Algoritmos Numéricos por Computadora

Segundo parcial - Primavera 2022

Rodrigo Plauchú Rodríguez

182671

Sube tu archivo resultado a Canvas antes de las 10am.

Al correr tu script deben desplegarse los resultados.

1. Demuestra que el algoritmo de Gauss-Seidel puede escribirse como

$x_{i+1} = Tx_i + c$

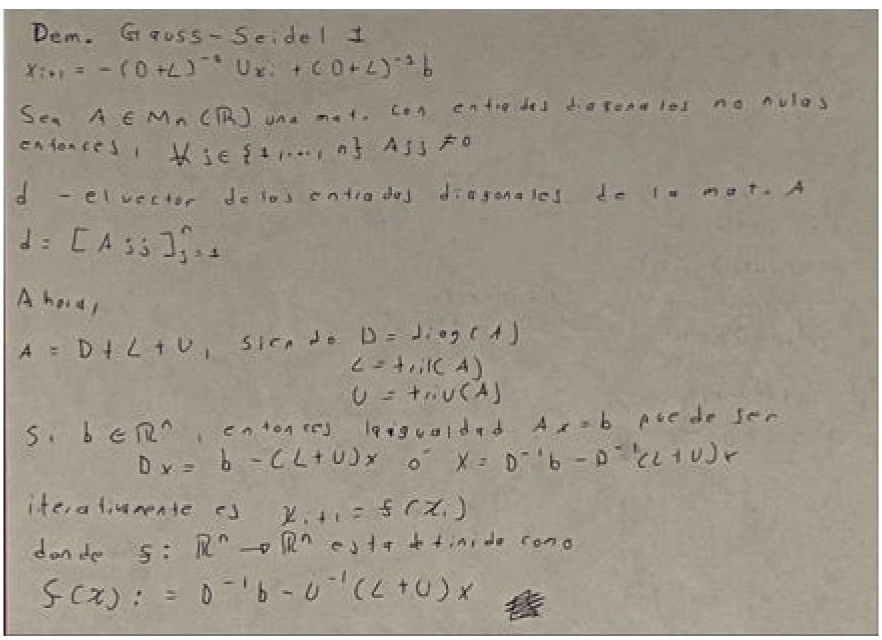
donde T es:

$-(D+L)^{-1}U$

y c es

$(D+L)^{-1}b$

Pega aquí tu respuesta.



Dem. Gauss-Seidel 1

$x_{i+1} = -(D+L)^{-1}Ux_i + (D+L)^{-1}b$

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una mat. con entradas diagonales no nulas entonces, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ $A_{jj} \neq 0$

d - el vector de las entradas diagonales de la mat. A

$d = [A_{jj}]_{j=1}^{n}$

Ahora,

$A = D + L + U$, siendo $D = diag(A)$
$L = tril(A)$
$U = triu(A)$

Si $b \in \mathbb{R}^n$, entonces la igualdad $Ax = b$ puede ser
$Dx = b - (L+U)x$ ó $x = D^{-1}b - D^{-1}(L+U)x$

iterativamente es $x_{i+1} = f(x_i)$

donde $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ esta definida como

$f(x) := D^{-1}b - D^{-1}(L+U)x$

2.Codifica de manera eficiente, al final del script, el método esPositivaDefinida(A) empleando el criterio de Sylvester y la función `det` de MATLAB.

3. Utiliza el método codificado en la pregunta anterior para determinar si la matriz A es positiva definida. Plan B (con penalización): puedes usar una línea de código para responder esta pregunta directamente.

```
A = [10,-1,2,0;-1,11,-1,3;2,-1,10,-1;0,3,-1,8];
res = SylvesterCrit(A);
if res == 1
    disp("True")
else
    disp("False")
end
```

```
True
```

4. Escribe, al final del script, la función `gradiente(f,x,h)` que calcula numéricamente el gradiente de la función escalar $f : R^n \to R$ en el vector x. La función debe utilizar el método de diferencias centrales con paso h.

