УДК 519.632

**Сравнительный анализ разностной и вероятностной вычислительных моделей для исследования дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа.**

**А. Мередова1** ayjahanmeredova17@mail.ru

**О.С. Платонова2** platonovaolg@gmail.com

**1 МГТУ, Москва, Россия**

**2 МГТУ, Москва, Россия**

**Аннотация**

Цель исследования – выполнить сравнительный анализ разностного и вероятностного методов для исследования математической модели, построенной на дифференциальных уравнениях в частных производных. В качестве разностного метода в статье рассмотрен метод конечных разностей, в качестве вероятностного – метод Монте-Карло. Показано применение методов на примере тепловой задачи плоской пластины с отверстием с краевыми условиями III рода. В результате сравнительного анализа выявлено **ХХХ.**

**Ключевые слова**

*Дифференциальные уравнения, сравнительный анализ, уравнение в частных производных, разностный метод, вероятностный метод.*

**Введение.** Для решения различных математических моделей физических явлений можно выделить две основные группы математических методов: аналитические и численные.

Использование аналитических методов позволяет получить решение задачи с помощью формул. Несмотря на точность результатов за сравнительно короткий отрезок, главным недостатком аналитических методов является небольшое число классов задач, к которым методы могут быть применены.

Основным инструментом для решения сложных математических моделей в настоящее время являются численные методы. Они сводят решение задачи к выполнению конечного числа арифметических действий над числами и дают результат в виде числового значения с погрешностью, приемлемой для данной задачи.

При решении дифференциальных уравнений в частных производных наиболее часто используются разностные схемы. Идея заключается в замене приближенного решения уравнений в частных производных к решению систем алгебраических уравнений [1].

Другим подходом решения дифференциальных уравнений являются вероятностные (численно-вероятностные) методы. В основе методов лежит процесс описания математической модели с использованием генератора случайных чисел. Модель многократно обсчитывается, и на основе полученных значений вычисляются вероятностные характеристики рассматриваемого процесса [2].

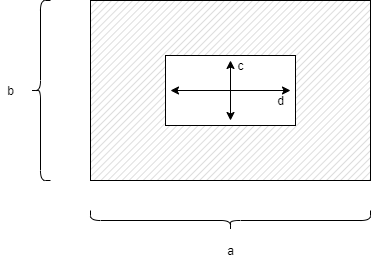
Целью данной работы является выполнение сравнительного анализа разностной и вероятностной вычислительных моделей для исследования дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

* Описать работу разностного метода на примере тепловой задачи с указанием его преимуществ и недостатков;
* Описать работу вероятностного метода на примере тепловой задачи с указанием его преимуществ и недостатков;
* Сформулировать критерии сравнения и выполнить сравнительный анализ методов.

**Постановка задачи.** В качестве примера применения разностных и вероятностных методов рассмотрим следующую тепловую задачу.

Анализируется теплопередача через плоскую пластину с внутренним отверстием (рисунок 1).



**Рис. 1.** Плоская пластина с внутренним отверстием.

Математическая модель в общем квазилинейном виде (1) описывает ее температурное поле.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

Все краевые условия – III рода (2). Задается взаимосвязь между потоком тепла за счет теплопроводности от твердой стенки и тепловым потоком из окружающей среды.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

**Решение задачи разностным методом.** В качестве разностного метода выбирается метод конченых разностей (МКР).

Работа метода основывается на замене производных в дифференциальном уравнении их конечноразностными аппроксимациями. Метод МКР допускает рассмотрение исходного твердого тела в виде совокупности узлов. Аппроксимируя частные производные дифференциального уравнения (1) конечными разностями, получают систему линейных алгебраических уравнений для определения температуры, как локальной характеристики в каждом узле сетки. Полученная система является незамкнутой, для ее замыкания используют разностное представление граничных условий. В результате получают замкнутую систему линейных алгебраических уравнений.

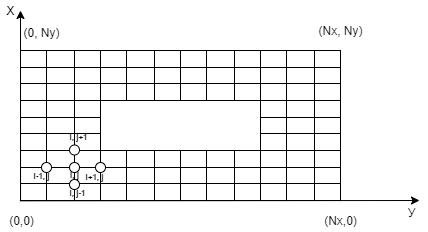
В рамках поставленной задачи температура будет изменяться в направлении оси *Ox* и *Oy*. Температуру в направлении *Oz* можно считать постоянной. В связи с этим дифференциальное уравнение (1) преобразуется к виду:

|  |  |
| --- | --- |
| , 0 < x < a, 0 < y < b | (3) |

Если температура окружающей среды , то граничные условия запишутся следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Полученную задачу в полной математической постановке следует решать МКР на равномерной сетке. Для это выполняется построение конечно-разностной сетки (рисунок 2).

**

**Рис. 2.** Разностная сетка области решения.

Аппроксимация уравнения (3) выполняется на основе локально-одномерной схемы. Принцип такого подхода состоит из двух этапов: на первом этапе выполняется дискретизация уравнения (3) только в направлении оси Х, результатом является одномерное уравнение. После его решения выполняется дискретизация уравнения (3) в направлении оси У. В результате решения уравнения, полученного на втором этапе, определяется поле температуры на целом шаге.

|  |  |
| --- | --- |
| ,  ,  , | (5)  (6) |

Уравнения (5), (6) сводятся к стандартному трехдиагональному виду и решаются последовательно методом прогонки.

Из всего выше сказанного можно сделать вывод о том, что подход к дискретизации дифференциальных уравнений относительно прост. Как следствие, к преимуществам МКР следует отнести простоту алгоритмической и программной реализации. Также к преимуществам относится точность полученных результатов, так как она может быть достигнута путем уменьшения шага разностной сетки [3].

Стоит выделить основные недостатки метода. Это невозможность работы с геометрически более сложными областями, необходимость построения сплайна (например, метод конечных элементов позволяет сразу находить значения в любой точке через функцию) [4]. Также методу присущ быстрый рост вычислительной трудоемкости с увеличением размерности задачи.

**Решение задачи вероятностным методом.**

**Сравнительный анализ методов.** Для описанных выше методов была выполнена программная реализация на языке Python. С ее помощью требуется определить временную эффективность методов.Для решения задачи были установлены следующие параметры:

Прямоугольная область:

a = 60, b = 40

c = 40, d = 20

Шаг:

Температура:

= 300K

В таблице 1 приведено время расчета решения поставленной задачи для каждого метода.

*Таблица 1*

**Время расчета методов**

|  |  |
| --- | --- |
| ***Метод*** | ***Время расчета, с*** |
| Конечных разностей | 0.14248 |
| Монте-Карло | 0 |

На рисунках 3-4 представлены температурные поля, полученные в результате решения задачи каждым методом.

**Обсуждение полученных результатов.**

**Заключение** **(выводы и рекомендации).**

**ЛИТЕРАТУРА**

[1] Волков К.Н. и др. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках //М.: Физматлит. – 2014.

[2] Крайнов А.Ю., Рыжих Ю.Н., Тимохин А.М. Численные методы в задачах теплопереноса. Томск: Изд-во ТПУ, 2009, 114 с.

[3] Ковеня В.М., Чирков Д. В. Методы конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики //Новосибирск: НГУ. – 2013. – С. 24-26.

[4] Степанчук А.П. Метод конечных разностей в электродинамических задачах //Будущее науки-2017. – 2017. – С. 98-101.