Démonstration de l'équation 17 présentée dans l'atelier 4

Proposition 1. *On suppose l'existence de nombres finis $\underline{a}$, $\overline{a}$, $\underline{b}$ et $\overline{b}$ tels que*

$$\underline{a} \leq E\left[X_j\right] \leq \overline{a},$$
$$\underline{b} \leq \operatorname{Var}\left(X_j\right) \leq \overline{b}.$$

Alors, pour tout j, nous avons que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}\left(C_{j,n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{E\left[X_j\right]}{E\left[S_n\right]}\right)^2 \operatorname{Var}\left(S_n\right) = 0.$$

Proof. Puisque le numérateur du terme au carré est constant, il suffit de démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Var}\left(S_n\right)}{E\left[S_n\right]^2} = 0.$$

Considérons la pire situation possible, c'est-à-dire que nous maximisons la variance de S_n et minimisons l'espérance de S_n, ce qui devrait donner la valeur maximale possible de la limite. Si cette limite est nulle dans cette situation, alors elle le sera pour toutes les autres situations. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max\left\{\operatorname{Var}\left(S_n\right)\right\}}{\left\{\min E\left[S_n\right]\right\}^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\overline{b}}{n^2\underline{a}^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{b}}{n\underline{a}^2} = 0,$$

ce qui démontre la proposition. □

Ce résultat est valable même lorsque les distributions des X_j ne sont pas identiques. Toutefois, la démonstration se simplifie lorsque les X_j sont identiquement distribuées. En effet, dans ce cas, on a que

$$C_{j,n} = \frac{E\left[X_j\right]}{E\left[S_n\right]} S_n = \frac{E\left[X_j\right]}{nE\left[X_j\right]} S_n = \frac{1}{n} S_n = W_n,$$

ce qui implique que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}\left(C_{j,n}\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}\left(W_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Var}\left(X_j\right)}{n} = 0,$$

puisque nous savons déjà que

$$\operatorname{Var}\left(W_n\right) = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \frac{1}{n^2} \operatorname{Var}\left(S_n\right) = \frac{1}{n^2} n \operatorname{Var}\left(X_j\right) = \frac{\operatorname{Var}\left(X_j\right)}{n}.$$