ACT-2001 Introduction à l'actuariat 2

Révision des chapitres 1 et 2

Dominik Chevalier, Alexandre Dubeau et Eve Busque

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

20 février 2024

Avant-propos

Avant-propos

Sources spécifiques pour le contenu des diapos

- Site du cours sur `monportail.ulaval`.

Livre de référence

- [Cossette and Marceau, 2021].

Diapositives

- Logiciel : LaTeX
- Package : Beamer
- Éditeurs : Overleaf

Calculs et illustrations

- Toutes les calculs et les illustrations ont été réalisés dans le langage R grâce au logiciel GNU R mis à disposition par le R Project.
- Les codes R ont été conçus dans l'environnement de développement intégré RStudio.

Avant-propos

Les diapositives contiennent du matériel pour le cours Act-2001 qui sera présenté pendant les ateliers au semestre H2023.

Le document de référence est [Cossette and Marceau, 2021].

Table des matières I

Logiciel R

ActuaR est le principal paquetage utilisé pour le cours. Lois continues paramétriques et logiciel R :

- Loi uniforme : `dunif()`, `punif()`, `qunif()`, `runif()` ;
- Loi exponentielle : `dexp()`, `pexp()`, `qexp()`, `rexp()` ;
- Loi gamma : `dgamma()`, `pgamma()`, `qgamma()`, `rgamma()` ;
- Loi lognormale : `dlnorm()`, `plnorm()`, `qlnorm()`, `rlnorm()`.
- Loi normale : `dnorm()`, `pnorm()`, `qnorm()`, `rnorm()`.
- Loi pareto : `dpareto()`, `ppareto()`, `qpareto()`, `rpareto()`.

Lois discrètes paramétriques et logiciel R :

- Loi Poisson : `dpois()`, `ppois()`, `qpois()`, `rpois()` ;
- Loi binomiale négative : `dnbinom()`, `pnbinom()`, `qnbinom()`, `rnbinom()`.
- Loi binomiale : `dbinom()`, `pbinom()`, `qbinom()`, `rbinom()`.

Chapitre 1
Notions supplémentaires sur les probabilités

1. FGM :
   - Définir l'équation de la FGM de fonctions discrètes et l'évaluer
   - Reconnaître une loi à partir d'une FGM
   - Trouver la loi d'une somme de v.a. iid à partir de la FGM
2. FGP :
   - Identifier le support et la fmp d'une loi à partir de sa FGP
   - Évaluer :
     - Sa fonction de répartition
     - Son espérance
     - Sa stop-loss
     - Sa FGM
     - Sa mesure entropique
     - Son espérance tronquée
     - Son coefficient d'asymétrie ou coefficient d'aplatissement
     - ...
   - Identifier une loi connue à partir de sa FGP

Note : Théorème d'unicité et de convolution de FGM, FGP, TLS + comportement lorsque $n \to \infty$

3. Espérances tronquées :
   - Prouver son équation pour des lois connues
   - L'évaluer
   - L'interpréter
   - Prouver qu'elle peut être définie selon la fonction quantile
4. Fonction stop-loss :
   - Prouver qu'elle peut être définie selon la fonction de survie
   - La calculer pour une loi discréte quelconque
   - La calculer pour une loi discrète connue (Poisson, Binomiale, Binomiale Négative)
   - La calculer pour une loi continue connue (avec l'annexe)

5. Fonction quantile :
   - Inverser une fonction de répartition pour obtenir la fonction quantile
   - Calculer numériquement la fonction quantile de lois connues
   - L'interpréter.
   - Utiliser sa définition pour déterminer sa valeur à partir de sa fonction de répartition correspondante
   - Preuve du théorème de la fonction quantile (Important pour les 3 exams ! ! !)

