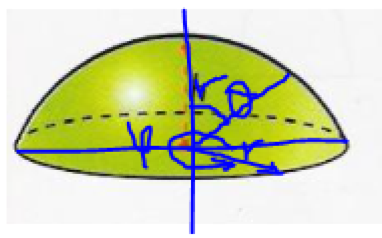
Trabajo Individual 2

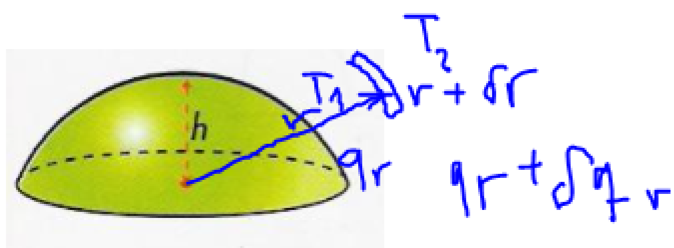
June 22, 2021

[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

1 Modelo Diferencial

1.1 Diagrama





1.2 Variables

1. Variable independiente: posición radial r, m.
2. Variable dependiente: temperatura T, K.
3. Variables intermedias:
   a. Flujo de calor: q_r, kW.
   b. Área transversal: A, m^2.
4. Variables fijas:
   a. Temperatura externa: T_2, K.
   b. Temperatura interna: T_1, K.
   c. Radio exterior: R_2, m.

d. Radio interior: R_1, m.

5. Parámetros:

    a. Conductividad térmica: κ, kW/(m K).

1.3 Balance de energía:

1. Velocidad de acumulación: $V_A = 0$
2. Flujo de entrada: $F_E = q_r A$
3. Flujo de salida: $F_S = q_r A + \delta(q_r A)$
4. Velocidad de generación: $V_G = 0$
5. Velocidad de consumo: $V_C = 0$

$$0 = q_r A - q_r A - \delta(q_r A)$$
$$\Rightarrow \delta(q_r A) = 0$$

1.3.1 Relaciones constitutivas:

$$q_r = -\kappa \frac{dT}{dr}$$

1.3.2 Resolviendo

Se tiene que $dA = r^2 \sin\theta d\phi d\theta$:

$$\delta(q_r r^2 \sin\theta d\phi d\theta) = 0$$
$$\delta(q_r r^2) = 0$$
$$\frac{\delta(q_r r^2)}{\delta r} = 0$$

Ahora $\delta r \to 0$ y:

$$\Rightarrow r^2 \frac{dq_r}{dr} + 2r q_r = 0$$

Sustituyendo:

$$\Rightarrow r^2 \frac{d}{dr}\left(-\kappa \frac{dT}{dr}\right) + 2r\left(-\kappa \frac{dT}{dr}\right) = 0$$
$$\Rightarrow -\kappa r^2 \frac{d^2T}{dr^2} - 2\kappa r \frac{dT}{dr} = 0$$

Dividiendo entre $-\kappa r^2$:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

2 Solucionando la ecuación diferencial

Se busca usar factor integrante:

$$F_I = \exp\left(\int_0^r \frac{2}{r'}dr'\right) = r^2$$

Esto permite reescribir la ecuación como:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

Integrando:

$$r^2\frac{dT}{dr} = C_1$$
$$\Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$$
$$\Rightarrow \int dT = \int \frac{C_1}{r^2}dr$$
$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

$T(R_1) = T_1$, $T(R_2) = T_2$:

$$T_1 = \frac{-C_1}{R_1} + C_2$$

$$T_2 = \frac{-C_1}{R_2} + C_2$$

$$C_2 = T_2 + \frac{C_1}{R_2}$$
$$T_1 = \frac{-C_1}{R_1} + T_2 + \frac{C_1}{R_2}$$
$$T_2 - T_1 = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)C_1$$

$$C_1 = (T_2 - T_1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$$
$$C_2 = T_2 + \frac{1}{R_2}(T_2 - T_1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$$

Por tanto, la expresión para la distribución radial de la temperatura queda como:

$$T(r) = T_2 + \frac{1}{R_2}(T_2 - T_1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1} - (T_2 - T_1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1}\frac{1}{r}$$

