ACT-2001 Introduction à l'actuariat 2

Atelier de la semaine du 27 janvier 2025 (Semaine 3)

Étienne Marceau, avec Jérémie Barde, Ève Busque, Alexandre Dubeau et Philippe Leblanc

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

2025-01-27

Avant-propos

Avant-propos

Sources spécifiques pour le contenu des diapos

- Site du cours sur monportail.ulaval.

Livre de référence

- [Cossette and Marceau, 2021].

Diapositives

- Logiciel : LaTeX
- Package : Beamer
- Éditeurs : Overleaf

Calculs et illustrations

- Toutes les calculs et les illustrations ont été réalisés dans le langage R grâce au logiciel GNU R mis à disposition par le R Project.
- Les codes R ont été conçus dans l'environnement de développement intégré RStudio.

Avant-propos

Les diapositives contiennent du matériel pour le cours Act-2001 qui sera présenté pendant les ateliers au semestre H2024.

Le document de référence est [Cossette and Marceau, 2021].

Table des matières I

Matière à l'examen

Matière à l'examen

Tout le matériel des ateliers est matière à étudier pour le cours, pour l'avenir et pour les examens.

Mutualisation de risques indépendants avec distributions identiques

Mutualisation de risques indépendants avec distributions identiques

Soit un portefeuille de v.a. comportants n contrats d'assurance générale dont les pertes sont représentées par les v.a. positives $X_1, \ldots, X_n$.

On adopte les hypothèses suivantes :

- **H1** Indépendance : X_1, ..., X_n sont des v.a. indépendantes. Cet énoncé est équivalent à l'énoncé *la fonction de répartition conjointe de* $(X_1, \ldots, X_n)$ *satisfait la relation suivante* :

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \times \cdots \times F_{X_n}(x_n), \quad x_1 \geq 0, \ldots, x_1 \geq 0. \tag{1}$$

- **H2** Distribution identique : les distributions de X_1, ..., X_n sont identiques, ce qui est équivalent à écrire : les fonctions de répartition de X_1, ..., X_n sont identiques, soit

$$F_{X_1} = F_{X_2} = \cdots = F_{X_n} = F_X. \tag{2}$$

Quand la relation en (2) est satisfaite, on utilise la notation suivante :

$$X_1 \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_2 \stackrel{\mathcal{D}}{=} \ldots \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} X. \tag{3}$$

Mutualisation de risques indépendants avec distributions identiques

Définitions :

- Pertes totales pour le portefeuille :

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \tag{4}$$

- Pertes allouées un contrat (quelconque) :

$$W_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \left(X_1 + \cdots + X_n \right). \tag{5}$$

Mutualisation de risques indépendants avec distributions identiques

Questions :

1. Hypothèse additionnelle à H1 et H2 : $E[X] < \infty$.
2. Démontrez
$$E[W_n] = E[X], \quad \forall n \in \mathbb{N}_1 = \{1, 2, \dots\}. \tag{6}$$
3. Interprétez la relation en (6).

Mutualisation de risques indépendants avec distributions identiques

Questions :

1. Hypothèse additionnelle à H1 et H2 : $E[X] < \infty$ et $Var(X) < \infty$.
2. Démontrez
$$Var(W_n) = \frac{1}{n} Var(X), \quad \forall n \in \mathbb{N}_1. \tag{7}$$
3. Interprétez la relation en (7).
4. Calculez la limite de $Var(W_n)$ quand la taille n du portefeuille devient très grande ; bref, calculez
$$\lim_{n\to\infty} Var(W_n). \tag{8}$$
5. Interprétez la relation en (8).

Mutualisation de risques indépendants avec distributions identiques

Questions :

1. Hypothèse additionnelle à H1 et H2 : il existe $t_0 > 0$ tel que $\mathcal{M}_X(t) < \infty$, pour $t \in (0, t_0)$.
2. Démontrez
$$\mathcal{M}_{W_n}(t) = \mathcal{M}_X\left(\frac{t}{n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}_1. \tag{9}$$
3. Interprétez la relation en (9).