Chapitre 2
Mesures de risque, primes et mutualisation des risques

1. Assurance : comprendre les notions pour éviter de *bugger* à l'examen sur un concept actuariel.
2. Principe de la valeur espérée :
   - Son équation : $\psi_\eta(X) = (1+\eta)E[X], \quad \eta > 0.$
   - Impact d'une marge de risque positive et négative (en mutualisation)
   - Déterminer la marge de risque à partir de certaines valeurs
   - Comportement de la probabilité de ruine lorsque $n \to \infty$ selon la marge de risque
   - Prouver quelles propriétés souhaitables qui sont respectées
3. Principe de l'écart type :
   - Son équation : $\psi(X) = E[X] + \theta\sqrt{Var(X)}, \quad \theta > 0.$
   - Le déduire à partir de l'ingalité de Cheby
   - Déterminer θ selon κ
   - Prouver quelles propriétés souhaitables qui sont respectées

4 Mesure VaR :

- Définition
- Interprétation :
  Probabilité que la v.a. X prenne une valeur supérieure à la mesure VaR est plus petite ou égale à $1-\kappa$.
- Calculer pour une loi discrète (autant à la main qu'à l'ordinateur) :
  - ★ Rappel info cas discret : `x[min(which(FX(x) >= u])`
  - ★ Rappel info cas continu (si ce n'est pas une loi fournie par le paquetage `actuar`) : `optimize` après avoir trouvé les bornes (voir plus loin)
- Déterminer analytiquement la VaR de certains lois (en inversant la fonction de répartition lorsque c'est possible)
- Propriétés souhaitables de la VaR et leurs preuves

5. Mesure TVaR :
   - Définition : $\psi(X) = TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\mathrm{d}u$
   - Interprétation :
     Moyenne des valeurs de X (ou sa fonction quantile) supérieure à la VaR de X à κ.
   - Savoir ses quatre définitions et comment les prouver :
     - Avec la sl : $TVaR_\kappa\left(X\right) = VaR_\kappa\left(X\right) + \frac{1}{1-\kappa}\Pi_X(VaR_\kappa(X))$
     - Avec l'esprérance tronquée :
       $TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}E[X \times \mathbb{1}_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] + \frac{1}{1-\kappa}VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)$.
     - Avec la convexité :
       $TVaR_\kappa(X) = \inf_{x\in\mathbb{R}_+}\{x + \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(x)\} = \inf_{x\in\mathbb{R}_+}\{\phi(x)\},\ \ \kappa \in (0,1)$.
     - Avec le sup : $TVaR_\kappa\left(X\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=\lfloor n\kappa\rfloor+1}^{n} S^{[j]}}{\lfloor n(1-\kappa)\rfloor}$ (p.s.),
   - Calculer la TVaR pour des lois connues continues et pour toute loi discrète
   - Avantage de la TVaR vs VaR : sous-additivité !
   - Propriétés souhaitables.
   - Utiliser sa définition

6. Sommes de v.a aléatoires (produit de convolution) :
   - v.a discrètes : être capable d'effectuer la convolution autant à la main qu'à l'informatique
   - v.a continues : convolution à la main (ne peut que vous donner une fonction vérifiée)
   - Utilisation des FGM et TLS pour convolution de v.a. avec théorèmes d'unicitié et de convolution
   - Exemple de sommes de v.a. (savoir le résultat et comment prouver) :
     - Gamma (iid ou non), Géo et Binomiale Négative (iid ou non), Poisson.

Remarque

Atelier 2 : Compréhension de la FGP (cas discret) et de la somme de variables aléatoires.

UNIVERSITÉ LAVAL

7. Mutualisation :
   - Caractéristiques de W_n
     - Loi de W_n
     - $E[W_n]$, $Var(W_n)$, $VaR_\kappa(W_n)$, $TVaR_\kappa(W_n)$
     - Comportement lorsque $n \to \infty$ + n c'est quoi ?
   - Convergence en distribution vs convergence en probabilité (probabilité implique aussi distribution, mais pas toujours l'inverse !)
8. Loi faible des grands nombres :
   - Preuve du théorème
   - Interprétation du théorème en contexte de mutualisation
   - Inégalité de Cheby et de Markov
   - Ce que le théorème implique pour W_n et sa preuve ($W_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Z$)

