ACT-2001 Introduction à l'actuariat 2

Atelier de la semaine du 19 janvier 2026 (atelier 1)

Étienne Marceau
avec Anthony Gélinas et Philippe Leblanc (H2026)
et Jérémie Barde, Ève Busque et Alexandre Dubeau (semestres précédents)

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

2026-01-21

Table des matières I

Espérance d'une v.a. positive

Espérance d'une v.a. positive

En actuariat, la notion d'espérance est importante.

Par exemple, si la v.a. X représente les coûts pour un contrat d'assurance pour la prochaine année, alors l'espérance de X correspond à la prime pure de ce contrat.

Généralement, la prime chargée pour le contrat est supérieure à l'espérance de X.

Espérance d'une v.a. positive

Lorsque X est une v.a. continue avec une fonction de densité f_X, l'espérance de X est définie par

$$E\left[X\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Espérance d'une v.a. positive

On a le résultat suivant pour une v.a. continue positive.

Proposition 1

Soit une v.a. X continue positive dont l'espérance existe. Alors, on a

$$E[X] = \int_0^\infty \overline{F}_X(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Espérance d'une v.a. positive

Démonstration.

De (1), on a

$$E[X] = \int_0^\infty y f_X(y)\, \mathrm{d}y = \int_0^\infty \int_0^y f_X(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

qui devient

$$E[X] = \int_0^\infty \int_x^\infty f_X(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \overline{F}_X(x)\, \mathrm{d}x.$$

$\square$

Espérance d'une v.a. positive

On a aussi un résultat similaire pour une v.a. discrète définie sur un support arithmétique $\{0, 1h, 2h, \ldots\}$.

Proposition 2

Soit une v.a. X discrète définie sur le support $\{0, 1h, 2h, \ldots\}$ dont l'espérance existe. Alors, on a

$$E\left[X\right] = h \sum_{k=0}^{\infty} \overline{F}_X(kh). \tag{3}$$

Espérance d'une v.a. positive

Démonstration.

On déduit

$$E\left[X\right] = \sum_{j=0}^{\infty} jhf_X(jh) = h\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{j} f_X(jh)$$

qui devient

$$E\left[X\right] = h\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty} f_X(jh) = h\sum_{k=0}^{\infty}\overline{F}_X(kh).$$

$\square$

Espérance d’une v.a. positive

Exemple 1

Soit X *une v.a. discrète définie sur* $\{0, 1, 2, \ldots, 100\}$*, avec*

$$f_X(k) = 0.8 \times \binom{100}{k} 0.1^k 0.9^{100-k} + 0.2 \times \binom{100}{k} 0.6^k 0.4^{100-k},$$

pour $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$*.*

Questions :

1. *Vérifier à la main et avec* R *que* $\sum_{k=0}^{100} f_X(k) = 1$*.*
2. *Calculer à la main et avec* R *la valeur* $E[X]$*.*

Espérance d'une v.a. positive
Exemple 1 - Solution

On a

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{100} f_X(k) &= \sum_{k=0}^{100} \left(0.8 \times \binom{100}{k} 0.1^k 0.9^{100-k} + 0.2 \times \binom{100}{k} 0.6^k 0.4^{100-k}\right) \\
&= 0.8 \times \sum_{k=0}^{100} \underbrace{\binom{100}{k} 0.1^k 0.9^{100-k}}_{Bin(100;0.1)} + 0.2 \times \sum_{k=0}^{100} \underbrace{\binom{100}{k} 0.6^k 0.4^{100-k}}_{Bin(100;0.6)} \\
&= 0.8 \times 1 + 0.2 \times 1 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Espérance d'une v.a. positive
Exemple 1 - Solution (suite)

De plus,

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=0}^{100} k f_X(k) \\
&= 0.8 \times \sum_{k=0}^{100} \underbrace{k \binom{100}{k} 0.1^k 0.9^{100-k}}_{Bin(100;0.1)} + 0.2 \times \sum_{k=0}^{100} \underbrace{k \binom{100}{k} 0.6^k 0.4^{100-k}}_{Bin(100;0.6)} \\
&= 0.8 \times 100 \times 0.1 + 0.2 \times 100 \times 0.6 \\
&= 20.
\end{aligned}
$$

