

Modèles épidémiologiques

BATY LÉO, BRUNOD-INDRIGO LUCA

30 janvier 2021

1 Implémentation du modèle déterministe

1.1 Résolution du système différentiel

Le modèle déterministe est implémenté dans le fichier `deterministic_model`. La méthode employée est un simple schéma d'Euler explicite qui calcule point par point une solution approchée des équations différentielles en remplaçant les dérivées par des différences finies sur un pas de temps δt fixé.

Ainsi les équations utilisées s'écrivent :

$$\begin{aligned}s(t + \delta t) - s(t) &= -\beta i(t)s(t)\delta t \\ i(t + \delta t) - i(t) &= (\beta s(t) - \gamma)i(t)\delta t \\ r(t + \delta t) - r(t) &= \gamma i(t)\delta t\end{aligned}$$

1.2 Calcul de limite théorique

La limite théorique r_∞ est calculée selon la formule vue en cours où \mathcal{W} désigne la réciproque de la fonction de Lambert sur l'intervalle $] -1, +\infty[$:

$$r_\infty = 1 + \frac{1}{R_0} \mathcal{W}(-R_0 e^{-R_0})$$

Pour le calcul de la fonction de Lambert réciproque dans le code, nous avons utilisé la librairie `Julia` consacrée : `LambertW`.

1.3 Application numérique

Le calcul théorique de r_∞ étant valable pour le cas limite où $i(0) = 0^+$, il est nécessaire de choisir une valeur de $i(0)$ "petite" mais strictement positive (sans quoi la solution du système différentiel est trivialement constante à l'état initial).

La figure 1 montre le tracé issu de la simulation du modèle déterministe pour les paramètres suivants :

- $\beta = 0.1$
- $\gamma = 0.05$
- $i(0) = 0.001$

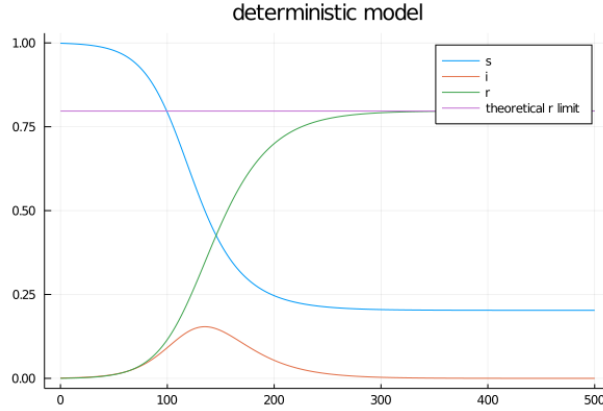


FIGURE 1 – Modèle déterministe et r_∞ théorique

On constate que la limite théorique calculée semble bien correspondre à la valeur limite de la courbe r . Notons que le choix de valeurs de $i(0)$ plus élevés qui éloignent du cas où la valeur est négligeable mènent à des écarts visibles entre les courbes r et r_∞ , comme on peut s'y attendre.

2 Implémentation du modèle Markovien

2.1 Description du modèle Markovien

Le modèle Markovien est implémenté dans le fichier `markovian_model.jl`. Il correspond au modèle vu en cours avec une population de taille fixe N , un espace d'états

$$E_N = \{(S, I, R) \in \mathbb{N}^3 \mid S + I + R = N\}$$

et caractérisé par les transitions suivantes :

- $(S, I, R) \rightarrow (S - 1, I + 1, R)$ au taux $\beta I \frac{S}{N}$
- $(S, I, R) \rightarrow (S, I - 1, R + 1)$ au taux γI

La figure 2 montre un exemple de simulation du processus de Markov avec les paramètres suivants :

- $\beta = 0.1$
- $\gamma = 0.05$
- $N = 5000$
- $X_0 = (S_0, I_0, R_0) = (4995, 5, 0)$

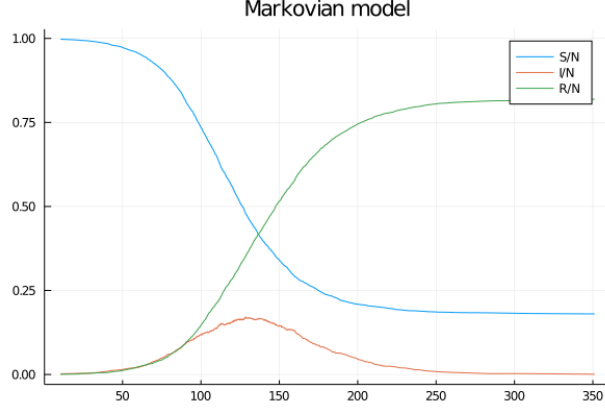
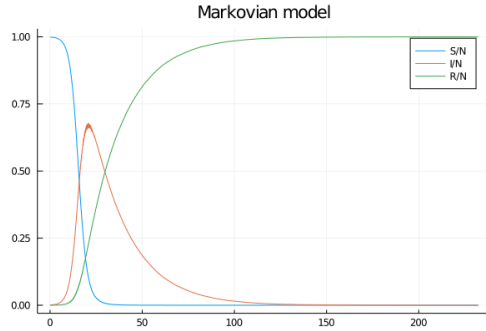


