

ACT-2001 Introduction à l'actuariat 2

Atelier de la semaine du 26 janvier 2026 (atelier 2)

Étienne Marceau

avec Anthony Gélinas et Philippe Leblanc (H2026)

et Jérémie Barde, Ève Busque et Alexandre Dubeau (semestres précédents)

École d'actuariat

Université Laval, Québec, Canada

2026-01-28

Table des matières I

1. Développements de l'espérance et de la stop-loss
2. Fonction quantile
3. Fonction génératrice des probabilités
4. Fgp et somme de v.a. indépendantes
5. Après-propos
6. Références

Développements de l'espérance et de la stop-loss

Espérance d'une v.a. positive

Définition 1

Lorsque X est une v.a. continue avec une fonction de densité f_X , l'espérance de X est définie par

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, dx. \quad (1)$$

Espérance d'une v.a. positive

On a le résultat suivant pour une v.a. continue positive.

Proposition 1

Soit une v.a. X continue positive dont l'espérance existe. Alors, on a

$$E[X] = \int_0^{\infty} \overline{F}_X(x) \, dx. \quad (2)$$

Espérance d'une v.a. positive

Démonstration.

De (1), on a

$$E[X] = \int_0^{\infty} y f_X(y) dy = \int_0^{\infty} \int_0^y f_X(y) dx dy$$

qui devient

$$E[X] = \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} f_X(y) dy dx = \int_0^{\infty} \bar{F}_X(x) dx.$$



Espérance d'une v.a. positive

On a aussi un résultat similaire pour une v.a. discrète définie sur un support arithmétique $\{0, 1h, 2h, \dots\}$.

Proposition 2

Soit une v.a. X discrète définie sur le support $\{0, 1h, 2h, \dots\}$ dont l'espérance existe. Alors, on a

$$E[X] = h \sum_{k=0}^{\infty} \overline{F}_X(kh). \quad (3)$$

Espérance d'une v.a. positive

Démonstration.

On déduit

$$E[X] = \sum_{j=0}^{\infty} jh f_X(jh) = h \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^j f_X(jh)$$

qui devient

$$E[X] = h \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} f_X(jh) = h \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_X(kh).$$



Fonction stop-loss

Définition 2

Soit une v.a. X positive dont l'espérance existe. La fonction *stop-loss* $\pi_X(d)$ correspond à l'espérance d'une fonction $g(x) = \max(x - d; 0)$ telle que

$$\pi_X(d) = E[\max(X - d; 0)], \quad (4)$$

où $d \in \mathbb{R}_+$. On note que $\pi_X(0) = E[X]$.

La fonction *stop-loss* $\pi_X(d)$ représente l'espérance des coûts en sinistre en excédant d'une limite, appelée limite de rétention ou franchise.

Fonction stop-loss

Si la v.a. X obéit à une loi continue, (4) devient

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} (x - d) f_X(x) \, dx. \quad (5)$$

Proposition 3

Soit une v.a. X positive dont l'espérance existe. Alors, on a

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} \overline{F}_X(x) \, dx, \quad (6)$$

pour $d \geq 0$.

Fonction stop-loss

Preuve

$$\begin{aligned} \text{On a } \pi_X(d) &= E[\max(X - d; 0)] = \int_0^\infty \max(x - d; 0) f_X(x) dx \\ &= (x - d)F_X(x) \Big|_d^\infty - \int_d^\infty F_X(x) dx \\ &= (x - d)(1 - \bar{F}_X(x)) \Big|_d^\infty - \int_d^\infty (1 - \bar{F}_X(x)) dx \\ &= (x - d) \Big|_d^\infty - (x - d)\bar{F}_X(x) \Big|_d^\infty - \int_d^\infty dx + \int_d^\infty \bar{F}_X(x) dx, \quad d \in \mathbb{R} \\ &= (x - d) \Big|_d^\infty - (x - d)\bar{F}_X(x) \Big|_d^\infty - x \Big|_d^\infty + \int_d^\infty \bar{F}_X(x) dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (b - d) - \lim_{b \rightarrow \infty} (b - d)\bar{F}_X(b) + (d - d)\bar{F}_X(d) - \lim_{b \rightarrow \infty} (b - d) + \int_d^\infty \bar{F}_X(x) dx \\ &= \int_d^\infty \bar{F}_X(x) dx. \end{aligned}$$

Fonction stop-loss

Si X est une v.a. discrète définie sur le support $\{0, 1h, 2h, \dots\}$ avec une fonction de masse de probabilité $f_X(kh)$, $k \in \mathbb{N}$, et si $d = hk_0$, $k_0 \in \mathbb{N}$, (4) s'écrit comme suit :

$$\pi_X(k_0h) = \sum_{k=0}^{\infty} \max(kh - k_0h; 0) f_X(kh) = h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (k - k_0) f_X(kh). \quad (7)$$

Pour la prochaine proposition, on rappelle que

$$\overline{F}_X(kh) = \Pr(X > kh) = \sum_{j=k+1}^{\infty} f_X(jh), \quad (8)$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

Fonction stop-loss

Proposition 4

Soit une v.a. X discrète définie sur le support $\{0, 1h, 2h, \dots\}$ dont l'espérance existe.