9. Route 138 ; refaire l'exemple au complet et le comprendre :
   - Sommes de Gamma donne quoi
   - Prime d'équivalence : impact d'une mesure de risque (η) positive et négative pour la survie d'une compagnie d'assurance.
   - Probabilité de ruine et valeur lorsque $n \to \infty$ selon η
   - Jouer avec $\Pr(S_n > u + n\psi(X))$
10. Probabilité de ruine
    - Utilité : démontrer la nécessité que la prime demandée pour un contrat comprenne une marge de sécurité positive.
    - La calculer informatiquement
    - Son comportement lorsque le nombre de contrats tend vers l'infini
    - Sa preuve

Remarque

Atelier 4 : Exemple inondation très important ! ! !

11. Connaître les propriétés, les interpréter et les démontrer pour les différentes mesures de risque :
    - VaR, TVaR, principe de l'écart type, principe de la valeur espérée, mesure entropique, **mesure quelconque**, ...

1. Invariance à la translation : $\psi\left(X+a\right)=\psi\left(X\right)+a.$
2. Monotonicité : $\psi\left(X_1\right)\leq\psi\left(X_2\right).$ si $\Pr\left(X_1\leq X_2\right)=1.$
3. Homogénéité : $\psi\left(aX\right)=a\psi\left(X\right).$
4. Sous-additivité :$\psi\left(X_1+\cdots+X_n\right)\leq\psi\left(X_1\right)+\cdots+\psi\left(X_n\right).$
   Note : Bénéfice de mutualisation toujours lié à la sous-additivtité
5. Convexité : $\psi(\alpha X+(1-\alpha)X')\leq\alpha\psi(X)+(1-\alpha)\psi_\kappa(X'),\ \ \alpha\in(0,1).$

Mesure monétaire si 1 et 2 sont respectées.

Mesure cohérente si une mesure monétaire ET 3 et 4 sont respectées.

Mesure convexe si monétaire et 5 est respectée.

1. Marge de risque non excessive : $\psi(X) \leq b$
2. Marge de risque positive (Introduite) : $\psi(X) \geq E[X]$
3. Marge de risque justifiée : $\psi(a) = a$
4. Sous-additivité :$\psi(X_1 + \cdots + X_n) \leq \psi(X_1) + \cdots + \psi(X_n)$.
   Note : Bénéfice de mutualisation toujours lié à la sous-additivtité
5. Convexité : $\psi(\alpha X + (1-\alpha)X') \leq \alpha\psi(X) + (1-\alpha)\psi_\kappa(X'), \ \ \alpha \in (0,1)$.

Connaître les propriétés, les interpréter et les démontrer pour les différentes mesures de risque :

- VaR, TVaR, principe de l'écart type, principe de la valeur espérée, mesure entropique, **mesure quelconque**, ...

12 Approche top-down :

- $VaR_\kappa(W_n)$, $TVaR_\kappa(W_n)$, Cantelli
- Borne de Chebychev (la calculer)
- Trouver le plus petit n tq la borne de Chebychev est égale à une valeur.

Aperçu des outils utilisés en R

Aperçu des outils utilisés en R

Remarque

ATTENTION : Cette liste n'a pas la prétention d'être exhaustive, mais elle regroupe la plupart des outils en R utilisés dans le cours jusqu'à maintenant.

1. Évaluer les quantités d'intérêts des principales lois de probabilité (q, d, p, r [loi]).
2. Obtenir un vecteur des masses de probabilité d'un loi discrète pour tout son support.
3. Prendre avantage de l'organisation vectorielle des calculs en R pour obtenir ces valeurs.
   - C'est particulièrement utile dans le cas d'un mélange discret et dans l'évaluation des espérances.

