实数

2025年9月15日 10:46

一、自然数公理

Peano 公理：

1) $0\in\mathbb{N}$
2) 每个自然数 $n\in\mathbb{N}$，都在 $\mathbb{N}$ 中存在唯一的后继，记作 n^+.

   ($\exists f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ n\mapsto n^+$)
3) 没有以 0 为后继的自然数.
4) 不同自然数的后继不同. (f 为单射)
5) 若 $E\subseteq\mathbb{N}$，包含 0 以及 E 中任何一个元素的后继，则 $E=\mathbb{N}$.

注1：3) 排除了 $0\to0\to0$.

4) 排除了 $0\to0$.

5) 排除了 $0\to0\to0\to\cdots$

$0\to0\to0\to\cdots$ 满足1),2),3),4)

注2：任何非 0 元素都一定是某个元素的后继.

证明：反证. 若不然，$\exists n\in\mathbb{N},\ n\neq0$，对 $\forall m\in\mathbb{N},\ m^+\neq n$.

令 $E=\mathbb{N}\setminus\{n\}$. 则 $0\in E$，且若 $m\in E$，则 $m^+\neq n$，$\therefore m^+\in E$.

由公理5，矛盾！

注3：定义 $1:=0^+,\ 2:=1^+,\ 3:=2^+,\ \cdots\cdots$

注4：公理集合论保证了 $\mathbb{N}$ 的存在.

$0:=\varnothing,\ 1:=\{\varnothing\},\ 2:=\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\ 3:=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\ \cdots\cdots$

$\mathbb{N}$ 上的加法：二元运算 $+:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$.

对 $m,n\in\mathbb{N}$，定义：$n+0=n$

$m+n^+=(m+n)^+$

二、实数系公理

Q：为什么要引入 $\mathbb{R}$？

A：$\mathbb{Q}$ 中无法讨论极限：$1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots$ 之极限不在 $\mathbb{Q}$ 中.

1. 实数系公理

设 $\mathbb{R}$ 是一个集合，其上有两个二元运算 $+,\cdot$ 和一个关系 $\leq$，满足：

1) $(\mathbb{R},+,\cdot)$ 是一个域 (F)；
2) 序公理 (O)：

   O0)(自反性) $\forall x\in\mathbb{R},\ x\leq x$；

   O1)(反对称性) $\forall x,y\in\mathbb{R}$，若 $x\leq y,\ y\leq x$，则 $x=y$；

   O2)(传递性) 若 $x\leq y,\ y\leq z$，则 $x\leq z$；

   O3)(全序性) $\forall x,y\in\mathbb{R}$，$x\leq y$ 和 $y\leq x$ 中至少有一个成立.

且

A0)(加法保序性) 若 $y\leq z$，则 $x+y\leq x+z$；

M0)(乘法保序性) 若 $x,y\geq0$，则 $xy\geq0$.

3) 连续公理

C_1) (Archimedes 公理) 给定 y 与 $x>0$，$\exists n\in\mathbb{N}$ 使

$$nx:=\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n个x}>y$$

C_2) (完备公理) 若 $\exists\tilde{\mathbb{R}}\supseteq\mathbb{R}$，$(\tilde{\mathbb{R}},+,\cdot,\le)$ 满足(F)(O)(C1)，则 $\tilde{\mathbb{R}}=\mathbb{R}$.

2. 复数域

定义：$\mathbb{R}^2$ 中的加法 + 和乘法 · 如下：

$(x_1,y_1)+(x_2,y_2):=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$，

$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2):=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$.

命题：$(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ 构成了一个域，记作 $\mathbb{C}$.

注：可记 $i:=(0,1)$，则 $i^2=(-1,0)$.

并记 $z=x+yi:=(x,y)$.

其中 $x=\mathrm{Re}\,z$，$y=\mathrm{Im}\,z$.

注：广义实数系 $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$.

定义：$E\subseteq\mathbb{R}$，$f:E\to\mathbb{R}$. 若 $\forall x,y\in E$，$x\le y$，都有 $f(x)\le f(y)$，则称 $f(x)$ 在 E 上单调递增.

定义：$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 若 $\exists T>0$，$\forall x\in\mathbb{R}$，$f(x+T)=f(x)$. 则称 f 是以 T 为周期的函数.

