Funktionsteori
– M.Sc.-mördaren –

Max Parkosidis, I-14

Lunds Tekniska Högskola

Innehåll

Inledning

Vad är det första du tänker på när du hör ordet *funktionsteori*? Styrs tankarna instinktivt mot att hitta någon rolig ordlek, kanske?

”Funktionsteori… Funk(tionsteori)… Funk…I(?) Japp, där har vi det: ”Funky”. Det lär vara något jävligt lurigt med denna kurs. Jag känner det på mig.”

Du känner dig kanske till och med lite uppspelt över vad som väntar bakom dörr nummer Funk? Naivt.

Du har kanske hört talas om kursen från äldre elever och redan ställt in dig på att bli totalt överkörd av det på-köttande Funk-tåget? Läser du dessa förord under sommaren hör du till den tredje kategorin, som redan antagit utmaningen en gång. Hör du till den kategorin är risken stor att din första reaktion till *funktionsteori* är:

”Helveteeeee… VARFÖR JAG!?”

Och det är en bra fråga. (Svaret för många av oss är *”Micke P.”*) Själv tycker jag bara rakt av att kursen är galet abstrakt om än lika intressant. Min förhoppning är således att denna sammanfattning kan ”konkretisera” koncept som nyckelhålsintegrationer, potensserier och Cauchys miljardtals olika satser, och ultimat sett utgöra ett stöd för alla (alltså inte bara I-sektionen, dela på som ni själva vill) – Oavsett målsättning.

Nog babblat – nu kör vi!

Hur läser man denna sammanfattning?

Dessvärre bygger kursen på ganska tydlig matematik, och själv känner jag att bevisen till vissa satser är väldigt vettiga att försöka förstå. Jag kommer därför varva koncept-kavalkader med satser och tillhörande bevis när dessa tillför något. Jag har även försökt se till att de exempel som dras är ”heltäckande” för kursens moment. Räkningarna kan bli ganska omfattande, och av denna anledning undviker jag att ta för många genvägar om det inte är för att belysa en poäng. Således uppmuntrar jag till att faktiskt titta igenom exemplen i lite större detalj.

1 Inledande nyckelkoncept

Hela denna kurs kretsar kring *komplex analys*, vilket kort och gott är koncept från en- och flerdimensionell analys, där man jobbar med reella funktioner, som nu appliceras på *komplexa* funktioner. I detta dokument kommer beteckningen $z = a + ib$ användas som beteckning när variabeln i fråga är **komplex**, och x då variabeln är **reell**. Detta kanske verkar sjukt uppenbart nu, men vänta bara. Småsaker kommer ställa till det gång på gång. Njut.

1.1 Komplex deriverbarhet

En funktion f är kontinuerlig i punkten a om

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$$

Om vi antar att f är definierad i en omgivning av a, så är f ***komplext deriverbar*** om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, z \in \mathbb{C}$$

Existerar. Om f är komplext deriverbar i ett område Ω så säger vi att f är ***holomorf*** i Ω.

Lägg detta på minnet. Är en funktion holomorf så är livet gött!

1.2 Cauchy-Riemanns ekvationer

Förkortas *CR-ekvationerna* och används som ett huvudverktyg i förstauppgifter på de flesta tentor (läs ”om inte Micke P. skrivit tentan”).

Låt $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ och $a = \alpha + i\beta$. Antag vidare att $f'(a)$ existerar. Då gäller

$$\begin{cases} u'_x(\alpha,\beta) = v'_y(\alpha,\beta) \\ u'_y(\alpha,\beta) = -v'_x(\alpha,\beta) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$

Detta ekvationssystem kallas alltså *Cauchy-Riemanns ekvationer*. Det är bra att lägga så många av namnen som möjligt på minnet på grund av att man i tentasituationer förväntas kunna hänvisa till en del olika koncept som används ofta. Detta är ett av dem.

Anledningen till att detta är ett så viktigt resultat är att om CR-ekvationerna uppfylls för en funktion inom något område så *är funktionen komplext deriverbar* ***(holomorf)*** i detta område. Alltså:

$$u, v \text{ differentierbara i } \Omega \leftrightarrow f \text{ holomorf i } \Omega$$

1.3 Kontinuerlig deriverbarhet och harmoniska u, v

En beteckning som kommer användas ofta i bakomliggande teori, och även när ni motiverar räkningar (jag tror på er), är C. Om man skriver att u är C innebär det att u är partiellt deriverbar **en** gång med **kontinuerlig derivata**. Vidare innebär att u är C^2 att u är partiellt deriverbar **två** gånger med **kontinuerliga andraderivator** och så vidare.

Vi introducerar följande begrepp:

Antag att u är C^2. Om $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ så säger vi att u är **harmonisk**.

Detta ger oss ett ”snabbtest” för att avgöra om en funktion **inte(!)** är holomorf:

$$f \text{ holomorf} \rightarrow u \text{ harmonisk}$$

$$\leftrightarrow$$

$$u \textbf{ ej} \text{ harmonisk} \rightarrow f \textbf{ ej} \text{ holomorf}$$

1.4 Avslutande exempel

Följande exempel är uppgift 2 på tentamen 2015-10-29.

Bestäm alla holomorfa funktioner $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ sådana att

$$u(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$$

Svara på formen $f(z)$.

Lösning

Ett första steg kan vara att bekräfta att u faktiskt är harmonisk, bara för att vara säker. Men ställs frågan på detta vis verkar det okej att bara anta att så är fallet:

Vi undersöker först om u är harmonisk:

$$\begin{cases} u'_x = 2x - 2y \\ u'_y = -2x - 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u''_{xx} = 2 \\ u''_{yy} = -2 \end{cases} \rightarrow u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \rightarrow harmonisk$$

Eftersom vi söker efter *holomorfa* funktioner måste dessa uppfylla Cauchy-Riemanns ekvationer. Vi använder detta för att beräkna $v(x, y)$:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'_x = 2x - 2y \\ u'_y = -2x - 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v'_y = 2x - 2y \\ v'_x = 2x + 2y \ (*) \end{cases}$$

Vi beräknar $v(x, y)$ genom att integrera v'_y m.a.p. y:

$$v(x, y) = \int 2x - 2y\, dy = 2xy - y^2 + \phi(x)$$

Derivering av v m.a.p. x och jämförelse med $(*)$ ger

$$v'_x = 2y + \phi'(x) = 2x + 2y \leftrightarrow \phi'(x) = 2x \leftrightarrow \phi(x) = x^2 + C$$

För någon reell konstant$C$. Vi har alltså att

$$v(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + C$$

Således ges **samtliga** holomorfa funktioner $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ av

$$f(x + iy) = (x^2 - 2xy - y^2) + i(x^2 + 2xy - y^2 + C)$$

<u>Viktigt:</u> Vi efterfrågas dock $f(z)$. För att skriva om funktionen på denna form väljer vi att titta på funktionen längs x-axeln: $y = 0 \leftrightarrow z = x$. Vi får slutligen

$$f(z) = f(x, 0) = z^2 + iz^2 + iC \leftrightarrow$$

$$\boxed{f(z) = z^2(1 + i) + iC}$$

För någon reell konstant C.

(Kontrollera för egen del att omskrivningen $z = x + iy$ ger samma sak)

Följande exempel är uppgift 2b på tentamen 2016-03-14.

Antag att u och v utgör real- respektive imaginärdel av en holomorf funktion $f \in \mathbb{C}$. Visa att f måste vara konstant om $u + v$ är konstant.

Lösning

Vi börjar med att bryta ned och försöka förstå vilket problem vi behöver lösa. Liksom i en- och flerdimensionell analys gäller i komplex analys att en funktion är *konstant* om dess derivator är 0. Vi har att

$$\big(u(x,y) + v(x,y)\big) \text{ konstant} \to \big(u(x,y) + v(x,y)\big)' = 0 \leftrightarrow \begin{cases} u'_x + v'_x = 0 \\ u'_y + v'_y = 0 \end{cases} (*)$$

Problemet efterfrågar att vi visar att detta gäller för en *holomorf* funktion. Om funktionen är holomorf måste även Cauchy-Riemanns ekvationer vara uppfyllda, det vill säga

$$u'_x = v'_y \text{ och } u'_y = -v'_x \ (**)$$

Insättning i $(*)$ ger

$$\begin{cases} u'_x - u'_y = 0 \\ u'_y + u'_x = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} u'_x = u'_y \\ u'_x + u'_y = 0 \end{cases} \leftrightarrow u'_x = u'_y = 0$$

Genom $(**)$ får vi även att $v'_x = v'_y = 0$. Vi slutleder alltså att om $u + v$ är konstant och u, v uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer (dvs. funktionen är holomorf), måste funktionen vara konstant.

2 Elementära funktioner

2.1 Polynom

Mycket av denna del bottnar i polynomteori, och anledningen till detta är att de resultat vi får fram för holomorfa funktioner även gäller för polynom. Detta följer av att funktioner som $f(z) = z^n$ är holomorfa i **hela** det komplexa talplanet. Jag visar det lite snabbt genom definitionen för komplex deriverbarhet bara för att det går snabbt och är skoj:

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{z^n - a^n}{z - a} = \lim_{z \to a} [z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \cdots + a^{n-2} z + a^{n-1}] = na^{n-1}$$

$$\therefore f'(a) = na^{n-1}$$

Vilken är definierad i hela $\mathbb{C}$.

2.1.1 Uppskattning av polynom och rationella funktioner

Framför allt senare i kursmaterialet blir det väsentligt att kunna uppskatta storleken av funktioner och polynom för att sedan använda denna information i andra sammanhang. Konceptet introduceras som följande sats:

Sats:

Låt $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, a_n \neq 0$. *Då finns ett tal* $\rho > 0$ *sådant att*

$$|z| > \rho \rightarrow \frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq 2|a_n||z|^n$$

Vilket ser väldigt märkligt och intetsägande ut. Men det blir förhoppningsvis klarare med hjälp av beviset genom gränsövergång:

Vi vill ange ett intervall för storleken på $p(z)$, uttryckt i $|z|$ och $|a_n|$

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{p(z)}{z^n}\right| = \left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n\right| \rightarrow |a_n| \text{ då } |z| \rightarrow \infty$$

Alltså måste det gälla att

$$\alpha|a_n| \leq \left|\frac{p(z)}{z^n}\right| \leq \beta|a_n|, \text{ om } |z| \text{ är tillräckligt stort}$$

Där $\alpha < 1$ och $\beta = 1/\alpha$. I satsen ovan har vi använt $\alpha = 1/2$.

Exakt samma sak gäller för uppskattning av rationella funktioner. Jag kommer generellt referera till rationella funktioner som $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, där p, q är polynom, q's nollställen är ***poler*** till f och p's nollställen är nollställen till f.

En funktion kan ha *multipla nollställen* i samma punkt. Vi säger då att man har poler av olika *grad* (om det är q's nollställen). Vi återkommer till detta i senare delar (cliffhanger).

Som sagt uppskattas rationella funktioner på samma sätt som polynom. Tar vi exempelvis funktionen

$$f(z) = \frac{z(z-1)^2}{(z+2)(z+3)^3}$$

Kan vi komma fram till en storleksuppskattning på följande vis:

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \left|\frac{z^3}{z^4}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$$\therefore \frac{1}{4}\frac{1}{|z|} \leq |f(z)| \leq 4\frac{1}{|z|}, \text{ om } |z| \text{ är tillräckligt stort}$$

Hur α och β väljs är upp till dig.

2.2 Exponentialfunktionen och polär form

För komplexa tal $z = x + iy$ definierar vi exponentialfunktionen

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Egenskaper:

1. Holomorf på hela $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} u'_x = e^x \cos y \\ v'_y = e^x \cos y \end{cases} \text{och} \begin{cases} u'_y = -e^x \sin y \\ v'_x = e^x \sin y \end{cases} \rightarrow \text{CR-ekvationerna uppfyllda}$$

2. $(e^z)' = e^z$, precis som vi är vana vid.

Exponentialfunktionen används en hel del. Mest användbar är den i samband med omskrivningar av de trigonometriska och hyperboliska funktionerna. Än en gång: mer om detta senare.

2.3 Logaritmer

Funk-tåget avgår nu från perrong 1. Eller var det perrong 2? Förvirringen är total.

Definition: Med en ***logaritm*** av $z \neq 0$ menas ett komplext *tal* ω sådant att $z = e^{\omega}$.

Detta ω **inte** är entydigt. Om $\boxed{\omega = a + ib}$ och $\boxed{z = re^{i\theta}}$ så ska det gälla att $e^a \cdot e^{ib} = |z|e^{i\theta}$. Det vill säga $\begin{cases} e^a = |z| \\ b = \theta + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. Ytterligare en omskrivning ger $a = \ln|z|$ och $b = \arg(z)$. Slutligen:

$$\boxed{\omega = \ln|z| + i \arg(z)}$$

Vi ser nu att varje val av $\arg(z)$ ger upphov till ett annat ω, det vill säga en *annan logaritm* av z. Vill man beteckna *samtliga* logaritmer skriver man $\log z = \ln|z| + i \arg(z)$.

$z \mapsto \log z$ är alltså ***inte*** en funktion.

För att få en entydigt definierad funktion väljer man istället *olika definitionsmängder* för $\arg(z)$, så kallade ***grenar***.

2.3.1 Principalgrenen

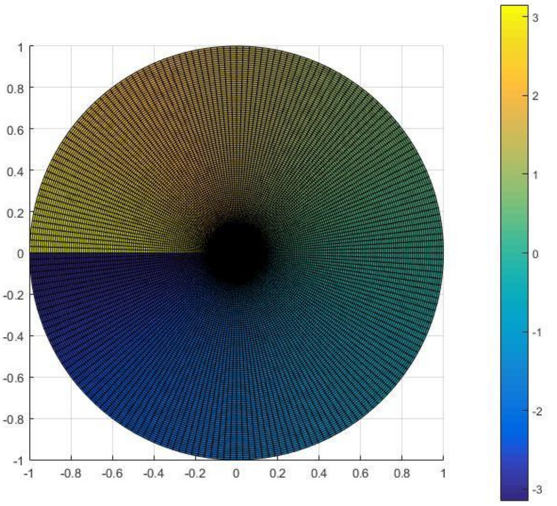
Denna definitionsmängd förekommer nog oftast i kursen, **men** det hjälper oerhört mycket om man kan förstå skillnaden som uppstår vid beräkningsoperationer för de olika grenarna.

Genom att använda logaritmens *principalgren* definierar man argumentet som

$$-\pi < \arg(z) < \pi$$

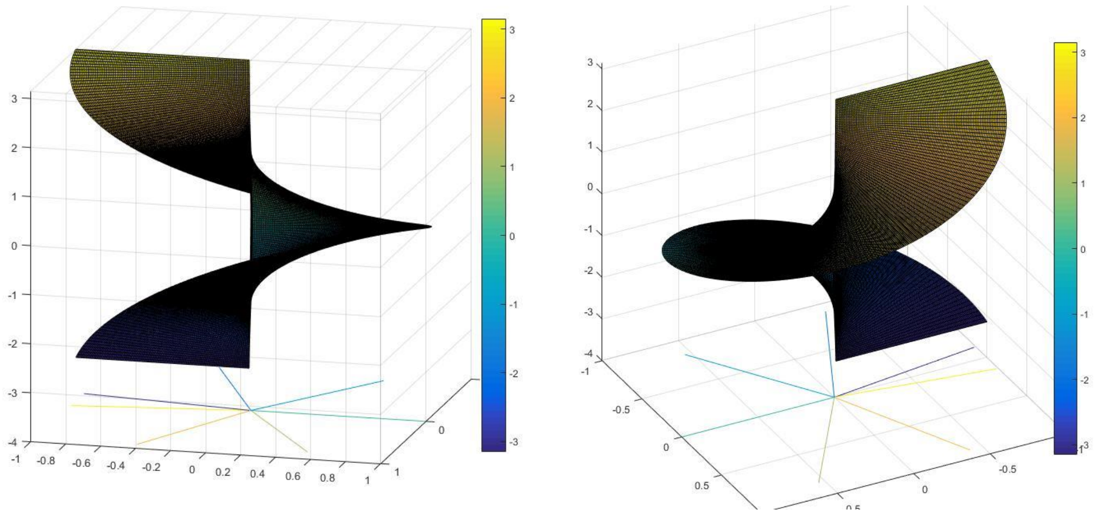
Notera den stränga olikheten. Om man även definierat argumentet i punkten $\pm\pi$ så hade en diskontinuitet uppstått. Med argumentet som ovan har vi istället en entydigt definierad, kontinuerlig *funktion* $\boxed{Log\ z = \ln|z| + iArg(z)}$ (L och A som versaler är avsiktligt – detta är den specifika beteckningen för en logaritm definierad enligt dess principalgren).

