2.3 Painville

La dette du pain

Il existe un petit village perdu au milieu de nulle part, nommé Painville, où les habitants raffolent de pain. En fait, non seulement ils le consomment régulièrement, mais toute leur économie est construite autour du pain. Chaque année, l'huissier du pain visite Painville afin de mettre à jour un rapport qui évalue combien de pains appartiennent à chaque villageois. Cependant, si l'un d'eux se retrouve à devoir du pain à l'État, l'huissier le kidnappe et le force à travailler dans une boulangerie pour payer sa dette. Même si tout le monde ne se connaît pas dans la commune, chacun a vu les dommages psychologiques qu'une telle expérience cause, et le village a donc juré de ne plus jamais avoir de villageois endetté. Vous êtes un mathématicien renommé, et ils vous ont donc engagé afin de les aider (vous êtes payés avec une douzaine de baguettes).

Modèle mathématique

En tant que bon mathématicien, il s'agit d'abord de modéliser le problème. Painville forme un multigraphe $G = (V, E)$ dont les sommets V représentent les villageois et les arêtes E représentent les relations d'amitié (plusieurs arêtes entre deux villageoises signifient qu'ils sont des amis très proches). On supposera toujours que le graphe G est connexe.

Chaque villageois a d'office un certain solde de pain : celui-ci est entier et peut être positif ou négatif.

Les villageois comptent redistribuer le pain afin qu'aucun villageois ne se retrouve avec un solde strictement négatif. Cependant, les villageois ne font pas les choses à moitié et pensent à tous leurs amis. Ainsi, un villageois peut choisir de redistribuer du pain à tout ses amis en leur donnant à chacun une de ses meilleures baguettes. Le villageois peut très bien s'endetter par une telle redistribution (d'où sort le pain dans ces cas là, ça reste un mystère). D'une manière similaire, un villageois peut demander une baguette de pain à chacun de ses amis, au risque de les endetter.

1. Définissez ce qu'est une **fonction de solde** S sur le graphe $G = (V, E)$ (la forme exacte de ce graphe pour l'instant n'est pas importante, on cherche à développer une méthode applicable à toutes les communautés amatrices de pain). Soit $v \in V$ un villageois. Quel est l'effet sur la fonction S si v demande du pain à ses amis, et quel est l'effet si v en donne ? Dans ce langage mathématique, quel est le problème que l'on cherche à résoudre ? On dira à partir de maintenant que la fonction S est *résolvable* si on peut résoudre le problème associé. On notera l'ensemble des fonctions solde sur G par $\mathrm{Sol}(G)$.
2. À partir de maintenant on pense à résoudre une fonction de solde S en appliquant une série d'opérations : soit un villageois v donne de l'argent (on appellera ceci l'opération de *charité* C_v) soit v en demande (on appellera ceci l'opération de *mendiance* M_v). Donnez des exemples.
3. Formulez une condition suffisante pour déterminer qu'une fonction solde S n'est pas résolvable. Cette condition est elle nécessaire ? Justifiez.

Opérations sur des fonctions de solde

1. Soit S une fonction solde sur G et $F : \mathrm{Sol}(G) \to \mathrm{Sol}(G)$ une fonction obtenue par une suite d'opérations de charité et de mendiance (on appelle F une opération). Quand est-ce que $F(S)$ est résolvable ? Montrer que F peut toujours être obtenue comme une suite d'opérations de charité seulement, et classifiez toutes les représentations possibles de F. On dit qu'une représentation de F est réduite si elle est donnée par un nombre minimal d'opérations de charité.
2. Trouvez une bijection entre les opérations avec les fonctions sur $|G| - 1$ éléments dans les entiers, c'est à dire $\mathbf{Z}^{|G|-1}$. Trouvez aussi une bijection avec les fonctions sur $|G|$ éléments à valeur dans les entiers positifs avec au moins une valeur nulle (il y a évidemment plusieurs bijections possibles, mais il faut qu'elle vous paraisse plutôt naturelle).

   Pour une opération F, on appelle la fonction correspondante dans la deuxième bijection sa **fonction socle**, et on la note σ_F. Inversement, étant donné une fonction socle σ on note $\mathrm{sol}(\sigma)$ la fonction solde correspondante. On note $\mathrm{Soc}(G)$ l'ensemble des fonctions socles sur G.
3. On peut interpréter une opération F comme un élément $S_F \in \mathrm{Sol}(G)$, tel que $\forall S \in \mathrm{Sol}(G)$, $F(S) = S + S_F$. Pour une fonction socle $\sigma \in \mathrm{Soc}(G)$, exprimez $S_{\mathrm{sol}(\sigma)}$. On écrira simplement F pour S_F à partir de maintenant, sauf mention du contraire.

