

# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ПОСТРОЕННОЙ НА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

М.А. Козлов<sup>1</sup>

maxkozlov22@yandex.ru

## Аннотация

Цель исследования – выполнить сравнительный анализ методов конечных элементов и случайного блуждания частиц с фиксированным шагом для исследования математической модели, построенной на дифференциальных уравнениях в частных производных. Предложена оптимизация вычисления состояний цепи Маркова для расчёта температурного поля точки. Показана возможность применения методов Монте-Карло для решения статической задачи теплопроводности с краевыми условиями третьего рода и сложной геометрией области. В результате исследования выявились недостатки вероятностного метода, а именно большие затраты машинного времени для вычисления всего температурного поля и зависимость решения от генератора случайных чисел. Предложены задачи, в которых могут эффективно применяться вероятностные методы решения дифференциальных уравнений.

## Ключевые слова

*Математическая модель, уравнения в частных производных, сравнительный анализ, метод конечных элементов, метод случайного блуждания частиц, статическая задача теплопроводности.*

**Введение.** Значительное число задач физики и техники приводит к линейным и нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных (ДУЧП), поиск аналитических решений которых является весьма трудоёмким [1]. Поэтому данные уравнения решаются приближёнными математическими методами, наиболее универсальными из которых являются численные. Они позволяют с некоторой точностью допустить качественного и количественного описания исследуемого процесса или явления.

Одним из популярных методов решения дифференциальных уравнений является метод конечных элементов (МКЭ), так как он позволяет решать нелинейные задачи, учитывать различные краевые и внутренние условия и т.д. Однако, как и любой другой метод математического моделирования, МКЭ имеет свои недостатки, главными из которых является зависимость результата от дискретизации модели [2]. В свою очередь метод случайного блуждания частиц, основанный на теории вероятностей, также является универсальным и в меньшей степени зависит от дискретизации модели.

Исходя из выше сказанного, можно сделать вывод, что необходимость сравнения методов исследования математических моделей, основанных на ДУЧП, существует.

---

<sup>1</sup> Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

**Целью** данной работы является проведение сравнительного анализа методов конечных элементов и вероятностного для исследования математической модели, построенной на дифференциальных уравнениях в частных производных.

**Основные задачи:**

1. изучить достоинства и недостатки метода конечных элементов;
2. изучить достоинства и недостатки вероятностных методов на примере случайного блуждания частиц с фиксированным шагом;
3. сравнить методы и сделать выводы о применимости данных методов для решения различных задач.

**Объектом** исследования является методы исследования математических моделей.

**Предметом** – различия методов и их применимость для решения конкретных задач.

**Постановка задачи.** Рассмотрим следующую задачу: имеется тонкая прямоугольная пластина с внешними размерами  $a \times b$ , имеющая отверстие в центре размерами  $c \times d$  (рисунок 1). Температура по толщине пластины (третьей координате) принимается постоянной. Её двумерное температурное поле  $u(x, y)$  описывается уравнением (1).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + Q(x, y) = 0 \quad (1)$$

