15 mars 2018

Mouvement d'un satellite

Travail en Atelier - Marzook, Planchon & Valette

Table des matières

I. Présentation du problème

II. Mise en place des équations différentiels

II.1. Départ avec les équations de Newton

Entre deux corps, la force de Gravitation s'applique. Notons M la Terre, m le satellite, r le rayon entre les deux corps.

$$\overrightarrow{F_{M/m}} = -G\frac{M * m}{r^2} * \overrightarrow{u_{M/m}}$$

Aussi, nous notons $m : x\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et donc $\overrightarrow{u_{M/m}} = \frac{x}{\|x\|}$. Aussi au départ, nous suposerons que le satellite est sur l'axe des abscisse à la position x.
Alors étant donné que $r = x$, nous avons $r^2 = x^t x = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{M/m}} &= -G\frac{Mm}{r^2} \times \overrightarrow{u_{M/m}} \\ &= -G\frac{Mm}{x^t x} \times \frac{x}{\| x \|} \\ &= -G\frac{Mm}{x^t x} \times \frac{x}{\sqrt{x^t x}} \\ &= -G\frac{Mm}{(x^t x)^{3/2}} \times x\end{aligned}$$

II.2. Utilisation du PFD

D'après le principe fondamentale de la dynamique (et du fait que la seule force soit $\overrightarrow{F_{M/m}}$) nous avons :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{M/m}} &= m\vec{a}\\ &= m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc, en remplacant $\overrightarrow{F_{M/m}}$, nous avons :

$$\begin{aligned}-G\frac{Mm}{(x^tx)^{3/2}} \times \begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} &= m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}\\ -G\frac{M}{(x^tx)^{3/2}} \times \begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs, nous alons supposer que $M * G = 1$, ainsi,

$$\ddot{x} = -(x^tx)^{-3/2}x$$

Donc,

$$\ddot{x} + (x^tx)^{-3/2}x = 0$$

Et si $(x^tx)^{-3/2}$ est constant alors on a

$$\ddot{x} + \omega^2(t) \times x = 0$$

avec ω^2 =(x$^tx)^{-3/2}$. Cela est l'équation d'un oscillateur harmonique. Finalement nous avons le système suivant :

$$\begin{cases}\ddot{x_1} + \omega^2(t)x_1 = 0\\ \ddot{x_2} + \omega^2(t)x_2 = 0\end{cases}$$

III. Cas constant ($\omega(t)$ constant)

IV. Cas non constant ($\omega(t)$ varie)

V. Lois de Kepler