

DM547 januar 2019 (uddrag)

Facitliste

(Korrekte svar er markeret med fed skrift)

Spørgsmål 1 (11%)

Hvilke af følgende udsagn er sande?

Which of the following propositions are true?

Svar 1.a: $\exists n \in \mathbb{Z} : n^2 + 1 = 82$

Svar 1.b: $\exists n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} : n + k = n - k$

Svar 1.c: $\forall n \in \mathbb{Z} : n^2 \in \mathbb{N}$

Svar 1.d: $\forall n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{N} : \sqrt{n+k} \in \mathbb{N}$

Svar 1.e: $\forall n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{Z} : n \neq k$

Svar 1.f: $\exists n \in \mathbb{N} : 1^n \neq 1$

Svar 1.g: $\exists! n \in \mathbb{Z} : n^2 = 9$

Svar 1.h: $\exists n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n^2 + k^2 = 17$

Spørgsmål 2 (11%)

Hvilke udsagn er ækvivalente med $\neg(p \vee q)$?

Which propositions are equivalent to $\neg(p \vee q)$?

Svar 2.a: $p \Rightarrow q$

Svar 2.b: $\neg p \Rightarrow q$

Svar 2.c: $p \oplus q$

Svar 2.d: $\neg p \wedge \neg q$

Svar 2.e: $\neg(p \Rightarrow q)$

Svar 2.f: $\neg(\neg p \Rightarrow q)$

Svar 2.g: $\neg p \wedge (p \oplus \neg q)$

Svar 2.h: $(\neg p \vee q) \wedge \neg q$

Spørgsmål 3 (10%)

Denne opgave handler om at bevise, at $3^n - 1$ er et lige tal, for alle $n \in \mathbb{N}$. Hvilke af nedenstående argumenter udgør gyldige induktionsbeviser?

This question is about proving that $3^n - 1$ is an even number, for all $n \in \mathbb{N}$. Which of the below arguments constitute valid proofs by induction.

Svar 3.a: Basis: $3^0 - 1 = 0$ er et lige tal.

Induktionsskridt: For $n \geq 1$ gælder:

$$\begin{aligned} 3^n - 1 &= 3 \cdot 3^{n-1} - 1 \\ &= 3 \cdot (3^{n-1} - 1) + 2 \\ &= 3 \cdot 2k + 2, \text{ hvor } k \in \mathbb{Z}, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= 2 \cdot (3k + 1), \text{ hvor } 3k + 1 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Svar 3.b: Basis: $3^0 - 1 = 0$ er et lige tal.

Induktionsskridt: For $n \geq 0$ gælder:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} - 1 &= 3 \cdot 3^n - 1 \\ &= 3 \cdot (3^n - 1) + 2 \\ &= 3 \cdot 2k + 2, \text{ hvor } k \in \mathbb{Z}, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= 2 \cdot (3k + 1), \text{ hvor } 3k + 1 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Svar 3.c: Basis: $3^0 - 1 = 0$ og $3^1 - 1 = 2$ er lige tal.

Induktionsskridt: For $n \geq 2$ gælder:

$$\begin{aligned} 3^n - 1 &= 3 \cdot 3^{n-1} - 1 \\ &= 3 \cdot (3^{n-1} - 1) + 2 \\ &= 3 \cdot 2k + 2, \text{ hvor } k \in \mathbb{Z}, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= 2 \cdot (3k + 1), \text{ hvor } 3k + 1 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Svar 3.d: Basis: $3^2 - 1 = 8$ er et lige tal.

Induktionsskridt: For $n \geq 3$ gælder:

$$\begin{aligned} 3^n - 1 &= 3 \cdot 3^{n-1} - 1 \\ &= 3 \cdot (3^{n-1} - 1) + 2 \\ &= 3 \cdot 2k + 2, \text{ hvor } k \in \mathbb{Z}, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= 2 \cdot (3k + 1), \text{ hvor } 3k + 1 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Svar 3.e: Basis: $3^0 - 1 = 0$ er et lige tal.

Induktionsskridt: For $n \geq 0$ gælder:

$$\begin{aligned} 3^n - 1 &= 2k, \text{ hvor } k \in \mathbb{Z} && \Leftrightarrow \\ 3^n &= 2k + 1, \text{ hvor } k \in \mathbb{Z} && \Leftrightarrow \\ 3^{n+1} &= 6k + 3, \text{ hvor } k \in \mathbb{Z} && \Rightarrow \\ 3^{n+1} - 1 &= 2 \cdot (3k + 1), \text{ hvor } 3k + 1 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Svar 3.f: Basis: $3^0 - 1 = 0$ er et lige tal.

Induktionsskridt: For $n \geq 1$ gælder:

$$\begin{aligned} 3^n - 1 &= \frac{1}{3} \cdot 3^{n+1} - 1 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2k, \text{ hvor } k \in \mathbb{Z}, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= 2 \cdot \frac{k}{3}, \text{ hvor } \frac{k}{3} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Spørgsmål 4 (10%)

Lad $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, c)\}$ være en relation på mængden $\{a, b, c\}$. Hvilke udsagn er sande?

Let $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, c)\}$ be a relation on the set $\{a, b, c\}$. Which statements are true?

Svar 4.a: R er *ikke* reflektiv.

R is not reflexive.

Svar 4.b: R er symmetrisk.

R is symmetric.

Svar 4.c: R er anti-symmetrisk.

R is anti-symmetric.

Svar 4.d: R er transitiv.

R is transitive.

Svar 4.e: R er *ikke* en ækvivalensrelation.

R is not an equivalence relation.

Svar 4.f: R er en partiel ordning.

R is a partial order.

Spørgsmål 5 (4%)

Angiv den transitive lukning af relationen $\{(a, b), (c, d), (d, e)\}$.

Select the transitive closure of the relation $\{(a, b), (c, d), (d, e)\}$.

Svar 5.a: $\{\}$

Svar 5.b: $\{(a, b), (c, d), (d, e)\}$

Svar 5.c: $\{(a, b), (c, d), (c, e), (d, e)\}$

Svar 5.d: $\{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c), (d, e), (e, d)\}$

Svar 5.e: $\{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c), (c, d), (d, d), (d, e)\}$

Svar 5.f: $\{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e)\}$

Svar 5.g: $\{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, a)\}$