ACT-2001 Introduction à l'actuariat 2

Atelier du 16 janvier 2025 (Semaine 1)

Étienne Marceau
avec Jérémie Barde, Ève Busque, Alexandre Dubeau et Philippe Leblanc

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

2025-01-16

Université Laval | Faculté des sciences et de génie | École d'actuariat

Quantact CIMMUL CIRCERB crdm.ul Centre de recherche en données massives de l'Université Laval

Institut intelligence et données

Avant-propos

Avant-propos

Sources spécifiques pour le contenu des diapos

- Site du cours sur `monportail.ulaval`.

Livre de référence

- [Cossette and Marceau, 2021].

Diapositives

- Logiciel : LaTeX
- Package : Beamer
- Éditeurs : Overleaf

Calculs et illustrations

- Toutes les calculs et les illustrations ont été réalisés dans le langage R grâce au logiciel GNU R mis à disposition par le R Project.
- Les codes R ont été conçus dans l'environnement de développement intégré RStudio.

Avant-propos

Les diapositives contiennent du matériel pour le cours Act-2001 qui sera présenté pendant les ateliers au semestre H2024.

Le document de référence est [Cossette and Marceau, 2021].

Table des matières I

Exemple en classe de la séance du mercredi 17 janvier 2024

Exemple en classe de la séance du mercredi 17 janvier 2024

Énoncé :

- Soit X une v.a. discrète définie sur l'ensemble fini $\mathcal{A}$, dont la fgp est
$$\mathcal{P}_X(s) = 0.3 + 0.15s^{100} + 0.4s^{400} + 0.1s^{1000} + 0.05s^{2000}, \quad |s| \leq 1.$$
- L'ensemble $\mathcal{A}$ est le support de la distribution de la v.a. X.
- La v.a. X représente les pertes éventuelles en sinistres pour la couverture d'un péril d'un contrat d'assurance dommages.
- La prime pure pour le contrat est $E[X]$.
- Questions : pour chacun des items des prochaines diapositives (sauf un item), il est important de faire, dans l'ordre, les démarches, les calculs *à la main* et les calculs en utilisant `R`.

Avec cet exemple, on vise à rencontrer les objectifs suivants :

- Rappeler des notions de base en probabilité.
- Intégrer les aptitudes acquises en R pour résoudre des questions de base en probabilité.
- Faire le pont entre (rive A) des cours de probabilité et de R et (rive B) le cours d'introduction à l'actuariat 2.
- Avoir un aperçu de questions selon les formats "traditionnels" et "informatiques".

Exemple en classe de la séance du mercredi 17 janvier 2024

Support $\mathcal{A}$ et fmp de X.

1. À partir de la fgp $\mathcal{P}_X$, identifiez les élements de l'ensemble $\mathcal{A}$.
2. À partir de la fgp $\mathcal{P}_X$, identifiez les valeurs strictement positives de la fmp de X.
3. Expliquez votre démarche aux items [1] et [2] ci-dessus.

Exemple en classe de la séance du mercredi 17 janvier 2024

Espérance $E[X]$ de X.

1. Développez l'expression de l'espérance $E[X]$ en termes de la fmp de X.
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) la valeur de $E[X]$.
3. Utilisez `R` pour calculer la valeur de $E[X]$.

Exemple en classe de la séance du mercredi 17 janvier 2024

Deuxième moment $E[X^2]$ de X.

1. Développez l'expression de $E[X^2]$ en termes de la fmp de X.
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) la valeur de $E[X^2]$.
3. Utilisez `R` pour calculer la valeur de $E[X^2]$.

Exemple en classe de la séance du mercredi 17 janvier 2024

Variance $Var(X)$ de X.

1. Développez l'expression de $Var(X)$.
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) la valeur de $Var(X)$.
3. Utilisez `R` pour calculer la valeur de $Var(X)$.

Exemple en classe de la séance du mercredi 17 janvier 2024

Fonction de répartition de X.

1. Développez l'expression de $F_X(x)$, $x \geq 0$.
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) la valeur de $F_X(x)$ pour $x = 500$. Refaire pour $x \in \{30, 1343, 764\}$.
3. Utilisez `R` pour calculer la valeur de $F_X(x)$ pour $x = 500$. Refaire pour $x \in \{30, 1343, 764\}$.

