ACT-2001 Introduction à l'actuariat 2

Atelier de la semaine du 20 janvier 2025 (Semaine 2)

Étienne Marceau, avec Jérémie Barde, Ève Busque, Alexandre Dubeau et Philippe Leblanc

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

2025-01-21

Avant-propos

Avant-propos

Sources spécifiques pour le contenu des diapos

- Site du cours sur `monportail.ulaval`.

Livre de référence

- [Cossette and Marceau, 2021].

Diapositives

- Logiciel : LaTeX
- Package : Beamer
- Éditeurs : Overleaf

Calculs et illustrations

- Toutes les calculs et les illustrations ont été réalisés dans le langage R grâce au logiciel GNU R mis à disposition par le R Project.
- Les codes R ont été conçus dans l'environnement de développement intégré RStudio.

Avant-propos

Les diapositives contiennent du matériel pour le cours Act-2001 qui sera présenté pendant les ateliers au semestre H2025.

Le document de référence est [Cossette and Marceau, 2021].

Table des matières I

Table des matières II

Exemple en classe du mercredi 17 janvier 2024 (suite)

Exemple en classe du mercredi 17 janvier 2024 (suite)

Énoncé (suite de l'exemple dans le document de l'atelier (no2) de la semaine du 22 janvier 2024) :

- Soit X une v.a. discrète définie sur l'ensemble fini $\mathcal{A}$, dont la fgp est

$$\mathcal{P}_X(s) = 0.3 + 0.15s^{100} + 0.4s^{400} + 0.1s^{1000} + 0.05s^{2000}, \quad |s| \leq 1.$$

- L'ensemble $\mathcal{A}$ est le support de la distribution de la v.a. X.
- La v.a. X représente les pertes éventuelles en sinistres pour la couverture d'un péril d'un contrat d'assurance dommages.
- La prime pure pour le contrat est $E[X]$.
- Questions : pour chacun des items des prochaines diapositives (sauf un item), il est important de faire, dans l'ordre, les démarches, les calculs *à la main* et les calculs en utilisant `R`.

Avec cet exemple, on vise à rencontrer les objectifs suivants :

- Rappeler des notions de base en probabilité.
- Intégrer les aptitudes acquises en R pour résoudre des questions de base en probabilité.
- Faire le pont entre (rive A) des cours de probabilité et de R et (rive B) le cours d'introduction à l'actuariat 2.
- Avoir un aperçu de questions selon les formats "traditionnels" et "informatiques".

Exemple en classe du mercredi 17 janvier 2024 (suite)

VaR et TVaR de X.

1. Développez l'expression de la mesure $TVaR_\kappa(X)$, $\kappa \in (0,1)$.
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) les valeurs de $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$, pour $\kappa\{0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 0.85, 0.9499, 0.095, 0.9501, 0.99, 0.999, 0.9999\}$.
3. Utilisez `R` pour calculer les valeurs de $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$, pour $\kappa \in \{0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 0.85, 0.9499, 0.9500, 0.9501, 0.99, 0.999, 0.9999\}$.

Important : En `R` (ou tout autre langage informatique), on ne peut pas utiliser un outil d'optimisation numérique (telle que la fonction `optimize`) pour calculer la valeur de la VaR d'une v.a. discrète X.

Exemple en classe du mercredi 17 janvier 2024 (suite)

On s'amuse avec le théorème de la fonction quantile.

1. Développez l'expression de mesure définie par

$$RVaR_{\kappa_1,\kappa_2}(X) = \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} F_X^{-1}(u)\mathrm{d}u, \quad 0 < \kappa_1 < \kappa_2 < 1.$$

   Note pour la notation de la mesure :
   - VaR = Value-at-Risk
   - TVaR = Tail-VaR = Tail-Value-at-Risk
   - RVaR = Range-VaR = Range-Value-at-Risk
2. Interprétez la mesure RVaR et comparez cette mesure avec les mesures VaR et TVaR.
3. Calculez à la main (avec une calculatrice) les valeurs de $VaR_{\kappa_1}(X)$, $VaR_{\kappa_2}(X)$ et $RVaR_{\kappa_1,\kappa_2}(X)$, pour $(\kappa_1, \kappa_2) \in \{(0.8, 0.9), (0.8, 0.995), (0.9, 0.995)\}$.
4. Utilisez `R` pour calculer les valeurs de $VaR_{\kappa_1}(X)$, $VaR_{\kappa_2}(X)$ et $RVaR_{\kappa_1,\kappa_2}(X)$, pour $(\kappa_1, \kappa_2) \in \{(0.8, 0.9), (0.8, 0.995), (0.9, 0.995)\}$.