三、实数系的构造 (Dedekind 分割)

定义：$\alpha\subseteq\mathbb{Q}$，称 α 为一个 Dedekind 分割，如果它满足：

1) $\alpha\ne\emptyset$，$\alpha\ne\mathbb{Q}$；

2) 对 $p,q\in\mathbb{Q}$，若 $q\in\alpha$，$p<q$，则 $p\in\alpha$.

3) α 中没有最大元素.

若 $\mathbb{Q}\setminus\alpha$ 无(有)最小元，则称 α 为一个无(有)理分割.

称一个 Dedekind 分割为一个实数，全体实数构成的集合记为 $\mathbb{R}$.

注：$p\in\mathbb{Q}$. 令 $p^*:=\{q\in\mathbb{Q}\mid q<p\}$. 则显然 $p^*\in\mathbb{R}$.

而 $\mathbb{Q}\setminus p^*=\{q\in\mathbb{Q}\mid q\ge p\}$ 有最小元 p，故 p^* 为有理分割

反之亦然. 故有理数 $p\longleftrightarrow$ 有理分割 p^*.

引理：存在无理分割.

证明：考虑 $\alpha:=\{p\in\mathbb{Q}\mid p\ge0 且 p^2<2\}\cup 0^*$.

则 ① $0\in\alpha$，$2\notin\alpha$，$\therefore\alpha\ne\emptyset$，$\alpha\ne\mathbb{Q}$.

② 若 $p<q$ 且 $q\in\alpha$.

若 $p<0$ 则 $p\in\alpha$.

若 $0\le p$ 且 $p<q$. $\therefore p^2<q^2<2$. $\therefore p\in\alpha$.

③ 任取 $p\in\alpha$，要求 $r\in\mathbb{Q}$，$r>0$，使 $p+r\in\alpha$.

不妨设 $p>0$，取 $r=\dfrac{2-p^2}{2p+2}\in(0,1)$.

$\therefore\ r<\dfrac{2-p^2}{2p+r}$，则 $(p+r)^2<2$.

④ 下证 $\mathbb{Q}\setminus\alpha$ 中无最小元. 取 $p\in\mathbb{Q}\setminus\alpha=\{q\in\mathbb{Q}\mid q>0, q^2>2\}$

要求 $r\in\mathbb{Q}$，$r>0$，使 $(p-r)^2>2$.

取 $r=\dfrac{p^2-2}{2p}>0$，则 $(p-r)^2=\left(\dfrac{p}{2}+\dfrac{1}{p}\right)^2=\dfrac{p^2}{4}+\dfrac{1}{p^2}+1>2$，又 $r<p$. □

定义：$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. 称 $\alpha\le\beta$ 当且仅当 $\alpha\subseteq\beta$.

定义：$E\subseteq\mathbb{R}$. 若 $\exists\beta\in\mathbb{R}$，满足 $\forall\alpha\in E$，都有 $\alpha\le\beta$.
则称 β 为 E 的上界.
如果存在 $\gamma\in\mathbb{R}$. 满足：
1) γ 为 E 的上界；
2) 若 σ 为 E 的上界，则 $\gamma\le\sigma$.
则称 γ 为 E 的上确界. 记作 $\gamma=\sup E$.

注1：若 $\gamma=\sup E$ 存在且 $\gamma\in E$，记为 $\gamma=\max E$.

注2：类似可定义下确界：$\gamma=\inf E$.

定理：$\mathbb{R}$ 中非空的上有界的集合 E 都在 $\mathbb{R}$ 中存在上确界.