Om man försöker tänka sig detta grafiskt frågar man kanske sig själv *varför* man får en diskontinuitet om man väljer att även definiera funktionen i $\pm\pi$ – det fungerar ju i ”vanliga” fall. Men kom ihåg att vi nu arbetar med funktioner i z, en axel som är vinkelrät mot både x- och y-axlarna. $Log\ z$ är således en ***spiral*** längs z-axeln:



```
>> t=-pi:pi/100:pi;
>> r=0:0.01:1;
>> x=r'*cos(t);
>> y=r'*sin(t);
>> z=x+i*y;
>> w=log(z);
>> surfc(x,y,imag(w))
>>
```

Figur 2.1: $Log\ z$ sedd "ovanifrån", det vill säga som om vi sitter på z-axeln. Funktionen "börjar" vid vinkeln $-\pi$ och slutar vid vinkeln $+\pi$. Till höger är koden som skrivits in i Matlab, om ni själva vill kika på det.



Figur 2.2: Sidovyer av samma funktion. Man ser här hur spiralen klättrar upp längs z-axeln.

Förhoppningsvis gör detta resonemanget med att välja en gren, för att definiera argumentet av z, lite klarare. Hade begränsningen inte funnits hade spiralen fortsatt uppåt i all oändlighet, och ett enda argument hade matchats med oändligt många funktionsvärden (varpå logaritmen, per definition, inte längre är en funktion).

2.3.2 Texasgrenen

Beteckning: $\arg_T(z)$ & $\log_T(z)$

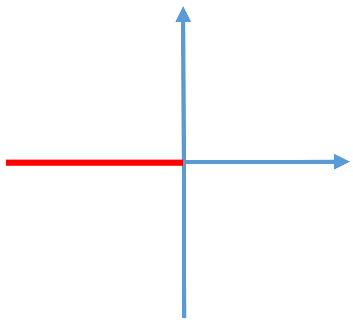
Villkor: $-\frac{\pi}{2} < \arg_T(z) < \frac{3\pi}{2}$

2.3.3 Naturliga grenen

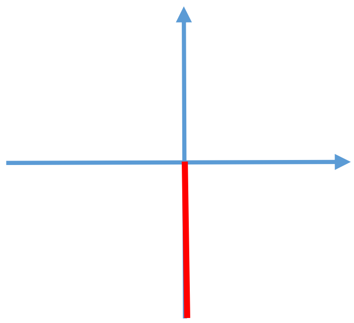
Beteckning: $\arg_n(z)$ & $\log_n(z)$

Villkor: $0 < \arg_n(z) < 2\pi$

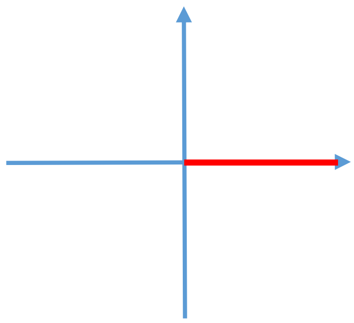
2.3.4 Grafisk representation



Figur 2.3: Principalgrenen, $arg(z)$ ej definierad för $\pm\pi$



Figur 2.4: Principalgrenen, $arg(z)$ ej definierad för $-\pi/2$ och $3\pi/2$.



Figur 2.5: Naturliga grenen, $arg(z)$ ej definierad för 0 och 2π

2.3.5 Logaritmlagar och exempel

Dessvärre har ovanstående konsekvenser när det gäller logaritmlagar och räkningar i allmänhet som man bör vara försiktig med. Vi tar ett exempel för att belysa problemet med logaritmlagarna till att börja med:

Beräkna $Log(a^2)$ och $2Log(a)$ för $a = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ (notera att det gäller logaritmens principalgren).

Lösning:

Enligt definitionen beräknas $Log(a)$ som

$$Log(a) = \ln|a| + iArg(a) = 0 + \frac{3\pi}{4}i = \frac{3\pi}{4}i$$

Således är

$$2Log(a) = 2 \cdot Log(a) = 2 \cdot \left(\frac{3\pi}{4}i\right) = \boxed{\frac{3\pi}{2}i} \qquad (*)$$

Vidare är

$$Log(a^2) = Log\left(\left(e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^2\right) = Log\left(e^{\frac{3\pi}{2}i}\right) = \ln\left|e^{\frac{3\pi}{2}i}\right| + iArg\left(e^{\frac{3\pi}{2}i}\right) = 0 + iArg\left(e^{\frac{3\pi}{2}i}\right) \quad (**)$$

Eftersom vi använder logaritmens principalgren, dvs. $-\pi < Arg(z) < \pi$ får vi $Arg\left(e^{\frac{3\pi}{2}i}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

$$\therefore Log(a^2) = \boxed{-\frac{\pi}{2}i}$$

Vi ser alltså att $\boxed{Log(a^2) \neq 2Log(a)}$.

Enligt mig är detta nog det mest dryga koncept man behöver greppa i kursen. Jag menar, kom igen. Om ni tycker att det är märkligt att man hävdar att argumenten $\frac{3\pi}{2}$ och $-\frac{\pi}{2}$ inte är samma sak, så hänvisar jag än en gång till spiralerna i figur 2.2 – tänk på var i spiralen man befinner sig om man färdats från $-\pi$ till $-\frac{\pi}{2}$ gentemot om man färdats från $-\pi$ till $\frac{3\pi}{2}$; det skiljer en hel ”våning”, så att säga. Nu återgår vi till exemplet och går igenom varför räkningarna ser ut som de gör:

Uppenbarligen ligger skillnaden i att vi för $Log(a^2)$ måste tänka ett extra steg eftersom $\frac{3\pi}{2} > \pi$. Men varför är det okej att $2Log(a) = \frac{3\pi}{2}i$ när vi använder principalgrenen? Om vi tittar på den *andra* likheten i $(*)$, där jag förtydligat att $2Log(a)$ egentligen bara är logaritmfunktionen multiplicerad med 2, är det kanske lättare att inse att vi har en *skalär* multiplicerad med ett komplext tal $\left(0 + \frac{3\pi}{4}i\right)$. Eftersom $Arg\left(e^{\frac{3\pi}{4}i}\right) = \frac{3\pi}{4}$ uppfyller principalgrenens villkor behöver vi alltså inte modifiera något, vi behöver bara utföra räkningen $\left(0 + \frac{3\pi}{4}i\right) \cdot 2 = \frac{3\pi}{2}i$.

I det andra fallet försöker vi istället beräkna logaritmen enligt principalgrenen av (a^2), men vi får problem eftersom $a^2 = e^{\frac{3\pi}{2}i}$. För att hitta logaritmens värde för a^2 måste vi alltså använda det argument som faller inom ramen för principalgrenens definition, varpå vi ”hoppar ner” en våning i spiralen.

$\log(z)$ är bara ett komplext tal. Så länge argumentet av z är definierat enligt den gren som används kan vilka operatorer som helst införas. Är argumentet av z å andra sidan *inte* definierat, måste vi se till att detta faller inom definitionsområdet för den gren som används.

2.3.6 Holomorfitet, en definition och ett avslutande exempel

Sats:

Funktionen $z \mapsto Log(z)$ är **holomorf** på sin definitionsmängd, med derivatan

$$\big(Log(z)\big)' = \frac{1}{z}$$

Definition:

Vi definierar

$$z^\alpha, \quad z \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

Som

$$\boxed{z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}}$$

Observera att z^α ej blir entydigt bestämd i det allmänna fallet.

För att avsluta denna fantastiska del tar vi ett lite fräckt exempel:

Bestäm alla möjliga värden till i^i

Lösning:

Med definitionen ovan får vi

$$i^i = e^{i\log(i)} = e^{i(\ln|i| + i\arg(i))} = e^{i\left(0+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)} = \boxed{e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}}$$

Alltså är $i^i \in \mathbb{R}$. Inte alls märkligt.

2.4 Trigonometriska funktioner

Dessa kommer användas flitigt, men nu radar jag bara upp varje funktion för sig lite snabbt. Det som är viktigt att notera är att man använder sig av **Eulers formler** för att definiera funktionerna i allmänhet:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$

De hyperboliska funktionerna är vidare

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

För alla $z \in \mathbb{C}$.

3 Integralkalkyl

I kursen förekommer en hel del ”vanliga” integraler, men jag kommer här fokusera på den kategori som överlägset förekommer mest: **kurvintegraler**.

3.1 Komplexa integraler

Om vi har en funktion $f(t) = u(t) + iv(t)$, det vill säga $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, så definierar vi

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

Vi delar alltså upp integraler i real- och imaginärdelar och integrerar därefter som vanligt. Vi tar ett exempel (med två alternativa räkningar) innan vi går över till kursens kärna:

Beräkna $\int_0^1 (t+i)^2\,dt$

$$\text{Alternativ 1: } \int_0^1 (t+i)^2\,dt = \int_0^1 (t^2 + 2ti - 1)\,dt = \int_0^1 (t^2 - 1)\,dt + 2i\int_0^1 t\,dt =$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - t\right]_0^1 + 2i\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \left[\left(\frac{1}{3} - 1\right) + 2i\cdot\frac{1}{2}\right] - [0 - 0] = \boxed{-\frac{2}{3} + i}$$

$$\text{Alternativ 2: } \int_0^1 (t+i)^2\,dt = \left[\frac{(t+i)^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{t^3 + 3t^2i - 3t - i}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\big((1 + 3i - 3 - i) - (-i)\big) = \boxed{-\frac{2}{3} + i}$$

3.2 Kurvintegraler

Vi börjar med en definition. En ***kurva*** är en funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ där vi kräver att $z(t)$ består av styckvis deriverbara (C^1-)funktioner , och $z'(t) \neq 0$.

Definition:

Givet en kurva γ som parametriseras av $z(t) = x(t) + iy(t)$, där $\alpha \leq t \leq \beta$, och en funktion $f(z)$, definierar vi ***kurvintegralen*** av $f(z)$ längs γ som

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt$$

Vi drar direkt ett exempel som väver in ett flertal koncept, trick och tankegångar:

Låt kurvan γ vara enhetscirkeln och $f(z) = z^n, n \in \mathbb{Z}$. Beräkna kurvintegralen av f längs γ.

Det första vi behöver göra är att hitta ett lämpligt sätt att skriva γ:

1. Hitta en lämplig parametrisering. För detta exempel, eftersom vi har enhetscirkeln, väljer vi $z(t) = e^{it}$.
2. Bestäm det intervall som t kommer löpa över med ovanstående parametrisering. **Observera att <u>riktningen</u> har betydelse**. Eftersom vi har en cirkel måste t gå från 0 till 2π, eller som jag kommer skriva framöver: $t: 0 \to 2\pi$.
3. Beräkna $z'(t)$ och beräkna därefter kurvintegralen genom definitionen. I detta fall är $z'(t) = ie\hat{}it$. Vi får alltså

$$\int_\gamma z^n\,dz = \int_0^{2\pi} e^{int} \cdot ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\,dt$$

Eftersom den primitiva funktionen till $e^{it(n+1)}$ är $\left(\frac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)}\right)$, vilken ej är definierad då $n = -1$ måste vi dela upp integralen i två fall. Ett då $n \neq -1$ och ett annat för övriga fall:

$$i\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\,dt = \begin{cases} \left[\dfrac{e^{it(n+1)}}{n+1}\right]_0^{2\pi}, n \neq -1 \\ i\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{it((-1)+1)}\,dt, n = -1 \end{cases} = \begin{cases} \left(\dfrac{e^{2\pi i(n+1)}}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\right), & n \neq -1 \\ i\displaystyle\int_0^{2\pi} 1\,dt, & n = -1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\left(e^{2n\pi i}e^{2\pi i} - 1\right), & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}$$

För $n \neq -1$ har vi alltså heltalsmultiplar av 2π i exponenten, vilket ger $e^{2n\pi i} = e^{0i} = e^{2\pi i} = e^{4\pi i} = \cdots = 1$. Den övre raden blir alltså $\frac{1}{n+1}(1 \cdot 1 - 1) = 0$. Vi får slutligen

$$\boxed{\int_\gamma z^n\,dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}}$$

Under kommande delar kommer vi få verktyg som leder oss till ovanstående mycket fortare.

3.2.1 Integraler m.a.p. båglängd

Egentligen bara användbart i ett fåtal fall i kursen, men om man beräknar en kurvintegral med avseende på båglängd, dvs. $|dz|$ eller ibland betecknat "ds", får vi

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)|z'(t)|\,dt$$

Anledningen till att detta ibland är användbart är på grund av specialfallet då $f(z) = 1$. Vi får då

$$\int_\gamma 1\,|dz| = \int_\alpha^\beta 1 \cdot |z'(t)|\,dt = l(\gamma)$$

Där $l(\gamma)$ är **längden av kurvan**. Detta resultat används i följande ***fantastiskt*** trevliga (och viktiga) sats:

3.2.2 ML-Olikheten

Sats:

*Om γ är en **styckvis slät** kurva, och f en kontinuerlig funktion som uppfyller att*

$$|f(z)| \leq M \text{ för alla } z \in \gamma$$

Då gäller att

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq ML, \text{ där } L \text{ är längden av } \gamma$$

Beviset för denna sats är kort:

Bevis:

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt\right| \leq \int_\alpha^\beta \big|f\big(z(t)\big)\big||z'(t)|\,dt \leq \int_\alpha^\beta M|z'(t)|\,dt = ML$$

Notering: *Den första olikheten följer av **triangelolikheten** $|a+b| \leq |a| + |b|$, och den andra olikheten av satsens förutsättning att f är begränsat för alla $z \in \gamma$.*

Jag rekommenderar att man verkligen lägger denna sats på minnet, då den brukar förekomma som nyckelelement i såväl andra- och tredje-uppgifter som sjätte-uppgifter på tentor. Vi tar en snabb genomgång av förutsättningarna, då dessa termer kommer användas gång på gång framöver:

1. En **slät** kurva innebär att kurvan är kontinuerlig i sin helhet;
2. En **styckvis** slät kurva, liksom en styckvis kontinuerlig *funktion*, är således en kurva som är kontinuerlig på ett givet intervall.
3. En **begränsad** funktion uppfyller att $f(z) \leq a$, för alla $\alpha \leq z \leq \beta$ (notera att α, β kan vara $\pm\infty$). Om $|f(z)| \leq a$ är funktionen således begränsad även i absoluta termer (duh).

Vi tar ett exempel:

Visa att

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_R^+}\frac{1}{z^2+1}dz\right)=0$$

Där C_R^+ är den övre halvan av en cirkel med radien R.

Lösning:

Om vi följer punktlistan ovan, bara för sakens skull, så inser vi att den övre halvan av en cirkel faktiskt är styckvis slät, och att funktionen $\frac{1}{z^2+1}$ är begränsad av 1 samt går mot 0 då $R\to\infty$, eftersom även $z\to\infty$. Vi kommer dock se att exakt vad funktionen begränsas av är relativt oviktigt, då vi väljer M så att det säkert är större än $|f(z)|$ (spoilers…)

Eftersom förutsättningarna är uppfyllda kan vi använda ML-olikheten för att uppskatta integralens storlek:

$$\left|\int_{C_R^+}\frac{1}{z^2+1}dz\right|\le\underbrace{\pi R}_{L}\cdot\max_{z\in C_R^+}\left|\frac{1}{z^2+1}\right|\le\pi R\cdot\underbrace{\frac{4}{R^2}}_{M}=\frac{4\pi}{R}$$

Vi ser att $\lim_{R\to\infty}\left(\frac{4\pi}{R}\right)=0$ och alltså är

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_R^+}\frac{1}{z^2+1}dz\right)=0$$

Jag vill poängtera att vi i den andra olikheten effektivt säger att $M=\frac{4}{R^2}$ även om z på C_R^+ går mot $\frac{1}{z^2}$. Detta är som sagt för att försäkra oss om att $|f(z)|\le M$ faktiskt gäller.

3.2.3 Kurvintegraler och primitiva funktioner

Primitiva funktioner i komplex analys definieras nästan likadant som i reell analys sånär som på en detalj. Om f är definierad på $\Omega\in\mathbb{C}$ så är dess primitiv F en funktion sådan att $F'=f$ på **hela** $\Omega\to$ ***F* är alltså holomorf på Ω**.

