ACT-2001 Introduction à l'actuariat 2

Atelier du 15 janvier 2025 (Semaine 1)

Étienne Marceau
avec Jérémie Barde, Ève Busque, Alexandre Dubeau et Philippe Leblanc

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

2025-01-15

Avant-propos

Avant-propos

Sources spécifiques pour le contenu des diapos

- Site du cours sur `monportail.ulaval`.

Livre de référence

- [Cossette and Marceau, 2023].

Diapositives

- Logiciel : LaTeX
- Package : Beamer
- Éditeurs : Overleaf

Calculs et illustrations

- Toutes les calculs et les illustrations ont été réalisés dans le langage R grâce au logiciel GNU R mis à disposition par le R Project.
- Les codes R ont été conçus dans l'environnement de développement intégré RStudio.

Avant-propos

Les diapositives contiennent du matériel pour le cours Act-2001 qui sera présenté pendant les ateliers au semestre H2024.

Le document de référence est [Cossette and Marceau, 2023].

Table des matières I

Table des matières II

Logiciel R

Lois continues paramétriques et logiciel R :

- Loi uniforme : `dunif()`, `punif()`, `qunif()`, `runif()` ;
- Loi exponentielle : `dexp()`, `pexp()`, `qexp()`, `rexp()` ;
- Loi gamma : `dgamma()`, `pgamma()`, `qgamma()`, `rgamma()` ;
- Loi lognormale : `dlnorm()`, `plnorm()`, `qlnorm()`, `rlnorm()`.
- Loi normale : `dnorm()`, `pnorm()`, `qnorm()`, `rnorm()`.
- Loi pareto : `dpareto()`, `ppareto()`, `qpareto()`, `rpareto()`.

Lois discrètes paramétriques et logiciel R :

- Loi Poisson : `dpois()`, `ppois()`, `qpois()`, `rpois()` ;
- Loi binomiale négative : `dnbinom()`, `pnbinom()`, `qnbinom()`, `rnbinom()`.
- Loi binomiale : `dbinom()`, `pbinom()`, `qbinom()`, `rbinom()`.

Espérance d'une v.a. positive

Espérance d'une v.a. positive

En actuariat, la notion d'espérance est importante.

Par exemple, si la v.a. X représente les coûts pour un contrat d'assurance pour la prochaine année, alors l'espérance de X correspond à la prime pure de ce contrat.

Généralement, la prime chargée pour le contrat est supérieure à l'espérance de X.

Espérance d'une v.a. positive

Lorsque X est une v.a. continue avec une fonction de densité f_X, l'espérance de X est définie par

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Espérance d'une v.a. positive

On a le résultat suivant pour une v.a. continue positive.

Proposition 1

Soit une v.a. X continue positive dont l'espérance existe. Alors, on a

$$E[X] = \int_0^\infty \overline{F}_X(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Espérance d'une v.a. positive

Démonstration.

De (1), on a

$$E[X] = \int_0^\infty y f_X(y)\mathrm{d}y = \int_0^\infty \int_0^y f_X(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

qui devient

$$E[X] = \int_0^\infty \int_x^\infty f_X(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^\infty \overline{F}_X(x)\mathrm{d}x.$$

□

Espérance d'une v.a. positive

On a aussi un résultat similaire pour une v.a. discrète définie sur un support arithmétique $\{0, 1h, 2h, \dots\}$.

Proposition 2

Soit une v.a. X *discrète définie sur le support* $\{0, 1h, 2h, \dots\}$ *dont l'espérance existe. Alors, on a*

$$E[X] = h \sum_{k=0}^{\infty} \overline{F}_X(kh). \tag{3}$$

Espérance d'une v.a. positive

Démonstration.

On déduit

$$E[X] = \sum_{j=0}^{\infty} jhf_X(jh) = h\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{j} f_X(jh)$$

qui devient

$$E[X] = h\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty} f_X(jh) = h\sum_{k=0}^{\infty}\overline{F}_X(kh).$$

□

Espérance d'une v.a. positive

UNIVERSITÉ LAVAL

Exemple 1

Soit X une v.a. discrète définie sur $\{0, 1, 2, \ldots, 100\}$, avec

$$f_X(k) = 0.8 \times \binom{100}{k} 0.1^k 0.9^{100-k} + 0.2 \times \binom{100}{k} 0.6^k 0.4^{100-k},$$

pour $k = 0, 1, 2, \ldots, 100$.