Aperçu des outils utilisés en R (Suite)

4. Évaluer une espérance, une espérance tronquée, une fonction stop-loss, un excès-moyen, une fonction génératrice des moments, une mesure entropique, etc.
   - Cas discret : Évaluer directement en R en utilisant la définition des quantités voulues
   - Cas continu : Coder les fonctions (et/ou utiliser celles déjà disponibles) en se référant à l'annexe des examens.
5. Évaluer une $VaR_\kappa(X)$.
   - Cas discret : `x[min(which[cumsum(fx) >= u])]`
   - Cas continu : `optimize(function(x) abs(FX(x) - u), c(0, 1500))$min`
     Bornes du optimize à déterminer avant en évaluant $FX(x)$
6. Évaluer une $TVaR_\kappa(X)$.
   - Cas discret : Souvent plus facile avec la définition qui implique la stop-loss.
   - Cas continu : Expressions dans l'annexe
7. Effectuer les validations appropriées.
   - Une fmp somme à 1
   - $\pi_X(0) = E[X]$
   - $\ldots$

Aperçu des outils utilisés en R (suite)

8. Faire un produit de convolution. (2 méthodes vues en classe)
   - En définissant les domaines depuis 0 avec un `sapply`.
   - Avec la fonction `outer` (plus flexible)
9. Définir, évaluer et représenter graphiquement la probabilité de ruine en fonction du niveau de prime ou de capital initial.
10. Produire des graphiques des mesures de risque et commenter sur la mutualisation des risques.
11. Porter attention à la paramétrisation par des lois de probabilité en R. Se référer aux rubriques d'aide (disponibles pendant l'examen) et savoir les utiliser pour ne pas avoir à tout retenir.
12. Bien lire la remarque au début de cette section.

Aperçu des outils utilisés en R (Suite)

Fonctions utiles :

- `mean`
- `var`
- `cumsum`
- `pmax`
- `min`
- `which`
- `sapply` et `apply`
- `optimize`
- `q<loi>`, `r<loi>`, `p<loi>` et `d<loi>`
- `curve`
- `plot`
- `outer`

Annexe : Liste des preuves

Annexe : Liste des preuves

UNIVERSITÉ LAVAL

Remarque

ATTENTION : Cette liste n'a pas la prétention d'être exhaustive.

1. $\mathcal{P}_X(t) = t^c$ pour une v.a. X dégénérée à C.
2. $\mathcal{L}_X(t) = e^{-ct}$ pour une v.a. X dégénérée à C.
3. $E[X] = \int_0^\infty \bar{F}_X(x)\mathrm{d}x$, pour une v.a. positive et continue.
4. $E[X] = h\sum\limits_{k=0}^{\infty} \bar{F}_X(kx)\mathrm{d}x$, pour une v.a. discrète définie sur le support $\{0, 1h, 2h, \ldots\}$.
5. $E[X] = E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] + E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right]$.
6. Espérances tronquées des lois exponentielle, gamma, normale, log-normale, Pareto, log-logistique, Burr, Weibull, Erlang généralisée (en appliquant 5, au besoin).
7. $\pi_X(d) = E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right] - d\bar{F}_X(d)$, pour X une v.a. positive et continue.
8. $\pi_X(d) = \int_d^\infty \bar{F}_X(X)\,\mathrm{d}x$, pour X une v.a. positive et continue.

Annexe : Liste des preuves (Suite)

9. $E[\min(X,d)] = E[X \times 1_{\{X \leq d\}}] + d\bar{F}_X(d) = \int_0^d \bar{F}_X(x)\mathrm{d}x$.
10. $\pi_X(d) = \sum\limits_{k=d}^{\infty} \Pr[X > k]$, pour X une v.a. discrète et continue.
11. Corrolaire de 10 : $\Pr[X > k] = \pi_X(k) - \pi_X(k+1)$, pour X une v.a. discrète et continue.
12. $E[\min(X,d)] = \sum\limits_{k=0}^{d} kf_X(k) + d\bar{F}_X(d) = \sum\limits_{k=0}^{d-1} \bar{F}_X(d)$.
13. $E[X] = E[\min(X,d)] + \pi_X(d)$.
14. Théorème de la fonction quantile : $F_X^{-1}(U) \sim X$.
15. Transformation intégrale de la probabilité : $F_X(X) \sim \mathcal{U}(0,1)$.
16. Corrolaire de 14 : $E[X] = \int_0^1 VaR_u(X)\mathrm{d}u$.
17. Déduction du principe de l'écart-type via l'inégalité de Cantelli-Chebyshev.
18. $TVaR_\kappa(X) = \pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X)$.