Exemple en classe de la séance du mercredi 17 janvier 2024

On s'amuse : la compagnie d'assurance prévoit un montant c pour financer les pertes en sinistres du contrat d'assurance. On définir $\zeta_X(c)$ comme étant la probabilité que les sinistres dépassent le montant c.

1. Développez l'expression de $\zeta_X(c)$ pour $c \geq 0$.
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) la valeur de $\zeta_X(c)$ pour $c = 800$. Refaire pour $x \in \{E[X], E[X] \times (1.5), 1400\}$.
3. Utilisez `R` pour calculer la valeur de $\zeta_X(c)$ pour $c = 800$. Refaire pour $x \in \{E[X], E[X] \times (1.5), 1400\}$.

Exemple en classe de la séance du mercredi 17 janvier 2024

On s'amuse : la compagnie d'assurance impose une limite c au remboursement des pertes en sinistres selon le contrat d'assurance. On définit $\nu_X(c) = E[\min(X; c)]$ comme étant l'espérance du montant que la compagnie pourra rembourser en tenant compte de la limite c.

1. Développez l'expression de $\nu_X(c)$ pour $c \geq 0$.
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) la valeur de $\nu_X(c)$ pour $c = 800$. Refaire pour $x \in \{500, 1400\}$.
3. Utilisez `R` pour calculer la valeur de $\nu_X(c)$ pour $c = 800$. Refaire pour $x \in \{500, 1400\}$.

Exemple en classe de la séance du mercredi 17 janvier 2024

On s'amuse : la compagnie d'assurance s'engage à rembourser l'excédent des pertes en sinistres dépassant la limite de rétention c. On définir $\pi_X(c) = E[\max(X - c; 0)]$ comme étant l'espérance du montant que la compagnie pourra rembourser en tenant compte de la limite c.

1. Développez l'expression de $\pi_X(c)$ pour $c \geq 0$.
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) la valeur de $\pi_X(c)$ pour $c = 800$. Refaire pour $x \in \{500, 1400\}$.
3. Utilisez `R` pour calculer la valeur de $\pi_X(c)$ pour $c = 800$. Refaire pour $x \in \{500, 1400\}$.

Exemple en classe de la séance du mercredi 17 janvier 2024

On s'amuse avec la fgm de X. La compagnie d'assurance demande la prime $\psi_\rho(X)$ où

$$\psi_\rho(X) = \frac{1}{\rho}\ln\left(\mathcal{M}_X(\rho)\right), \quad \rho > 0,$$

où $\mathcal{M}_X$ est la fgm de X, définie par

$$\mathcal{M}_X(t) = E[\mathrm{e}^{tX}], \quad t \geq 0.$$

1. Développez l'expression permettant de calculer la fgm de X.
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) la valeur de $\psi_\rho(X)$, pour $\rho \in \{0.001\}$. Refaire pour $\rho \in \{0.0005, 0.002\}$.
3. Utilisez `R` pour calculer la valeur de $\psi_\rho(X)$, pour $\rho \in \{0.001\}$. Refaire pour $\rho \in \{0.0005, 0.002\}$.
4. À partir des valeurs obtenues, indiquez votre intuition quant au comportement de la prime $\psi_\rho(X)$ en fonction de ρ ainsi que par rapport à la prime pure (prime pure $= E[X]$) et la valeur maximale (finie) que peut prendre la v.a. X. Il n'est pas nécessaire de démontrer.

Variante de l'Exemple en classe du mercredi 17 janvier 2024

Variante de l'Exemple en classe du mercredi 17 janvier 2024

Énoncé :

- Refaire toutes les questions de l'Exemple en classe en supposant que la fonction de masse de probabilité (fmp) de X est donnée par

$$f_X(k) = \begin{cases} 1 - a_1, & k = 0 \\ a_1 \times \left(\left(\frac{k}{2000} \right)^{a_2} - \left(\frac{k-1}{2000} \right)^{a_2} \right), & k = 1, \ldots, 2000 \end{cases},$$

  où $a_1 = 0.2$ et $a_2 = 3$.
- On a conçu la variante de telle sorte que l'on doive effectuer les calculs avec `R` ou `Python`.

