Projet 4 - RODD

BATY Léo, BRUNOD-INDRIGO Luca

21 mars 2021

1 Programme linéaire en variable mixtes

$$\max_{x,d} \quad w_1 \sum_{(i,j)\in M\times N} t_{ij}(1-x_{ij}) + w_2 gl \sum_{(i,j)\in M\times N} 4x_{ij} - d_{ij} \tag{1a}$$

$$\text{s.t.} \quad d_{ij} \geq \sum_{(k,l)\in A_{ij}} x_{kl} - |A_{ij}|(1-x_{ij}) \quad \forall (i,j) \in M\times N \tag{1b}$$

$$d_{ij} \in \mathbb{R}_+ \quad \forall (i,j) \in M\times N \tag{1c}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in M\times N \tag{1d}$$

Soit (x,d) solution optimale de 1 :

- $\sum_{(i,j)\in M\times N} t_{ij}(1-x_{ij})$: population de l'espèce 1 (somme des t_{ij} pour toutes les parcelles coupées)
- $gl \sum_{(i,j)\in M\times N} 4x_{ij} - d_{ij}$
  - si $x_{ij} = 1$, $d_{ij} = \sum_{(k,l)\in A_{ij}} x_{kl}$ nombre de voisins de (i,j) non coupés Donc $4x_{ij} - d_{ij}$ est le nombre de lisières
  - si $x_{ij} = 0$, $d_ij = 0$ et $4x_{ij} - d_{ij} = 0$

Le modèle compte donc bien la somme pondérée de la population 1 et de la population 2.

2 Programme linéaire quadratique en variables binaires

$$\max_{x,d} \quad w_1 \sum_{(i,j)\in M\times N} t_{ij}(1-x_{ij}) + w_2 gl \sum_{(i,j)\in M\times N} \sum_{(k,l)\in A_{ij}} x_{ij}(1-x_{kl}) \tag{2a}$$

$$\text{s.t.} \quad x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in M\times N \tag{2b}$$

On ajoute les contraintes de linéarisation (de type Fortet) suivantes : $y_{ijkl} = x_{ij}(1-x_{kl})$

- $y_{ijkl} \leq x_{ij}$

- $y_{ijkl} \leq 1 - x_{kl}$
- $y_{ijkl} \geq x_{ij} - x_{kl}$ (non nécessaire car on maximise avec des coefficients positifs)
- $y_{ijkl} \geq 0$ (non nécessaire car on maximise avec des coefficients positifs)

Ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
\max_{x,d} \quad & w_1 \sum_{(i,j)\in M\times N} t_{ij}(1-x_{ij}) + w_2 gl \sum_{(i,j)\in M\times N} \sum_{(k,l)\in A_{ij}} y_{ijkl} && \text{(3a)}\\
\text{s.t.} \quad & y_{ijkl} \leq x_{ij} \qquad \forall (i,j)\in M\times N, \forall (k,l)\in A_{ij} && \text{(3b)}\\
& y_{ijkl} \leq 1 - x_{kl} \qquad \forall (i,j)\in M\times N, \forall (k,l)\in A_{ij} && \text{(3c)}\\
& x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j)\in M\times N && \text{(3d)}\\
& y_{ijkl} \in \mathbb{R} \qquad \forall (i,j)\in M\times N, \forall (k,l)\in A_{ij} && \text{(3e)}
\end{aligned}
$$

La matrice des contraintes de (3) est totalement unimodulaire (TU). En effet :

- Elle est de la forme $\begin{pmatrix} Id & M \end{pmatrix}$ avec M de taille $M^2N^2 \times MN$, et

$$M_{ijkl,pq} = \mathbb{1}_{\{pq=kl\}} - \mathbb{1}_{\{pq=ij\}}, \forall (i,j,k,l),(p,q)$$

- **Caractérisation de Ghouila-Houri** : soit I un sous-ensemble de colonnes de M. On partitionne I en $I_1 = I$ et $I_2 = \emptyset$. Pour chaque ligne, la somme des éléments de I_1 vaut -1, 0, ou 1 (par définition de M), et la somme des éléments de I_2 vaut 0. La somme sur les lignes diffère d'au plus 1, on conclut donc que M est TU, donc que la matrice des contraintes est TU.

