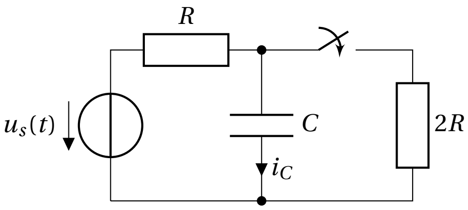
JELEK ÉS RENDSZEREK I (BMEVIHVAA00)
7. gyakorlat

Szerkesztette: Dr. Horváth Péter, BME HVT

2021. április 16.

1. feladat

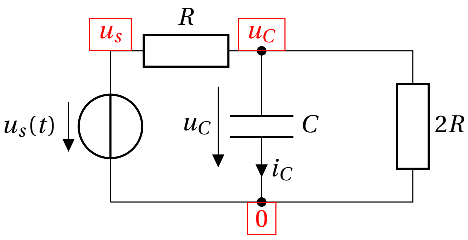
A 1. ábra hálózatában $u_s(t) = U_0$ (egyenfeszültség). Határozzuk meg a kondenzátor bejelölt áramának időfüggvényét, ha a kapcsolót a $t = 0$ időpontban zárjuk!



1. ábra. Az 1. feladat hálózata

1.1. Megoldás összetevőkre bontással

A megoldáshoz szükségünk van az állapotváltozós leírás normálalakjára, amelyet a kapcsoló zárt állására írunk fel, mert a megoldás $t > 0$-ra érdekel bennünket, amikor a kapcsoló zárva van. A hálózat által reprezentált rendszer gerjesztése az $u_s(t)$ forrásfeszültség, aminek helyébe a megoldás során a feladatkitűzésnek megfelelően U_0 egyenfeszültséget fogunk helyettesíteni.



2. ábra. Az 1. feladat hálózata $t > 0$-ra

Legyen az alsó csomópont potenciálja zérus a 2. ábra szerint. Az állapotváltozó a kondenzátor $u_C(t)$ feszültsége az ábrán bejelölt referenciairánnyal. A hálózatban egyetlen ismeretlen csomóponti potenciál van, ami megegyezik u_C-vel. Erre a csomópontra az áramtörvény

$$\frac{u_C - u_s}{R} + Cu'_C + \frac{u_C}{2R} = 0,$$

ahonnan az állapotegyenlet

$$u'_C = -\frac{3}{2RC}u_C + \frac{1}{RC}u_s,$$

míg a válaszra vonatkozó egyenlet

$$i_C = Cu'_C = -\frac{3}{2R}u_C + \frac{1}{R}u_s.$$

Keressük első lépésben az $u_C(t)$ megoldást az összetevőkre bontás módszerével, majd helyettesítsük ezt be a válaszegyenletbe.

1.1.1. A szabad összetevő

A szabad összetevő a

$$u'_{C,f} = -\frac{3}{2RC} u_{C,f}$$

homogén differenciálegyenlet általános megoldása. Elsőrendű esetben azonnal kiolvasható, hogy a sajátérték

$$\lambda = -\frac{3}{2RC},$$

azaz az időállandó

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{3} RC.$$

A szabad összetevő általános alakja

$$u_{C,f} = Me^{\lambda t} = Me^{-t/\tau} = Me^{-\frac{3}{2RC}t},$$

az egyelőre ismeretlen M konstanssal.

1.1.2. A gerjesztett összetevő

A gerjesztett összetevő az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása, ami ebben az esetben a hálózatból is kiolvasható. Ha ugyanis $u_s(t) = U_0$, akkor $t \to \infty$ mellett a hálózat feszültségei és áramai állandósulnak, mert a szabad összetevő aszimptotikusan lecseng. Állandósult állapotban a kondenzátor szakadássá válik, feszültsége egyszerű feszültségosztással a kondenzátor feszültségének végértéke, egyben az inhomogén DE partikuláris megoldása

$$u_{C,g} = U_0 \frac{2R}{2R+R} = \frac{2}{3} U_0.$$

Ugyanez az inhomogén DE-ből is adódik. A gerjesztett megoldás alakja követi a gerjesztést. Esetünkben a gerjesztés konstans (U_0), ezért a gerjesztett összetevő is állandó, deriváltja zérus. Behelyettesítve

$$\underbrace{u'_{C,g}}_{=0} = -\frac{3}{2RC} u_{C,g} + \frac{1}{RC} U_0,$$

ahonnan

$$u_{C,g} = \frac{2}{3} U_0.$$

1.1.3. A kezdeti feltételek érvényesítése

Az előző két pont eredményét kombinálva az állapotváltozó időfüggvénye

$$u_C(t) = u_{C,f}(t) + u_{C,g}(t) = Me^{-\frac{3}{2RC}t} + \frac{2}{3} U_0.$$

A kondenzátor feszültségének kiindulási értéke, mivel a kondenzátor a $t = -0$-ban szakadás, egyszerűen

$$u_C(-0) = U_0.$$

Korlátos gerjesztésről lévén szó, az állapotváltozó folytonos a bekapcsolás pillanatában, ezért

$$u_C(+0) = u_C(-0) = U_0 = M + \frac{2}{3} U_0,$$

ahonnan

$$M = \frac{1}{3} U_0.$$

Az állapotegyenlet megoldása tehát $t > 0$-ra

$$u_C(t) = \frac{1}{3} U_0 e^{-t/\tau} + \frac{2}{3} U_0 = \frac{U_0}{3} \left(e^{-t/\tau} + 2\right), \tau = \frac{2}{3} RC, \ t > 0$$

1.1.4. A válaszjel kifejezése

A válaszegyenletbe helyettesítve az állapotváltozót, a keresett áram

$$i_C(t) = -\frac{3}{2R} u_C + \frac{1}{R} U_0 = -\frac{3}{2R} \frac{U_0}{3} \left(e^{-t/\tau} + 2\right) + \frac{1}{R} U_0 = -\frac{U_0}{2R} e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{2}{3} RC, \quad t > 0$$

