

基于 20 节点单元有限元的三维应力平衡问题计算

PlanetarianPKU

介绍

写了一个三维有限元的程序，可以自动划分单元和节点、单元分析、组集、处理边界条件、计算可视化。本文分为三个部分：程序讲解、样例测试、实际问题研究。样例测试给了大量例子，就相当于往年作业的第一部分了。

第一部分详细介绍了本程序的实现原理，包括单元划分、物理问题的弱形式化、单元分析、组集、计算。

第二部分是样例测试，测试了不同的约束条件、受力条件的数值结果，并与理论解比较。一共 8 个样例，验证了程序的正确性和有效性。

第三部分是实际问题探究，模拟方形岩石单轴压缩过程，探究岩石 X 型破裂产生机制。最后是总结。

第一部分

一、格点生成与单元划分

实现原理：

1. 记录格点位置

对三个方向嵌套三层循环，生成 27 节点的网格，使用计数器判断处于单元的第几个点，使用 `oklst` 和计数器比较，判断该节点是否属于 20 节点单元的节点。如果是，则将该点的坐标存储于 `coordinates` 矩阵中，如果不是，则不记录该点位置，并将该点坐标编号记录在 `fakeindexlst` 中，用于后续修正格点编号。

2. 将格点编号与单元关联

因为 1-20 格点在每个单元的位置是固定的，因此其编号在全局格点中有周期性。实现方法是生成 27 节点的单元网格，然后利用编号的周期性取需要的 20 节点。值得注意的是，这里的单元内格点编号和书上的 20 节点编号顺序并不相同，但我的程序与这里的格点编号是对应的。

例如 8 个角节点：

```
nodes(:, 1) = reshape(NodeNo(3:2:npx, 1:2:npy-2, 3:2:npz), nel, 1);
nodes(:, 2) = reshape(NodeNo(3:2:npx, 3:2:npy, 3:2:npz), nel, 1);
nodes(:, 3) = reshape(NodeNo(1:2:npx-2, 3:2:npy, 3:2:npz), nel, 1);
nodes(:, 4) = reshape(NodeNo(1:2:npx-2, 1:2:npy-2, 3:2:npz), nel, 1);
nodes(:, 5) = reshape(NodeNo(3:2:npx, 1:2:npy-2, 1:2:npz-2), nel, 1);
nodes(:, 6) = reshape(NodeNo(3:2:npx, 3:2:npy, 1:2:npz-2), nel, 1);
nodes(:, 7) = reshape(NodeNo(1:2:npx-2, 3:2:npy, 1:2:npz-2), nel, 1);
nodes(:, 8) = reshape(NodeNo(1:2:npx-2, 1:2:npy-2, 1:2:npz-2), nel, 1);
```

3. 修正格点编号

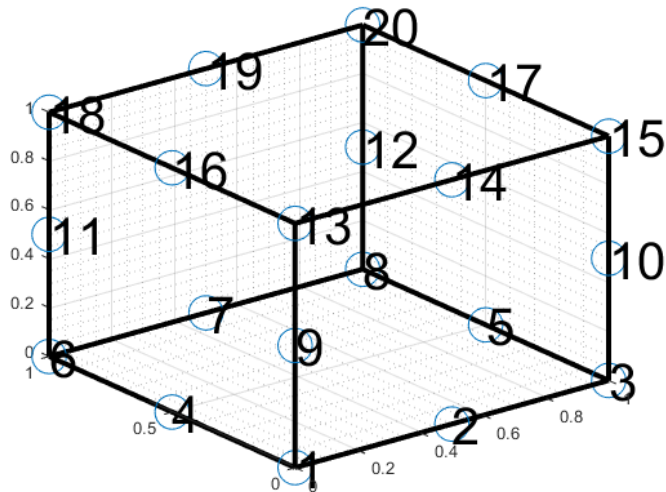
这样虽然形成了对应关系，但格点编号却是 27 节点的编号。因此最后一步是把格点编号修正为 20 节点，具体而言，是减去小于该节点编号的假节点个数，例如 20 号节点在修正前是第 27 号节点，减去 27 之前的 7 个假节点，修正为第 20 号。

```
for i = 1:nel
    for j = 1:nnel
```

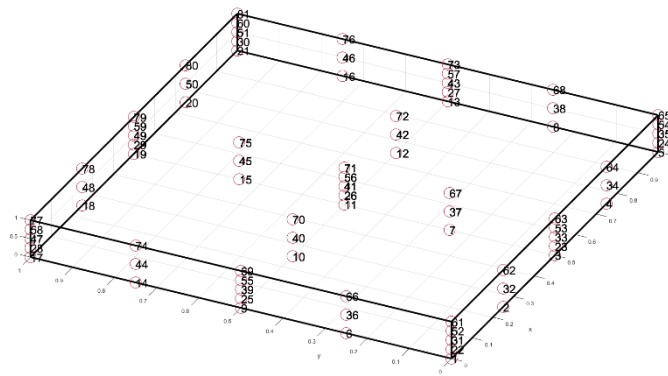
```

nodes_new(i, j) = nodes(i, j)-length(fake1st(fake1st<nodes(i, j)));
end
end
测试：
1 单元 20 节点的格点

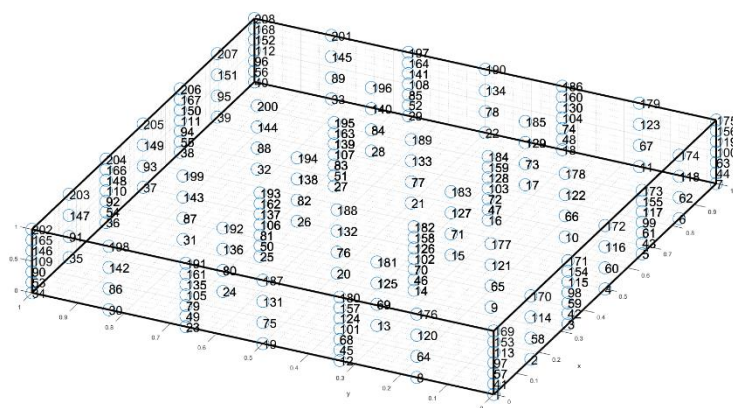
```