On peut donc enlever la contrainte d'intégrité des variables :

$$
\begin{aligned}
\max_{x,d} \quad & w_1 \sum_{(i,j)\in M\times N} t_{ij}(1-x_{ij}) + w_2 gl \sum_{(i,j)\in M\times N} \sum_{(k,l)\in A_{ij}} y_{ijkl} && \text{(4a)}\\
\text{s.t.} \quad & y_{ijkl} \leq x_{ij} \qquad \forall (i,j)\in M\times N, \forall (k,l)\in A_{ij} && \text{(4b)}\\
& y_{ijkl} \leq 1 - x_{kl} \qquad \forall (i,j)\in M\times N, \forall (k,l)\in A_{ij} && \text{(4c)}\\
& x_{ij} \in [0,1] \qquad \forall (i,j)\in M\times N && \text{(4d)}\\
& y_{ijkl} \in \mathbb{R} \qquad \forall (i,j)\in M\times N, \forall (k,l)\in A_{ij} && \text{(4e)}
\end{aligned}
$$

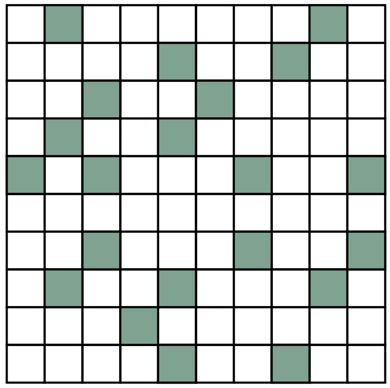
3 Résultats

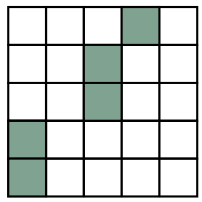
3.1 Instances de l'énoncé

Voici les résultats obtenus pour les deux instances de l'énoncé :

	Objectif	**Effectif e1**	**Effectif e2**	**Parcelles non coupeées**	**Lisières**
Instance 1	8219.5782	6630	317.91564	21	84
Instance 2	442.55536	191	60.55536	5	16

TABLE 1 – Solutions des deux instances





Voici un tableau comparatif des deux modèles :

Modèle	**Instance 1**		**Instance 2**	
	Temps de calcul	**Nb de noeuds**	**Temps de calcul**	**Nb de noeuds**
Modèle 1	0.01 s	0	0.013 s	0
Modèle 2	0.004 s	n.a.	0.0014 s	n.a.

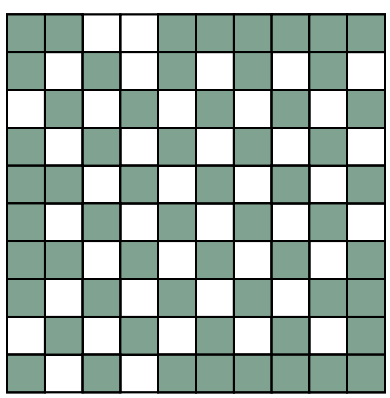
Table 2 – Résultats pour les deux instances de l'énoncé

3.2 Ajout d'une contrainte sur le nombre de parcelles non coupées

On ajoute la contrainte suivante $\sum_{(i,j)\in M\times N} x_{ij} \geq 60$ (au moins 60 parcelles non coupées). On obtient les résultats suivants pour les deux méthodes

Objectif	**Effectif e1**	**Effectif e2**	**Parcelles non coupeées**	**Lisières**
6753.933200000012	3272	696.38664	60	184

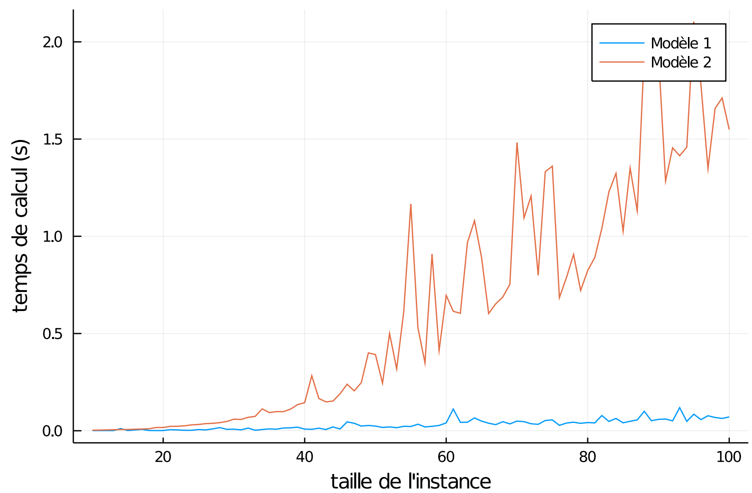
Table 3 – Solutions des deux instances



Remarque : on obtient les mêmes solutions pour les deux méthodes, cependant l'ajout de la nouvelle contrainte fait perdre la caractère TU de la matrice des contraintes du second modèle. En effet, on ajoute une ligne composée de -1 à M, ce qui permet d'identifier un sous-déterminant $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \notin \{0, 1, -1\}$. En général, on est donc pas sûr que le PL du second modèle renvoie une solution entière.

3.3 Instances aléatoires

Voici un plot du temps de calcul en fonction de la taille de l'instance pour les deux méthodes :



Le modèle 1 semble beaucoup plus efficace que le modèle 2.