   Conseil : il peut être fastidieux de toujours noter une fonction solde par sa valeur sur chaque sommet de G. Essayez de trouver une notation qui capture la structure additive des fonctions soldes, vues aussi comme des opérations. Cela peut grandement vous simplifier les choses

Équations linéaires

1. Toute fonction socle peut être écrite comme une somme de fonctions socles "simples". Pour $v \in V$ on note χ_v la fonction socle donnée par

$$\chi_v(w) = \begin{cases} 1 & w = v \\ 0 & w \in V \setminus \{v\} \end{cases}$$

   et on appelle ces fonctions *les fonctions simples.*

   On fixe un ordre $v_1, ..., v_n$ des sommets de G, avec $n = |G|$. Étant donné que toute fonction socle est somme de fonctions simples, comment interpréter la matrice M dont les coefficients sont donnés par $M_{ii} = -\deg(v_{ii})$ et $M_{ij} = e(v_i, v_j)$?
2. Reformulez le problème de résoudre une fonction solde S comme une collection d'inégalités linéaires.
3. Dans le langage de l'exercice précédent, le problème est de trouver des points à coordonnées entières dans un polytope convexe donné. Compte tenu de cette reformulation, donnez une interprétation des objets suivants :
   (a) Le nombre de points à coordonnées entières dans un polytope convexe.
   (b) Un point à coordonnées entières dont la distance avec une face donnée du polytope est maximale.

4. ($*$) En reformulant dans le langage des polytopes, beaucoup de questions peuvent se poser sur ces objets. Poussez leurs étude aussi loin que vous le souhaitez. Par exemple, comment relier le volume d'un polytope au nombre de points à coordonnées entières en son intérieur ? Et comment traduire les propriétés que vous trouvez à notre problème d'origine ? Quels types de polytopes pouvez vous obtenir à partir d'un graphe et d'une fonction solde donnée ?

Algorithme

On retourne à notre problème, et on cherche maintenant à trouver des algorithmes qui puisent nous dire si oui ou non Painville peut échapper à ses dettes. Vous avez déjà donné un critère suffisant dans la question 3 de la section **Modèle mathématique**.

1. La première méthode naïve est la suivante : afin de sortir tous les villageois de leurs dette, on choisit juste un villageois endetté, et on applique des opérations de mendiance sur ce villageois jusqu'à ce qu'il ne soit plus endetté, puis on répète ce processus. Essayez cet algorithme (qu'on appellera *l'algorithme mendiant*) sur les exemples de la question 2 de la section **Modèle mathématique**.
2. Notez que l'algorithme mendiant se termine pour chaque fonction solde résolvable et ne se termine pas pour les soldes non résolvables. Démontrez que ceci est vrai en général.

   Indice : montrez que la fonction de solde n'est pas résolvable si chaque sommet fait une opération de mendiance dans l'algorithme mendiant.
3. Pour une fonction solde donnée, montrez que la solution obtenue avec l'algorithme mendiant (c'est à dire une fonction solde non négative) est indépendante du choix des sommets dans l'algorithme (c'est à dire l'ordre dans lequel on choisi les villageois à désendetter).
4. On pourrait aussi essayer un algorithme caritatif : on choisit des sommets voisins v, w tels que v n'a pas de dette et w est endetté, puis on fait une opération de charité en v. On répète jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de dette ou jusqu'à ce que tous les sommets fassent une opération de charité, auquel cas on déclare la fonction solde de départ n'est pas résolvable.

   Cet algorithme fonctionne-t-il ?

Soldes w-stable

1. Il y a une autre stratégie possible pour résoudre une fonction solde. On prend un villageois particulier à part comme "*bénéfacteur*". Celui ci donne du pain jusqu'à ce qu'il y ait assez de pain pour que les villageois restants puissent redistribuer leurs dettes. Il reste ensuite à s'organiser pour sortir le bénéfacteur de sa dette potentielle.

   Formalisons cette idée. On choisit un sommet bénéfacteur w. Pour une fonction solde S, on dit qu'elle est w-stable si $S(v) \geqslant 0$ pour tout $v \neq w \in V$ et pour tout sous ensemble $U \subset V \setminus \{w\}$, la fonction socle $\sigma = \sum_{u \in U} \chi_u$ est telle qu'il existe $u \in U$ avec $(S + \mathrm{sol}(\sigma))(u) < 0$ (ainsi on ne peut pas donner d'argent à partir d'un sous ensemble de $V \setminus \{w\}$ sans mettre un villageois non bénéfacteur en dette).

Montrez que pour toute fonction solde S, il existe une opération F telle que $F(S)$ est w-stable, et la fonction solde $F(S)$ est unique.

2. Montrez qu'une fonction solde S est résolvable ssi la fonction solde w-stable unique S' qui lui correspond est une solution (ie $S'(w) \geqslant 0$).

3. D'après l'exercice précédent, toute fonction solde S résolvable admet une solution w-stable. Il est naturel de se demander dans quels cas toutes les solutions sont w-stables.

   Supposons que G est tel que, si $d-1$ arêtes sont enlevées, G est toujours connexe (on rappelle que G est supposé connexe). Alors montrez que si S' est une solution de S (i.e. il existe une opération F avec $S' = F(S)$ et $S(v) \geqslant 0$ $\forall v \in V$) et $\sum_{v \in V} S'(v) < d$, alors S' est w-stable. En déduire qu'une fonction solde résolvable sur G telle que $\sum_{v \in V} S(v) < d$ n'a qu'une seule solution.