Tarea 1

Rodrigo Plauchí Rodríguez

CU: 182671

Ej. 1

Sea Σ un alfabeto y $A \subseteq \Sigma^*$.

Demostrar:

1. $\{\lambda\} A = A\{\lambda\} = A$

Primero demostramos

$A\{\lambda\} = A$

Primero:

$A \subseteq A\{\lambda\}$

$x \in A$, $x = x\lambda \in A\{\lambda\}$

ya que $x \in A$, $\lambda \in \{\lambda\}$, $\forall x \in A\{\lambda\}$

ahora:

$A\{\lambda\} \subseteq A$

$x \in A\{\lambda\}$, $x = x_1 x_2$, $x_1 \in A$, $x_2 \in \{\lambda\}$

$x_2 \in \{\lambda\} \Rightarrow x_2 = \lambda$

$\therefore x = x_1 x_2$

$= x_1 \lambda = x_1$, $x_1 \in A$

$\forall x \in A\{\lambda\}$

Finalmente:

$A = \{\lambda\} A$

Primero:

$A \subseteq \{\lambda\} A$

$x \in A$, $x = \lambda x$ y $\lambda \in \{\lambda\}$

$\therefore \lambda x \in \{\lambda\} A$

$x = \lambda x \in \{\lambda\} A \quad \forall \ x \in A$

ahora:

$\{\lambda\} A \subseteq A$

Sea $x \in \{\lambda\} A$, $x = x_1 x_2$

$x_1 \in \{\lambda\}$ y $x_2 \in A$

entonces,

$x_1 \in \{\lambda\} \Rightarrow x_1 = \lambda$

$\Rightarrow x = x_1 x_2$

$\Rightarrow \quad = \lambda x_2 = x_2$ y $x_2 \in A$

$, \forall \ x \in \{\lambda\} A$

$\therefore \{\lambda\} A = A \{\lambda\} = A$

2. $\emptyset A = A\emptyset = \emptyset$

Sea $x \in \emptyset A$, $x = x_1 x_2$

$x_1 \in \emptyset$, $x_2 \in A$ ∇
$\circ$

ya que si $x_1 \in \emptyset$ no puede tener elementos

$\therefore \emptyset A = \emptyset$

ahora por el otro lado:

$x \in A\emptyset$, $x = x_1 x_2$

$x_1 \in A$, $x_2 \in \emptyset$ ∇
$\circ$ no puede tener elementos

$\therefore A\emptyset = \emptyset$

Finalmente , $A\emptyset = \emptyset A = A$

Ej 3.

Sea Σ un alfabeto y $A \subseteq \Sigma^*$.

Demostrar:

1. $A^* = \{\lambda\} \cup A^* A$

$= \{\lambda\} \cup A^+$

$= A^0 \cup A^+$

$= A^*$

2. $\emptyset^* = \{\lambda\}$

Por la demostración del Ej 1.2

Podemos concluir que

$\emptyset^1 = \emptyset$

$\emptyset^2 = \emptyset$

$\vdots$

$\emptyset^i = \emptyset \quad i \in N$

Ahora :

$$\emptyset^* = \bigcup_{i \geq 0} \emptyset^i = \emptyset^0 \cup \left(\bigcup_{i \geq 1} \emptyset^i \right)$$

$$= (\lambda) \cup \left(\bigcup_{i \geq 1} \emptyset \right) = \{\lambda\} \cup \emptyset$$

$$= \{\lambda\}$$

Finalmente $\emptyset^* = \{\lambda\}$