Mutualisation de risques indépendants avec distributions identiques

Questions :

1. Hypothèse additionnelle à H1 et H2 : $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$.
2. Démontrez

$$\mathcal{M}_{W_n}(t) = \left(\frac{n\beta}{n\beta - t}\right)^{n\alpha}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_1. \tag{10}$$

3. Utilisez la relation en (10) et un théorème [en indiquant lequel] pour identifier la loi de W_n.
4. Interprétez la relation en (10).

Mutualisation de risques indépendants avec distributions identiques

Questions : [Interprétez les résultats obtenus]

1. Hypothèse additionnelle à H1 et H2 : $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$, avec $\alpha = 0.5$ et $\beta = \frac{\alpha}{1000}$.
2. Utilisez la relation en (10) et un théorème [en indiquant lequel] pour identifier la loi de W_n.
3. Les calculs ci-dessous sont à effectuer <u>à la main</u> en utilisant les tableaux des annexes.
    1. Calculez $E[X]$ et $Var(X)$.
    2. Calculez $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$, pour $\kappa = 0.99$.
    3. Calculez $\Pr(|X - E[X]| > \epsilon)$, pour $\epsilon = \theta E[X]$ avec $\theta \in \{0.2, 0.1, 0.01\}$.
4. Les calculs ci-dessous sont à effectuer <u>à la main</u> avec les tableaux des annexes. On fixe $n = 10$.
    1. Calculez $E[W_n]$ et $Var(W_n)$.
    2. Calculez $VaR_\kappa(W_n)$ et $TVaR_\kappa(W_n)$, pour $\kappa = 0.99$.
    3. Calculez $\Pr(|W_n - E[X]| > \epsilon)$, pour $\epsilon = \theta E[X]$ avec $\theta \in \{0.2, 0.1, 0.01\}$.
5. Les calculs ci-dessous sont à effectuer <u>en R</u>. On fixe $n \in \{10, 100, 500\}$.
    1. Calculez $E[W_n]$ et $Var(W_n)$.
    2. Calculez $VaR_\kappa(W_n)$ et $TVaR_\kappa(W_n)$, pour $\kappa = 0.99$.
    3. Calculez $\Pr(|W_n - E[X]| > \epsilon)$, pour $\epsilon = \theta E[X]$ avec $\theta \in \{0.2, 0.1, 0.01\}$.
    4. Calculez θ de telle sorte que $\Pr(|W_n - E[X]| > \epsilon) = \eta$, où $\epsilon = \theta E[X]$, pour $\eta \in \{0.1, 0.01\}$.

Questions : [Interprétez les résultats obtenus]

1. Hypothèse additionnelle à H1 et H2 : $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$, avec $\alpha = 0.5$ et $\beta = \frac{\alpha}{1000}$.
2. Utilisez la relation en (10) et un théorème [en indiquant lequel] pour identifier la loi de W_n.
3. Les calculs ci-dessous sont à effectuer en `R`.
   1. Tracez la courbe des valeurs de $Var(W_n)$ en fonction de n.
   2. Tracez la courbe des valeurs de $VaR_{0.99}(W_n)$ en fonction de n.
   3. Tracez la courbe des valeurs de $TVaR_{0.99}(W_n)$ en fonction de n.
   4. Tracez la courbe des valeurs de $\Pr(|W_n - E[X]| > \epsilon)$, pour $\epsilon = \theta E[X]$ avec $\theta = 0.1$. Sur le même graphique, ajoutez la courbe des valeurs de la borne de Chebychev.
   5. Tracez la courbe des valeurs de $\Pr(|W_n - E[X]| > \epsilon)$, pour $\epsilon = \theta E[X]$ avec $\theta = 0.01$. Sur le même graphique, ajoutez la courbe des valeurs de la borne de Chebychev.
4. Les calculs ci-dessous sont à effectuer en `R`.
   1. Sur un même graphique, tracez les courbes des valeurs de $F_{W_n}(x)$ en fonction de x pour $n \in \{1, 10, 100, 500\}$.
   2. Sur un même graphique, tracez les courbes des valeurs de $Var(W_n)$ en fonction de κ pour $n \in \{1, 10, 100, 500\}$.
   3. Sur un même graphique, tracez les courbes des valeurs de $TVar(W_n)$ en fonction de κ pour $n \in \{1, 10, 100, 500\}$.

