JELEK ÉS RENDSZEREK I (BMEVIHVAA00)
5. gyakorlat

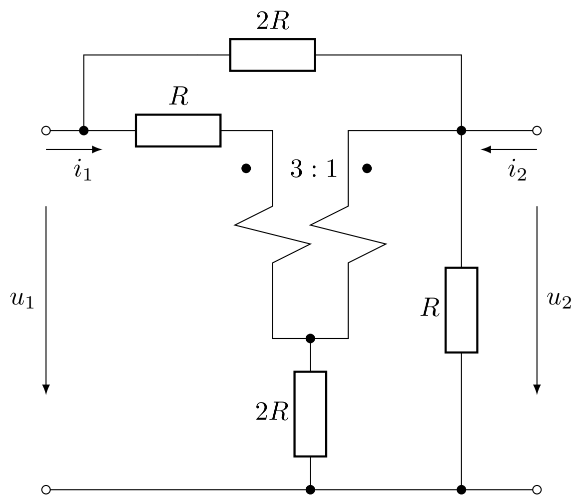
Szerkesztette: Dr. Horváth Péter, BME HVT

2020. október 13.

1. Feladatok

1.1. feladat

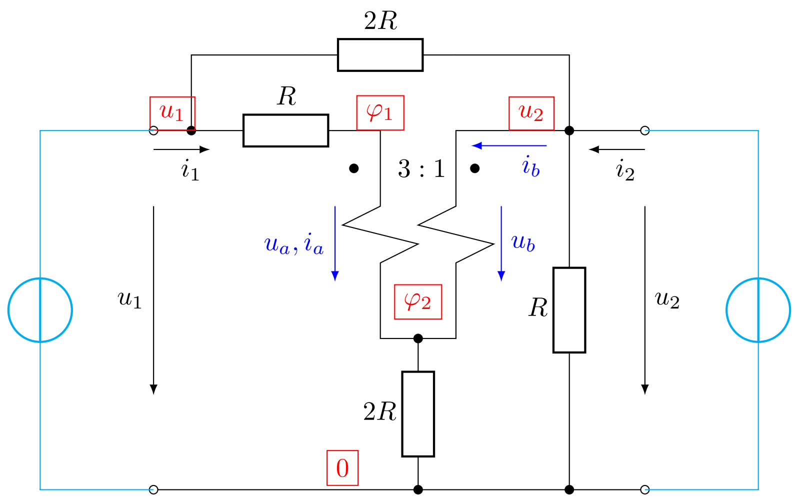
Határozzuk meg az alábbi kétkapu admittanciakarakterisztikáját! Reciprok-e, szimmetrikus-e, passzív-e a kétkapu?



A keresett karakterisztika:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 &= G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{aligned}\right\}$$

Egészítsük ki a kétkaput a keresett karakterisztikának megfelelően forrásokkal. Alkalmazzuk a csomóponti potenciálok módszerét! Legyen a két kapu közös csomópontjának potenciálja a referencia, amivel a másik két kapocs bemeneti potenciálja a kifejezendő (ismeretlen) u_1 ill. u_2. A másik két ismeretlen potenciált jelölje φ_1, illetve φ_2. (Nyilvánvaló, hogy redundánsan vettünk fel csomóponti potenciálokat, de a későbbiekben ezt korrigálni fogjuk.[1])



[1]A következő szakaszban látható, hogyan lehet némi gyakorlattal gyorsan a minimális számú ismeretlen potenciált, és hozzá a csomóponti egyenleteket felírni.

A transzformátornál kék színnel bejelöltük a transzformátor, mint csatolt kétpólus áramait és feszültségeit. Ezeket a későbbiekben igyekszünk eliminálni, de az áttekinthető megoldás érdekében kezdetben ezeket is vezessük be külön ismeretlennek. Tudjuk, hogy a bejelölt referenciairányokkal az IT karakterisztikája

$$u_a = 3u_b, \quad i_b = -3i_a.$$

Ideális transzformátort tartalmazó hálózatot a csomóponti potenciálok módszerével analizálva általában igaz, hogy a transzformátor feszültségei kifejezhetők a csomóponti potenciálokkal, és ezen kívül valamelyik tekercs áramát fel kell venni járulékos ismeretlennek. A hálózat csomópontjainak száma öt, ezért négy darab független áramtörvény írható fel. Ezen kívül az ideális transzformátor két karakterisztika-egyenletét kell figyelembe venni. A transzformátor feszültségei kifejezhetők a csomóponti potenciálokkal:

$$u_a = \varphi_1 - \varphi_2,$$

illetve

$$u_b = u_2 - \varphi_2.$$

Írjunk fel csomóponti egyenleteket az u_1, u_2, φ_1 és a φ_2 potenciálú csomópontokra, és vegyük hozzá az egyenletrendszerhez az ideális transzformátor karakterisztikáit az alábbiak szerint:

$$\left.\begin{array}{rl}
u_1: & -i_1 + \dfrac{u_1-\varphi_1}{R} + \dfrac{u_1-u_2}{2R} = 0 \\
u_2: & -i_2 + \dfrac{u_2}{R} + \dfrac{u_2-u_1}{2R} + i_b = 0 \\
\varphi_2: & -i_a - i_b + \dfrac{\varphi_2}{2R} = 0 \\
\varphi_1: & i_a + \dfrac{\varphi_1-u_1}{R} = 0 \\
\mathrm{IT1}: & \varphi_1 - \varphi_2 = 3(u_2-\varphi_2) \\
\mathrm{IT2}: & i_b = -3i_a
\end{array}\right\}$$

A fenti egyenletrendszer (ismét hangsúlyozva: az $n-1=4$ csomópontra felírt Kirchhoff-áramtörvény és az IT két karakterisztikája) független és teljes rendszert alkot. A hat egyenletből $i_a, i_b, \varphi_1, \varphi_2$ kiküszöbölése után megmaradó két egyenlet lesz a kétkapu keresett karakterisztikája. (Kiindulás: 8 ismeretlen, de ebből kettő paraméter; cél: 4 ismeretlen, de ebből u_1 és u_2 paraméter).
Helyettesítsük be i_b helyére a transzformátor karakterisztikája alapján $i_b = -3i_a$ értéket:

$$\left.\begin{array}{r}
-i_1 + \dfrac{u_1-\varphi_1}{R} + \dfrac{u_1-u_2}{2R} = 0 \\
-i_2 + \dfrac{u_2}{R} + \dfrac{u_2-u_1}{2R} - 3i_a = 0 \\
-i_a + 3i_a + \dfrac{\varphi_2}{2R} = 0 \\
i_a + \dfrac{\varphi_1-u_1}{R} = 0 \\
\varphi_1 - \varphi_2 = 3(u_2-\varphi_2)
\end{array}\right\}$$

A harmadik egyenletből kifejezzük φ_2-t, az ötödikből pedig φ_1-et:

$$\left.\begin{array}{r}
-i_1 + \dfrac{u_1-\varphi_1}{R} + \dfrac{u_1-u_2}{2R} = 0 \\
-i_2 + \dfrac{u_2}{R} + \dfrac{u_2-u_1}{2R} - 3i_a = 0 \\
\varphi_2 = -4Ri_a \\
i_a + \dfrac{\varphi_1-u_1}{R} = 0 \\
\varphi_1 = 3u_2 - 2\varphi_2
\end{array}\right\}$$

A harmadik egyenletből φ_2-t az ötödikbe helyettesítve

$$\left.\begin{array}{r}
-i_1 + \dfrac{u_1-\varphi_1}{R} + \dfrac{u_1-u_2}{2R} = 0 \\
-i_2 + \dfrac{u_2}{R} + \dfrac{u_2-u_1}{2R} - 3i_a = 0 \\
i_a + \dfrac{\varphi_1-u_1}{R} = 0 \\
\varphi_1 = 3u_2 + 8Ri_a
\end{array}\right\}$$

φ_1 értékét a 4. egyenletből a harmadikba és az elsőbe helyettesítve

$$\left.\begin{aligned} -i_1 + \frac{u_1 - (3u_2 + 8Ri_a)}{R} + \frac{u_1 - u_2}{2R} &= 0 \\ -i_2 + \frac{u_2}{R} + \frac{u_2 - u_1}{2R} - 3i_a &= 0 \\ Ri_a + (3u_2 + 8Ri_a) - u_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

A harmadik egyenletből i_a-t kifejezzük:

$$i_a = \frac{u_1 - 3u_2}{9R}$$

Végül i_a értékét be tudjuk helyettesíteni az első két egyenletbe:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_1 - \left(3u_2 + 8\frac{u_1 - 3u_2}{9}\right)}{9R} + \frac{u_1 - u_2}{2R} &= i_1 \\ \frac{3u_2 - u_1}{2R} - 3\frac{u_1 - 3u_2}{9R} &= i_2 \end{aligned}\right\}$$