Prueba la función calculando el gradiente de $f(x, y, z) = 5x^3yz^2$en el punto p=[1;2;3] con h=0.0001.

```
f = @(x) 5*x(1)^3*x(2)*x(3)^2
```

```
f = function_handle with value:
    @(x)5*x(1)^3*x(2)*x(3)^2
```

```
h = 0.0001
```

```
h = 1.0000e-04
```

```
x = 1
```

```
x = 1
```

```
%grad = gradiente(f, x, h)
```

5. Utiliza tu algoritmo de Gauss-Seidel (cópialo más abajo) para resolver el sistema Ax = b, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 7 & -0.3 \\ 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -19.3 \\ 7.85 \\ 71.4 \end{bmatrix}$$

```
A = [0.1,7,-0.3; 3,-0.1,-0.2; 0.3,-0.2,10]
```

```
A = 3×3
    0.1000    7.0000   -0.3000
    3.0000   -0.1000   -0.2000
    0.3000   -0.2000   10.0000
```

```
b = [-19.3;7.85;71.4]
```

```
b = 3×1
  -19.3000
```

```
    7.8500
   71.4000
```

Dado que A no es estrictamente diagonal dominante, primero intercambia los renglones 1 y 2 de A y de b utilizando una matriz P de permutación (o un vector p de permutación)

Escribe aquí la matriz P de permutación (o el vector p)

```
P=[0,1,0;1,0,0;0,0,1]
```

```
P = 3×3
     0     1     0
     1     0     0
     0     0     1
```

Intercambia los renglones de A y de b usando la matriz P (o el vector p)

```
PA=P*A
```

```
PA = 3×3
    3.0000   -0.1000   -0.2000
    0.1000    7.0000   -0.3000
    0.3000   -0.2000   10.0000
```

```
Pb=P*b
```

```
Pb = 3×1
    7.8500
  -19.3000
   71.4000
```

Ya con lo renglones intercambiados, usa el método de Gauss-Seidel para resolver el sistema de ecuaciones.

```
[x,i]=gaussSeidelEleg(PA,Pb)
```

```
x = 3×1
    3.0000
   -2.5000
    7.0000
i = 9
```

6. Utilizando un método iterativo (que debes pegar más abajo) resuelve el siguiente sistema de ecuaciones en 3 o menos iteraciones.

```
A = [4,-1,0;-1,4,-1;0,-1,4]
```

```
A = 3×3
     4    -1     0
    -1     4    -1
     0    -1     4
```

```
b = [2;6;2]
```

```
b = 3×1
     2
     6
     2
```

```
x=zeros(3,1)
```

```
x = 3×1
     0
     0
     0
```

```
[x,i]=GradienteConjugadoEleg(A,b,x)
```

```
x = 3×1
     1
     2
     1
i = 2
```

7. Usando el método de Newton-Raphson de varias variables (que debes pegar abajo) encuentra un punto en común de tres esferas de radio 5 con centros en (1,-2,0), (-2,2,-1), y (4,-2,3).

Considera como valor inicial x0=[-1;-1;-1]

ec. esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 5$

```
f=@(x) [(x(1)-1)^2+(x(2)+2)^2+(x(3)-0)^2-5;
        (x(1)+2)^2+(x(2)-2)^2+(x(3)+1)^2-5;
        (x(1)-4)^2+(x(2)+2)^2+(x(3)-3)^2-5]
```

```
f = function_handle with value:
    @(x)[(x(1)-1)^2+(x(2)+2)^2+(x(3)-0)^2-5;(x(1)+2)^2+(x(2)-2)^2+(x(3)+1)^2-5;(x(1)-4)^2+(x(2)+2)^2+(x(3)
```

```
J=@(x) [2*x(1)-2,2*x(2)+4,2*x(3);
        2*x(1)+4,2*x(2)-4,2*x(3)+2;
        2*x(1)-8,2*x(2)+4,2*x(3)-6]
```

```
J = function_handle with value:
    @(x)[2*x(1)-2,2*x(2)+4,2*x(3);2*x(1)+4,2*x(2)-4,2*x(3)+2;2*x(1)-8,2*x(2)+4,2*x(3)-6]
```

```
[x1,~]=NewtonRaphsonVVEleg(f,J,[-1;-1;-1])
```

```
x1 = 3×1
    3.1043
    3.0522
    0.8957
```

Escribe aquí tu función esPositivaDefinida(A).