Avec cet exemple, on vise à rencontrer les objectifs suivants :

- Rappeler des notions de base en probabilité.
- Intégrer les aptitudes acquises en R pour résoudre des questions de base en probabilité.
- Faire le pont entre (rive A) des cours de probabilité et de R et (rive B) le cours d'introduction à l'actuariat 2.
- Avoir un aperçu d'une question selon le format "informatique".
- Comprendre que les questions demandées dans l'Exemple sont réalisables peu importe la loi discrète choisie pour la v.a. X.

Fonction génératrice des probabilités

Fonction génératrice des probabilités

Soit une v.a. discrète X définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ avec une f.m.p. notée par

$$f_X(k) = \Pr(X = k), \ k \in \mathbb{N}.$$

La fonction de génératrice de probabilité (f.g.p.) de la v.a. X permet de représenter la f.m.p. de la v.a. X sous la forme d'une série de puissances.
Les coefficients de cette série de puissances correspondent aux valeurs de la fonction de masse de probabilité.

Définition 1

La fonction génératrice de probabilités de la v.a. X est définie par

$$\mathcal{P}_X\left(t\right) = E\left[t^X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} f_X\left(k\right) t^k, \tag{1}$$

pour tout nombre complexe t tel que $|t| \leq 1$ (en particulier pour des nombres réels $t \in [0,1]$).

Fonction génératrice des probabilités

Fonction de masse de probabilité. La valeur de $f_X(k)$ est calculée à partir de $\mathcal{P}_X(t)$ avec

$$f_X(k) = \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\mathcal{P}_X(t)\bigg|_{t=0}. \tag{2}$$

La relation en (2) permet d'identifier le coefficient dans la série de puissances en (1).

Fonction génératrice des probabilités

Proposition 1

$\mathcal{P}_X(t) = t^c$ $(c \in \mathbb{N})$ *correspond à la f.g.p. d'une v.a.* X *où* $\Pr(X = c) = 1$.

UNIVERSITÉ LAVAL

Exemple 1

Soit une v.a. discrète X avec

$$\mathcal{P}_X(t) = 0.2 + 0.4t + 0.3t^2 + 0.1t^3, \text{ pour } t \in [0, 1].$$

Sans recourir à (2), on déduit les valeurs suivantes de la fonction de masse de probabilité de X :

k	0	1	2	3
$f_X(k)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Exemple 2

Soit une v.a. discrète X avec

$$\mathcal{P}_X(t) = 0.2 + 0.4t^2 + 0.3t^7 + 0.1t^{15}, \text{ pour } t \in [0,1].$$

Il n'est pas nécessaire d'utiliser (2) pour obtenir les valeurs suivantes de la fonction de masse de probabilité de X :

k	0	2	7	15
$f_X(k)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Fonction génératrice des probabilités

Pour certaines lois discrètes connues, la fonction de "t", $\mathcal{P}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\, t^k$, s'exprime sous une forme fermée. C'est notamment le cas de la loi de Poisson.

Exemple 3

Loi de Poisson. *Poisson ($\lambda \in \mathbb{R}^+$) :*

$$\mathcal{P}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\, t^k = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)},$$

pour tout nombre complexe t tel que $|t| \leq 1$ (en particulier pour des nombres réels $t \in [0,1]$).
[JCA : indiquer la fonction R pour la fmp].

Prouver le résultat de la FGP de la loi de Poisson.

Fonction génératrice des probabilités

Il faut être en mesure de décoder la FMP é à partir de la f.g.p. d'une v.a.

