集合与映射

2025年9月8日 10:05

一、集合论简介

1. 外延原则：集合由元素唯一确定.

   概括原则：$\forall$ 性质 $P(x)$，$\exists\ S$，使其元素为具有性质 $P(x)$ 的对象 x.

2. 集合表示方法

   (1) 枚举法

   自然数集 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$

   (2) 描述法

   $\{x\mid x$ 满足性质 $P\}$

注：常用集合表示
$\mathbb{N}$ 有理数集、$\mathbb{Z}$ 整数集、$\mathbb{Z}_+$ 正整数集、$\mathbb{Q}$ 有理数集、$\mathbb{R}$ 实数集、$\mathbb{C}$ 复数集、

3. 集合的并、交、补

   对于一族集合 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$，

   (1) $\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha:=\{x\mid \exists\alpha\in I,\ x\in A_\alpha\}$

   (2) $\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha:=\{x\mid \forall\alpha\in I,\ x\in A_\alpha\}$

   (3) $A\setminus B:=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$

   (4) (对称差集) $A\Delta B:=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

   (5) A：全集　$B\subseteq A$.

   则 $B^c:=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$

定理 (De Morgan 律)：$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$，$A_\alpha\subseteq X$. X - 全集

则
$$\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha=1}A_\alpha^c$$
$$\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c$$

定义 (Descartes 积)：E,F 为两个集合.

$$E\times F := \{(x,y) \mid x\in E,\ y\in F\}$$

注：原命题 $p\Rightarrow q$ ⎫
逆命题 $q\Rightarrow p$ ⎪ 同真同假
否命题 $\neg p\Rightarrow \neg q$ ⎪ （等价）
逆否命题 $\neg q\Rightarrow \neg p$ ⎭

如，$2^E := \{A \mid A\subseteq E\}$（幂集）

二、关系与映射

定义1：$E\times F$ 的子集 R 称为 E,F 间的关系、/对应.

若 $(x,y)\in R$，则称 x 与 y 是 R-相关，记为 xRy.

称 $\operatorname{dom} R := \{x \mid \exists y\in F,\ s.t.\ xRy\}$（定义域）

$\operatorname{ran} R := \{y \mid \exists x\in E,\ s.t.\ xRy\}$（值域）

定义2：若 $\forall x\in E$，$\exists F$ 中唯一的 y 与之对应，称 E,F 间的关系 R 为一个映射/函数.

可记 $y=R(x)$ — x 在 R 下的像，x — 原像.

注：映射的表示. $R: E\to F$

$x \mapsto R(x)$

E中元素 自变量. $\operatorname{dom} R = E$ ⎫ 这里 R 均为映射

F中元素 因变量. $\operatorname{ran} R\subseteq F$ ⎭

定义3：若 $\forall x_1,x_2\in E$，$x_1\neq x_2$，有 $R(x_1)\neq R(x_2)$，则称 R 是一个单射.

若 $\operatorname{ran} R = F$，则称 R 是一个满射.

若 R 既单又满，则称 R 是一个双射.

定义4：若 f 是定义在 E 上的函数，$W\subseteq E$，在 W 上定义

$$g(x) := f(x) \quad \forall x \in W$$

则称 g 为 f 在 W 上的一个限制. 记作 $f(x)|_W$.

且 f 为 g 在 E 上的延拓.

定义5：若 $f: E \to F$ 为一个单射，则 $\forall y \in \operatorname{ran} f$，$\exists!x$ 满足 $y=f(x)$，我们记 $x=f^{-1}(y)$，则 $f^{-1}: \operatorname{ran} f \to E$ 为 f 的逆映射；

对于映射 $f: E \to F$，$g: F \to G$，映射 $g\circ f: x \mapsto g(f(x))$ 为 g 和 f 的复合映射.

定义6：$f: E \to F$ 为一个函数，$A \subseteq E$，则 $f(A)=\{f(x) \mid x \in A\}$.

特别地，$f(E) = \operatorname{ran} f$.

定义7：称 $R: E \to E$ 为等价关系，如果

① 自反性：$\forall x \in E$，xRx.

② 对称性：$\forall x, y \in E$，若 xRy，则 yRx.

③ 传递性：若 xRy 且 yRz，则 xRz.

例1：$E=\mathbb{Z}$，$\forall x, y \in \mathbb{Z}$，称 xRy 当且仅当 $3 \mid x-y$. 则 R 为等价关系.

注：常将等价关系记作"$\sim$"，如 $x \sim y$.

例2：对于集合 E，设 $F := 2^E$. 定义 $R: F \to F$.

$\forall A, B \in F$（即 $A, B \subseteq E$），定义 $(A,B) \in R$ 当且仅当 A, B 间存在双射.

证明：R 为等价关系.

证明：① $(A,A) \in R$. 因为 $id: A \to A$，$x \mapsto x$ $(\forall x \in A)$ 为双射.

② 若 $(A,B) \in R$，设 $T: A \to B$ 为双射，取 $T^{-1}: B \to A$ 也为双射.

即 $(B,A) \in R$.

③ 若 $(A,B), (B,C) \in R$，设 $T: A \to B$，$S: B \to C$ 为双射. 则 $S\circ T: A \to C$ 为双射. $\therefore (A,C) \in R$. $\square$

三、集合的势

定义1：设 E, F 为集合.

① 称 $\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{F}}$，当且仅当 E, F 之间存在一个双射，或称 E, F 等势.

② 若 $E = \emptyset$，记 $\bar{\bar{E}} = 0$；
若 $\bar{\bar{E}} = \overline{\overline{\{1,2,\dots,n\}}}$，记 $\bar{\bar{E}} = n$.

均称 E 为有限集，否则称 E 为无限(穷)集.

