УДК 519.632

**Сравнительный анализ разностной и вероятностной вычислительных моделей для исследования дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа.**

**А. Мередова1** ayjahanmeredova17@mail.ru

**О.С. Платонова2** platonovaolg@gmail.com

**1 МГТУ, Москва, Россия**

**2 МГТУ, Москва, Россия**

**Аннотация**

Цель исследования – выполнить сравнительный анализ разностного и вероятностного методов для исследования математической модели, построенной на дифференциальных уравнениях в частных производных. В качестве разностного метода в статье рассмотрен метод конечных разностей, в качестве вероятностного – метод Монте-Карло. Показано применение методов на примере тепловой задачи плоской пластины с отверстием с краевыми условиями III рода. В результате сравнительного анализа были выявлены недостатки вероятностного метода: большие временные затраты для вычисления всего температурного поля. Однако высокая универсальность метода позволяет находить решения более сложного класса задач.

**Ключевые слова**

*Дифференциальные уравнения, сравнительный анализ, уравнение в частных производных, метод конечных разностей, метод Монте-Карло.*

**Введение.** Для решения различных математических моделей физических явлений можно выделить две основные группы математических методов: аналитические и численные.

Использование аналитических методов позволяет получить решение задачи с помощью формул. Несмотря на точность результатов за сравнительно короткий отрезок, главным недостатком аналитических методов является небольшое число классов задач, к которым методы могут быть применены.

Основным инструментом для решения сложных математических моделей в настоящее время являются численные методы. Они сводят решение задачи к выполнению конечного числа арифметических действий над числами и дают результат в виде числового значения с погрешностью, приемлемой для данной задачи.

При решении дифференциальных уравнений в частных производных наиболее часто используются разностные схемы. Идея заключается в замене приближенного решения уравнений в частных производных к решению систем алгебраических уравнений [1].

Другим подходом решения дифференциальных уравнений являются вероятностные (численно-вероятностные) методы. В основе методов лежит процесс описания математической модели с использованием генератора случайных чисел. Модель многократно обсчитывается, и на основе полученных значений вычисляются вероятностные характеристики рассматриваемого процесса [2].

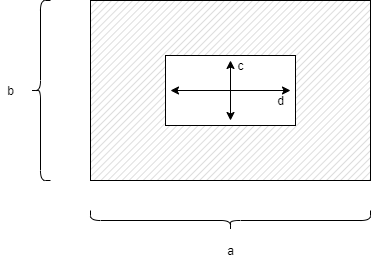
Целью данной работы является выполнение сравнительного анализа разностной и вероятностной вычислительных моделей для исследования дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

* Описать работу разностного метода на примере тепловой задачи с указанием его преимуществ и недостатков;
* Описать работу вероятностного метода на примере тепловой задачи с указанием его преимуществ и недостатков;
* Сформулировать критерии сравнения и выполнить сравнительный анализ методов.

**Постановка задачи.** В качестве примера применения разностных и вероятностных методов рассмотрим следующую тепловую задачу.

Анализируется теплопередача через плоскую пластину с внутренним отверстием (рисунок 1).



**Рис. 1.** Плоская пластина с внутренним отверстием.

Математическая модель в общем квазилинейном виде (1) описывает ее температурное поле.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

Все краевые условия – III рода (2). Задается взаимосвязь между потоком тепла за счет теплопроводности от твердой стенки и тепловым потоком из окружающей среды.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

**Решение задачи разностным методом.** В качестве разностного метода выбирается метод конченых разностей (МКР).

Работа метода основывается на замене производных в дифференциальном уравнении их конечноразностными аппроксимациями. Метод МКР допускает рассмотрение исходного твердого тела в виде совокупности узлов. Аппроксимируя частные производные дифференциального уравнения (1) конечными разностями, получают систему линейных алгебраических уравнений для определения температуры, как локальной характеристики в каждом узле сетки. Полученная система является незамкнутой, для ее замыкания используют разностное представление граничных условий. В результате получают замкнутую систему линейных алгебраических уравнений.

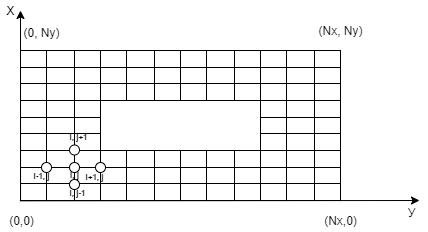
В рамках поставленной задачи температура будет изменяться в направлении оси *Ox* и *Oy*. Температуру в направлении *Oz* можно считать постоянной. В связи с этим дифференциальное уравнение (1) преобразуется к виду:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (3) |

Если температура окружающей среды , то граничные условия запишутся следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Полученную задачу в полной математической постановке следует решать МКР на равномерной сетке. Для это выполняется построение конечно-разностной сетки (рисунок 2).

**

**Рис. 2.** Разностная сетка области решения.

Аппроксимация уравнения (3) выполняется на основе локально-одномерной схемы. Принцип такого подхода состоит из двух этапов: на первом этапе выполняется дискретизация уравнения (3) только в направлении оси Х, результатом является одномерное уравнение. После его решения выполняется дискретизация уравнения (3) в направлении оси У. В результате решения уравнения, полученного на втором этапе, определяется поле температуры на целом шаге.

|  |  |
| --- | --- |
| ,  ,  , | (5)  (6) |

Уравнения (5), (6) сводятся к стандартному трехдиагональному виду и решаются последовательно методом прогонки.