Ett alternativt sätt att beräkna kurvintegraler följer av detta:

Om vi kan hitta en primitiv till f så är

$$\int_\gamma f(z)\,dz=F(b)-F(a)$$

*I **specialfallet** då γ är en **sluten** kurva och f har primitiv så är*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz=0$$

Beviset av detta följer genom att gå via kurvintegralens definition.

3.2.4 Cauchys integralsats

Här inleds alltså Cauchy-kavalkaden, med formler, satser och diverse annat trevligt:

Sats

Låt Ω vara ett område i $\mathbb{C}$, och anta att f är holomorf på en omgivning av Ω. Då är

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0$$

Där randen till $\Omega, \partial\Omega$, är positivt orienterad och slät.

Vi tar två exempel. Det första belyser hur man bör tänka när man tittar på en integral, och det andra kräver en del mer aktivt arbete:

Beräkna

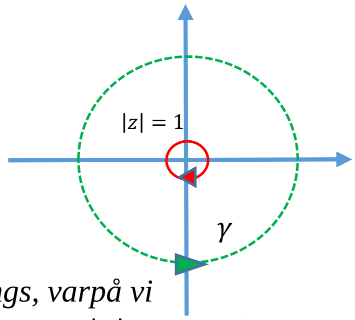
$$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z+4)e^z}dz$$

Lösning:

Eftersom integranden består av holomorfa funktioner i hela $\mathbb{C}$ förutom i $z = -4 \notin |z| = 2$ ger Cauchys integralsats direkt att integralen är 0.

Beräkna

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz$$



Lösning:

*I detta fall är funktionen holomorf överallt utom i **origo**.*
*Dessvärre ligger denna punkt **inuti** γ (grön), som vi integrerar längs, varpå vi måste hantera den på något sätt. Vi gör detta genom att införa kurvan $\sigma: |z| = 1$ (röd). Lägg märke till att denna kurva är **negativt** orienterad. Tillsammans utgör alltså γ och σ randen till ett område Ω där origo ej är inkluderad. En integral över detta område måste således, enligt Cauchys integralsats, vara 0. Vi får*

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz - \int_\sigma \frac{1}{z}dz = 0$$

Notera att ${}^1/_z = z^{-1}$ och på sidan 13 har vi visat att denna integral är $2\pi i$

$$\therefore \int_\gamma \frac{1}{z}dz - 2\pi i = 0 \leftrightarrow \boxed{\int_\gamma \frac{1}{z}dz = 2\pi i}$$

3.2.5 Cauchys integralformel

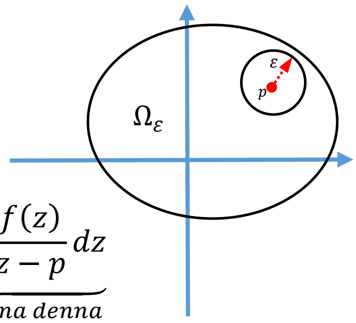
Låt Ω vara ett område i $\mathbb{C}$ (med styckvis slät rand) och låt $p \in \Omega$. Om f är holomorf på en omgivning av Ω så är

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(z)}{z-p}dz$$

Detta är typ Funktionsteorins heliga graal om man frågar lärare, just för att det är ett ”fantastiskt resultat”. Måhända, men det som åtminstone intresserade mig något jävligt är det faktum att ***integralformen tillåter att det finns en pol inom området man integrerar kring***. För att se varför detta fungerar (se beräkningen för I_1 nedan) så inkluderar jag beviset som även knyter ihop flera andra koncept:

Bevis

Låt $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \{z{:}\, z-p \leq \varepsilon\}$*, då är* $\frac{f(z)}{z-p}$ *holomorf på* Ω_ε.



Cauchys integralsats ger

$$0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-p}dz = \int_{\partial\Omega}\frac{f(z)}{z-p}dz - \underbrace{\int_{|z-p|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-p}dz}_{vill\ beräkna\ denna}$$

$$\int_{|z-p|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-p}dz = \int_{|z-p|=\varepsilon}\frac{f(z)+f(p)-f(p)}{z-p}dz =$$

$$= \underbrace{\int_{|z-p|=\varepsilon}\frac{f(z)-f(p)}{z-p}dz}_{=I_1} + \underbrace{\int_{|z-p|=\varepsilon}\frac{f(p)}{z-p}dz}_{=I_2}$$

I_2:

$$f(p)\int_{|z-p|=\varepsilon}\frac{1}{z-p}dz = \begin{bmatrix} z=\varepsilon e^{it}+p \\ 0\leq t\leq 2\pi \end{bmatrix} f(p)\int_0^{2\pi}\frac{1}{\varepsilon e^{it}}\cdot\varepsilon i e^{it}dt = 2\pi i f(p)$$

I_1: Målet är att visa att $I_1 \to 0$ *då* $\varepsilon \to 0$

$$\left|\int_{|z-p|=\varepsilon}\frac{f(z)-f(p)}{z-p}dz\right| \leq 2\pi\varepsilon\cdot\max_{|z-p|=\varepsilon}\left(\frac{f(z)-f(p)}{\underbrace{z-p}_{=\varepsilon}}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\cdot 2\pi\varepsilon\cdot\max_{|z-p|=\varepsilon}\underbrace{\big(f(z)-f(p)\big)}_{\to 0\ ty\ f\ kont.}$$

$$\therefore 2\pi i f(p) = \int_{\partial\Omega}\frac{f(z)}{z-p}dz$$

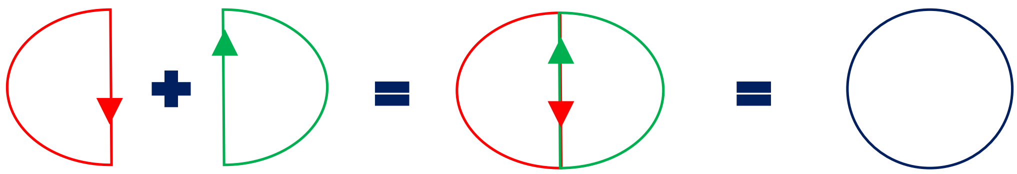
3.2.6 Exempel på Cauchys Integralformel

Följande exempel innehåller metodik som jag tycker att man återfann genom hela kursen, och därför kommer jag försöka gå igenom dem riktigt noga:

Exempel 1: *Beräkna följande kurvintegral*

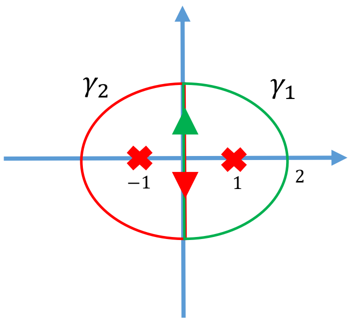
$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}\,dz$$

Resonemang: Integranden har två poler i $z = \pm 1$, och integralformeln kan bara ”hantera” en. Detta gör alltså att vi inte kan använda $|z| = 2$ som vårt område om vi vill använda integralformeln. Vi kan dock dela upp detta område i två cirkelbågar, sluta dessa och genomlöpa dem i motsatta led:



Eftersom vi nu har två separata områden som täcker en pol vardera, och tillsammans utgör det område som efterfrågas, kan vi använda detta resonemang för att lösa uppgiften:

Lösning



*Vi inför två kurvor: γ_1 och γ_2 enligt figuren till höger. För att kunna använda Cauchys integralformel måste vi ha integranden på formen $\frac{f(z)}{z-p}$ där p utgör den ”farliga” punkten, alltså **polen** i respektive område. Vi får alltså*

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^2-1}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{(z+1)(z-1)}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{\overbrace{e^z/(z+1)}^{f(z)}}{z-\underbrace{1}_{p}}\,dz = 2\pi i f(1) = e\pi i$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^2-1}\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{e^z/(z-1)}{z+1}\,dz = 2\pi i f(-1) = -\frac{\pi i}{e}$$

Vi får alltså slutligen

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}\,dz = \pi i\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

Exempel 2: *Beräkna följande reella integral genom komplex analys*

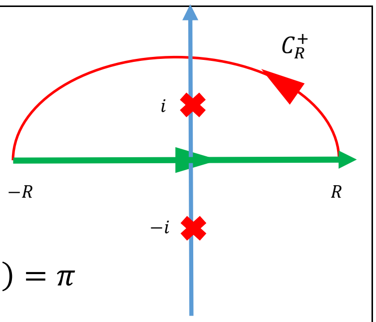
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Resonemang: Vi kan direkt, från kursen Endimensionell Analys, konstatera att svaret blir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{X\to\infty} [\arctan x]_{-X}^{X} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Så vi har något att arbeta mot åtminstone. För att visa ovanstående resultat med komplex analys måste vi alltså på något sätt visa att **komplexa** z inte ger något bidrag till integralen, vilket rimligtvis görs med hjälp av ML-olikheten. För att göra detta kan vi integrera längs en halvcirkel där ändarna ansluts via real-axeln. Den vanligaste frågan som följer av detta är ”varför just en halvcirkel? Fungerar inte en hel cirkel?” Svaret upplever jag har två delar. För det första är en halvcirkel det absolut enklaste sättet att inkludera det komplexa talplanet i beräkningarna, utan att dela real-axeln i mer än en del. Man skulle kunna använda en rektangel med basen längs real-axeln och få samma svar, men detta ger fyra linjestycken att analysera istället för två. För det andra, eftersom man använder ML-olikheten, som i sin tur tittar på funktionens ***absoluta storlek*** längs kurvan, kommer en halvcirkel ge en bild av **hela** talplanet. Att använda en halvcirkel i dessa sammanhang är alltså en teknik som vilken annan som helst… Nog snackat, dags för verkstad.

Lösning



$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+1)(z-1)}$, alltså enkelpoler i $z = \pm i$.

Vi får alltså, enligt Cauchys integralformel

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int_{\partial\Omega} \frac{1/(z+i)}{z-i}\,dz = 2\pi i f(i) = \pi$$

***Men** integralen kan skrivas som*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{1+z^2}\,dz = \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx}_{=I_1} + \underbrace{\int_{C_R^+} \frac{1}{1+z^2}\,dz}_{=I_2}$$

För att beräkna I_1 undersöker vi först I_2:

$$\left|\int_{C_R^+} \frac{1}{1+z^2}\,dz\right| \leq \pi R \cdot \max_{z\in C_R^+}\left(\frac{1}{1+z^2}\right) \leq \pi R \cdot \frac{4}{R^2} = \frac{4\pi}{R} \to 0 \text{ då } R \to \infty$$

Eftersom $I_2 \to 0$ då $R \to \infty$ gäller att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{1+z^2}\,dz = \pi$$

3.2.6 Följder av Cauchys integralformel

1) ***Derivering m.a.p p:***
Om villkoren för integralformeln är uppfyllda går det att derivera f m.a.p p för alla $p \in \Omega$ enligt *Cauchys differentieringsformel* ***(notera att $n = 0$ ger integralformeln)***

$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}\,dz$$

2) ***Analytiskhet och oändlig deriverbarhet:***
Formeln implicerar att en holomorf funktion på Ω är *oändligt deriverbar* däri, och även att funktionen är *analytisk* och kan således uttryckas som en potensserie.

3.2.7 Övriga resultat och avslutande exempel

Under denna rubrik följer bland annat satser som kan vara användbara att hålla i åtanke:

Moreras sats

*Om f är **kontinuerlig** på $\Omega \in \mathbb{C}$ och $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ för alla **slutna** $\gamma \in \Omega$, då är f holomorf.*

Liouvilles sats

*Om f är holomorf på **hela** $\mathbb{C}$ och dessutom **begränsad**, då är f **konstant**.*

Bevis

*Antag att $|f| \leq M$, låt $p \in \mathbb{C}$ vara en **godtycklig** punkt, låt γ vara en **sluten** kurva och låt $R > 0$. Cauchys differentieringsformel ger*

$$f'(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)^2}dz$$

Applicerar vi ML-olikheten på denna derivata får vi

$$|f'(p)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)^2}dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi R \cdot \frac{M}{R^2} = \frac{M}{R} \to 0 \text{ då } R \to \infty$$

$$\therefore f'(p) = 0 \text{ och } p \text{ godtycklig } \to f \text{ konstant}$$

Algebrans fundamentalsats

*Antag att p är ett polynom som **saknar** nollställe i $\mathbb{C}$. Då är p **konstant**.*

Bevis

Antag att p är ett polynom utan nollställe. Låt $f(z) = {}^{1}/_{p(z)}$. Eftersom p saknar nollställe måste f således vara holomorf på $\mathbb{C}$. Vi vill nu visa att f är begränsad:

För $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ kan vi genom polynomuppskattning konstatera att det finns ett $\rho > 0$ sådant att

$$\frac{1}{2}|a_n|\rho^n < \frac{1}{2}|a_n||z^n| < |p(z)| \text{ om } |z| > \rho$$

Vidare, eftersom f är holomorf, är denna även kontinuerlig och antar således maximum och minimum. Speciellt följer det av ovan att $|f|$ begränsad då $|z| \leq \rho$. Eftersom f även är holomorf på $\mathbb{C}$ uppfylls Liouvilles sats, och f är konstant. Men $p(z) = {}^{1}/_{f(z)}$, så p måste vara konstant.

Exempel: *Beräkna följande kurvintegral genom komplex analys*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\cos t}\,dt$$

Lösning

Låt

$$\begin{bmatrix} z = e^{it}, t\colon 0 \to 2\pi \text{ (enhetscirkeln)} \\ dz = ie^{it}dt \leftrightarrow dt = \dfrac{1}{ie^{it}}dz = \dfrac{1}{iz}dz \\ \cos t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \dfrac{z+\frac{1}{z}}{2} \end{bmatrix}$$

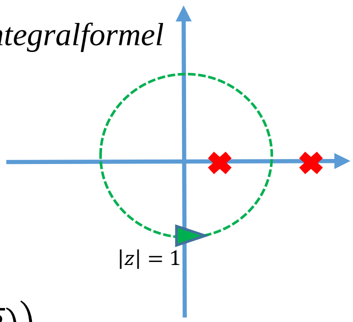
Vi får

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\cos t}\,dt = \int_{|z|=1} \frac{1}{\left(2-\dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)} \cdot \frac{1}{iz}dz = i\int_{|z|=1} \frac{2}{z^2-4z+1}dz$$

Vi beräknar integrandens poler

$$z^2-4z+1 = 0 \leftrightarrow (z-2)^2 - 3 = 0 \leftrightarrow z = 2 \pm \sqrt{3}$$

Eftersom en av polerna ligger utanför γ kan vi använda Cauchys integralformel med $f(z) = \frac{2i}{\left(z-(2+\sqrt{3})\right)}$:



$$i\int_{|z|=1} \frac{2}{z^2-4z+1}dz = i\int_{|z|=1} \frac{2\big/\left(z-(2+\sqrt{3})\right)}{\left(z-(2-\sqrt{3})\right)}dz =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\frac{2i}{z-(2+\sqrt{3})}\right]_{z=(2-\sqrt{3})} = -4\pi \cdot \frac{1}{-2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$$

Och nu går vi vidare till *ännu* mer förvirrade saker!

4 Talföljder, Rekursionsekvationer och Serier

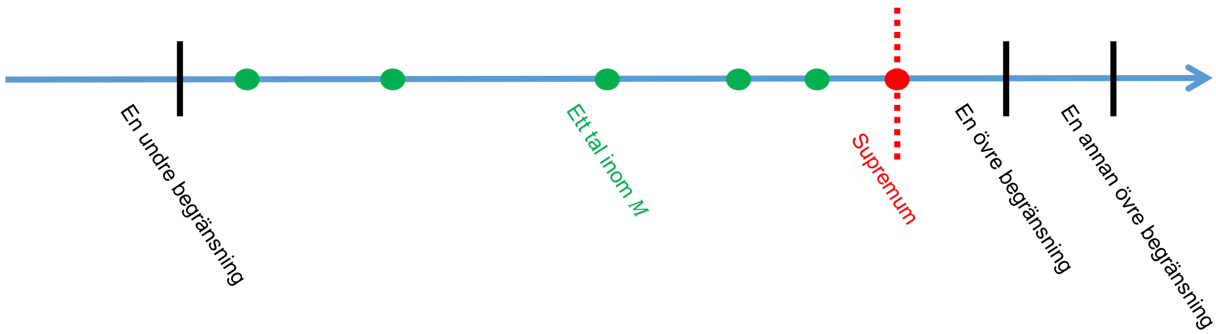
I denna del, och även nästkommande i "sammanfattningen", verkar extremt stor vikt läggas vid att man verkligen **motiverar** varje steg man gör genom att faktiskt namnge de olika tekniker man använder. Jag rekommenderar därför starkt att man försöker lära sig satserna i dessa delar mer ingående än man kanske brukar göra.