Calcul d'espérances en R pour une loi discrète

Exemple 2

Soit X une v.a. discrète avec fgp

$$\mathcal{P}_X(t) = 0.2 + 0.4t + 0.3t^2 + 0.1t^3 \quad \textit{pour } t \in (0,1).$$

1. *Définir $f_X(k)$ et vérifier que c'est effectivement une fmp.*
2. *Calculer (à la main et avec R)*
   2.1 $F_X(1.5)$.
   2.2 *Calculer* $E[X \times \mathbb{1}_{\{X \leq 1.5\}}]$.
   2.3 *Calculer* $\pi_X(1.5)$.
   2.4 *Calculer* $e_X(1.5)$.
   2.5 *Définir* $E[e^{tX}]$ *et calculer* $E[e^{tX}]\big|_{t=2}$.

Fonction stop-loss

Fonction stop-loss

Définition 1

Soit une v.a. X positive dont l'espérance existe. La fonction *stop-loss* $\pi_X(d)$ correspond à l'espérance d'une fonction $g(x) = \max(x - d; 0)$ telle que

$$\pi_X(d) = E[\max(X - d; 0)], \tag{4}$$

où $d \in \mathbb{R}_+$. On note que $\pi_X(0) = E[X]$.

La fonction *stop-loss* $\pi_X(d)$ représente l'espérance des coûts en sinistre en excédant d'une limite, appelée limite de rétention ou franchise.

Fonction stop-loss

Si la v.a. X obéit à une loi continue, (4) devient

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} (x-d)\, f_X(x)\, \mathrm{d}x. \tag{5}$$

Proposition 3

Soit une v.a. X positive dont l'espérance existe. Alors, on a

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} \overline{F}_X(x)\, \mathrm{d}x, \tag{6}$$

pour $d \geq 0$.

Fonction stop-loss

Démonstration.

De plus, si la v.a. X est continue positive et en intégrant par partie, l'expression en (5) pour la fonction *stop-loss* devient

$$\begin{aligned}\pi_X(d) &= \int_d^\infty (x-d)\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -(x-d)\,\overline{F}_X(x)\Big|_d^\infty + \int_d^\infty \overline{F}_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_d^\infty \overline{F}_X(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$\square$

Fonction stop-loss

Si X est une v.a. discrète définie sur le support $\{0, 1h, 2h, \ldots\}$ avec une fonction de masse de probabilité $f_X(kh)$, $k \in \mathbb{N}$, et si $d = hk_0$, $k_0 \in \mathbb{N}$, (4) s'écrit comme suit :

$$\pi_X(k_0 h) = \sum_{k=0}^{\infty} \max(kh - k_0 h; 0)\, f_X(kh) = h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (k - k_0)\, f_X(kh). \tag{7}$$

Pour la prochaine proposition, on rappelle que

$$\overline{F}_X(kh) = \Pr(X > kh) = \sum_{j=k+1}^{\infty} f_X(jh), \tag{8}$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

Fonction stop-loss

Proposition 4

Soit une v.a. X discrète définie sur le support $\{0, 1h, 2h, \dots\}$ dont l'espérance existe. Alors, on a

$$\pi_X(k_0 h) = h \sum_{k=k_0}^{\infty} \overline{F}_X(kh), \tag{9}$$

pour $k_0 \in \mathbb{N}$.

Fonction stop-loss

Démonstration.