Important : En `R` (ou tout autre langage informatique), on ne peut pas utiliser un outil d'optimisation numérique (telle que la fonction `optimize`) pour calculer la valeur de la VaR d'une v.a. discrète X.

Variante de l'Exemple en classe du mercredi 17 janvier 2024 (suite)

Énoncé :

- Soit la v.a. discrète X dont la fonction de masse de probabilité (fmp) est donnée par

$$f_X(k) = \begin{cases} 1 - a_1, & k = 0 \\ a_1 \times \left(\left(\frac{k}{2000}\right)^{a_2} - \left(\frac{k-1}{2000}\right)^{a_2} \right), & k = 1, \ldots, 2000 \end{cases},$$

  où $a_1 = 0.2$ et $a_2 = 3$.
- On a conçu la variante de telle sorte que l'on doive effectuer les calculs avec `R` ou `Python`.

Avec cet exemple, on vise à rencontrer les objectifs suivants :

- Rappeler des notions de base en probabilité.
- Intégrer les aptitudes acquises en `R` pour résoudre des questions de base en probabilité.
- Faire le pont entre (rive A) des cours de probabilité et de R et (rive B) le cours d'introduction à l'actuariat 2.
- Avoir un aperçu d'une question selon le format "informatique".
- Comprendre que les questions demandées dans l'Exemple sont réalisables peu importe la loi discrète choisie pour la v.a. X.

Variante de l'Exemple en classe du mercredi 17 janvier 2024 (suite)

VaR et TVaR de X.

1. Développez l'expression de la mesure $TVaR_\kappa(X)$, $\kappa \in (0,1)$.
2. Utilisez `R` pour calculer les valeurs de $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$, pour $\kappa \in \{0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.95, 0.99, 0.999, 0.9999\}$.

Important : En `R` (ou tout autre langage informatique), on ne peut pas utiliser un outil d'optimisation numérique (telle que la fonction `optimize`) pour calculer la valeur de la VaR d'une v.a. discrète X.

On s'amuse avec le théorème de la fonction quantile.

1. Développez l'expression de mesure définie par

$$RVaR_{\kappa_1,\kappa_2}(X) = \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1}\int_{\kappa_1}^{\kappa_2} F_X^{-1}(u)\mathrm{d}u, \quad 0 < \kappa_1 < \kappa_2 < 1.$$

   Note pour la notation de la mesure :
   - VaR = Value-at-Risk
   - TVaR = Tail-VaR = Tail-Value-at-Risk
   - RVaR = Range-VaR = Range-Value-at-Risk
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) les valeurs de $VaR_{\kappa_1}(X)$, $VaR_{\kappa_2}(X)$ et $RVaR_{\kappa_1,\kappa_2}(X)$, pour $(\kappa_1, \kappa_2) \in \{(0.8, 0.9), (0.8, 0.995), (0.9, 0.995)\}$.
3. Utilisez R pour calculer les valeurs de $VaR_{\kappa_1}(X)$, $VaR_{\kappa_2}(X)$ et $RVaR_{\kappa_1,\kappa_2}(X)$, pour $(\kappa_1, \kappa_2) \in \{(0.8, 0.9), (0.8, 0.995), (0.9, 0.995)\}$.

Important : En R (ou tout autre langage informatique), on ne peut pas utiliser un outil d'optimisation numérique (telle que la fonction `optimize`) pour calculer la valeur de la VaR d'une v.a. discrète X.

VaR, TVaR, RVaR et variables aléatoires discrètes

VaR, TVaR, RVaR et variables aléatoires discrètes

Soit une v.a. discrète X prenant des valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fmp est définie par

$$f_X(k) = \Pr(X = k), \quad k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Dans cet exemple, on vise à atteindre les objectifs suivants :

