УДК 519.632

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗНОСТНОГО И ВЕРОЯТНОСТНОГО МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ПОСТРОЕННОЙ НА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Сушина А.Д.
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
студентка кафедры «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»
e-mail: nastya.sushina@yandex.ru

Аннотация:
Ключевые слова: математическая модель, дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, сравнительный анализ, разностный метод, вероятностный метод, задача теплопроводности, продольно-поперечная схема, метод Монте-Карло.

Актуальность проблемы. Значительное число задач физики и техники приводит к линейным и нелинейным дифференциальным уравнения в частных производных. [1] Обычно решение во многих случаях является весьма трудоемким. [4] Для сложных математических моделей аналитические решения удается получить сравнительно редко. Поэтому среди приближенных математических методов основными методами решения задач являются численные. Эти методы позволяют добиться хорошего качественного и количественного описания исследуемого процесса или явления.

Не вызывает сомнения, что решение задач физики и техники является острой темой для изучения, и поиск наиболее подходящего метода решения является важной задачей. Поиск такого метода не может быть произведен без сравнительного анализа доступных методов решения задачи.

Наиболее распространенными подходами к решению задач данного типа являются разностные и вероятностные методов. Первый позволяет сводить приближенное решение уравнения в частных производных к решению систем алгебраических уравнений. [1] Второй основан на математическом аппарате теории вероятностей.

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод, что необходимость в сравнении методов исследования математической модели, построенной на дифференциальных уравнениях в частных производных, существует.

Целью данной работы является проведение сравнительного анализа разностных и вероятностных методов исследования математической модели, построенной на дифференциальном уравнении в частных производных.

Основные **задачи**:

1. изучить достоинства и недостатки разностных методов на примере поперечно-продольной схемы;
2. изучить достоинства и недостатки вероятностных методов на примере метода Монте-Карло;
3. сравнить методы и сделать выводы о применимости данных методов для решения различных задач.

Объектом исследования являются методы исследования математических моделей. **Предметом** - отличия методов и их применимость для решения конкретных задач.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу: имеется тонкая прямоугольная пластина размерами $a \times b$. Температура по толщине пластины (третьей координате) принимается постоянной. Её двумерное температурное полс $u(x, z)$ описывается математической моделью:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,z)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k(x,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+f(x,z)=0\ (1)$$

Функция $f(x,y)$ представляет внутренние объемные источники тепловыделения, например, за счет поглощения излучения в полупрозрачном материале пластины. Можно считать, что пластина охлаждается воздухом или водой, температура которых равна u_0. k является коэффициентом теплопроводности материала пластины.

Краевые условия задачи заданы следующим образом:

$$\begin{cases} x=0, u(0,z)=u_0 \\ x=a, u(a,z)=u_0 \\ z=0, u(x,0)=u_0 \\ z=bu(x,b)=u_0 \end{cases} (2)$$

Метод установления. Математическая модель (1), описывающая стационарную задачу, является дифференциальным уравнением эллиптического типа. Для его численного решения используем метод установления, заключающийся в преобразовании стационарной задачи в нестационарную. Добавим фиктивную производную по времени:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,z)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k(x,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+f(x,z)\ \ (3)$$

Если при численном решении уравнения (3), описывающего нестационарную задачу, использовать граничные условия (2), т. е. граничные условия, не зависящие от времени, то при стремлении времени к бесконечности, производная по времени будет стремиться к нулю, а решение нестационарной задачи (3) — к решению $u(x,z)$стационарной задачи (1). [2]

Решение разностным методом. В качестве примера разностного метода была взята продольно-поперечная схема.

Применение разностного метода начинают с построения разностной сетки, представляющей собой множество точек (узлов), образованных пересечением систем линий. Сетку можно представить как совокупность узлов, лежащих на строках $i_2 = 0,1...N_2$или как совокупность узлов, расположенных на столбцах $i_1 = 0,1...N_1$.

Если на каждой строке или столбце решать задачу методом прогонки при фиксированном i_1 или i_2, то то для нахождения результата во всех узлах сетки потребуется число $O(N_1 N_2)$ арифметических действий, пропорциональное числу узлом двумерной сетки. Основная идея состоит в последовательном решении задачи для строк и для столбцов.

Рассмотрим в области

$$D_T = G\times[0\le t\le T], G=[0\le x\le a]\times[0<y\le b](4)$$

уравнение (3) с начальными $T(x,y,0)=T_0(x,y),(x,y)\in G$и граничными условиями (2).