Ezt rendezve megkapjuk a keresett admittanciakarakterisztikát:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{11}{18R}u_1 - \frac{5}{6R}u_2 \\ i_2 &= -\frac{5}{6R}u_1 + \frac{5}{2R}u_2 \end{aligned}\right\}}$$

Az admittanciakarakterisztika mátrixos alakban

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{11}{18R} & -\frac{5}{6R} \\ -\frac{5}{6R} & \frac{5}{2R} \end{pmatrix}.$$

A kétkapu reciprok, mert $G_{12} = G_{21} = -5/6R$. A kétkapu csak ellenállásokat és ideális transzformátort tartalmaz, ezért mindenképpen reciprok, ezzel tudjuk a számítást is ellenőrizni. Mivel $G_{11} \neq G_{22}$, a kétkapu nem szimmetrikus (a felépítés ismeretében meglepő is lenne). A kétkapu biztosan passzív, mert csak passzív (ellenállás) és nonenergikus (IT) kétpólusokat tartalmaz, de a formális kritérium alapján is ellenőrizhetjük:

$$G_{11} \geq 0, \quad G_{22} \geq 0, \quad G_{11} \cdot G_{22} \geq \left(\frac{G_{12} + G_{21}}{2}\right)^2$$

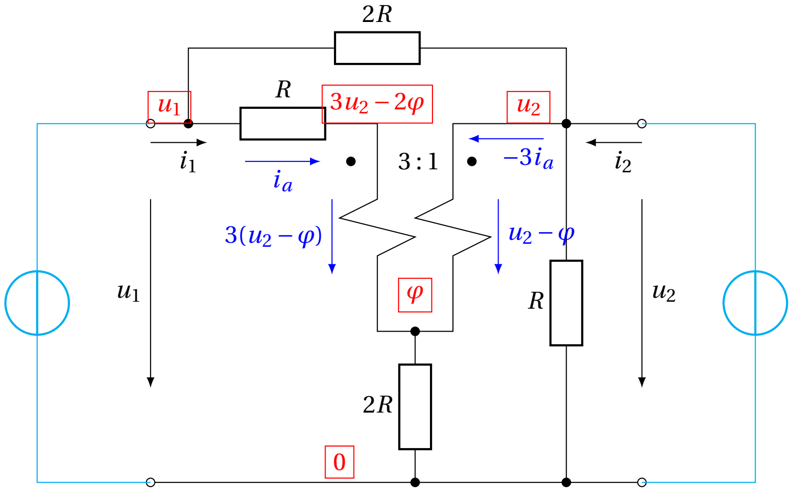
$$G_{11} \cdot G_{22} = \frac{11}{18R} \cdot \frac{5}{2R} = \frac{55}{36R^2} \approx \frac{1{,}53}{R^2},$$

$$\left(\frac{G_{12} + G_{21}}{2}\right)^2 = \left(\frac{2G_{12}}{2}\right)^2 = G_{12}^2 = \frac{25}{36R^2} \approx \frac{0{,}694}{R^2},$$

vagyis mindhárom kritérium teljesül, a kétkapu a számítás alapján is passzív.

1.1.1. Az analitikus formula ellenőrzése Matlabbal

Az előző szakaszbeli lépésről lépésre megoldással szemben törekedjünk egyszerű felírásra. Legyen φ az ismeretlen potenciál. Az IT szekunder oldalának feszültsége ezzel $u_2 - \varphi$, a primer oldal feszültsége a karakterisztika alapján $3(u_2 - \varphi)$, ezért a primer oldal felső kapcsának potenciálja $\varphi + 3(u_2 - \varphi) = 3u_2 - 2\varphi$. A primer áram i_a, a szekunder áram $-3i_a$.



A csomóponti egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} -i_1 + i_a + \frac{u_1 - u_2}{2R} &= 0 \\ -i_2 + \frac{u_2}{R} + \frac{u_2 - u_1}{2R} - 3i_a &= 0 \\ -i_a + 3i_a + \frac{\varphi}{2R} &= 0 \\ i_a + \frac{3u_2 - 2\varphi - u_1}{R} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Mivel i_1 és i_2 fejezendő ki u_1 és u_2 segítségével, négy ismeretlenre (i_1, i_2, i_a, φ) négy független egyenlet áll rendelkezésünkre. Kódoljuk az egyenletrendszert szimbolikusan Matlabban. Az utolsó előtti utasítás azt mondja, hogy a független változók `i1,i2,phi,ia`, míg a másik három változót (`u1,u2,R`) paraméternek tekintjük:

```
syms u1 u2 i1 i2 phi ia R
eq1 = -i1 + ia + (u1 - u2)/(2 * R) == 0;
eq2 = -i2 + u2/R + (u2 - u1)/(2 * R) - 3 * ia == 0;
eq3 = -ia + 3 * ia + phi/(2 * R) == 0;
eq4 = ia + (3 * u2 - 2 * phi - u1)/R == 0;
[A, B] = equationsToMatrix([eq1, eq2, eq3, eq4], [i1 i2 phi ia]);
X = linsolve(A, B)
```

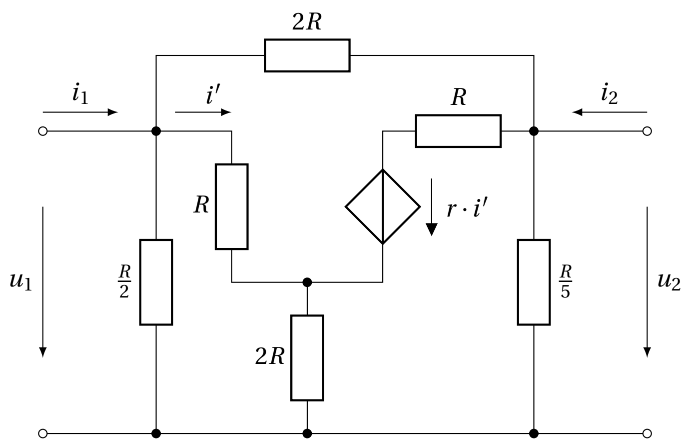
Az eredmény a független változók (rendre `i1,i2,phi,ia`) kifejezése `u1,u2,R` függvényében:

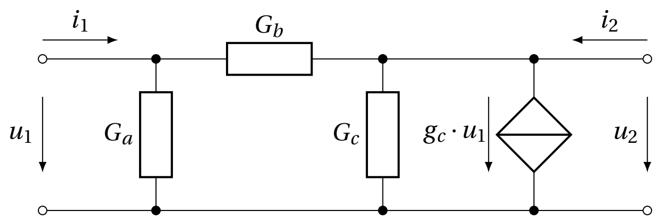
```
X =

 (11*u1 - 15*u2)/(18*R)
 -(5*(u1 - 3*u2))/(6*R)
    (4*u2)/3 - (4*u1)/9
      (u1 - 3*u2)/(9*R)
```

Az első két sor megegyezik az i_1 és i_2 általunk számolt kifejezésével. A 3. és a 4. sor φ és i_a értékét adja, ezeket korábban közbenső lépésként szintén megkaptuk.

1.2. feladat

a) Határozzuk meg az alábbi hálózat megadott hibrid Π helyettesítő kapcsolásának paramétereit, ha $r = 2R$!





b) A kétkapu primer kapuját egy R belső ellenállású Thévenin-generátorral zárjuk le.

- Mekkora a szekunder kapun $2R$ értékű ellenállással lezárt kétkapu

$$H_u = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)_{2R}$$

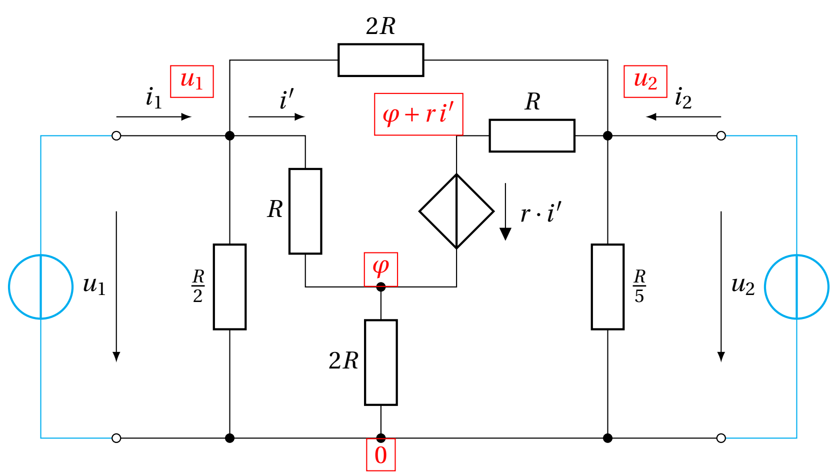
feszültségátviteli tényezője (feszültségerősítése)?