Reacomodando:

$$T(r) = T_2 + \frac{T_2 - T_1}{r\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)} - \frac{T_2 - T_1}{R_2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}$$

Sustituyendo con las condiciones de trabajo:

$$T(r) = 1523.15 + \frac{1100}{\frac{-r}{24}} - \frac{1100}{1.6 \cdot \frac{-1}{24}}$$

$$T(r) = 1523.15 - \frac{26400}{r} + 16500$$

$$T(r) = 18023.15 - \frac{26400}{r}$$

2.1 Comprobación del modelo

2.1.1 Dimensionalidad

Se tiene que $T(r)$ debe tener unidades de Kelvin, el primer término T_2 cumple con esto, el segundo término, tiene unidades de la forma $K/(m \cdot 1/m)$, de forma que también tiene unidades de Kelvin, y el último término también presenta estas unidades.

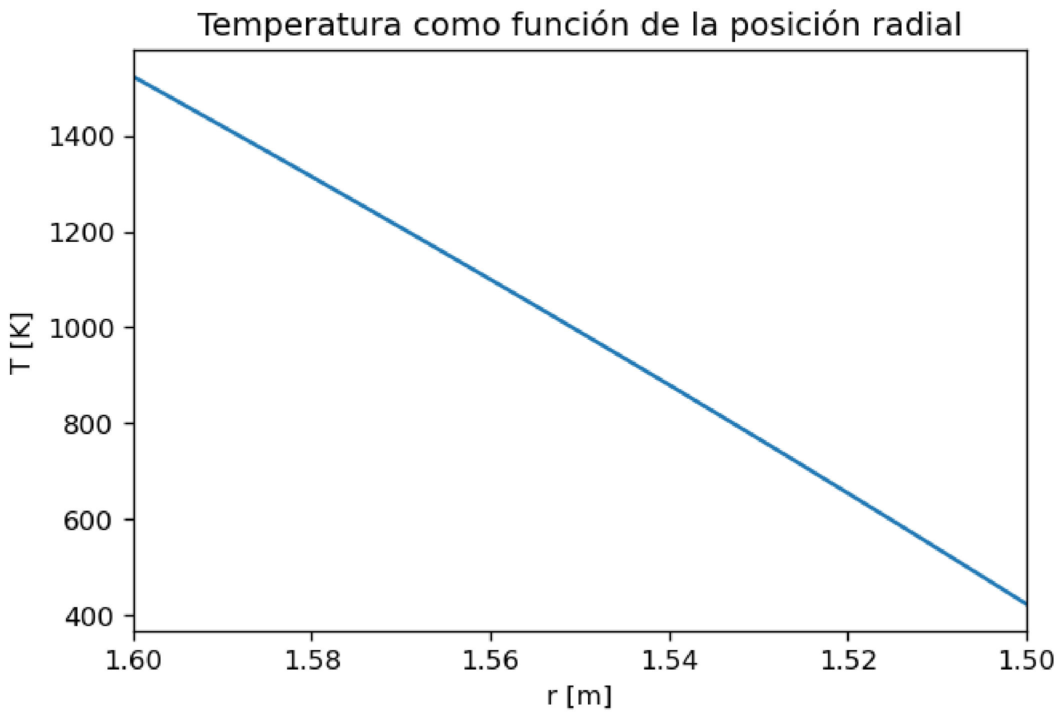
2.1.2 Condición de contorno

Al evaluar el modelo en $R_1 = 1.5$, se obtiene como resultado $T_1 = 423.15$, lo que permite afirmar que el modelo cumple con la condición de contorno.