Из всего выше сказанного можно сделать вывод о том, что подход к дискретизации дифференциальных уравнений относительно прост. Как следствие, к преимуществам МКР следует отнести простоту алгоритмической и программной реализации. Также к преимуществам относится точность полученных результатов, так как она может быть достигнута путем уменьшения шага разностной сетки [3].

Стоит выделить основные недостатки метода. Это невозможность работы с геометрически более сложными областями, необходимость построения сплайна (например, метод конечных элементов позволяет сразу находить значения в любой точке через функцию) [4]. Также методу присущ быстрый рост вычислительной трудоемкости с увеличением размерности задачи.

**Решение задачи вероятностным методом.** Для решения задачи вероятностным методом за основу был взят метод Монте-Карло. Этот метод основан на случайном блуждании.

Главной составляющей частью решения дифференциальных уравнений методом Монте-Карло является случайное блуждание [5]. Процесс случайного блуждания обычно моделируется на решетке Sh, вписанной в некоторую область G так, что в каждый момент времени происходит «перескок» броуновской частицы из одного узла в соседний.

В классическом случайном блуждании величина шага и траектории фиксируется заранее. Такой процесс называется фиксированным случайным блужданием. Процесс фиксированного случайного блуждания обычно реализуется на узловой решетке с постоянным шагом.

Рассмотрим область Зададим на этой области квадратную сетку Sh с шагом h. Все возникающие при этом узлы можно разделить на граничные и внутренние. Если в данный момент случайно блуждающая частица находится во внутренней точке, то она имеет равную вероятность перейти в любую из 4 соседних точек. Выбор направлений движения частицы производится с помощью случайных чисел.

Блуждание одной частицы заканчивается в тот момент, когда она перемещается в один из граничных узлов. Очевидно, что с вероятностью, равной 1, блуждание частицы через конечное число шагов закончится на границе.

При решении задач стационарной теплопроводности температура внутренней точки определяется усреднением N температуры граничных точек, достигнутых беспорядочно блуждающими частицами.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

где – температура на граничном узле.

Если в теле имеется источник объемного тепла, то формула принимает вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

где Q – мощность тепловыделения на единицу объема, k – коэффициент теплопроводности, Mj – количество шагов, потребовавшееся j – случайно блуждающей частице для достижения границы из точки (x, y).

Следовательно, для решаемой задачи имеем следующее:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

Из всего вышеизложенного можно выделить две характерные особенности метода Монте-Карло. Во-первых, метод позволяет моделировать любой процесс, на протекание которого влияют случайные факторы. Во-вторых, для многих математических задач, не связанных с какими-либо случайными процессами, можно искусственно построить вероятностную модель, позволяющую решать эта задачи. Таким образом, можно говорить об универсальности метода. Более того, использование метода не вызывает трудностей в выборе геометрии рассматриваемой задачи.

Основной недостаток метода заключается в определении погрешности. Погрешность обратно пропорциональна числу проводимых испытаний. Следовательно, для получения более точного результата требуется проведения большого числа однотипных испытаний.

**Сравнительный анализ методов.** Для описанных выше методов была выполнена программная реализация на языке Python. С ее помощью требуется определить временную эффективность методов.Для решения задачи были установлены следующие параметры:

Прямоугольная область:

a = 60, b = 40

c = 40, d = 20

Температура:

= 300K

В таблице 1 приведено время расчета решения поставленной задачи для каждого метода. Расчеты проводились для случая вычисления значения температуры в заданной точке.

*Таблица 1*

**Время расчета методов для заданной точки**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Метод*** | ***Шаг, =*** | ***Результат*** | ***Время расчета, с*** |
| Конечных разностей | 0.2 | 391.2 | 4.224 |
| 0.012 | 357.3 | 5.079 |
| 0.006 | 306.4 | 20.656 |
| Монте-Карло | 0.2 | 435.1 | 0.704 |

По результатам, представленным в таблице, можно сделать вывод о том, что для вычисления значения в заданной точке метод Монте-Карло работает быстрее, чем МКР. Так, при шаге *h = 0.2* оба методы вычисляют результат с заданной точностью, однако вероятностный метод работает в 5.9 раз быстрее.

На рисунках 1-3 представлены температурные поля, полученные в результате решения задачи методом конечных разностей для разностной сетки с параметрами 25, 50, 100. На рисунке 4 изображено температурное поле, полученное методом Монте-Карло.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

**Рис. 1-4.** Температурные поля МКР и Монте-Карло.

**Заключение.** Рассмотренная задача теплопроводности является относительно простой, разностный и вероятностный методы решили ее с заданной точностью. С уменьшением шага разностный метод позволяет добиться более точного результата. Однако вероятностный метод позволяет устранять недостаток разностного: находить решение задач с произвольными геометрическими областями и краевыми условиями. Также вероятностный подход применяется для нахождения решения в отдельной точке, в то время как разностный метод необходим для построения температурного поля во всех точках. Как следствие, вероятностный метод требует меньших затрат для программной реализации.

**ЛИТЕРАТУРА**

[1] Волков К.Н. и др. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках //М.: Физматлит. – 2014.

[2] Крайнов А.Ю., Рыжих Ю.Н., Тимохин А.М. Численные методы в задачах теплопереноса. Томск: Изд-во ТПУ, 2009, 114 с.

[3] Ковеня В.М., Чирков Д. В. Методы конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики //Новосибирск: НГУ. – 2013. – С. 24-26.

[4] Степанчук А.П. Метод конечных разностей в электродинамических задачах //Будущее науки-2017. – 2017. – С. 98-101.

[5] В. Ф. Кузнецов, «Решение задач теплопроводности методом Монте-Карло,» 1973. [Электронный ресурс] :https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/\_Public/05/128/51.pdf.