- Adja meg a szekunder kapu felől értelmezett Thévenin-ekvivalens paramétereit!

A hibrid Π helyettesítőkép paramétereinek meghatározásához kézenfekvő az admittanciakarakterisztikát kifejezni a helyettesítendő hálózatra és a helyettesítőképre is, majd a paraméterek összevetéséből számíthatjuk a helyettesítő kép komponenseinek értékeit.

1.2.1. A helyettesítendő hálózat admittanciakarakterisztikája

Számoljunk csomóponti potenciálokkal! Az alsó csomópont legyen a referencia. A hálózatban öt csomópont van, ezért négy független csomóponti egyenlet írható fel. A vezérelt feszültségforrás azonban eggyel csökkenti az ismeretlen potenciálok számát. A bemeneti és kimeneti kapcsok potenciálja lehet u_1 ill. u_2. Ezen kívül két csomópont van, de csak egy ismeretlen potenciál, mert a vezérelt feszültségforrás a maradék két csomópont potenciálja között egyértelmű kapcsolatot hoz létre. A csomóponti potenciálok egy lehetséges felvétele:



Írjuk fel a csomóponti egyenleteket! Egyelőre praktikus okokból hagyjuk meg az i' mennyiséget az egyenletekben, így az első lépésben nem kell emeletes törtekkel számolnunk. u_1, u_2 és φ csomópontokra írhatunk egyenleteket, egy negyedik egyenlet pedig kifejezi i'-t a csomóponti potenciálokkal:

$$\left.\begin{aligned}
u_1 :&\qquad -i_1 + \frac{2u_1}{R} + i' + \frac{u_1 - u_2}{2R} = 0\\
u_2 :&\qquad -i_2 + \frac{5u_2}{R} + \frac{u_2 - u_1}{2R} + \frac{u_2 - (\varphi + r i')}{R} = 0\\
\varphi :&\qquad \frac{\varphi}{2R} - i' + \frac{(\varphi + r i') - u_2}{R} = 0\\
i' = &\ \frac{u_1 - \varphi}{R}
\end{aligned}\right\}$$

Egyszerűsítés és az $r = 2R$ feltétel behelyettesítése után

$$\left.\begin{aligned}
2Ri_1 &= 5u_1 - u_2 + 2Ri'\\
2Ri_2 &= 13u_2 - u_1 - 2\varphi - 4Ri'\\
0 &= 3\varphi - 2u_2 + 2Ri'\\
Ri' &= u_1 - \varphi
\end{aligned}\right\}$$

Helyettesítsük Ri' értékét a negyedik egyenletből az első három egyenletbe!

$$\left.\begin{aligned}
2Ri_1 &= 5u_1 - u_2 + 2u_1 - 2\varphi = 7u_1 - u_2 - 2\varphi\\
2Ri_2 &= 13u_2 - u_1 - 2\varphi - 4u_1 + 4\varphi = -5u_1 + 13u_2 + 2\varphi\\
0 &= 3\varphi - 2u_2 + 2u_1 - 2\varphi = \varphi - 2u_2 + 2u_1
\end{aligned}\right\}$$

A harmadik egyenletből

$$\varphi = 2u_2 - 2u_1,$$

amit az első és a második egyenletbe helyettesítve

$$\left.\begin{aligned}
2Ri_1 &= 7u_1 - u_2 - 4u_2 + 4u_1 = 11u_1 - 5u_2\\
2Ri_2 &= -5u_1 + 13u_2 + 4u_2 - 4u_1 = -9u_1 + 17u_2
\end{aligned}\right\}$$

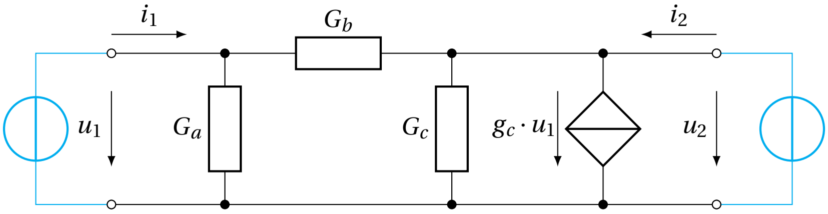
amiből az admittanciakarakterisztika

$$\boxed{\begin{aligned}
i_1 &= \frac{11}{2R}u_1 - \frac{5}{2R}u_2\\
i_2 &= -\frac{9}{2R}u_1 + \frac{17}{2R}u_2
\end{aligned}}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \dfrac{5{,}5}{R} & -\dfrac{2{,}5}{R}\\[2mm] -\dfrac{4{,}5}{R} & \dfrac{8{,}5}{R} \end{pmatrix}$$

1.2.2. A helyettesítőkép számítása

A Π-helyettesítőképet csomóponti potenciálokkal érdemes analizálni. Legyen az alsó csomópont potenciálja zérus, a másik kettő u_1 illetve u_2.



A két csomópontra vonatkozó egyenlet:

$$\left.\begin{aligned}
u_1 :&\qquad -i_1 + G_a u_1 + G_b(u_1 - u_2) = 0\\
u_2 :&\qquad -i_2 + G_c u_2 + g_c u_1 + G_b(u_2 - u_1) = 0
\end{aligned}\right\}$$

Rendezve a helyettesítő kapcsolás admittanciakarakterisztikáját kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= (G_a + G_b)u_1 - G_b u_2 \\ i_2 &= (g_c - G_b)u_1 + (G_b + G_c)u_2 \end{aligned}\right\}$$

A feladat G_a, G_b, G_c és g_c meghatározása. Az admittanciamátrixok összevetésével

$$\begin{pmatrix} \frac{5,5}{R} & -\frac{2,5}{R} \\ -\frac{4,5}{R} & \frac{8,5}{R} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} G_a + G_b & -G_b \\ g_c - G_b & G_b + G_c \end{pmatrix}$$

vagyis

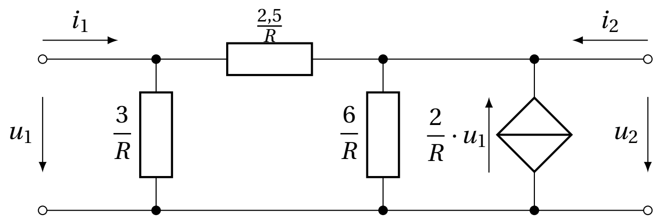
$$G_b = \frac{2,5}{R},$$

$$G_a + \frac{2,5}{R} = \frac{5,5}{R} \to G_a = \frac{3}{R},$$

$$\frac{2,5}{R} + G_c = \frac{8,5}{R} \to G_c = \frac{6}{R},$$

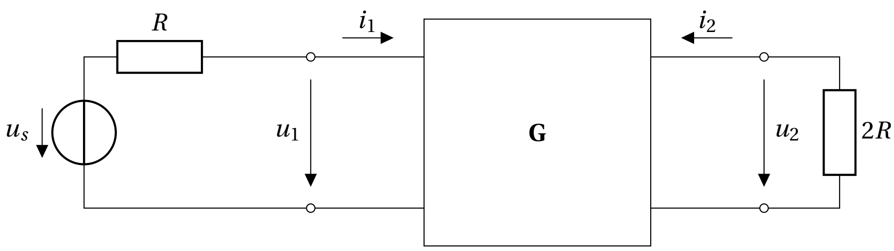
$$g_c - \frac{2,5}{R} = -\frac{4,5}{R} \to g_c = -\frac{2}{R}.$$

A keresett helyettesítőkép:



1.2.3. A lezárt kétkapu jellemzői

A feladat szerint az előző alpontokban vizsgált kétkaput a primer kapuján egy R belső ellenállású Thévenin-generátorral zárjuk le.



Ebben az elrendezésben a

$$H_u = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)_{2R}$$

feszültségátviteli tényező (a $2R$ alsó index a szekunder kapu lezárására utal) meghatározása a feladat. Mind a primer kapun levő Thévenin-generátor, mind a szekunder kapun levő lezáró ellenállás összefüggést teremt az egyes kapuk árama és feszültsége között. Ezt kihasználva kiszámíthatjuk az átviteli tényezőt az alábbi három egyenlet alapján. A szekunder kapun az Ohm-törvény értelmében $u_2 = -Ri_2$, ahol figyelembe vettük a negatív előjellel, hogy az ellenálláson ellentétesen az áram és a feszültség referenciairánya. A kétkaput jellemző két egyenlet mellett ez a 3. egyenlet.

