Traveling Salesman Problem

Úloha z předmětu Geoinformatika

Autor: Bc. Alexandra Plachtová
Zadavatel: Doc. Ing. Tomáš Bayer, Ph.D.
KAGIK UK, 2022

Zadání úlohy

Vstup: množina uzlů U reprezentujících body

Výstup: nalezení nejkratší Hamiltonovské kružnice mezi těmito uzly.

Nad množinou U nalezněte nejkratší cestu, která vychází z libovolného uzlu, každý z uzlů navštíví pouze jedenkrát, a vrací se do uzlu výchozího. Využijte níže uvedené metody konstrukčních heuristik:

- Nearest Neighbor
- Best Insertion

Výsledky porovnejte s výstupem poskytovaným nástrojem Network Analyst v SW ArcMap.

Otestování proveďte nad dvěma zvolenými datasety, které by měly obsahovat alespoň 100 uzlů. Jako vstup použijte existující geografická data (např. města v ČR s více než 10 000 obyvateli, evropská letiště, ...), ohodnocení hran bude představovat vzdálenost mezi uzly (popř. vzdálenost měřenou po silnici); pro tyto účely použijte vhodný GIS.

Výsledky s uvedením hodnot W, k, uspořádejte do přehledné tabulky (metodu Best Insertion nechte proběhnout alespoň 10x), a zhodnoťte je.

Pro implementaci obou konstrukčních heuristik použijte programovací jazyk Python, vizualizaci výstupů proveďte ve vhodné knihovně, např. matplotlib.

Popis problému

Problém obchodního cestujícího (Travelling salesman problem) je úloha kombinatorické optimalizace, jejíž cílem je nalézt v zadaném ohodnoceném úplném grafu kružnici takovou, že prochází všemi vrcholy a zároveň je její cena minimální. Jinými slovy se jedná o nalezení nejkratší hamiltonovské kružnice v ohodnoceném grafu.

V dané zemi existuje mnoho měst, mezi všemi městy je postavené silnice. Cílem obchodního cestujícího je objet všechna města takovým způsobem, aby cena za jízdenky byla minimální (odpovídá vzdálenosti měst) a vrátit se do výchozího města.

Problém je NP-úplný a silně NP-obtížný, což znamená, že pokud platí $P \neq NP$, pak pro problém obchodního cestujícího neexistuje žádný polynomiální k-aproximační algoritmus – neexistuje polynomiální algoritmus, který by našel libovolné řešení, které je nejhůře k-násobkem optimálního řešení.

Pomocí celočíselného lineárního programování lze problém asymetrického obchodního cestujícího (tzn. hrany $A \to B$ a $B \to A$ nemusejí mít stejnou váhu) formulovat jako:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \cdot c_{ij}$$

Za podmínek:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j \in \{1, \cdots, n\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i \in \{1, \cdots, n\}$$

$$s_i + c_{ij} - (1 - x_{i,j}) \cdot M \leq s_j \qquad i \in \{1, \cdots, n\} \;\; j \in \{2, \cdots, n\}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

První dvě podmínky zaručují, že daný uzel bude navštíven právě jednou, třetí podmínka zajišťujě nedělitelnost výsledné hamiltonovské kružnice (Problém obchodního cestujícího, 2015).

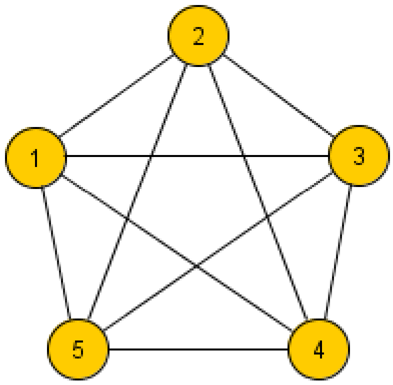
Graf
Grafem nazýváme uspořádanou trojici uzlů, hran a incidencí. Zobrazení incidence přiřazuje dvojici uzlů právě jednu hranu.

