



Подавление шума на изображениях с применением нейронных сетей, использующих физическую информацию

Кондратьева Александра Федоровна

Laboratory of Mathematics Method of Image Processing
Department of Computational Mathematics and Cybernetics
Lomonosov Moscow State University

Постановка задачи

$u(x, y)$ – искомое изображение

$u_0(x, y)$ – известное зашумленное изображение

$\eta(x, y)$ – аддитивный Гауссовский шум

$$u_0(x, y) = u(x, y) + \eta(x, y).$$

Вариационная задача: $u_R = \arg \min_u (||u - u_0||^2 + \lambda R(u))$,

$$R(u) = \int_{\Omega} \sqrt{u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yx}^2 + u_{yy}^2} \, dx \, dy.$$

При решении возникает дифференциальное уравнение четвертого порядка, которое решается с помощью нейронной сети, использующей физическую информацию.

Вариационная задача

Нужно минимизировать функционал

$$E(u) = \int_{\Omega} \sqrt{u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yx}^2 + u_{yy}^2} dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u - u_0| dx dy.$$

Необходимое условие минимума функционала – уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$L(\lambda, u) = \int_{\Omega} \sqrt{u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yx}^2 + u_{yy}^2} dx dy + \frac{\lambda}{2} \left(\int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy - \sigma^2 \right).$$

$$\forall (x, y) \in \Omega: \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial u} v = 0 \quad \forall v. \end{cases}$$

Вариационная задача

Решая систему, получаем дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\left(\frac{u_{xx}}{|D^2 u|} \right)_{xx} + \left(\frac{u_{xy}}{|D^2 u|} \right)_{yx} + \left(\frac{u_{yx}}{|D^2 u|} \right)_{xy} + \left(\frac{u_{yy}}{|D^2 u|} \right)_{yy} + \lambda(u - u_0) = 0,$$

где $|D^2 u| = \sqrt{u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yx}^2 + u_{yy}^2} dx dy$.

Граничные условия:

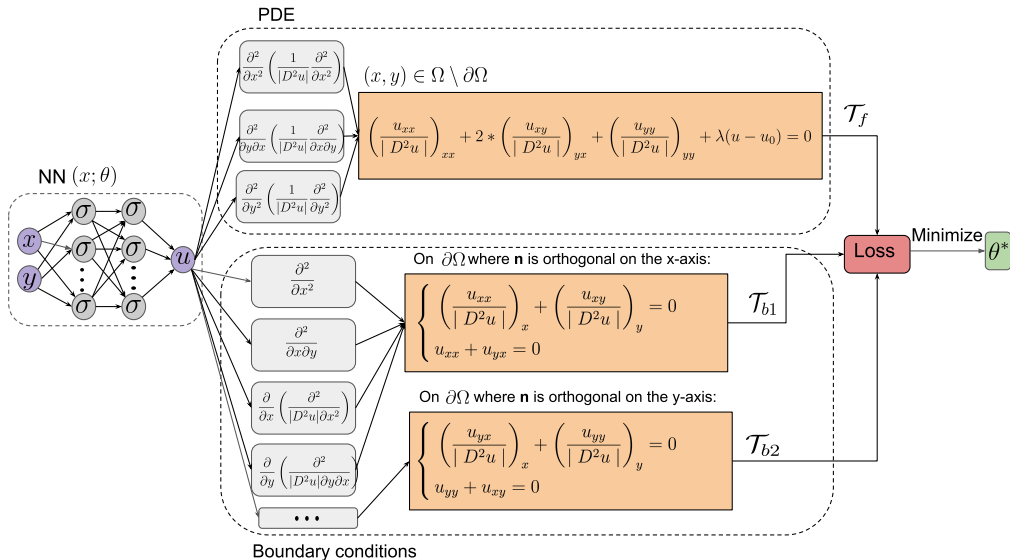
$$\begin{cases} \left(\frac{u_{xx}}{|D^2 u|} \right)_x + \left(\frac{u_{xy}}{|D^2 u|} \right)_y = 0 \\ u_{xx} + u_{yx} = 0 \end{cases}$$

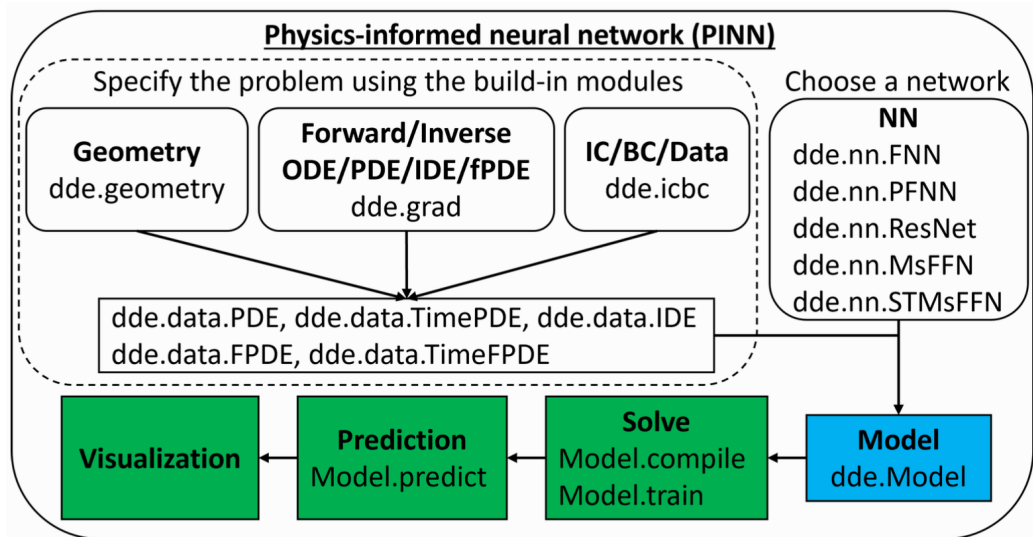
на границе $\partial\Omega$, где нормаль n ортогональна оси x (левая и правая границы изображения).

$$\begin{cases} \left(\frac{u_{yx}}{|D^2 u|} \right)_x + \left(\frac{u_{yy}}{|D^2 u|} \right)_y = 0 \\ u_{yy} + u_{xy} = 0 \end{cases}$$

на границе $\partial\Omega$, где нормаль n ортогональна оси y (верхняя и нижняя границы изображения).

Physics-informed Neural Network





DeepXDE: Forward Problem

- ▶ FNN: $[2] + [40] * 6 + [1]$
- ▶ Геометрия: облако точек
- ▶ Функция активации: silu
- ▶ Оптимизатор: adam
- ▶ Ресамплинг точек каждые 50 итераций.

Результаты



Рис.: Baboon, 200×200



Рис.: Lena, 200×200 , $\lambda = 1e - 6$