Puedes suponer que la matriz A es cuadrada.

```
function res = SylvesterCrit(A)
res= true;
[tam1,tam2]=size(A);
if tam1==tam2
   i=1;
    while(res && i<= tam1)
        if det(A(i,i))<=0
```

```
        res=false;
        end
    i=i+1;
    end
end
end
```

Escribe aquí tu función gradiente

```
function g = gradiente(f, x, h)
    syms t;
    i=0;
    MAX=80;
    TOL=eps();
    do = true;
    while do
        i=i+1
        dx0 = centralFirstDerivative(f,x,h);
        x0=x+(dx0)*t;
        ft=f(x0(1));
        tsym= sym(ft);
        dts=diff(tsym);
        dt = matlabFunction(dts);
        tE=solve(dt,t);
        x=x+tE*(dx0);

        do=abs(dx0)>eps;
    end
end

function y = centralFirstDerivative(f,x,h)
    h=1;
    i=1;
    n=length(f);
    dfs= diff(fx);
    df=matlabFunction(dfs);
    dfact=df(x);

    while i<Max
        der(i)=(f(x+h)-f(x-h))/(2*h);
        i=i+1;
    end
end
```

Copia aquí tu funcion Gauss-Seidel

```
function [x,i] = gaussSeidelEleg(A,b)
    if ~isDiagDom(A)
        warning('La matriz no es diagonalmente dominante')
    end
```

```
    tol=eps;
    MAXi=1000;
    i=0;
    x=zeros(size(b));
    D=diag(diag(A));
    L=tril(A,-1);
    M=D+L;

    do=true;
    while do
        xp=x;
        r=b-A*x;
        x=x+M\r;
        i=i+1;
        do=norm((x-xp)./x,Inf)>tol && i<MAXi;
    end
end

function res= isDiagDom(A)
   res=true;
   [m,n]=size(A);
   if m~=n, error('La matriz no es cuadrada'), end

   i=1;
   while res && i<n
       res=abs(A(i,i))>sum(abs(A(i,[1:i-1 i+1:n])));
       i=i+1;
   end
end
```

Copia aquí tu función iterativa para resolver el problema 6

```
function [x, i] = GradienteConjugadoEleg(A, b, x)
    if ~PD(A)
        error('La matriz A no es positiva definida.');
    end

    max_iter = length(x);
    tol = eps();

    r = b - A * x;
    d = r;

    i = 0;
    cond = norm(r) ~= 0;
    while cond
        xp = x;
        rr = dot(r, r);
        alpha = rr / (d' * A * d);
```

```
        x = x + alpha * d;
        r = b - A * x;
        d = r + (dot(r, r) / rr) * d;

        i = i + 1;
        cond = norm(r) ~= 0 && norm((x - xp) / x, inf) > tol && i < max_iter;
    end
end

function res = PD(A)
    [m, n] = size(A);
    res = m == n && all(eig(A) > 0) && issymmetric(A);
end
```

Copia aquí tu función de Newton-Raphson de varias variables

```
function [x,i] = NewtonRaphsonVVEleg(f,J,x)
    i=0;
    MAX=80;
    TOL=eps();
    fx=f(x);
    do = true;

    while do
        xp=x;
        x=xp-J(xp)\fx;
        fx=f(x);
        i=i+1;
        do = i<MAX  && any(fx) && norm((x-xp)./x,inf)>TOL;
    end
end
```