Y 方向有两个单元，XZ 方向有一个单元生成的格点。



X, Y, Z 方向各有两个单元生成的格点



二、单元分析

处理数据的方式是先单元分析逐个计算刚度矩阵，再整体处理约束方程。

2.1 问题描述：

三维弹性介质的本构方程

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix}$$

SYM

三维弹性介质的几何方程

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{bmatrix}$$

无重力情况三维弹性介质的平衡方程

$$\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

所以

$$\mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

2.2 基于弱形式的有限元单元分析解

$$\iiint_V (\nabla D \nabla u) w \, dx dy dz = 0$$

$$\iiint_V (\nabla w D \nabla u) \, dx dy dz - w D \nabla u|_{Boundary} = 0$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{H}^T \mathbf{W}, \mathbf{u} = \mathbf{H}^T \mathbf{U}$$

$$\iiint_V \left((\mathbf{L} \mathbf{H}^T \mathbf{W})^T \mathbf{D} (\mathbf{L} \mathbf{H}^T \mathbf{U}) \right) \, dx dy dz - (\mathbf{H}^T \mathbf{W})^T \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{H}^T \mathbf{U}|_{Boundary} = 0$$

$$\mathbf{W}^T \left[\iiint_V \left((\mathbf{L} \mathbf{H}^T)^T \mathbf{D} (\mathbf{L} \mathbf{H}^T \mathbf{U}) \right) \, dx dy dz - \mathbf{H} \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{H}^T \mathbf{U}|_{Boundary} \right] = 0$$

形函数选取 20 节点的形函数。

$$h_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta + \zeta_i \zeta - 2) \\ (i = 1, 2, \dots, 8),$$

$$h_i = (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta) / 4 \quad (i = 9, 11, 13, 15),$$

$$h_i = (1 - \eta^2) (1 + \xi_i \xi) (1 + \zeta_i \zeta) / 4 \quad (i = 10, 12, 14, 16),$$

$$h_i = (1 - \zeta^2) (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) / 4 \quad (i = 17, 18, 19, 20).$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_x \\ \mathbf{U}_y \\ \mathbf{U}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x^1 & \dots & u_x^{20} \\ u_y^1 & \dots & u_y^{20} \\ u_z^1 & \dots & u_z^{20} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_{20} \\ h_1 & \dots & h_{20} \\ h_1 & \dots & h_{20} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{H}^T = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{20}], \mathbf{B}_{inode} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_i}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial h_i}{\partial z} & \frac{\partial h_i}{\partial y} \\ \frac{\partial h_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} & \frac{\partial h_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 变换到自然坐标系计算刚度矩阵

导数的坐标变换:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{-1} \frac{\partial u_x}{\partial x'} \\ J^{-1} \frac{\partial u_y}{\partial x'} \\ J^{-1} \frac{\partial u_z}{\partial x'} \end{bmatrix}, \text{ 其中 } J^{-1} \frac{\partial}{\partial x'} = \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} + J_{12}^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} + J_{13}^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ J_{21}^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} + J_{22}^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} + J_{23}^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ J_{31}^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} + J_{32}^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} + J_{33}^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix}, \mathbf{J} = \begin{bmatrix} D_\xi X & D_\xi Y & D_\xi Z \\ D_\eta X & D_\eta Y & D_\eta Z \\ D_\zeta X & D_\zeta Y & D_\zeta Z \end{bmatrix},$$

$$D_{\xi_i} = \frac{\partial h_i}{\partial \xi}, D_{\eta_i} = \frac{\partial h_i}{\partial \eta}, D_{\zeta_i} = \frac{\partial h_i}{\partial \zeta}$$

X,Y,Z是单元内 20 个格点在(x,y,z)的全局坐标向量。

因此某单元的刚度矩阵为：

$$K = \iiint_V \det(J) B' D B d\xi d\eta d\zeta$$

2.4 数值积分

使用三个高斯点，高斯点及对应权重。

$$x = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{3}{5}} \\ 0 \\ \sqrt{\frac{3}{5}} \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{5}{9} \end{bmatrix}.$$

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \sum_{i=1}^3 w_i \sum_{j=1}^3 w_j \sum_{k=1}^3 w_k f(x_i, x_j, x_k).$$

三、组集

3.1 组集刚度矩阵

组集时建立节点局部自由度索引向量和节点总体自由度索引向量的关系，提取单元的 20 节点全局格点编号，计算每个单元的节点总体自由度索引向量。对 m 号节点，其总体自由度索引是 $3m - 2, 3m - 1, 3m - 3$ 。对每个单元的节点总体自由度索引向量，使用双重循环将单元的刚度矩阵的值赋给总体刚度矩阵的对应位置。

```
edof=length(index)
for i=1:edof
    ii=index(i);
    for j=1:edof
        jj=index(j);
        stiffness(ii,jj)=stiffness(ii,jj)+k(i,j);
    end
end
```

四、边界约束的考虑

对刚度矩阵和广义力的修正

记录有边界约束的格点全局自由度索引和位移值，然后将总体刚度矩阵对应位置的索引处改为 1，该索引所在行其他元素设为 0，将力的对应位置改为位移值。即

$$\begin{bmatrix} k_{11} & & \\ & k_{rs} & \\ & & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_s \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_s \\ f_n \end{bmatrix}$$