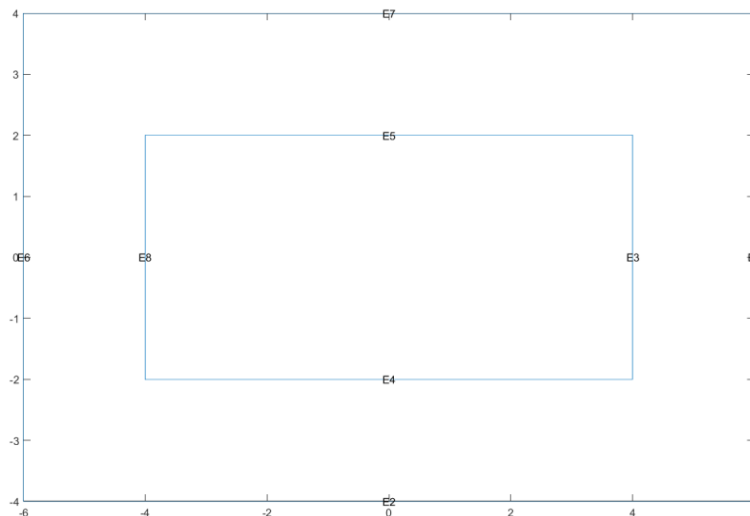


Рисунок 1. Геометрия тонкой пластины

Функция  $Q(x, y)$  представляет внутренние объемные источники тепловыделения, например, за счет поглощения излучения лазера в полупрозрачном материале пластины. Функция  $k(x, y)$  – коэффициент теплопроводности материала пластины. Можно считать, что пластина охлаждается со всех сторон воздухом температуры  $u_0$  и коэффициентом теплоотдачи  $a_0$ . Таким образом краевые условия задачи для внешней границы выглядят следующем образом:

$$\begin{cases} x = 0, & -k(u(0, y)) \frac{\partial u}{\partial x} = a_0(u(0, y) - u_0) \\ x = a, & -k(u(a, y)) \frac{\partial u}{\partial x} = a_0(u(a, y) - u_0) \\ y = 0, & -k(u(x, 0)) \frac{\partial u}{\partial y} = a_0(u(x, 0) - u_0) \\ y = b, & -k(u(x, b)) \frac{\partial u}{\partial y} = a_0(u(x, b) - u_0) \end{cases} \quad (2)$$

Аналогичным образом задаются краевые условия на внутренней границе прямоугольника.

**Решение методом конечных элементов.** Суть МКЭ заключается в разбиении области, в которой ищется решение дифференциальных уравнений, на конечное количество подобластей (элементов) и кусочно-элементная аппроксимация исследуемых функций. В простейшем случае это полином первой степени. Вне своего элемента аппроксимирующая функция равна нулю. Значения функций на границах элементов (в узлах) являются решением задачи и заранее неизвестны. Коэффициенты аппроксимирующих функций обычно ищутся из условия равенства значения соседних функций на границах между элементами. Затем эти коэффициенты выражаются через значения функций в узлах элементов. Составляется система линейных алгебраических уравнений. Количество уравнений равно количеству неизвестных значений в узлах, на которых ищется решение исходной системы, которое прямо пропорционально количеству элементов. Так как каждый из элементов связан с ограниченным количеством соседних, система линейных алгебраических уравнений имеет разреженный вид, что существенно упрощает её решение [3].

**Решение вероятностным методом.** Основной составляющей частью решения дифференциальных уравнений методом Монте-Карло является случайное блуждание. Обычно данный процесс моделируется на решётке  $S_h$ , вписанной в некоторую область  $G$ , так чтобы в каждый момент времени происходит «перескок» броуновской частицы из одного узла в соседний. Для простоты будем считать, что шаг сетки постоянен и  $h_x = h_y$ .

Температура в любой точке сетки  $S_h$  при конечно-разностной аппроксимации (1) выражается через температуры соседних точек следующим образом:

$$T(x, y) = P_{x+}T(x + h, y) + P_{x-}T(x - h, y) + P_{y+}T(x, y + h) + P_{y-}T(x, y - h) + \frac{Qh^2}{4k} \quad (3)$$

где  $P_{x+} = P_{x-} = P_{y+} = P_{y-} = \frac{1}{4}$

Уравнение (2) имеет следующее вероятностное толкование – если в данный момент случайно блуждающая частица находится в точке  $(x, y)$ , то она имеет равную вероятность перейти в любую из 4х соседних точек. Выбор направлений движения частиц, осуществляется с помощью случайных чисел. При этом величина  $Qh^2/4k$  должна учитываться на каждом шаге блуждания. Исходя из выше сказанного, расчёт температуры  $j$ -ой частицы в любой внутренней точке контура имеет следующий вид [4]:

$$T_j = T_w(j) + \sum_{i=1}^{m_j} \frac{Qh_{ij}^2}{4k} \quad (4)$$

где  $T_w(j)$  – температура на граничном узле,

$m_j$  – количество шагов, необходимое  $j$ -ой частицы для достижения границы,

$h_{ij}$  – величина шага  $j$ -ой частицы на  $i$ -ом шаге.