Neorientovaný graf

V případě, kdy incidence přiřazuje hraně neuspořádanou dvojici uzlů, nazýváme graf neorientovaným grafem.

Neorientovaný graf, který neobsahuje rovnoběžné hrany, nazýváme prostým grafem, v opačném případě multigrafem. V případě neexistence smyček (hrana z uzlu X zpět do uzlu X) se jedná o prostý graf bez smyček (obyčejný graf).

Speciálními případy grafu jsou diskrétní grafy, které neobsahují žádné hrany (pouze izolované uzly), prázdný graf neosahující žádné uzly a úplný obyčejný graf (Kx), jenž obsahuje $\binom{U}{2}$ hran a U uzlů (mezi každými dvěma uzly existuje hrana) (Obr. 1).



Obrázek 1: Graf (K5)

Stupeň uzlu grafu (δ) je počet hran incidujících s daným uzlem. Součet stupňů uzlů je roven

$$\sum_{u\in U} \delta(u) = 2|H|$$

dvojnásobku počtu hran.

Hamiltonovské cesty a kružnice

Hamiltonovská cesta v grafu *G* je cesta, která obsahuje každý uzel grafu *G* právě jednou.

Hamiltonovská kružnice (cyklus) v grafu G je kružnice (cyklus), která prochází každým uzlem grafu, u které je počáteční a koncový uzel totožný (Demel, J., 1982).

Typy úloh:

1. Najít Hamiltonovskou kružnici (cyklus) - (úloha obchodního cestujícího).
2. Najít Hamiltonovskou cestu (mezi libovolnými dvěma uzly).
3. Najít Hamiltonovskou cestu, jejíž krajní uzel je fixován.
4. Najít Hamiltonovskou cestu, jejíž oba krajní uzly jsou fixovány.

Rozhodovací strom

Používá se pro jednoduché úlohy. V každém uzlu rozhodujeme, kam jít dál, ale nesmíme se vrátit do uzlu, ve kterém jsme byli.

Postup hledání minimální cesty v neorientovaném grafu:

Graf musí být ohodnocený, neorientovaný, bez číslování uzlů.

1. Označíme počáteční uzel číslem nula.

2. V každém dalším kroku budeme ohodnocovat neohodnocené uzly, které jsou spojeny hranami s již ohodnocenými uzly a to tak, že je hodnotíme podle vztahu

$$U(t_j) = \min\left[U(t_i) + t_{ij}\right]$$

kde je: $U(t_i)$ - hodnota ohodnoceného uzlu,

t_{ij} – hodnota hrany mezi ohodnoceným $[U(t_i)]$ a neohodnoceným $[U(t_j)]$ uzlem.

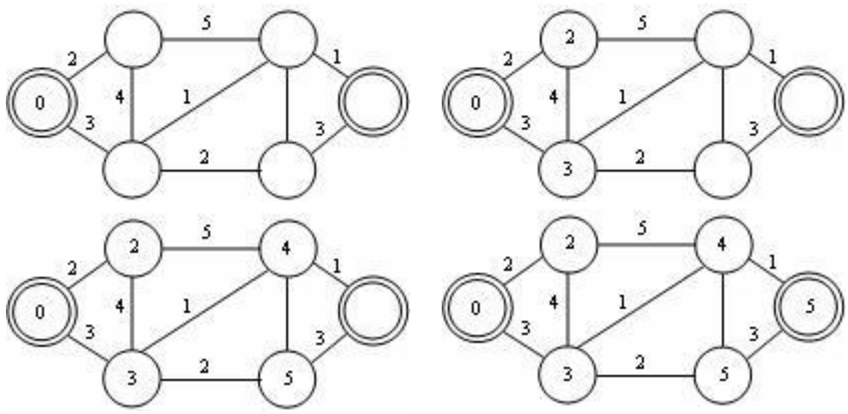
3. Hodnota koncového uzlu nám dává hodnotu minimální cesty

4. Hrany, které leží na minimální cestě určíme podle vztahu

$$t_{ij} = \left[U(t_j) - U(t_i)\right]$$

směrem od posledního uzlu k prvnímu.

