1. Abschnitt : Logik → klassische Aussagenlogik ⇝ Boolsche Algebra für technische Schaltungen

→ Prädikatenlogik

→ Modallogik

→ Fuzzy Logic

→ Quantenlogik

Aufgabe 2.1.1

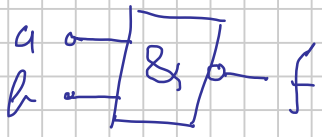
Zeigen Sie, dass jede Boolesche Funktion mit NAND- bzw. NOR-Gattern dargestellt werden kann.

Def: In der Mathematik wird ein Junktor z.B. $\wedge, \vee, \neg$ als "vollständig" bezeichnet, wenn er alle Junktoren eines Systems $\{$z.B. $\wedge, \vee, \neg\}$ darstellen kann

⇒ können wir $\wedge, \vee, -$ mit NAND oder NOR darstellen?

Geht das mit NAND?

Symbol



Schreibweise

$f = \overline{a \wedge b} = a \text{ NAND } b$

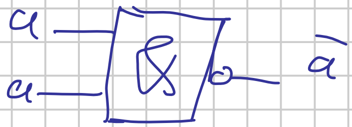
$= a | b$

↖ Sheffer-Strich

a b	f
0 0	1
0 1	1
1 0	1
1 1	0

Wahrheitswerte

→ $-$ darstellen?



"Hinschauen"

$f = \overline{a \wedge a} = \bar{a}$

⇒ $-$ ist mit NAND darstellbar

de Morgan + Idempotenzgesetz

$f = \overline{a \wedge a} = \bar{a} \vee \bar{a} = \bar{a}$

$f = \overline{(a \wedge a)} = \bar{a}$ Idempotenzgesetz

→

→ ∧ darstellbar? ✓

$$a \wedge b = \overline{\overline{a \wedge b}} = \overline{\overline{(a \wedge b)}} = \overline{a | b} = (a|b) | (a|b)$$

"NAND"

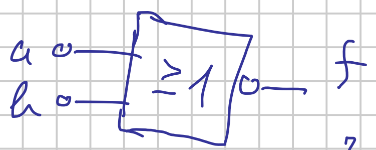
→ ∨ darstellbar? ✓

$$a \vee b = \overline{\overline{a \vee b}} = \overline{\bar{a} \wedge \bar{b}} = (a|a) | (b|b)$$

de Morgan

⇒ NAND ist vollständig

Geht das mit NOR?



"oder als Addition"

OR $a + b \geq 1$ ⇒ wahr

XOR $a + b = 1$ ⇒ wahr

Schreibweise

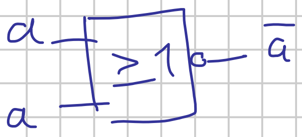
$$f = \overline{a \vee b} = a \downarrow b$$

Pierce-Pfeil

Wahrheitstabelle

a b	f
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	0

$\rightarrow$ $\neg$ darstellbar? ✓



$\wedge$ darstellbar? ✓

$a \wedge b = \overline{\overline{a \wedge b}} = \overline{\bar{a} \vee \bar{b}} = (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)$

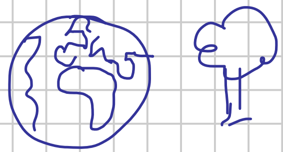
de Morgan

$\vee$ darstellbar? ✓

$a \vee b = \overline{\underbrace{\overline{a \vee b}}_{\text{NOR}}} = (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)$

$\Rightarrow$ NOR ist vollständig

[Wittgenstein: Tractatus Logico Philosophicus]



"Welt"

$\Rightarrow$ $F_1 = \dots$
$F_2 = \dots$
$F_3 = \dots$

Sätze

mit n-stelligen Sheffer-Operatoren darstellen

$\Rightarrow$ Wittgenstein schafft es, die ganze Welt mit beliebigen Verknüpfungen eines n-stelligen Sheffer-Operators

(N-Operanten) darzustellen.