Mutualisation de risques indépendants avec distributions identiques

Questions : [Interprétez les résultats obtenus]

1. Hypothèse additionnelle à H1 et H2 : $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$, avec $\alpha = 0.5$ et $\beta = \frac{\alpha}{1000}$.
2. Utilisez la relation en (10) et un théorème [en indiquant lequel] pour identifier la loi de W_n.
3. Les calculs ci-dessous sont à effectuer en `R`.
   1. Calculez la plus petite valeur de n, la taille du portefeuille, de telle sorte que $\Pr(|W_n - E[X]| > \epsilon) \leq 0.01$, pour $\epsilon = \theta E[X]$ avec $\theta = 0.1$.
   2. Calculez la plus petite valeur de n, la taille du portefeuille, de telle sorte que $\Pr(|W_n - E[X]| > \epsilon) \leq 0.01$, pour $\epsilon = \theta E[X]$ avec $\theta = 0.05$.

Mutualisation de risques indépendants avec distributions non identiques

Mutualisation de risques indépendants avec distributions non identiques

Soit un portefeuille de v.a. comportants n contrats d'assurance générale dont les pertes sont représentées par les v.a. positives $X_1, \ldots, X_n$.

Dans cette section, on vise à atteindre l'objectif suivant :

1. Examiner le phénomène de mutualisation en adoptant uniquement l'hypothèse que les v.a. $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

On adopte les hypothèses suivantes :

- **H1** Indépendance : X_1, ..., X_n sont des v.a. indépendantes. Cet énoncé est équivalent à l'énoncé *la fonction de répartition conjointe de* $(X_1, \ldots, X_n)$ *satisfait la relation suivante* :

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \times \cdots \times F_{X_n}(x_n), \quad x_1 \geq 0, \ldots, x_1 \geq 0. \tag{11}$$

- **H3** Espérance finie : $E[X_j] < \infty$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Cette hypothèse est essentielle au mécanisme d'assurance.

Mutualisation de risques indépendants avec distributions non identiques

On définit les pertes totales pour le portefeuille par

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \tag{12}$$

Puisque les distributions des v.a. $X_1, \ldots, X_n$ ne sont pas identiques, une règle de partage basée sur une part identique pour chaque contrat ne convient pas.

On doit adopter une nouvelle règle de partage entre les contrats d'assurance.

On propose d'utiliser une règle de partage basée sur les espérances des pertes $X_1, \ldots, X_n$.

On définit la part allouée au contrat i d'un portefeuille de taille n par la v.a. $C_{j,n}$ où

$$C_{j,n} = \frac{E[X_j]}{E[S_n]} S_n, \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{13}$$

Mutualisation de risques indépendants avec distributions non identiques

Questions :

1. Pourquoi on considère $C_{j,n}$, la part allouée du contrat j, comme une v.a. ?
2. Démontrez
$$E[C_{j,n}] = E[X_j], \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{14}$$
Interprétez la relation en (14).
3. Démontrez
$$F_{C_{j,n}}(x) = F_{S_n}\left(\frac{E[S_n]}{E[X_j]}x\right), \quad x \geq 0. \tag{15}$$
Interprétez la relation en (15).