4.1 Supremum

Definition

*Låt $M \in \mathbb{R}$. Om M är **uppåt begränsad**, så definierar vi supremum av M, betecknat $\sup M$, som det **minsta** tal x sådant att $x \geq a$ för alla $a \in M$. Om M ej är övre begränsat låter vi* $\sup M = \infty$.

Det blir lättare att förstå genom en bild:



En övre (eller undre) begränsning är alltså inte unik, men supremum är specifikt den ***minsta*** övre begränsningen som en mängd M har.

Exempelvis är $\sup[0,1] = 1 = \sup[0,1)$.

4.2 Rekursionsekvationer

Att lösa rekursionsekvationer är lite som att lösa differentialekvationer eftersom lösningar består av den homogena lösningen kombinerad med en partikulärlösning. Ekvationens **ordning** är det antal påföljande termer som varje given term beror av, alltså:

$$\boxed{\begin{array}{c} x_{n+1} + ax_n = b \rightarrow \text{ Första ordningens rekursionsekvation} \\ x_{n-2} + ax_{n-1} + bx_n = c \rightarrow \text{ andra ordningens rekursionsekvation} \end{array}}$$

4.2.1 Lösningsmetod

Vi går igenom lösningsmetoden genom att dra ett parallellt exempel. Att ***lösa*** innebär att hitta det x_n som uppfyller villkoren:

Lös rekursionsekvationen

$$\begin{cases} x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 4n + 1 \\ x_0 = 1, \qquad x_1 = 2 \end{cases}$$

1) ***Hitta den homogena lösningen***

Precis som för differentialekvationer får man den ***homogena*** lösningen genom att lösa den homogena (högerledet $= 0$) ekvationens *karakteristiska polynom* som utläses genom att ersätta de olika x-termerna med r av motsvarande grad:

Den homogena ekvationen är

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$$

Vars karakteristiska polynom är

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

Som har lösningen

$$(r-2)(r-3) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 3 \end{cases}$$

Den homogena lösningen x_n^h ges, i standardfallet, av

$$\boxed{x_n^h = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n}$$

Vi får alltså

$$x_n^h = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$$

2) ***Ansätt en partikulärlösning***

För att ansätta en partikulärlösning är vi intresserade av hur originalekvationens ***högerled*** ser ut. Vi har $\boxed{x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 4n + 1}$, där högerledet är *ett* ***polynom*** *av* ***grad 1***. Grundregeln är då att ansätta en partikulärlösning av ***samma typ*** som högerledet. Vi ansätter alltså $\boxed{x_n^p = an + b}$

3) ***Uttryck nästkommande termer genom partikulärlösningen***

Vi får

$$\begin{bmatrix} x_n^p = an + b \\ x_{n+1}^p = a(n+1) + b \\ x_{n+2}^p = a(n+2) + b \end{bmatrix}$$

4) ***Insättning i ursprungsekvationen***

Genom vår ansatta partikulärlösning får vi nu

$$[a(n+2) + b] - 5[a(n+1) + b] + 6[an + b] = 4n + 1 \leftrightarrow$$

$$\underbrace{n(a - 5a + 6a) + (2a + b - 5a - 5b + 6b) = 4n + 1}_{\text{jämför koefficienter}} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ -3a + 2b = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 7/2 \end{cases}$$

$\left(2n + \frac{7}{2}\right)$ är alltså en partikulärlösning.

5) ***Lägg ihop den homogena lösningen med partikulärlösningen***

$$x_n = x_n^h + x_n^p = \boxed{2n + \frac{7}{2} + A \cdot 2^n + B \cdot 3^n}$$

6) ***Bestäm konstanterna A och B genom begynnelsevillkoren***

Genom $x_0 = 1$ och $x_1 = 2$ (alltså för $n = 0$ respektive $n = 1$) får vi

$$\begin{cases} x_0 = \frac{7}{2} + A + B = 1 \\ x_1 = 2 + \frac{7}{2} + 2A + 3B = 2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A + B = -\frac{5}{2} \\ 2A + 3B = -\frac{7}{2} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A = -4 \\ B = {}^{3}/_{2} \end{cases}$$

Den fullständiga lösningen ges alltså av

$$\boxed{x_n = 2n + {}^{7}/_{2} - 4 \cdot 2^n + {}^{3}/_{2} \cdot 3^n}$$

4.2.2 Undantagsregler

1. Partikulärlösningen får inte vara på samma form som någon av termerna i den homogena lösningen.

Om vi exempelvis har

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$$

Vill vi ansätta en partikulärlösning på formen

$$x_n^p = a \cdot 2^n$$

Men den homogena lösningen blir

$$x_n^h = \underbrace{A \cdot 2^n}_{\text{samma som } x_n^p} + B \cdot 3^n$$

Lösning: multiplicera med $n \rightarrow \boxed{x_n^p = a \cdot n \cdot 2^n}$

2. Hantering av dubbelrötter till det karakteristiska polynomet

Lösning: multiplicera den ena koefficienten med $n \rightarrow \boxed{x_n^h = (An + B)r^n}$

Viktig notering: Detta fall kombinerat med punkt 1 kan skapa riktigt jobbiga situationer när man sitter på en tenta, speciellt om man bara chansar vilt när man ansätter partikulärlösningar. Vi tar ett exempel där lösningen inte är helt uppenbar:

För rekursionsekvationen

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = n2^n$$

Får det karakteristiska polynomet dubbelroten $r_{1,2} = 2$, varpå $\boxed{x_n^h = (An + B)2^n}$. Men ekvationens högerled är (enligt mig inte helt uppenbart vid första anblick) ett polynom av grad 1 multiplicerat med 2^n, så vi vill egentligen ansätta $x_n^p = (an + b) \cdot 2^n$. Denna lösning återfinns dock i den homogena lösningen. Om vi försöker lösa detta problem genom att multiplicera med n får vi $x_n^p = (an^2 + bn) \cdot 2^n$, men då återfinns $b \cdot n \cdot 2^n$ i x_n^h…

Lösning: Multiplicera med den grad av n som gör att lösningen inte längre återfinns i den homogena lösningen. I detta fall bör vi ansätta $\boxed{x_n^p = (an^3 + bn^2) \cdot 2^n}$.

3. Hantering av komplexa rötter till det karakteristiska polynomet

Lösning: I detta fall ombeds man nästan undantagslöst att svara på *"reell form"*. Detta innebär att man uttrycker sin lösning genom sinus- och cosinus-termer.

Har vi exempelvis rötterna $\boxed{r = 1 \pm i}$ blir den homogena lösningen

$$x_n^h = A(1+i)^n + B(1-i)^n = A\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + B\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n$$

Som isåfall skrivs om med hjälp av De Moivres sats:

$$x_n^h = A\sqrt{2}^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) + B\sqrt{2}^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= (A+B)\sqrt{2}^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i(A-B)\sqrt{2}^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

För att sedan svara på reell form kan vi skriva om med nya konstanter:

$$K_1 = A + B$$
$$K_2 = i(A - B)$$

Vilket ger

$$\boxed{x_n^h = K_1\sqrt{2}^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + K_2\sqrt{2}^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$$

4.3 Serier

Denna del av kursen är lite som koriander (eller Håkan Hellström); något man antingen älskar eller hatar. Det är nog en av de mest konkreta delarna i kursen, men uppgifterna kan vara väldigt luriga, och av den anledningen rekommenderar jag starkt att man löser uppgifter med målet att försöka få in en ***vana***. Dels för att lära sig känna igen mönster, och dels för att verkligen lära sig de tekniker som präglar avsnittet.

Analysen har två huvudkomponenter:

1. Avgöra om en serie **konvergerar** eller **divergerar**,
2. Uppskatta seriers värde.

Denna del är utformad så att seriens **typ** gås igenom först, följt av **teori** kopplad till just den typen och avslutningsvis har jag försökt hitta värdefulla **exempel** för varje typ.

4.3.1 Geometriska serier

En geometrisk serie är på formen

$$\sum_{k} C \cdot r^k$$

Summering av ett **ändligt** antal termer följer formeln

$$\sum_{k=1}^{N} C \cdot r^k = \frac{a_1(1 - r^k)}{1 - r}$$

Medan en **oändlig** geometrisk summa beräknas som

$$\sum_{k=1}^{\infty} C \cdot r^k = \frac{a_1}{1 - r}$$

En sådan serie konvergerar om $\boxed{|r| < 1}$

Exempelvis är

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k}$$

En konvergent serie, eftersom $|r| = \left|\frac{1}{1+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.

4.3.2 Positiva serier

En serie kallas positiv om ***samtliga termer*** är positiva, alltså $0 \leq a_k$, helt enkelt. För att avgöra om just positiva serier konvergerar finns ett antal test, men det man ***alltid*** bör göra först, är att undersöka det så kallade ***divergenskriteriet***:

Sats (divergenskriterium för positiva serier)

*Om $a_k \nrightarrow 0$ så är $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$ divergent. Omvändningen gäller dock **ej**.*

4.3.2.1 Jämförelsetestet

Sats

Antag att $0 \leq a_k \leq b_k$

$$1)\ \text{Om} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ är konvergent, så är} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent.}$$

$$2)\ \text{Om} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ är divergent, så är} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent.}$$

4.3.2.2 Jämförelsetestet på gränsvärdesform

Sats

Anta att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *och* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *är positiva serier och att gränsvärdet*

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

existerar. Gränsvärdet tillåts också vara ***oegentligt****, alltså* $L = \infty$.

1) *Om* $L < \infty$ *och* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *är konvergent, så är även* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent.*

2) *Om* $L > 0$ *och* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *är divergent, så är även* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent.*

Så om $0 < L < +\infty$ gäller att *båda* serier är konvergenta, eller att båda är divergenta. Här tar vi ett exempel:

Exempel: *Undersök konvergensen av serien* $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left({}^{1}/_{2^k}\right)$

Lösning

Notera att $0 \leq \frac{1}{2^k} \leq 1$ *för alla* k*, varpå* $\sin\left(\frac{1}{2^k}\right) \geq 0$*. Vi behöver hitta något att jämföra serien med för att kunna avgöra om den är konvergent. Vi kan exempelvis använda oss av standardgränsvärdet*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Med hjälp av detta vet vi att

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2^k}\right)}{\frac{1}{2^k}} \right) = 1 = L < \infty \text{ (eftersom } \frac{1}{2^k} \to 0 \text{ då } k \to \infty)$$

Och eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ *är konvergent (kan visas genom exempelvis jämförelse med* $\sum \frac{1}{k^2}$*) är även* $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2^k}\right)$ *konvergent.*

4.3.2.3 Integralkriteriet

Detta test går ut på att jämföra partialsummor med värdet av en generaliserad integral som man tror sig kunna beräkna. Om man tänker tillbaka på Riemannsummor som används för att uppskatta integraler, kan man visa att för en ***avtagande och positiv*** funktion $f(x)$ gäller

$$\int_1^N f(x)\,dx + f(N) \leq \sum_{k=1}^{N} f(k) \leq \int_1^N f(x)\,dx + f(1)$$

Eftersom $f(1)$, eller egentligen bara funktionens första värde där den är definierad, endast är en konstant, måste det gälla att

$$\text{Om } \int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konvergerar, så är även serien } \sum_{k=1}^\infty f(k) \text{ konvergent.}$$

Speciellt inkommer här idén av så kallade ***p-serier***, det vill säga funktioner på formen

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

För sådana gäller att

$$\text{Om } p > 1 \text{ så konvergerar } \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx\text{, och detsamma gäller för serier på formen } \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^p}$$

Notering: på tentor är detta resonemang i sin ensamhet inte tillräckligt för att få rätt. Dock är det användbart för att resonera.

Vi tar ett exempel innan vi lämnar positiva serier:

Exempel: *Konvergerar* $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k \ln k}$*?*

Lösning

Det är svårt att hitta bra serier att jämföra med, så vi undersöker om $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\,dx$ *konvergerar*

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{bmatrix} \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_{\ln 2}^\infty = \text{"}\infty\text{"}$$

Eftersom integralen är divergent, är även serien divergent.

4.3.3 Generella serier

Nästkommande delar behandlar serier där termerna inte nödvändigtvis är endast positiva. För att göra det behöver vi introducera ett nytt koncept:

Definition & Sats (absolutkonvergens)

$$\sum_{k=1}^\infty a_k \text{ är absolutkonvergent om } \sum_{k=1}^\infty |a_k| \text{ är konvergent.}$$

Det gäller även att

$$\text{Om } \sum_{k=1}^\infty |a_k| \text{ är konvergent, så är även } \sum_{k=1}^\infty a_k \text{ konvergent.}$$

4.3.3.1 Komplexa serier

För serier där $a_k = x_k + iy_k$ där $x, y \in \mathbb{R}$, gäller att $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergerar ***om och endast om***

$$\sum_{k=1}^\infty |x_k| \textbf{ och } \sum_{k=1}^\infty |y_k| \text{ är konvergenta}$$

Exempel: *Visa att serien* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+i)^2}$ *är konvergent.*

Lösning

Vi visar att serien är absolutkonvergent:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{(k+i)^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{k^2+1^2}\right)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Genom jämförelse i gränsövergång får vi

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2+1}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2+1} = 1 < \infty$$

Varpå serien alltså är konvergent.

4.3.4 Test för allmänna serier

Det finns två otroligt användbara test som nästan garanterat kommer att användas på tentan på något sätt (välkommen tillbaka Cauchy):

Sats (Cauchys rottest)

Anta att gränsvärdet $\rho = \lim_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$ *existerar*

1) Om $\rho < 1$ *så är* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolutkonvergent,*

2) Om $\rho > 1$ *så är* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent.*

$\boldsymbol{\rho = 1}$ **säger ingenting.**

Sats (d'Alemberts kvottest)

Anta att gränsvärdet $L = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ *existerar*

1) Om $L < 1$ *så är* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolutkonvergent,*

2) Om $L > 1$ *så är* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent.*

$\boldsymbol{L = 1}$ **säger ingenting**

Vi tar nu tre del-exempel som blir ganska heltäckande för avsnittet såhär långt:

Exempel: *Undersök konvergensen av serierna*

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 3^k}{k!} \quad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(2k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^k \quad \text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k e^{k(1+i)}}{4^k}$$

Lösningar

a) Om vi använder rottestet kommer vi behöva hantera $k!^{1/k}$ vilket är besvärligt, och dessa serier är för komplexa för att hitta bra serier att jämföra med. Det som återstår är alltså kvottestet:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{(k+1)^2 \cdot 3^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{k^2 3^k}{k!}\right|} = \frac{(k+1)^2}{k^2} \cdot \frac{3^{k+1}}{3^k} \cdot \frac{k!}{(k+1)!} \to \frac{3}{k+1} \to 0 < 1 \text{ då } k \to \infty$$

D'Alemberts kvottest ger att serien är (absolut)konvergent

b) Att termerna har exponenten k ger en (ofta) ganska tydlig ledtråd om att rottestet är mest passande:

$$\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \left|2k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right| = 2\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}$$

Med hjälp av standardgränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ *får vi alltså att*

$$\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = 2 \cdot 1 = 2 > 1$$

Cauchys rottest ger således att serien är divergent.

c) Här är en serie där det inte är speciellt tydligt om kvot- eller rottestet ger den enklaste lösningen, men i detta fall är det rottestet som gäller (båda fungerar dock):

Cauchys rottest ger

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{k e^{k(1+i)}}{4^k}\right|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\overbrace{k^{1/k}}^{\to 1} |e| \overbrace{|e^i|}^{=1}}{4} = \frac{e}{4} < 1$$

Serien är således konvergent.

4.3.5 Alternerande serier och betingad konvergens

Definition

En serie $\sum a_k$ kallas ***betingat konvergent*** *om den är konvergent men* ***inte*** *absolutkonvergent.*

För denna typ av konvergens har vi bara ett enda enkelt test att tillgå:

Sats (Leibniz test för alternerande serier)

Om en serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uppfyller att

1) Serien är ***alternerande*** *(alltså att* ***varannan*** *term är positiv, och varannan negativ)*

2) a_k är ***avtagande*** *(notera att något kan vara avtagande utan att gå mot 0)*

3) $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$

Så är den konvergent. Notera att Leibniz test ***inte*** *är omvändbart, och kan alltså* ***inte*** *påvisa divergens.*

Man kan se ovanstående sats som en punktlista att följa när man löser en uppgift.