1. Concevoir soi-même une fonction en R pour calculer les valeurs de $\pi_X(x)$, pour $x \in \mathbb{R}_+$, peu importe le choix de fmp f_X de X. Note : j'ai bien écrit $x \in \mathbb{R}_+$.
2. Concevoir soi-même une fonction en R pour calculer les valeurs de $E[X \times \mathbb{1}_{\{X>x\}}]$, pour $x \in \mathbb{R}_+$, peu importe le choix de fmp f_X de X. Note : j'ai bien écrit $x \in \mathbb{R}_+$.
3. Concevoir soi-même une fonction en R pour calculer les valeurs de $VaR_\kappa(X)$, pour $\kappa \in (0, 1)$, peu importe le choix de fmp f_X de X.
4. En se basant sur l'expression de la TVaR avec la fonction stop-loss, concevoir soi-même une fonction en R pour calculer les valeurs de $TVaR_\kappa(X)$, pour $\kappa \in (0, 1)$, peu importe le choix de fmp f_X de X.
5. En se basant sur l'expression de la TVaR avec l'espérance tronquée, concevoir soi-même une fonction en R pour calculer les valeurs de $TVaR_\kappa(X)$, pour $\kappa \in (0, 1)$, peu importe le choix de fmp f_X de X.
6. Concevoir soi-même une fonction en R pour calculer les valeurs de $RVaR_{\kappa_1,\kappa_2}(X)$, pour $0 < \kappa_1 < \kappa_2 < 1$, peu importe le choix de fmp f_X de X.
7. Concevoir <u>sa</u> propre fonction. Les auxiliaires vont proposer leur propres créations par la suite.

VaR, TVaR, RVaR et variables aléatoires discrètes

Utilisez les 6 fonctions conçues pour calculer les valeurs de la fonction stop-loss, de l'espérance tronquée, de la VaR, de la TVaR et de la RVaR selon chacune des hypothèses fournies ci-dessous :

1. $X \sim Pois(\lambda)$, $\lambda = 4$.
2. $X \sim NBinom(r, q)$, $(r, q) = (0.4, q = \frac{1}{11})$.
3. $X \sim NBinom(r, q)$, $(r, q) = (4, q = \frac{1}{2})$.
4. $f_X(k) = 0.8\frac{\mathrm{e}^{-2}2^k}{k!} + 0.2\frac{\mathrm{e}^{-12}12^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$.

Calculez aussi les valeurs de $E[X]$ et $Var(X)$ pour chacune de ces hypothèses.

VaR, TVaR, RVaR et variables aléatoires continues

Exemple 1 (Loi gamma)

Soit une v.a. $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$ *avec les hypothèses suivantes :*

- *H1 :* $\alpha = 0.5$ *et* $\beta = \frac{\alpha}{100}$.
- *H2 :* $\alpha = 1$ *et* $\beta = \frac{\alpha}{100}$.
- *H3 :* $\alpha = 2.5$ *et* $\beta = \frac{\alpha}{100}$.
- *H4 :* $\alpha = 5$ *et* $\beta = \frac{\alpha}{100}$.

Questions : pour les hypothèses H1 - H4, effectuer les calculs suivants :

1. *Calculez* $E[X]$ *et* $Var(X)$.
2. *Concevoir soi-même une fonction en* R *pour calculer les valeurs de* $\pi_X(x)$, *pour* $x \in \mathbb{R}_+$.
3. *Concevoir soi-même une fonction en* R *pour calculer les valeurs de* $E[X \times \mathbb{1}_{\{X>x\}}]$, *pour* $x \in \mathbb{R}_+$.
4. *Concevoir soi-même une fonction en* R *pour calculer les valeurs de* $VaR_\kappa(X)$, *pour* $\kappa \in (0,1)$.
5. *Concevoir soi-même une fonction en* R *pour calculer les valeurs de* $TVaR_\kappa(X)$, *pour* $\kappa \in (0,1)$.
6. *Concevoir soi-même une fonction en* R *pour calculer les valeurs de* $RVaR_{\kappa_1,\kappa_2}(X)$, *pour* $0 < \kappa_1 < \kappa_2 < 1$.

Exemple 2 (Loi lognormale)

Soit une v.a. $X \sim LNorm(\mu, \sigma)$, $\mu > 0$ *et* $\sigma > 0$ *avec les hypothèses suivantes :*

- *H1 :* $\mu = \ln(100) - \frac{1}{2}\sigma^2$ *et* $\sigma = 0.2$.
- *H2 :* $\mu = \ln(100) - \frac{1}{2}\sigma^2$ *et* $\sigma = 0.6$.
- *H3 :* $\mu = \ln(100) - \frac{1}{2}\sigma^2$ *et* $\sigma = 0.8$.
- *H4 :* $\mu = \ln(100) - \frac{1}{2}\sigma^2$ *et* $\sigma = 1.2$.