Platí, že rozdíl hodnot sousedících uzlů musí být hodnota hrany (Metoda minimální cesty).



Obrázek 2: Postup ohodnocování uzlů

Řešení úlohy

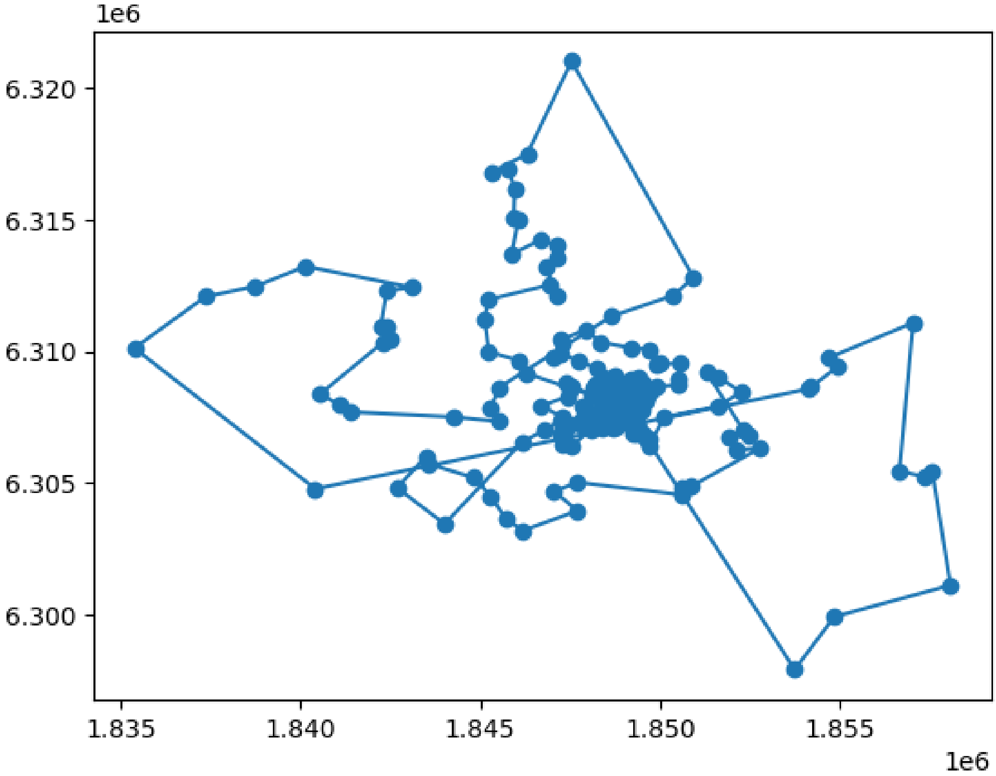
V souladu se zadáním byla úloha řešena dvěma možnými algoritmy:

- Nearest Neighbor
- Best Insertion

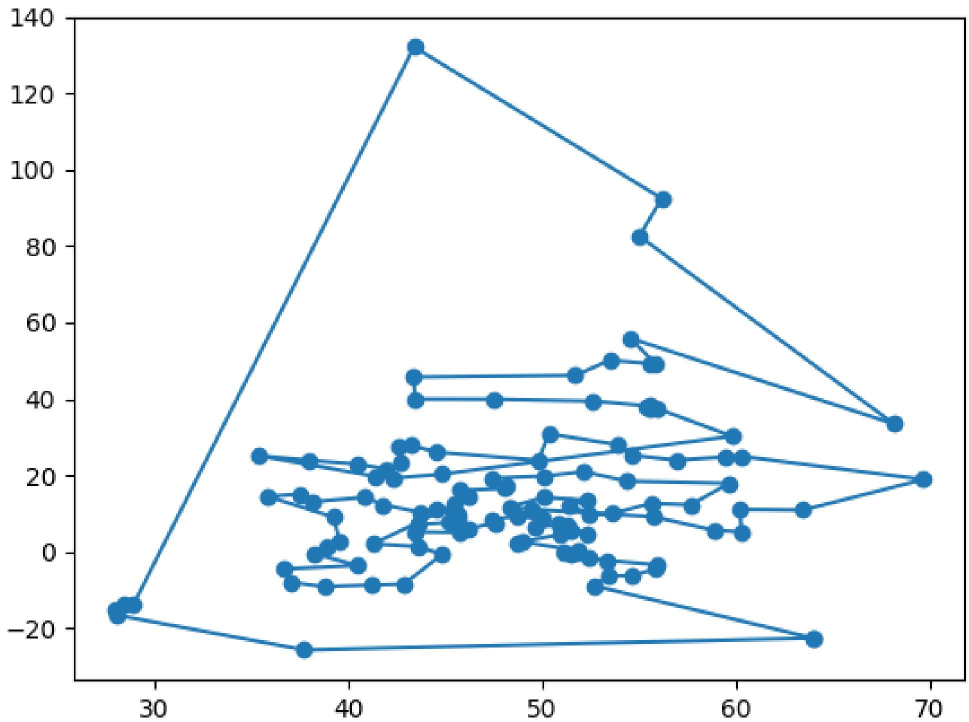
Nearest Neighbor

Jedná se o nejjednodušší konstrukční heuristiku použitelnou pro řešení problému obchodního cestujícího. Princip napsaného skriptu:

- Libovolný uzel u bude označen jako ‚O' (otevřený) a je přidán do listu výsledné Hamiltonovské kružnice.
- Od tohoto uzlu u jsou euklidovsky vypočteny vzdálenosti ke všem nejbližším uzlům a je vybrán ten uzel, který má od uzlu u nejmenší vzdálenost. Ten se opět označí jako ‚O' a nová vzdálenost je pak přidána k celkové délce dosavadní Hamiltonovské kružnice.
- Původní uzel u je nahrazen novým nalezeným nejbližším uzlem v a celý proces se opakuje, dokud existují ještě nějaké ‚N' uzle (neotevřené).
- Zakončení výpočtu vzdálenosti závisí na uzavření Hamiltonovské kružnice přidáním startovního uzlu a je připočtena poslední vzdálenost koncového a počátečního uzlu.