1.2. Megoldás a „magic” formulával

Alkalmazzuk az elsőrendű (egytárolós, egyetlen dinamikus elemet, jelen esetben kondenzátort tartalmazó) hálózat tetszőleges áramára, feszültségére érvényes formulát a keresett $i_C(t)$ áramra! Mivel a hálózatban csak passzív komponensek vannak a független forrás mellett, biztosak lehetünk benne, hogy $t \to \infty$ mellett minden feszültség és áram véges végértéket vesz fel. Megállapítottuk, hogy a kapcsoló zárása előtt a kondenzátoron nem folyik áram:

$$i_C(t) = 0, \; t < 0.$$

A $t > 0$-ra, a kapcsoló zárt állapota mellett érvényes viszonyokat kell vizsgálnunk, a továbbiakban ezért a kapcsolót rövidzárral helyettesítjük. A magic formula szerint a kapcsoló zárását követően a kondenzátor áramát leíró általános összefüggés

$$i_C(t) = i_{C,g}(t) + \left[i_C(+0) - i_{C,g}(+0) \right] e^{-t/\tau}, \; t > 0.$$

Itt $i_{C,g}(t) \equiv I_C$ a kondenzátor feszültségének gerjesztett összetevője, ahogy az előző módszernél is kiszámoltuk, megfeleltethető a kondenzátor árama végértékének, ami konstans gerjesztés mellett zérus:

$$i_{C,g}(t) \equiv I_C = 0.$$

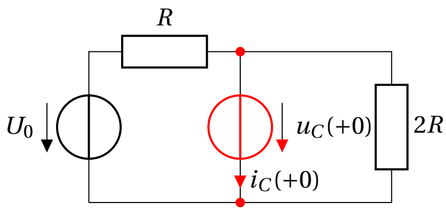
Az exponenciális lecsengés időállandója a kondenzátorra, mint dinamikus elemre csatlakozó dezaktivizált kétpólus R_B eredő ellenállásával számolható. A dezaktivizált kétpólusban a feszültségforrás rövidzár, az R és $2R$ ellenállások párhuzamosan kapcsolódnak, az időállandó

$$\tau = R_B C = (R \times 2R) C = \frac{2}{3} RC.$$

Végül a keresett válasz $i_C(+0)$ kezdeti értékét kell meghatároznunk. A kondenzátor árama nem állapotváltozó, ezért az a kapcsoló zárásának időpontjában ugorhat. A kondenzátor feszültsége viszont állapotváltozó, ezért folytonos a kapcsolás pillanatában. A kapcsoló nyitott állásában

$$u_C(-0) = U_0 = u_C(+0),$$

és a $t = +0$-ban a kondenzátort egy $u_C(+0)$ feszültségű feszültségforrással helyettesíthetjük. A $t = +0$-ban az R ellen-



3. ábra. Az 1. feladat hálózatában a $t = +0$ időpillanatban érvényes rezisztív helyettesítő kép

záson nem folyik áram, mert ekvipotenciális pontok közé csatlakozik,

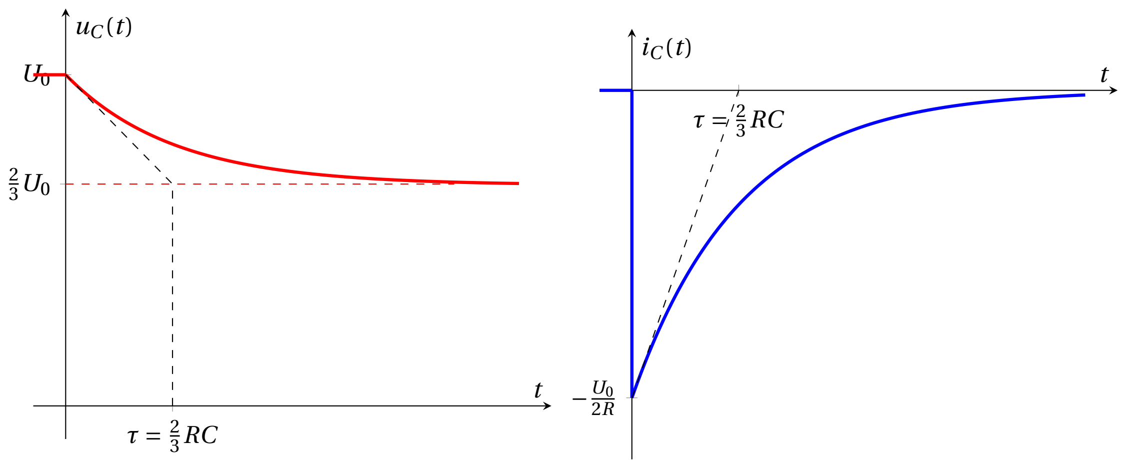
$$i_C(+0) = -\frac{U_0}{2R}.$$

Ezzel a keresett válasz

$$i_C(t) = 0 + \left[-\frac{U_0}{2R} - 0 \right] e^{-t/\tau} = -\frac{U_0}{2R} e^{-t/\tau}, \; \tau = \frac{2}{3} RC, \; t > 0,$$

megegyezik az összetevőkre bontás során kapott eredménnyel. Az állapotváltozó és a válasz időfüggvényeit a 4. ábrán láthatjuk.

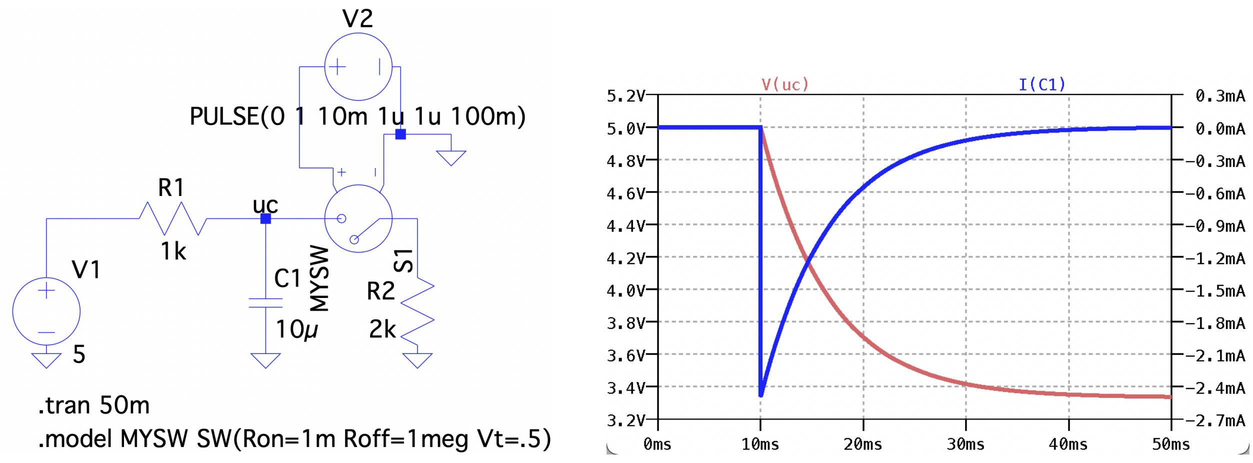
Az eredményeket szimulációval ellenőrizhetjük (5. ábra). A kondenzátor feszültsége $5\tau \approx 30\,\text{ms}$ alatt $U_0 = 5\,\text{V}$-ról $3{,}3\,\text{V}$-ra csökken, a kialakuló negatív előjelű áramtranziens során.