Questions :

1. Hypothèse additionnelle à H1 et H3 : $Var(X_j) < \infty$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
   1. Démontrez
   $$Var(C_{j,n}) = \left(\frac{E[X_j]}{E[S_n]}\right)^2 Var(S_n), \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{16}$$
   2. Interprétez la relation en (16).
2. Hypothèse additionnelle à H1 et H3 : il existe des nombres finis a_1, a_2, b_1, b_2 où
   $$a_1 \leq E[X_j] \leq a_2, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$
   $$b_1 \leq Var(X_j) \leq b_2, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$
   1. La relation en (16) demeure valide.
   2. On considère le contrat 1.
   3. Utilisez la relation en (16) pour démontrez
   $$\lim_{n \to \infty} Var(C_{1,n}) = 0. \tag{17}$$
   4. Interprétez la relation en (17) en regard de la variabilité de la part du contrat j lorsque la taille n du portefeuille devient très grande.

Questions :

1. Hypothèse additionnelle à H1 et H3 : il existe $t_0 > 0$ tel que $\mathcal{M}_{X_j}(t) < \infty$, pour $t \in (0, t_0)$ et $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
2. Démontrez
$$\mathcal{M}_{C_{j,n}}(t) = \mathcal{M}_{S_n}\left(\frac{E[X_j]}{E[S_n]}t\right), \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{18}$$
3. Interprétez la relation en (18).

Questions : [Interprétez les résultats obtenus]

1. Hypothèses additionnelles à H1 et H3 :
   - $X_j \sim Gamma(\alpha_j, \beta)$, avec $\alpha_j \in [0.5, 2.5]$ et $\beta = \frac{1}{1000}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
   - Les paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont tous distincts.
   - Le choix de l'intervalle pour les valeurs des paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ est représentatif de données de sinistres.
2. Utilisez la relation en (18) et un théorème [en indiquant lequel] pour identifier la loi de $C_{j,n}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
3. Démontrez
$$Var(C_{j,n}) = \frac{\alpha_j}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \frac{\alpha_j}{\beta^2}, \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{19}$$
4. Utilisez la relation en (19) pour vérifier que l'inégalité
$$Var(C_{j,n}) \leq Var(X_j)$$
est valide pour $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Interprétez en regard de la mutualisation des risques indépendants avec distributions non identiques.

Questions : [Interprétez les résultats obtenus]

1. Hypothèses additionnelles à H1 et H3 :
   - $X_j \sim Gamma(\alpha_j, \beta)$, avec $\alpha_j = 0.5j$ et $\beta = \frac{1}{1000}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Utilisez la relation en (18) et un théorème [en indiquant lequel] pour identifier la loi de $C_{j,4}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.
3. Les calculs ci-dessous sont à effectuer à la main en utilisant les tableaux des annexes.
   1. Calculez $E[X_j]$ et $Var(X_j)$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.
   2. Calculez $VaR_\kappa(X_j)$ et $TVaR_\kappa(X_j)$, pour $\kappa = 0.99$ et pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.
   3. Calculez $\Pr(|X_j - E[X_j]| > \epsilon)$, pour $\epsilon = \theta E[X_j]$ avec $\theta \in \{0.1, 0.01\}$ et pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.
4. Les calculs ci-dessous sont à effectuer à la main avec les tableaux des annexes. On fixe $n = 4$.
   1. Calculez $E[C_{j,4}]$ et $Var(C_{j,4})$, pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.
   2. Calculez $VaR_\kappa(C_{j,4})$ et $TVaR_\kappa(C_{j,4})$, pour $\kappa = 0.99$, pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.
   3. Calculez $\Pr(|C_{j,4} - E[C_{j,4}]| > \epsilon)$, pour $\epsilon = \theta E[C_{j,4}]$ avec $\theta \in \{0.1, 0.01\}$, pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Questions : [Interprétez les résultats obtenus]