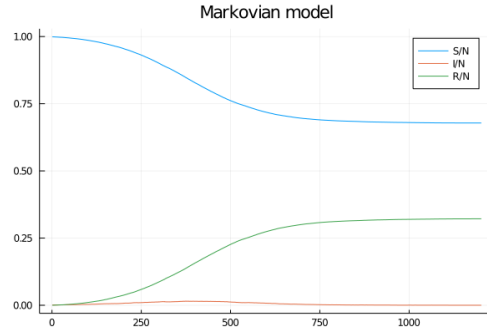
FIGURE 2 – Processus de Markov renormalisé

2.2 Influence de β et γ sur l'état final

Le choix des paramètres β et γ influence la forme des courbes issues de la simulation du processus de Markov et en particulier l'état final du système (lorsque le nombre d'individus infectés tombe à zéro et qu'il n'y a plus d'évolution). La figure 3 montre deux exemples de simulations avec une même taille de population $N = 100000$ et un même nombre d'individus infectés initialement $I_0 = 100$ mais avec des valeurs de β différentes.



(a) $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.05$



(b) $\beta = 0.06$, $\gamma = 0.05$

FIGURE 3 – Simulations du processus de Markov pour différents paramètres

Dans un cas, la valeur de β élevée mène à une population entièrement retirée à l'état final tandis que dans l'autre cas une partie de la population reste susceptible.

Notons que les paramètres ont été choisis de sorte à avoir $R_0 > 1$ ce qui correspond à une limite théorique r_∞ non nulle.

3 Convergence du processus de Markov renormalisé

La figure 4 montre les tracés issus du modèle déterministe et du modèle Markovien pour un même jeu de paramètres :

- $\beta = 0.1$
- $\gamma = 0.05$

et pour différentes valeurs de N et de I_0 vérifiant :

$$\frac{I_0}{N} = i(0) = 0.001$$

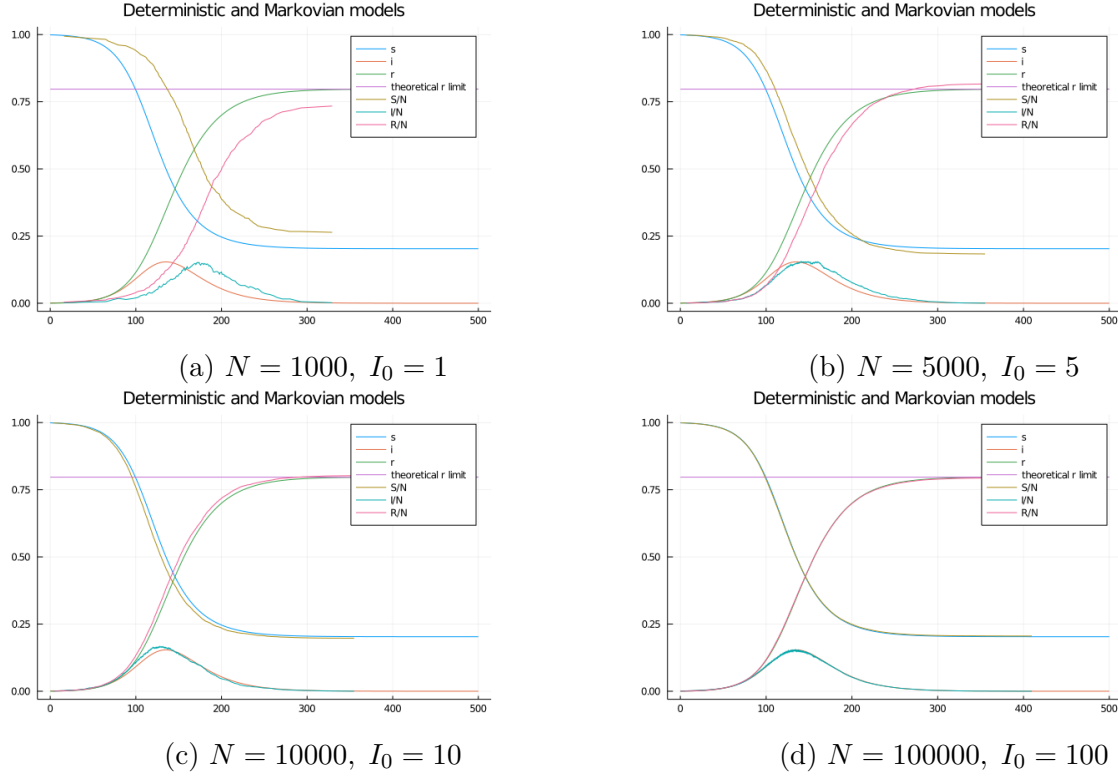


FIGURE 4 – Comparaison entre modèle déterministe et processus de Markov renormalisé

Nous pouvons constater que plus la taille de la population N augmente, plus les courbes obtenues par simulation du processus de Markov sont proches des courbes issues du modèle déterministe partant de $i(0) = \frac{I_0}{N}$.

Les tracés, de même que les écarts entre les courbes restent bien entendu aléatoires et sont d'autant plus sensibles à l'aléa que N est petit. Ainsi, il a pu arriver lors de nos essais que des valeurs de N relativement faibles donnent "par chance" des courbes presque confondues. Pour l'illustration, nous avons conservé des simulations présentant des écarts qui nous ont semblé représentatifs.