(a) Az $u_C(t)$ időfüggvénye

(b) Az $i_C(t)$ időfüggvénye

4. ábra. Az 1. feladat megoldása



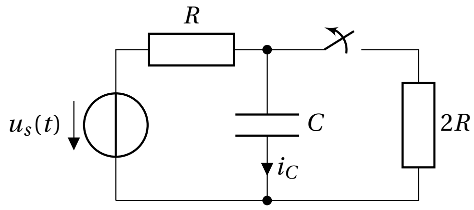
(a) LTSpice hálózat

(b) Piros: $u_C(t)$, kék: $i_C(t)$ időfüggvénye. Ügyeljünk a kettős y-tengelyre!

5. ábra. Az 1. feladat LTSpice-ban. A kapcsolót a $t = 10\,\mathrm{ms}$-ban zárjuk. A megadott elemértékekkel $RC = 10\,\mathrm{ms}$, $\tau = 6{,}67\,\mathrm{ms}$.

2. feladat

A 6. ábra hálózatában $u_s(t) = U_0$ (egyenfeszültség). Határozzuk meg a kondenzátor bejelölt áramának időfüggvényét, ha most a kezdetben zárt kapcsolót a $t = 0$ időpontban nyitjuk!



6. ábra. A 2. feladat hálózata

2.1. Megoldás összetevőkre bontással

2.2. Megoldás a magic formulával

Alkalmazzuk az elsőrendű hálózat tetszőleges áramára, feszültségére érvényes formulát a keresett $i_C(t)$ áramra! Mivel a hálózatban csak passzív komponensek vannak a független forrás mellett, biztosak lehetünk benne, hogy $t \to \infty$ mellett minden feszültség és áram véges végértéket vesz fel. Megállapítottuk, hogy a kapcsoló nyitása előtt a kondenzátoron nem folyik áram:

$$i_C(t) = 0, \; t < 0.$$

A $t > 0$-ra, a kapcsoló nyitott állapota mellett érvényes viszonyokat kell vizsgálnunk, a továbbiakban ezért a kapcsolót szakadással helyettesítjük (a $2R$ ellenállás a hálózatból kiesik). A magic formula szerint a kapcsoló nyitását követően a kondenzátor áramát leíró általános összefüggés

$$i_C(t) = i_{C,g}(t) + \left[i_C(+0) - i_{C,g}(+0)\right] e^{-t/\tau}, \; t > 0.$$

Itt $i_{C,g}(t) \equiv I_C$ a kondenzátor feszültségének gerjesztett összetevője, ahogy az előző módszernél is kiszámoltuk, megfeleltethető a kondenzátor árama végértékének, ami konstans gerjesztés mellett zérus:

$$i_{C,g}(t) \equiv I_C = 0.$$

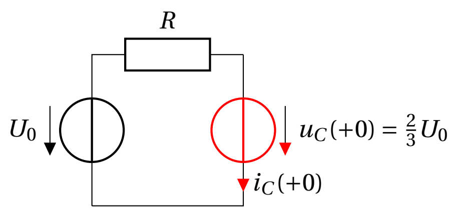
Az exponenciális lecsengés időállandója a kondenzátorra, mint dinamikus elemre csatlakozó dezaktivizált kétpólus R_B eredő ellenállásával számolható:

$$\tau = R_B C = RC.$$

Végül a keresett válasz $i_C(+0)$ kezdeti értékét kell meghatároznunk. A kondenzátor árama nem állapotváltozó, ezért az a kapcsoló nyitásának időpontjában ugorhat. A kondenzátor feszültsége viszont állapotváltozó, az folytonos a kapcsolás pillanatában. A kapcsoló zárt állásában ($t = -0$):

$$u_C(-0) = \frac{2}{3} U_0 = u_C(+0),$$

és a $t = +0$-ban a kondenzátort egy $u_C(+0) = \frac{2}{3} U_0$ feszültségű feszültségforrással helyettesíthetjük. A kép alapján az



7. ábra. Az 2. feladat hálózatában a $t = +0$ időpillanatban érvényes rezisztív helyettesítő kép

áram kezdeti értéke

$$i_C(+0) = \frac{U_0 - \frac{2}{3} U_0}{R} = \frac{U_0}{3R}.$$

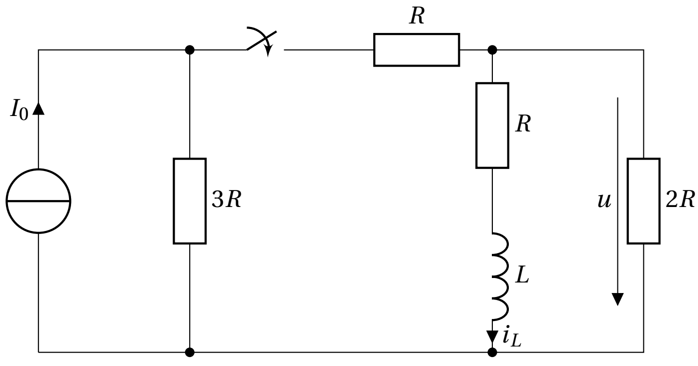
Ezzel a keresett válasz

$$i_C(t) = \frac{U_0}{3R} e^{-t/\tau}, \quad \tau = RC, \quad t > 0,$$

megegyezik az összetevőkre bontás során kapott eredménnyel.

3. feladat

A 8. ábra hálózatában a $t=0$-ban a kapcsolót zárjuk. Adjuk meg a bejelölt u feszültség időfüggvényét!