Questions :

1. *Vérifier à la main et avec R que $\sum_{k=0}^{100} f_X(k) = 1$.*
2. *Calculer à la main et avec R la valeur $E[X]$.*

Espérance d'une v.a. positive

Exemple 1 - Solution

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(0.8 \times \binom{100}{k} 0.1^k 0.9^{100-k} + 0.2 \times \binom{100}{k} 0.6^k 0.4^{100-k}\right) \\
&= 0.8 \times \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\binom{100}{k} 0.1^k 0.9^{100-k}}_{Bin(100;0.1)} + 0.2 \times \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\binom{100}{k} 0.6^k 0.4^{100-k}}_{Bin(100;0.6)} \\
&= 0.8 \times 1 + 0.2 \times 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

De plus,

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k) \\
&= 0.8 \times \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{k \binom{100}{k} 0.1^k 0.9^{100-k}}_{Bin(100;0.1)} + 0.2 \times \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{k \binom{100}{k} 0.6^k 0.4^{100-k}}_{Bin(100;0.6)} \\
&= 0.8 \times 100 \times 0.1 + 0.2 \times 100 \times 0.6 \\
&= 20
\end{aligned}
$$

Calcul d'espérances en R pour une loi discrète

Soit X une v.a. discrète avec FGP

$$\mathcal{P}_X(t) = 0.2 + 0.4t + 0.3t^2 + 0.1t^3 \text{ pour } t \in (0,1).$$

1. Définir $f_X(k)$ et vérifier que c'est effectivement une fmp.
2. Calculer (à la main et avec R)
    1. $F_X(1.5)$.
    2. Calculer $E[X \times 1_{\{X \leq 1.5\}}]$.
    3. Calculer $\pi_X(1.5)$.
    4. Calculer $e_X(1.5)$.
    5. Définir $E[e^{tX}]$ et calculer $E[e^{tX}]\big|_{t=2}$.

Fonction stop-loss

Fonction stop-loss

Définition 1

Soit une v.a. X positive dont l'espérance existe. La fonction *stop-loss* $\pi_X(d)$ correspond à l'espérance d'une fonction $g(x) = \max(x - d; 0)$ telle que

$$\pi_X(d) = E[\max(X - d; 0)], \tag{4}$$

où $d \in \mathbb{R}^+$. On note que $\pi_X(0) = E[X]$.

La fonction *stop-loss* $\pi_X(d)$ représente l'espérance des coûts en sinistre en excédant d'une limite, appelée limite de rétention ou franchise.

Fonction stop-loss

Si la v.a. X obéit à une loi continue, (4) devient

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} (x - d) f_X(x) \, \mathrm{d}x. \tag{5}$$

Proposition 3

Soit une v.a. X positive dont l'espérance existe. Alors, on a

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} \overline{F}_X(x) \, \mathrm{d}x, \tag{6}$$

pour $d \geq 0$.

Démonstration.

De plus, si la v.a. X est continue positive et en intégrant par partie, l'expression en (5) pour la fonction *stop-loss* devient

$$\begin{aligned}\pi_X(d) &= \int_d^{\infty} (x-d) f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -(x-d)\overline{F}_X(x)\Big|_d^{\infty} + \int_d^{\infty} \overline{F}_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_d^{\infty} \overline{F}_X(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

Fonction stop-loss

Si X est une v.a. discrète définie sur le support $\{0, 1h, 2h, \ldots\}$ avec une fonction de masse de probabilité $f_X(kh)$, $k \in \mathbb{N}$, et si $d = hk_0$, $k_0 \in \mathbb{N}$, (4) s'écrit comme suit :

$$\pi_X(k_0 h) = \sum_{k=0}^{\infty} \max(kh - k_0 h; 0) f_X(kh) = h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (k - k_0) f_X(kh). \tag{7}$$

Pour la prochaine proposition, on rappelle que

$$\overline{F}_X(kh) = \Pr(X > kh) = \sum_{j=k+1}^{\infty} f_X(jh), \tag{8}$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 4