Alors, on a

$$\pi_X(k_0h) = h \sum_{k=k_0}^{\infty} \bar{F}_X(kh), \quad (9)$$

pour $k_0 \in \mathbb{N}$.

Fonction stop-loss

Démonstration.

À partir de (7), on réarrange la somme en développant chaque terme et en utilisant (8) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\pi_X(k_0 h) &= h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (k - k_0) f_X(kh) \\&= h (1 \times f_X((k_0 + 1)h) + 2 \times f_X((k_0 + 2)h) + 3 \times f_X((k_0 + 3)h) + \dots) \\&= h (f_X((k_0 + 1)h) + f_X((k_0 + 2)h) + f_X((k_0 + 3)h) + \dots) \\&\quad + h (f_X((k_0 + 2)h) + f_X((k_0 + 3)h) + \dots) \\&\quad + h (f_X((k_0 + 3)h) + \dots) \\&\quad + \dots \\&= h \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} f_X(jh) = h \sum_{k=k_0}^{\infty} \overline{F}_X(kh), \text{ pour } k_0 \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Fonction quantile

Fonction quantile

On débute avec la définition de base (et générale) de la fonction quantile.

Définition 3

Soit la v.a. X avec fonction de répartition F_X . On définit la fonction inverse F_X^{-1} de F_X par

$$F_X^{-1}(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\}, \quad (10)$$

pour $u \in (0, 1)$.

Par convention, $\inf \emptyset = +\infty$ et $\sup \emptyset = -\infty$. La fonction inverse F_X^{-1} est aussi appelée la fonction quantile de X .

Fonction quantile

La fonction quantile satisfait les propriétés suivantes :

1. F_X^{-1} est non décroissante (croissante au sens large) ;
2. F_X^{-1} est semi-continue à gauche ;
3. $F_X^{-1}(F_X(x)) \leq x$;
4. $F_X(F_X^{-1}(u)) \geq u$.

Si la v.a. X est continue, alors F_X^{-1} correspond à l'unique solution de

$$F_X(x_u) = u, \tag{11}$$

pour $u \in (0, 1)$.

Fonction quantile

Dans certains cas, il est possible d'inverser aisément la fonction de répartition pour obtenir la fonction quantile.


Exemple 1 (Inversion à la main de fonctions de répartition)

Soit


$$F_X(x) = \left(\frac{x}{B}\right)^A, \quad x \in (0, B).$$


Développer l'expression de $F_X^{-1}(u)$ pour $u \in (0, 1)$.

Fonction quantile

En , des fonctions internes sont à notre disposition pour calculer les quantiles de lois usuelles.

Exemple 2

1. Si $X \sim \text{Gamma}(\alpha = 4, \beta = 0.3)$,
 - 1.1 Calculer $f_X(5)$;
 - 1.2 Définir l'expression de $F_X^{-1}(u)$, puis évaluer en  pour $u \in \{0.9, 0.99\}$.

On note que la Gamma n'est pas inversible. Ainsi les fonctions  sont plus qu'utiles !

Fonction quantile

Pour les lois quelconques continues où il est énormément (voir impossible) difficile d'isoler $x = F_X^{-1}(u)$, l'optimisation permet de résoudre

$$\begin{aligned} F_X(x) &= u \\ F_X(x) - u &= 0 \end{aligned}$$



En déterminant pour quel x , $F_X(x) = u$, la fonction quantile est ainsi résolue.

Exemple 3

Soit la v.a. continue positive X dont la fonction de répartition est

$$F_X(x) = 0.8 \times \left(1 - e^{-\frac{x}{10}}\right) + 0.2 \times \left(1 - e^{-\frac{x}{60}}\right),$$

pour $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Avec , tracer la courbe de F_X et de f_X .
2. Avec , calculer les valeurs de $F_X^{-1}(u)$, $u = \frac{j}{100}$, $j \in \{1, 2, \dots, 99\}$.