8. ábra. A 3. feladat hálózata

3.1. Megoldás a magic formulával

A feladatbeli elsőrendű hálózatban nyilvánvalóan alkalmazható az elsőrendű hálózat tetszőleges fezsültségére vagy áramára alkalmazható összefüggés konstans gerjesztésre vonatkozó formája. $t\to\infty$ mellett be fog állni az állandósult állapot. Az u feszültség a kapcsoló zárása előtt zérus (bekapcsolási folyamatról van szó, a kapcsolótól jobbra található hálózatrész energiamentes), a kapcsoló zárását követően pedig az általános kifejezés

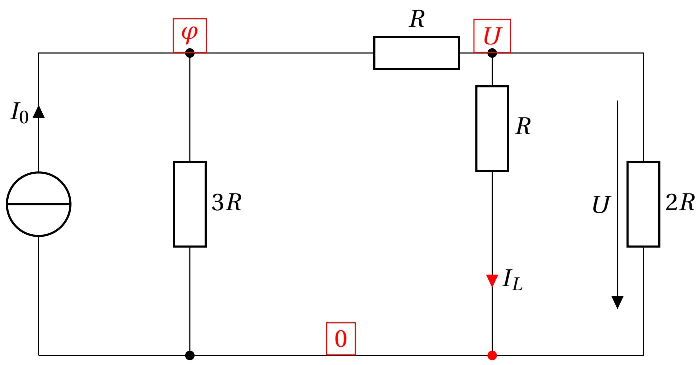
$$u(t)=u_g(t)+\left[u(+0)-u_g(+0)\right]e^{-t/\tau},\quad t>0.$$

3.1.1. A végérték

Konstans gerjesztésről lévén szó, az $u_g(t)$ gerjesztett összetevő (u végértéke) is konstans:

$$u_g(t)\equiv U=\lim_{t\to\infty}u(t)$$

Értéke egyszerű rezisztív helyettesítő képből kapható (9. ábra), mivel állandósult állapotban a tekercs rövidzárral helyettesíthető. A helyettesítő kép alapján U akár ismételt áramosztással, akár általános módszerrel (pl. csomóponti potenciálokkal) számítható. Csomóponti potenciálokkal például



9. ábra. A 3. feladat hálózatának a végértékekre vonatkozó ($t\to\infty$) helyettesítő képe

$$\left.\begin{aligned}\frac{U}{R}+\frac{U}{2R}+\frac{U-\varphi}{R}&=0\\ -I_0+\frac{\varphi}{3R}+\frac{\varphi-U}{R}&=0\end{aligned}\right\}$$

ahonnan

$$u_g(t)\equiv U=\frac{3}{7}RI_0.$$

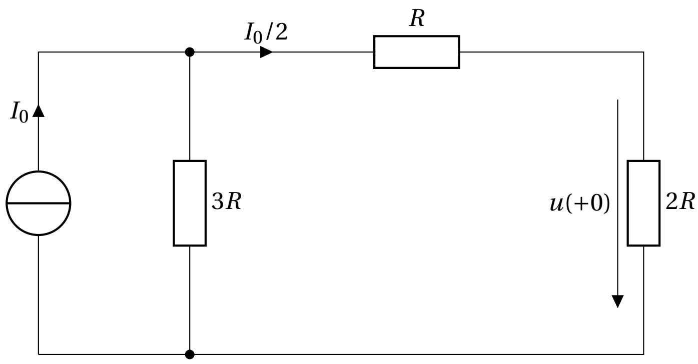
3.1.2. A kezdeti érték

Az $u(+0)$ kezdeti értéket a $t = +0$-ban érvényes rezisztív helyettesítő kép alapján számolhatjuk. Itt figyelembe vesszük, hogy a tekercs $t < 0$-ra energiamentes, ezért árama $t = +0$-ban is zérus, a tekercs $t = +0$-ban szakadással helyettesíthető:

$$i_L(+0) = i_L(-0) = 0.$$

Ezért a soros RL-ágat a $t = +0$-ban figyelmen kívül hagyhatjuk (10. ábra). Mivel mindkét párhuzamos ág ellenállása $3R$, az I_0 áram egyenlő arányban oszlik meg a két ág között, és

$$u(+0) = \frac{I_0}{2} \cdot 2R = RI_0.$$



10. ábra. A 3. feladat hálózatának a kezdeti ($t = +0$) értékre vonatkozó helyettesítő képe. A tekercs szakadás.

3.1.3. Az időállandó

A τ időállandót a tekercsre csatlakozó kétpólust dezaktivizálva, annak eredő ellenállása segítségével számolhatjuk. Az áramforrás dezaktivizálva szakadás, a tekercs kapcsai felől nézett eredő ellenállás

$$R_B = R + (2R) \times (R + 3R) = R + \frac{2R \cdot 4R}{2R + 4R} = \frac{7}{3}R,$$

az időállandó pedig

$$\tau = \frac{L}{R_B} = \frac{3L}{7R}.$$

Ezzel mindhárom keresett értéket megkaptuk, az u időfüggvényébe helyettesítve az eredmény

$$u(t) = u_g(t) + \left[u(+0) - u_g(+0)\right] e^{-t/\tau}$$

$$u(t) = \frac{3}{7}RI_0 + \left[RI_0 - \frac{3}{7}RI_0\right] e^{-t/\tau} = \frac{3}{7}RI_0 \left[1 + \frac{4}{3}e^{-t/\tau}\right], \quad \tau = \frac{3L}{7R}, \quad t > 0$$

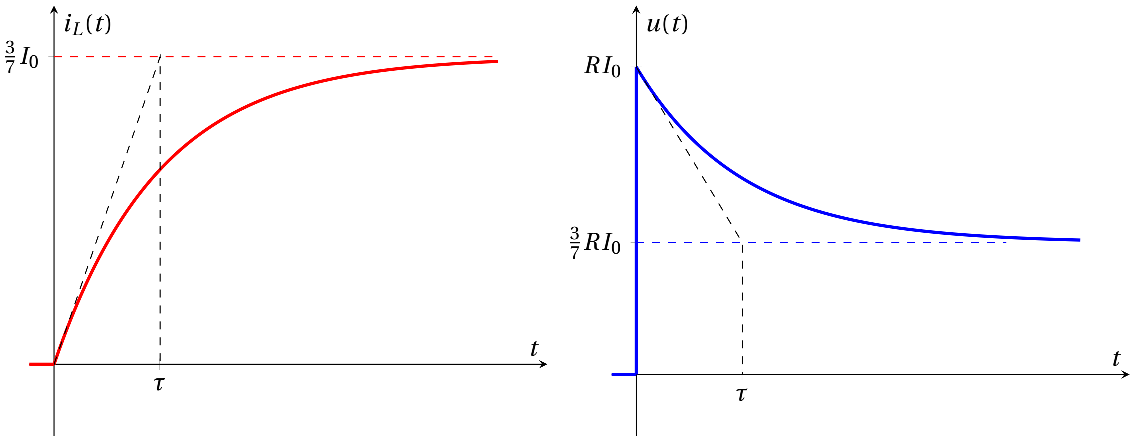
A megoldást a 11. ábrán ábrázoltuk.