令 $k_{rs} = 1, k_{r,i \neq s} = 0, f_s = u$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & & & & \\ & \dots & & & \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & & & \dots & \\ & & & & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \\ u_s \\ \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \\ u \\ \\ f_n \end{bmatrix}$$

这样第 r 行就是 $u_s = u$ ，处理了边界条件。

五、求解方程

一些技术细节：

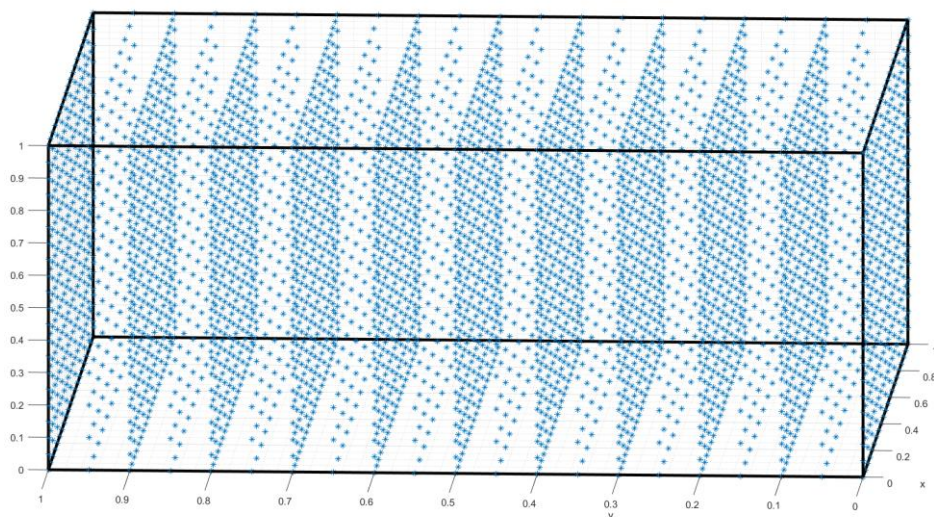
避免直接求解逆矩阵，而是使用高斯消去法求解。MATLAB 提供了这一功能。

使用稀疏矩阵存储总体刚度矩阵。MATLAB 提供了这一功能。

第二部分 测试

单元网格生成：

$1\text{m} \times 1\text{m} \times 1\text{m}$ 的立方体。划分为 $10 \times 10 \times 10$ 共一千个单元，共 4961 个节点。



从以下几点判断准确性：

1. 垂直方向形变与理论值相符
2. 单元弯曲的方向与实际相符。
3. 单元连接稳定，未出现大畸变。
4. 当施加相反方向的力时，形变方向是对称的。

下面采用轴向拉伸、横向拉伸来测试有限元程序的正确性。

测试 1：单轴压缩测试

参数设置：

$1\text{m} \times 1\text{m} \times 1\text{m}$ 的立方体。划分为 $10 \times 10 \times 10$ 共一千个单元。

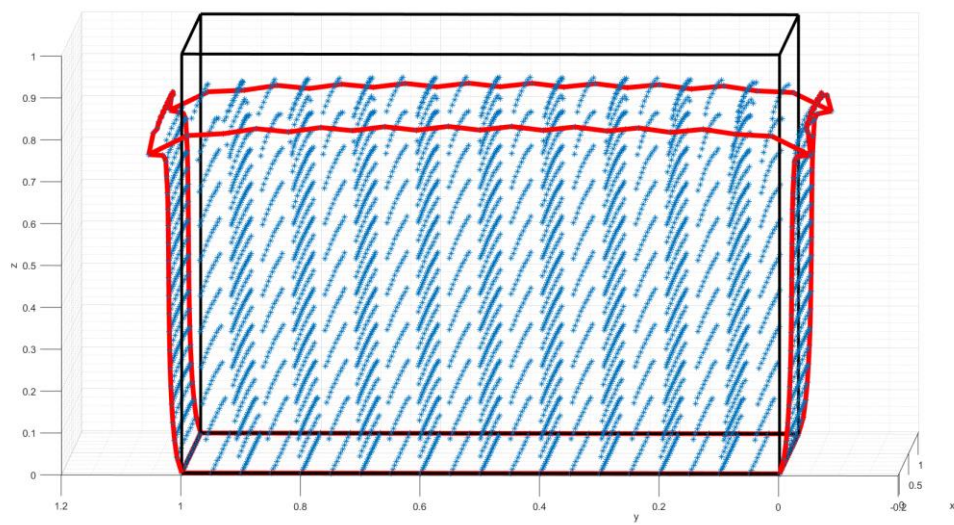
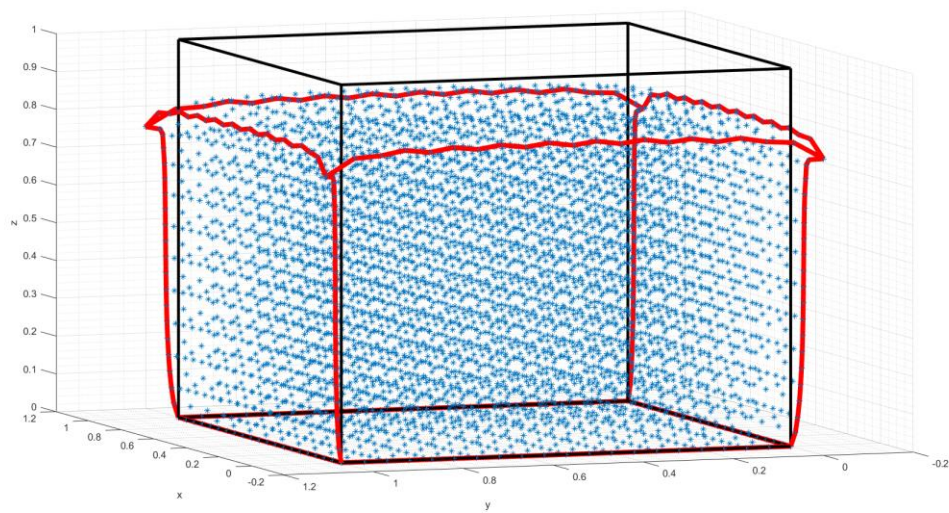
杨氏模量 $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ 。

