

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ICEX

---

# Notas em Teoria Clássica de Campos

---

*Autores:*

Álvaro Cássia Henrique  
João Monteiro Mariana  
Matheus Paulo Vitor

*Professor:*

Filipe MENEZES

7 de junho de 2025

## Convenções e Notação

<b>Soma de Einstein</b>	$x_\mu y^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 x_\mu y^\mu$
<b>Assinatura</b>	$(-, +, +, +)$
<b>Unidades Naturais</b>	$c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1.$
<b>Índices</b>	Índices gregos: 0,1,2,3; Índices latinos: 1,2,3.
<b>Derivadas Parciais</b>	$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

## Sumário

<b>Convenções e Notação</b>	<b>1</b>
<b>1 Relatividade Especial, Notação de Índices e Cálculo Tensorial</b>	<b>3</b>
1.1 Postulados da Relatividade Especial e Espaço-Tempo . . . . .	3
1.2 Invariância do Comprimento de Arco . . . . .	4
1.3 A Física do Intervalo . . . . .	5
<b>2 Introdução ao Princípio Variacional</b>	<b>5</b>
<b>3 Lagrangiana do Campo Eletromagnético</b>	<b>5</b>

# 1. Relatividade Especial, Notação de Índices e Cálculo Tensorial



COMEÇAR os estudos em Teoria Clássica de Campos com Relatividade Especial, além de ser usual nos livros mais adotados em cursos universitários, é fundamental para a construção da base conceitual e do *framework* matemático necessário no tratamento de campos clássicos para as interações fundamentais. Talvez o principal e mais famoso exemplo de um campo clássico desse tipo é o campo eletromagnético, que, em sua natureza, é governado por leis físicas que são covariantes sob Transformações de Lorentz (i.e., são as mesmas após realizarmos mudanças de coordenadas entre referenciais inerciais). Começaremos agora a introduzir os conceitos mais importantes de relatividade especial para o tratamento de campos clássicos fundamentais.

## 1.1. Postulados da Relatividade Especial e Espaço-Tempo

Enunciados por Einstein em 1905, ao tratar, justamente, de questões fundamentais envolvendo o campo eletromagnético[1], os postulados da relatividade especial podem ser adaptados em linguagem moderna da seguinte forma:

- I. As leis da Física são as mesmas para todos referenciais inerciais.
- II. A velocidade da luz é finita, com valor definido  $c$  para todo e qualquer referencial.

Estes são os alicerces a partir dos quais construiremos toda a teoria. Usaremos principalmente o postulado (I) para nos guiar a respeito do estabelecimento de qualquer *framework* matemático que viermos a desenvolver. Para entender a motivação por trás dos postulados, vale conferir o primeiro parágrafo em [1].

Devido aos postulados, surge de forma natural um tratamento equivalente de espaço e tempo na relatividade especial, antes vistos como dois entes totalmente separados e independentes. Em outras palavras, devido à demanda de que as leis da Física sejam covariantes por Lorentz, acabamos, inevitavelmente, por tratar espaço e tempo de forma equivalente, fundindo-os no mesmo objeto que denominamos de **espaço-tempo**. Cada ponto desse espaço-tempo, assinalado pelas coordenadas  $(t, \vec{x})$ , ou  $(t, r, \theta, \varphi)$ , ou qualquer outro sistema genérico de coordenadas é chamado de **evento** nesse espaço-tempo.

Nessa nova forma de tratar o espaço e o tempo, de modo que as leis Físicas não mudem sob mudanças de referenciais inerciais, acabamos introduzindo uma **nova métrica**, isto é, uma nova forma de “medir distâncias” nesse novo “espaço” construído a partir dessa “fusão” entre espaço e tempo. Essa nova métrica é dada por  $ds^2$ , que não é para ser entendida como “um número pequeno elevado ao quadrado”, mas sim como um objeto por si só, que dita a medida das “distâncias” nesse espaço-tempo. Em coordenadas cartesianas para um espaço-tempo plano, sua métrica é dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2$$

onde  $d\vec{x}^2$  representa  $dx^2 + dy^2 + dz^2$  para o espaço tridimensional (notação boba). Novamente,  $dt$  e  $dx$  não representam “infinitesimais”, mas podem ser entendidos como tal num primeiro momento; mais adiante, pretendemos esclarecer o real significado matemático que esses objetos carregam, quando formos descrever a métrica de forma tensorial<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Uma generalização de matrizes, ou melhor, de vetores; nada assustador.

Uma forma conveniente de escrever a métrica é usando notação de índices (c.f. § Convenções e Notação, p. 1):

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

onde  $dx^0 = dt$ ;  $dx^i$  correspondendo a  $dx, dy, dz$  para  $i = 1, 2, 3$ , respectivamente; e  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ .

## 1.2. Invariância do Comprimento de Arco

Em espaços euclidianos, integramos um **elemento de arco**\*  $ds$  ao longo de uma curva  $C$  para obtermos o **comprimento de arco** dessa curva. De forma completamente análoga, isso também vale para espaços-tempos<sup>2</sup>:

$$S \equiv \int_C ds. \quad (1)$$

E as semelhanças não param por aí: assim como distâncias são preservadas em espaços euclidianos ao mudarmos de sistema de coordenadas, o comprimento de um arco no espaço-tempo é o mesmo, independente do sistema de coordenadas adotado, ou seja:

$$S = S' \quad (2)$$

para a mesma curva  $C$  nesse espaço-tempo, e para quaisquer sistemas de coordenadas que se relacionam por transformações de Lorentz (“com linha” e “sem linha” na equação 2 denotam referenciais diferentes).

