

ACT-2001 Introduction à l'actuariat 2

Atelier de la semaine du 19 janvier 2026 (atelier 1)

Étienne Marceau

avec Anthony Gélinas et Philippe Leblanc (H2026)

et Jérémie Barde, Ève Busque et Alexandre Dubeau (semestres précédents)

École d'actuariat

Université Laval, Québec, Canada

2026-01-21

Table des matières I

1. Définitions
2. Premier exemple général
3. Deuxième exemple général
4. Espérance d'une v.a. positive
5. Fonction stop-loss
6. Troisième exemple général
7. Après-propos
8. Références

Définitions

Espérance d'une v.a. positive

En actuariat, la notion d'espérance est importante.

Par exemple, si la v.a. X représente les coûts pour un contrat d'assurance pour la prochaine année, alors l'espérance de X correspond à la prime pure de ce contrat.

Généralement, la prime chargée pour le contrat est supérieure à l'espérance de X .

Espérance d'une v.a. positive

Définition 1

Lorsque X est une v.a. continue avec une fonction de densité f_X , l'espérance de X est définie par

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx. \quad (1)$$

Définition 2

Soit une v.a. X discrète définie sur le support $\{0, 1h, 2h, \dots\}$ dont l'espérance existe. Alors, on a

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kh f_X(kh). \quad (2)$$

Fonction stop-loss

Définition 3

Soit une v.a. X positive dont l'espérance existe. La fonction *stop-loss* $\pi_X(d)$ correspond à l'espérance d'une fonction $g(x) = \max(x - d; 0)$ telle que

$$\pi_X(d) = E[\max(X - d; 0)], \quad (3)$$

où $d \in \mathbb{R}_+$. On note que $\pi_X(0) = E[X]$.

La fonction *stop-loss* $\pi_X(d)$ représente l'espérance des coûts en sinistre en excédant d'une limite, appelée limite de rétention ou franchise.

Fonction génératrice des probabilités

Définition 4

La fonction génératrice de probabilités de la v.a. X est définie par

$$\mathcal{P}_X(t) = E[t^X] = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) t^k, \quad (4)$$

pour tout nombre complexe t tel que $|t| \leq 1$ (en particulier pour des nombres réels $t \in [0, 1]$).

Premier exemple général

Premier exemple général

Énoncé :

- Soit X une v.a. discrète définie sur l'ensemble fini \mathcal{A} , dont la fgp est

$$\mathcal{P}_X(s) = 0.3 + 0.15s^{100} + 0.4s^{400} + 0.1s^{1000} + 0.05s^{2000}, \quad |s| \leq 1.$$

- L'ensemble \mathcal{A} est le support de la distribution de la v.a. X .
- La v.a. X représente les pertes éventuelles en sinistres pour la couverture d'un péril d'un contrat d'assurance dommages.
- La prime pure pour le contrat est $E[X]$.
- Questions : pour chacun des items des prochaines diapositives (sauf un item), il est important de faire, dans l'ordre, les démarches, les calculs à *la main* et les calculs en utilisant \mathbb{R} .

Avec cet exemple, on vise à rencontrer les objectifs suivants :

- Rappeler des notions de base en probabilité.
- Intégrer les aptitudes acquises en \mathbb{R} pour résoudre des questions de base en probabilité.
- Faire le pont entre (rive A) des cours de probabilité et de \mathbb{R} et (rive B) le cours d'introduction à l'actuariat 2.
- Avoir un aperçu de questions selon les formats "traditionnels" et "informatiques".

Premier exemple général

Support \mathcal{A} et fmp de X .

1. À partir de la fgp \mathcal{P}_X , identifiez les éléments de l'ensemble \mathcal{A} .
2. À partir de la fgp \mathcal{P}_X , identifiez les valeurs strictement positives de la fmp de X .
3. Expliquez votre démarche aux items [1] et [2] ci-dessus.

Premier exemple général

Espérance $E[X]$ de X .

1. Développez l'expression de l'espérance $E[X]$ en termes de la fmp de X .
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) la valeur de $E[X]$.
3. Utilisez \mathbb{R} pour calculer la valeur de $E[X]$.

Premier exemple général

Deuxième moment $E[X^2]$ de X .

1. Développez l'expression de $E[X^2]$ en termes de la fmp de X .
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) la valeur de $E[X^2]$.
3. Utilisez \mathbb{R} pour calculer la valeur de $E[X^2]$.


Premier exemple général

Variance $Var(X)$ de X .

1. Développez l'expression de $Var(X)$.
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) la valeur de $Var(X)$.
3. Utilisez \mathbb{R} pour calculer la valeur de $Var(X)$.


Premier exemple général

Fonction de répartition de X .

1. Développez l'expression de $F_X(x)$, $x \geq 0$.
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) la valeur de $F_X(x)$ pour $x = 500$. Refaire pour $x \in \{30, 1343, 764\}$.
3. Utilisez  pour calculer la valeur de $F_X(x)$ pour $x = 500$. Refaire pour $x \in \{30, 1343, 764\}$.