3.2. Megoldás összetevőkre bontással

Az ÁVL felírása valamivel számításigényesebb, mint az előző pontbeli közvetlen számítás[1]. A kapcsoló zárt állása mellett, általános $i_s(t)$ forrásáram mellett írjuk fel az ÁVLNA-t (12. ábra, amelyben csomóponti potenciálokat is bejelöltünk). A tekercs feszültsége Li_L', ezért a felső kapcsának a potenciálja is ekkora. Az áramtörvények fundamentális rendszere három egyenletből áll, de ebből az egyik (az RL közös csomópontra vonatkozó) triviális, és már ki is használtuk, amikor a felső csomópont potenciálját kifejeztük vele. A másik két nem triviális áramtörvény:

$$\left.\begin{aligned} Ri_L + Li_L' &: \frac{Ri_L + Li_L' - \varphi}{R} + \frac{Ri_L + Li_L'}{2R} + i_L = 0 \\ \varphi &: -i_s + \frac{\varphi}{3R} + \frac{\varphi - Ri_L - Li_L'}{2R} = 0 \end{aligned}\right\}$$

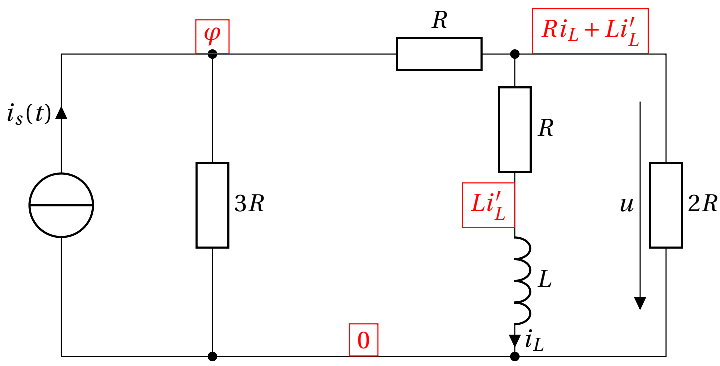
[1]A gerjesztő Norton-generátort az ekvivalens Thévenin-generátorává alakítva jelentősen egyszerűsödik a felírás, de mi itt az eredeti hálózattal számolunk tovább.



(a) Az $i_L(t)$ időfüggvénye

(b) Az $u(t)$ időfüggvénye

11. ábra. A 3. feladat megoldása. $\tau = \frac{3L}{7R}$



12. ábra. A 3. feladat hálózatában az ÁVLNA felírásához használt jelölések

Az egyenletrendszer megoldásával kapjuk az állapotegyenlet normálalakját:

$$i_L' = -\frac{7R}{3L}i_L + \frac{R}{L}i_s,$$

a válasz pedig

$$u = Ri_L + Li_L',$$

amibe az i_L'-ra vonatkozó egyenletet be kell helyettesítenünk, hogy normálalakú válaszegyenletet kapjunk:

$$u = -\frac{4}{3}Ri_L + Ri_s.$$

Az egyenletrendezést a Matlab szimbolikus egyenletmegoldójával is elvégezhetjük:

```
>> syms R L il ild fi is
>> eq1 = (R*il + L*ild - fi)/R + (R*il + L*ild)/(2*R) + il == 0;
>> eq2 = -is + fi/(3*R) + (fi - R*il - L*ild)/R == 0;
>> [solild, solfi] = solve([eq1, eq2], [ild, fi])
solild =

-(R*(7*il - 3*is))/(3*L)
```

3.2.1. Az ÁVLNA megoldása

Ezek után oldjuk meg az eredeti feladatot (a kapcsolót $t = 0$-ban zárjuk, és $i_s(t) = I_0$). Az állapotváltozó időfüggvényét $t > 0$-ra összetevőkre bontással keressük:

$$i_L(t) = i_{L,f}(t) + i_{L,g}(t)$$

1. A szabad összetevő az inhomogén állapotegyenlet megoldása:

$$i_{L,f}' = -\frac{7R}{3L}i_{L,f},$$

aminek megoldása a

$$\lambda = -\frac{7R}{3L}$$

sajátértékkel, illetve a

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} = \frac{3L}{7R}$$

időállandóval kifejezhető

$$i_{L,f}(t) = Me^{-\frac{7R}{3L}t} = Me^{-t/\tau},$$

az egyelőre ismeretlen M valós konstanssal.
2. A gerjesztett összetevő a hálózati modellből kiolvasható, $t \to \infty$ mellett a konstans gerjesztés miatt beáll az állandósult állapot, a tekercs rövidzárrá válik, árama a gerjesztett összetevő, $i_{L,g} \equiv I_L$. Ez ismételt áramosztással számolható lenne, de ebben az esetben valamivel egyszerűbb az inhomogén rendszeregyenletbe helyettesítve számolni. A gerjesztett összetevő kielégíti az inhomogén DE-t, amelyben $i_s(t) \equiv I_0$:

$$\underbrace{i'_{L,g}}_{=0} = -\frac{7R}{3L} i_{L,g} + \frac{R}{L} I_0,$$

ahonnan

$$i_{L,g} = \frac{3}{7} I_0.$$

3. A kezdeti feltételek érvényesítése. A tekercs árama $t > 0$-ra az első két lépés alapján

$$i_L(t) = Me^{-\frac{7R}{3L}t} + \frac{3}{7} I_0.$$

A probléma bekapcsolási folyamat,

$$i_L(-0) = 0,$$

az állapotváltozóra vonatkozó folytonossági feltétel miatt $i_L(+0) = i_L(-0) = 0$. Ezt a kezdeti feltételt érvényesítve

$$i_L(+0) = M + \frac{3}{7} I_0 = 0,$$

ahonnan

$$M = -\frac{3}{7} I_0,$$

a megoldás pedig

$$i_L(t) = -\frac{3}{7} I_0 e^{-\frac{7R}{3L}t} + \frac{3}{7} I_0 = \frac{3}{7} I_0 \left[1 - e^{-t/\tau}\right], \quad t > 0$$