证明：$E\subseteq\mathbb{R}$，$E\ne\emptyset$. 设 $\gamma\in\mathbb{R}$ 为 E 的一个上界.
令 $\beta:=\bigcup_{\alpha\in E}\alpha$. 下证 β 为 E 的上确界.
首先证 β 是一个 Dedekind 分割.
1) $E\ne\emptyset\Rightarrow\beta\ne\emptyset$.
由于 $\gamma\in\mathbb{R}$，$\therefore\gamma\ne\mathbb{Q}$，可取 $p\in\mathbb{Q}\setminus\gamma$.
于是 $\forall q\in\alpha\in E$，$q<p$. $\therefore p\notin\alpha$. 即 $p\notin\beta$.
$\therefore\beta\ne\mathbb{Q}$.
2) 若 $q\in\beta$，则 $\exists\alpha\in E$，使 $q\in\alpha$.
故 $\forall p<q$，必有 $p\in\alpha\Rightarrow p\in\beta$.
3) $\forall p\in\beta$，则 $\exists\alpha\in E$，使 $p\in\alpha$.
故 $\exists q\in\alpha$，使 $q>p$.
$\Rightarrow\exists q\in\beta$，使 $q>p$.
$\Rightarrow\beta$ 中无最大元.
$\therefore\beta$ 为一个分割.
下证上确界.
1) $\forall\alpha\in E$，$\alpha\subseteq\beta$，即 $\alpha\le\beta$. $\Rightarrow\beta$ 为 E 的上界.
2) 若 σ 也是 E 的上界. 则 $\forall\alpha\in E$，都有 $\alpha\le\sigma$.
即 $\alpha\subseteq\sigma$. $\Rightarrow\bigcup_{\alpha\in E}\alpha\subseteq\sigma\Rightarrow\beta\subseteq\sigma$.
$\therefore\beta\le\sigma$. $\square$

注：约定 $\sup\emptyset=-\infty$.
若 $E\subseteq\mathbb{R}$，$E\ne\emptyset$. E 无上界，记 $\sup E=+\infty$.

(一) 有理数分割的稠密性.

引理：若 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$\alpha<\beta$，则 $\exists p\in\mathbb{Q}$，使 $\alpha<p^*<\beta$.

证明：由于 $\alpha<\beta$，即 $\alpha\subsetneq\beta$，故存在 $p_0\in\beta\setminus\alpha$.
由于 β 无最大元，$\exists p\in\beta$，使 $p>p_0$.
$\therefore\alpha\le p_0^*<p^*<\beta$.

引理：设 $\alpha\in\mathbb{R}$，$r\in\mathbb{Q}$，$r>0$，则 $\exists p\in\mathbb{Q}$，使 $p^*<\alpha<(p+r)^*$.

证明：取 $p_0\in\alpha$，$\tilde{p}\notin\alpha$. 则 $\tilde{p}>p$.
令 $p_k=p_0+k\cdot\frac{r}{2}$，由 $\mathbb{Q}$ 的 Archimedes 性，$\exists n\in\mathbb{Z}_+$ 使 $p_n>\tilde{p}$.

设 $m=\min\limits_{p_k\notin\alpha}\{k\}$. 令 $p=p_{m-1}$. 下证 $p^*<\alpha<(p+r)^*$.

由 $\underbrace{p^*<\alpha}_{p_{m-1}\in\alpha}\le \underbrace{(p+\frac{r}{2})^*}_{p_m\notin\alpha}<(p+r)^*$. 即证.

注: $\forall q\in\mathbb{Q}$, 满足 $q^*<\alpha$. 还可取到上述 p, 使 $p\geq q$.

推论: $\alpha=\sup\{p^*\mid p^*<\alpha\}$

$=\sup\{p^*\mid p^*\le\alpha\}$

证明: 由定义, α 为 $\{p^*\mid p^*<\alpha\}$ 的上界.

$\therefore\ \alpha\geq\sup\{p^*\mid p^*<\alpha\}$

若 $\alpha>\sup\{p^*\mid p^*<\alpha\}$,

则 $\exists q\in\mathbb{Q}$, 使 $\sup\{p^*\mid p^*<\alpha\}<q^*<\alpha$. 矛盾!

(二) 在 $\mathbb{R}$ 上定义运算

1. 加法

定义: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. $\alpha+\beta:=\sup E_{\alpha,\beta}$

$E_{\alpha,\beta}=\{(p+q)^*\mid p\le\alpha,\ q\le\beta\}$.

注: $(p+q)^*=p^*+q^*$.

引理: 若 $\forall s\in\mathbb{Q}$, $s>0$, 有 $\alpha\le\beta+s^*$. 则 $\alpha\le\beta$.

证明: 如不然, 则 $\alpha>\beta$. 则 $\exists\ p^*, q^*$, 使 $\beta<q^*<p^*<\alpha$.