[2]:
```
T1=150+273.15 # K
T2=1250+273.15 # K
R1=1.5 # m
R2=1.6 # m
k=0.015 # kW/m.K
h = 0.5e-02 # Step size
r = np.arange(R2,R1,-h) # Numerical grid
```

[3]:
```
def T(r):
    return T2+(T2-T1)/(r*(1/R2-1/R1))-(T2-T1)/(R2*(1/R2-1/R1))
```

[4]:
```
plt.figure(dpi=120)
plt.plot(r,T(r))
plt.xlim(R2,R1)
plt.title('Temperatura como función de la posición radial')
plt.xlabel('r [m]')
plt.ylabel('T [K]')
plt.show()
```



3 Solución de la ecuación diferencial con métodos numéricos

Siguiendo la sugerencia, se busca resolver para dT/dr, entonces:

$$\frac{dq_r}{dr} = -\frac{2}{r}q_r$$

Con $q_r = -\kappa dT/dr$.

Se tomará un paso $h = 0.5 \times 10^{-2}$ m y el radio irá de 1.6 a 1.5, con $q_r(1.6) = 175 \times 10^3$ W/m^2

[5]:
```
# Define parameters
f = lambda r, q: -2*q/r# ODE
q0 = -175 # Initial Condition, kW/m^2.K
```

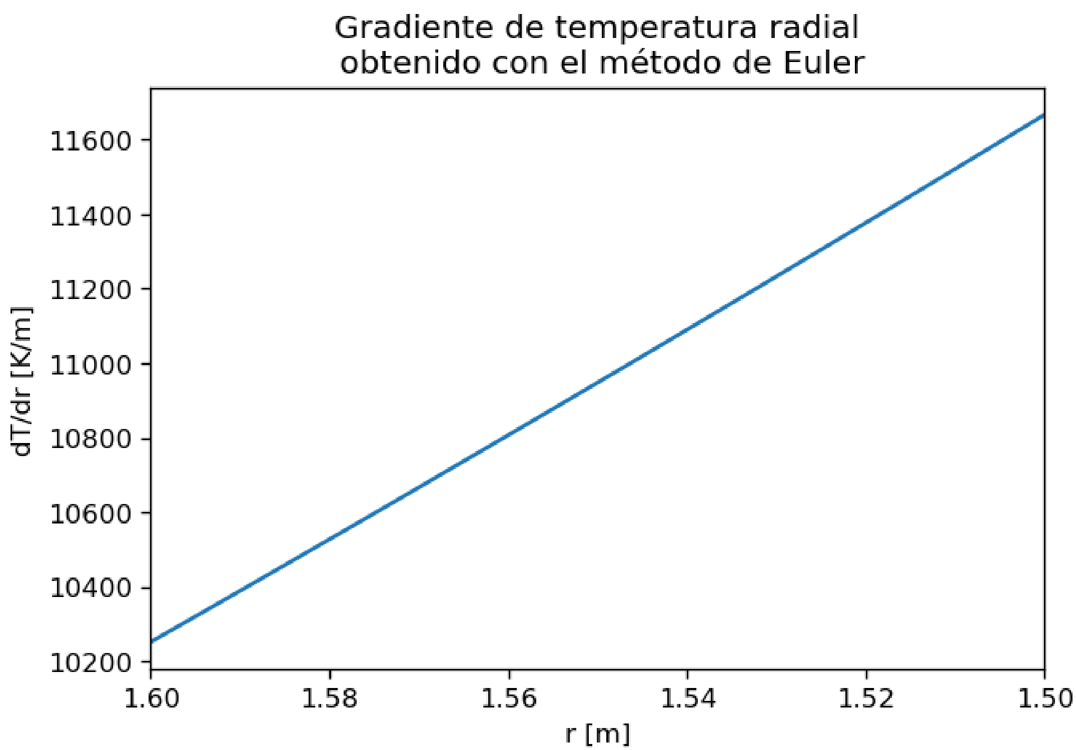
3.0.1 Método de Euler

[6]:
```
def Euler(f):
    q = np.zeros(len(r))
    q[0] = q0
    for i in range(0, len(r) - 1):
        q[i + 1] = q[i] + h*f(r[i], q[i])
    return q/-k
```

[7]:
```
dTdrEuler=Euler(f)
dTdrEuler
```

[7]:
```
array([11666.66666667, 11593.75      , 11521.06191223, 11448.60240334,
       11376.37147335, 11304.36912226, 11232.59535005, 11161.05015674,
       11089.73354232, 11018.64550679, 10947.78605016, 10877.15517241,
       10806.75287356, 10736.57915361, 10666.63401254, 10596.91745037,
       10527.42946708, 10458.1700627 , 10389.1392372 , 10320.3369906 ,
       10251.76332288])
```