Exemple 4 (Loi Poisson gonflée à zéro)

Soit une v.a. X *avec*

$$\mathcal{P}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\, t^k = 1 - q + q \times \mathrm{e}^{\lambda(t-1)},$$

pour $t \in [0,1]$, *avec* $q \in (0,1)$ *et* $\lambda > 0$. *Alors, avec (2), on déduit*

$$f_X(0) = 1 - q + q\mathrm{e}^{-\lambda}$$

et

$$f_X(k) = q\frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!},\ k \in \mathbb{N}^+.$$

[JCA : pouvez-vous faire une illustration avec $q = 0.5$ ***et*** $\lambda = 2$***].***

Fonction génératrice des probabilités

Exemple 4 - Solution

Avec (5), $q = 0.5$ et $\lambda = 2$, on a

$$f_X(0) = \frac{1}{0!}\frac{d^0}{dt^0}\mathcal{P}_X(t)\,|_{t=0} = 1 - q + qe^{-\lambda} = 0.56767$$

et

$$f_X(1) = \frac{1}{1!}\frac{d^1}{dt^1}\mathcal{P}_X(t)\,|_{t=0} = q\lambda e^{\lambda(t-1)}|_{t=0} = q\lambda e^{-\lambda} = 0.13534.$$

On continue selon cette même logique pour évaluer les autres valeurs de la fonction de masse de probabilité.

Fgp et somme de v.a. indépendantes

Fgp et somme de v.a. indépendantes

Relation de base

Soit les v.a. indépendantes X_1, ..., X_n définies sur $\mathbb{N}$ avec

$$f_{X_i}(k) = \Pr(X_i = k),\ k \in \mathbb{N},\ .$$

et

$$\mathcal{P}_{X_i}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\, t^k = E\left[t^{X_i}\right], t \in [0,1], i = 1, 2, ..., n.$$

Fgp et somme de v.a. indépendantes

Relation de base

On définit $S = X_1 + ... + X_n$.
Alors, l'expression de la f.g.p. de S est

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_S(t) &= E\left[t^S\right] \\
&= E\left[t^{X_1+...+X_n}\right] \\
&= E\left[t^{X_1}\right] \times ... \times E\left[t^{X_n}\right] \text{ (indépendance entre les v.a. } X_1, ..., X_n\text{)}
\end{aligned}$$

qui devient

$$\mathcal{P}_S(t) = \mathcal{P}_{X_1}(t) \times ... \times \mathcal{P}_{X_n}(t), \; t \in [0,1]. \tag{3}$$

La relation en (3) est fort connue.

Fgp et somme de v.a. indépendantes

En coulisses

Habituellement, on se contente du formalisme tel la relation en (3) et des expressions fermées pour les lois discrètes connues, tout en oubliant ce qui se passe en coulisses en multipliant les séries convergentes de puissances.
Dans le cas où la v.a. X_i est définie sur un support fini, $\mathcal{P}_{X_i}(t)$ correspond à un polynôme en "t" ($i \in \{1, 2, ..., n\}$).

Fgp et somme de v.a. indépendantes

En coulisses

En appliquant la relation en (3), on multiplie des polynômes et le résultat de ce produit est, $\mathcal{P}_S(t)$, est lui-même un polynôme.

Les coefficients de ce polynôme correspondent aux valeurs de la fonction de masse de probabilité de la v.a. S.

Cette procédure est illustrée dans les prochains exemples.

Cette procédure est identique dans le cas de v.a. définies sur $\mathbb{N}$.

Fgp et somme de v.a. indépendantes

En coulisses

Soit les v.a. indépendantes X_1 et X_2 avec

$$f_{X_i}(k) = \Pr(X_i = k) > 0,\ k \in \{0, 1, 2\},\ i = 1, 2.$$

On définit $S = X_1 + X_2$.
On vise à calculer les valeurs de

$$f_S(k) = \Pr(S = k) > 0,\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Pour y parvenir, on applique (3)

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(t) &= \mathcal{P}_{X_1}(t) \times \mathcal{P}_{X_2}(t) \\ &= \left(f_{X_1}(0) + f_{X_1}(1)\,t + f_{X_1}(2)\,t^2\right) \times \left(f_{X_2}(0) + f_{X_2}(1)\,t + f_{X_2}(2)\,t^2\right)\end{aligned}$$

et, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(t) &= f_{X_1}(0)\,f_{X_2}(0) \\ &\quad + \left(f_{X_1}(0)\,f_{X_2}(1) + f_{X_1}(1)\,f_{X_2}(0)\right) \times t \\ &\quad + \left(f_{X_1}(0)\,f_{X_2}(2) + f_{X_1}(1)\,f_{X_2}(1) + f_{X_1}(2)\,f_{X_2}(0)\right) \times t^2 \\ &\quad + \left(f_{X_1}(1)\,f_{X_2}(2) + f_{X_1}(2)\,f_{X_2}(1)\right) \times t^3 \\ &\quad + \left(f_{X_1}(2)\,f_{X_2}(2)\right) \times t^4.\end{aligned} \tag{4}$$