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{11}{2R}u_1 - \frac{5}{2R}u_2 \\ i_2 &= -\frac{9}{2R}u_1 + \frac{17}{2R}u_2 \\ u_2 &= -2Ri_2 \end{aligned}\right\}$$

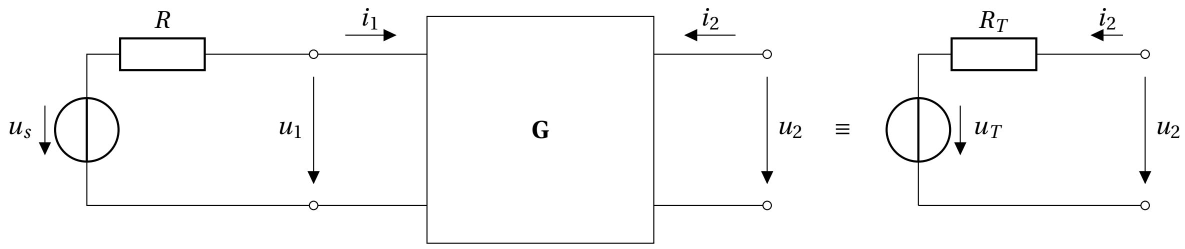
A harmadik egyenletet a másodikba helyettesítve

$$-\frac{1}{2R}u_2 = -\frac{9}{2R}u_1 + \frac{17}{2R}u_2,$$

$$\frac{18}{2R}u_2 = \frac{9}{2R}u_1,$$

$$\underline{\underline{H_u = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)_{2R} = 0{,}5}}$$

Végül a szekunder kapu felől értelmezett Thévenin-féle helyettesítő kép meghatározásához tekintsük a következő ábrát:



A primer kapun lezárt kétkapu a szekunder kapu felől nézve egy kétpólust alkot, ennek kell a Thévenin-ekvivalensét (u_T, R_T) meghatároznunk. A primer kapun felírható feszültségtörvény alapján

$$u_1 = u_s - Ri_1.$$

A Thévenin-ekvivalens két paramétere a dezaktivizált kétpólus belső ellenállása, üresjárási feszültsége és rövidzárási árama közül kettőnek a kiszámítása alapján határozható meg. Számoljuk ki a dezaktivizált kétpólus $(u_s = 0)$ belső ellenállását! Ezt az alábbi egyenletrendszer írja le:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{11}{2R}u_1 - \frac{5}{2R}u_2 \\ i_2 &= -\frac{9}{2R}u_1 + \frac{17}{2R}u_2 \\ u_1 &= u_s - Ri_1 = -Ri_1 \end{aligned}\right\}$$

Keressük az u_2/i_2 értéket, ha a primer kapu R ellenállással van lezárva.

$$R_T = \left(\frac{u_2}{i_2}\right)^R$$

Az egyenletrendszerben 4 ismeretlen mennyiség (u_1, u_2, i_1, i_2) szerepel, és 3 független egyenletünk van. Azonban csak két ismeretlen hányadosát kell meghatároznunk, ezért elegendő a három egyenlet. Megoldva

$$\underline{\underline{R_T = \left(\frac{u_2}{i_2}\right)^R = 0{,}148R}}$$

a keresett belső ellenállás. A (már aktív) kétpólus üresjárási feszültsége a szekunder kapu szakadás állapota, $i_2 = 0$, és a keresett u_T a szekunder kapu feszültsége: $u_T = u_2$:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{11}{2R}u_1 - \frac{5}{2R}u_T \\ 0 &= -\frac{9}{2R}u_1 + \frac{17}{2R}u_T \\ u_1 &= u_s - Ri_1 \end{aligned}\right\}$$

Ez 3 ismeretlenre (u_1, u_T, i_1) három függetlenlen egyenlet, megoldva u_T-re

$$\underline{\underline{u_T = \frac{9}{88}u_s \approx 0{,}102u_s.}}$$

Ellenőrzésképpen a rövidzárási áramot is számítsuk ki! Ekkor a szekunder kapu rövidzárásban van $(u_2 = 0)$, és a keresett rövidzárási áram pedig $i_{rz} = i_2$.

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{11}{2R}u_1 \\ i_{rz} &= -\frac{9}{2R}u_1 \\ u_1 &= u_s - Ri_1 \end{aligned}\right\}$$

Megoldva

$$i_{rz} = -\frac{9u_s}{13R} \approx -0{,}692\frac{u_s}{R},$$

és a $-\frac{u_T}{i_{rz}}$ valóban visszaadja a számolt belső ellenálllást. (A negatív előjel szükséges, mert a generátoron szimmetrikus [a generátorba befelé folyó] áramirányt vettünk fel!) Számítástechnikailag ebben a feladatban a rövidzárási áram könnyebben számolható, mint az üresjárási feszültség.

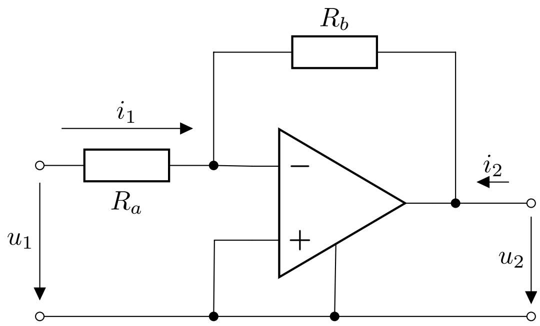
1.3. feladat

Határozzuk meg az alábbi kétkapura

1. az értelmezett hibrid típusú karakterisztikákat,
2. primer oldali gerjesztés esetén a

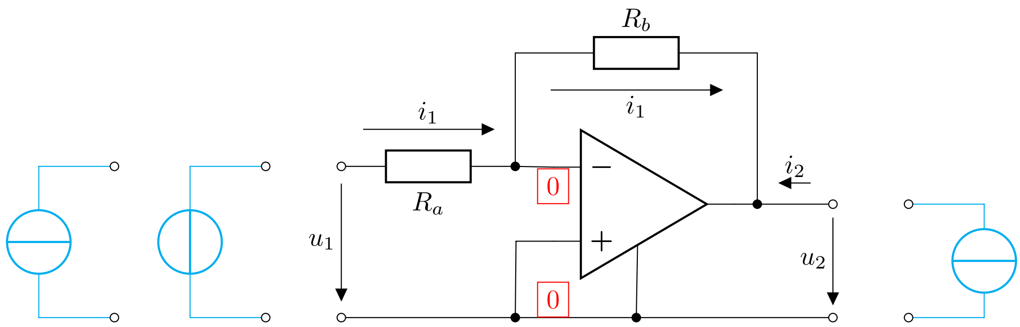
$$H_u = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)_R; \quad R_T = \left(\frac{u_2}{i_1}\right)_R; \quad R_B = \left(\frac{u_1}{i_1}\right)_R; \quad G_B = \left(\frac{i_1}{u_1}\right)_R$$

   átviteli, illetve bemeneti mennyiségeket!



1.3.1. Hibrid típusú karakterisztikák

Az elrendezés az ún. invertáló erősítő. Az $u = 0$ karakterisztika értelmében az erősítő mindkét bemenete nulla potenciálon („földpotenciálon”) van, ezért szokás az invertáló bemenetre azt mondani, hogy „virtuális földpont”.



A kimenetre változatlanul nem írhatunk fel egyenletet, az invertáló (-) bemenetre felírható csomóponti egyenlet:

$$\frac{0 - u_1}{R_a} + \frac{0 - u_2}{R_b} = 0,$$

ahonnan

$$u_2 = -\frac{R_b}{R_a} u_1.$$

Továbbá R_a ellenállás árama kifejezhető

$$i_1 = \frac{u_1 - 0}{R_a} = \frac{1}{R_a} u_1$$

vagy

$$u_1 = R_a i_1$$

alakban. Végül, mivel az erősítő invertáló bemenetén nem folyik áram, az R_b visszacsatoló ellenállás árama is i_1, ezért

$$u_2 = -R_b i_1.$$

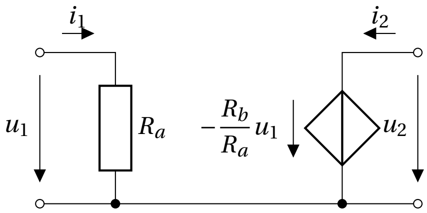
Gondoljuk meg, hogy nem léteznek azok a karakterisztikák, amelyekben az u_2 mennyiség független változó (az admittancia- és a hibrid karakterisztika), mert a kétkapu szekunder kapuján nem írhatjuk elő függetlenül az u_2 feszültséget (nem zárhatjuk le a szekunder kaput feszültségforrással). Az erősítő származtatásánál láttuk, hogy a kimeneti kétpólus úgy viselkedik, mint egy feszültségvezérelt feszültségforrás. Ezzel kapcsolódna párhuzamosan az u_2-t előíró független feszültségforrás; az így adódó hálózat pedig nem reguláris, ezek a karakterisztikák nem léteznek. Másrészt nem létezhetnek azok a karakterisztikák, amelyek i_2-t fejezik ki a többi mennyiséggel, mert i_2-re nem vonatkozik egyenlet. Ez kizárja az impedancia- és a hibrid karakterisztika létezését. A két létező hibrid típusú karakterisztika az impedanciakarakterisztika:

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= R_a i_1 \\ u_2 &= -R_b i_1 \end{aligned}}$$

és az inverz hibrid karakterisztika:

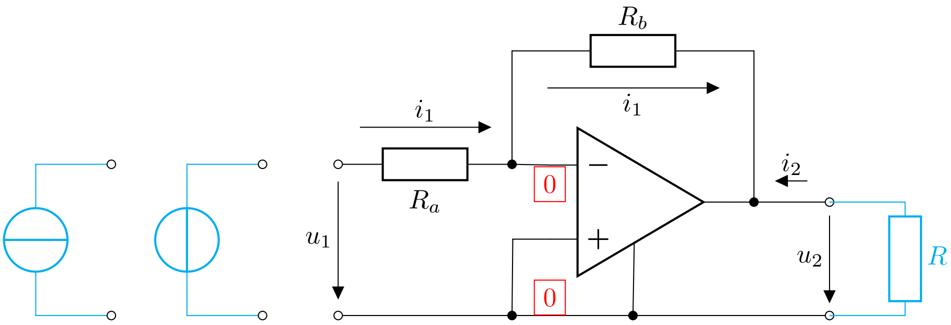
$$\boxed{\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{R_a} u_1 \\ u_2 &= -\frac{R_b}{R_a} u_1 \end{aligned}}$$

Innen is látható, hogy a kétkapu feszültségvezérelt feszültségforrást realizál, amelynek erősítése az R_b/R_a viszony megfelelő megválasztásával állítható be. A kétkapu természetes helyettesítő képe az inverz hibrid karakterisztika alapján:



1.3.2. Lezárt kétkapu primer oldali gerjesztéssel

A primer kapun gerjesztés, R ellenállással lezárás a szekunder kapun:



A H_u feszültségerősítés (az alsó indexben levő R a szekunder kapu lezárására utal):

$$H_u = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)_R = -\frac{R_b}{R_a},$$

míg az impedanciakarakterisztika 2. egyenlete alapján (i_2-től, tehát a lezáró R értéktől függetlenül) az átviteli rezisztencia

$$R_T = \left(\frac{u_2}{i_1}\right)_R = -R_b$$

értékű[2]. A bemeneti ellenállás

$$R_B = \left(\frac{u_1}{i_1}\right)_R = R_a$$

és a bemeneti vezetés

$$G_B = \left(\frac{i_1}{u_1}\right)_R = \frac{1}{R_a}$$

szintén a terhelő ellenállás értékétől függetlenül: a primer kapu felől mutatott bemeneti ellenállás terheléstől függetlenül R_a értékű, ahogy a helyettesítő képből is látszik.

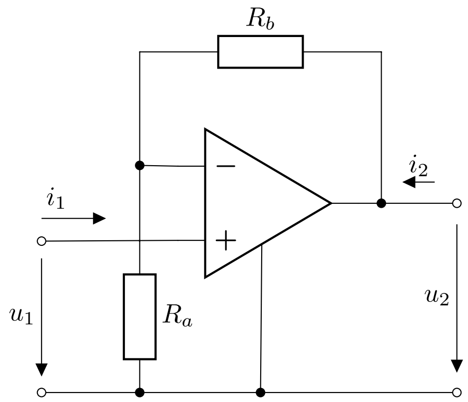
[2] Ez pl. akkor érdekes, ha a kétkapuval egy áramjelet szolgáltató szenzor jelét erősítjük, és feszültségjellé alakítjük.

1.4. feladat

Határozzuk meg az alábbi kétkapura a) az értelmezett hibrid típusú karakterisztikákat, b) primer oldali gerjesztés esetén a

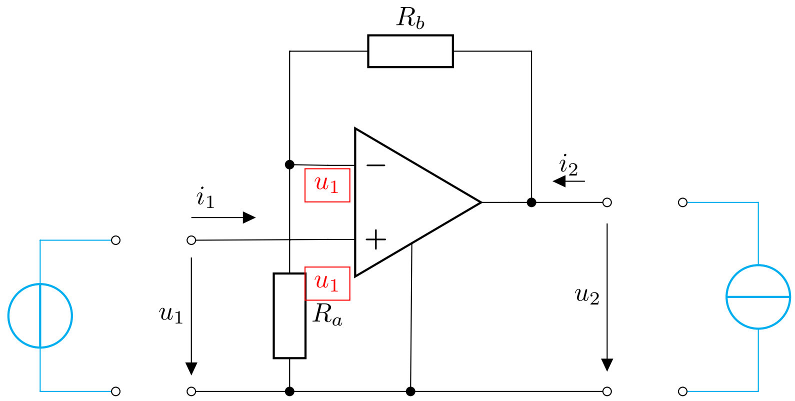
$$H_u = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)_R \quad ; \quad R_T = \left(\frac{u_2}{i_1}\right)_R \quad ; \quad R_B = \left(\frac{u_1}{i_1}\right)_R \quad ; \quad G_B = \left(\frac{i_1}{u_1}\right)_R$$

átviteli, illetve bemeneti mennyiségeket!



1.4.1. Hibrid típusú karakterisztikák

A kétkapu a neminvertáló erősítő. Az előző példához hasonlóan az erősítő kimenete nem zárható le feszültségforrással, így az u_2-t független változóként tartalmazó karakterisztikák nem értelmezettek. A primer kapu viszont csak feszültségforrással gerjeszthető, mert az erősítő neminvertáló bemenetébe nem folyik áram ($i_1 = 0$), áramforrásos gerjesztés nem reguláris hálózatot eredményezne. Az $u = 0$ karakerisztika értelmében mindkét bemenet potenciálja u_1:



Mivel az invertáló bemenetbe sem folyik áram, R_a és R_b terheletlen feszültségosztót képez, emiatt

$$u_1 = \frac{R_a}{R_a + R_b} u_2,$$

$$u_2 = \frac{R_a + R_b}{R_a} u_1 = \left(1 + \frac{R_b}{R_a}\right) u_1,$$

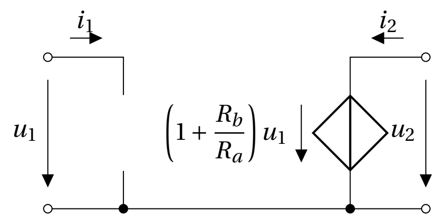
valamint

$$i_1 = 0.$$

Az egyetlen létező karakterisztika az inverz hibrid:

$$\boxed{\begin{aligned} i_1 &= 0 \\ u_2 &= \left(1 + \frac{R_b}{R_a}\right) u_1 \end{aligned}}$$

ami feszültségvezérelt feszültségforrást realizál. A természetes helyettesítő kép:



1.4.2. Lezárt kétkapu primer oldali gerjesztéssel

A H_u feszültségerősítés:

$$H_u = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)_R = \left(1+\frac{R_b}{R_a}\right),$$

míg az átviteli rezisztencia

$$R_T = \left(\frac{u_2}{i_1}\right)_R$$

nem értelmezett, mert a primer kapu árammal nem gerjeszthető. A bemeneti ellenállás

$$R_B = \left(\frac{u_1}{i_1}\right)_R$$

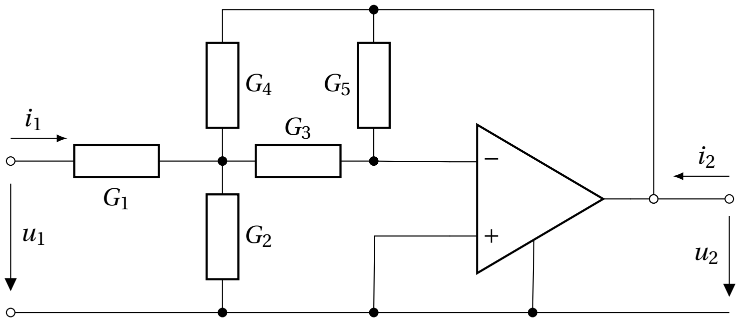
ugyancsak nem értelmezett („végtelen”). A bemeneti vezetés

$$G_B = \left(\frac{i_1}{u_1}\right)_R = 0$$

a terhelő ellenállás értékétől függetlenül: a primer kapu felől a kétkapu lezárástól függetlenül szakadásnak látszik.