Soit une v.a. X discrète définie sur le support $\{0, 1h, 2h, \ldots\}$ dont l'espérance existe. Alors, on a

$$\pi_X(k_0 h) = h \sum_{k=k_0}^{\infty} \overline{F}_X(kh), \tag{9}$$

pour $k_0 \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

À partir de (7), on réarrange la somme en développant chaque terme et en utilisant (8) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\pi_X(k_0 h) &= h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (k-k_0) f_X(kh) \\
&= h\left(1 \times f_X((k_0+1)h) + 2 \times f_X((k_0+2)h) + 3 \times f_X((k_0+3)h) + \ldots\right) \\
&= h\left(f_X((k_0+1)h) + f_X((k_0+2)h) + f_X((k_0+3)h) + \ldots\right) \\
&\quad +h\left(f_X((k_0+2)h) + f_X((k_0+3)h) + \ldots\right) \\
&\quad +h\left(f_X((k_0+3)h) + \ldots\right) \\
&\quad + \ldots \\
&= h \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} f_X(jh) \\
&= h \sum_{k=k_0}^{\infty} \overline{F}_X(kh), \text{ pour } k_0 \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Fonction stop-loss

Exemple 2

[JCA]. Soit $X \sim Binom\,(n = 100, q = 0.05)$. *Avec R, calculer* $\pi_X\,(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 100$. *Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique en bâtons.*

Exemple 3

[JCA]. Soit $X \sim Pois\,(\lambda = 5)$. *Avec* ®, *calculer* $\pi_X\,(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 100$. *Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique en bâtons.*

Fonction stop-loss

Exemple 4

[JCA]. Soit $X \sim NBinom\left(r=1, q=\frac{1}{6}\right)$*. Avec* R*, calculer* $\pi_X(k)$*,* $k=0,1,2,\ldots,100$*. Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique en bâtons.*

Exemple 5

[JCA]. Soit $X \sim NBinom\left(r=5, q=\frac{1}{2}\right)$*. Avec* R*, calculer* $\pi_X(k)$*,* $k=0,1,2,\ldots,100$*. Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique en bâtons.*

Exemple 6

[JCA]. Soit $X \sim NBinom\left(r=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{11}\right)$*. Avec* R*, calculer* $\pi_X(k)$*,* $k=0,1,2,\ldots,100$*. Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique en bâtons.*

Fonction stop-loss

Exemple 7

Soit X *une v.a. discrète définie sur* $\{0, 1, 2, \ldots, 100\}$, *avec*

$$f_X(k) = 0.8 \times \binom{100}{k} 0.0125^k 0.9875^{100-k} + 0.2 \times \binom{100}{k} 0.2^k 0.8^{100-k},$$

pour $k = 0, 1, 2, \ldots, 100$. *Avec* R, *calculer* $\pi_X(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 100$. *Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique en bâtons.*

Fonction stop-loss

Exemple 8

Soit $X \sim Exp\left(\beta = \frac{1}{5}\right)$. *Avec R, calculer* $\pi_X(d)$, $d = 0, 1, 2, \ldots, 100$. *Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique continue.*

UNIVERSITÉ LAVAL

Exemple 9

Soit $X \sim Gamma\left(\alpha = 5, \beta = 1\right)$. *Avec* R, *calculer* $\pi_X\left(d\right)$, $d = 0, 1, 2, \ldots, 100$. *Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique continue.*

Exemple 10

Soit $X \sim Gamma\left(\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{10}\right)$. *Avec* R, *calculer* $\pi_X\left(d\right)$, $d = 0, 1, 2, \ldots, 100$. *Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique continue.*

Exemple 11

Soit $X \sim LNorm\left(\mu = \ln(5) - 0.125, \sigma = 0.5\right)$. *Avec* R, *calculer* $\pi_X(d)$, $d = 0, 1, 2, \ldots, 100$. *Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique continue.*

Exemple 12

Soit $X \sim LNorm\left(\mu = \ln(5) - \frac{1}{2}, \sigma = 1\right)$. *Avec* R, *calculer* $\pi_X(d)$, $d = 0, 1, 2, \ldots, 100$. *Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique continue.*

Fonction quantile

Fonction quantile

On débute avec la définition de base (et générale) de la fonction quantile.

Définition 2

Soit la v.a. X avec fonction de répartition F_X. On définit la fonction inverse F_X^{-1} de F_X par

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\}, \tag{10}$$

pour $u \in (0,1)$.

Par convention, $\inf \emptyset = +\infty$ et $\sup \emptyset = -\infty$. La fonction inverse F_X^{-1} est aussi appelée la fonction quantile de X.

Fonction quantile

La fonction quantile satisfait les propriétés suivantes :

1. F_X^{-1} est non décroissante (croissante au sens large) ;
2. F_X^{-1} est semi-continue à gauche ;
3. $F_X^{-1}\left(F_X\left(x\right)\right) \leq x$;
4. $F_X\left(F_X^{-1}\left(x\right)\right) \geq u$.