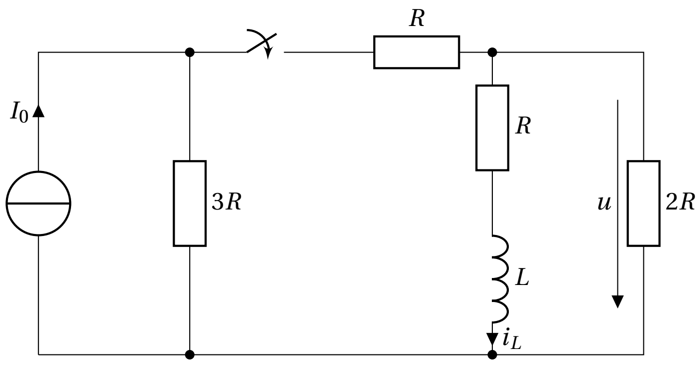
A válaszegyenletbe helyettesítve a megoldás

$$u = -\frac{4}{3} R i_L + R i_s = -\frac{4}{3} R \cdot \frac{3}{7} I_0 \left[1 - e^{-t/\tau}\right] + R I_0 = \frac{3}{7} R I_0 \left[1 + \frac{4}{3} e^{-t/\tau}\right], \quad \tau = \frac{3L}{7R}, \quad 0 < t < \infty,$$

ami megegyezik a másik módszerrel kapott eredménnyel.

4. feladat

A 13. ábra hálózatában a $t = 0$-ban a kapcsolót zárjuk, majd T idő elteltével ismét nyitjuk. Mekkora a bejelölt u feszültség ugrása a $t = T$ pillanatban?



13. ábra. A 4. feladat hálózata

Az előző feladatban meghatároztuk az u formuláját a kapcsoló zárása után. Mivel most $t = T$-ben nyitjuk a kapcsolót, a formula csak a $0 < t < T$ intervallumban érvényes, nevezzük ezt 1. szakasznak:

$$u(t) = \frac{3}{7}RI_0\left[1 + \frac{4}{3}e^{-t/\tau}\right], \quad \tau = \frac{3L}{7R}, \quad 0 < t < T$$

A $t = T$ időpillanatban a kapcsolót nyitjuk. Ekkor egy második tranziens indul el, amelyben szintén értelmezhető a kiindulási ($t = T - 0$-beli) és a kezdeti ($t = T + 0$-beli) érték. A formulával ki tudjuk számolni u értékét a kapcsoló újranyitását megelőző ($t = T - 0$) pillanatban. Ez lesz a 2. szakaszra ($T < t < \infty$) vonatkozó kiindulási érték:

$$u(T-0) = \frac{3}{7}RI_0\left[1 + \frac{4}{3}e^{-T/\tau}\right], \quad \tau = \frac{3L}{7R}.$$

Azonban az 1. és a 2. szakaszt az állapotváltozó értékének folytonossága köti össze egymással. Ezért mindenképpen szükségünk van az állapotváltozó, a tekercsáram értékére a $t = T - 0$-ban (ez az első szakasz végértéke, egyben a 2. szakaszra vonatkozó kiindulási érték). Mivel a gerjesztés a $t = T$-ben is véges, az állapotváltozó itt sem ugrik, ezért a 2. szakaszra vonatkozó kezdeti érték

$$i_L(T+0) = i_L(T-0),$$

majd ez alapján tudjuk a válasz kezdeti értékét is meghatározni. Az előző feladatban kiszámítottuk az állapotváltozó időfüggvényét az első szakaszra (ott csak egy szakaszról volt szó). Ez most csak a $0 < t < T$-re érvényes, mert $t = T$-ben ismét nyitjuk a kapcsolót, és a rendszert már egy másik ÁVL jellemzi. Az 1. szakaszra vonatkozó összefüggést megismételjük:

$$i_L(t) = \frac{3}{7}I_0\left[1 - e^{-t/\tau}\right], \quad \tau = \frac{3L}{7R}, \quad 0 < t < T$$

Az állapotváltozó kezdeti értéke a második szakaszban

$$i_L(T+0) = i_L(T-0) = \frac{3}{7}I_0\left[1 - e^{-T/\tau}\right].$$

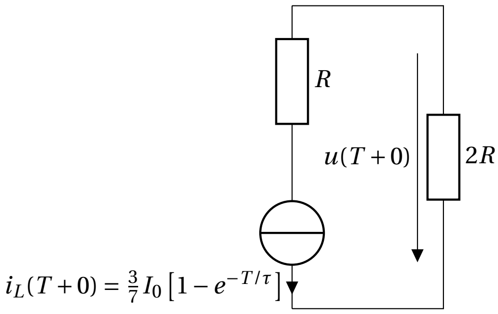
A $t = T + 0$-ban is alkothatunk egy rezisztív helyettesítő képet, amelyben a tekercset (a kapcsoló nyitott állása mellett) egy áramforrással helyettesítjük. A kapcsoló nyitott, ezért a keresett válasz szempontjából csak a kapcsolótól jobbra eső hálózatrészt kell figyelembe venni, amiben a középső R ellenállás egyik pólusa is „lóg", ezért azt is elhagyjuk (14. ábra). Ebben a szakaszban a hálózat gerjesztetlen, a tekercsben tárolt energia hajtja. A helyettesítő kép alapján

$$u(T+0) = -2Ri_L(+0) = -2R\frac{3}{7}I_0\left[1 - e^{-T/\tau}\right]$$

Az u feszültség ugrása a $t = T$-ben

$$u(T+0) - u(T-0) = -\frac{6}{7}RI_0\left[1 - e^{-T/\tau}\right] - \frac{3}{7}RI_0\left[1 + \frac{4}{3}e^{-T/\tau}\right]$$

$$\underline{\underline{u(T+0) - u(T-0) = -\frac{9}{7}RI_0\left[1 - \frac{2}{9}e^{-T/\tau}\right], \quad \tau = \frac{3L}{7R}}}$$



14. ábra. A 4. feladatban a $t = T$-ra (a kapcsoló újranyitása pillanatában) érvényes rezisztív helyettesítő kép