[8]:
```
plt.figure(dpi=120)
plt.plot(np.arange(R1,R2,h),dTdrEuler)
plt.xlim(R2,R1)
plt.xlabel('r [m]')
plt.ylabel('dT/dr [K/m]')
plt.title('Gradiente de temperatura radial\n obtenido con el método de Euler')
plt.show()
```



Como se conocen los valores obtenidos para dT/dr, se puede integrar para conocer el cambio en la temperatura ΔT

[9]:
```
deltaTEuler=np.trapz(dTdrEuler,r)
deltaTEuler
```

[9]: -1095.1614746603736

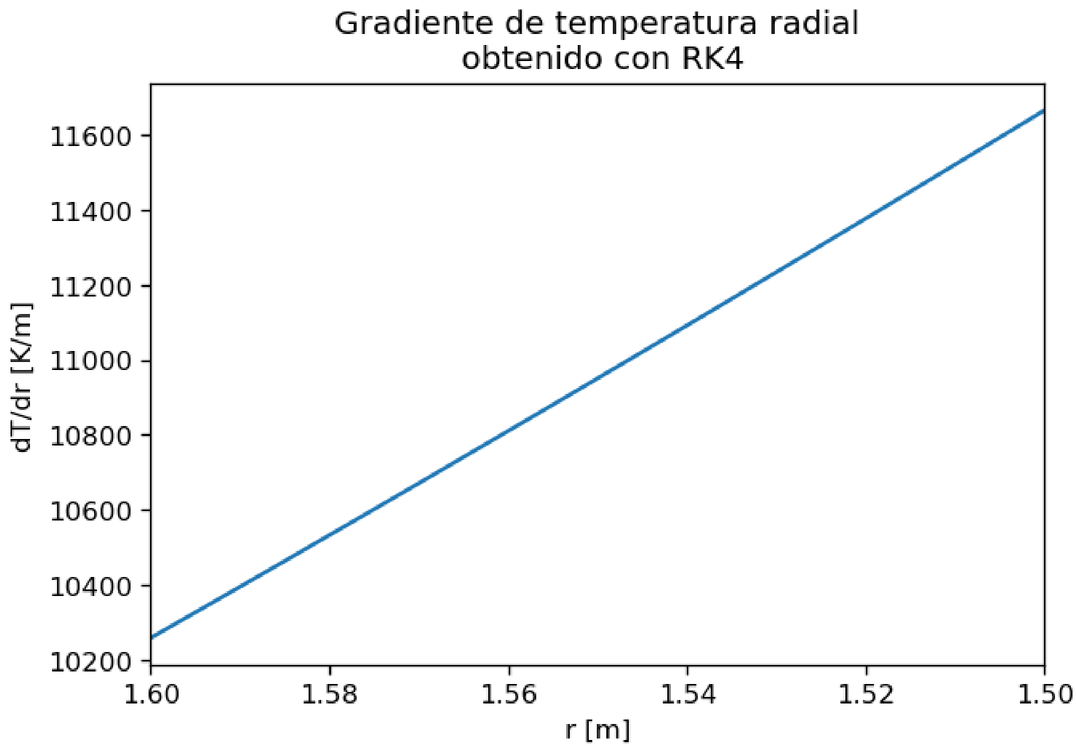
3.0.2 Runge-Kutta 4

[10]:
```
def RK4(f):
    '''
    Esta función corresponde a una función que soluciona una EDO por RK4␣
 ↪iterando sobre un y = np.arange(y0,yf,h)

    Parámetros
    ------------------------
    f: función al lado derecho de la EDO
    ------------------------
    np.array(q): arreglo con los valores de p asociados a los valores de r.
    '''
    q = [q0]
    for i in range(len(r)-1):
        k1 = h*f(r[i],q[i])
        k2 = h*f(r[i]+h/2,q[i]+k1/2)
        k3 = h*f(r[i]+h/2,q[i]+k2/2)
        k4 = h*f(r[i]+h,q[i]+k3)
        q_r = q[i]+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
        q.append(q_r)
    return np.array(q)/-k
```