Premier exemple général

On s'amuse : la compagnie d'assurance prévoit un montant c pour financer les pertes en sinistres du contrat d'assurance. On définit $\zeta_X(c)$ comme étant la probabilité que les sinistres dépassent le montant c .

1. Développez l'expression de $\zeta_X(c)$ pour $c \geq 0$.
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) la valeur de $\zeta_X(c)$ pour $c = 800$. Refaire pour $x \in \{E[X], E[X] \times (1.5), 1400\}$.
3. Utilisez  pour calculer la valeur de $\zeta_X(c)$ pour $c = 800$. Refaire pour $x \in \{E[X], E[X] \times (1.5), 1400\}$.


Premier exemple général

On s'amuse : la compagnie d'assurance impose une limite c au remboursement des pertes en sinistres selon le contrat d'assurance. On définit $\nu_X(c) = E[\min(X; c)]$ comme étant l'espérance du montant que la compagnie pourra rembourser en tenant compte de la limite c .

1. Développez l'expression de $\nu_X(c)$ pour $c \geq 0$.
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) la valeur de $\nu_X(c)$ pour $c = 800$. Refaire pour $x \in \{500, 1400\}$.
3. Utilisez  pour calculer la valeur de $\nu_X(c)$ pour $c = 800$. Refaire pour $x \in \{500, 1400\}$.

Premier exemple général

On s'amuse : la compagnie d'assurance s'engage à rembourser l'excédent des pertes en sinistres dépassant la limite de rétention c . On définit $\pi_X(c) = E[\max(X - c; 0)]$ comme étant l'espérance du montant que la compagnie pourra rembourser en tenant compte de la limite c .

1. Développez l'expression de $\pi_X(c)$ pour $c \geq 0$.
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) la valeur de $\pi_X(c)$ pour $c = 800$. Refaire pour $x \in \{500, 1400\}$.
3. Utilisez  pour calculer la valeur de $\pi_X(c)$ pour $c = 800$. Refaire pour $x \in \{500, 1400\}$.


Premier exemple général

On s'amuse avec la fgm de X . La compagnie d'assurance demande la prime $\psi_\rho(X)$ où

$$\psi_\rho(X) = \frac{1}{\rho} \ln(\mathcal{M}_X(\rho)), \quad \rho > 0,$$

où \mathcal{M}_X est la fgm de X , définie par

$$\mathcal{M}_X(t) = E[e^{tX}], \quad t \geq 0.$$

1. Développez l'expression permettant de calculer la fgm de X .
2. Calculez à la main (avec une calculatrice) la valeur de $\psi_\rho(X)$, pour $\rho \in \{0.001\}$. Refaire pour $\rho \in \{0.0005, 0.002\}$.
3. Utilisez  pour calculer la valeur de $\psi_\rho(X)$, pour $\rho \in \{0.001\}$. Refaire pour $\rho \in \{0.0005, 0.002\}$.
4. À partir des valeurs obtenues, indiquez votre intuition quant au comportement de la prime $\psi_\rho(X)$ en fonction de ρ ainsi que par rapport à la prime pure (prime pure = $E[X]$) et la valeur maximale (finie) que peut prendre la v.a. X . Il n'est pas nécessaire de démontrer.

Deuxième exemple général


Deuxième exemple général

Énoncé :



- Refaire toutes les questions du premier exemple général en supposant que la fonction de masse de probabilité (fmp) de X est donnée par

$$f_X(k) = \begin{cases} 1 - a_1, & k = 0 \\ a_1 \times \left(\left(\frac{k}{2000} \right)^{a_2} - \left(\frac{k-1}{2000} \right)^{a_2} \right), & k = 1, \dots, 2000 \end{cases},$$

où $a_1 = 0.2$ et $a_2 = 3$.

- On a conçu la variante de telle sorte que l'on doive effectuer les calculs avec  ou Python.

Avec cet exemple, on vise à rencontrer les objectifs suivants :

- Rappeler des notions de base en probabilité.
- Intégrer les aptitudes acquises en  pour résoudre des questions de base en probabilité.
- Faire le pont entre (rive A) des cours de probabilité et de  et (rive B) le cours d'introduction à l'actuariat 2.
- Avoir un aperçu d'une question selon le format "informatique".
- Comprendre que les questions demandées dans l'Exemple sont réalisables peu importe la loi discrète choisie pour la v.a. X .

Espérance d'une v.a. positive

Espérance d'une v.a. positive



Exemple 1

Soit X une v.a. discrète définie sur $\{0, 1, 2, \dots, 100\}$, avec

$$f_X(k) = 0.8 \times \binom{100}{k} 0.1^k 0.9^{100-k} + 0.2 \times \binom{100}{k} 0.6^k 0.4^{100-k},$$

pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, 100\}$.

