Universidade Federal de Minas Gerais

Programa de Graduação em Física

ICEX

Notas em Teoria Clássica de Campos

Autores:
Álvaro Cássia Henrique
João Monteiro Mariana
Matheus Paulo Vitor

Professor:
Filipe Menezes

7 de junho de 2025

Convenções e Notação

Soma de Einstein	$x_\mu y^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu y^\mu$
Assinatura	(-,+,+,+)
Unidades Naturais	$c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1.$
Índices	Índices gregos: 0,1,2,3; Índices latinos: 1,2,3.
Derivadas Parciais	$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

Sumário

1. Relatividade Especial, Notação de Índices e Cálculo Tensorial

Começar os estudos em Teoria Clássica de Campos com Relatividade Especial, além de ser usual nos livros mais adotados em cursos universitários, é fundamental para a construção da base conceitual e do *framework* matemático necessário no tratamento de campos clássicos para as interações fundamentais. Talvez o principal e mais famoso exemplo de um campo clássico desse tipo é o campo eletromagnético, que, em sua natureza, é governado por leis físicas que são covariantes sob Transformações de Lorentz (i.e., são as mesmas após realizarmos mudanças de coordenadas entre referenciais inerciais). Começaremos agora a introduzir os conceitos mais importantes de relatividade especial para o tratamento de campos clássicos fundamentais.

1.1. Postulados da Relatividade Especial e Espaço-Tempo

Enunciados por Einstein em 1905, ao tratar, justamente, de questões fundamentais envolvendo o campo eletromagnético[1], os postulados da relatividade especial podem ser adaptados em linguagem moderna da seguinte forma:

I. As leis da Física são as mesmas para todos referenciais inerciais.

II. A velocidade da luz é finita, com valor definido c para todo e qualquer referencial.

Estes são os alicerces a partir dos quais construiremos toda a teoria. Usaremos principalmente o postulado (I) para nos guiar a respeito do estabelecimento de qualquer framework matématico que viermos a desenvolver. Para entender a motivação por trás dos postulados, vale conferir o primeiro parágrafo em [1].

Devido aos postulados, surge de forma natural um tratamento equivalente de espaço e tempo na relatividade especial, antes vistos como dois entes totalmente separados e independentes. Em outras palavras, devido à demanda de que as leis da Física sejam covariantes por Lorentz, acabamos, inevitavelmente, por tratar espaço e tempo de forma equivalente, fundindo-os no mesmo objeto que denominamos de **espaço-tempo**. Cada ponto desse espaço-tempo, assinalado pelas coordenadas $(t, \vec{x})$, ou (t, r, θ, φ), ou qualquer outro sistema genérico de coordenadas é chamado de **evento** nesse espaço-tempo.

Nessa nova forma de tratar o espaço e o tempo, de modo que as leis Físicas não mudem sob mudanças de referenciais inerciais, acabamos introduzindo uma **nova métrica**, isto é, uma nova forma de "medir distâncias" nesse novo "espaço" construído a partir dessa "fusão" entre espaço e tempo. Essa nova métrica é dada por ds^2, que não é para ser entendida como "um número pequeno elevado ao quadrado", mas sim como um objeto por si só, que dita as relações geométricas de ângulos e "distâncias" nesse espaço-tempo. Em coordenadas cartesianas para um espaço-tempo plano, sua métrica é dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2$$

onde $d\vec{x}^2$ representa $dx^2 + dy^2 + dz^2$ para o espaço tridimensional (notação boba). Novamente, dt e dx não representam "infinitesimais", mas podem ser entendidos como tal num primeiro momento; mais adiante, pretendemos esclarecer o real significado matemático que esses objetos carregam, quando formos descrever a métrica de forma tensorial[1].

[1]Uma generalização de matrizes, ou melhor, de vetores; nada assustador.

Uma forma conveniente de escrever a métrica é usando notação de índices (c.f. § Convenções e Notação, p. 1):

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

onde $dx^0 = dt$; dx^i correspondendo a dx, dy, dz para $i = 1, 2, 3$, respectivamente; e $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

1.2. Invariância do Comprimento de Arco

Em espaços euclidianos, integramos um **elemento de arco*** ds ao longo de uma curva C para obtermos o **comprimento de arco** dessa curva. De forma completamente análoga, podemos extender essa noção para espaços-tempos:

$$S \equiv \int_C ds. \tag{1}$$

E as semelhanças continuam (por enquanto): assim como distâncias são preservadas em espaços euclidianos ao mudarmos de sistema de coordenadas, o comprimento de um arco no espaço-tempo é o mesmo, independente do sistema de coordenadas adotado, ou seja:

$$S = S' \tag{2}$$

para a mesma curva C nesse espaço-tempo, e para quaisquer sistemas de coordenadas que se relacionam por transformações de Lorentz ("com linha" e "sem linha" na equação 2 denotam referenciais diferentes).