[11]:
```
dTdrRK4=RK4(f)
```

[12]:
```
plt.figure(dpi=120)
plt.plot(np.arange(R1,R2,h),dTdrRK4)
plt.xlim(R2,R1)
plt.xlabel('r [m]')
plt.ylabel('dT/dr [K/m]')
plt.title('Gradiente de temperatura radial\n obtenido con RK4')
plt.show()
```



Como se conocen los valores obtenidos para dT/dr, se puede integrar para conocer el cambio en la temperatura ΔT

[13]:
```
deltaTRK4=np.trapz(dTdrRK4,r)
deltaTRK4
```

[13]: -1095.4886889693253

4 Temperatura entre 1.6 m y 1.5 m

Se obtiene primero la derivada de la función $T(r)$, para luego ser integrada desde $r = 1.6$ hasta $r = 1.5$.

4.1 Derivada analítica

Del modelo obtenido de solucionar la ecuación diferencia, se tiene que:

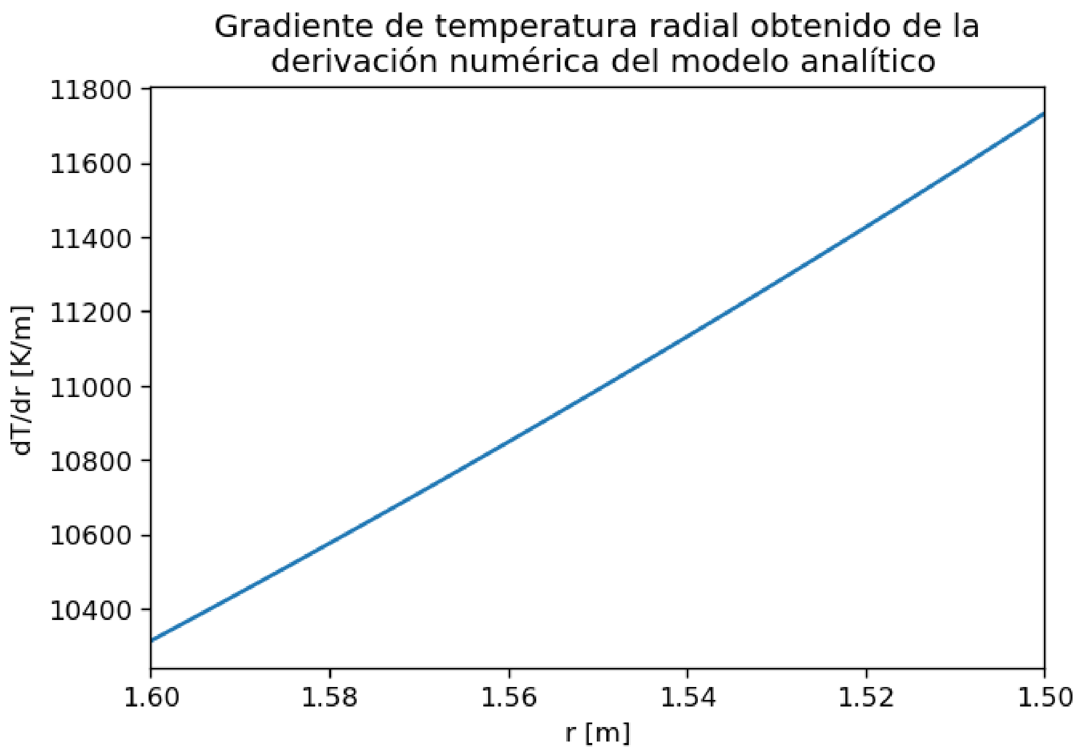
$$\frac{dT}{dr} = \frac{26400}{r^2}$$

[14]:
```
def dT(r):
    return 26400/r**2
```

[15]:
```
dTdr=dT(np.arange(R1,R2,h))
dTdr
```

[15]:
```
array([11733.33333333, 11655.50049116, 11578.43954213, 11502.14031304,
       11426.59279778, 11351.78715399, 11277.71369986, 11204.36291101,
       11131.72541744, 11059.7920005 , 10988.55359001, 10918.00126136,
       10848.12623274, 10778.91986241, 10710.37364599, 10642.47921391,
       10575.22832879, 10508.612883  , 10442.62489617, 10377.25651281,
       10312.5       ])
```