1.5. feladat

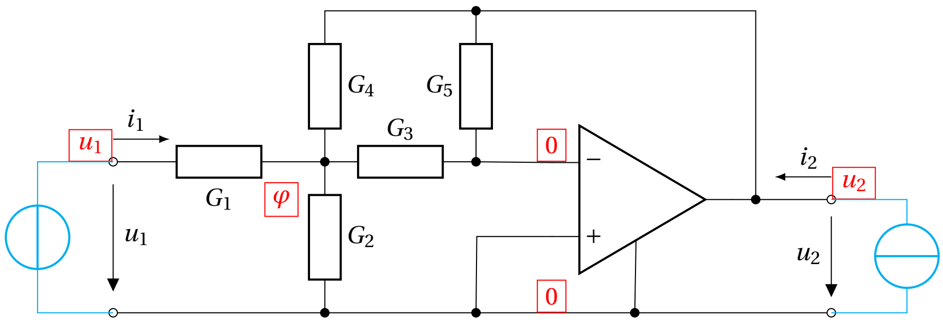
Határozzuk meg az alábbi kétkapu inverz hibridkarakterisztikáját és adjuk meg a természetes helyettesítő képét, ha $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = G_5 \equiv G = 5\,\mathrm{S}$!



A keresett karakterisztika az inverz hibrid karakterisztika, kifejezése

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= K_{11}u_1 + K_{12}i_2 \\ u_2 &= K_{21}u_1 + K_{22}i_2 \end{aligned}\right\}$$

Az ideális erősítőt tartalmazó kétkapu analízisét a csomóponti potenciálok módszerével végezzük. Egészítsük ki a kétkaput az inverz hibrid karakterisztikának megfelelő független forrásokkal! Az invertáló bemenet virtuális földpont. A harmadik ismeretlen potenciált jelöljük φ-vel.



Összesen 5 ismeretlen mennyiség van (u_1, u_2, i_1, i_2, φ), de u_1-et és i_2-t paraméternek tekintjük, ezért három független egyenletre van szükségünk. Az erősítő kimenetére és a referenciapontra nem írhatunk fel egyenletet, mert az erősítő kimeneti kétpólusára nem vonatkozik karakterisztika. Az invertáló bemenetre, a φ csomópontra és a bemeneti forrás felső kapcsára írhatunk értelmes egyenletet a következőképpen:

$$\left.\begin{aligned} 0^- :&\quad (0-u_2)G_5 + (0-\varphi)G_3 = 0 \\ \varphi :&\quad \varphi G_2 + (\varphi - u_1)G_1 + (\varphi - u_2)G_4 + \varphi G_3 = 0 \\ u_1 :&\quad i_1 = (u_1 - \varphi)G_1 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} -u_2G_5 &= \varphi G_3 \\ \varphi(G_1+G_2+G_3+G_4) - u_1G_1 - u_2G_4 &= 0 \\ i_1 &= (u_1-\varphi)G_1 \end{aligned}\right\}$$

Helyettesítsünk be $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = G_5 \equiv G$-t az egyenletekbe!

$$\left.\begin{aligned} -u_2G = \varphi G &\to \varphi = -u_2 \\ \varphi 4G - u_1G - u_2G = 0 &\to 4\varphi = u_1 + u_2 \\ i_1 &= (u_1 - \varphi)G \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletet a másodikba helyettesítve

$$u_1 + u_2 = -4u_2,$$

$$u_2 = -\frac{1}{5}u_1,$$

míg a harmadik egyenletbe helyettesítve

$$i_1 = (u_1 - \varphi)G = (u_1 + u_2)G = (u_1 - 0{,}2u_1)\,G = 0{,}8Gu_1.$$

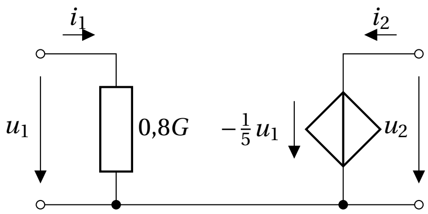
A keresett inverz hibrid karakterisztika:

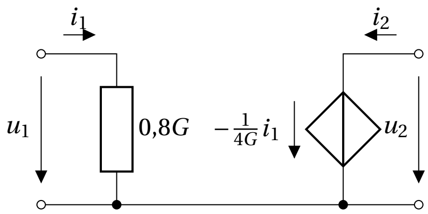
$$\boxed{\begin{aligned} i_1 &= 0{,}8Gu_1 \\ u_2 &= -0{,}2u_1 \end{aligned}}$$

Mind a primer kapu árama, mind a szekunder kapu feszültsége független i_2-től, azaz a szekunder kapura kapcsolt terheléstől. A kétkapu feszültségvezérelt feszültségforrást (invertáló feszültségerősítőt) realizál. Az első egyenletet a másodikba helyettesítve

$$u_2 = -0{,}2u_1 = -0{,}2 \cdot \frac{1{,}25}{G} i_1 = -\frac{0{,}25}{G} i_1$$

alakot kapunk, a kétkapu áramvezérelt feszültségforrásként is felfogható. A kétkapu helyettesítő képei feszültség- ill. áramvezérelt esetben:





1.6. feladat

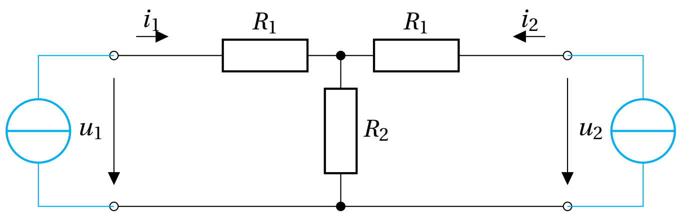
Egy rezisztív kétkapu impedanciakarakterisztikája

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 61{,}11\,\Omega & 35{,}14\,\Omega \\ 35{,}14\,\Omega & 61{,}11\,\Omega \end{pmatrix}$$

1. Adja meg a kétkapu T helyettesítő képét!
2. Adja meg a kétkapu primer oldali bemeneti rezisztenciáját, ha a szekunder kapu egy $R = 50\,\Omega$ értékű ellenállással van lezárva!

1.6.1. T helyettesítő kép

A kétkapu reciprok ($R_{12} = R_{21}$), ezért egyszerű T helyettesítő kapcsolással helyettesíthető. A kétkapu ráadásul szimmetrikus is (reciprok, továbbá $R_{11} = R_{22}$ is), ezért kézenfekvő, hogy a T helyettesítő kép is szimmetrikus felépítésű lesz. (Nem szimmetrikus helyettesítő kép feltételezésével is nyilvánvalóan szimmetrikus eredmény adódna.) Ezért eleve szimmetrikus helyettesítőképet feltételezünk:



A T helyettesítő képekhez egyébként is az impedanciakarakterisztikát célszerű használni. A helyettesítő kép paramétereit a hurokáramok módszerével a legegyszerűbb meghatározni. Itt i_1 és i_2 hurokáramként használható. A kétkaput az impedanciakarakterisztikának megfelelő forrásokkal hálózattá egészítjük ki, és felírjuk a két hurokegyenletet:

$$\left.\begin{aligned} -u_1 + i_1 R_1 + (i_1 + i_2) R_2 = 0 \\ -u_2 + i_2 R_2 + (i_1 + i_2) R_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

A helyettesítő kép impedanciakarakterisztikája:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= (R_1 + R_2) i_1 + R_2 i_2 \\ u_2 &= R_2 i_1 + (R_1 + R_2) i_2 \end{aligned}\right\}$$

A helyettesítendő kétkapu impedanciakarakterisztikája:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 61{,}11 i_1 + 35{,}14 i_2 \\ u_2 &= 35{,}14 i_1 + 61{,}11 i_2 \end{aligned}\right\}$$

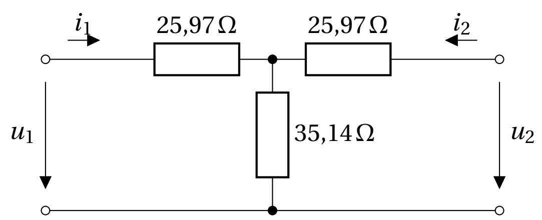
Az együtthatók összevetésével

$$R_1 + R_2 = 61{,}11 \qquad R_2 = 35{,}14,$$

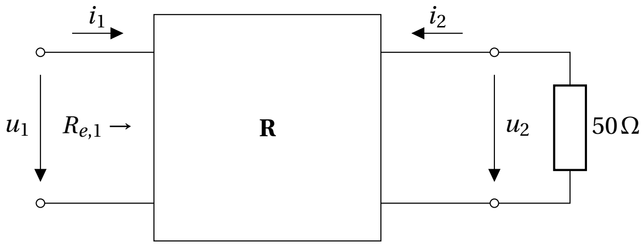
ahonnan

$$\boxed{R_1 = 25{,}97\,\Omega, \qquad R_2 = 35{,}14\,\Omega}$$

A T helyettesítő kép:



1.6.2. Bemeneti ellenállás



A szekunder kapun $50\,\Omega$-os ellenállással lezárt kétkapura vonatkozó egyenleteket a következőképpen írhatjuk fel. A kétkapu karakterisztikája:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 61{,}11 i_1 + 35{,}14 i_2 \\ u_2 &= 35{,}14 i_1 + 61{,}11 i_2 \end{aligned}\right\}$$

továbbá a szekunder kapura kapcsolt $50\,\Omega$-os ellenállás miatt u_2 és i_2 között az Ohm-törvény teremt kapcsolatot:

$$u_2 = -50 i_2,$$

ahol a negatív előjel azért szükséges, mert az Ohm-törvény azonos referenciairányok mellett érvényes, de a lezáráson u_2 és i_2 referenciairánya éppen ellentétes. Három egyenletünk van négy ismeretlenre (u_1, i_1, u_2, i_2), de az u_1/i_1 arányt akarjuk kifejezni, ezért elegendő a három független egyenlet. A harmadik egyenletből u_2-t a második egyenletbe helyettesítve

$$-50 i_2 = 35{,}14 i_1 + 61{,}11 i_2,$$

ahonnan

$$i_2 = -\frac{35{,}14}{111{,}11} i_1,$$

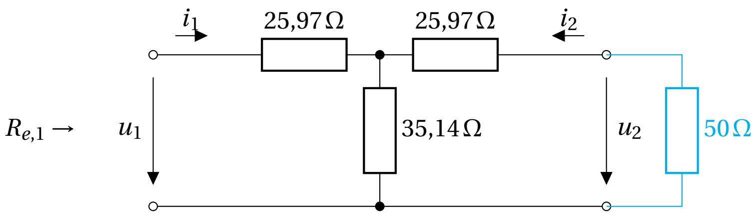
amit az első egyenletbe helyettesítve

$$u_1 = 60{,}11 i_1 - 11{,}11 i_1 = 50 i_1,$$

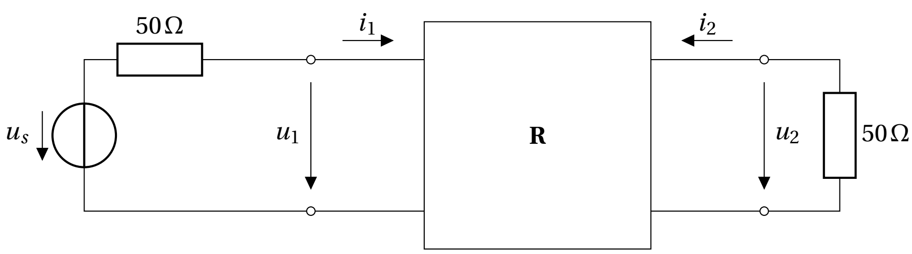
a primer oldali bemeneti rezisztencia

$$\boxed{R_{e,1} = \left(\frac{u_1}{i_1}\right)_{50\,\Omega} = 50\,\Omega.}$$

A kétkapu további speciális tulajdonsága, hogy a karakterisztikus rezisztenciája (hullámellenállása) $R_0 = 50\,\Omega$: ha a szekunder kaput R_0 ellenállással zárjuk le, akkor a primer kapun mérhető bemeneti rezisztencia szintén R_0. (A szimmetria miatt a primer oldalt lezárva és a szekunder oldali bemeneti ellenállást vizsgálva ugyanezt kapjuk.)
A bementi rezisztenciát a helyettesítő kép alapján is meghatározhattuk volna, egyszerű soros-párhuzamos eredőkre visszavezetve:



$$R_{e,1} = \left(\frac{u_1}{i_1}\right)_{50\,\Omega} = 25{,}97 + 35{,}14 \times (25{,}97 + 50) = 50\,\Omega.$$



1.7. Konverzió

Fejezzük ki egy kétkapu lánckarakterisztikáját a hibridkarakterisztika segítségével! (A bemutatott számítással analóg módon fejezhető ki a többi karakterisztika-átalakítás is, akár zárt alakban, akár numerikusan.)
A kiindulási karakterisztika a hibridkarakterisztika:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= H_{11} i_1 + H_{12} u_2 \\ i_2 &= H_{21} i_1 + H_{22} u_2 \end{aligned}\right\}$$

Rendezzük nullára a két egyenletet, és fejezzük ki az alábbi („homogén") alakban:

$$\left.\begin{aligned} u_1 - H_{11} i_1 - H_{12} u_2 = 0 \\ i_2 - H_{21} i_1 - H_{22} u_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

ami az $[u_1 u_2 i_1 i_2]^T$ oszlopvektor bevezetésével a

$$\begin{pmatrix} 1 & -H_{12} & -H_{11} & 0 \\ 0 & -H_{22} & -H_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vektor-márix alakot ölti. Rendezzük át mátrix oszlopait úgy, hogy a kifejezni kívánt lánckarakterisztika függő változói (u_1, i_1) és független változói (u_2, i_2) csoportosítva szerepeljenek:

$$\begin{pmatrix} 1 & -H_{11} & -H_{12} & 0 \\ 0 & -H_{21} & -H_{22} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \\ u_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fogjuk össze az így kapott mátrix első két oszlopát egy $\mathbf{M_1}$, a második két oszlopát egy $\mathbf{M_2}$ mátrixba,

$$\mathbf{M_1} \begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} + \mathbf{M_2} \begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

amivel ki tudjuk fejezni a keresett karakterisztikát az alábbi alakban:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = -\mathbf{M_1}^{-1}\mathbf{M_2} \begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -H_{11} \\ 0 & -H_{21} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -H_{12} & 0 \\ -H_{22} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & H_{11} \\ 0 & H_{21} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -H_{12} & 0 \\ -H_{22} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Ha ez a forma nem írható fel (mert az $\mathbf{M_1}$ mátrix nem invertálható), akkor a lánckarakterisztika biztosan nem létezik. Kihasználva a 2x2-es mátrix inverzére megismert zárt alakú összefüggést, miszerint

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

a következő eredményt kapjuk:

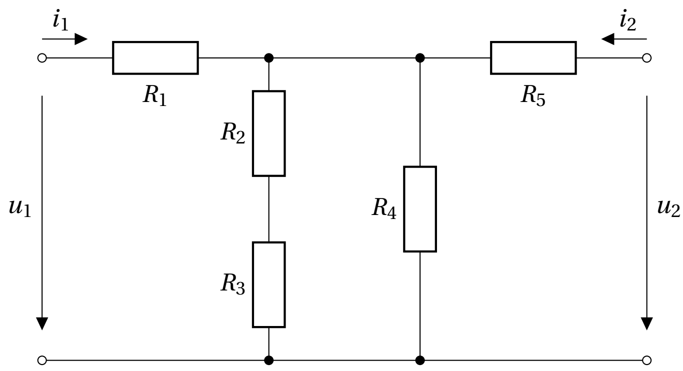
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-1) \cdot H_{21} - 0 \cdot H_{11}} \begin{pmatrix} H_{21} & -H_{11} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -H_{12} & 0 \\ -H_{22} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{H_{21}} \begin{pmatrix} H_{12}H_{21} - H_{11}H_{22} & H_{11} \\ -H_{22} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

A lánckarakterisztika felírásához azonban figyelembe kell venni, hogy a hibrid típusú karakterisztikáknál i_2 szimmetrikus referenciairánnyal („befelé"), míg a lánc típusú karakterisztikáknál i_2 lánc-referenciairánnyal („kifelé") értendő. Ezért, mivel egy hibrid típusúról egy lánc típusúra konvertálunk, i_2 helyett mindenhol $(-i_2)$-t kell érteni. Ebben az esetben az eredményül kapott mátrix i_2-höz tartozó, második oszlopának kell az ellentettjét vennünk. A keresett lánckarakterisztika:

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{1}{H_{21}} \begin{pmatrix} H_{12}H_{21} - H_{11}H_{22} & -H_{11} \\ -H_{22} & -1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{H_{21}} \begin{pmatrix} -\det(\mathbf{H}) & -H_{11} \\ -H_{22} & -1 \end{pmatrix}}$$

2. Gyakorlófeladatok

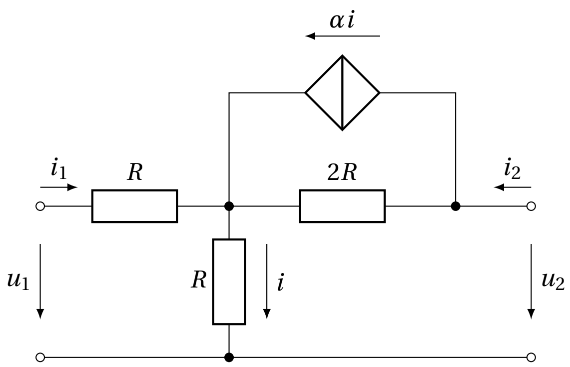
1. Határozzuk meg az álábbi kétkapu impedancia- és hibridkarakterisztikáját! ($R_1 = 20\ \Omega,\ R_2 = 10\ \Omega,\ R_3 = 50\ \Omega,\ R_4 = 60\ \Omega,\ R_5 = 40\ \Omega$)