Questions : pour les hypothèses H1 - H4, effectuer les calculs suivants :

1. *Calculez* $E[X]$ *et* $Var(X)$.
2. *Concevoir soi-même une fonction en* R *pour calculer les valeurs de* $\pi_X(x)$, *pour* $x \in \mathbb{R}_+$.
3. *Concevoir soi-même une fonction en* R *pour calculer les valeurs de* $E[X \times 1\!\!1_{\{X>x\}}]$, *pour* $x \in \mathbb{R}_+$.
4. *Concevoir soi-même une fonction en* R *pour calculer les valeurs de* $VaR_\kappa(X)$, *pour* $\kappa \in (0,1)$.
5. *Concevoir soi-même une fonction en* R *pour calculer les valeurs de* $TVaR_\kappa(X)$, *pour* $\kappa \in (0,1)$.
6. *Concevoir soi-même une fonction en* R *pour calculer les valeurs de* $RVaR_{\kappa_1,\kappa_2}(X)$, *pour* $0 < \kappa_1 < \kappa_2 < 1$.

Loi lognormale

Loi lognormale

Dans l'exemple précédent, on a calculé différentes mesures en supposant que la v.a. X obéissait à une loi lognormale.

La loi lognormale est fondamentale en actuariat.

Par exemple, on l'utilise pour modéliser les pertes en dommages pour les sinistres dus au péril incendie.

Dans la prochaine section, Jérémie présente un extrait de résultats qu'il a obtenus dans ses travaux de recherche.

Loi lognormale - Incendies

Loi lognormale - Incendies

Dans cette section, on vise à atteindre les objectifs suivants :

1. Avoir un aperçu des données de pertes en sinistres dus au péril incendie de la ville de Toronto.
2. Avoir un aperçu des principales caractéristiques pour ce type de données.
3. Connaître les valeurs estimées des paramètres de la loi lognormale si l'on choisit cette loi pour décrire le comportement de ces données.
4. Avoir un aperçu des travaux d'un étudiant ou d'une étudiante à la maîtrise en actuariat.

Loi lognormale - Incendies

Base de données canadienne de péril incendie

Description des données canadiennes de sinistres incendies :

- 17 536 cas d'incendies
- 43 variables explicatives

Ajustement fait aux données :

- retrait de 1909 données indisponibles de la variable *pertes estimées*
- retrait de 2056 données dont les pertes estimées sont de 0

Exemples de 3 variables explicatives disponibles

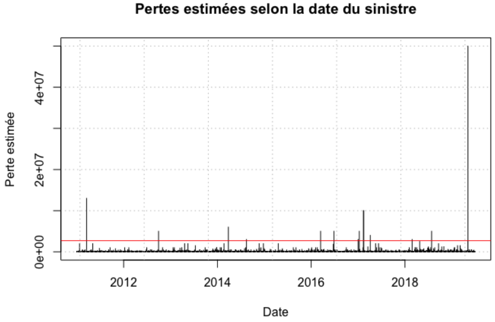
Variable	Définition
Emplacement d'origine :	Brève description de l'emplacement d'origine du feu
Pertes estimées :	Montants de sinistre estimé
Type de bâtiment :	Normal, en construction, en rénovation, etc

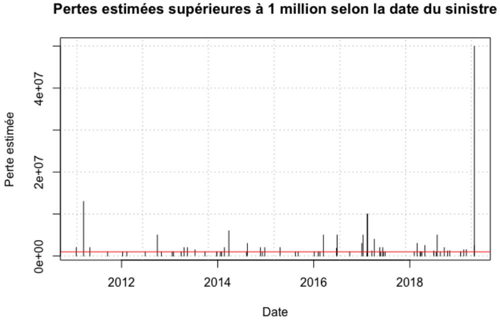
Loi lognormale - Incendies

Statistiques descriptives

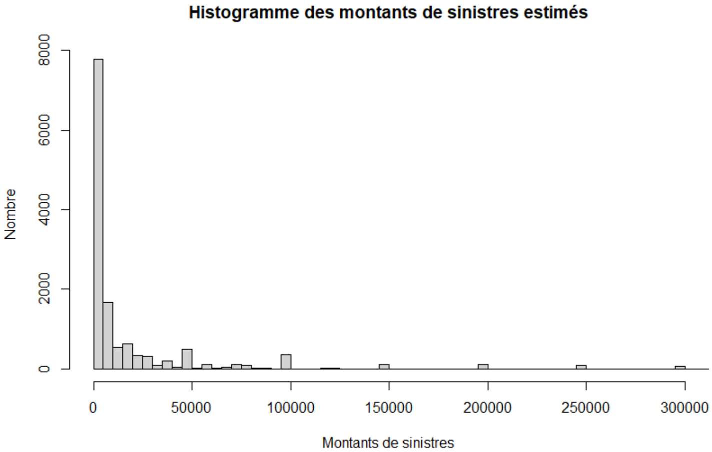
Statistiques descriptives pour les $n = 13\ 571$ pertes estimées