Введем в области G сетку узлов

$$\left\{x^n = n*h_x, n=\overline{0{:}N}, N*h_x=a, z^m=m*h_z, m=\overline{0{:}M}, M*h_z=b\right\},$$

а на отрезке $[0\le t\le T]$сетку узлов $\overline{\omega_r}=\left\{t^r=r*\tau, r=\overline{0{:}K}, K*\tau=T\right\}$.

Переход от одного слоя к другому совершается в два этапа с шагами 0.5τ. Для составления продольно поперечной схемы введем полуцелый слой $t = t_r + \frac{\tau}{2}$.

Запишем разностную схему (k = λ):

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{y_{nm}} - y_{nm}}{0.5\tau} = \dfrac{\lambda_{n+1/2,m}\left(\overline{y_{n+1,m}} - \overline{y_{nm}}\right) - \lambda_{n-1/2,m}\left(\overline{y_{nm}} - \overline{y_{n-1,m}}\right)}{h_x^2} + \dfrac{\lambda_{n,m+1/2}\left(y_{n,m-1} - y_{nm}\right) - \lambda_{n,m-}}{h_z^2} \\ \dfrac{y_{\widehat{nm}} - \overline{y_{nm}}}{0.5\tau} = \dfrac{\lambda_{n+1/2,m}\left(\overline{y_{n+1,m}} - \overline{y_{nm}}\right) - \lambda_{n-1/2,m}\left(\overline{y_{nm}} - \overline{y_{n-1,m}}\right)}{h_x^2} + \dfrac{\lambda_{n,m+1/2}\left(y_{n,\widehat{m-1}} - y_{\widehat{nm}}\right) - \lambda_{n,m-}}{h_z^2} \end{cases}$$

Зафиксировав в первом из уравнений m, получим систему уравнений относительно значений $\overline{y_{nm}}$, где $n = \overline{1{:}\,N-1}$, состоящую из N-1 линейного уравнения. Тогда систему на каждом половинном временном слое можно представить как N-1 независимую задачу (для каждого фиксированного m). Аналогично решение второго из уравнений системы на каждом слое $\tau + 1$ представляет собой решение M – 1 независимой задачи при фиксированном n.

Каждая из указанных задач является системой линейных уравнений относительно значений сеточной функции по неявному направлению и решается методом прогонки. [3]

По каждому из неявных направлений разностная схема является линейной и может быть записана в следующем виде:

$A_{nm}\overline{y_{n-1,m}} + B_{nm}\overline{y_{nm}} + C_{nm}\overline{y_{n+1,m}} = F_{nm}$, (4)

где $A_{nm} = \frac{\lambda_{n-1/2,m}}{h_x^2}$, $B_{nm} = \frac{-\lambda_{n-1/2,m}}{h_x^2} - \frac{\lambda_{n+1/2,m}}{h_x^2} + \frac{1}{0.5\tau}$, $C_{nm} = \frac{\lambda_{n+1/2,m}}{h_x^2}$, $F_{nm} = \frac{y_{nm}}{0.5\tau} + f(x_n, z_m) + \frac{\lambda_{n,m+1/2} y_{n,m-1} - \lambda_{n,m+1/2} * y_{nm} - \lambda_{n,m-1/2} * y_{nm} + \lambda_{n,m-1/2} y_{n,m+1}}{h_z^2}$

и соответственно:

$\alpha_{nm} y_{\widehat{n-1},m} + \%betta_{nm} y_{\widehat{nm}} + \gamma_{nm} y_{\widehat{n+1},m} = -\phi_{nm}$, (5)

Где $\alpha_{nm} = \frac{\lambda_{n-1/2,m}}{h_z^2}$, $\beta_{nm} = \frac{-\lambda_{n-1/2,m}}{h_z^2} - \frac{\lambda_{n+1/2,m}}{h_z^2} + \frac{1}{0.5\tau}$, $\gamma_{nm} = \frac{\lambda_{n+1/2,m}}{h_z^2}$, $\phi_{nm} = \frac{\overline{y_{nm}}}{0.5\tau} + f(x_n, z_m) + \frac{\lambda_{n,m+1/2}\overline{y_{n,m-1}} - \lambda_{n,m+1/2} * \overline{y_{nm}} - \lambda_{n,m-1/2} * \overline{y_{nm}} + \lambda_{n,m-1/2}\overline{y_{n,m+1}}}{h_x^2}$.

После очередного перехода со слоя τ на слой τ+1 запоминаем значения сеточной функции. Решение задачи продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие:

$$max\left[\frac{y_{\widehat{nm}} - y_{nm}}{y_{\widehat{nm}}}\right] < \varepsilon$$

Решение вероятностным методом. В качестве примера был взят метод Монте-Карло, основанный на случайном блуждании.