1. Hypothèses additionnelles à H1 et H3 :
   - $X_j \sim Gamma(\alpha_j, \beta)$, avec $\alpha_1 = 0.5$ et $\alpha_j = 0.5^{\frac{j-1}{n}}$ et $\beta = \frac{1}{1000}$, $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$.
2. Les calculs ci-dessous sont à effectuer en R.
   1. Calculez $E[X_1]$ et $Var(X_1)$.
   2. Calculez $VaR_\kappa(X_1)$ et $TVaR_\kappa(X_1)$, pour $\kappa \in \{0.99, 0.999\}$.
3. Pour $n = 10$, utilisez la relation en (18) et un théorème [lequel ?] pour identifier la loi de $C_{1,n}$.
4. Pour $n = 10$, effectuez les calculs ci-dessous en R.
   - Calculez $E[C_{1,n}]$ et $Var(C_{1,n})$.
   - Calculez $VaR_\kappa(C_{1,n})$ et $TVaR_\kappa(C_{1,n})$, pour $\kappa \in \{0.99, 0.999\}$.
   - Tracez les deux courbes de $F_X(x)$ et $F_{C_{1,n}}(x)$, pour $x \in [0, VaR_{0.999}(X)]$.
5. Effectuez à nouveau les calculs des items [3] et [4] pour $n = 100$.
6. Effectuez à nouveau les calculs des items [3], [4] et [5] pour $\alpha_1 = 2.5$.
7. Comparez les valeurs et les graphiques obtenus pour $n \in \{10, 100\}$ et $\alpha \in \{0.5, 2.5\}$.
8. Qu'observez-vous en comparant les courbes de F_X, $F_{C_{1,10}}$ et $F_{C_{1,100}}$, si $\alpha_1 = 0.5$? si $\alpha_1 = 2.5$?

Portefeuille avec 4 contrats et péril inondation

Portefeuille avec 4 contrats et péril inondation

On considère un portefeuille de 4 contrats d'assurance IARD, offrant une protection à la propriété couverte contre les dégâts d'eau suite à des inondations, etc.

On définit la v.a. $I_j \sim Bern(q_j)$ où

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{si la propriété } j \text{ encourt des pertes en sinistres dus à une inondation,} \\ 0, & \text{autrement,} \end{cases} \tag{20}$$

et

$$\begin{aligned} \Pr(I_j = 1) &= q_j \\ \Pr(I_j = 0) &= 1 - q_j, \end{aligned}$$

pour $j \in \mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Portefeuille avec 4 contrats et péril inondation

Après avoir suivi le cours Act-2001, un groupe d'étudiant-e-s a estimé les 16 valeurs que peut prendre la fonction de masse de probabilité du vecteur de v.a. $\boldsymbol{I} = (I_1, I_2, I_3, I_4)$ pendant leur stage d'été 2023 :

$$f_{\boldsymbol{I}}(i_1, i_2, i_3, i_4) = \Pr(I_1 = i_1, I_2 = i_2, I_3 = i_3, I_4 = i_4), \tag{21}$$

pour $(i_1, i_2, i_3, i_4) \in \{0, 1\}^4$.

Portefeuille avec 4 contrats et péril inondation

Tableau avec les 16 valeurs de $f_{\boldsymbol{I}}(i_1, i_2, i_3, i_4)$, pour $(i_1, i_2, i_3, i_4) \in \{0, 1\}^4$.

combinaison	i_1	i_2	i_3	i_4	$f_{\boldsymbol{I}}(i_1, i_2, i_3, i_4)$
1	0	0	0	0	0.4815
2	0	0	0	1	0.0360
3	0	0	1	0	0.0360
4	0	0	1	1	0.0090
5	0	1	0	0	0.0705
6	0	1	0	1	0.0120
7	0	1	1	0	0.0120
8	0	1	1	1	0.0930
9	1	0	0	0	0.1605
10	1	0	0	1	0.0120
11	1	0	1	0	0.0120
12	1	0	1	1	0.0030
13	1	1	0	0	0.0235
14	1	1	0	1	0.0040
15	1	1	1	0	0.0040
16	1	1	1	1	0.0310

Portefeuille avec 4 contrats et péril inondation

Questions :

1. Interprétez $f_{\boldsymbol{I}}(0,1,1,0)$.
2. Interprétez $f_{\boldsymbol{I}}(0,0,0,0)$.
3. Interprétez $f_{\boldsymbol{I}}(0,0,0,1)$.
4. Interprétez $f_{\boldsymbol{I}}(1,0,1,1)$.