En väldigt användbar egenskap av alternerande serier för nästa avsnitt är att ***seriens verkliga värde alltid ligger mellan två på varandra följande partialsummor***.

4.3.6 Uppskattning av seriers värde

Denna typ av uppskattning innebär i praktiken att man först uppskattar en förenklad serie och försöker sedan uppskatta storleken dess ***restterm***. En serie i sig, med rätt avgränsning, är inte speciellt svår att uppskatta, men man är generellt sett intresserad av hur stor ***felmarginal*** denna uppskattning har, vilket representeras av resttermen. Det finns tre metoder att använda:

4.3.6.1 Metod 1: Jämförelse

Idén med denna metod är att beräkna resttermen genom att jämföra serien ifråga med en ***annan*** serie, som vi kan beräkna (i många fall innebär detta en ***geometrisk*** serie). Jag illustrerar genom ett exempel, och jag rekommenderar att lägga denna approach på minnet, då den verkar vara ganska vanlig för denna typ av uppgifter:

Exempel: *Uppskatta värdet av $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!}\right)$*

"Lösning"

Vi ställer oss frågan "hur stort fel gör vi om vi uppskattar serien genom dess första x termer?" (vi använder $x = 6$ här). Jo, felet blir då r_6 ***(resttermen då vi uppskattar serien genom <u>6</u> termer)***

$$0 \le r_6 = S - S_6 = \sum_{k=7}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Hur ska vi nu beräkna (uppskatta) denna serie? Genom ett litet "trick", såklart:

$$\sum_{k=7}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \cdots = \frac{1}{7!}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10} + \cdots\right) <$$

$$< \frac{1}{7!}\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^3}+\cdots\right) = \frac{1}{7!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{8^k} \to \text{geometrisk serie!}$$

Denna oändliga geometriska serie kan vi beräkna genom $\frac{u_1}{1-r} = \frac{1}{1-1/8} = \frac{8}{7}$*. Jag påminner här om att detta faktiskt är en uppskattning för resttermen. I nuläget har vi alltså*

$$0 \le r_6 < \frac{1}{7!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{8^k} \approx 0.00023$$

Slutsats: $S_6 \le S \le S_6 + 0.00023$

4.3.6.2 Metod 2: Uppskattning genom integraler

Anta att $0 \le a_k = f(k)$ där f är ***avtagande***. Då gäller att

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx \le r_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} f(k) \le \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx$$

Vilket kanske ser lite jobbigt ut, men om vi tar bort den tredje likheten får vi

$$\boxed{r_N \le \int_N^{\infty} f(x)\,dx}$$

Denna princip ger upphov till följande typ av uppgift:

Exempel: *Hur stort ska N väljas för att* $r_N \le 10^{-5}$ *när vi approximerar* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$*?*

Lösning

Sätt $f(x) = \frac{1}{x^4}$ *och kontrollera att denna är avtagande:* $f'(x) = -\frac{4}{x^5} \to$ *avtagande*

Vi får då

$$r_N \le \int_N^{\infty}\frac{1}{x^4}dx = \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_N^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{3N^3}\right) = \frac{1}{3N^3}$$

Vi söker nu det N som ger $r_N \le 10^{-5}$*:*

$$r_N \le 10^{-5} \to \frac{1}{3N^3} < 10^{-5} \leftrightarrow \boxed{N \ge 33}$$

Vi kan göra denna gissning bättre genom att beräkna S_{33} *och använda att* $\frac{1}{3\cdot 34^3} \le r_N \le \frac{1}{3\cdot 33^3}$, *ty seriens verkliga värde ligger då mellan* $\left(S_{33}+\frac{1}{3\cdot 34^3}\right)$ *och* $\left(S_{33}+\frac{1}{3\cdot 33^3}\right)$*, så*

$$S \approx S_{33} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot 34^3}+\frac{1}{3\cdot 33^3}\right) \approx 4\cdot 10^{-7}, \textit{ vilket är en ännu mindre marginal än } 10^{-5}$$

4.3.6.3 Metod 3: Uppskatta med hjälp av Leibniz

Denna metod gäller alltså endast för serier som uppfyller Leibniz test. Sådana serier är ***alternerande***, varpå seriens riktiga värde måste ligga ***mellan två på varandra följande partialsummor***.

Exempel: *Hur stort måste N väljas för att $|r_N| \leq 10^{-5}$ med $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^4}$?*

Lösning

Det första vi gör är givetvis att visa att serien uppfyller Leibniz. Därefter kör vi på:

Eftersom serien uppfyller Leibniz test gäller

$$|r_N| \leq |S_{N+1} - S_N| = |a_{N+1}| = \left|\frac{(-1)^{N+1}}{(N+1)^4}\right| = \frac{1}{(N+1)^4}$$

Om $|r_N| \leq 10^{-5}$ *måste* $\frac{1}{(N+1)^4} < 10^{-5} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \boxed{N \geq 17}$

5 Funktionsföljder och -funktionsserier

Nu jävlar ballar det ur fullständigt (fas 1) ☺

5.1 Allmänna kommentarer

Detta avsnitt går ut på att för en given funktionsföljd (motsvarande talföljd, fast jobbigare) (f_n) undersöka vad som händer vid gränsövergången $n \to \infty$, alltså gäller det att hitta ***gränsfunktionen*** som helt enkelt kommer skrivas $f (= f_\infty)$. Kapitlet är, enligt mig, fruktansvärt svårt att greppa, men jag insåg att det är extremt användbart att lägga ner tiden för att lära sig det väl.

5.2 Punktvis konvergens

Om vi har en funktionsföljd (f_n) som är definierad på ett område, eller intervall, D så säger vi att ***funktionsföljden konvergerar punktvis*** mot f om det för varje $p \in D$ gäller att ***talföljden*** $\big(f_n(p)\big)$ konvergerar mot $f(p)$.

Exempel: *Låt $f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$ för $0 \leq x \leq 1$. Visa att funktionen konvergerar punktvis mot 0 inom detta intervall.*

Lösning

Funktionen har tre intressanta "områden" att undersöka: $x = 0, x = 1$ och $0 < x < 1$.

$$\boldsymbol{x = 0}: f_n(0) = n^2 \cdot 0(1-0^2)^n = 0$$
$$\boldsymbol{x = 1}: f_n(1) = n^2 \cdot 1(1-1^2)^n = 0$$
$$\boldsymbol{0 < x = p < 1}: f_n(p) = n^2 p \underbrace{(1-p^2)}_{0<1-p^2<1}{}^n \to 0 \text{ då } n \to \infty$$

Om vi exempelvis har funktionsföljden $f_n(x) = x^n$ så har vi att gränsfunktionen blir

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \infty, & |x| > 1 \end{cases}$$

Detta är intressant eftersom det för varje n gäller att $f_n(x)$ är ***kontinuerlig***, men följden konvergerar punktvis mot en ***icke-kontinuerlig*** gränsfunktion.

5.3 Likformig konvergens

För att definiera likformig konvergens behöver vi först definiera ***supremumnormen***:

> ***Definition***
>
> *Om $f: D \to \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ så definierar vi* ***supremumnormen*** *$\|f\|$ (även kallad L^∞-normen) av f som $\|f\| = \sup_D |f|$.*
>
> *Andra beteckningar: $\|f\|_\infty$ eller $\|f\|_D$*

Supremumnormen har följande egenskaper:

1) $\|f\| \geq 0$, och om $\|f\| = 0$ **måste** det gälla att $f = 0$
2) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
3) $\|\lambda \cdot f\| = |\lambda| \cdot \|f\|, \lambda \in \mathbb{C}$

> ***Definition (likformig konvergens)***
>
> *Funktionsföljden $(f_n) \in D$ sägs vara* ***likformigt konvergent*** *mot gränsfunktionen $f \in D$ om*
>
> $$\|f_n - f\| \to 0 \text{ då } n \to \infty$$
>
> ***Följdsats***
>
> *Om $f_n \to f$* ***likformigt*** *så gäller även att $f_n \to f$* ***punktvis*** *(dock* ***ej*** *tvärt om).*

5.3.1 Teknik: instängning

En vanlig deluppgift är att visa likformig konvergens i något fall för att sedan använda detta i följande uppgifter. Det är dock inte alltid speciellt lätt att göra, men ett sätt som brukar kunna användas är **instängning** (som visserligen inte är en unik operation för detta avsnitt, men den förekommer ofta i dessa sammanhang):

> ***Exempel:*** *Om vi vill visa att $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)$ konvergerar likformigt på $\mathbb{R}$ måste vi beräkna gränsfunktionen f:*
>
> $$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}|\sin(nx)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ då } n \to \infty$$
>
> *Vi använder nu definitionen för att visa likformig konvergens*
>
> $$\left\|f_n - \underbrace{f}_{=0}\right\| = \|f_n\| = \sup_{\mathbb{R}}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$
>
> *Vi kan nu se att $\|f_n - f\|$ är* ***instängd*** *mellan 0 och något som går mot 0:*
>
> $$0 \leq \|f_n - f\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$
>
> $$\therefore \|f_n - f\| \to 0$$

5.3.2 Omkastning av gränsvärdesoperationer

Att en funktionsföljd eller -serie är likformigt konvergent gör livet ganska mycket lättare. Främst genom att tillåta att man kastar om gränsvärdesoperationer.

Sats (omkastning för integration)

Om en funktionsföljd (f_n) *är kontinuerlig och* $f_n \to f$ *likformigt på* $I = [a, b]$ *så gäller*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} \big(f_n(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Sats (omkastning för derivering)

Om (f_n) *är en följd av* C^1*-funktioner och* $f_n \to f$ ***punktvis*** *på ett intervall* $I \subset \mathbb{R}$ *så gäller*

Om $f_n' \to g$ ***likformigt****, då är* $g = f'$ *(alltså* $f_n' \to f'$ *likformigt)*

Dessa följder kommer nu användas genom resten av kursens innehåll.

5.4 Funktionsserier

Precis som för vanliga serier arbetar vi här med *partialsummor* och *resttermer*, men nu i kombination med funktionsföljder. Alltså kommer *punktvis* och *likformig konvergens* vara högst relevanta begrepp, där $u(z)$ numera kommer beteckna motsvarande gränsfunktionen f:

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ konvergerar ***punktvis*** mot $u(z)$ om $\lim_{N\to\infty} S_N(z) = u(z)$ ***punktvis***

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ konvergerar ***likformigt*** mot $u(z)$ om $\lim_{N\to\infty} S_N(z) = u(z)$ ***likformigt***

Där S_N betecknar en partialsumma av funktionsserien, precis som vanligt.

Notering: *likformig konvergens enligt ovan är ekvivalent med att* $\|r_N\| \to 0$ *då* $n \to \infty$.

5.4.1 Weierstrass M-test

”M-testet” är det huvudsakliga verktyg som finns för att avgöra om en funktionsserie är *likformigt* konvergent:

Sats

Anta att (u_k) *är en följd av funktioner på* D. *Om* $\|u_k\| \leq M$ ***och*** $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ *konvergerar, så konvergerar funktionsserien* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ ***likformigt*** *på* D.

Notering: *Omvändningen för M-testet gäller* ***ej****. I de fall då testet inte fungerar kan man alltså* ***inte*** *dra slutsatsen att funktionsserien inte konvergerar likformigt.*

Vi tar två exempel – ett där M-testet fungerar, och ett där så inte är fallet:

Exempel: *Visa att* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x\sin(kx)}{k^2}$ *konvergerar likformigt på varje intervall* $[-R,R]$, $R>0$

Lösning

(Vi kommer här använda att ***supremum och maximum på ett slutet intervall*** *är samma sak)*

Vi uppskattar

$$\left\|\frac{x\sin(kx)}{k^2}\right\|_{[-R,R]}=\max_{x\in[-R,R]}\left\|\frac{x\sin(kx)}{k^2}\right\|=\frac{1}{k^2}\max_{x\in[-R,R]}|x||\sin(kx)|\leq\frac{R}{k^2}$$

Låt alltså $M_k=\frac{R}{k^2}$. *Weierstrass M-test, kombinerat med jämförelse i gränsövergång med* $\sum\frac{1}{k^2}$ *(eller argumentera att* $1/k^2$ *konvergent och att en begränsad täljare ej ändrar detta) ger*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{R/k^2}{1/k^2}=R\leq\infty$$

Eftersom detta jämförelsetest tillåter att gränsvärdet är oegentligt, drar vi slutsatsen att $\sum M_k$ *konvergerar, varpå* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x\sin(kx)}{k^2}$ *konvergerar likformigt.*

Exempel: *Låt* $u_k(x)=\frac{(-1)^k x^k}{k}$ *på* $I=[0,1]$. *Visa att* $\sum u_k(x)$ *konvergerar likformigt.*

Lösning

Vi börjar med att uppskatta:

$$\|u_k(x)\|=\max_{x\in I}\left\|\frac{(-1)^k x^k}{k}\right\|=\frac{1}{k}$$

Men vi vet att den harmoniska serien $\sum\frac{1}{k}$ *är divergent. M-testet fungerar alltså inte.*

Men *om* $x\in[0,1]$ *så är* $\left|\frac{(-1)^k x^k}{k}\right|=\frac{x^k}{k}$ *avtagande med gränsvärde* 0 *och serien är dessutom alternerande. För alternerande serier har vi resttermsuppskattningen*

$$|r_N(x)|=|u_{N+1}(x)|=\frac{x^{N+1}}{N+1}\leq\frac{1}{N+1}\to 0 \text{ då } N\to\infty$$

Så serien konvergerar likformigt på $[0,1]$.

Med dessa exempel går vi över till nästa del…

6 Fourierserier

Denna del består av en väldigt tydlig indelning av koncept som gås igenom ganska grunt och ger således upphov till ganska standardiserade uppgifter… Med det inte sagt att det inte är svårt som fan ändå.

6.1 Vad är en Fourierserie?

Grundidén är att varje funktion (som uppfyller vissa krav) kan, med godtycklig precision, approximeras genom en summa av sinus- och cosinusfunktioner, så kallade *trigonometriska Fourierserier*. För att utvidga detta, eftersom de trigonometriska funktionerna är väldigt nära ”besläktade” med exponentiella funktioner, finns det även *exponentiella Fourierserier*. Det finns dessvärre flera väsentliga detaljer som påverkar hur en given Fourierserie kommer se ut och därför går vi först igenom exponentiella för att sedan gå över till trigonometriska.

Notering: *kom ihåg att formelbladet är väldigt användbart för denna del.*

6.2 Grundkoncept: Periodicitet och förutsättningar

*För **periodiska funktioner** med period T gäller, för alla t:*

$$\boxed{f(t+T) = f(t)}$$

Grundperioden *T som används i dessa sammanhang har följande samband:*

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega}}$$

*Där Ω är en **vinkelhastighet**. Exempel på sådana funktioner är $\sin(\Omega t)$ och $e^{i\Omega t}$.*

*En integral **över en period** betecknas ofta $\boxed{\int_P f(t)\,dt}$ och om en funktion är periodisk gör det ingen skillnad **varifrån** man integrerar, alltså:*

$$\boxed{\int_0^T f(t)\,dt = \int_a^{a+T} f(t)\,dt}$$

För att Fourierserier ska kunna användas måste vi arbeta med funktioner som är L^1 på det intervall vi arbetar på. För periodiska funktioner gäller att detta intervall ska motsvara en period, dvs.

$$\boxed{\int_I |f(t)|\,dt < \infty \quad \underbrace{\rightarrow}_{f \text{ periodisk}} \quad \int_P |f(t)|\,dt < \infty}$$

6.3 Exponentiella Fourierserier

Om vi antar att f är T-periodisk **och** L^1 så ges funktionens exponentiella Fourierserie av

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\Omega t}}$$

Där konvergensen av funktionsserien är ***likformig*** och c_k kallas funktionens ***exponentiella Fourierkoefficienter***.

