Identification de distributions à l'aide du théorème de convolution

Philippe Leblanc

École d'actuariat, Université Laval, Québec, Canada

Hiver 2025

Théorème 1 (Théorème de convolution et TLS)**.** *Soit une suite de variables aléatoires indépendantes positives $X_1, \ldots, X_n$ dont les TLS sont données par $\mathcal{L}_{X_i}(t)$. On définit la variable aléatoire de la somme des composantes du portefeuille par $S = \sum_i X_i$. Alors, la TLS de S est donnée par*

$$\mathcal{L}_S(t) = \prod\nolimits_i \mathcal{L}_{X_i}(t).$$

Pour simplifier les développements, nous utiliserons $\mu_j = E[X_j]$ et $\mu_S = E[S_n]$. Nous supposons que les variables aléatoires X_i sont indépendantes. Les nouvelles variables aléatoires d'intérêt sont les suivantes.

1. La somme des composantes du portefeuille

   $$S_n = \sum\nolimits_i X_i,$$

   avec une transformée de Laplace-Stieltjes donnée par

   $$\mathcal{L}_{S_n}(t) = \prod\nolimits_i \mathcal{L}_{X_i}(t).$$

2. Le coût moyen par composante du portefeuille

   $$W_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum\nolimits_i X_i,$$

   avec une transformée de Laplace-Stieltjes donnée par

   $$\mathcal{L}_{W_n}(t) = \mathcal{L}_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \prod\nolimits_i \mathcal{L}_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right).$$

3. La part allouée au contrat j du portefeuille

   $$C_{j,n} = \frac{E[X_j]}{E[S_n]} S_n = \frac{\mu_j}{\mu_S} S_n,$$

   avec une transformée de Laplace-Stieltjes donnée par

   $$\mathcal{L}_{C_{j,n}}(t) = \mathcal{L}_{S_n}\left(\frac{E[X_j]}{E[S_n]} t\right) = \prod\nolimits_i \mathcal{L}_{X_i}\left(\frac{E[X_j]}{E[S_n]} t\right) = \prod\nolimits_i \mathcal{L}_{X_i}\left(\frac{\mu_j}{\mu_S} t\right).$$

Sinistres Gamma

En supposant maintenant que

$$X_i \sim \text{Gamma}\Big(\alpha_i, \beta\Big),$$

alors nous avons que

$$\mathcal{L}_{S_n}(t) = \prod\nolimits_i \mathcal{L}_{X_i}(t) = \prod\nolimits_i \left(\frac{\beta}{\beta + t}\right)^{\alpha_i} = \left(\frac{\beta}{\beta + t}\right)^{\sum_i \alpha_i},$$

ce qui implique que

$$S_n \sim \text{Gamma}\left(\sum\nolimits_i \alpha_i, \beta\right).$$

De plus, nous pouvons également obtenir que

$$\mathcal{L}_{W_n}(t) = \prod\nolimits_i \mathcal{L}_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \prod\nolimits_i \left(\frac{\beta}{\beta + \frac{t}{n}}\right)^{\alpha_i} = \left(\frac{n\beta}{n\beta + t}\right)^{\sum_i \alpha_i},$$

ce qui implique que

$$W_n \sim \text{Gamma}\left(\sum\nolimits_i \alpha_i, n\beta\right).$$

Finalement, pour le partage des risques, on a

$$\mathcal{L}_{C_{j,n}}(t) = \prod\nolimits_i \mathcal{L}_{X_i}\left(\frac{\mu_j}{\mu_S} t\right) = \prod\nolimits_i \left(\frac{\beta}{\beta + \frac{\mu_j}{\mu_S} t}\right)^{\alpha_i} = \left(\frac{\frac{\mu_S}{\mu_j}\beta}{\frac{\mu_S}{\mu_j}\beta + t}\right)^{\sum_i \alpha_i},$$

ce qui implique que

$$C_{j,n} \sim \text{Gamma}\left(\sum\nolimits_i \alpha_i, \frac{\mu_S}{\mu_j}\beta\right) \sim \text{Gamma}\left(\sum\nolimits_i \alpha_i, \frac{\sum_i \alpha_i}{\alpha_j}\beta\right).$$

Sinistres Exponentiels

Dans un contexte similaire, si nous avons que

$$X_i \sim \text{Exponentielle}\Big(\beta_i\Big),$$

alors nous pouvons directement obtenir

$$\mathcal{L}_{S_n}(t) = \prod\nolimits_i \mathcal{L}_{X_i}(t) = \prod\nolimits_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + t}\right),$$

ce qui implique donc que

$$S_n \sim \text{ErlangGen}\Big(\beta_1, \ldots, \beta_n\Big).$$

De plus, nous pouvons également obtenir que

$$\mathcal{L}_{W_n}(t) = \prod\nolimits_i \mathcal{L}_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \prod\nolimits_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + \frac{t}{n}}\right) = \prod\nolimits_i \left(\frac{n\beta_i}{n\beta_i + t}\right),$$

ce qui implique donc que

$$W_n \sim \text{ErlangGen}\Big(n\beta_1, \ldots, n\beta_n\Big).$$

Finalement, pour le partage des risques, on a

$$\mathcal{L}_{C_{j,n}}(t) = \prod\nolimits_i \mathcal{L}_{X_i}\left(\frac{\mu_j}{\mu_S}t\right) = \prod\nolimits_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + \frac{\mu_j}{\mu_S}t}\right) = \prod\nolimits_i \left(\frac{\frac{\mu_S}{\mu_j}\beta_i}{\frac{\mu_S}{\mu_j}\beta_i + t}\right),$$

ce qui implique donc que

$$C_{j,n} \sim \text{ErlangGen}\left(\frac{\mu_S}{\mu_j}\beta_1, \ldots, \frac{\mu_S}{\mu_j}\beta_n\right).$$