Exemple 13 (Fonction quantile d'une loi discrète quelconque)

Soit une v.a. discrète X dont les valeurs de la fmp sont fournies dans le Tableau 1. Dans ce tableau, c est une constante de normalisation.

X	10	9	6	13	17	16	20
$\Pr[X = x]$	0.3	0.4	0.12	0.06	0.07	0.01	0.04

Tableau – Fmp de X pour l'exercice 13

Fonction quantile

Si la v.a. X est continue, alors F_X^{-1} correspond à l'unique solution de

$$F_X\left(x_u\right) = u, \tag{11}$$

pour $u \in (0, 1)$.

Fonction quantile

Dans certains cas, il est possible d'inverser aisément la fonction de répartition pour obtenir la fonction quantile.

Exemple 14

Inversion à la main de fonctions de répartition

1. $X_1 \sim Pareto(\alpha_1, \lambda_1)$
2. $X_2 \sim Weibull(\tau_2, \lambda_2)$
3. $X_3 \sim Log - logistique(\lambda_3, \tau_3)$

Fonction quantile

En R, des fonctions internes sont à notre disposition pour calculer les quantiles de lois usuelles.

Exemple 15

1. *Si* $X_1 \sim Exp(\lambda = 10)$, $X_2 \sim Pareto(\alpha = 3, \lambda = 0.6)$ *et* $X_3 \sim Gamma(\alpha = 4, \beta = 0.3)$,
   1. *Calculer* $f_{X_i}(5)$ *pour* $i \in \{1, 2, 3\}$ *;*
   2. *Définir l'expression de* $F^{-1}_{X_i}(u)$, *puis évaluer en R pour* $u \in \{0.9, 0.99\}$ *et* $i \in \{1, 2, 3\}$.

On note que la Gamma n'est pas inversible. Ainsi les fonctions R sont plus qu'utiles !

Fonction quantile

Pour les lois quelconques continues où il est énormément (voir impossible) difficile d'isoler $x = F_X^{-1}(u)$, l'optimisation permet de résoudre

$$F_X(x) = u$$
$$F_X(x) - u = 0$$

En déterminant pour quel x, $F_X(x) = u$, la fonction quantile est ainsi résolue.

Exemple 16

Soit la v.a. continue positive X dont la fonction de répartition est

$$F_X(x) = 0.8 \times \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\right) + 0.2 \times \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{60}}\right),$$

pour $x \in \mathbb{R}^+$. [JCA]

1. *Avec R, tracer la courbe de F_X et de f_X.*
2. *Avec R, calculer les valeurs de $F_X^{-1}(u)$, $u = \frac{j}{100}$, $j = 1, 2, \ldots, 99$.*

Fonction quantile

Pour les v.a. discrètes, il suffit d'appliquer directement la dé finition en (10) comme il est illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 17

Soit X une v.a. discrète définie sur $\{0, 1, 2, \ldots, 100\}$, avec

$$f_X(k) = 0.8 \times \binom{100}{k} 0.0125^k 0.9875^{100-k} + 0.2 \times \binom{100}{k} 0.2^k 0.8^{100-k},$$

pour $k = 0, 1, 2, \ldots, 100$.
[JCA] Avec R, calculer les valeurs de $F_X^{-1}(u)$, $u = \frac{j}{100}$, $j = 1, 2, \ldots, 99$. Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphe continu.

Exercice 1.7 - manipulations en R

Exercice 1.7 - manipulations en R

Exemple 18

Soit X une v.a. discrète prenant des valeurs dans l'ensemble $A = \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$ et dont la fmp est

$$f_X(k) = \frac{\left(\frac{5}{5+k}\right)^2 - \left(\frac{5}{6+k}\right)^2}{1 - \left(\frac{5}{106}\right)^2}, \quad k \in A.$$

1. *Espérance de X.*
   - *Développez l'expression de l'espérance de X en termes de la fmp.*
   - *Construisez un code R pour calculer l'espérance de X.*
   - *Indiquez la valeur de $E[X]$.*
2. *Variance de X.*
   - *Développez l'expression de la variance de X en termes de la fmp.*
   - *Construisez un code R pour calculer la variance de X.*
   - *Indiquez la valeur de $\sqrt{Var(X)}$.*

Exercice 1.7 - manipulations en R

Exemple (18 - Suite)

