 \cdot \frac{24}{12+24} = 6\,\mathrm{V},$$

belső ellenállása

$$R_b = 12 \times 24 = 8\,\Omega.$$

A nemlineáris karakterisztika két egyenessel adott: $u_N < 0{,}6\,\mathrm{V}$ esetén $i_N = 0$, míg $u_N \geq 0{,}6\,\mathrm{V}$ esetén az ábrán látható $50\,\mathrm{S}$ meredekségű egyenes:

$$i_N = (-30 + 50u_N)\,\mathrm{A}.$$

Tudjuk, hogy $u_N > 0$. Ha a dióda munkapontja $0 \leq u_N < 0{,}6$ szakaszra esne, akkor $i_N = 0$ lenne (a dióda szakadás $u_N < 0{,}6\,\mathrm{V}$ tartományban), azonban ekkor u_N egyenlő a Thévenin-generátor üresjárási feszültségével, 6V-al. Ez nyilvánvaló ellentmondás, ezért a dióda munkapontja csak az $u_N > 0{,}6\,\mathrm{V}$ szakaszra eshet. Ekkor a hálózatra

$$8i_N + u_N = 6,$$

amibe a karakterisztikát behelyettesítve

$$8(-30 + 50u_N) + u_N = 6,$$

amiből

$$\underline{\underline{u_N = 0{,}613\,\mathrm{V}, \quad i_N = 0{,}673\,\mathrm{A}.}}$$

3. feladat

Egy dióda karakterisztikája $u_N = U_T \ln\left(\frac{i_N}{I_S}+1\right)$, ahol $U_T = 26\,\text{mV}$ és $I_S = 1\,\text{nA}$. A dióda árama $i_N(t) = (300+100\sin(\omega t))\,\text{mA}$. Határozza meg a dióda feszültségének minimális és maximális értékét a) a munkaponti linearizálás alkalmazásával, és b) pontosan. Ez utóbbi esetben számítsa ki a dióda pillanatnyi teljesítményének maximális értékét is.
[mV, mA, Ω] koherens egységrendszerben számolunk. Bontsuk fel a dióda áramát a munkaponti (állandó) érték, és a munkapont körüli, (remélhetőleg) kis változó összetevő szuperpozíciójára:

$$i_N(t) = \overline{I}_N + \tilde{i}_N(t) = 300 + 100\sin(\omega t).$$

Az $\overline{I}_N = 300\,\text{mA}$-es munkaponti áramhoz tartozó munkaponti feszültség a karakterisztika alapján

$$\overline{U}_N = 26\ln\left(\frac{300}{10^{-6}}+1\right) = 507{,}5\,\text{mV}.$$

A munkaponti linearizálás során a dióda feszültségének időfüggvényét is

$$u_N(t) = \overline{U}_N + \tilde{u}_N(t)$$

alakban keressük. A diódát, mint nemlineáris elemet a konkrét munkapontban érvényes dinamikus ellenállásával (egy lineáris ellenállással) helyettesítjük. Ennek értéke

$$R_d = \left.\frac{du_N}{di_N}\right|_{i_N=\overline{I}_N} = \left.\frac{d}{di_N}U_T\ln\left(\frac{i_N}{I_S}+1\right)\right|_{i_N=\overline{I}_N} = \left.\frac{U_T}{i_N+I_S}\right|_{i_N=\overline{I}_N} = \frac{U_T}{\overline{I}_N+I_S} = \frac{26}{300+10^{-6}} = 0{,}0867\,\Omega.$$

A feszültség változó összetevője a dinamikus ellenálláson:

$$\tilde{u}_N(t) = R_d\,\tilde{i}_N(t) = 0{,}0867\cdot 100\sin(\omega t) = 8{,}67\sin(\omega t)\,\text{mV}.$$

A linearizált modellben a dióda feszültségének időfüggvénye tehát

$$\underline{\underline{u_N(t) = \overline{U}_N + \tilde{u}_N(t) = (507{,}5+8{,}67\sin(\omega t))\,\text{mV}.}}$$

Ennek minimális, ill. maximális értéke

$$u_{N,\min} = 507{,}5 - 8{,}67 = 498{,}83\,\text{mV}$$

ill.