Vi kan beräkna dessa koefficienter genom

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T}\int_P f(t)e^{-ik\Omega t}\,dt}$$

Speciellt gäller

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{T}\int_P f(t)\,dt}$$

Där c_0 är ***medelvärdet*** av f över intervallet $[0, T)$. För dessa koefficienter gäller en del räkneregler:

Sats

Anta att f, g är T-periodiska och L^1 och låt $c_k(f)$ beteckna koefficienterna för f. Då gäller

1) $c_k(f+g) = c_k(f) + c_k(g)$
   $c_k(\alpha f) = \alpha c_k(f)$

2) $c_k(f') = ik\Omega c_k(f)$ *alltså f deriverbar $\rightarrow f' \in L^1$*

3) $c_k\big(f(t-\tau)\big) = e^{-ik\Omega\tau}c_k(f)$

4) $c_k\left(e^{im\Omega t}f(t)\right) = c_{k-m}(f)$ *där $m \in \mathbb{Z}$*

6.3.1 Samband mellan exponentiella och trigonometriska Fourierserier

Detta är helt enkelt den härledning som ger upphov till den trigonometriska tolkningen av Fourierserier.

Vi tar en symmetrisk partialsumma av vår exponentiella Fourierserie

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\Omega t} = \sum_{k=-N}^{-1} c_k e^{ik\Omega t} + c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k e^{ik\Omega t} =$$

Vi utför variabelbytet $n = -k$ för den vänstra delsumman, vilket ger $n: 1 \rightarrow N$

$$= \sum_{n=1}^{N} c_{-n}e^{-in\Omega t} + c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k e^{ik\Omega t} = c_0 + \sum_{k=1}^{N}\left(c_{-k}e^{-ik\Omega t} + c_k e^{ik\Omega t}\right) =$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{N}\left[\underbrace{(c_k + c_{-k})}_{=a_k}\cos(k\Omega t) + \underbrace{i(c_k - c_{-k})}_{=b_k}\sin(k\Omega t)\right]$$

$$\boxed{= c_0 + \sum_{k=1}^{N}[a_k\cos(k\Omega t) + b_k\sin(k\Omega t)]}$$

6.4 Trigonometriska Fourierserier

Denna variant är klart överrepresenterad bland tentauppgifterna och följaktligen finns det mer teori och fler subtila detaljer man behöver kunna.

6.4.1 Koefficienter

a_k och b_k kallas, helt oväntat, de ***trigonometriska Fourierkoefficienterna*** till f och kan beräknas enligt följande formel ***som även finns i formelbladet***.

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_P f(t)\sin(k\Omega t)\,dt \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_P f(t)\cos(k\Omega t)\,dt \end{aligned}}$$

Dessutom gäller följande, som kan korta ner räkningar på tentan rejält:

*1) Om f är en **jämn** funktion så är $b_k = 0$*

*2) Om f är en **udda** funktion så är $a_k = 0$*

För att komma ihåg detta har jag personligen använt en minnesregel som involverar tvärt-om-tänk:

a_k är koefficienten framför ***sinustermerna***. Sinus är en ***udda*** funktion.

→ Om f är ***jämn*** är alltså koefficienten framför den ***udda*** funktionen 0

b_k är koefficienten framför ***cosinustermerna***. Cosinus är en ***jämn*** funktion.

→ Om f är ***udda*** är alltså koefficienten framför den ***jämna*** funktionen 0

Kan du inte komma på en minnesregel som fungerar för dig så visar sig ovanstående alltid i räkningarna ändå! (…Givet att du räknat rätt ;))

6.4.2 De magiska satserna (7.16 och 7.18)

Uppgifter på trigonometriska Fourierserier involverar ofta en funktion som man på ett eller annat sätt måste rita upp och/eller visualisera för att kunna räkna rätt. Oavsett hur funktionen ser ut lär man dock behöva motivera sina räkningar med hjälp av dessa satser. Notera att detta ska göras ***explicit*** för att få helt rätt.

Sats (7.16)

Anta att $f \in L^1$ är T-periodisk. Om t_0 är en punkt sådan att

*1) f är **kontinuerlig** i punkten $t = t_0$*

2) Höger- och vänsterderivatorna av f existerar i punkten $t = t_0$, dvs. gränsvärdena

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} \quad \textit{och} \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$

Existerar (men är inte nödvändigtvis lika).

Då gäller att $\mathcal{F}S_f(t_0) = \mathcal{F}S_f^{trig}(t_0) = f(t_0)$.

Ett exempel på en funktion som uppfyller dessa villkor i ***alla*** punkter är den s.k. ***Triangelvågen***:

$$f(t) = \begin{cases} -t, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ t, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Sats (7.18)

Anta att $f \in L^1$ är T-periodisk. Om t_0 är en punkt sådan att

1) Höger- och vänstergränsvärdena av f, dvs. $f(t_0+0) = \lim_{t\to t_0^+} f(t)$ och $f(t_0-0) = \lim_{t\to t_0^-} f(t)$ existerar (men är inte nödvändigtvis lika).

2) Gränsvärdena

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(t_0+h) - f(t_0+0)}{h} \quad och \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(t_0+h) - f(t_0-0)}{h}$$

Existerar (men är inte nödvändigtvis lika). Notera att vi inte sagt att f måste vara kontinuerlig i $t = t_0$, så punkten behöver inte existera. Vi ersätter alltså $f(t_0)$ med det motsvarande höger- respektive vänstergränsvärdet.

*Då gäller att $\mathcal{F}S_f^{trig}(t_0) = \frac{1}{2}\big(f(t_0+0) + f(t_0-0)\big)$, alltså **medelvärdet** mellan höger- och vänstergränsvärdena i t_0.*

Ett motsvarande exempel på en funktion som uppfyller ***7.18*** men inte ***7.16*** i $t = 0$ är den s.k. ***Fyrkantsvågen***:

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

I detta fall skulle vi alltså få $\mathcal{F}S_f^{trig}(0) = \frac{1}{2}\big(1 + (-1)\big) = 0$.

När dessa satser bör användas i praktiken är ganska tydligt:

- Om du arbetar med en funktion som är ***kontinuerlig*** i alla relevanta punkter så kan du direkt skriva ***"funktionen uppfyller villkoren för sats 7.16 och dess trigonometriska Fourierserien konvergerar således likformigt mot f"*** or words to that effect.
- Om du arbetar med en funktion som innehåller ***diskontinuitetspunkter*** så måste du istället skriva ***"funktionen uppfyller villkoren för sats 7.16 överallt <u>utom</u> i punkterna x, y, z. Sats 7.18 ger att funktionens trigonometriska Fourierserie antar medelvärdet av punkternas respektive höger- och vänstergränsvärden"***, ungefär.

Notera dock för fasen att man själv måste avgöra om satsernas villkor är uppfyllda från fall till fall. Dock verkar man inte behöva redogöra för/bevisa/visa **varför** de är uppfyllda i ett givet fall. Ytterst angenämt att kursen kan vara lite skön också.

6.5 Parsevals formel

Definition

Vi säger att $f \in L^2$ om det gäller att

$$\int_I |f(t)|^2\,dt < \infty \underbrace{\rightarrow}_{f \text{ periodisk}} \int_P |f(t)|^2\,dt < \infty$$

Sats (Parsevals formel för exponentiella Fourierserier)

Anta att $f, g \in L^2$ och T-periodiska. Då är

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\overline{c_k(g)} = \frac{1}{T}\int_P f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

Speciellt då $g = f$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{T}\int_P |f(t)|^2\,dt$$

Sats (Parsevals formel för trigonometriska Fourierserier)

Anta att $f, g \in L^2$ och T-periodiska. Då är

$$\frac{1}{T}\int_P |f(t)|^2\,dt = |c_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

Parsevals formel används för att exempelvis beräkna en serie genom att istället beräkna en, i jämförelse, betydligt mer hanterbar integral.

6.6 Att tolka räkningar (Tips & ”Trick”)

Räkningarna på uppgifter gällande Fourierserier kan bli oerhört långa, krångliga och är ärligt talat Slarvfelens förkämpar. Därför kan följande lista på vanliga resultat vara användbar ***(notera att nedanstående antar $\boldsymbol{k = 0, 1, 2, \ldots}$)***

1) Cosinus och sinus: multiplar av π

$$\boxed{\begin{matrix}\cos(2\pi k) = 1 \\ \cos(\pi k) = (-1)^k\end{matrix}} \text{ och } \boxed{\begin{matrix}\sin(\pi k) = \sin(2\pi k) = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) = (-1)^k\end{matrix}}$$

6.7 Avslutande exempel

Exempel** (uppgift 5, tentamen 2016-03-14) – **Trigonometriska Fourierserier

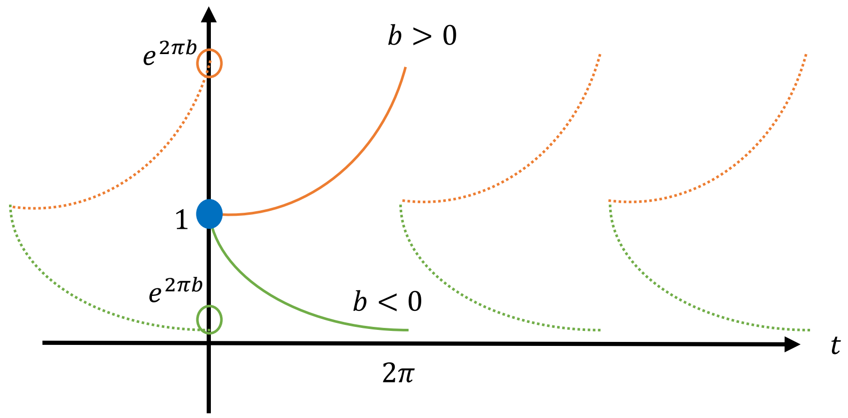
Låt $b \in \mathbb{R}, b \neq 0$. *Beräkna serien*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^2 + k^2}$$

Till exempel genom att utveckla den 2π*-periodiska funktionen* f, *som ges av* $f(t) = e^{bt}$ *på intervallet* $0 \leq t < 2\pi$, *i en trigonometrisk Fourierserie.*

Resonemang: Här blir vi väldigt tydligt instruerade att gå en viss väg, vilket inte alltid är fallet. Vi börjar med att gå igenom informationen vi fått:

Vi har en funktion $f(t) = e^{bt}$, information om att $b \neq 0$ och $b \in \mathbb{R}$ och intervallet som vi ska utveckla funktionen på: $0 \leq t < 2\pi$. Notera att vi inte vet om b är positiv eller negativ men att uppritning av funktionen fortfarande kan vara användbart för att avgöra hur sats 7.16 och 7.18 kommer behöva användas:



Av detta ser vi att funktionen har en diskontinuitetspunkt då $t = 0$. Sats 7.18 säger då att funktionens trigonometriska Fourierserie kommer konvergera mot $\frac{1}{2}(e^{2\pi b} + 1)$ däri. Rent algebraiskt behöver vi alltså inte veta om b är positiv eller negativ.

Strategin bör härifrån vara att helt enkelt beräkna de trigonometriska Fourierkoefficienterna var för sig och se var man hamnar därefter. Rimligtvis kommer den resulterande Fourierserien ge en mer eller mindre tydlig hint om hur vi därifrån ska beräkna serien ifråga.

Lösning

Vi beräknar de trigonometriska Fourierkoefficienterna för funktionen $f(t) = e^{bt}$. *Eftersom* $T = 2\pi$ *får vi* $\Omega = \frac{2\pi}{T} = 1$:

$\boldsymbol{c_0}$**:**

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_P f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{bt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{bt}}{b}\right]_0^{2\pi} = \boxed{\frac{1}{2\pi b}(e^{2\pi b} - 1)}$$

a_k:

$$\frac{2}{T}\int_P \cos(k\Omega t)\,f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(kt)\,e^{bt}dt =$$

Omskrivning med Eulers formler ger (eller partialintegration)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}e^{bt}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{(b+ik)t}}{2}dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{(b-ik)t}}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(b+ik)t}}{b+ik}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(b-ik)t}}{b-ik}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{2\pi b}\cdot \overbrace{e^{i2\pi k}}^{=1}-1}{b+ik}\right) + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{2\pi b}\cdot \overbrace{e^{-i2\pi k}}^{=1}-1}{b-ik}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(e^{2\pi b}-1)(b-ik)+(e^{2\pi b}-1)(b+ik)}{b^2+k^2}\right) = \frac{e^{2\pi b}-1}{2\pi}\left(\frac{2b}{b^2+k^2}\right) = \boxed{\frac{b(e^{2\pi b}-1)}{\pi(b^2+k^2)}}$$

b_k:

$$\frac{2}{T}\int_P \sin(k\Omega t)\,f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(kt)\,e^{bt}\,dt =$$

Eulers formler ger

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i}e^{bt}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{(b+ik)t}}{2i}dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{(b-ik)t}}{2i}dt =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{e^{(b+ik)t}}{b+ik}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{e^{(b-ik)t}}{b-ik}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{e^{2\pi b}\cdot \overbrace{e^{i2\pi k}}^{=1}-1}{b+ik}\right) - \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{e^{2\pi b}\cdot \overbrace{e^{-i2\pi k}}^{=1}-1}{b-ik}\right) =$$

$$= \frac{(e^{2\pi b}-1)}{2\pi i}\left(\frac{(b-ik)-(b+ik)}{b^2+k^2}\right) = \frac{(e^{2\pi b}-1)}{2\pi i}\left(\frac{-2ik}{b^2+k^2}\right) = \boxed{\frac{k(1-e^{2\pi b})}{\pi(b^2+k^2)}}$$

Den trigonometriska Fourierserien blir alltså

$$\mathcal{FS}_f^{trig}(t) = \frac{1}{2\pi b}(e^{2\pi b}-1) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{b(e^{2\pi b}-1)}{\pi(b^2+k^2)}\cos(kt) + \frac{k(1-e^{2\pi b})}{\pi(b^2+k^2)}\sin(kt)\right)$$

Vi ser att $t=0$ ger $\sin(kt)=0$ och $\cos(kt)=1$, och eftersom funktionen uppfyller villkoren för sats 7.18 i denna punkt konvergerar den trigonometriska Fourierserien mot $\frac{1}{2}(e^{2\pi b}+1)$. Vi får alltså

$$\mathcal{FS}_f^{trig}(0) = \frac{1}{2\pi b}(e^{2\pi b}-1) + \frac{b(e^{2\pi b}-1)}{\pi}\cdot\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b^2+k^2}} = \frac{e^{2\pi b}+1}{2}$$

Löser vi ut serien får vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^2+k^2} = \left(\frac{1}{2}(e^{2\pi b}+1) + \frac{1}{2\pi b}(1-e^{2\pi b})\right) \cdot \frac{\pi}{b(e^{2\pi b}-1)} \leftrightarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^2+k^2} = \frac{\pi(e^{2\pi b}+1)}{2b(e^{2\pi b}-1)} + \frac{1}{2b^2}}$$

7 Potensserier, Analytiskhet och Singulariteter

Dessa delar används mest som underlag för att introducera koncept som ***residykalkyl*** och knyter även ihop flera koncept som konvergens av serier på en lite djupare nivå.

7.1 Potensserier

En potensserie är en serie på formen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots$$

Där $a_k, z, c \in \mathbb{C}$.

7.1.1 Egenskaper och innebörd

Vissa funktioner ***(analytiska)*** har egenskapen att de kan skrivas som en potensserie, vilket gör att man får ytterligare ett verktyg att använda vid analys. Så hur tolkar vi dem?

För potensserier gäller följande:

*1) En potensserie kan grafiskt ses som en **cirkel**, och medan man befinner sig **inom** denna cirkel är potensserien **konvergent**. Detta kallas, konstigt nog, **konvergenscirkel**.*

*2) Man karakteriserar konvergenscirkelns storlek genom en radie, betecknad R, som kallas **konvergensradie**, och är alltså en **längd*** – ett tal.

*3) Serien är **centrerad** i c. Det är från denna punkt man mäter konvergensradien:*

*3.1) Serien **konvergerar absolut** om $|z-c| < R$*

*3.2) Serien **divergerar** om $|z-c| > R$*

*3.3) Serien konvergerar **likformigt** på varje disk $|z-c| < r; \{r < R\}$*

Och några allmänna regler:

*Hur **k, c och exponenten** "får" bete sig är väldigt strikt:*

*1) k, alltså uppräkningsvariabeln, får inte vara sådan att seriens termer får en **negativ exponent**:*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} z^{k-1} = \underbrace{z^{-1}}_{\text{Nope}} + 1 + z + z^2 + \cdots \rightarrow \text{Inte en potensserie}}$$

*2) c får inte **bero på k**:*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\left(z-\underbrace{\frac{1}{k}}_{\text{Nein}}\right)^{k} \rightarrow \text{Inte en potensserie}}$$

*3) Exponenten i uttrycket $(z-c)^k$ **måste** vara **heltal**:*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}(z-c)^{\overbrace{k/2}^{\text{Niet}}} \rightarrow \text{Inte en potensserie}}$$

7.1.2 Cirkelns rand

Vi kan säga definitivt vad som händer innanför eller utanför en potensseries konvergenscirkel, men vad som händer gällande konvergens på randen **går inte att säga generellt**. Det kan skilja sig från punkt till punkt och är i regel ganska jobbigt att visa, varpå det väldigt sällan (aldrig?) ges som tenta-uppgifter.