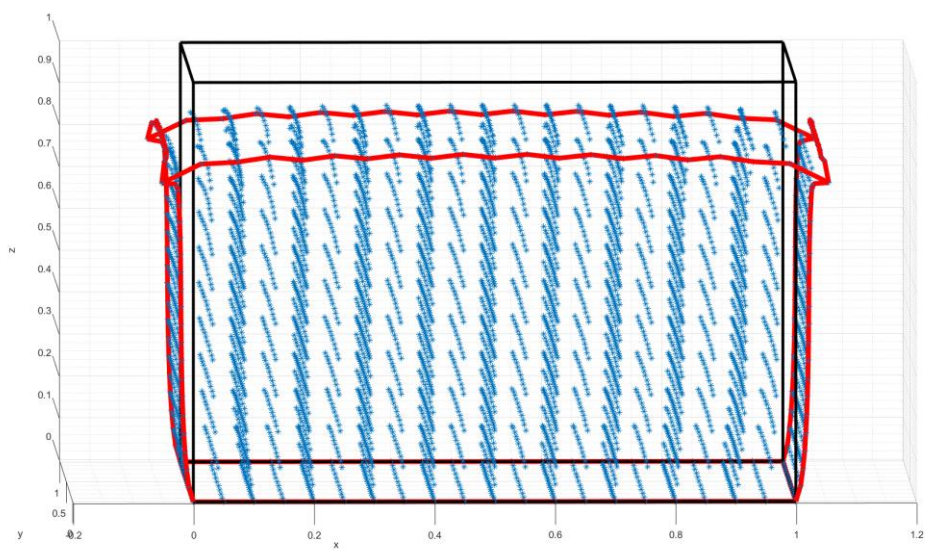
固定 $z = 0$ 底面，在垂直方向施加压力 $F = 3.1 \times 10^{10} \text{ N}$ 。施力方式为将力均匀平分给顶部的