Portefeuille avec 4 contrats et péril inondation

Pour des raisons de confidentialité, les 4 propriétés sont appelées A, B, C et D.

- La propriété B est située près de la rivière Azur (bleu ciel).
- Les propriétés A, C et D se trouvent près de la rivière Indigo (bleue foncée).
- Les deux rivières sont à plus de 500 km l'une de l'autre.
- Les propriétés A et C sont situées à la même distance de la rivière Indigo.
- La distance entre la propriété B et la rivière Azur est identique à celle entre la propriété D et la rivière Indigo.
- Les 2 rivières et les 4 propriétés sont maladroitement dessinées sur la prochaine diapositive.
- Les deux rivières sont semblables et indépendantes dans leurs débordements et leurs sautes d'humeur hydrologique.

Pour le moment, on n'a pas encore associée les composantes de $\boldsymbol{I}$, aux propriétés A, B, C et D.

Portefeuille avec 4 contrats et péril inondation

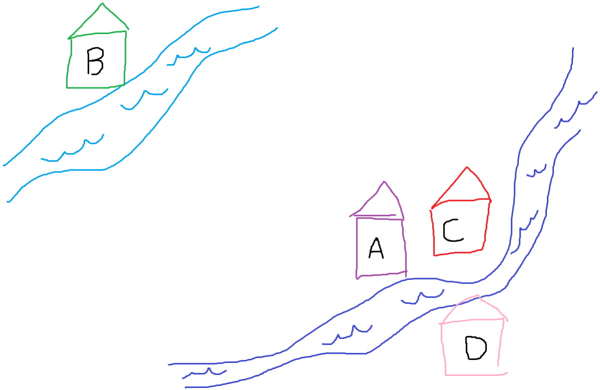

Illustration – Situation géographique des 4 propriétés

Portefeuille avec 4 contrats et péril inondation

Parmi les composantes de $\boldsymbol{I}$, il y a une v.a. (*mystère*) qui est indépendante des trois autres v.a. (qui sont dépendantes entre elles).

En répondant aux questions suivantes, vous pourrez identifier cette v.a. et les trois autres v.a. Vous pourrez aussi associer les composantes de $\boldsymbol{I}$ aux propriétés A, B, C et D.

1. Calculez les valeurs de q_j, $j \in \mathcal{V}$.
2. Regroupez en classes distinctes les v.a. avec des distributions identiques. Combien de classes avez-vous ?
3. Calculez toutes les valeurs de $f_{I_{j_1},I_{j_2}}(i_{j_1}, i_{j_2})$, $j_1 \neq j_2 \in \mathcal{V}$. Quel est le nombre de paires distinctes (I_{j_1}, I_{j_2}) ? (Suggestion : songez à l'analyse combinatoire).
4. Déterminez les paires de v.a. indépendantes et les paires de v.a. qui ne sont pas indépendantes.
5. Calculez toutes les valeurs de $f_{I_{j_1},I_{j_2},I_{j_3}}(i_{j_1}, i_{j_2}, i_{j_3})$, $j_1 \neq j_2 \neq j_3 \in \mathcal{V}$. Quel est le nombre de triplets distincts $(I_{j_1}, I_{j_2}, I_{j_3})$? (Suggestion : songez à l'analyse combinatoire).
6. Identifiez le triplet avec les trois v.a. dépendantes et identifiez les autres triplets comportant une paire de v.a. dépendantes avec une troisième v.a. qui indépendante de cette paire.
7. Associez les composantes de $\boldsymbol{I}$ aux propriétés A, B, C et D.