则 $\beta+(p-q)^*\le q^*+(p-q)^*=p^*<\alpha$.

取 $s=p-q>0$, 则 $\beta+s^*<\alpha$. 矛盾!

结合律: $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

证明: 任取 $s\in\mathbb{Q}$, $s>0$.

$\exists\ p,q,r\in\mathbb{Q}$, 使 $p^*<\alpha<(p+s)^*$

$q^*<\beta<(q+s)^*$

$r^*<\gamma<(r+s)^*$

则 $\alpha+(\beta+\gamma)\le(p+s)^*+\left((q+s)^*+(r+s)^*\right)$

$=(p+q+r+3s)^*$.

$=\left((p+q)+r+(3s)\right)^*$

$=(p^*+q^*)+r^*+(3s)^*$

$\le(\alpha+\beta)+\gamma+(3s)^*$.

由 s 任意, $\therefore\ \alpha+(\beta+\gamma)\le(\alpha+\beta)+\gamma$.

同理 $(\alpha+\beta)+\gamma \le \alpha+(\beta+\gamma)$.

$\therefore\ (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

加法逆元：$\alpha\in\mathbb{R}$. 令 $E:=\{\gamma\in\mathbb{R}\mid \gamma+\alpha\le 0^*\}$.

定义 $\beta:=\sup E$. 可证明 $\alpha+\beta=0^*$.

故可记 $\beta=-\alpha$.

2. 乘法

定义：对 $\alpha,\beta>0^*$, 定义 $M_{\alpha,\beta}:=\{(pq)^*\mid 0<p^*\le\alpha,\ 0<q^*\le\beta\}$.

定义 $\alpha\beta:=\sup M_{\alpha,\beta}$.

乘法逆元：对 $\alpha>0^*$. 定义 $E:=\{\gamma\mid 0<\alpha\gamma\le 1^*\}$.

定义 $\beta:=\sup E$. 可证明 $\alpha\beta=1^*$.

故可记 $\beta=\frac{1}{\alpha}$.

四、一些常用不等式

(1) Cauchy 不等式

$a_i, b_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\cdots,n$.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

(2) 平均值不等式

$n\ge 2$, $a_1,a_2,\cdots,a_n\ge 0$.

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i.$$

(3) Young 不等式

设 $p,q\in(1,+\infty)$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

则 $\forall a,b>0$, 有 $ab\le\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$.

证明：$\frac{b^q}{ab}=\left(\frac{b}{(ab)^{\frac{1}{q}}}\right)^q=\left(\frac{b(ab)^{\frac{1}{p}}}{ab}\right)^q=\left(\frac{(ab)^{\frac{1}{p}}}{a}\right)^q$.

令 $A:=\frac{a}{(ab)^{\frac{1}{p}}}$, 则 Young $\Leftrightarrow 1\le\frac{1}{p}\cdot\frac{a^p}{ab}+\frac{1}{q}\cdot\frac{b^q}{ab}$

$\Leftrightarrow 1\le\frac{1}{p}A^p+\frac{1}{q}\frac{1}{A^q}$.

不妨设 $A\ge 1$. 取 $m>p$. $m\in\mathbb{Z}_+$.

令 $k:=[\frac{m}{p}]+1$. 则 $\frac{1}{p}\le\frac{k}{m}\le\frac{1}{p}+\frac{1}{m}$.

$\frac{1}{q}\ge\frac{m-k}{m}$.

故 $\frac{k}{m}A^{\frac{m}{k}}+\frac{m-k}{m}\frac{1}{A^{\frac{m}{m-k}}}\ge\left[(A^{\frac{m}{k}})^k\cdot\left(\frac{1}{A^{\frac{m}{m-k}}}\right)^{m-k}\right]^{\frac{1}{m}}=1$.

$\Rightarrow 1\le\frac{k}{m}A^{\frac{k}{m}}+\frac{m-k}{m}\frac{1}{A^{\frac{m}{m-k}}}$

$$\leq \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{m}\right)A^p+\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{A^q}$$

由于 m 任意，$\therefore \frac{1}{p}A^p+\frac{1}{q}A^q \geq 1$.