$$u_{N,\max} = 507{,}5 + 8{,}67 = 516{,}17\,\text{mV}.$$

Ebben az egyszerű feladatban a dióda feszültségének pillanatnyi értékét pontosan is meg tudjuk határozni a pillanatnyi áramértékeknek a karakterisztikába helyettesítésével. A megadott gerjesztés mellett a dióda árama $i_{N,\min} = 200\,\text{mA}$ és $i_{N,\max} = 400\,\text{mA}$ között ingadozik szinuszos időfüggvényt követve. Ezen két áramerősséghez tartozó feszültség a karakterisztikába helyettesítve

$$u_{N,\min} = 26\ln\left(\frac{200}{10^{-6}}+1\right) = 497\,\text{mV},$$

a maximum pedig

$$u_{N,\max} = 26\ln\left(\frac{400}{10^{-6}}+1\right) = 515\,\text{mV}.$$

A dióda feszültségének pontos értéke tehát az $\overline{U}_N = 507{,}5\,\text{mV}$-os munkaponti érték körül, 497 mV és 515 mV között változik.[2] A dióda pillanatnyi teljesítményének maximuma

$$p_{\max} = u_{N,\max}\cdot i_{N,\max} = 515\cdot 400 = 206\,100\,\mu\text{W} = 0{,}206\,\text{W}.$$

[2]Ezt a változást a munkaponti linearizálás során szinuszosnak tekintjük, azonban ez csak közelítőleg igaz. A fenti pontos feszültségértékek alapján látható, hogy a „negatív félperiódus” amplitúdója $507{,}5 - 497 = 10{,}5\,\text{mV}$, míg a „pozitív félperiódusé” csak $515 - 507{,}5 = 7{,}5\,\text{mV}$.

4. feladat

Legyen egy nemlineáris rezisztív kétpólus explicit karakterisztikája a_1 és a_2 valós paraméterek mellett

$$i_N = a_1 u_N + a_2 u_N^2, \tag{1}$$

az eszközre kapcsolt feszültség pedig két szinuszos feszültség összege:

$$u_N(t) = U_1 \cos(\omega_1 t) + U_2 \cos(\omega_2 t)$$

alakú. Határozzuk meg a nemlineáris elem áramát!
Az $u_N(t)$ kifejezését a karakterisztikába helyettesítve

$$i_N(t) = a_1 \left[U_1 \cos(\omega_1 t) + U_2 \cos(\omega_2 t)\right] + a_2 \left[U_1 \cos(\omega_1 t) + U_2 \cos(\omega_2 t)\right]^2$$

$$i_N(t) = a_1 \left[U_1 \cos(\omega_1 t) + U_2 \cos(\omega_2 t)\right] + a_2 \left[U_1^2 \cos^2(\omega_1 t) + U_2^2 \cos^2(\omega_2 t) + 2U_1 U_2 \cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)\right]$$

Az utolsó tagot a jól ismert

$$2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

trigonometrikus azonosság alapján átírva

$$i_N(t) = a_1 U_1 \cos(\omega_1 t) + a_1 U_2 \cos(\omega_2 t) + a_2 U_1^2 \cos^2(\omega_1 t) + a_2 U_2^2 \cos^2(\omega_2 t) + a_2 U_1 U_2 \cos\left[(\omega_1+\omega_2)t\right] + a_2 U_1 U_2 \cos\left[(\omega_1-\omega_2)t\right]$$

Végül a $\cos^2(\cdot)$ jellegű tagokra alkalmazzuk a

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

azonosságot:

$$i_N(t) = a_1 U_1 \cos(\omega_1 t) + a_1 U_2 \cos(\omega_2 t) + \frac{a_2 U_1^2}{2}\left[1+\cos(2\omega_1 t)\right] + \frac{a_2 U_2^2}{2}\left[1+\cos(2\omega_2 t)\right] + \\ + a_2 U_1 U_2 \cos\left[(\omega_1+\omega_2)t\right] + a_2 U_1 U_2 \cos\left[(\omega_1-\omega_2)t\right]$$

Az azonos jellegű tagokat csoportosíthatjuk az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} i_N(t) = {} & \frac{a_2}{2}\left(U_1^2 + U_2^2\right) + \\ & + a_1 U_1 \cos(\omega_1 t) + a_1 U_2 \cos(\omega_2 t) + \\ & + \frac{a_2 U_1^2}{2}\cos(2\omega_1 t) + \frac{a_2 U_2^2}{2}\cos(2\omega_2 t) + \\ & + a_2 U_1 U_2 \cos\left[(\omega_1+\omega_2)t\right] + a_2 U_1 U_2 \cos\left[(\omega_1-\omega_2)t\right]. \end{aligned}$$