Portefeuille avec 4 contrats et péril inondation

Questions :

1. Calculez la probabilité que la propriété A et la propriété C soient inondées.
2. Calculez la probabilité que la propriété D et la propriété A et la propriété C soient inondées.
3. Si la propriété D est inondée, calculez la probabilité que la propriété A et la propriété C soient aussi inondées.
4. Si la propriété B est inondée, calculez la probabilité que la propriété A et la propriété C soient aussi inondées.
5. Calculez la probabilité que la propriété A et la propriété D soient inondées.
6. Calculez la probabilité que la propriété C soit inondée.
7. Si les propriétés A et D sont inondées, calculez la probabilité que la propriété C soit aussi inondée. Est-ce que cette probabilité est supérieure ou inférieure à la probabilité que la propriété C soit inondée sans savoir si les propriétés A et D ont été inondées.
8. Etc.

Portefeuille avec 4 contrats et péril inondation

Questions :

1. On définit $N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ dont la fonction de masse de probabilité est définie par
$$f_N(k) = \Pr(N = k) = \Pr\left(\sum_{j=1}^{4} I_j = k\right), \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$
2. Calculez les valeurs de $f_N(k)$, pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
3. Proposez deux façons pour calculer $E[N]$.
4. Calculez les valeurs de $\pi_N(k)$, pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
5. Calculez les valeurs de matrice variance-covariance de $\boldsymbol{I}$.
6. Proposez deux façons pour calculer $Var(N)$.
7. Etc.

Portefeuille avec 4 contrats et péril inondation

Questions :

1. On définit les pertes totales dûes à une inondation pour le portefeuille par la v.a. $S = \sum_{j=1}^{4} X_j$, où $X_j = b_j I_j$, $j \in \mathcal{V}$, sont les pertes éventuelles pour le contrat j et $b_j = 5 - j$ est la valeur de la propriété $j \in \mathcal{V}$.
2. On définit la fonction de masse de probabilité de la v.a. S par
$$f_S(k) = \Pr(S = k) = \Pr\left(\sum_{j=1}^{4} X_j = k\right), \quad k \in \{0, 1, \ldots, 10\}.$$
3. Calculez les valeurs de $E[X_j]$ et $Var(X_j)$, pour $j \in \mathcal{V}$.
4. Calculez les valeurs de matrice variance-covariance de $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_4)$.
5. Calculez les valeurs de $f_S(k)$, pour $k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$.
6. Proposez deux façons pour calculer $E[S]$.
7. Proposez deux façons pour calculer $Var(S)$.
8. Calculez les valeurs de $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$, pour $\kappa \in \{0.9, 0.95, 0.97, 0.99\}$.
9. Pour $j = 1$, calculez toutes les valeurs possibles de la v.a. $C_{j,4}$, la part allouée au contrat j, où $C_{j,4} = \frac{E[X_j]}{E[S]} S$. À refaire pour $j \in \{2, 3, 4\}$. Calculez la variance de cette part pour chaque $j \in \mathcal{V}$.

Portefeuille avec 4 contrats et péril inondation

Dans cette section, on visait à atteindre les objectifs suivants :

- Illustrer la distinction entre « indépendance » et « distributions identiques ». On s'est arrangé pour qu'il y ait . . .
  - . . .des paires de v.a. (de loi Bernoulli) indépendantes et avec distributions identiques ;
  - . . .des paires de v.a. (de loi Bernoulli) indépendantes et avec distributions non identiques ;
  - . . .des paires de v.a. (de loi Bernoulli) dépendantes et avec distributions identiques ;
  - . . .des paires de v.a. (de loi Bernoulli) dépendantes et avec distributions non identiques.

  L'exemple est basé sur un cas pratique et réaliste.
- S'amuser avec les probabilités conditionnelles et s'introduire à leur utilité pour des fins de prédiction.
- Toutes les méthodes d'apprentissage automatique sont basées sur les probabilités conditionnelles. Merci à Thomas Bayes (1702-1761), mathématicien britannique et pasteur de l'Église presbytérienne.

- Merci aux étudiant-e-s du cours Act-2001 H2024 pour leurs questions.

Références

Références I

Cossette, H. and Marceau, E. (2021).
Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives.
Monographie.