Заметим, что каждая точка  $(x, y)$  является местом, где произошло некоторое событие в цепи Маркова, следовательно, каждую частицу, проходящую через промежуточную узловую точку  $(x, y)$ , можно рассматривать как частицу, история которой началась в этой точке. Поэтому можно построить распределение температур во всей области, используя информацию в «предысториях» частиц, без расчёта температуры для каждой внутренней точки в отдельности. Таким образом температура в  $l$ -ой точке пути  $j$ -ой частицы:

$$T_l = T_w(j) + \sum_{i=1}^{m_j-l} \frac{Q h_{ij}^2}{4k} \quad l = \overline{0..m_j}. \quad (5)$$

Усредняя значения всех частиц точки  $(x, y)$ , получаем итоговое значение температуры в данной точке:

$$T(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N T_j = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( T_w(j) + \sum_{i=1}^{m_j} \frac{Q h_{ij}^2}{4k} \right) \quad (6)$$

Рассмотрим нахождение  $T_w(j)$  для разных краевых условий.

Первая краевая задача. Когда случайно блуждающая частица достигает границы с заданной температурой  $T_0$ , то блуждание прекращается и  $T_w(j) = T_0$ . Такая граница называется поглощающим экраном.

Вторая краевая задача. На границе задан тепловой поток:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = -F_0 \quad (7)$$

где  $n$  – направление внутренней нормали границы,

$F_0$  – удельный тепловой поток.

Разлагая производную в ряд Тейлора, имеем:

$$T_w = T_{\Delta n} + \Delta T = T_{\Delta n} + \frac{F_0}{k} \Delta n + \frac{Q}{2k} \Delta n^2 \quad (8)$$

где  $T_{\Delta n}$  – температура в точке, расположенной на расстоянии  $\Delta n$  от границы.

С вероятностной точки зрения уравнение (8) означает, что если частица находится на границе с заданным тепловым потоком, то она отражается на расстояние  $\Delta n$  в направлении внутренней нормали и продолжает случайное блуждание для вычисления  $T_{\Delta n}$ . Поэтому граница называется отражающим экраном.

Третья краевая задача. Конвективное граничное условие:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T_0 - T_w) \quad (9)$$

где  $T_0$  – температура окружающей среды,  
 $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи.

Действуя аналогично второй краевой задачи, получим:

$$T_w = p \left( T_{\Delta n} + \frac{Q \Delta n^2}{2k} \right) + (1 - p) T_0 \quad (10)$$

$$\text{где } p = \frac{1}{1 + \alpha \Delta n / k}.$$

Для упрощения вычислений можно принять  $p$  за вероятность отражения частицы на интервал  $\Delta n$ . Тогда в случае отражения  $T_w = T_{\Delta n} + \frac{Q \Delta n^2}{2k}$ , иначе  $T_w = T_0$ . Такое граничное условие эквивалентно частичному поглощению и частичному отражению.

**Обсуждение полученных результатов.** Были разработаны на MATLAB программы, реализующие оба описанных метода. Задача решалась со следующими параметрами:

$$f(x, y) = 5 \exp \left( - \frac{x^2 + (y - 3)^2}{50} \right)$$

$$k(x, y) = 0.134, \quad a_0 = 0.1$$

$$a = 6, \quad b = 4, \quad c = 4, \quad d = 2$$

Для метода конечных элементов максимальный размер стороны треугольника не более 0.5, для вероятностного  $h = 0.1$ , количество частиц в узле – 5 000. В таблице 1 приведены значения температуры в точке нагрева (0, 3). Из неё видно, что метод способен решать дифференциальные уравнения с заданной точностью.

Таблица 1

Метод	Значение $u$	Число частиц	Разница, %	Время, сек
Монте-Карло	351.49	10	-3.6	0.016
	357.82	100	-1.9	0.089
	363.35	1000	-0.3	0.694
	364.98	5000	+0.07	3.739
МКЭ	364.72	-	-	0.11

На рисунке А.1 представлены температурные поля, полученные методами конечных элементов и Монте-Карло с различным числом частиц на узел. Из них видно, что результаты расчётов в целом совпадают, однако следует отметить, что поток тепла в случайном блуждании распределён неравномерно – правая сторона пластины нагрелась сильнее, а также изотермы сильно подвержены влиянию количества частиц на узел. Это может быть связано с несовершенством генератора случайных чисел и шагом сетки [4].