[16]:
```
plt.figure(dpi=120)
plt.plot(np.arange(R1,R2,h),dTdr)
plt.xlim(R2,R1)
plt.xlabel('r [m]')
plt.ylabel('dT/dr [K/m]')
plt.title('Gradiente de temperatura radial obtenido de la\n derivación numérica␣
 ↪del modelo analítico')
plt.show()
```



4.2 Integración numérica

[17]:
```
deltaT=np.trapz(dTdr,r)
deltaT
```

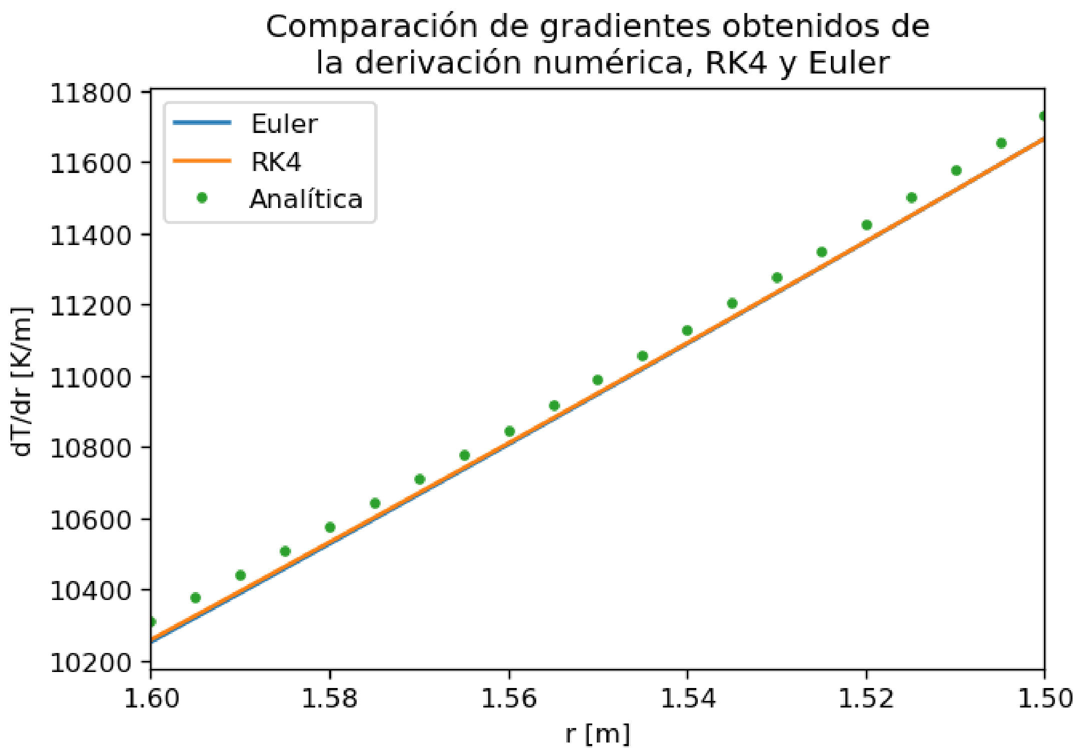
[17]: -1100.0057371038451

4.2.1 Integración analítica

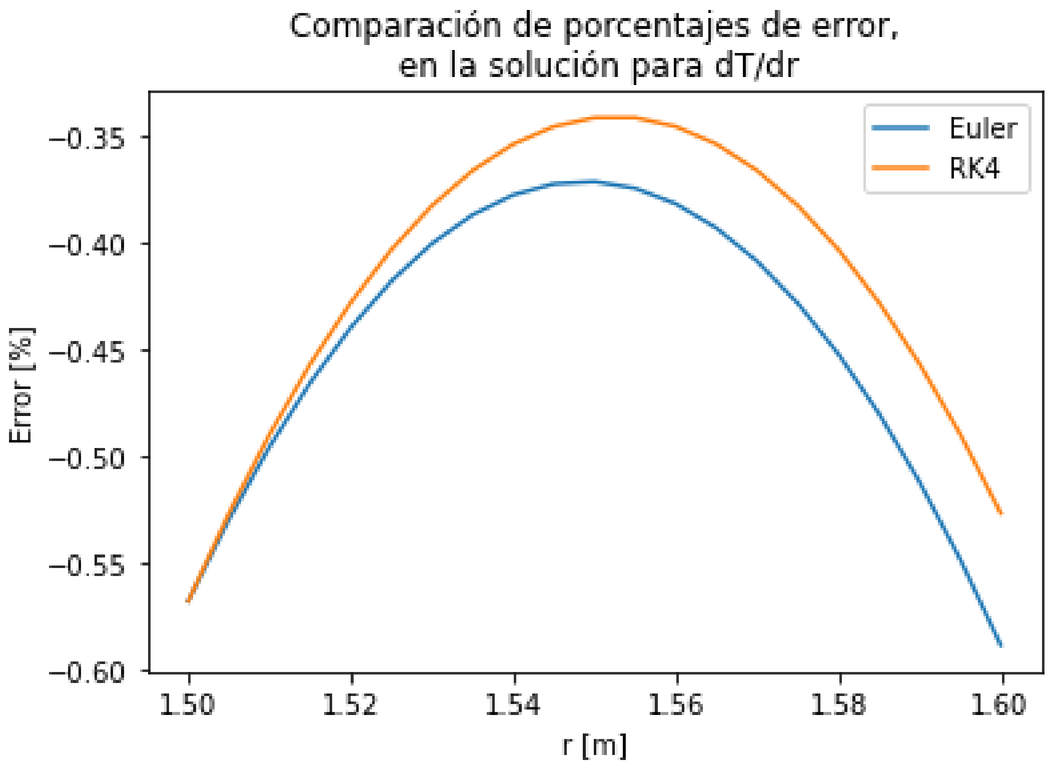
Se observa al integrar el gradiente se tiene que:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{26400}{r^2} \Rightarrow \int_{T_2}^{T_1} dT = \int_{R_2}^{R_1} \frac{26400}{r^2} dr \Rightarrow \Delta T = \left[\frac{-26400}{r}\right]_{R_2}^{R_1} = \frac{-26400}{1.5} + \frac{26400}{1.6} = -1100$$

[18]:
```
plt.figure(dpi=120)
plt.plot(np.arange(R1,R2,h),dTdrEuler)
plt.plot(np.arange(R1,R2,h),dTdrRK4)