Aufgabe 2.1.2

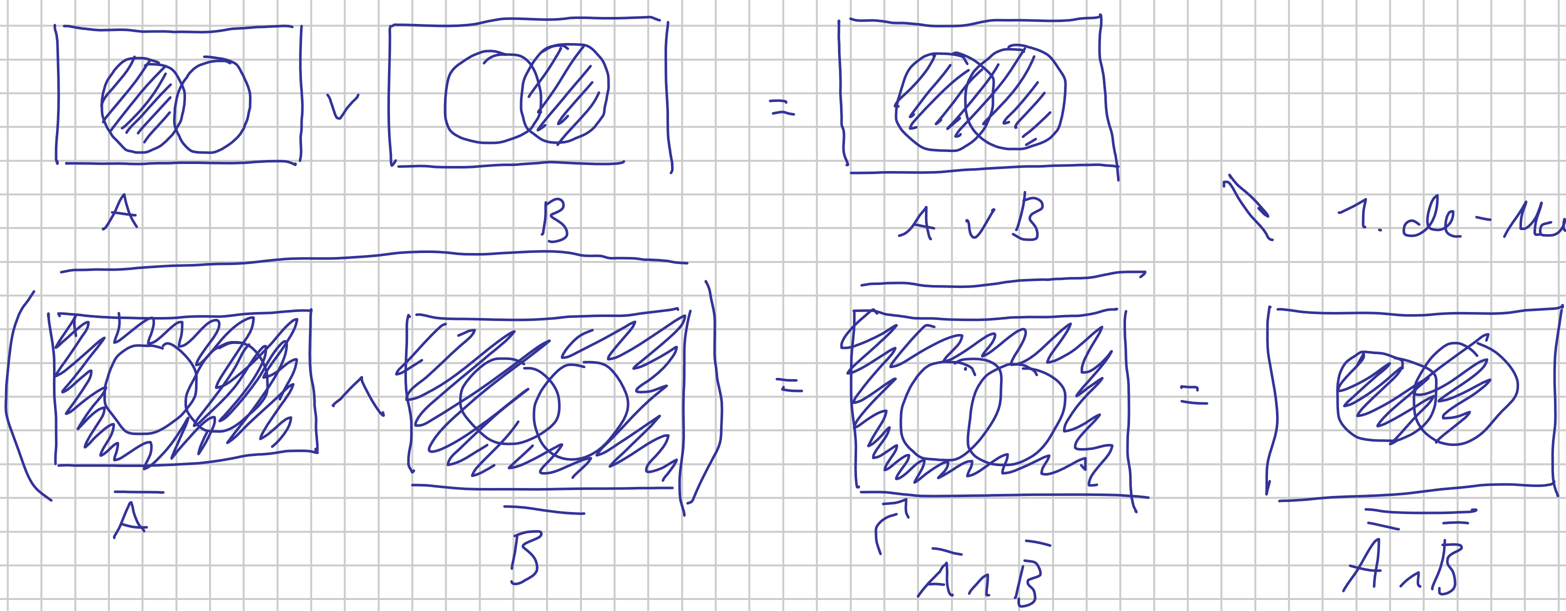
Zeigen Sie im Venn-Diagramm die Gültigkeit der De Morgan'schen Gesetze

$A \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$

$A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$

Erweitern Sie die Gesetze auf N Variablen.