Ensuite, puisque

$$\mathcal{P}_S(t) = f_S(0) + f_S(1)\,t + f_S(2)\,t^2 + f_S(3)\,t^3 + f_S(4)\,t^4. \tag{5}$$

Enfin, comme (4) et (5) sont identiques, on identifie les coefficients ($f_S(0)$, ..., $f_S(4)$) du polynôme en "t" de (5) à partir des coefficients du polynôme en "t" de (4).

Fgp et somme de v.a. indépendantes

En coulisses

On généralise la procédure décrite en considérant la somme de deux v.a. définies sur $\mathbb{N}$. Soit les v.a. indépendantes X_1 et X_2 avec

$$\mathcal{P}_{X_i}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{X_i}(k)\, t^k,\ i = 1, 2.$$

On définit $S = X_1 + X_2$.

Remarque 1

1. $E[S] = E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2]$ *(par linéarité de l'esprérance)*
2. $Var[S] = Var[X_1 + X_2] = Var[X_1] + Var[X_2] + 2Cov(X_1, X_2) = Var[X_1] + Var[X_2]$, *car* $X_1 \perp X_2 \implies Cov(X_1, X_2) = 0$. *(N.B. La flèche dans une seule direction.)*

Clairement, $\mathcal{P}_{X_1}(t)$ et $\mathcal{P}_{X_2}(t)$ sont des séries de puissances dont l'argument (la variable) est $t \in [0,1]$.
Alors, la f.g.p. de la v.a. S, donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(t) &= \mathcal{P}_{X_1}(t) \times \mathcal{P}_{X_2}(t) \\ &= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} f_{X_1}(k_1)\, t^{k_1}\right) \times \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} f_{X_2}(k_2)\, t^{k_2}\right),\end{aligned}$$

est une série de puissances dont l'argument (la variable) est "t" et dont les coefficients sont les valeurs de f_S.

Fgp et somme de v.a. indépendantes

En coulisses

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_S(t) &= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} f_{X_1}(k_1)\, t^{k_1}\right) \times \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} f_{X_2}(k_2)\, t^{k_2}\right) \\
&= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} f_{X_1}(k_1)\, t^{k_1} \times f_{X_2}(k_2)\, t^{k_2} \qquad (6)
\end{aligned}$$

Fgp et somme de v.a. indépendantes

En coulisses

La double somme en (6) peut se résumer en somme unique en mettant entre parenthèses les coefficients de t^l pour chaque $l \in \mathbb{N}$, comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(t) &= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} f_{X_1}(k_1)\, t^{k_1} \times f_{X_2}(k_2)\, t^{k_2} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} t^l \left(\sum_{j=0}^{l} f_{X_1}(j)\, f_{X_2}(l-j) \right), \qquad (7)\end{aligned}$$

où le coefficient de t^l, donné par

$$\sum_{j=0}^{l} f_{X_1}(j)\, f_{X_2}(l-j),$$

est la valeur de $f_S(l)$ par la définition de la f.g.p de S.

En effet, la définition de la f.g.p. de la v.a. S est

$$\mathcal{P}_S(t) = \sum_{l=0}^{\infty} f_S(l)\, t^l. \tag{8}$$

Puisque les deux représentations en (7) et (8) de la f.g.p. de la v.a. S sont identiques, il suffit d'identifier (pour chaque l) le coefficient de t^l dans (7) pour déterminer l'expression de $f_S(l)$ dans (8), permettant de conclure que

$$f_S(l) = \sum_{j=0}^{l} f_{X_1}(j)\, f_{X_2}(l-j),$$

ce qui correspond au produit de convolution de 2 fonctions de masse probabilité.