À partir de (7), on réarrange la somme en développant chaque terme et en utilisant (8) de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
\pi_X(k_0 h) &= h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (k-k_0)\, f_X(kh) \\
&= h\left(1 \times f_X((k_0+1)h) + 2 \times f_X((k_0+2)h) + 3 \times f_X((k_0+3)h) + \ldots\right) \\
&= h\left(f_X((k_0+1)h) + f_X((k_0+2)h) + f_X((k_0+3)h) + \ldots\right) \\
&\quad + h\left(f_X((k_0+2)h) + f_X((k_0+3)h) + \ldots\right) \\
&\quad + h\left(f_X((k_0+3)h) + \ldots\right) \\
&\quad + \ldots \\
&= h \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} f_X(jh) = h \sum_{k=k_0}^{\infty} \overline{F}_X(kh)\,, \text{pour } k_0 \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Fonction stop-loss

Exemple 3

Soit $X \sim Pois\left(\lambda = 5\right)$. *Avec R, calculer* $\pi_X\left(k\right)$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$. *Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique en bâtons, et analyser l'effet de la modification du paramètre* λ.

Exemple 4

Soit $X \sim NBinom\left(r = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{11}\right)$. *Avec R, calculer* $\pi_X\left(k\right)$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$. *Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique en bâtons, et analyser l'effet de la modification des paramètres* r *et* q.

Fonction stop-loss

Exemple 5

Soit X *une v.a. discrète définie sur* $\{0, 1, 2, \ldots, 100\}$, *avec*

$$f_X(k) = 0.8 \times \binom{100}{k} 0.0125^k 0.9875^{100-k} + 0.2 \times \binom{100}{k} 0.2^k 0.8^{100-k},$$

pour $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$. *Avec* R, *calculer* $\pi_X(k)$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$. *Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique en bâtons.*

Fonction stop-loss

Exemple 6

Soit $X \sim Gamma\left(\alpha = 5, \beta = 1\right)$*. Avec* R*, calculer* $\pi_X\left(d\right)$*,* $d \in \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$*. Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique continu, et analyser l'effet de la modification des paramètres* α *et* β*.*

Exemple 7

Soit $X \sim LNorm\left(\mu = \ln\left(5\right) - 0.125, \sigma = 0.5\right)$*. Avec* R*, calculer* $\pi_X\left(d\right)$*,* $d \in \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$*. Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphique continu, et analyser l'effet de la modification des paramètres* μ *et* σ*.*

Fonction quantile

Fonction quantile

On débute avec la définition de base (et générale) de la fonction quantile.

Définition 2

Soit la v.a. X avec fonction de répartition F_X. On définit la fonction inverse F_X^{-1} de F_X par

$$F_X^{-1}(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\}, \tag{10}$$

pour $u \in (0, 1)$.
Par convention, $\inf \emptyset = +\infty$ et $\sup \emptyset = -\infty$. La fonction inverse F_X^{-1} est aussi appelée la fonction quantile de X.

Fonction quantile

La fonction quantile satisfait les propriétés suivantes :

1. F_X^{-1} est non décroissante (croissante au sens large) ;
2. F_X^{-1} est semi-continue à gauche ;
3. $F_X^{-1}\left(F_X\left(x\right)\right) \leq x$;
4. $F_X\left(F_X^{-1}\left(u\right)\right) \geq u$.

Si la v.a. X est continue, alors F_X^{-1} correspond à l'unique solution de

$$F_X\left(x_u\right) = u, \tag{11}$$

pour $u \in (0, 1)$.

Fonction quantile

Dans certains cas, il est possible d'inverser aisément la fonction de répartition pour obtenir la fonction quantile.

Exemple 8 (Inversion à la main de fonctions de répartition)

Soit

$$F_X(x) = \left(\frac{x}{B}\right)^A, \quad x \in (0, B).$$

Développer l'expression de $F_X^{-1}(u)$ *pour* $u \in (0, 1)$.

Fonction quantile

En R, des fonctions internes sont à notre disposition pour calculer les quantiles de lois usuelles.

Exemple 9

1. *Si* $X \sim Gamma(\alpha = 4, \beta = 0.3)$,
   1.1 *Calculer* $f_X(5)$ *;*
   1.2 *Définir l'expression de* $F_X^{-1}(u)$, *puis évaluer en* R *pour* $u \in \{0.9, 0.99\}$.