Obrázek 4: Výsledný plot NN algoritmu nad daty brno.csv



Obrázek 3: Výsledný plot NN algoritmu nad daty airports.csv

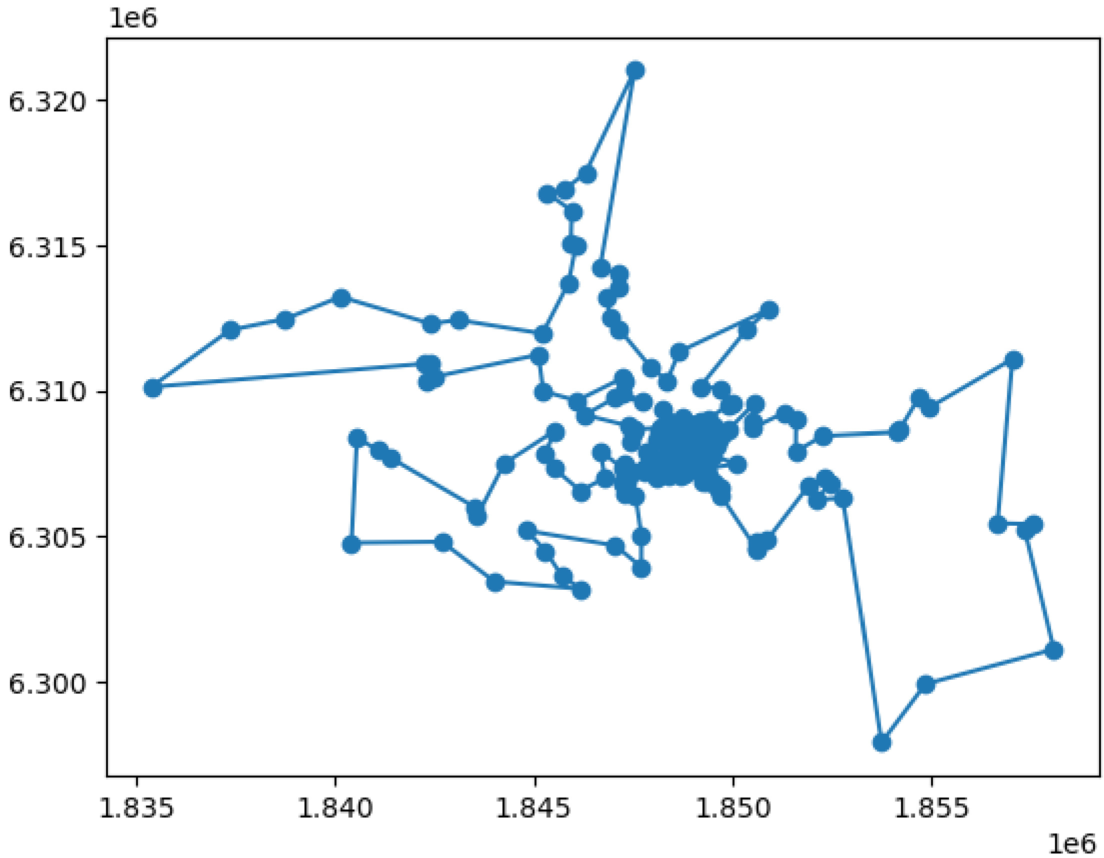
Best Insertion

Další algoritmus použitý k splnění úlohy obchodního cestujícího je Best Insertion. BI představuje vylepšení předchozí metody. Snaží se neustále udržovat Hamiltonovskou kružnici tvořenou $i - 1$ uzly grafu G, kterou rozšiřuje v každém okamžiku přidáním vhodného uzlu tak, aby minimalizovala přírůstek ohodnocení cesty Δw. Minimalizační kritérium vychází z trojúhelníkové nerovnosti. Princip napsaného skriptu:

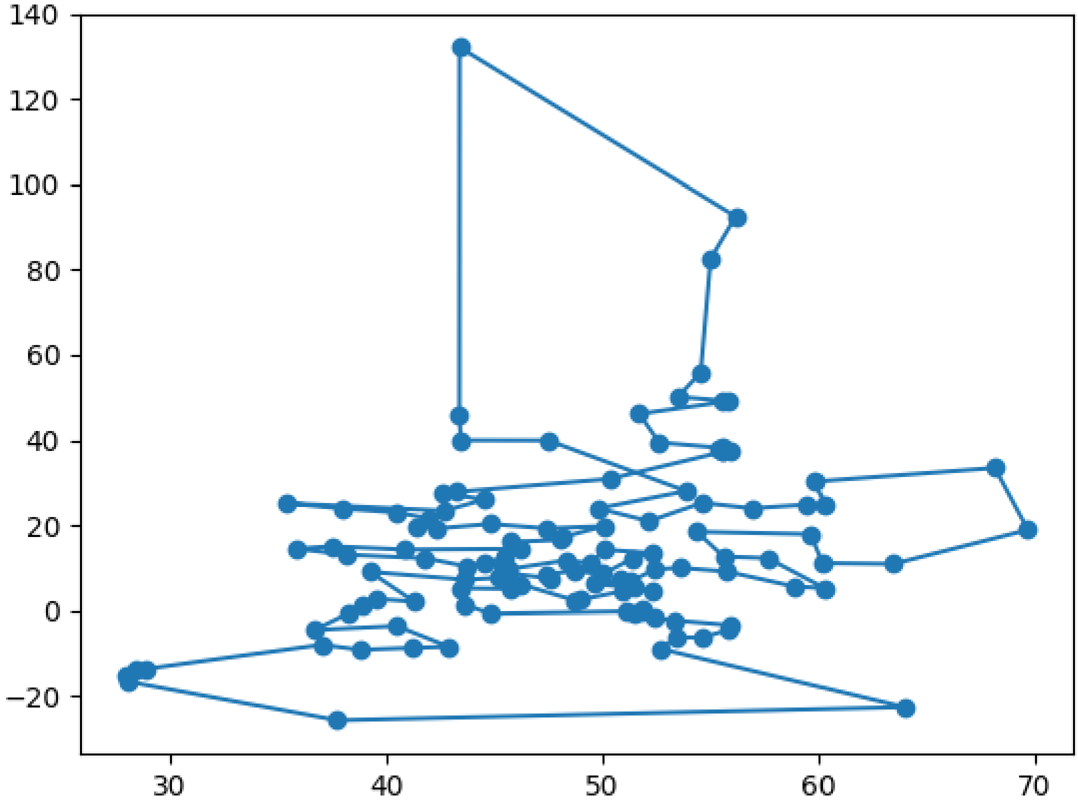
- Vyberou se tři náhodné body, které vytvoří prvotní inicializační kružnici, pro kterou je vypočítána její váha. Tyto tři body se označí ‚O' (otevřené).
- Body jsou stejně jako v minulém případě přidány do listu, který určuje Hamiltonovskou kružnici.
- Vybere se náhodný uzel u, který je do inicializační kružnice přidán tak, aby by zvětšil její váho o co nejméně (trojúhelníková nerovnost).

```
dist = sqrt((C[start[i]][0]-C[start[i+1]][0])**2 + (C[start[i]][1]-C[start[i+1]][1])**2)
```

- Zmíněný nový náhodný uzel je po splnění podmínky označen opět jako ‚O'. Pokračuje se až do té doby, dokud neexistuje žádný nenavštívený uzel.
- Kružnice je uzavřena stejně jako u NN algoritmu, je přidán startovní bod.



Obrázek 5: Výsledný plot BI algoritmu nad daty brno.csv



Obrázek 6: Výsledný plot BI algoritmu nad daty airports.csv

Data, výsledky, výstupy

K testování algoritmů byly vybrány dvě datové bodové sady ve formě csv souboru.

- brno.csv, obsahující POI body v krajském městě Brně
- airports.csv, obsahující významná evropská letiště

Soubor brno.csv obsahoval 266 bodů a airports.csv 118 bodů.

Jelikož je metoda Best Insertion nedertministická, pokaždé vyjde jinak, více v Tab. 1. Z toho důvodu proběhlo při testování deset jednotlivých průběhů algoritmů, z kterých pak do následujích porovnávacích analýz byly vybrány průměrné hodnoty z každého datasetu.