Para provar a afirmação em (2), é suficiente mostrar que o elemento de arco  $ds$  é o mesmo que seu correspondente  $ds'$  no outro referencial em cada ponto da curva. Mas como temos posse apenas da métrica, e sabemos que, de uma forma padronizada para ambos os referenciais, os elementos de arco  $ds$  e  $ds'$  são obtidos a partir das suas respectivas métricas, basta mostrar que:

$$ds^2 = ds'^2 \Rightarrow ds = ds' \Rightarrow S = S'$$

Sendo essa uma condição suficiente para provar a invariância do arco de uma curva situada no espaço-tempo. Considere então a métrica descrita pelos referenciais sem linha e com linha:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 \quad ; \quad ds'^2 = -dt'^2 + dx'^2. \quad (3)$$

Para encontrar a relação entre as métricas, seria bom obter as relações entre os sistemas de coordenadas  $(t, x)$  e  $(t', x')$ , pois conseguiremos relacionar  $dt'^2$  com  $dt^2$  e  $dx'^2$  com  $dx^2$ .

Para isso, vamos usar a forma explícita da transformação de Lorentz que faz a passagem de um referencial que observa os eventos do espaço-tempo<sup>3</sup> com as coordenadas  $(t, x)$  para um outro que os observa com as coordenadas  $(t', x')$ .

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix} \quad (4)$$

<sup>2</sup>Mais adiante mostraremos como obter o elemento de arco a partir da métrica em espaços-tempos; adiantamos que não é tão trivial quanto em espaços euclidianos, onde basta tirar a raiz quadrada da métrica. O espaço-tempo guarda algumas nuances...

<sup>3</sup>Tomamos um espaço-tempo bidimensional (uma coordenada temporal, outra espacial) por simplicidade.

\*Obtido a partir da métrica euclidiana:  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , que é a raiz quadrada da métrica euclidiana.

onde  $v$  é o módulo da velocidade relativa entre os dois referenciais, e  $\gamma$  é o fator de Lorentz, dado por  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ . Em notação de índices, podemos expressar a relação entre os dois sistemas de coordenadas na forma:

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\mu}^{\mu'} x^{\mu}$$

que é basicamente a atuação da matriz de  $\Lambda$  nos vetores coluna coordenados escrita em termos das componentes (c.f. § Convenções e Notação, p. 1).

Assim, obtemos:

$$\left. \begin{array}{l} t' = \gamma(t - vx) \\ x' = \gamma(-vt + x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} dt' = \gamma(dt - vdx) \\ dx' = \gamma(-vdt + dx) \end{array} \cdot \cdot \left\{ \begin{array}{l} dt'^2 = \gamma^2(dt^2 + v^2dx^2 - 2vdt dx) \\ dx'^2 = \gamma^2(v^2dt^2 + dx^2 - 2vdt dx) \end{array} \right.$$

Inserindo essas expressões na equação (3) para o referencial com linha, concluímos:

$$\begin{aligned} ds'^2 &= -dt'^2 + dx'^2 \\ &= -\gamma^2(dt^2 + v^2dx^2 - 2vdt dx) + \gamma^2(v^2dt^2 + dx^2 - 2vdt dx) \\ &= \underbrace{\gamma^2(1 - v^2)}_{=1}(-dt^2 + dx^2) \\ &= -dt^2 + dx^2 \\ &= ds^2 \end{aligned} \quad \square$$

Com isso, provamos que a métrica é idêntica para referenciais que se relacionam por transformações de Lorentz<sup>4</sup>, o que é suficiente para provar a afirmação em (2).

Por último, no caso particular em que essa curva  $C$  é uma reta ligando dois pontos fixos  $A = (t_A, x_A)$  e  $B = (t_B, x_B)$  no espaço-tempo, escrevemos:

$$\Delta S_{AB}^2 = -(t_B - t_A)^2 + (x_B - x_A)^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 \quad (5)$$

e chamamos essa quantidade de **intervalo** entre os dois eventos  $A$  e  $B$ . Como foi provado que, para uma mesma curva  $C$  ligando dois pontos, o comprimento de arco é invariante por Lorentz, fica evidente que o intervalo entre dois eventos também é invariante por Lorentz, por se tratar de um caso particular do comprimento de arco.

Passada essa parte mais matemática sobre a invariância do comprimento de arco no espaço-tempo, vamos agora à interpretação física desse resultado, assim como a interpretação do próprio comprimento de arco  $S$ , e consequentemente, a do intervalo  $\Delta S$ .

### 1.3. A Física do Intervalo

## 2. Introdução ao Princípio Variacional

## 3. Lagrangiana do Campo Eletromagnético

---

<sup>4</sup>O termo *referenciais* é usado, muitas vezes, de forma equivalente a *sistemas de coordenadas*, pois o segundo é a descrição matemática do conceito físico do primeiro em relatividade.

## Referências

- [1] Albert Einstein. “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”. Em: *Annalen der Physik* 322 (1905), pp. 891–921. DOI: 10.1002/andp.19053221004.