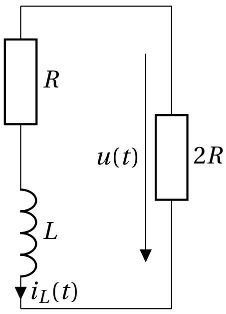
Végül a magic formulával könnyen kiszámíthatjuk nemcsak az u ugrását, hanem az u teljes időfüggvényét a 2. szakaszra, ha a t helyére $t-T$-t helyettesítünk (15. ábra):

$$u(t) = U_g + \left[u(T+0) - U_g\right] e^{-(t-T)/\tau_0},$$

ahol $U_g = 0$, mert a gerjesztetlen hálózatban u végértéke biztosan nulla, τ_0 pedig a kapcsoló nyitott állása mellett érvényes időállandó, amit a tekercsre csatlakozó kétpólust dezaktivizálva, annak belső ellenállásával számolunk:

$$\tau_0 = \frac{L}{R_{B,0}} = \frac{L}{3R}.$$

Így a második szakaszra a válasz



15. ábra. A 4. feladatbeli hálózat a 2. szakaszban ($T < t < \infty$), a kapcsoló nyitott állapotában. A hálózat időállandója $\tau_0 = L/3R$.

$$u(t) = u(T+0)e^{-(t-T)/\tau_0}$$

$$u(t) = -\frac{6}{7}RI_0\left[1-e^{-T/\tau}\right]e^{-(t-T)/\tau_0}, \quad \tau_0 = \frac{L}{3R}, \quad T < t < \infty$$

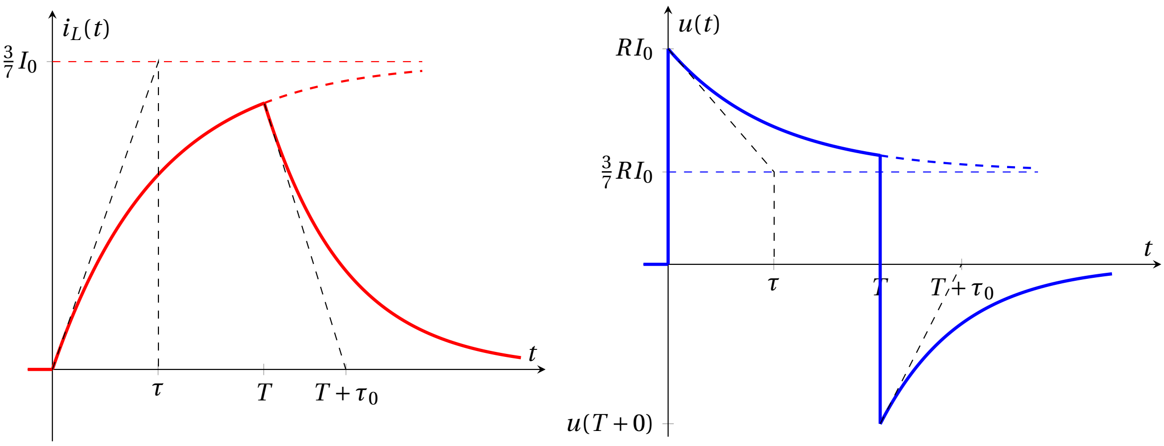
Figyeljük meg, hogy a 2. szakaszra érvényes formulákban az 1. szakaszban érvényes időállandó is megjelenik, mert az 1. szakaszbeli előélet határozza meg a 2. szakaszra vonatkozó kezdeti feltételt. Felírhatjuk a 2. szakaszra az állapotváltozó időfüggvényét is a magic formulával:

$$i_L(t) = I_L + [i_L(T+0) - I_L]\, e^{-(t-T)/\tau_0},$$

ahol I_L a tekercs áramának gerjesztett összetevője, nyilvánvalóan szintén nulla, mert a hálózat a második szakaszban gerjesztetlen. Ezért

$$i_L(t) = i_L(T+0)e^{-(t-T)/\tau_0} = \frac{3}{7}I_0\left[1-e^{-T/\tau}\right]e^{-(t-T)/\tau_0}, \quad \tau_0 = \frac{L}{3R}, \quad T < t < \infty$$

Az időfüggvényeket példaképpen a $T = 2\tau$ választás mellett a 16. ábrán láthatjuk.



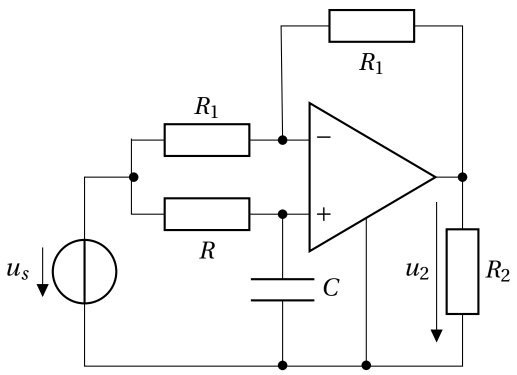
(a) Az $i_L(t)$ időfüggvénye (b) Az $u(t)$ időfüggvénye

16. ábra. A 4. feladat megoldása, ha a kapcsolót $T = 2\tau$-ban nyitjuk újra. $\tau = \frac{3L}{7R}$, $\tau_0 = \frac{L}{3R}$

5. feladat

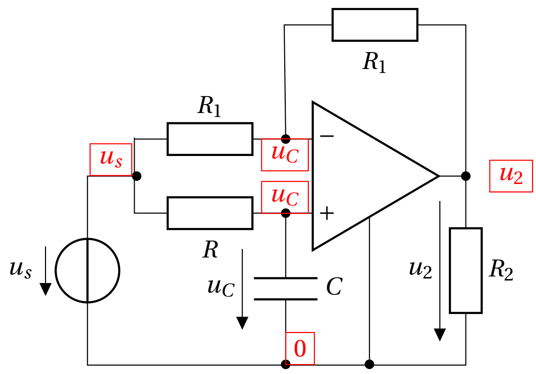
A 17. ábra hálózatában a gerjesztés az u_s forrásfeszültség, a válasz a bejelölt u_2 feszültség. Határozzuk meg a válaszjel időfüggvényét, ha

$$u_s(t) = U_0\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U_0, & t > 0 \end{cases}$$



17. ábra. A 5. feladat hálózata

Írjuk fel az állapotváltozós leírás normálalakját a 18. ábrán felvett csomóponti potenciálok segítségével!