Látható, hogy ugyan a nemlineáris elem feszültségében csak ω_1 és ω_2 frekvenciájú szinuszos komponensek vannak, a nemlineáris elem létrehoz $\omega = 0$ (egyenfeszültségű), $\omega = 2\omega_1$, $\omega = 2\omega_2$, $\omega = \omega_1 + \omega_2$ és $\omega = \omega_1 - \omega_2$ körfrekvenciájú komponenseket is. Egy lineáris rendszer szinuszos állandósult válaszában csak olyan frekvenciaösszetevők jelennek meg, amelyek a gerjesztésben is szerepelnek, a nemlineáris rendszerre ez nem igaz. [3] A fenti számolást elvégezhetjük

$$i_N(t) = a_1 u_N + a_2 u_N^2 + a_3 u_N^3$$

jellegű karakterisztikával is. Ebben az esetben $2\omega_1 \pm \omega_2$, $2\omega_2 \pm \omega_1$ frekvenciájú termékek is keletkeznek. Általánosságban belátható, hogy

$$i_N(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k u_N^k$$

jellegű nemlinearitás $n\omega_1 \pm m\omega_2$ frekvenciájú összetevőket produkál, ahol n és m természetes számok, $n + m \le K$.

[3] A nemlinearitás által létrehozott frekvenciaösszetevők gyakran az alkalmazás szempontjából káros torzítási termékek (pl. egy hangfrekvenciás erősítő kimenetén). Más esetekben szándékosan használjuk ki a nemlináris eszköz torzítását, pl. a nagyfrekvenciás technikában a jelek frekvencia-eltolását végezhetjük el, ha az ω_1 frekvenciájú jelet egy megfelelően megválasztott ω_2 jellel „keverjük", és a keletkező keverési termékek közül csak az $\omega_1 + \omega_2$ vagy az $\omega_1 - \omega_2$ frekvenciájú összetevőket tartjuk meg, a többi terméket egy lineáris hálózattal, ún. szűrővel elnyomjuk.

4.1. Alkalmazás: dióda torzítása

Félvezető diódák (mint nemlineáris ellenállások) egyszerű modellezésére használatos az alábbi alakú $u_N - i_N$ karakterisztika:

$$i_N = I_s \left[\exp\left(\frac{u_N}{NU_T} \right) - 1 \right],$$

ahol I_s az adott dióda ún. záróirányú telítési árama, $U_T = \frac{kT}{e}$ az elekronikából ismert termikus feszültség (szobahőmérsékleten 26 mV), N pedig egy, a konkrét eszközre jellemző dimenzió nélküli állandó. Fejezzük ki közelítőleg az (1) szerinti formában a dióda karakterisztikáját!

A dióda áramát Taylor-sorba fejthetjük az ismert

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

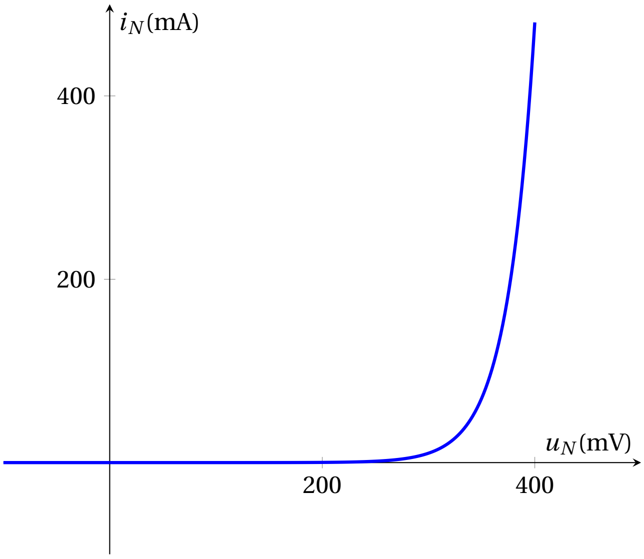
összefüggés alapján. Ha a Taylor-sorból csak az első két tagot tartjuk meg (a dióda kivezérlése túl nagy ahhoz, hogy lineárisnak tekinthessük, de még „kellően” kicsi, hogy csak a négyzetes tagot kelljen figyelembe venni), akkor a dióda karakterisztikája az $i_N = 0$ környezetében közelíthető az

$$i_N \approx I_s \left[\frac{u_N}{Nu_T} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_N}{Nu_T} \right)^2 \right]$$

polinommal, ami

$$a_1 = \frac{I_s}{Nu_T}, \quad a_2 = \frac{I_s}{2N^2 u_T^2}$$

állandókkal visszavezethető az (1) kifejezésre.