Min.	$1^{er}Qu.$	Médiane	Moyenne	Variance	$3^{er}Qu.$	Max.
1	1000	5000	40 296	2.38×10^{11}	20 000	5×10^{7}

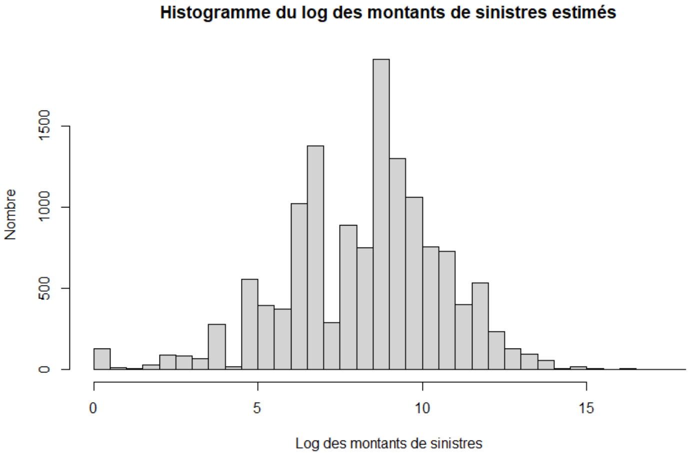




Histogramme des données canadiennes de sinistres incendies



Histogramme du log des données canadiennes de sinistres incendies



Loi lognormale - Incendies

Estimation des paramètres

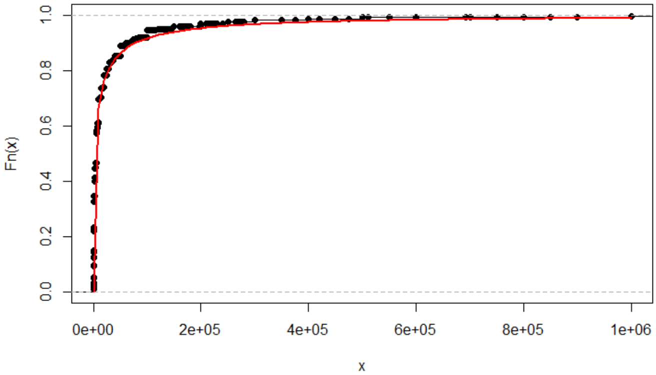
On utilise la loi lognormale pour modéliser tout le support

- Loi : lognormale de paramètres (μ, r)
- Espérance : $E[B] = e^{\mu + \frac{r^2}{2}}$

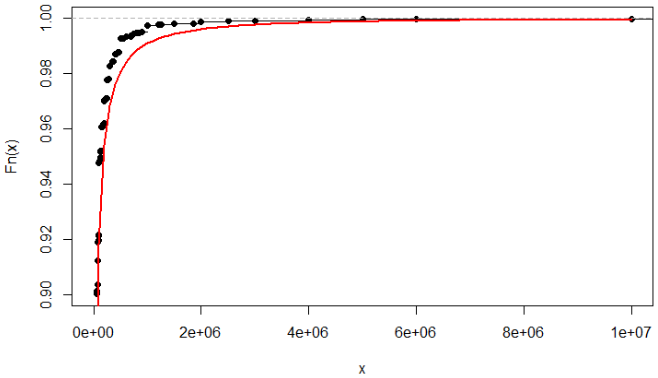
On utilise la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres

$\hat{\mu}$	$\hat{r}$
8.21	2.37

Comparaison de la fonction de répartition empirique avec la fonction de répartition de la loi lognormale



Comparaison de la fonction de répartition empirique avec la fonction de répartition de la loi lognormale pour des valeurs de F_n plus grande que 0.9



Loi lognormale - Incendies

Caractéristique et mesure de risque

On obtient pour l'espérance et la variance les valeurs suivantes

- $E[X] = 61\ 339$ avec $\bar{X} = 40\ 296$.
- $Var(X) = 1.04 \times 10^{12}$ avec $S^2 = 238\ 004\ 336\ 993$.