所有格点。

则垂直方向被压缩 $\Delta L = \frac{FL}{AE} = 0.148 \text{ m}$ 。注意到有限元解与理论值相符。

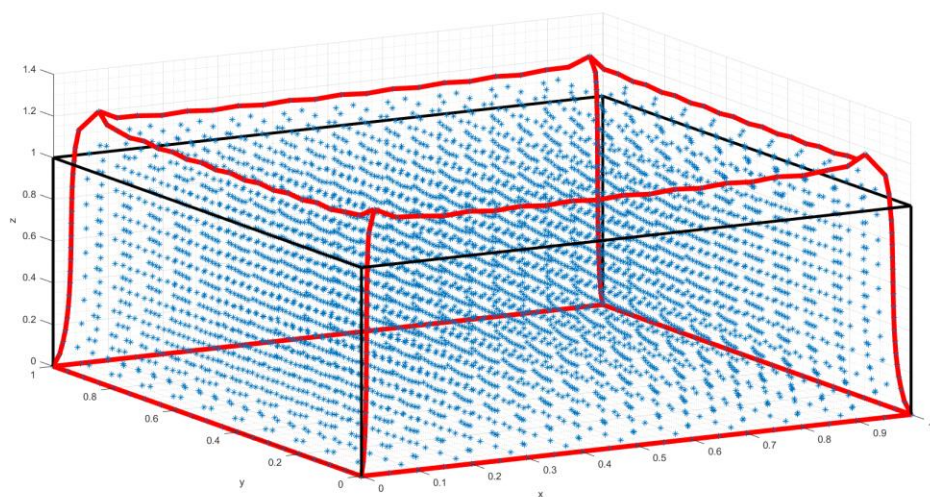
可视化显示

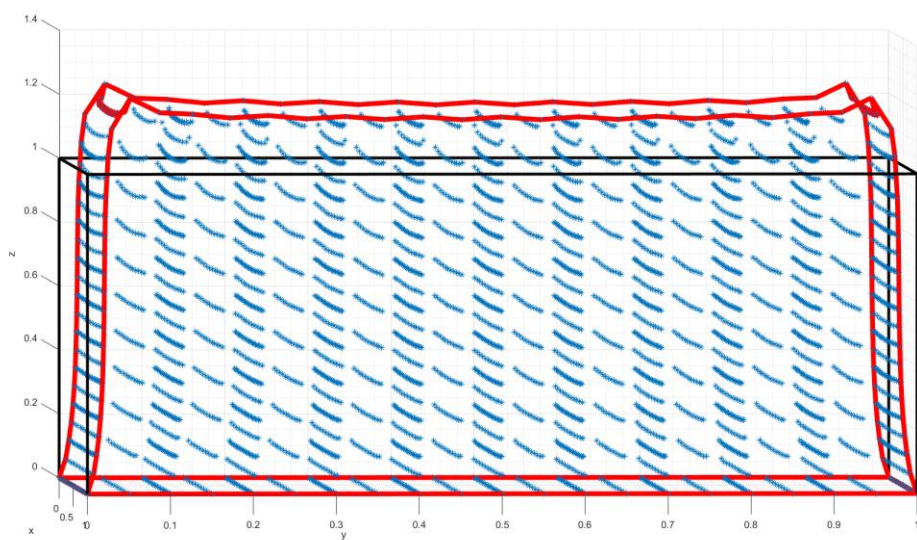
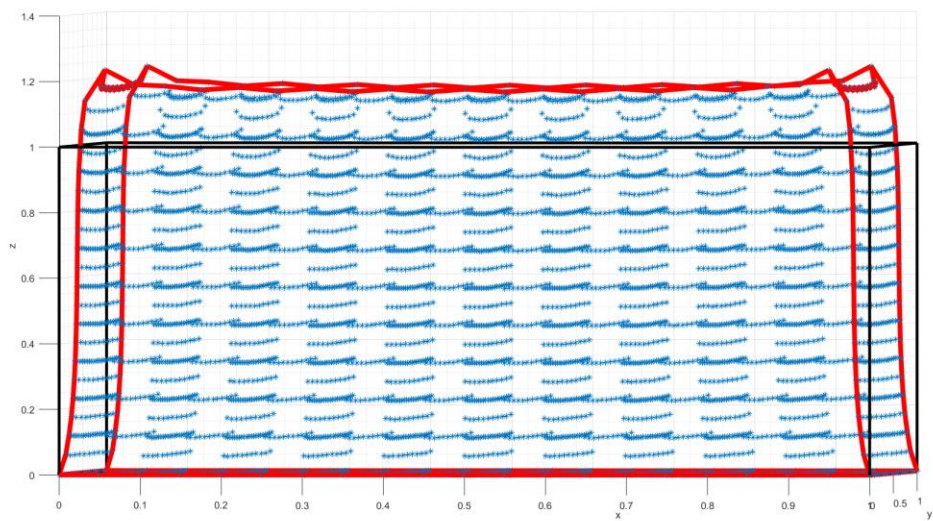




测试 2：单轴拉伸测试

与测试仪的区别就是使得力的方向向上。





测试 3：顶部横向拉拽

与测试 1 一样，但力的方向变为 y 方向

参数设置：

$1\text{m} \times 1\text{m} \times 1\text{m}$ 的立方体。划分为 $10 \times 10 \times 10$ 共一千个单元。

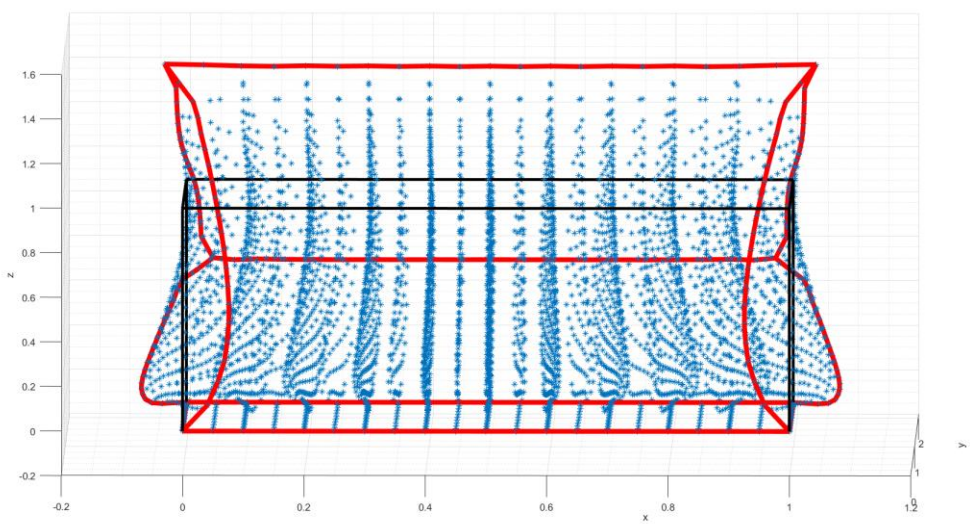
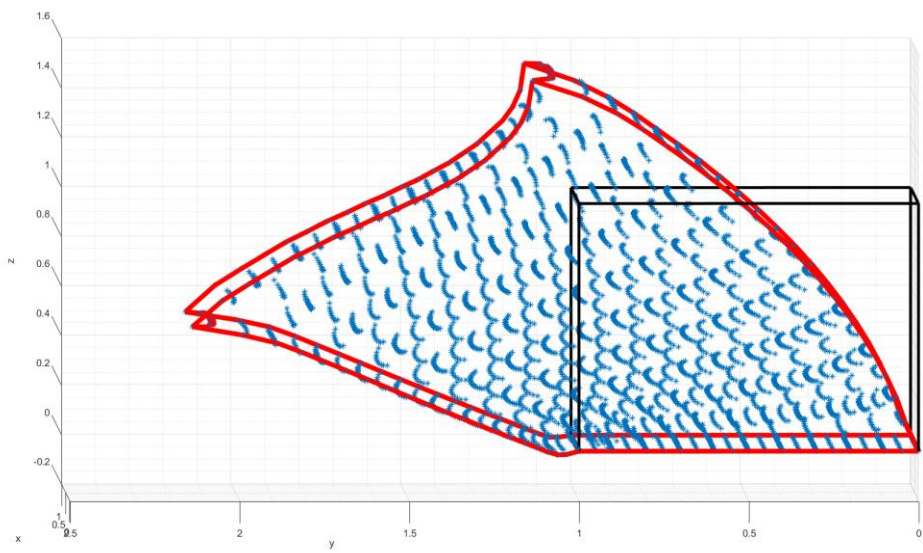
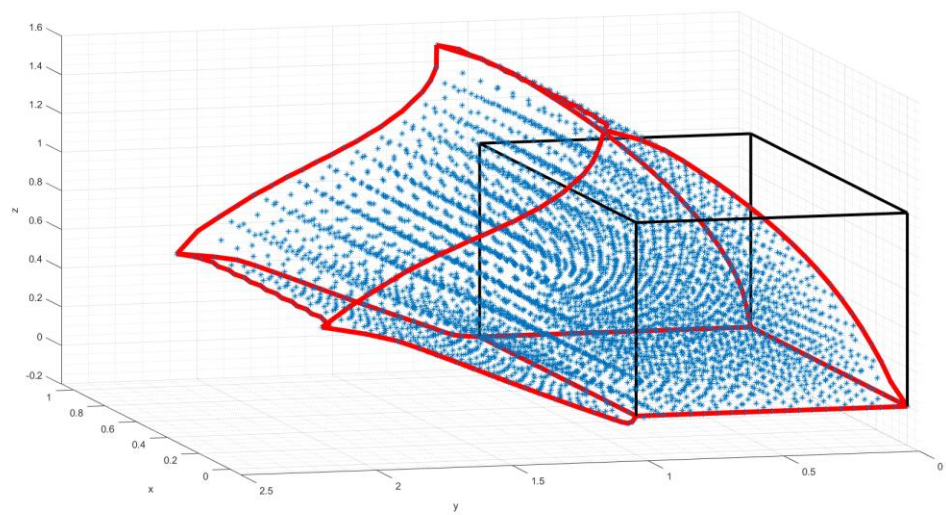
杨氏模量 $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ 。