Fgp et somme de v.a. indépendantes

Exemple 5

Soit les v.a. indépendantes $X_1 \sim Binom\,(n = 10, q = 0.2)$ *et* $X_2 \sim Binom\,(n = 10, q = 0.3)$.
On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.

1. *Identifier l'expression de* $\mathcal{P}_S\,(t)$.
2. *Calculer* $E\,[S]$.
3. *Calculer (à la main) les valeurs de* $f_S\,(l)$, $l = 0, 1, 2$.
4. *Calculer (avec* `R`*) les valeurs de* $f_S\,(l)$, $l = 0, 1, 2, ..., 20$.
5. *Calculer avec* `R` *la valeur de* $E\,[S]$ *avec les valeurs de* $f_S\,(l)$, $l = 0, 1, 2, ...20$ *et comparer avec la valeur connue (déjà calculée).*

Fgp et somme de v.a. indépendantes

Exemple 6 (Un peu de pratique en R avec un résultat connu)

Soit les v.a. indépendantes $X_1 \sim Poisson\,(\lambda = 2)$ *et* $X_2 \sim Poisson\,(\lambda = 3)$.
On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.

1. *À l'aide de la FGP de ces lois, trouver la loi de S.*
2. *Calculer* $E\,[S]$.
3. *Calculer (à la main) les valeurs de* $f_S\,(l)$, $l = 0, 1, 2$.
4. *Calculer (avec* `R`*) les valeurs de* $f_S\,(l)$, $l = 0, 1, 2, ..., 30$.
5. *Calculer avec* `R` *la valeur de* $E\,[S]$ *avec les valeurs de* $f_S\,(l)$, $l = 0, 1, 2, ...30$ *et comparer avec la valeur connue (déjà calculée).*

N.B. : Le support de la loi de Poisson est infini, mais les valeurs de support jusqu'à 30 suffisent numériquement.

Exemple 7 (Somme des variables aléatoires discrètes quelconques)

Soit les v.a. indépendantes X_1 et X_2.
On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.

X_1	12	1345	19394
$\Pr[X_1 = x]$	0.3	0.3	0.4

X_2	1	4	5	55555	4321	112
$\Pr[X_2 = x]$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

1. *Calculer $E[S]$.*
2. *Calculer à la main $\Pr[S = 1348]$ et $\Pr[S = 74949]$.*
3. *En R, calculer $\pi_S(20000)$.*

Fgp et somme de v.a. indépendantes

Exemple 8 (Somme des variables aléatoires continues - à la main)

Source : Exercice traditionnel numéro 17 du chapitre 1
On considère deux v.a. indépendantes X_1 *et* X_2 *où* $X_1 = 2000Y_1$*, avec* $Y_1 \sim Beta(2,1)$ *et* $X_2 \sim Exp(1/1000)$*. On définit la v.a.* $S = X_1 + X_2$*.*

1. *Développer l'expression de* $f_S(x)$*.*
2. *Calculer* $F_S(x)$ *pour 1500 et 3000.*

N.B. : Dans le cadre de ce cours, pour les lois continues, on peut faire des sommes de variables aléatoires à la main lorsque le produit de convolution est joli avec l'intégration ou des cas connus. Pour les autres cas, nous aurons recours à la simulation Monte Carlo plus tard dans la session.

Exemple 9 (Exemple de consolidation)

Soit une variable aléatoire X_1 avec FGP

$$\mathcal{P}_{X_1}(t) = 0.45e^{0.4(t-1)} + 0.55e^{5(t-1)}.$$

Soit une autre variable aléatoire, indépendante de la première, X_2 avec FGP

$$\mathcal{P}_{X_2}(t) = e^{8(t-1)}.$$

On définit $S = X_1 + X_2$.

1. *Calculer les valeurs de $\Pr[S = s]$ pour $s = 0, 1, \ldots, 40$*
2. *Calculer $F_S^{-1}(0.8)$*
3. *Calculer $M_S(0.67)$*

N.B. : Le support de la loi de Poisson est infini, mais les valeurs de support jusqu'à 50 suffisent numériquement.

Références

Références I

Cossette, H. and Marceau, E. (2021).
Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives.
Monographie.