Pour les mesures VaR et $TVaR$ on obtient

	90%	95%	99%
Emp.	60 000	125 000	500 000
Modèle	76 873	182 038	917 160

(a) Mesure VaR

	90%	95%	99%
Emp.	321 120	562 888	2 227 303
Modèle	529 002	940 554	3 180 649

(b) Mesure $TVaR$

Remarques :

1. Pour cet ensemble de données de pertes en sinistres dus au péril incendie, la loi lognormale n'est pas tout à fait adéquate, en particulier pour les montants élevés de pertes.
2. Pour d'autres ensembles de données de pertes en sinistres dus au péril incendie, la loi lognormale semble plus adéquate.
3. Bref, la loi lognormale est souvent une candidate pour des données incendie.
4. Plus tard, on fera la connaissance de la loi Pareto qui décrit bien le comportement des données de pertes élevées en sinistres dus au péril incendie.
5. Cette illustration permet une meilleure idée de valeurs plausibles pour les paramètres.
6. Le sinistre survenu en 2018 ($50\ 000\ 000\$$) est une forte indication que la loi Pareto serait préférable.
7. Pour connaître la suite de cet épisode, il faut lire les rapports de Jérémie.
8. Source : Toronto Fire Service. « Fire incidents 2011-2019 », Open Data Portal, 2023. https ://open.toronto.ca/dataset/fire-incidents/. (Consulté le 18 août 2023.)
9. Article de vulgarisation sur le site du magazine FORMES : https ://www.formes.ca/

Loi Weibull

Loi Weibull

Soit une v.a. X obéissant à une loi Weibull.

- Notation : $X \sim We\left(\tau, \beta\right)$
- Paramètres : $\tau > 0$, $\beta > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f\left(x\right) = \beta\tau\left(\beta x\right)^{\tau-1} \mathrm{e}^{-(\beta x)^\tau}$
- Fonction de répartition : $F\left(x\right) = 1 - \mathrm{e}^{-(\beta x)^\tau}$
- Fonction de survie : $\overline{F}\left(x\right) = \mathrm{e}^{-(\beta x)^\tau}$

Loi Weibull

Tracer les courbes de $f(x)$, pour $\tau = 0.5$ et $\tau = 2$ avec $\beta = 2$ dans les deux cas.

Loi Weibull

Tracer les courbes de $F(x)$, pour $\tau = 0.5$ et $\tau = 2$ avec $\beta = 2$ dans les deux cas.

Loi Weibull

Développer l'expression de l'espérance

$$E[X] = \frac{1}{\beta}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\tau}\right).$$

Loi Weibull

Développer l'expression de la variance

$$\mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{1}{\beta^2}\Gamma\left(1+\frac{2}{\tau}\right) - \left(\frac{1}{\beta}\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\right)^2.$$

Loi Weibull

Développer l'expression de la fonction génératrice des moments (pour $\alpha > 1$)

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\beta^k k!} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\tau}\right).$$

Loi Weibull

Développer l'expression de l'espérance tronquée

$$E\left[X \times \mathbb{1}_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{1}{\beta}\Gamma(1 + \frac{1}{\tau})H(d^\tau; 1 + \frac{1}{\tau}, \beta^\tau).$$

Loi Weibull

Développer l'expression de la mesure VaR

$$VaR_{\kappa}(X) = \frac{1}{\beta}(-\ln(1-\kappa))^{\frac{1}{\tau}}.$$

Loi Weibull

Développer l'expression de la mesure $TVaR$

$$TVaR_{\kappa}(X) = \frac{1}{\beta(1-\kappa)}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\overline{H}(-\ln(1-\kappa);1+\frac{1}{\tau},1).$$

Développer l'expression de la fonction *stop-loss*

$$\pi_d\left(X\right) = \frac{1}{\beta}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\overline{H}(d^\tau; 1+\frac{1}{\tau}, \beta^\tau) - d\mathrm{e}^{-(\beta d)^\tau}.$$

Loi Weibull

En R et pour $\tau = 0.5$ et $\tau = 2$ avec $\beta = 2$ dans les deux cas, coder les fonctions pour effectuer les calculs de de la fonction quantile, et de la TVaR.

Références

Références I

Cossette, H. and Marceau, E. (2021).
Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives.
Monographie.