Fonction quantile


Pour les v.a. discrètes, il suffit d'appliquer directement la définition en (10) comme il est illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 4

Soit X une v.a. discrète définie sur $\{0, 1, 2, \dots, 100\}$, avec

$$f_X(k) = 0.8 \times \binom{100}{k} 0.0125^k 0.9875^{100-k} + 0.2 \times \binom{100}{k} 0.2^k 0.8^{100-k},$$

pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, 100\}$.

Avec , calculer les valeurs de $F_X^{-1}(u)$, $u = \frac{j}{100}$, $j \in \{1, 2, \dots, 99\}$. Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphe en escalier.

Fonction génératrice des probabilités

Fonction génératrice des probabilités

Soit une v.a. discrète X définie sur l'ensemble \mathbb{N} avec une fmp notée par

$$f_X(k) = \Pr(X = k), k \in \mathbb{N}.$$

La fonction de génératrice de probabilité (fgp) de la v.a. X permet de représenter la fmp de la v.a. X sous la forme d'une série de puissances.

Les coefficients de cette série de puissances correspondent aux valeurs de la fonction de masse de probabilité.

Fonction génératrice des probabilités

Définition 4

La fonction génératrice de probabilités de la v.a. X est définie par

$$\mathcal{P}_X(t) = E[t^X] = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) t^k, \quad (12)$$

pour tout nombre complexe t tel que $|t| \leq 1$ (en particulier pour des nombres réels $t \in [0, 1]$).

Fonction génératrice des probabilités

Fonction de masse de probabilité. La valeur de $f_X(k)$ est calculée à partir de $\mathcal{P}_X(t)$ avec

$$f_X(k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k}{dt^k} \mathcal{P}_X(t) \right|_{t=0}. \quad (13)$$

La relation en (13) permet d'identifier le coefficient dans la série de puissances en (12).

Proposition 5

$\mathcal{P}_X(t) = t^c$ ($c \in \mathbb{N}$) correspond à la fgp d'une v.a. X où $\Pr(X = c) = 1$.

Fonction génératrice des probabilités

Exemple 5

Soit une v.a. discrète X avec

$$\mathcal{P}_X(t) = 0.2 + 0.4t + 0.3t^2 + 0.1t^3, \text{ pour } t \in [0, 1].$$

Sans recourir à (13), on déduit les valeurs suivantes de la fonction de masse de probabilité de X :

k	0	1	2	3
$f_X(k)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Fonction génératrice des probabilités

Exemple 6

Soit une v.a. discrète X avec

$$\mathcal{P}_X(t) = 0.2 + 0.4t^2 + 0.3t^7 + 0.1t^{15}, \text{ pour } t \in [0, 1].$$

Il n'est pas nécessaire d'utiliser (13) pour obtenir les valeurs suivantes de la fonction de masse de probabilité de X :

k	0	2	7	15
$f_X(k)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Fonction génératrice des probabilités

Pour certaines lois discrètes connues, la fonction de "t", $\mathcal{P}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) t^k$, s'exprime sous une forme fermée.

C'est notamment le cas de la loi de Poisson.

Fonction génératrice des probabilités

Exemple 7

Loi de Poisson. *Poisson* ($\lambda \in \mathbb{R}_+$) :

$$\mathcal{P}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) t^k = e^{\lambda(t-1)},$$

pour tout nombre complexe t tel que $|t| \leq 1$ (en particulier pour des nombres réels $t \in [0, 1]$).

Prouver le résultat de la fgp de la loi de Poisson.

Fgp et somme de v.a. indépendantes

Fgp et somme de v.a. indépendantes

Relation de base

Soit les v.a. indépendantes X_1, \dots, X_n définies sur \mathbb{N} avec

$$f_{X_i}(k) = \Pr(X_i = k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

et

$$\mathcal{P}_{X_i}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{X_i}(k) t^k = E[t^{X_i}], \quad t \in [0, 1], \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Fgp et somme de v.a. indépendantes

Relation de base

On définit $S = X_1 + \cdots + X_n$.

Alors, l'expression de la fgp de S est

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(t) &= E[t^S] \\ &= E[t^{X_1 + \cdots + X_n}] \\ &= E[t^{X_1}] \times \cdots \times E[t^{X_n}] \quad [\text{indépendance entre les v.a. } X_1, \dots, X_n]\end{aligned}$$

qui devient

$$\mathcal{P}_S(t) = \mathcal{P}_{X_1}(t) \times \cdots \times \mathcal{P}_{X_n}(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (14)$$

La relation en (14) est fort connue.

