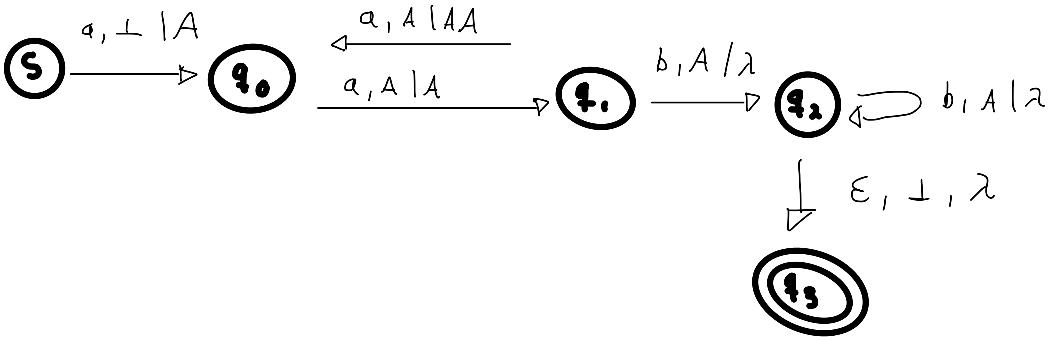
Tarea 9

Rodrigo Plauchú Rodríguez   cu: 182671

EJERCICIO 1

Construye un APND que acepte el lenguaje

$$L = \{a^n b^m \mid n = 2m\}.$$



EJERCICIO 2

Sean $L, R \subseteq \Sigma^*$ tal que L es libre de contexto y R es regular. Demuestra que $L \cap R$ es un lenguaje libre de contexto.

(Tip: Construye un APND $M_\cap$ para $L \cap R$ usando una construcción del producto similar a la de los AFs en lenguajes regulares. Luego demuestra con inducción que

$$(\forall x \in \Sigma^*) x \in L \cap R \Leftrightarrow x \in L(M_\cap).$$

)

L un lenguaje regular $\exists$ D FA

$R = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

t.q. $x \in R \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, x) \in F$

Dividimos R tal que $R_1, R_2, \ldots, R_n$

n es el num de estados finales

$R_i = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{f_i\})$, $i = 0, \ldots, n$

entonces $L(L) = L(R)$ y como $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$

$L(L) = L(\bigcup_{i=1}^{n} R_i)$

Sea L un lenguaje libre de contexto

y $\bigcup_{i=1}^{n} R = R$ un lenguaje Regular

$$\therefore \mathcal{L}(L) \cap \mathcal{L}\left(\bigcup_{i=1}^{n} R_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\mathcal{L}(L) \cap \mathcal{L}(R_i)\right)$$

Como la unión de lenguajes libres es cerrada probaremos $\mathcal{L}(L) \cap \mathcal{L}(R_i)$ donde R_i tiene un solo estado final.

Sea M un DFA y G un CFG

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_f\})$

$G = (V, \Sigma, R, S)$

definimos $G' = (V', \Sigma, R', S')$ un CFG

$V' = \{(q, A, r) \mid A \in V \text{ y } q, r \in Q\}$

$S' = \{q_0, S, q\}$

Ahora:

$R' = \{(q, A, r) \to t \mid A \to t \in R$
$, t \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, \text{ y } \delta(q, t) = r\}$

$\cup \{(q, A, r) \to (q, B, s)(s, C, r) \mid A \to BC \in R, \forall q, r, s \in Q\}$

La generada CFG está en CNF, ya que las producciones están solo en dos formas, a saber

$(q, A, r) \to t$ ó $(q, A, r) \to (q, B, s)(s, C, r)$

Ahora

$\forall (q, A, V) \in V'$, $(q, A, r) \overset{*}{\Rightarrow} w \iff w \hat{\delta}(q, w) = r$

base: $w = a$

Como G' está en CNF, basta con:

$(q, A, r) \overset{*}{\Rightarrow} a \iff (q, A, r) \Rightarrow a$

$\iff a \vee \delta(q, a) = r$

$\iff A \overset{*}{\Rightarrow} a$ y $\hat{\delta}(q, a) = r$

Usando Inducción: $|w| = n > 1$

$|w|$ es al menos > 1

Primer paso: $A \to BC$

$(q, A, r) \stackrel{*}{\Rightarrow} w \Leftrightarrow (q, A, r)$

$\Rightarrow (q, B, s)(s, C, r) \stackrel{*}{\Rightarrow} w \quad s \in Q$

$\Leftrightarrow A \Rightarrow BC$, entonces

$(q, B, s) \stackrel{*}{\Rightarrow} w_1$ y $(s, C, r) \stackrel{*}{\Rightarrow} w_2$

$\Leftrightarrow B \stackrel{*}{\Rightarrow} w_1, \hat{\delta}(q, w_1) = s$

$C \stackrel{*}{\Rightarrow} w_2$ y $\hat{\delta}(s, w_2) = r$

como, $w = w_1 w_2$

$$\hat{\delta}(q, w) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, w_1), w_2)$$
$$= \hat{\delta}(s, w_2)$$
$$= r$$

Similarmente $A \to BC \therefore A \stackrel{*}{\Rightarrow}$

$\therefore (q, A, r) \stackrel{*}{\Rightarrow} w \Leftrightarrow A \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ y $(q, w) = r$

En particular si $w \in L(M)$ $(q_0, S, q_f) \stackrel{*}{\Rightarrow} w$

$\Leftrightarrow S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ y $\hat{\delta}(q_0, w) = q_f$

$\Leftrightarrow w \in L(L)$ y $w \in L(R_i) \Leftrightarrow w \in L(L) \cap L(R_i)$

Sea G'_i la CFG generada por $L(L) \cap L(R_i)$, ya que se demostró anteriormente

Entonces, sea G' la unión de todas las gramaticas $\bigcup_{i=1}^{n} G'_i = (V'_i, \Sigma, R'_i, S'_i)$

$= G'$

donde $G' = ((\bigcup_{i=1}^{n} V_i) \cup S', \Sigma, (\bigcup_{i=1}^{n} R'_i) \cup S' \to S_1 | S_2 | \dots | S_n, S')$

$w \in L(G') \iff w \in \bigcup_{i=1}^{n} L(G'_i)$

$\iff w \in \bigcup_{i=1}^{n} L(L) \cap L(R_i)$

$\iff w \in L \in (L) \cap L(R)$ ∎