1. ábra. A dióda karakterisztikája

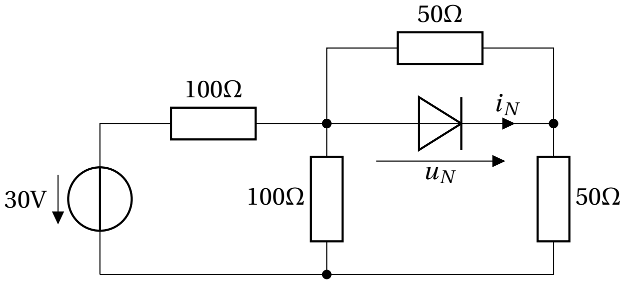
5. feladat

Félvezető diódák (mint nemlineáris ellenállások) egyszerű modellezésére használatos az alábbi alakú $u - i$ karakterisztika:

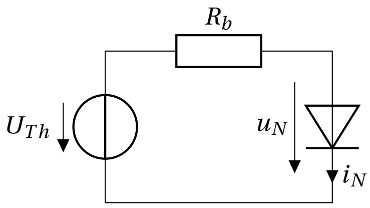
$$i = I_s \left(e^{u/Nu_T} - 1 \right),$$

ahol I_s az ún. záróirányú telítési áram, $u_T = \frac{kT}{e}$ az elekronikából ismert termikus feszültség (szobahőmérsékleten 26 mV), N pedig egy, a konkrét eszközre jellemző dimenzió nélküli állandó.
Határozzuk meg az alábbi hálózatban a dioda munkapontját, ha $N = 1$, és $I_s = 0{,}1\,\mu$A!

- Octave/Matlab segítségével! Ellenőrizzük a megoldást grafikusan!
- Saját Newton-iterációval!
- Saját Octave/Matlab programmal!



A hálózat „maradékát" helyettesítő Thévenin-generátor paraméterei: U_{Th} = 5000 mV, R_b = 33,3Ω. A Thévenin-ekvivalennsel felrajzolhatjuk a hálózatot:



Egy lehetséges kanonikus hálózati egyenletrendszer egyszerűen az alábbi (lineáris) hurokegyenlet és a dióda fenti karakterisztikája együttesen:

$$i_N R_b + u_N - U_{Th} = 0.$$

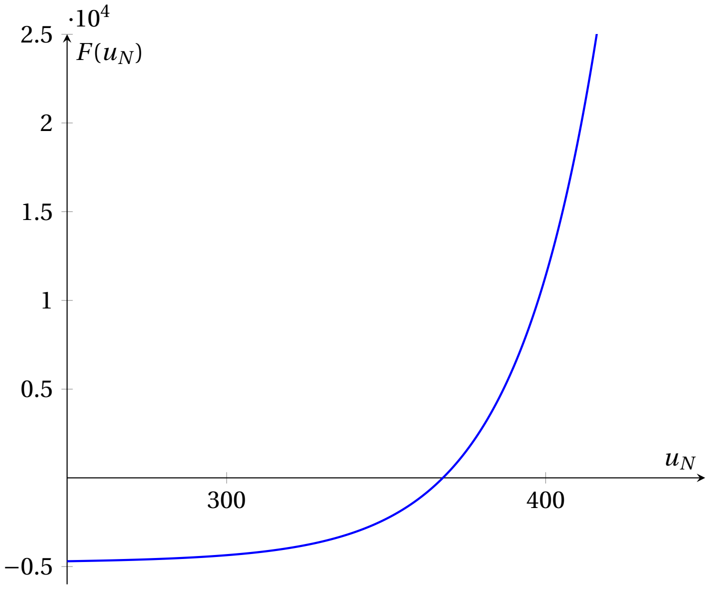
A két egyenletből

$$I_s \left(e^{u_N/Nu_T} - 1 \right) R_b + u_N - U_{Th} = 0,$$

[mV, mA, Ω] koherens egységrendszerben

$$F(u_N) = 33{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot \left(e^{u_N/26} - 1\right) + u_N - 5000 = 0.$$

Az $F(u_N)$ függvény megoldását, u_N-et keressük. A függvény alakja a 2. ábrán látható. A görbe alapján leolvasható, hogy a megoldás 300 és 400 mV értékek között van.