1)



1. de-Morgansche Gesetz

2. analog

Erweiterung auf N Variablen

$$\rightarrow \quad A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 \vee \ldots \vee A_{n-1} \vee A_n$$

$$\rightarrow \quad = \overline{\overline{\underbrace{A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 \vee \ldots \vee A_{n-1}}_{A'_{n-1}} \vee A_n}}$$

$$= \overline{\overline{A'_{n-1} \vee A_n}} = \overline{\overline{A'_{n-1}} \wedge \overline{A_n}} = \overline{\overline{\left(A'_{n-2} \vee A_{n-1}\right)} \wedge \overline{A_n}}$$

$$= \overline{\overline{A'_{n-2}} \wedge \overline{A_{n-1}} \wedge \overline{A_n}} = \text{usw.}$$

$$= \overline{\overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \overline{A_3} \wedge \ldots \wedge \overline{A_{n-1}} \wedge \overline{A_n}}$$

Aufgabe 2.1.3

Beweisen Sie mit den Axiomen und den abgeleiteten Sätzen der Booleschen Algebra das gilt:
$\overline{A} \vee A\overline{B} = \overline{B} \vee \overline{A}B$

$$\overline{A} \vee A\overline{B} = (1 \wedge \overline{A}) \vee A\overline{B}$$ Einselement $1 \wedge A \equiv A$

$$= ((B \vee \overline{B}) \wedge \overline{A}) \vee A\overline{B}$$ Komplement $B \vee \overline{B} \equiv 1$

"vel" lateinisch "oder"

$$= B\overline{A} \vee \overline{B}\overline{A} \vee A\overline{B}$$ "Distributivgesetz" $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

$$= B\overline{A} \vee \underbrace{(A \vee \overline{A})}_{1}\overline{B}$$ Einselement

$$= \overline{A}B \vee \overline{B}$$

$$= \overline{B} \vee \overline{A}B$$ "Kommutativgesetz"

1. Kommentar: $\overline{A} \vee A\overline{B}$ → nach vorne auflösen ← $\overline{B} \vee \overline{A}B$ nach hinten auflösen

Versuchen Verbindung zu finden

2. Kommentar: Das war die algebraische Lösung

Dann gibt es noch die "grafische" Lösung mit KV-Diagrammen (später)

3. Kommentar:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad \Leftarrow \text{ Skript 2. Distributivgesetz}$$

$$\bar{A} \vee A\bar{B} = \underbrace{(\bar{A} \vee A)} \wedge (\bar{A} \vee \bar{B})$$

$$= \bar{A} \vee \bar{B} = (B \vee \bar{B})\bar{A} \vee \bar{B} = B \vee \bar{A} \vee \bar{B}\bar{A} \vee \bar{B}$$

$$= \bar{B} \vee \bar{A}B$$

Aufgabe 2.1.4

Gegeben sei folgende Funktion:

$$\mathbf{F} = \left(\overline{a \wedge \overline{b}} \wedge \overline{c}\right) \wedge \overline{a} \wedge (b \vee d) \quad \rightarrow \quad 2.1.3$$

Entwerfen Sie ein Schaltnetz, das obige Funktion erfüllt, unter ausschließlicher Verwendung von NAND-Gattern mit jeweils zwei Eingängen.

$\rightarrow$ 2.1.1

Vorgehen: 1. F so umformen, dass F als "schön übersichtlicher" Ausdruck vorliegt. (z.B. DNF)

2. Aus Zwischenschritt $\rightarrow$ Formulierung mit NAND bilden

3. Schaltnetz hinschreiben

$$\rightarrow F = \left(\overline{a \wedge \overline{b}} \wedge \overline{c}\right) \wedge \overline{a} \wedge (b \vee d) \qquad \text{de Morgan}$$

$$= \left((\overline{a} \vee b) \wedge \overline{c}\right) \wedge \overline{a} \wedge (b \vee d)$$

$$= (\bar a \bar c \vee b \bar c) \wedge \bar a \wedge (b \vee d)$$

$$(a+b)\cdot(c+d) = ac + bc + ad + bd$$

$$= (\bar a \bar c \vee b \bar c) \wedge (\bar a b \vee \bar a d)$$

$$= \bar a \bar c \cancel{\bar a} b \vee b \bar c \bar a \cancel{b} \vee \cancel{b} \bar c \bar a d \vee b \bar c \bar a d$$

$$= \cancel{\bar a b \bar c} \vee \bar a b \bar c \vee \bar a \bar c d \vee \bar a b \bar c d$$