***Exempel:** Bestäm konvergensdisken för $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k(z-1)^k}{k^2}$*

Lösning

*a) Vi noterar att serien är **centrerad i $z = 1$**. Eftersom vi ser en massa k-exponenter provar vi Cauchys rottest:*

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^k(z-1)^k}{k^2}\right|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2(z-1)}{\underbrace{k^{2/k}}_{\to 1}}\right| = 2|z-1|$$

Denna serie konvergerar enligt rottestet om gränsvärdet är < 1. Vi får alltså konvergensdisken genom olikheten

$$2|z-1| < 1 \leftrightarrow \boxed{|z-1| < \frac{1}{2}}$$

*Som ju visar att konvergensen faktiskt sker på en **cirkel** centrerad i $z = 1$, med radie $\frac{1}{2}$.*

7.2 Analytiska funktioner

Definition:

*En funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ sägs vara **analytisk** på Ω om det till varje punkt $c \in \Omega$ finns en **positiv** konvergensradie R sådan att*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k \ \ \textit{för alla}\ |z-c| < R$$

En analytisk funktion kan alltså skrivas som en potensserie, och vidare gäller det att varje ***analytisk*** funktion på Ω även är ***holomorf*** på Ω.

7.2.1 Konsekvenser för konvergenta potensserier

Anledningen till att analytiska funktioner och potensserier är en så användbar kombination är, förutom att man (relativt) enkelt kan avgöra konvergens, att ***konvergenta potensserier kan integreras och deriveras termvis*** utan att ändra konvergensradien:

Sats

Om $f(z)$ är en analytisk funktion på Ω där dess potensserie konvergerar för alla $|z-c|<R$ kan denna integreras och deriveras termvis enligt

$$f'(z)=\sum_{k=0}^{\infty} k a_k (z-c)^{k-1}, |z-c|<R$$

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k (z-c)^{k+1}}{k+1} + C, |z-c|<R$$

Vi får även följande samband för a_k, som leder oss till ***Taylors formel***:

Sats

Om f är holomorf på ett område som innesluter disken $|z-c|<R$ så kan f skrivas som en potensserie med konvergensradie minst R. Dessutom är

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|<r} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} dz$$

För godtyckligt $0<r<R$. Kombinerar vi detta med Cauchys integralformel får vi

$$a_k=\frac{f^{(k)}(c)}{k!}$$

*Vilket ger oss **Taylors formel***

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(z-c)^k$$

Vi kan använda detta för att hitta potensserien för olika funktioner. Om vi tar $f(z)=e^z$, som är holomorf på hela $\mathbb{C}$, vet vi att $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(k)}(0)=1$. Med $c=0$ får vi alltså potensserien för e^z genom

$$e^z=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

Sats

Om f är holomorf på Ω så är f' också det. (f holomorf $\rightarrow$ f analytisk $\rightarrow$ f' analytisk $\rightarrow$ f' holomorf). *En följd av detta är att $f \in C^{\infty}$.*

En sista sak som blir relevant och som leder över till nästa område är att än en gång nämna Cauchys differentieringsformel (se 3.2.6, s.19):

$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}dz$$

Följande exempel påvisar en del av den terminologi som är bra att få kläm på inför de sista delarna av kursen:

Exempel: *beräkna*

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{4z}}{z^3}dz$$

Lösning

Låt $f(z) = e^{4z}$. Med $p = 0$ och $n = 2$ ger Cauchys differentieringsformel

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{4z}}{z^3}dz = \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{(z-0)^3}dz = \frac{f''(0)\cdot 2\pi i}{2!} = 16\pi i$$

7.3 Lösning av differentialekvationer genom potensserier

Detta avsnitt är en ganska **liten** del av kursen och uppgifter på det är ganska **ovanligt**, men jag tycker det är ganska häftigt. Hata inte.

Om vi exempelvis har differentialekvationen

$$y''(t) - 2ty'(t) + \lambda y(t) = 0$$

Där λ är en konstant, vill vi kunna skriva om $y(t)$ som en potensserie på formen

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \, , R > 0$$

Om vi antar att vi kan göra detta, så är $y(t)$ analytisk och vi kan derivera termvis

$$y'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k t^{k-1} \quad y''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-2}$$

För att kunna göra något med detta med hjälp av de metoder vi har att tillgå, skriver vi om $y''(t)$ genom att utföra ett variabelbyte för tillståndsvariabeln k så att exponenten för t är densamma för alla derivator. Egentligen hade vi behövt göra samma sak för $y'(t)$, men i differentialekvationen har vi ett t som multipliceras med y' och gör att vi får samma exponent:

$$l = k-2 \rightarrow y''(t) = \sum_{l=-2}^{\infty} \underbrace{(l+2)}_{=0 \text{ då } l=-2} \overbrace{(l+1)}^{=0 \text{ då } l=-1} a_{l+2}t^l$$

Byter vi tillbaka till tillståndsvariabeln k får vi således

$$y''(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}t^k$$

Insättning i originalekvationen ger

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_{k+2}(k+1)(k+2)t^k - 2ka_kt^k + \lambda a_kt^k\right) = 0 \leftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(t^k\big(a_{k+2}(k+1)(k+2) + (\lambda - 2k)a_k\big)\Big) = 0$$

Eftersom $t^k \neq 0$ *måste det* ***för varje k*** *gälla att*

$$a_{k+2}(k+1)(k+2) + (\lambda - 2k)a_k = 0$$

Detta är en rekursionsekvation som kan lösas givet två begynnelsevillkor. Lite fräckt ändå.

7.4 Nollställen och singulariteter

Detta lägger grunden för det slutgiltiga avsnittet om ***residykalkyl*** och är ganska mycket märkligare än vad det ser ut. Poängen med avsnittet är att introducera ett synsätt på funktioner som gör att de kan skrivas om genom att bryta ut nollställen och singulariteter, och utnyttja detta för att applicera residykalkyl.

7.4.1 Nollställen

Sats

Anta att f *är holomorf på* Ω *och* $\alpha \in \Omega$ *där* $f(\alpha) = 0$. *Då kan man skriva*

$$f(z) = (z - \alpha)g(z)$$

Där $g(z)$ *också är holomorf på* Ω.

Beviset för denna sats är ganska vettigt, då det innefattar den exakta terminologin som används om man får frågan *”vilken grad har nollstället…”*

Bevis

$$\frac{f(z)}{z - \alpha}, z \neq \alpha$$

Är uppenbarligen holomorf på $\Omega \backslash \{\alpha\}$. *Om vi antar att* f *är holomorf på* Ω *så har* f *potensserieutveckling kring* $z = \alpha$:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - \alpha) + a_2(z - \alpha)^2 + \cdots$$

Med

$$0 = f(\alpha) = a_0 + a_1(\alpha - \alpha) + a_2(\alpha - \alpha)^2 + \cdots = a_0$$

Eftersom $a_0 = 0$ *får vi*

$$f(z) = a_1(z - \alpha) + a_2(z - \alpha)^2 + a_3(z - \alpha)^3 + \cdots =$$

$$= \underbrace{(z-\alpha)\underbrace{\left(a_1 + a_2(z-\alpha) + a_3(z-\alpha)^2 + \cdots\right)}_{\text{Potensserieutveckling!}}}_{:=g(z)}$$

Vi ser att $g(z)$ har potensserieutveckling kring $z = \alpha$ och är därmed holomorf i $z = \alpha$. Detta g stämmer överens med $g(z) = \frac{f(z)}{z-\alpha}$, så vi har att g är holomorf på hela Ω.

Vi vet redan att vissa funktioner har nollställen som ”förekommer” mer än en gång. Formellt definierar vi:

Definition (grader av nollställen)

Om det går att skriva

$$f(z) = (z-\alpha)^m g(z)$$

*Med $g(z)$ holomorf, men **inte** $f(z) = (z-\alpha)^{m+1}h(z)$ med h holomorf, så säger vi att f har nollställe **av ordning m** i $z = \alpha$.*

Vi tar ett exempel

***Exempel:** Vilken grad har nollstället $z = 0$ för $f(z) = \sin z$?*

Lösning

Vi potensserieutvecklar $\sin(z)$:

$$\sin(z) = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots = z \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 - \cdots\right)}_{:=g(z)\to g(0)\neq 0;\ \text{kan ej bryta ut fler } z}$$

Funktionen har alltså nollställe av grad 1 i $z = 0$.

7.4.2 Singulariteter

Att en singularitet i matematiken på sätt och vis motsvarar en singularitet i fysiken ***(svarta hål**, för alla ekonomer)* är inte en alltför långsökt tanke. Men det finns några olika varianter som är mer eller mindre jobbiga att hantera:

Definition *(isolerad singularitet)*

*Vi säger att f har en **isolerad singularitet** i $z = \alpha$ om f är **holomorf** i $U\backslash\{\alpha\}$, där U* är någon omgivning av α.

Definition *(typer av singulariteter)*

Anta att f har en isolerad singularitet i $z = \alpha$.

*1) Om $|f|$ är **begränsad** i $U\backslash\{\alpha\}$ så säger vi att singulariteten är **hävbar** (t.ex. $\frac{\sin z}{z}$ i $z = 0$),*

*2) Om $\lim_{z\to\alpha}|f(z)| = \infty$ så säger vi att f har en **pol** i $z = \alpha$,*

*3) I **annat fall** säger vi att f har en **väsentlig singularitet** i $z = \alpha$ (t.ex. $e^{1/z}$ i $z = 0$).*

Speciellt gäller det, i fallet då f har en **hävbar** singularitet i $z = \alpha$, att gränsvärdet $\lim_{z \to \alpha} f(z)$ existerar och funktionen kan således utvidgas till att vara holomorf även i $z = \alpha$.

Exempel: *Visa att* $f(z) = \frac{(e^z-1)^2}{z\sin(z)}$ *har en hävbar singularitet i* $z = 0$.

Lösning

Vi ombeds alltså undersöka gränsvärdet $\lim_{z \to 0} \frac{(e^z-1)^2}{z\sin(z)}$:

$$\lim_{z \to 0} \frac{(e^z-1)^2}{z\sin(z)} = \lim_{z \to 0} \left[\underbrace{\frac{e^z-1}{z}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{e^z-1}{z}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{z}{\sin z}}_{\to 1} \right] = 1$$

Vi tar nu den sista satsen innan vi går över på de långa räkningarnas rike:

Sats (grader av poler)

Anta att f *har en pol i* $z = \alpha$. *Då finns ett positivt heltal* m *sådant att* $f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^m}$ *där* $g(z)$ *är holomorf i en omgivning av* α *och* $g(\alpha) \neq 0$. *Vi säger att polen är* ***av ordning m.***

8 Residykalkyl

Detta kan vara det häftigaste, men absolut jobbigaste konceptet jag blivit introducerad till inom matematiken. Om det finns någon del utöver serier ni bör lägga extra tid på, så är det denna – residykalkyl kommer så gott som alltid vara värt ett eller fler poäng på en tenta.

Definition *(residy)*

Anta att f *har en isolerad singularitet i* $z = p$. *Vi definierar då* ***residyn*** *av* f *i* $z = p$ *som*

$$Res_{z=p}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz$$

Där γ *är en* ***enkel, sluten, positivt orienterad och slät*** *kurva som omsluter* p, ***men ingen annan singularitet*** *för* f.

För att hantera en funktion som har ett flertal poler inom ett intressant område, summerar man helt enkelt funktionens residyer:

Sats (Residysatsen)

Om f *är holomorf utanför* $\{p_k\}$ *och inget* p_k *ligger* ***på*** γ *så är*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{p_k \text{ innanför } \gamma} Res_{z=p_k}(f)$$

Lägg märke till att man endast summerar residyerna i de poler som **omsluts av $\boldsymbol{\gamma}$**. Det betyder inte att det inte kan finnas fler poler, men för att beräkna kurvintegralen längs γ är det endast de omslutna punkterna som är av intresse.

Då är ju den stora frågan hur man faktiskt beräknar en residy, och det är inte en fråga med ett rättframt svar… Det finns snarare fyra svar:

Sats *(Residyregler)*

*1) Om f har en pol av **ordning (högst) N** i $z = p$, så är*

$$Res_{z=p}(f) = \frac{1}{(N-1)!}\lim_{z\to p}\left[\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\left((z-p)^N f(z)\right)\right]$$

*2) Om f har en pol av **ordning (högst) N** i $z = p$, så är*

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-p)^k \to Res_{z=p}\left(\frac{g(z)}{(z-p)^N}\right) = c_{N-1}$$

*3) Om f har en **enkelpol** i $z = p$ så är*

$$Res_{z=p}(f) = \lim_{z\to p}(z-p)f(z)$$

*4) Om f, g holomorfa i en omgivning av $z = p$ och $\boldsymbol{f(p) \neq 0}$ **och** $\boldsymbol{g(p) = 0}$ där p är ett **enkelt** nollställe **för** $\boldsymbol{g(z)}$ (alltså $g'(p) \neq 0$), så är*

$$Res_{z=p}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(p)}{g'(p)}$$

Okej, för att bekanta oss med reglerna tar vi ett exempel för varje regel (förbered er på en räkningsfest). **Dessa regler finns självfallet i formelsamlingen**.

8.1 Exemplifiering av Residyregler

Jag vill först och främst poängtera att somliga av ovanstående regler är vanligare än andra. Man verkar i huvudsak behöva använda regel 1,3 och 4 även om regel 2 definitivt förekommer. Dessutom ser regel 1 mycket läskigare ut än vad den är!

Låt, för somliga exempel nedan, $\gamma: |z| = 2$

Exempel 1 (regel 3): *Beräkna $\int_\gamma \frac{1}{\sin(z)}dz$*

Lösning

*$\frac{1}{\sin(z)}$ har en **enkelpol** i $z = 0$, varpå vi använder **residyregel 3** för att beräkna integralen*

$$\int_\gamma \frac{1}{\sin(z)}dz \overset{(3)}{=} 2\pi i \cdot \lim_{z\to 0}(z-0)\frac{1}{\sin(z)} = 2\pi i \cdot \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin(z)} = 2\pi i \cdot \lim_{z\to 0}\frac{1}{\underbrace{\frac{\sin(z)}{z}}_{\to 1}} = 2\pi i$$

$$\boxed{\therefore \int_\gamma \frac{1}{\sin(z)}dz = 2\pi i}$$

Notering: *Det första man gör är alltså att avgöra vilken ordning polen har och bestäm regel efteråt.*

Exempel 2 (regel 4): *Beräkna* $\int_\gamma \frac{z}{z^4-1}dz$

Lösning

Integrandens nämnare har nollställen då

$$z^4 - 1 = 0 \leftrightarrow z^4 = 1 \leftrightarrow r^4 e^{4\theta} = 1 \leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 1 \\ 4\theta = 0 + 2\pi k \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} r = \pm 1 \\ \theta = \frac{\pi k}{2}, k = 0,1,2,3 \end{cases}$$

$$\therefore z^4 - 1 = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$$

Integranden har alltså ***fyra*** *enkelpoler och vi måste således utföra räkningen*

$$\int_\gamma \frac{z}{z^4-1}dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{4} Res_{z=p_k}\left(\frac{z}{z^4-1}\right)$$

Detta görs lättast genom att använda ***residyregel 4*** *med* $f(z) = z$ *och* $g(z) = z^4 - 1$ *(kontrollera att villkoren är uppfyllda!):*

$$2\pi i \sum_{k=1}^{4} Res_{z=p_k}\left(\frac{z}{z^4-1}\right) =$$

$$= 2\pi i \left[Res_{z=1}\left(\frac{z}{z^4-1}\right) + Res_{z=-1}\left(\frac{z}{z^4-1}\right) + Res_{z=i}\left(\frac{z}{z^4-1}\right) + Res_{z=-i}\left(\frac{z}{z^4-1}\right)\right] =$$

$$2\pi i \left[\left(\frac{z}{4z^3}\right)_{z=1} + \left(\frac{z}{4z^3}\right)_{z=-1} + \left(\frac{z}{4z^3}\right)_{z=i} + \left(\frac{z}{4z^3}\right)_{z=-i}\right] =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{4\cdot 1} + \frac{(-1)}{4(-1)^3} + \frac{i}{4i^3} + \frac{(-i)}{4(-i)^3}\right] = 2\pi i \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right] = 0$$

$$\boxed{\therefore \int_\gamma \frac{z}{z^4-1}dz = 0}$$

Notering: *Ett tips när man ser en funktion med ett polynom i nämnaren är att börja tänka regel 4. Gör det inte på måfå, med i de flesta fall kommer det vara enklast.*

Exempel 3 (regel 1 & 2): *Beräkna*

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2 \sin(z)}dz$$

I detta exempel kommer jag börja med att använda regel 1 (vilket man absolut kan göra, och jag gör det för att illustrera hur man använder den i ett jobbigt fall), men i detta fall kommer regel 2 generera mycket kortare, men ganska komplexa, räkningar… Ledsen över spoilern.