2. ábra. A $F(u_N) = 33{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot \left(e^{u_N/26} - 1\right) + u_N - 5000$ függvény

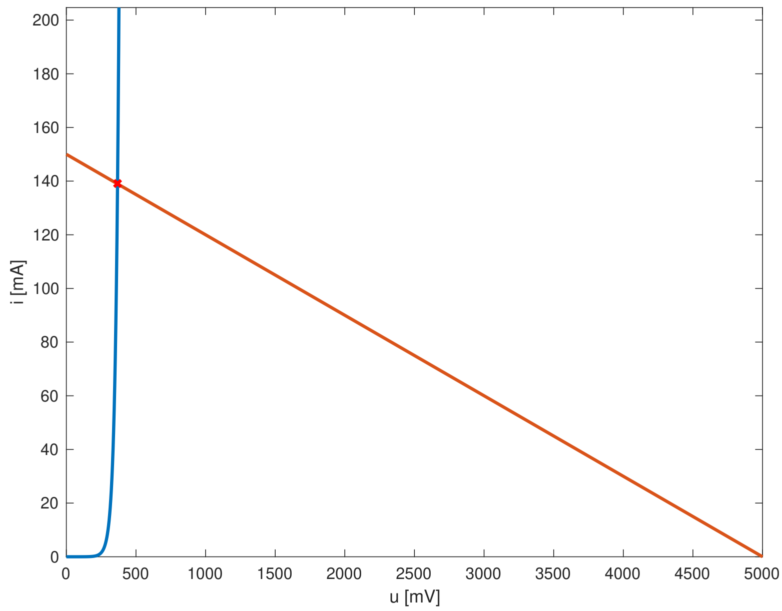
5.1. Megoldás Octave/Matlab segítségével

Nemlineáris algebrai egyenlet numerikus megoldására az `fzero` függvény szolgál. Ennek első argumentumaként megadhatunk egy névtelen függvényt, aminek a gyökét keressük, a második argumentum pedig a kezdeti „tipp”, ahonnan a függvény elkezdi iteratívan keresni a függvény gyökeit. Esetünkben ezt kvázi találomra 500 mV-ra választjuk.

```
>> sol_uN = fzero(@(uN) 1e-4*(exp(uN/26)-1)*33.3+uN-5000, 500)

sol_uN =

  367.7849

>> sol_iN=1e-4*(exp(sol_uN/26)-1)

sol_iN =

  139.1056
```

Vagyis a dióda munkaponti feszültsége 367,8 mV, árama 139,1 mA.
Ellenőrzésképpen a munkaegyenes és a karakterisztika egy ábrán ábraázolható. A Thévenin-generátor rövidzárási árama $I_z = U_{Th}/R_b = 150$ mA, ez a munkaegyenes $u = 0$ értékhez tartozó pontja, az $i = 0$-hoz pedig $u = U_{Th}$ tartozik.

```
>> u=linspace(0, 400);
>> plot(u, 1e-4*(exp(u/26)-1), [0 5000], [150 0], sol_uN, sol_iN, 'rx')
```



5.2. Saját Newton-iteráció

A Newton–Raphson-módszerhez szükségünk van a függvény deriváltjára, a $F'(u_N)$-re:

$$F'(u_N) = \frac{\mathrm{d}F(u_N)}{\mathrm{d}u_N} = \frac{1}{26} \cdot 33{,}4 \cdot 10^{-4} e^{u_N/26} + 1 = 1{,}282 \cdot 10^{-4} e^{u_N/26} + 1,$$

az iterációs formula pedig

$$u_N^{(k+1)} = u_N^{(k)} - \frac{F\left(u_N^{(k)}\right)}{F'\left(u_N^{(k)}\right)} = u_N^{(k)} - \frac{33{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot \left(e^{u_N^{(k)}/26} - 1\right) + u_N - 5000}{1{,}282 \cdot 10^{-4} e^{u_N^{(k)}/26} + 1}$$

5.3. Számítás Octave-ben

```
unk = 1000; %kezdeti tipp

for k = 1:100, % max 100 iteracio utan kiszallunk, ha nem konvergal
    unk1 = unk - (1e-4*(exp(unk/26)-1)*33.3+unk-5000)/(1.282e-4*exp(unk/26)+1);
    if(abs(unk1 - unk) < 1e-4)
        break; % ha konvergalt, akkor megszakitjuk a szamitast
    end
    k unk1
    unk = unk1;
end
```