18. ábra. Csomóponti potenciálok az 5. feladat hálózatában

A neminvertáló bemenetre vonatkozó áramtörvény:

$$\frac{u_C - u_s}{R} + Cu_C' = 0,$$

amiből közvetlenül adódik a normálalakú állapotegyenlet:

$$u_C' = -\frac{1}{RC}u_C + \frac{1}{RC}u_s.$$

Az invertáló bemenetre vonatkozó áramtörvény

$$\frac{u_C - u_s}{R_1} + \frac{u_C - u_2}{R_1} = 0,$$

amiből rendezéssel adódik a normálalakú válaszra vonatkozó egyenlet:

$$u = 2u_C - u_s.$$

Az egyenletek függetlenek R_1 és R_2 értékétől is.
Oldjuk meg az állapotegyenletet a megadott gerjesztésre!
1. A HDE megoldása

$$u_{C,f}(t) = Me^{-t/\tau}, \quad \tau = RC$$

az egyelőre ismeretlen M konstanssal. A sajátérték

$$\lambda = -\frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$$

mindig negatív (ha $R > 0$), ezért a rendszer aszimptotikusan stabil, a sajátválasz exponenciálisan lecsengő. u_C gerjesztett összetevőjét, $u_{C,g}$-t a hálózatból is kiolvashatjuk: a forrásfeszültség állandó U_0, a kondenzátor állandósult állapotban szakadássá válik, és mivel az erősítő bemenetén nem folyik áram, a neminvertáló bemenet potenciálja egyenlő a forrásfeszültséggel,

$$u_{C,g} = U_0.$$

Természetesen az inhomogén DE megoldásával is ugyanezt kapnánk.
3. A kezdeti feltétel érvényesítése: mivel bekapcsolási jelenségről van szó, a $t = -0$-ban a rendszer energiamentes. Az álapotváltozó folytonossága miatt

$$u_C(+0) = u_C(-0) = 0,$$

a kezdeti feltételt érvényesítve

$$u_C(+0) = M + U_0 = 0,$$

ahonnan

$$M = -U_0.$$

Ezzel az állapotváltozó időfüggvénye

$$u_C(t) = -U_0e^{-t/\tau} + U_0 = U_0\left[1 - e^{-t/\tau}\right], \quad \tau = RC, \quad 0 < t < \infty.$$

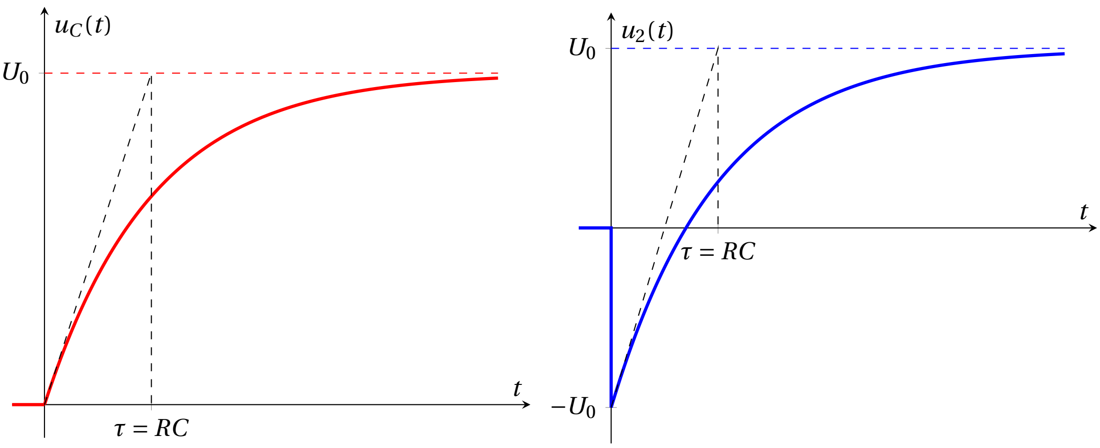
4. A válaszegyenletbe helyettesítve a keresett $u_2(t)$ válaszjel

$$u_2(t) = 2u_C - U_0$$

$$\underline{\underline{u_2(t) = U_0\left[1 - 2e^{-t/\tau}\right], \quad \tau = RC, \quad 0 < t < \infty.}}$$

Az időfüggvények a 19. ábrán, az LTSpice szimuláció a . ábrán láthatók[2].

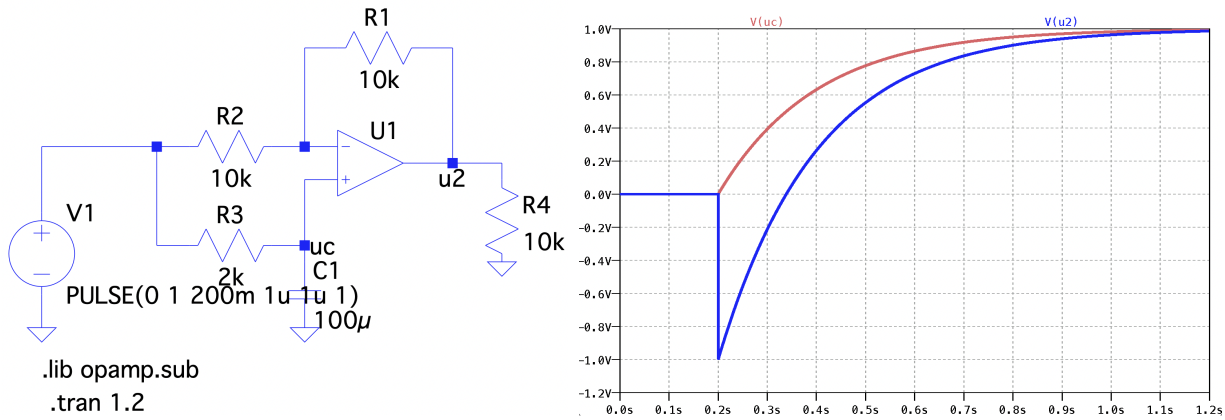
[2] Az erősítő szimulációjánál ügyelni kell, hogy az LTSpice `opamp` modellje nem rezisztív (úgy viselkedik, mintha a kimeneti kétpólusra egy RC-tag is csatlakozna, amivel a valódi műveleti erősítő véges sávszélességét modellezik). Azonban a saját időállandója alapértelmezett beállításokkal mikroszekundum nagyságrendbe esik. A `GBW` paraméter értékének növelésével ez az időállandó tetszés szerint csökkenthető, azonban a példában látható elemértékek mellett olyan nagy időállandó adódik, amelynél az erősítő rezisztívnek tekinthető.



(a) Az $u_C(t)$ időfüggvénye

(b) Az $u_2(t)$ időfüggvénye

19. ábra. Az 5. feladat megoldása



(a) Az $u_C(t)$ időfüggvénye

(b) Az $u_2(t)$ időfüggvénye

20. ábra. Az 5. feladat szimulációja LTSpice-al. A megadott elemértékek mellett $\tau = RC = 200\,\mathrm{ms}$.