Tab. 1

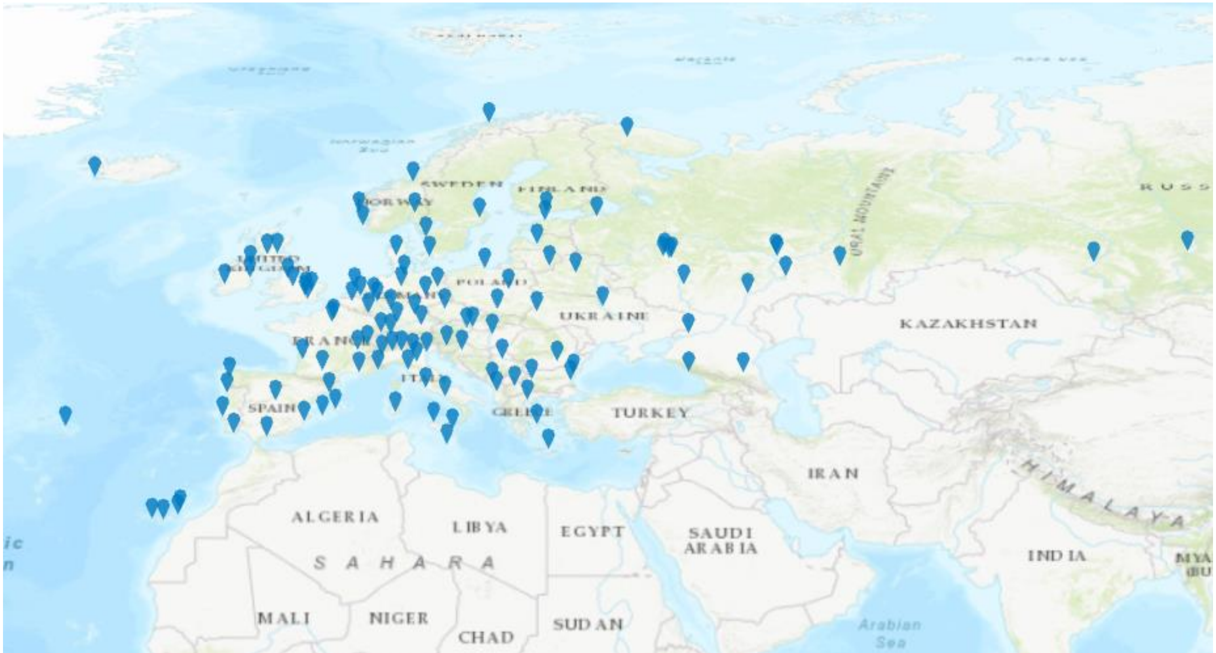
	brno.csv	airports.csv
I.	154962,0316	599,0284429
II.	156075,4913	595,2993546
III.	156772,5688	593,8950698
IV.	154538,0364	593,7474778
V.	164040,2959	579,7910561
VI.	157723,3398	579,5170759
VII.	157307,8904	599,0539512

VIII.	152400,515	611,3155917
IX.	155840,115	594,486388
X.	154026,5353	575,2300856
průměr	156368,682	592,1364494

Tab. 2 ukazuje porovnání jednotlivých metod společně s jejich průběhem v SW ArcGIS Pro (Obr. 7)

Tab. 2

	Nearest Neighbor	Best Insertion	ArcGIS Pro
brno.csv	173897,7704	156368,682	149984,2257
airports.csv	666,0110524	592,1364494	588,665483



Obrázek 7: Ilustrační obrázek bodové vrstvy Airports po importu csv souboru v SW ArcGIS Pro

Závěr

Závěrem by autorka chtěla poukázat především na stále přítomnou nepřesnost řešení TSP. Je obecně známo, že výše zkoumané algoritmy nijak negarantují, jak moc se získané výsledky liší od optimální cesty. Ovšem už jenom ta skutečnost, že je možné se dobrat k „použitelnému“ řešení, je pozitivní.

Co se speciálně týká algoritmu Best Insertion je nezbytné se zmínit o vlastních posledních krocích. Hamiltonovská kružnice je ve skriptu zakončena startovním bodem, stejně jako u algoritmu Nearest Neighbor a ne libovolným místem na kružnici, jak bylo zmíněno ve skriptech přidaných k zadání. Otázkou tedy je, zda dojde k zásadnímu zefektivnění (zkrácení) H. kružnice, pokud by zakončení nebylo závislé na startovním bodě.

Použitá literatura

DEMEL, J. *Grafy*. 1988. 1. vyd. Praha: SNTL, 1988. 184 s.

Metoda minimální cesty [online]. [cit. 2022-01-09]. Dostupné z: http://books.fs.vsb.cz/SystAnal/texty/24.htm

Problém obchodního cestujícího. *Algoritmus* [online]. Pavel Stancik, 2015, 2015 [cit. 2022-01-09]. Dostupné z: https://www.algoritmy.net/article/5407/Obchodni-cestujici