Оптимизация вычислений состояний в цепи Маркова позволила сократить время вычислений всего температурного поля в среднем в 1.8 раза с 3480 секунд до 1993 для 5 000 итераций на узел. Однако это всё ещё на порядки больше, времени необходимое методу конечных элементов, но вероятностный метод сравним по скорости с МКЭ для небольшой области, получаемой в ходе вычисления точки в «центре» области.

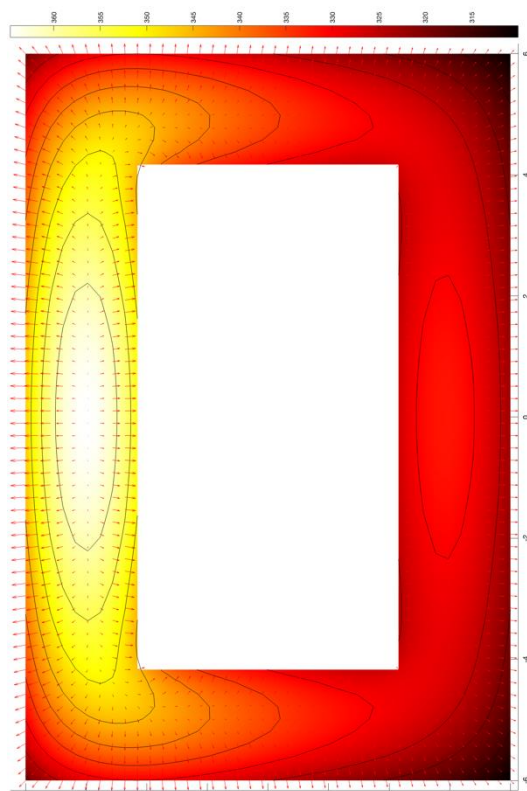
**Заключение.** Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что вероятностный метод может применяться для решения дифференциальных уравнений в окрестности одной точки с заданной точностью для произвольных областей и граничных условиях. Однако для расчёта всего температурного поля необходимо использовать другие методы, наиболее универсальным из которых является метод конечных элементов. Стоит отметить, что метод Монте-Карло получил широкое распространение для дифференциальных уравнений больших размерностей, одним из которых является уравнение рендеринга [5].

## Литература

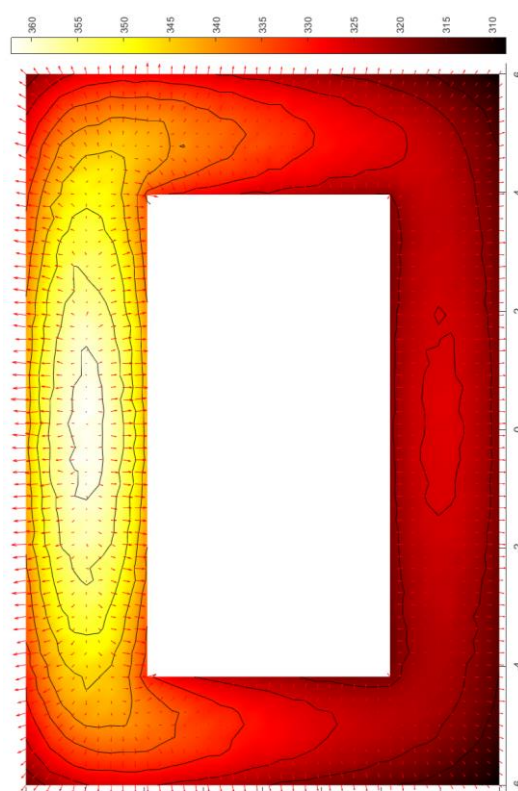
- [1] М. ВОЛЫНСКАЯ и М. ТАЛИКИНА, «НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ КАК МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ,» *МАТЕМАТИКА, ЭКОНОМИКА И УПРАВЛЕНИЕ*, т. 1, № 1, pp. 20-22, 2015.
- [2] С. Пайшанбиев и Э. Калинин, «Основные преимущества и недостатки метода конечных элементов при решении задач инженерной геодинамики,» в *Инженерные изыскания в строительстве*, г. Москва, 2018.
- [3] R. J. N., Introduction to the finite element method, Texas: Department of Mechanical Engineering Texas A&M University College Station, 2019.
- [4] В. Ф. Кузнецов, «Решение задач теплопроводности методом Монте-Карло,» 1973. [В Интернете]. Available: [https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/\\_Public/05/128/5128166.pdf](https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/05/128/5128166.pdf). [Дата обращения: 12 10 2022].
- [5] A. Pajot, L. Barthe, M. Paulin and P. Poulin, "Combinatorial Bidirectional Path-Tracing for Efficient Hybrid CPU/GPU Rendering," *Computer Graphics Forum*, vol. 30, pp. 315-324, 2011.