$(u_1 = 50\ \Omega \cdot i_1 + 30\ \Omega \cdot i_2,\ u_2 = 30\ \Omega \cdot i_1 + 70\ \Omega \cdot i_2)$

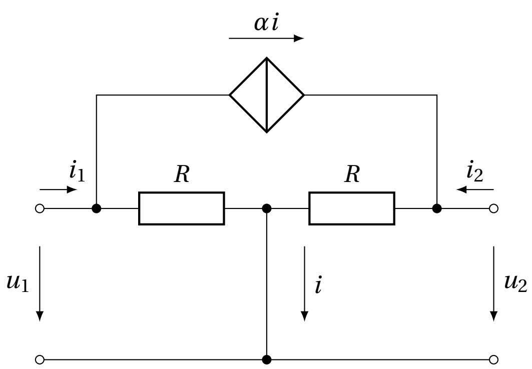
$\left(u_1 = \frac{260}{7}\ \Omega \cdot i_1 + \frac{3}{7} u_2,\ i_2 = -\frac{3}{7} i_1 + \frac{1}{70}\ \mathrm{S} \cdot u_2\right)$

2. Adja meg az alábbi kétkapu impedanciakarakterisztikáját!
($R = 20\ \Omega,\ \alpha = 0{,}7$)



$(u_1 = 40\ \Omega \cdot i_1 + 20\ \Omega \cdot i_2,\ u_2 = -8\ \Omega \cdot i_1 + 32\ \Omega \cdot i_2)$

3. Határozzuk meg az alábbi kétkapu admittanciakarakterisztikáját! Ha $R > 0$, akkor
   - Reciprok-e, szimmetrikus-e a kétkapu? A kétkapu felépítésének ismeretében is eldönthető-e ez?
   - Passzív-e a kétkapu?
   - Mikor értelmezett a kétkapu lánc-, illetve hibridkarakterisztikája?



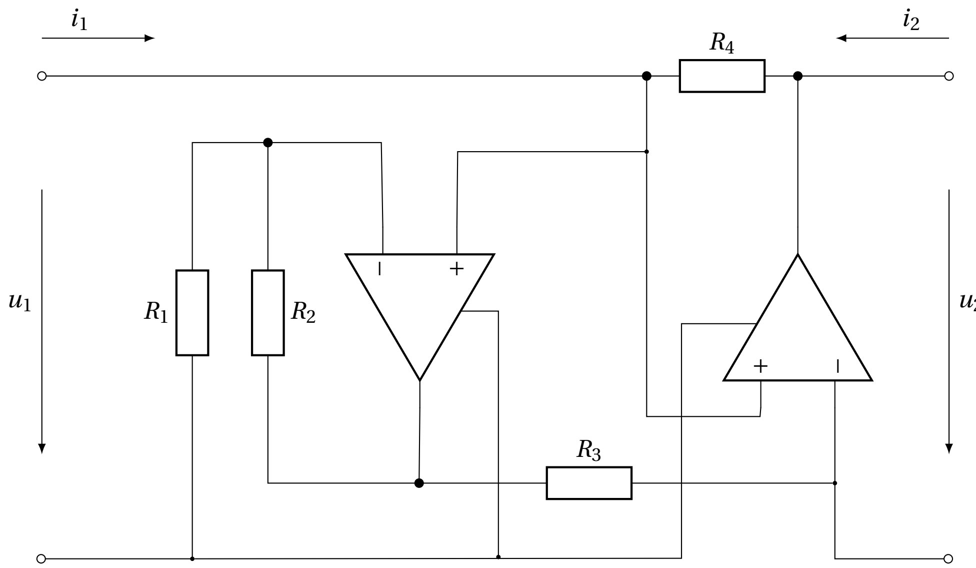
$\left(\text{admittanciakarakterisztika}: i_1 = \frac{1+\alpha}{R} u_1 + \frac{\alpha}{R} u_2,\ i_2 = -\frac{\alpha}{R} u_1 + \frac{1-\alpha}{R} u_2\right)$

(Csak $\alpha = 0$ esetén reciprok és szimmetrikus)

($|\alpha| \leq 1$ esetén passzív)

($\alpha = -1$ mellett a hibrid-, $\alpha = 0$ esetén a lánckararakterisztika nem értelmezett)

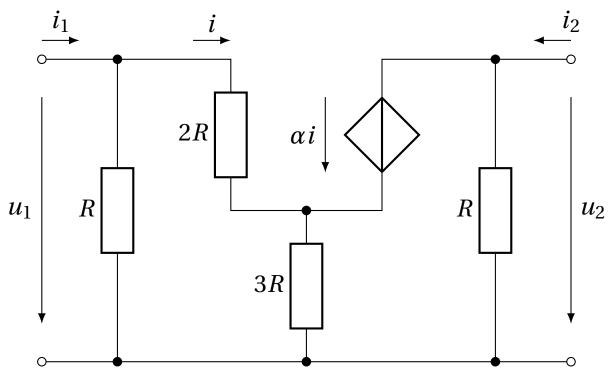
4. Határozzuk meg az alábbi kétkapu impedanciakarakterisztikáját. Mit realizál a kétkapu, ha $R_2 \cdot R_4 = R_1 \cdot R_2$?



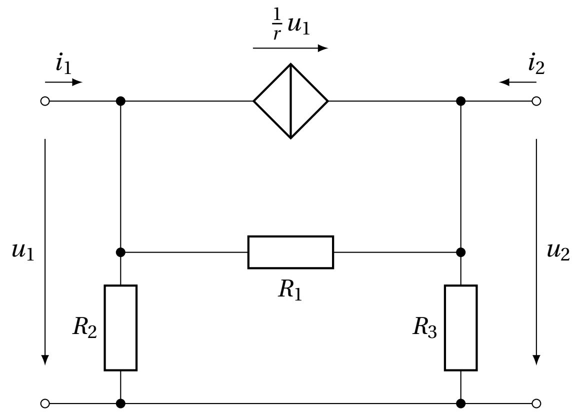
$\left(u_1 = \frac{R_1 R_3}{R_2} i_2,\ u_2 = -R_4 i_1\right)$

(Ha $R_2 R_4 = R_1 R_3$, akkor a kétkapu egy négypólusú girátort realizál)

5. Az bal oldali ábra szerinti kétkaput szeretnénk helyettesíteni a jobb oldali ábrán látható kétkapuval. Számoljuk ki a helyettesítő hálózat admittanciakarakterisztikáját! Határozzuk meg a helyettesítő kétkapu paramétereit! ($\alpha = 5\ \Omega,\ R = 5\ \Omega$)



Helyettesítendő (első) kétkapu



Helyettesítő (második) kétkapu

$\left(i_1 = \frac{2}{5}\ \mathrm{S} \cdot u_1 - \frac{1}{5}\ \mathrm{S} \cdot u_2,\ i_2 = -\frac{4}{15}\ \mathrm{S} \cdot u_1 + \frac{8}{15}\ \mathrm{S} \cdot u_2\right)$

$(R_1 = 5\ \Omega,\ R_2 = 7{,}5\ \Omega,\ R_3 = 3\ \Omega,\ r = 15\ \Omega)$

6. Adott egy kétkapu impedanciakarakterisztikája:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\ \Omega & -20\ \Omega \\ 10\ \Omega & 20\ \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

- Kapcsoljunk a primer kapura egy $U_s = 10\ \mathrm{V}$-os feszültséggenerátort, amelynek a belső ellenállása $R_s = 50\ \Omega$. Számoljuk ki az így kapott hálózat Norton-féle és Thévenin-féle helyettesítő képét!
- Határozzuk meg primer oldali gerjesztés esetén a

$$H_u = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)_R, \quad R_T = \left(\frac{u_2}{i_1}\right)_R, \quad \text{illetve} \quad R_B = \left(\frac{u_1}{i_1}\right)_R, \quad G_B = \left(\frac{i_1}{u_1}\right)_R$$

átviteli, illetve bemeneti mennyiségeket!

- Határozzuk meg szekunder oldali gerjesztés esetén az

$$R_{K,r} = \left(\frac{u_2}{i_2}\right)_{u_1=0}, \quad R_{K,s} = \left(\frac{u_2}{i_2}\right)_{i_1=0}$$

  rövidzárási és üresjárási kimeneti rezisztenciákat!

$$\left(U_T = 2\,\mathrm{V},\ I_N = -\tfrac{1}{12}\,\mathrm{A},\ R = 24\,\Omega\right)$$

$$\left(H_u = \tfrac{R}{20},\ R_T = \tfrac{10R}{R+20}\Omega,\ R_B = \tfrac{200}{R+20}\Omega,\ G_B = \tfrac{1}{R_B}\right)$$

$$\left(R_{K,r} = -\infty\,\Omega,\ R_{K,s} = 20\,\Omega\right)$$