plt.plot(np.arange(R1,R2,h),dTdr,'.')
plt.xlim(R2,R1)
plt.legend(['Euler','RK4','Analítica'])
plt.xlabel('r [m]')
plt.ylabel('dT/dr [K/m]')
plt.title('Comparación de gradientes obtenidos de\n la derivación numérica, RK4␣
 ↪y Euler')
plt.show()
```



[19]:
```
errorEuler=(dTdrEuler-dTdr)/dTdr*100
errorRK4=(dTdrRK4-dTdr)/dTdr*100
plt.plot(np.arange(R1,R2,h),errorEuler)
plt.plot(np.arange(R1,R2,h),errorRK4)
plt.legend(['Euler','RK4'])
plt.ylabel('Error [%]')
plt.xlabel('r [m]')
plt.title('Comparación de porcentajes de error,\n en la solución para dT/dr')
plt.show()
```



[20]:
```
errordTEuler=abs(deltaTEuler--1100)/-1100*100
errordTEuler
```

[20]: -0.43986593996603257

[21]:
```
errordTRK4=abs(deltaTRK4--1100)/-1100*100
errordTRK4
```

[21]: -0.4101191846067939

Método	ΔT [K]	Error [%]
Euler	-1095.1614746603736	-0.43986593996603257
RK4	-1095.4886889693253	-0.4101191846067939