TP RODD

BRUNOD-INDRIGO Luca, BATY Léo

24 mars 2021

1 Construction du graphe

Soit $p \in \mathcal{P}$. Définissons le graphe $G^p = (V^p, A^p)$:

- $\rightarrow$ **Sommets** : $V^p = \{(t,l,a,j) \in [\![1,T]\!] \times [\![1,l_{max}]\!] \times [\![0,a_{max}]\!] \times (\mathcal{C} \cup \{0\}) \mid j = 0 \implies a = 0\} \bigcup \{u^p\}$
  $u^p = (0, l^p, 0, 0)$ état initial de la parcelle p.
- $\rightarrow$ **Arcs** : A^p contient quatre types d'arcs différents, correspondant aux transitions entre les périodes $t \in [\![1,T]\!]$:
  - jachère $\rightarrow$ jachère : $(t-1,l,0,0) \rightarrow (t, \min(l+1, l_{max}), 0, 0)$
  - culture $\rightarrow$ jachère : $(t-1,l,a,j) \rightarrow (t,1,0,0)$
  - jachère $\rightarrow$ culture : $(t-1,l,0,0) \rightarrow (t,l,1,j)$
  - culture $\rightarrow$ culture : $(t-1,l,a,j) \rightarrow (t,l,a+1,j')$
- $\rightarrow$ **Poids** : $w^p : A^p \rightarrow \mathbb{R}$, tel que :
  $\forall (u,v) \in A^p,\ u = (t,l,a,j), v = (t',l',a',j'),\ \boxed{w^p_{u,v} = R_p(l,a',j,j')}$
- $\rightarrow$ Soient $j \in \mathcal{C}, t \in [\![1,T]\!]$.
  On note $A^p(j,t)$ le sous-ensemble d'arcs de A^p de la forme $(t-1,l,a,i) \rightarrow (t,l',a',j)$

Une rotation sur la parcelle p correspond à un chemin dans G^p de u^p à un sommet de type (T,l,a,j).

2 Modélisation par un PLNE

Considérons les graphes G^p, $p \in \mathcal{P}$ définis dans la section précédente. On peut modéliser le problème de planification sous la forme d'un programme linéaire en nombres entiers :

- $\rightarrow$ **Variables de décision** : $\forall p \in \mathcal{P},\ \forall (u,v) \in A^p,\ x^p_{u,v} = \mathbb{1}_{\{(u,v) \text{ est dans la rotation de la parcelle } p\}}$
- $\rightarrow$ **Objectif** : $\sum\limits_{p \in \mathcal{P}} \sum\limits_{v \in \delta^+(u^p)} x^p_{u^p,v}$
- $\rightarrow$ **Contraintes** :
  - Demande satisfaite à chaque période pour chaque culture :

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{(u,v) \in A^p(j,t)} w^p_{u,v} x^p_{u,v} \geq D_{j,t},\ \forall t \in [\![1,T]\!],\ \forall j \in C$$

- Contraintes de type *flot* le long des chemins/rotations :

$$\sum_{v \in \delta^-(u)} x^p_{v,u} = \sum_{v \in \delta^+(u)} x^p_{u,v},\ \forall p \in \mathcal{P},\ \forall u \in V^p \backslash \{u^p\}$$

- Au plus une rotation par parcelle :

$$\sum_{v \in \delta^+(u^p)} x^p_{u^p,v} \leq 1,\ \forall p \in \mathcal{P}$$

PLNE final :

$$\begin{aligned}
\min_x \quad & \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{v \in \delta^+(u^p)} x^p_{u^p,v} && && \text{(1a)}\\
\text{s.t.} \quad & \sum_{v \in \delta^-(u)} x^p_{v,u} = \sum_{v \in \delta^+(u)} x^p_{u,v} && \forall p \in \mathcal{P},\ \forall u \in V^p \backslash \{u^p\} && \text{(1b)}\\
& \sum_{v \in \delta^+(u^p)} x^p_{u^p,v} \leq 1 && \forall p \in \mathcal{P} && \text{(1c)}\\
& \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{(u,v) \in A^p(j,t)} w^p_{u,v} x^p_{u,v} \geq D_{j,t} && \forall t \in [\![1, T]\!],\ \forall j \in C && \text{(1d)}\\
& x^p_{u,v} \in \{0, 1\} && \forall p \in \mathcal{P},\ \forall (u,v) \in A^p && \text{(1e)}
\end{aligned}$$

3 Résolution de l'instance

Nous avons implémenté le PLNE décrit dans la section précédente en JULIA interfacé avec le solveur CPLEX, afin de résoudre l'instance de l'énoncé. On obtient le résultat suivant :

- Nombres de noeuds développés dans l'arbre de recherche : 0
- Temps de calcul : 0.42 s
- Nombre de parcelle cultivées (i.e. valeur de l'objectif à l'optimum) : $\boxed{19}$

4 Formulation *étendue*

Dans cette section on considère que les parcelles sont identiques, i.e. les rendements sont identiques (i.e. $\forall p \in \mathcal{P}$, $R_p = R$). Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des rotations possibles. On a la formulation *étendue* suivante :

$$\begin{aligned}
\min_x \quad & \sum_{r \in \mathcal{R}} x_r && && \text{(2a)}\\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{(u,v) \in r} \mathbb{1}_{\{v=(t,\cdot,\cdot,j)\}} w_{u,v} x_r \geq D_{j,t} && \forall j \in \mathcal{C},\ \forall t \in [\![1, T]\!] && \text{(2b)}\\
& x_r \in \mathbb{N} && \forall r \in \mathcal{R} && \text{(2c)}
\end{aligned}$$

5 Approche de génération de colonnes

A partir de la formulation *étendue* présentée dans la section précédente, on considère une approche de type génération de colonne afin de calculer sa relaxation continue, et donc une borne inférieure de l'optimum. Afin d'identifier la variable à ajouter à chaque itération, on cherche la variable associée à la contrainte la plus violée dans le dual. On note $\mu_{j,t} \geq 0$ les variables duales associées aux contraintes (2b). Voici l'expression du dual :

$$\max_{x} \quad \sum_{j \in \mathcal{C}} \sum_{t=1}^{T} D_{j,t} \mu_{j,t} \tag{3a}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{(u,v) \in r} w_{u,v} \left(\sum_{j \in \mathcal{C}} \sum_{t=1}^{T} \mathbb{1}_{\{v=(t,\cdot,\cdot,j)\}} \mu_{j,t} \right) \leq 1 \quad \forall r \in \mathcal{R} \tag{3b}$$

$$\mu_{j,t} \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{C},\ t \in [\![1, T]\!] \tag{3c}$$

On en déduit le sous-problème (μ est fixé) :

$$\max_{r \in \mathcal{R}} \sum_{(u,v) \in r} w_{u,v} \left(\sum_{j \in \mathcal{C}} \sum_{t=1}^{T} \mathbb{1}_{\{v=(t,\cdot,\cdot,j)\}} \mu_{j,t} \right)$$

Pour chaque arc, la somme d'indicatrices contenant un seul terme non nul, on peut écrire :

$$\max_{r \in \mathcal{R}} \sum_{(u,v) \in r} w_{u,v} \mu_{j_v, t_v}$$

Cela revient à calculer un plus long chemin dans le graphe G^p depuis le sommet u^p, en pondérant chaque arc (u, v) par $w_{u,v} \mu_{j_v, t_v}$.