Основной составляющей частью решения дифференциальных уравнение методом Монте-Карло является случайное блуждание. [4] Обычно процесс случайного блуждания моделируется на решетке, вписанной в некоторую область G так, что в каждый момент времени происходит «перескок» броуновской частицы из одного узла в соседний.

В классическом случайном блуждании величина шага и траектории фиксируется заранее. Такой процесс называется фиксированным случайным блужданием. Процесс фиксированного случайного блуждания обычно реализуется на узловой решетке с постоянным шагом.

Рассмотрим область $G = [0 \leq x \leq a] \times [0 \leq y \leq b]$. Зададим на этой области квадратную сетку Sh с шагом h. Все возникающие при этом узлы можно разделить на граничные и внутренние. Если в данный момент случайно блуждающая частица находится во внутренней точке, то она имеет равную вероятность перейти в любую из 4 соседних точек. Выбор направлений, в которых будет двигаться частица, производится с помощью случайных чисел.

Блуждание частицы заканчивается в тот момент, когда она перемещается в один из граничных узлов. Очевидно, что с вероятностью, равной 1, блуждание частицы через конечное число шагов закончится на границе.

При решении задачи стационарной теплопроводности температура внутренней точки определяется осреднением N температуры граничных точек, достигнутых беспорядочно блуждающими частицами.

$$T(x,z) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} T_{\omega}(j) (7)$$

Если в теле имеется источник объемного тепла, то формула принимает вид:

$$T(x,z) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} T_{\omega}(j) + \left[\frac{Qh^2}{4k}\right]\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} M_j, (8)$$

где Q – мощность тепловыделения на единицу объема, k -коэффициент теплопроводности, Mj – количество шагов, потребовавшееся j – случайно блуждающей частице для достижения границы из точки (x, z).

Тогда для решаемой задачи имеем:

$$T(x,z) = u0 + \left[\frac{Qh^2}{4k}\right]\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} M_j (9)$$

Экспериментальная часть. Были разработаны программы, реализующие оба описанных метода. Задача решалась со следующими параметрами:

$$u_0 = 300K$$
$$a = b = 10\text{см}$$
$$f(x,z) = f_0 e^{\beta(x-a/2)^2(z-b/2)^2}, \text{где} f0 = 30, \beta = 0.0073$$

Для разностного метода были взяты следующие параметры: hx=hz=tau = 0.2. Для вероятностного: h = 0.2, количество частиц, выходящих из каждого узла = 1000.

Решение вычислялось на ПК со следующими характеристиками: процессор – AMD Ryzen 7 3700U with Radeon Vega Mobile Gfx 2.30 GHz; объем ОЗУ — 8GB; операционная система — Windows 10 64-bit.

На рисунках 1 — 4 изображены примеры решений задачи разностным и вероятностным методом.

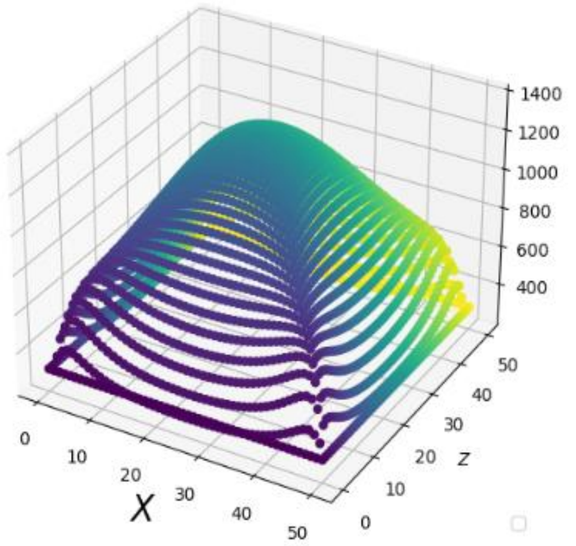

Рис 1. Разностный метод (а)

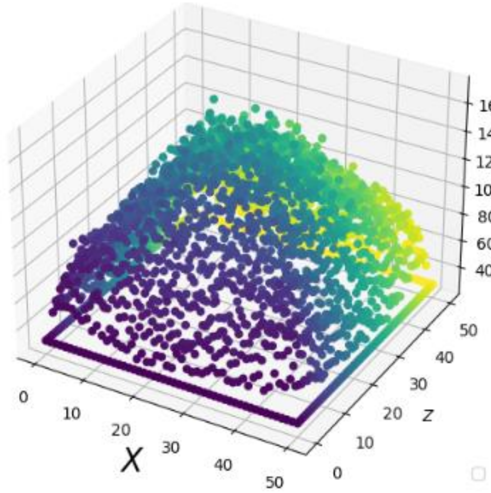

Рис 2. Вероятностный метод (а)