Questions :

1. Vérifier à la main et avec  que $\sum_{k=0}^{100} f_X(k) = 1$.
2. Calculer à la main et avec  la valeur $E[X]$.

Espérance d'une v.a. positive

Exemple 1 - Solution

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{100} f_X(k) &= \sum_{k=0}^{100} (0.8 \times \binom{100}{k} 0.1^k 0.9^{100-k} + 0.2 \times \binom{100}{k} 0.6^k 0.4^{100-k}) \\&= 0.8 \times \underbrace{\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 0.1^k 0.9^{100-k}}_{\text{Bin}(100;0.1)} + 0.2 \times \underbrace{\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 0.6^k 0.4^{100-k}}_{\text{Bin}(100;0.6)} \\&= 0.8 \times 1 + 0.2 \times 1 \\&= 1.\end{aligned}$$

Espérance d'une v.a. positive

Exemple 1 - Solution (suite)


De plus,

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^{100} k f_X(k) \\ &= 0.8 \times \underbrace{\sum_{k=0}^{100} k \binom{100}{k} 0.1^k 0.9^{100-k}}_{\text{Bin}(100;0.1)} + 0.2 \times \underbrace{\sum_{k=0}^{100} k \binom{100}{k} 0.6^k 0.4^{100-k}}_{\text{Bin}(100;0.6)} \\ &= 0.8 \times 100 \times 0.1 + 0.2 \times 100 \times 0.6 \\ &= 20. \end{aligned}$$


Fonction stop-loss

Fonction stop-loss

Exemple 2

Soit $X \sim \text{Pois}(\lambda = 5)$. Avec , calculer $\pi_X(k)$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, 100\}$. Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique en bâtons, et analyser l'effet de la modification du paramètre λ .

Exemple 3


Soit $X \sim \text{NBinom}\left(r = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{11}\right)$. Avec , calculer $\pi_X(k)$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, 100\}$. Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique en bâtons, et analyser l'effet de la modification des paramètres r et q .

Fonction stop-loss

Exemple 4


Soit X une v.a. discrète définie sur $\{0, 1, 2, \dots, 100\}$, avec

$$f_X(k) = 0.8 \times \binom{100}{k} 0.0125^k 0.9875^{100-k} + 0.2 \times \binom{100}{k} 0.2^k 0.8^{100-k},$$


pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, 100\}$. Avec , calculer $\pi_X(k)$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, 100\}$. Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique en bâtons.

Fonction stop-loss

Exemple 5

Soit $X \sim \text{Gamma}(\alpha = 5, \beta = 1)$. Avec , calculer $\pi_X(d)$, $d \in \{0, 1, 2, \dots, 100\}$.
Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique continu, et analyser l'effet de la modification des paramètres α et β .

Exemple 6

Soit $X \sim \text{LNorm}(\mu = \ln(5) - 0.125, \sigma = 0.5)$. Avec , calculer $\pi_X(d)$, $d \in \{0, 1, 2, \dots, 100\}$. Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique continu, et analyser l'effet de la modification des paramètres μ et σ .

Troisième exemple général

Troisième Exemple général

Exemple 7 (À la main)

Soit les v.a. indépendantes $X_i \sim \text{Bern}(q_i)$ où $q_1 = 0.0783$, $q_2 = 0.0996$, $q_3 = 0.0124$, $q_4 = 0.0355$, $q_5 = 0.0587$. Posons $S = \sum_{i=1}^5 X_i$.

1. Indiquer l'ensemble des valeurs possibles prises par S .
2. Calculer $E[S]$.
3. Calculer $\sqrt{\text{Var}(S)}$.
4. On pose la fonction

$$\psi(\rho) = \frac{1}{\rho} \ln(\mathcal{M}_S(\rho)).$$

4.1 Développer l'expression de $\psi(\rho)$.

4.2 Calculer $\psi(0.4)$.

Troisième Exemple général

Exemple 8 (Avec R)

Soit les v.a. indépendantes $X_i \sim \text{Bern}(q_i)$ où

$$q_i = \frac{e^{-6+0.0045i}}{1 + e^{-6+0.0045i}},$$

pour $i \in \{1, 2, \dots, 1000\}$. On note que $q_i \in [0.002484; 0.182426]$. Posons $S = \sum_{i=1}^{1000} X_i$.

1. Indiquer l'ensemble des valeurs possibles prises par S .
2. Calculer $E[S]$.
3. Calculer $\sqrt{\text{Var}(S)}$.
4. On pose la fonction

$$\psi(\rho) = \frac{1}{\rho} \ln(\mathcal{M}_S(\rho)).$$

4.1 Développer l'expression de $\psi(\rho)$.

4.2 Calculer $\psi(0.4)$.

Après-propos

Après-propos

Site du cours : monportail.ulaval.

Livre de référence : [Cossette and Marceau, 2023].

Diapositives

- Logiciel : [LaTeX](#)
- Package : Beamer
- Éditeur en ligne : [Overleaf](#)

Calculs et illustrations

- Toutes les calculs et les illustrations ont été réalisés dans le langage R.
- Les codes R ont été conçus dans l'environnement de développement intégré [RStudio](#).
- Le logiciel GNU R et les bibliothèques sont disponibles sur le site du R Project et du Comprehensive R Archive Network [CRAN](#).

Références

Références I



Cossette, H. and Marceau, E. (2023).

Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives.

Monographie.