Annexe : Liste des preuves (Suite)

19. $TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] + \frac{1}{1-\kappa}VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)$.
20. $LTVaR_\kappa(X) = \frac{E[X]-(1-\kappa)TVaR_\kappa(X)}{\kappa}$.
21. Expression analytique de la $TVaR$ pour les lois exponentielle, gamma, Weibull, log-logistique, Burr, Erlang généralisée.
22. Atelier 4 : Preuve que la probabilité de ruine tend vers 1 si la prime chargée est inférieure à l'espérance.
23. Atelier 4 : Preuve que la probabilité de ruine tend vers 0 si la prime chargée est supérieure à l'espérance.
24. Atelier 4 : Espérance, variance, fonction génératrice des moments, VaR et fonction stop-loss de la loi Weibull.
25. Atelier 4 : Espérance, variance, VaR et fonction stop-loss de la loi Burr.
26. Atelier 4 : Espérance, variance, VaR et fonction stop-loss de la loi log-logistique.
27. Atelier 4 : TLS, fgm, espérance, variance, fonction de densité et fonction de répartition de la loi Erlang généralisée.

Annexe : Liste des preuves (Suite)

28. Résultats lorsque la VaR et la $TVaR$ sont multipliées par une constante négative.
29. $\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{L}_{X_1}(t) \times \cdots \times \mathcal{L}_{X_n}(t)$.
30. $\mathcal{P}_S(t) = \mathcal{P}_{X_1}(t) \times \cdots \times \mathcal{L}_{P_n}(t)$.
31. Pour $W_n = \frac{S_n}{n}$, $\mathcal{L}_{W_n}(t) = \left[\mathcal{L}_X(\frac{t}{n})\right]^n$.
32. Preuves des inégalités de Markov et de Chebychev.
33. Preuve de la loi faible des grands nombres dans l'hypothèse de variance finie (Khintchine).
34. Pour une mesure de risque ψ qui satisfait la propriété de convexité,

$$\psi(W_n) \leq \psi(W_{n-1}) \leq \cdots \leq \psi(W_1).$$

35. Une fonction concave ϕ sur $\mathbb{R}_+$ avec $\phi(0) = 0$ est sous-additive.
36. Une fonction convexe ϕ et homogène d'ordre 1 est aussi sous-additive.

Annexe : Liste des preuves (Suite)

37. La VaR satisfait les propriétés d'invariance à la translation, d'homogénéité, de monotonicité. Elle n'introduit pas une marge de risque excessive, une marge de sécurité injustifiée et une marge de risque positive. Elle ne satisfait pas les propriétés de sous-additivité et de convexité.
38. La $TVaR$ satisfait les propriétés d'invariance à la translation, de monotonicité, d'homogénéité, de sous-additivité, de convexité. Elle n'introduit pas une marge de risque excessive et une marge de risque injustifiée. Elle introduit cependant une marge de risque positive.
39. La mesure entropique satisfait les propriétés d'invariance à la translaction, de monotonicité, de convexité. Elle ne satisfait pas les propriétés d'homogénéité et de sous-additivité. Elle introduit une marge de risque positive, mais n'introduit pas une marge de risque excessive et une marge de risque injustifiée.
40. De la même façon qu'en 37, 38 et 39, propriétés satisfaites et non satisfaites du principe de la valeur espérée et de l'écart-type.

Annexe : Liste des preuves (Suite)

41 Particulièrement : Preuve de la sous-additivité de la $TVaR$.

Références

Références I

Cossette, H. and Marceau, E. (2021).
Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives.
Monographie.