On note que la Gamma n'est pas inversible. Ainsi les fonctions R *sont plus qu'utiles !*

Fonction quantile

Pour les lois quelconques continues où il est énormément (voir impossible) difficile d'isoler $x = F_X^{-1}(u)$, l'optimisation permet de résoudre

$$F_X(x) = u$$
$$F_X(x) - u = 0$$

En déterminant pour quel x, $F_X(x) = u$, la fonction quantile est ainsi résolue.

Exemple 10

Soit la v.a. continue positive X dont la fonction de répartition est

$$F_X(x) = 0.8 \times \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\right) + 0.2 \times \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{60}}\right),$$

pour $x \in \mathbb{R}_+$.

1. *Avec R, tracer la courbe de F_X et de f_X.*
2. *Avec R, calculer les valeurs de $F_X^{-1}(u)$, $u = \frac{j}{100}$, $j \in \{1, 2, \ldots, 99\}$.*

Fonction quantile

Pour les v.a. discrètes, il suffit d'appliquer directement la dé finition en (10) comme il est illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 11

Soit X *une v.a. discrète définie sur* $\{0, 1, 2, \ldots, 100\}$*, avec*

$$f_X(k) = 0.8 \times \binom{100}{k} 0.0125^k 0.9875^{100-k} + 0.2 \times \binom{100}{k} 0.2^k 0.8^{100-k},$$

pour $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$*.*
Avec R, calculer les valeurs de $F_X^{-1}(u)$*,* $u = \frac{j}{100}$*,* $j \in \{1, 2, \ldots, 99\}$*. Montrer le code. Illustrer la courbe des valeurs avec un graphe continu.*

Exercice 1.7 - manipulations en R

Exercice 1.7 - manipulations en R

Exemple 12

Soit X une v.a. discrète prenant des valeurs dans l'ensemble $A = \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$ et dont la fmp est

$$f_X(k) = \frac{\left(\frac{5}{5+k}\right)^2 - \left(\frac{5}{6+k}\right)^2}{1 - \left(\frac{5}{106}\right)^2}, \quad k \in A.$$

1. *Espérance de X.*
    - *Développez l'expression de l'espérance de X en termes de la fmp.*
    - *Construisez un code R pour calculer l'espérance de X.*
    - *Indiquez la valeur de $E[X]$.*
2. *Variance de X.*
    - *Développez l'expression de la variance de X en termes de la fmp.*
    - *Construisez un code R pour calculer la variance de X.*
    - *Indiquez la valeur de $\sqrt{Var(X)}$.*

Exercice 1.7 - manipulations en R

Exemple (12 - Suite)

3. *Fonction de répartition.*
   - *Développez l'expression de $F_X(k)$, $k \in A$, en termes de la fmp.*
   - *Construisez un code R pour calculer $F_X(k)$, $k \in A$.*
   - *Calculez $F_X(30)$.*
4. *Fgm de X .*
   - *Développez l'expression permettant de calculer la fgm de X définie par*

$$\mathcal{M}_X(t) = E[\mathrm{e}^{tX}], \quad t \geq 0.$$

   - *Construisez un code R pour calculer $\mathcal{M}_X(t)$, $t \geq 0$.*
   - *Calculez $\psi_\rho(X) = \frac{1}{\rho} \ln(\mathcal{M}_X(\rho))$, pour $\rho \in \{0.001, 0.01, 0.1\}$.*

Après-propos

Après-propos

Site du cours : `monportail.ulaval`.

Livre de référence : [Cossette and Marceau, 2023].

Diapositives

- Logiciel : LaTeX
- Package : Beamer
- Éditeur en ligne : Overleaf

Calculs et illustrations

- Toutes les calculs et les illustrations ont été réalisés dans le langage R.
- Les codes R ont été conçus dans l'environnement de développement intégré RStudio.
- Le logiciel GNU R et les bibliothèques sont disponibles sur le site du R Project et du Comprehensive R Archive Network CRAN.

Références

Références I

Cossette, H. and Marceau, E. (2023).
Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives.
Monographie.