固定 $z = 0$ 底面，在 y 方向施加力 $F = 3.1 \times 10^{10} \text{ N}$ 。施力方式为将力均匀平分给顶部的所有格点。

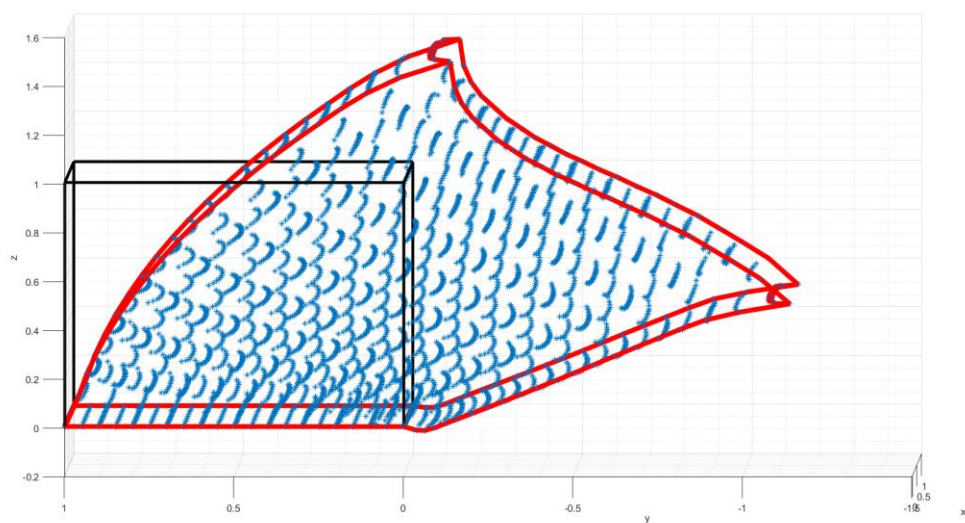
$$\text{面的截面惯性矩 } I = \frac{ab^3}{12} = \frac{1}{12} \text{ m}^4$$

$$\text{则 } y \text{ 方向的最大拉伸量为 } \frac{FL^3}{3EI} = 0.590 \text{ m}。$$

注意到中轴的位移与理论值相符合。



测试 4：顶部横向反方向拉拽



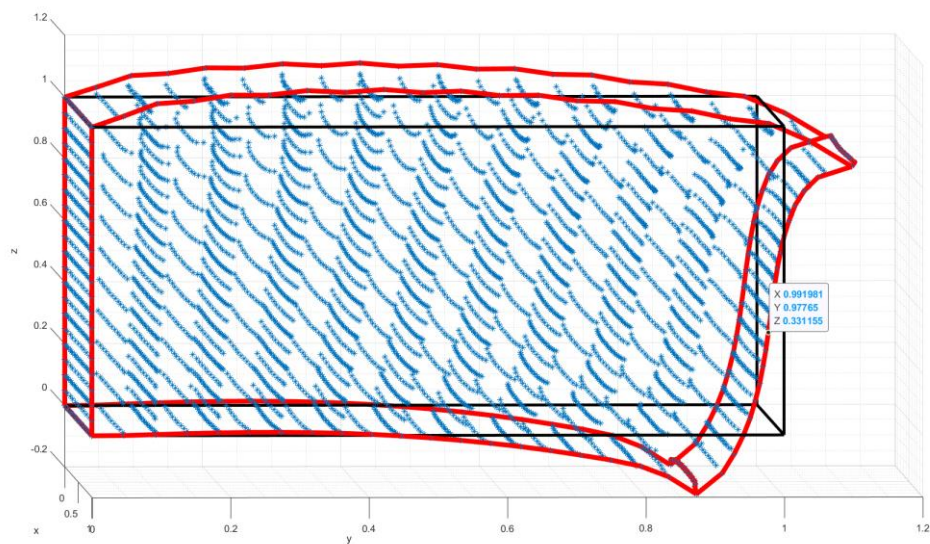
测试 5：沿顶部施加均匀载荷

固定 $y = 1$ 底面，在顶部 z 方向施加力 $F = 3.1 \times 10^{10} \text{ N}$ 。施力方式为将力均匀平分给顶部的所有格点。