**Козлов Максим Антонович** – студент-магистр кафедры «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

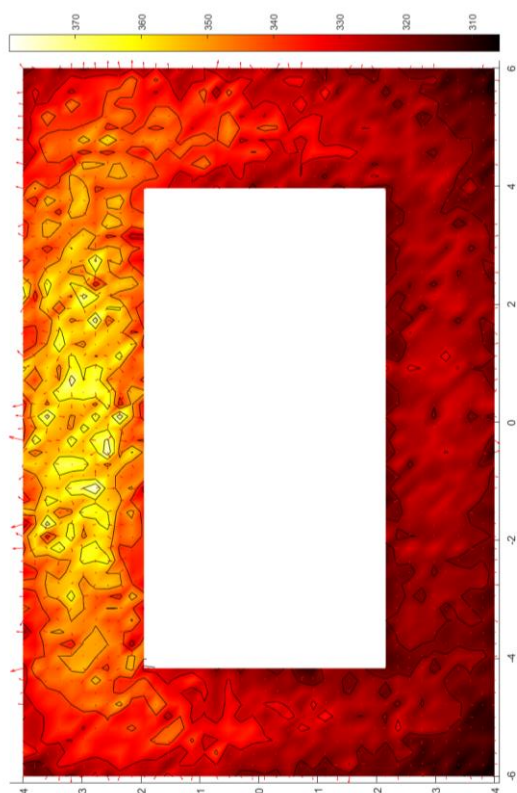
# Приложение А



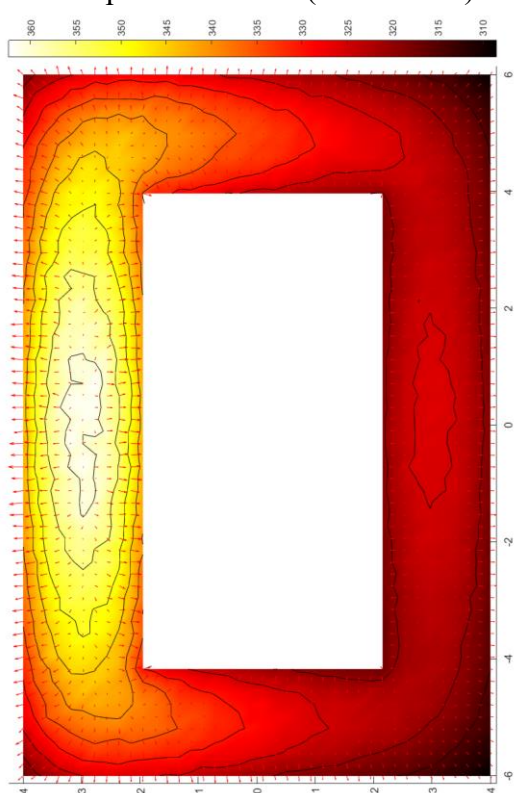
(а) МКЭ



(б) Вероятностный метод  
при  $M = 10\,000$  (3689.7 сек.)



(в) Вероятностный метод  
при  $M = 10$  (3.9 сек.)



(д) Вероятностный метод  
при  $M = 5\,000$  (1993.1 сек.)

Рисунок А.1. Температурные поля, полученные  
методами конечных элементов и Монте-Карло.