Lösning

Vi vet att $\sin(z)$ *har nollställe av* ***grad 1*** *i* $z = 0$. *Vidare har vi* z^2, *vilket innebär en term med nollställe av* ***grad 2***. *Dessa tillsammans innebär att integranden har en pol av* ***grad 3*** *i* $z = 0$.

Eftersom det inte gäller enkla poler är regel 3 och 4 uteslutna. Vi provar således ***regel 1*** *med* $N = 3$ *i punkten* $z = 0$.

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2\sin(z)}dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\left[\frac{d^{(3-1)}}{dz^{(3-1)}}\left((z-0)^3\cdot\frac{1}{z^2\sin(z)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z}{\sin(z)}\right)\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{\sin(z)-z\cos(z)}{\sin^2(z)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin^2(z)\left(\cos(z)-(\cos(z)-z\sin(z))\right)-(\sin(z)-z\cos(z))(2\sin(z)\cos(z))}{\sin^4(z)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{-z\sin^3(z)-2\sin^2(z)\cos(z)+2z\sin(z)\cos^2(z)}{\sin^4(z)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{2z\cos^2(z)-2\sin(z)\cos(z)+z\sin^3(z)}{\sin^3(z)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z\sin^2(z)-2\cos(z)\cdot(\sin(z)-z\cos(z))}{\sin^3(z)}\right) \underbrace{= \cdots = \frac{1}{6}}_{\text{Ni fattar poängen}}$$

Detta är alltså ett exempel på så kallade "vidriga räkningar". Vi använder istället ***residyregel 2****, där vi är ute efter att serieutveckla* $\frac{g(z)}{(z-p)^N}$ *och plocka koefficienten med index* $(N-1) = 2$ *(gå gärna tillbaka till regeln och kontrollera):*

Vi måste först skriva om integranden på formen ovan. Vi söker en funktion $g(z)$ *sådan att*

$$\frac{g(z)}{(z-0)^3} = \frac{1}{z^2\sin(z)} \leftrightarrow \boxed{g(z) = \frac{z^3}{z^2\sin(z)} = \frac{z}{\sin(z)}}$$

Eftersom vi söker c_2 *behöver vi beräkna koefficienterna på något sätt. För detta använder vi* ***Taylors formel*** *(se s.46):*

$$c_2(g) = \frac{g''(0)}{2!}$$

Men hur kommer vi åt denna koefficient på lättaste sätt? Derivering ger än en gång vidriga räkningar. Men Maclaurinutveckling av $g(z)$ *är ju*

$$g(z) = \frac{g(0)}{0!} + \frac{g'(0)}{1!}z + \boxed{\underbrace{\frac{g''(0)}{2!}}_{=c_2}}z^2 + \cdots$$

Vi behöver alltså komma åt koefficienten för z^2*-termen. Vi potensserieutvecklar* $g(z)$*:*

$$g(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots} = \frac{z}{z\left(1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4\right)} = \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 + \cdots\right)}_{=x}}$$

Om vi nu använder standard-Maclaurinutvecklingen $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ *får vi*

$$g(z) = 1 + \left(\frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 + \cdots\right) + \left(\frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 + \cdots\right)^2 + \cdots =$$

$$= 1 + \boxed{\frac{1}{6}}z^2 + \text{Högre ordningens termer}$$

$$\rightarrow Res_{z=0}\left(\frac{g(z)}{(z-0)^3}\right) = \frac{1}{6} \rightarrow 2\pi i \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}$$

$$\boxed{\therefore \int_\gamma \frac{1}{z^2 \sin(z)} dz = \frac{\pi i}{3}}$$

Notering: *Notera att serieutvecklingen kan användas för att komplettera* ***regel 1*** *ovan. Genom ovanstående räkningar får vi ju att* $\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z}{\sin(z)}\right)_{z=0} = f''(0) = \frac{1}{6} \cdot 2! = \frac{1}{3}$, *varpå vi får* $\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z}{\sin(z)}\right)\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \rightarrow 2\pi i \cdot \frac{1}{6} = \boxed{\frac{\pi i}{3}}$.

8.2 Integration med konturer

Vi har gått igenom alla koncept, och det är dags att gå in på stoffet som vanligtvis skapar de sista uppgifterna på tentan. Det innebär att beräkna en ofta reell integral genom att använda komplex analys. Ofta blir man given en viss kontur man ska använda för att visa ett samband, och hur man går tillväga är ganska standardiserat. Dessvärre är räkningarna, precis som alltid, sjukt invecklade, och det är där svårigheten ligger. Tentorna verkar huvudsakligen använda sig av tre konturer: **cirklar/cirkelsektorer/hålkakor, rektanglar** och **nyckelhål**.

Samtliga figurer har vissa saker gemensamt. Målet är att använda en figur som innehåller det intervall man vill integrera längs, och ett flertal övriga linjestycken som antingen går mot noll eller tar ut varandra så att endast det önskvärda intervallet finns kvar. Principen för att lösa dessa uppgifter blir således snarlik, så jag kommer exemplifiera genom att lösa en lite lättare uppgift och därefter några tentauppgifter.

8.2.1 Cirkelsektor (enklare uppgift)

Enligt Euler gäller sambandet

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)}$$

Visa att detta stämmer för $f(z) = \frac{1}{1+x^8}$, dvs. för $m = 1$ och $n = 8$.

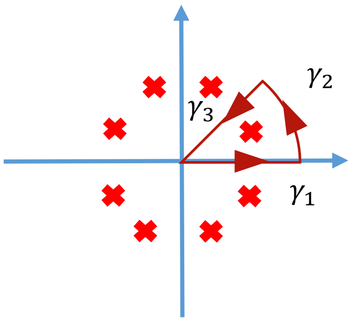
Lösning

Intervallet $x: 0 \rightarrow \infty$ *innebär att vi vill integrera längs hela den positiva delen av real-axeln. Ett bra sätt att göra detta samtidigt som man tar in det komplexa talplanet är genom att använda figurer som har en* ***radie*** *man kan låta gå mot oändligheten. I detta fall kommer vi använda en cirkelsektor:*

γ_1: *Intervallet* $0 \to R$

γ_2: *Del av cirkeln* $|z| = R, 0 \le \arg(z) \le \frac{\pi}{4}$

γ_3: *Linjestycket tillbaka till origo*



Funktionen $f(z) = \frac{1}{1+z^8}$ *har poler i* $e^{\frac{i\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}}$, $k: 0 \to 7$:

Residysatsen ger

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \underbrace{\operatorname{Res}_{z=e^{\frac{i\pi}{8}}}(f)}_{\text{Endast poler inom } \gamma} \quad (*)$$

Vi beräknar varje integral för sig:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^R \frac{1}{1+x^8}dx \to \boxed{\int_0^\infty \frac{1}{1+x^8}dx} \text{ då } R \to \infty. \textit{ Det är denna integral vi vill åt.}$$

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \overset{ML}{\lesssim} \underbrace{\frac{4}{R^8}}_{M} \cdot \underbrace{cR}_{L} = \frac{4c}{R^7} \to \boxed{0} \text{ då } R \to \infty$$

För att beräkna integralen längs linjestycket γ_3 *vänder vi på steken och beräknar samma kurva fast baklänges, eftersom denna är lättare att intuitivt parametrisera.* $-\gamma_3$ *har parametrisering* $z = te^{\frac{i\pi}{4}}, t: 0 \to R$. *Vi får*

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -\int_{-\gamma_3} f(z)\,dz = \int_0^R \frac{1}{1+\underbrace{\left(te^{\frac{i\pi}{4}}\right)^8}_{=t^8\cdot 1}} \cdot e^{\left(\frac{i\pi}{4}\right)}dt = e^{\left(\frac{i\pi}{4}\right)}\int_0^R \frac{1}{1+t^8}dt$$

$$\to \boxed{e^{\left(\frac{i\pi}{4}\right)}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^8}dx} \textit{ då } R \to \infty \text{ så för } \gamma_3 \text{ gäller omvänt tecken.}$$

Insättning i $(*)$ *ger, genom residyregel 4*

$$\left(1 - e^{\left(\frac{i\pi}{4}\right)}\right)\int_0^\infty \frac{1}{1+x^8}dx = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=e^{\left(\frac{i\pi}{8}\right)}}(f) \overset{(4)}{\triangleq} 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{8z^7}\right)_{z=e^{\frac{i\pi}{8}}} = -\frac{i\pi}{4}e^{\left(\frac{i\pi}{8}\right)}$$

$$\to \int_0^\infty \frac{1}{1+x^8}dx = \frac{\frac{-i\pi}{4}e^{\left(\frac{i\pi}{8}\right)}}{1-e^{\left(\frac{i\pi}{4}\right)}} = -\frac{i\pi}{4} \cdot \frac{1}{e^{-\left(\frac{i\pi}{8}\right)} - e^{\left(\frac{i\pi}{8}\right)}} = -\frac{i\pi}{4} \cdot \frac{1}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \boxed{\frac{\pi}{8\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}}$$

Alltså: identifiera delfigurers linjestycken, undersök integralerna längs varje sådant linjestycke och försök hitta delen som gör att integralen som efterfrågas kan beräknas. Beräkna därefter de residyer som behövs och lös ut integralen.

8.2.2 Tentauppgift

Exempel : *(tentamen 2015-10-29, uppgift 6)*

Låt $-1 < \alpha < 1$ *vara ett reellt tal. Beräkna integralen*

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}dx$$

Ledning: integrera en lämpligt vald funktion längs en hel eller halv "hålkaka".

Resonemang:

Frågan ni bör ställa er under tentan när ni ser detta är "vad fan är en hålkaka?" Det kan ju inte bara vara en cirkel med ett hål i mitten, då detta inte skulle ge intervallet $0 \to \infty$ *på något sätt (åtminstone inte om den är hel!) Men nästan – det är en cirkel med ett hål i mitten och ett horisontellt "snitt" längs hela cirkeln, så att två intervall; ett till vänster om och ett till höger om den inre cirkeln bildas. Således kan vi tänka oss att åtminstone det högra intervallet kommer ge oss integralen vi söker. Vidare kan man använda metodologi som i del 3 i denna sammanfattning för att uppskatta integralerna längs de inre och yttre cirklarna.*

Lösning

Vi betecknar den ***yttre*** *cirkeln som* C_R, *den* ***inre*** *cirkeln som* C_ε, *intervallet längs den negativa delen av realaxeln som* I^- *och längs den positiva delen av realaxeln som* I^+.

Vi använder vidare att $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}$ *där vi låter* $Log(z)$ *beteckna den* ***naturliga grenen***.
Med $f(z) = \frac{z^\alpha}{1+z^2}$ *får vi följande:*

$\boldsymbol{C_R}$**:**

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^\alpha}{1+z^2}dz\right| \overset{ML}{\overbrace{\leq}} 2\pi R \cdot \max_{z\in C_R}\left|\frac{z^\alpha}{1+z^2}\right| \leq 2\pi R \cdot \frac{4R^\alpha}{R^2} = \frac{8\pi R^{1+\alpha}}{R^2}$$

Eftersom $-1 < \alpha < 1$ *är* $\frac{8\pi R^{1+\alpha}}{R^2} = \frac{8\pi}{R^b}$ *där* $b > 0$, *varpå* $\frac{8\pi}{R^b} \to 0$ *då* $R \to \infty$.

$\boldsymbol{C_\varepsilon}$**:**

$$\left|\int_{C_\varepsilon} \frac{z^\alpha}{1+z^2}dz\right| \overset{ML}{\overbrace{\leq}} 2\pi\varepsilon \cdot \max_{z\in C_\varepsilon}\left|\frac{z^\alpha}{1+z^2}\right| \leq 2\pi\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^\alpha}{\varepsilon^2} = \frac{2\pi\varepsilon^{1+\alpha}}{\varepsilon^2}$$

Om ε *är tillräckligt litet (facit använder* $\varepsilon < 1/\sqrt{2}$, *så vi tar* $\varepsilon < 1/\sqrt{3}$) *får vi*

$$2\pi\varepsilon \cdot \max_{z\in C_\varepsilon}\left|\frac{z^\alpha}{1+z^2}\right| \leq 2\pi\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^\alpha}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 6\pi\varepsilon^{1+\alpha}$$

Eftersom $\alpha > -1$ *får vi att* $6\pi\varepsilon^{1+\alpha} = 6\pi\varepsilon^{b'}$ *där* $b' > 0$

$$\therefore 6\pi\varepsilon^{1+\alpha} \to 0 \text{ } då\, \varepsilon \to 0$$

I^+ *Ger oss integralen vi är ute efter.*

I^-:

$$\int_{I^-} f(z)\,dz = \int_R^\varepsilon \frac{e^{\alpha Log(x)}}{1+x^2}\,dx = \int_R^\varepsilon \frac{e^{\alpha(\ln|x|+2\pi i)}}{1+x^2}\,dx = -e^{2\pi i\alpha}\int_\varepsilon^R \frac{\overbrace{e^{\alpha\ln|x|}}^{=x^\alpha}}{1+x^2}\,dx$$

Om vi låter $\varepsilon \to 0^+$ och $R \to \infty$ får vi integralen vi är ute efter.

Funktionen $\frac{z^\alpha}{1+z^2}$ har poler i $z = \pm i$, så lägger vi ihop dessa fyra integraler och använder residysatsen får vi

$$\left(1-e^{2\pi i\alpha}\right)\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx = 2\pi i\left[Res_{z=i}\left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}\right) + Res_{z=-i}\left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}\right)\right]$$

Residyregel 4 ger, med $f(z) = z^\alpha$ och $g(z) = 1+z^2$

$$2\pi i\left[Res_{z=i}\left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}\right) + Res_{z=-i}\left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}\right)\right] = 2\pi i\left(\frac{i^\alpha}{2i} - \frac{(-i)^\alpha}{2i}\right) = \pi\left(i^\alpha - (-i)^\alpha\right) =$$

$$= \pi\left(e^{\left(\frac{i\pi\alpha}{2}\right)} - e^{\left(\frac{3i\pi\alpha}{2}\right)}\right)$$

Division med $\left(1-e^{2\pi i\alpha}\right)$ ger slutligen

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi\left(e^{\left(\frac{i\pi\alpha}{2}\right)} - e^{\left(\frac{3i\pi\alpha}{2}\right)}\right)}{1-e^{2\pi i\alpha}} = \pi\frac{e^{\left(\frac{i\pi\alpha}{2}\right)}\left(1-e^{i\pi\alpha}\right)}{\left(1+e^{i\pi\alpha}\right)\left(1-e^{i\pi\alpha}\right)} = \pi\frac{e^{\left(\frac{i\pi\alpha}{2}\right)}}{1+e^{i\pi\alpha}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{2}{e^{i\pi\alpha/2}+e^{-i\pi\alpha/2}} = \boxed{\frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}}$$

Eftersom $\alpha = 0$ är ett specialfall som behandlas väldigt enkelt genom endim-metoder (vi får $[\arctan(x)]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$) kan man välja att hantera detta separat. Men notera att formeln ovan hanterar även detta fall.

Tack!

Ni som tog er tiden att ta er igenom hela detta monster bör ge er själva en enorm klapp på ryggen (eller be en kompis för extra tillfredställelse). Jag hoppas innerligt att denna sammanfattning varit till hjälp i ert plugg, och önskar er stort lycka till på tentan!

Max Parkosidis