Fgp et somme de v.a. indépendantes

En coulisses

Habituellement, on se contente du formalisme tel la relation en (14) et des expressions fermées pour les lois discrètes connues, tout en oubliant ce qui se passe en coulisses en multipliant les séries convergentes de puissances.

Dans le cas où la v.a. X_i est définie sur un support fini, $\mathcal{P}_{X_i}(t)$ correspond à un polynôme en " t " ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$).

Fgp et somme de v.a. indépendantes

En coulisses

En appliquant la relation en (14), on multiplie des polynômes et le résultat de ce produit, $\mathcal{P}_S(t)$, est lui-même un polynôme.

Les coefficients de ce polynôme correspondent aux valeurs de la fonction de masse de probabilité de la v.a. S .

Cette procédure est illustrée dans les prochains exemples.

Cette procédure est identique dans le cas de v.a. définies sur \mathbb{N} .

Fgp et somme de v.a. indépendantes

En coulisses

Soit les v.a. indépendantes X_1 et X_2 avec

$$f_{X_i}(k) = \Pr(X_i = k) > 0, k \in \{0, 1, 2\}, i = 1, 2.$$

On définit $S = X_1 + X_2$.

On vise à calculer les valeurs de

$$f_S(k) = \Pr(S = k) > 0, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Fgp et somme de v.a. indépendantes

En coulisses

Pour y parvenir, on applique (14)

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(t) &= \mathcal{P}_{X_1}(t) \times \mathcal{P}_{X_2}(t) \\ &= \left(f_{X_1}(0) + f_{X_1}(1)t + f_{X_1}(2)t^2\right) \times \left(f_{X_2}(0) + f_{X_2}(1)t + f_{X_2}(2)t^2\right)\end{aligned}$$

et, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(t) &= f_{X_1}(0)f_{X_2}(0) \\ &\quad + (f_{X_1}(0)f_{X_2}(1) + f_{X_1}(1)f_{X_2}(0)) \times t \\ &\quad + (f_{X_1}(0)f_{X_2}(2) + f_{X_1}(1)f_{X_2}(1) + f_{X_1}(2)f_{X_2}(0)) \times t^2 \\ &\quad + (f_{X_1}(1)f_{X_2}(2) + f_{X_1}(2)f_{X_2}(1)) \times t^3 \\ &\quad + (f_{X_1}(2)f_{X_2}(2)) \times t^4.\end{aligned}\tag{15}$$

Fgp et somme de v.a. indépendantes

En coulisses

Ensuite, puisque

$$\mathcal{P}_S(t) = f_S(0) + f_S(1)t + f_S(2)t^2 + f_S(3)t^3 + f_S(4)t^4. \quad (16)$$

Enfin, comme (15) et (16) sont identiques, on identifie les coefficients $(f_S(0), \dots, f_S(4))$ du polynôme en "t" de (16) à partir des coefficients du polynôme en "t" de (15).

Fgp et somme de v.a. indépendantes

En coulisses

On généralise la procédure décrite en considérant la somme de deux v.a. définies sur \mathbb{N} .
Soit les v.a. indépendantes X_1 et X_2 avec

$$\mathcal{P}_{X_i}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{X_i}(k) t^k, \quad i = 1, 2.$$

On définit $S = X_1 + X_2$.

Remarque 1

1. $E[S] = E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2]$ (par linéarité de l'esprérance)
2. $Var(S) = Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$,
car $X_1 \perp X_2 \implies Cov(X_1, X_2) = 0$. (N.B. La flèche dans une seule direction.)

Fgp et somme de v.a. indépendantes

En coulisses

Clairement, $\mathcal{P}_{X_1}(t)$ et $\mathcal{P}_{X_2}(t)$ sont des séries de puissances dont l'argument (la variable) est $t \in [0, 1]$.

Alors, la fgp de la v.a. S , donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(t) &= \mathcal{P}_{X_1}(t) \times \mathcal{P}_{X_2}(t) \\ &= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} f_{X_1}(k_1) t^{k_1} \right) \times \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} f_{X_2}(k_2) t^{k_2} \right),\end{aligned}$$

est une série de puissances dont l'argument (la variable) est " t " et dont les coefficients sont les valeurs de f_S .