$$= \bar a b \bar c \vee \bar a \bar c d \vee \bar a b \bar c d$$

$$= \bar a b \bar c (\underbrace{1 \vee d}_{1}) \vee \bar a \bar c d$$

$$= \bar a b \bar c \vee \bar a \bar c d$$

Disjunktive Form als Zwischenschritt

mit NAND, bzw | hinschreiben

mit zwei Eingängen

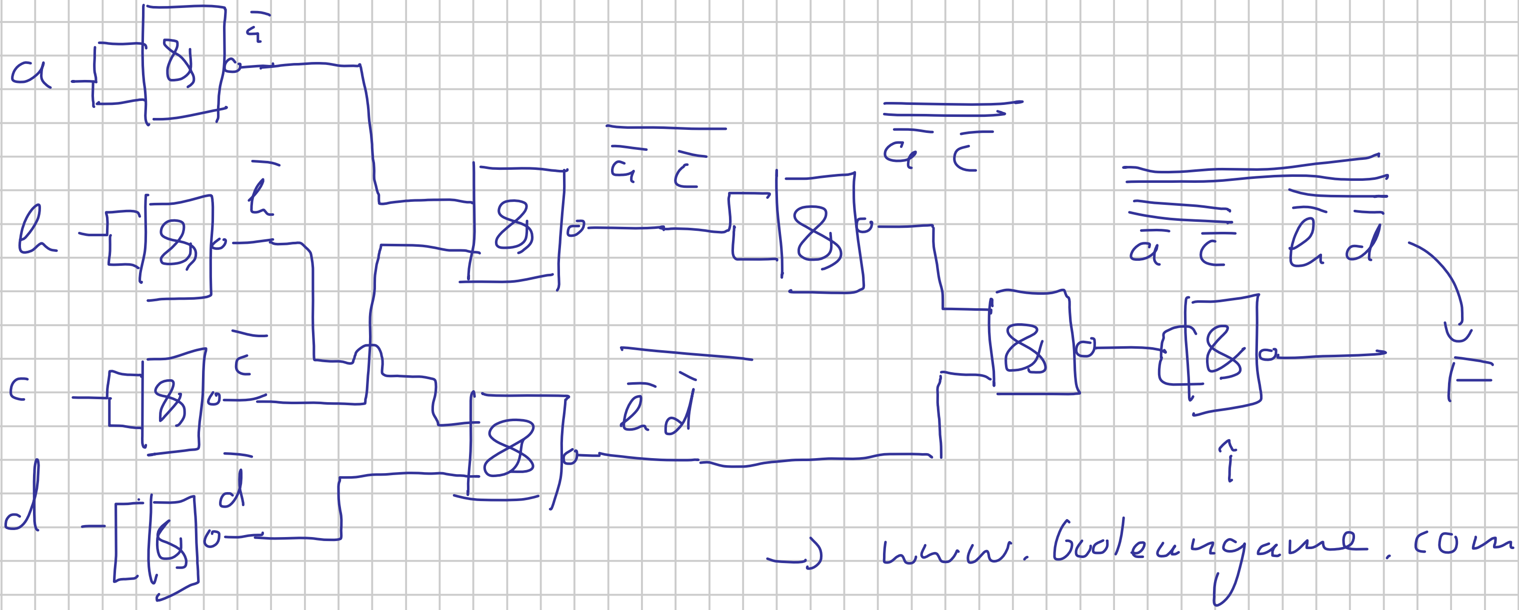
$= \boxed{\bar a\,\bar c}\ \boxed{(b \vee d)}$

① $\bar a\,\bar c = \overline{\overline{\bar a\,\bar c}}$

② $b \vee d = \overline{\bar b\,\bar d}$

$= \overline{\overline{\overline{\overline{\bar a\,\bar c}}}\ \overline{\bar b\,\bar d}} = [(a|a)|(c|c)]\ (\dots)$ sehr lang

Sheffer-Strich



→ www.booleangame.com