Para provar a afirmação em (2), é suficiente mostrar que o elemento de arco ds é o mesmo que seu correspondente ds' no outro referencial em cada ponto da curva. Mas como temos posse apenas da métrica, e sabemos que, de uma forma padronizada (mesmo que até então desconhecida)[2], os elementos de arco ds e ds' são obtidos a partir das suas respectivas métricas, basta mostrar que:

$$ds^2 = ds'^{\,2}.$$

Sendo essa uma condição suficiente para provar a invariância do arco de uma curva situada no espaço-tempo. Considere então a métrica descrita pelos referenciais sem linha e com linha:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 \quad ; \quad ds'^{\,2} = -dt'^{\,2} + dx'^{\,2}. \tag{3}$$

Para encontrar a relação entre as métricas, seria bom obter as relações entre os sistemas de coordenadas (t,x) e (t',x'), pois conseguiremos relacionar $dt'^{\,2}$ com dt^2 e $dx'^{\,2}$ com dx^2.

Para isso, vamos usar a forma explícita da transformação de Lorentz que faz a passagem de um referencial que observa os eventos do espaço-tempo[3] com as coordenadas (t, x) para um outro que os observa com as coordenadas $(\mathrm{t}', \mathrm{x}')$.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \mathrm{v} \\ -\gamma \mathrm{v} & \gamma \end{pmatrix} \tag{4}$$

[2]Mais adiante mostraremos como obter o elemento de arco a partir da métrica em espaços-tempos; adiantamos que não é tão trivial quanto em espaços euclidianos, onde basta tirar a raiz quadrada da métrica. O espaço-tempo guarda algumas nuâncias...

[3]Tomamos um espaço-tempo bidimensional (uma coordenada temporal, outra espacial) por simplicidade.

*Obtido a partir da métrica euclidiana: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, que é a raiz quadrada da métrica euclidiana.

onde v é o módulo da velocidade relativa entre os dois referenciais, e γ é o fator de Lorentz, dado por $\gamma = (1 - \mathrm{v}^2)^{-1/2}$. Em notação de índices, podemos expressar a relação entre os dois sistemas de coordenadas na forma:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} x^{\mu}$$

que é basicamente a atuação da matriz de Λ nos vetores coluna coordenados escrita em termos das componentes (c.f. § Convenções e Notação, p. 1).

Assim, obtemos:

$$\left.\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \mathrm{v}x) \\ x' &= \gamma(-\mathrm{v}t + x) \end{aligned}\right\rangle \quad \begin{aligned} dt' &= \gamma(dt - \mathrm{v}dx) \\ dx' &= \gamma(-\mathrm{v}dt + dx) \end{aligned} \;\therefore \begin{cases} dt'^{\,2} = \gamma^2(dt^2 + \mathrm{v}^2dx^2 - 2\mathrm{v}dtdx) \\ dx'^{\,2} = \gamma^2(\mathrm{v}^2dt^2 + dx^2 - 2\mathrm{v}dtdx) \end{cases}$$

Inserindo essas expressões na equação (3) para o referencial com linha, concluímos:

.

$$\begin{aligned} ds'^{\,2} &= -dt'^{\,2} + dx'^{\,2} \\ &= -\gamma^2(dt^2 + \mathrm{v}^2dx^2 - \cancel{2\mathrm{v}dtdx}) + \gamma^2(\mathrm{v}^2dt^2 + dx^2 - \cancel{2\mathrm{v}dtdx}) \\ &= \underbrace{\gamma^2(1 - \mathrm{v}^2)}_{=1}(-dt^2 + dx^2) \\ &= -dt^2 + dx^2 \\ &= ds^2 \end{aligned} \qquad \square$$

Com isso, provamos que a métrica é idêntica para referenciais que se relacionam por transformações de Lorentz[4], o que é suficiente para provar a afirmação em (2).

Por último, no caso particular em que essa curva C é uma reta ligando dois pontos fixos $A = (t_A, x_A)$ e $B = (t_B, x_B)$ no espaço-tempo, escrevemos:

$$\Delta S_{AB}{}^2 = -(t_B - t_A)^2 + (x_B - x_A)^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 \tag{5}$$

e chamamos essa quantidade de **intervalo** entre os dois eventos A e B. Como foi provado que, para uma mesma curva C ligando dois pontos, o comprimento de arco é invariante por Lorentz, fica evidente que o intervalo entre dois eventos também é invariante por Lorentz, por se tratar de um caso particular do comprimento de arco.

Passada essa parte mais matemática sobre a invariância do comprimento de arco no espaço-tempo, vamos agora à interpretação física desse resultado, assim como a interpretação do próprio comprimento de arco S, e também a do intervalo ΔS.

1.3. A Física do Intervalo

2. Introdução ao Princípio Variacional

3. Lagrangiana do Campo Eletromagnético

[4]O termo *referenciais* é usado, muitas vezes, de forma equivalente a *sistemas de coordenadas*, pois o segundo é a descrição matemática do conceito físico do primeiro em relatividade.

Referências

[1] Albert Einstein. "Zur Elektrodynamik bewegter Körper". Em: *Annalen der Physik* 322 (1905), pp. 891–921. DOI: `10.1002/andp.19053221004`.