Fgp et somme de v.a. indépendantes

En coulisses

En effet, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(t) &= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} f_{X_1}(k_1) t^{k_1} \right) \times \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} f_{X_2}(k_2) t^{k_2} \right) \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} f_{X_1}(k_1) t^{k_1} \times f_{X_2}(k_2) t^{k_2}\end{aligned}\tag{17}$$

Fgp et somme de v.a. indépendantes

En coulisses

La double somme en (17) peut se résumer en somme unique en mettant entre parenthèses les coefficients de t^l pour chaque $l \in \mathbb{N}$, comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(t) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} f_{X_1}(k_1) t^{k_1} \times f_{X_2}(k_2) t^{k_2} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} t^l \left(\sum_{j=0}^l f_{X_1}(j) f_{X_2}(l-j) \right),\end{aligned}\tag{18}$$

où le coefficient de t^l , donné par

$$\sum_{j=0}^l f_{X_1}(j) f_{X_2}(l-j),$$

est la valeur de $f_S(l)$ par la définition de la fgp de S .

Fgp et somme de v.a. indépendantes

En coulisses

En effet, la définition de la fgp de la v.a. S est

$$\mathcal{P}_S(t) = \sum_{l=0}^{\infty} f_S(l) t^l. \quad (19)$$

Puisque les deux représentations en (18) et (19) de la fgp de la v.a. S sont identiques, il suffit d'identifier (pour chaque l) le coefficient de t^l dans (18) pour déterminer l'expression de $f_S(l)$ dans (19), permettant de conclure que

$$f_S(l) = \sum_{j=0}^l f_{X_1}(j) f_{X_2}(l-j),$$

ce qui correspond au produit de convolution de 2 fonctions de masse de probabilité.



Fgp et somme de v.a. indépendantes

Exemple 8

Soit les v.a. indépendantes $X_1 \sim \text{Binom}(n = 10, q = 0.2)$ et

$X_2 \sim \text{Binom}(n = 10, q = 0.3)$.

On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.



1. Identifier l'expression de $\mathcal{P}_S(t)$.
2. Calculer $E[S]$.
3. Calculer (à la main) les valeurs de $f_S(l)$, $l \in \{0, 1, 2\}$.
4. Calculer (avec ) les valeurs de $f_S(l)$, $l \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}$.
5. Calculer avec  la valeur de $E[S]$ avec les valeurs de $f_S(l)$, $l \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}$ et comparer avec la valeur connue (déjà calculée).

Fgp et somme de v.a. indépendantes

Exemple 9 (Un peu de pratique en R avec un résultat connu)

Soit les v.a. indépendantes $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda = 2)$ et $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda = 3)$.

On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.

1. À l'aide de la fgp de ces lois, trouver la loi de S .
2. Calculer $E[S]$.
3. Calculer (à la main) les valeurs de $f_S(l)$, $l \in \{0, 1, 2\}$.
4. Calculer (avec ) les valeurs de $f_S(l)$, $l \in \{0, 1, 2, \dots, 30\}$.
5. Calculer avec  la valeur de $E[S]$ avec les valeurs de $f_S(l)$, $l \in \{0, 1, 2, \dots, 30\}$ et comparer avec la valeur connue (déjà calculée).

N.B. : Le support de la loi de Poisson est infini, mais les valeurs de support jusqu'à 30 suffisent numériquement.

Fgp et somme de v.a. indépendantes

Exemple 10 (Exemple de consolidation)

Soit une variable aléatoire X_1 avec fgp

$$\mathcal{P}_{X_1}(t) = 0.45e^{0.4(t-1)} + 0.55e^{5(t-1)}.$$

Soit une autre variable aléatoire, indépendante de la première, X_2 avec fgp

$$\mathcal{P}_{X_2}(t) = e^{8(t-1)}.$$

On définit $S = X_1 + X_2$.

1. Calculer les valeurs de $\Pr(S = s)$ pour $s \in \{0, 1, \dots, 50\}$
2. Calculer $F_S^{-1}(0.8)$
3. Calculer $\mathcal{M}_S(0.67)$

N.B. : Le support de la loi de Poisson est infini, mais les valeurs de support jusqu'à 50 suffisent numériquement.

Après-propos

Après-propos

Site du cours : monportail.ulaval.

Livre de référence : [Cossette and Marceau, 2023].

Diapositives

- Logiciel : [LaTeX](#)
- Package : Beamer
- Éditeur en ligne : [Overleaf](#)

Calculs et illustrations

- Toutes les calculs et les illustrations ont été réalisés dans le langage R.
- Les codes R ont été conçus dans l'environnement de développement intégré [RStudio](#).
- Le logiciel GNU R et les bibliothèques sont disponibles sur le site du R Project et du Comprehensive R Archive Network [CRAN](#).

Références

Références I



Cossette, H. and Marceau, E. (2023).

Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives.

Monographie.