中轴最大位移：

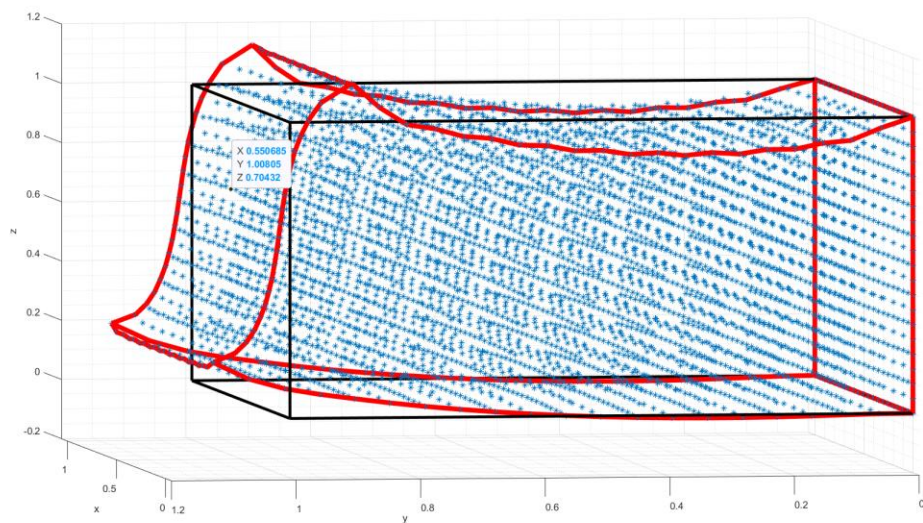
$$\frac{FL^4}{8EI} = 0.221 \text{ m}$$

有限元数值结果与理论解相符合。

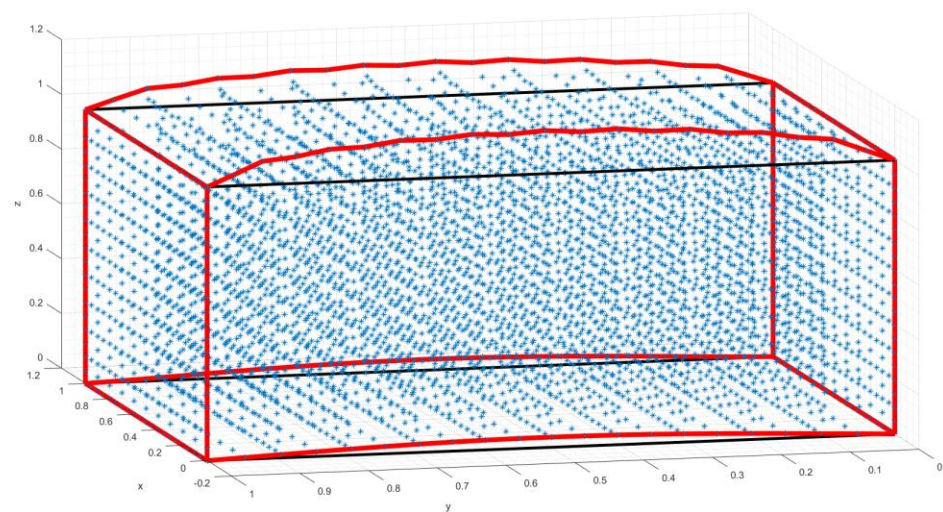


测试 6：沿顶部施加均匀载荷

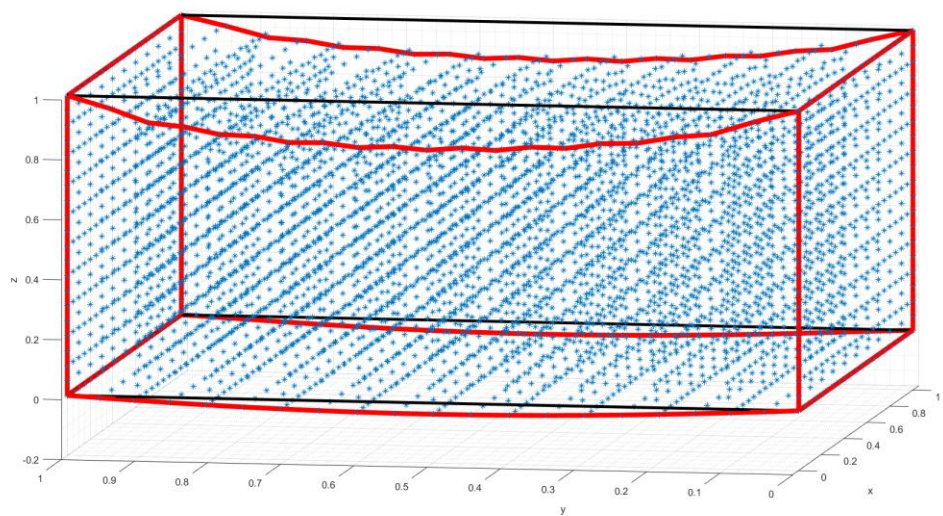
固定 $y = 0$ 底面，在顶部 z 的负方向施加力 $F = 3.1 \times 10^{10} \text{ N}$ 。施力方式为将力均匀平分给顶部的所有格点。