3. *Fonction de répartition.*
   - *Développez l'expression de $F_X(k)$, $k \in A$, en termes de la fmp.*
   - *Construisez un code R pour calculer $F_X(k)$, $k \in A$.*
   - *Calculez $F_X(30)$.*
4. *Soit $\theta = \int_{0.6}^{0.99} F_X^{-1}(u)\,du$.*
   - *Développez l'expression permettant de calculer θ.*
   - *Calculez et indiquez la valeur de θ.*
5. *Fgm de X .*
   - *Développez l'expression permettant de calculer la fgm de X définie par*

$$\mathcal{M}_X(t) = E[\mathrm{e}^{tX}], \quad t \geq 0.$$

   - *Construisez un code R pour calculer $\mathcal{M}_X(t)$, $t \geq 0$.*
   - *Calculez $\psi_\rho(X) = \frac{1}{\rho}\ln(\mathcal{M}_X(\rho))$, pour $\rho \in \{0.001, 0.01, 0.1\}$.*

Exercice 1.8 - Constante de normalisation

Exercice 1.8 - Constante de normalisation

Exemple 19

Soit une v.a. discrète X dont les valeurs de la fmp sont fournies dans le Tableau 2. Dans ce tableau, c est une constante de normalisation.

x	0	10	50	100	200	500	800	1500	4000	10000
$f_X(x)$	$100c$	4c	10c	20c	30c	50c	25c	12c	6c	3c

Tableau – Fmp de X de l'exercice 19, où c est une constante de normalisation

La v.a. X représente les pertes pour un risque en assurance dommages.

1. *Constante de normalisation c.*
   - *Développez l'expression de la constante de normalisation c en termes de la fmp.*
   - *Construisez un code R pour calculer la constante de normalisation c.*
   - *Indiquez la constante de normalisation c.*

Exercice 1.8 - Constante de normalisation

UNIVERSITÉ LAVAL

Exemple (19 - Suite)

2. *Espérance de X.*
   - *Développez l'expression de l'espérance de X en termes de la fmp.*
   - *Construisez un code R pour calculer l'espérance de X.*
   - *Indiquez la valeur de $E[X]$.*
3. *Variance de X.*
   - *Développez l'expression de la variance de X en termes de la fmp.*
   - *Construisez un code R pour calculer la variance de X.*
   - *Indiquez la valeur de $\sqrt{Var(X)}$.*
4. *Fonction de répartition.*
   - *Développez l'expression de $F_X(x)$, $x \geq 0$, en termes de la fmp.*
   - *Construisez un code R pour calculer $F_X(x)$, $x \geq 0$.*
   - *Calculez $F_X(x)$, $x \in \{0, 300, 800, 1000, 12000\}$.*

Exercice 1.8 - Constante de normalisation

Exemple (19 - Suite)

5. *Fonction quantile.*
   - *Développez l'expression de* $F_X^{-1}(u)$, $u \in (0,1)$.
   - *Construisez un code R pour calculer* $F_X(x)$, $F_X^{-1}(u)$, $u \in (0,1)$.
   - *Calculez* $F_X^{-1}(u)$, $u \in \{0.1, 0.5, 0.7, 0.9, 0.99, 0.999\}$.
6. *Soit* $\theta = \int_{0.6}^{0.99} F_X^{-1}(u)\,du$.
   - *Développez l'expression permettant de calculer* θ.
   - *Calculez et indiquez la valeur de* θ.
7. *Fgm de* X.
   - *Développez l'expression permettant de calculer la fgm de* X *définie par*

$$\mathcal{M}_X(t) = E[\mathrm{e}^{tX}], \quad t \geq 0.$$

   - *Construisez un code R pour calculer* $\mathcal{M}_X(t)$, $t \geq 0$.
   - *Calculez* $\psi_\rho(X) = \frac{1}{\rho}\ln(\mathcal{M}_X(\rho))$, *pour* $\rho \in \{0.0001, 0.001, 0.01\}$.

Conseils pour la réussite du cours

Conseils pour la réussite du cours

- Éviter le retard + être alerte pendant le cours.
- Exercices traditionnels à faire en R aussi pour les réponses ;
- Utiliser des vérifications pour les calculs informatiques ;
- Bien comprendre les preuves qui sont présentées ;
- Utilise activement le document d'annexes ;
- Utiliser les ateliers adéquatement ;
- « Essayer » jusqu'à développer l'intuition.

Références

Références I

Cossette, H. and Marceau, E. (2023).
Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives.
Monographie.