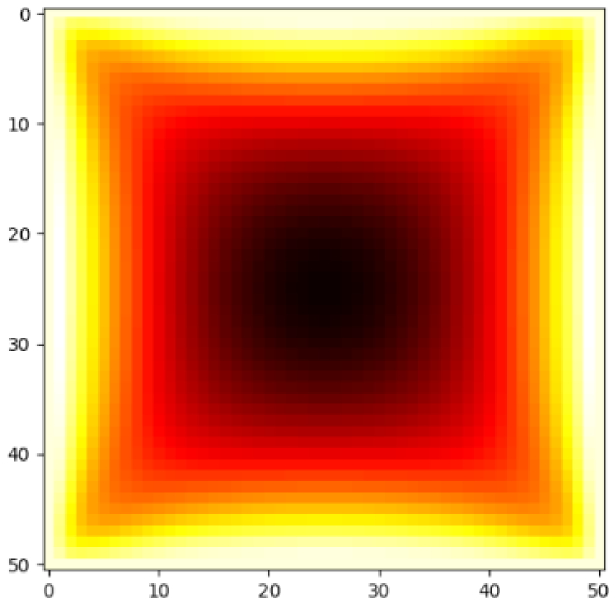

Рис 3. Разностный метод (в)

Рис 4. Вероятностный метод (в)

При шаге h = 0.2 оба алгоритма работают быстро, пример разностный находит решение за 120 секунд, а вероятностный — за 20 секунд. Однако, уже при шаге h=0.1 верятностный метод работает значительно медленнее, так разностный алгоритм находит решение за 420 секунд, а вероятностный — за 3245 секунд.

По приведенным примерам можно заметить, что разностное решение с применением продольно-поперечной схемы дает более точный результат при том же шаге. При уменьшении шага этот алгоритм превосходит вероятностный не только в точности, то и в скорости.

У вероятностного метода есть свое преимущество — он позволяет находить результат в одной точке без расчета всего поля температур. Разностному методу для решения той же задачи необходимо было бы рассчитать все поле температур.

Разностный метод является достаточно сложным для реализации, в то время как вероятностный требует значительно меньше затрат на реализацию. При этом, вероятностный метод является более универсальным и не требует значительных доработок при измении условия задачи. Разностный метод потребовал бы дополнительного исследования и модификации программы при изменениях условия задачи.

Выводы. Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что при небольшом шаге разностный метод, основанный на продольно-поперечной схеме, работает быстрее и точнее, чем вероятностный метод, осонованный на фиксированных случайных блужданиях.

Обы метода с заданной точностью решили задачу, поэтому их можно применять для решения задач подобного типа. При выборе метода для решения задачи, необходимо учитывать, что вероятностный метод требует меньше ресурсов для реализации, в то время как разностный метод является достаточно сложным. Также не стоит забывать о том, что вероятностный метод гораздо универсальнее и его можно будет переиспользовать на задачах с другими начальными условиями.

Необходимо также отметить, что задача, на которой проводились опыты, является достаточно простой, что дает некоторые преимущества разностному методу. Поэтому, в случае усложнения условий задачи, время работы разномтного метода может отличаться.

Список литературы

1. Самарский, А.А. Введение в теорию разностных схем [Текст] / А.А. Самарский. – Москва: Наука, 1971. – 552 с.
2. J. Douglas. A general formulation of alternating direction methods [Текст] / J. Douglas, J. E. Gunn. – Numerische Mathematik, 1964. – 453 с.
3. S. Wray. Alternating direction implicit finite difference methods for the heat equation on general domains in two and three dimensions [Текст] / Диссертация. / Steven Wray. – Golden, Colorado: Colorado School of Mines. – 95 с.
4. Кузнецов, В. Ф. Решение задач теплопроводности методом Монте-Карло [Текст] / В.Ф. Кузнецов. – Москва: Ордена Ленина институт атомной энергии им. И.В Курчатова, 1973. – 21 с.
5. Бусленко Н.П. Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация на ЦВМ [Текст] / Н.П. Бусленко, Ю.А Шрейдер. – Москва.: ФИЗМАТЛИТ, 1961. – 228 с.