测试 7: 沿顶部施加均匀载荷，两端固定



测试 8: 沿顶部施加均匀载荷，两端固定



第三部分

探究单轴压缩实验岩石的X型破裂形成机制

岩石单轴压缩时，往往会形成X型破裂，使用上文详细介绍的有限元程序模拟。

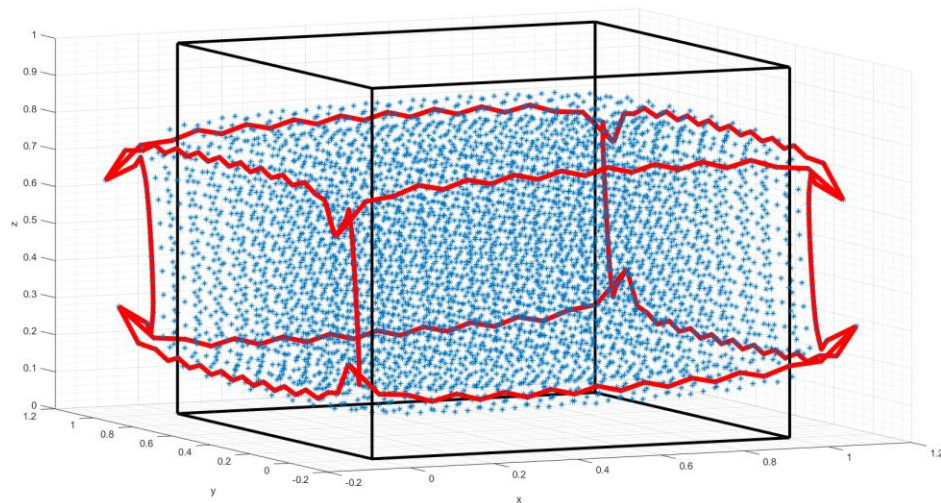
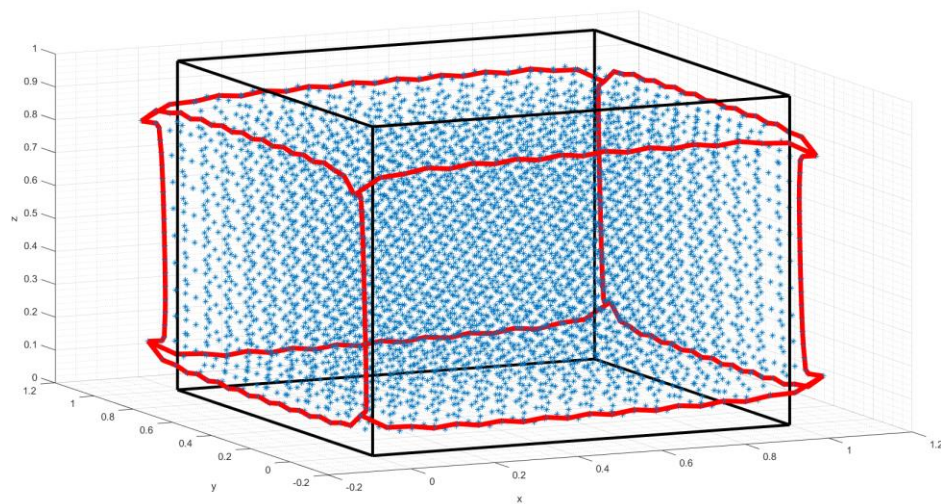
参数设置：

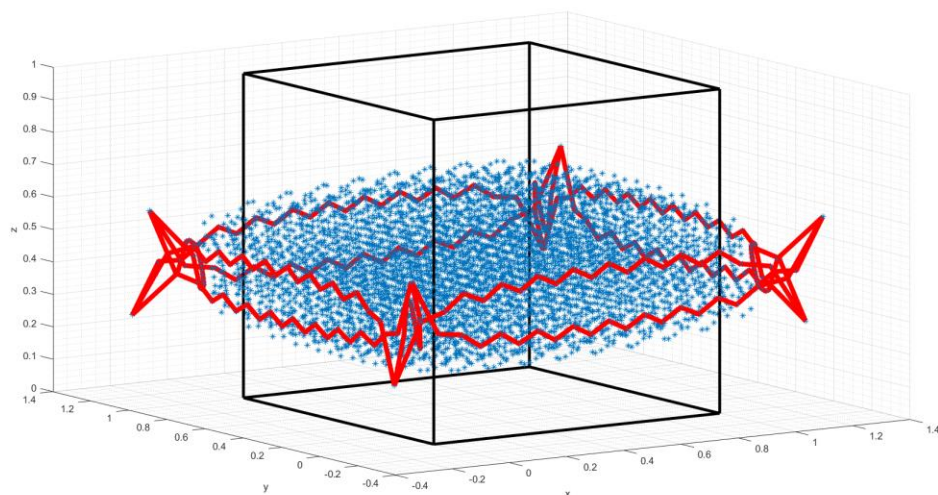
1m × 1m × 1m的立方体。划分为10 × 10 × 10共一千个单元。

杨氏模量 $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ 。

不固定，在上下面施加大小相等，方向相反的压力 $F_1 = 3.1 \times 10^{10} \text{ N}$ 、 $F = 2F_1, F_3 = 4F_1$ 施力方式为将力均匀平分给顶部的所有格点。

实验结果：





观察发现，在上下面受到均匀载荷的情况下，物体并不是像我们想象的那样水平扩张垂直压扁，而是存在一个弯曲的表面结构。这个表面结构存在从四个角撕裂块体的趋势。在岩石单轴压缩实验中，由于压力源于压机与岩石的上下表面相接触，不可能出现这种弯曲表面，上下表面是平的，这与无约束的模拟情况相比，存在一个将原本弯曲的表面掰直的趋势，这一趋势使得斜对角线受到极大的弯矩，因此岩石倾向于斜着破裂

总结与声明

本文在 Siva Srinivas Kolukula 的四节点有限元代码的程序思路的基础上，自行完成了三维 20 节点单元的有限元写法，并计算了多个算例证明程序的正确性。最后将程序运用到实际研究中。