③ 若 $\bar{\bar{E}}=\bar{\bar{\mathbb{N}}}$，称E为一个可数集/可列集. 其基数记作 $\aleph_0$（阿列夫零）.

④ 若 $\bar{\bar{E}}=\bar{\bar{\mathbb{R}}}$，称E具有连续势/连续统，其基数记作 $\aleph$.

⑤ 若存在E到F的单射，则称 $\bar{\bar{E}}\le\bar{\bar{F}}$.

若 $\bar{\bar{E}}\le\bar{\bar{F}}$ 且 $\bar{\bar{E}}\ne\bar{\bar{F}}$，则称 $\bar{\bar{E}}<\bar{\bar{F}}$.

⑥ 若 $\bar{\bar{E}}\le\aleph_0$，则称E为至多可数集.

注：① 可数集是基数"最小"的无穷集.

即对 $\forall E$ 为无穷集合，$\exists T:\mathbb{N}\to E$ 为单射.

证明：由于 $E\ne\varnothing$，故可取 $x_0\in E$.

考虑 $E\setminus\{x_0\}$，它还是无穷集，故又可取 $x_1\in E\setminus\{x_0\}$.

以此类推，可取一列E中互异的元素 $x_0,x_1,\cdots$.

定义 $T: k\mapsto x_k$，$\forall k\in\mathbb{N}$. 则 $T:\mathbb{N}\to E$ 为单射.

② 等势是一个等价关系.

③ $\aleph_0<\aleph$.

定理：E为集合. 则 $\overline{\overline{2^E}}>\bar{\bar{E}}$.

证明：$\because$ $\forall x\in E$，$x\mapsto\{x\}\in 2^E$ 为E到 2^E 的单射.

$\therefore$ $\bar{\bar{E}}\le\overline{\overline{2^E}}$.

反证. 设 $\bar{\bar{E}}=\overline{\overline{2^E}}$. 即 $\exists T: E\to 2^E$ 为双射.

定义 $A:=\{x\in E \mid x\notin T(x)\}$.

令 $y:=T^{-1}(A)$，若 $y\in A=T(y)$，则 $y\notin A$，

若 $y\notin A=T(y)$，则 $y\in A$. 矛盾!

注：① 若E为有限集，设 $\bar{\bar{E}}=n$，则 $\overline{\overline{2^E}}=2^n=2^{\bar{\bar{E}}}$.

② 2^E 与 $\{f: f$ 为E到 $\{0,1\}$ 的映射$\}$ 等势.

$T: A\mapsto \chi_A$，$A\in 2^E$（即 $A\subseteq E$）

取 $\chi_A(x):=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$ （A的示性函数）

③ 考虑从E映到F的所有映射构成的集合，其基数记作 $(\bar{\bar{F}})^{\bar{\bar{E}}}$.

定理：可列个可数集的并还是可数集.

证明：设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一列可列集.

设 E_k 中的元素可排成一列 $a_{k1},a_{k2},a_{k3},\cdots$.

则按以下形式列出 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 中所有元（去重）:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
a_{11} & \to & a_{12} & & a_{13} & \to & a_{14} & & a_{15} & \to & a_{16} & & a_{17} & \to & a_{18} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & a_{25} & & a_{26} & & a_{27} & & a_{28} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & a_{35} & & a_{36} & & a_{37} & & a_{38} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & & a_{45} & & a_{46} & & a_{47} & & a_{48} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
a_{51} & & a_{52} & & a_{53} & & a_{54} & & a_{55} & & a_{56} & & a_{57} & & a_{58} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_{61} & & a_{62} & & a_{63} & & a_{64} & & a_{65} & & a_{66} & & a_{67} & & a_{68} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
a_{71} & & a_{72} & & a_{73} & & a_{74} & & a_{75} & & a_{76} & & a_{77} & & a_{78} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_{81} & & a_{82} & & a_{83} & & a_{84} & & a_{85} & & a_{86} & & a_{87} & & a_{88} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
a_{91} & & a_{92} & & a_{93} & & a_{94} & & a_{95} & & a_{96} & & a_{97} & & a_{98} & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

□

注：① 该结论可记为 $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$.

同理 $\aleph_0^n=\aleph_0,\ \forall n\in\mathbb{N}_+$.

如：$\overline{\overline{\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{N}\}}}=\aleph_0$.

但 $\aleph_0^{\aleph_0}\neq\aleph_0$. 自然数序列的数目.

② 可列个可列集的并还是可列集.

例：证明：有理数集 $\mathbb{Q}$ 为可列集.

证明：$\mathbb{Q}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+}\{\frac{m}{n}\mid m\in\mathbb{N}\}\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+}\{-\frac{m}{n}\mid m\in\mathbb{N}\}$. □

定义：$n\geq 0$，形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的式子称为多项式，若 $a_n\neq 0$，则称为一个 n 次多项式.

称非零整系数多项式的(复)零点为代数数.

$\mathbb{C}$ 中不是代数数的数称为超越数.

注：① 定理(代数基本定理)：一个 n 次复系数多项式在 $\mathbb{C}$ 中恰有 n 个复根.

② 代数数可视为有理数的一种推广.

例：代数数集也是可列集.

证明：n 次整系数多项式是有以下形式：

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 \quad a_k\in\mathbb{Z},\ a_n\neq 0$.

这样的多项式构成的集合基数为 $\aleph_0^{n+1}=\aleph_0$.

由代数基本定理，由 n 次整系数多项式给出的代数数的基数至多为 $n\aleph_0=\aleph_0$.

故代数数集基数为 $\aleph_0$.

定理：$\aleph>\aleph_0$.

证明：首先证明 $\overline{\overline{(0,1)}}=\aleph$. 这是因为 $f: x\mapsto \tan(\pi(x-\frac{1}{2}))$ 为 $(0,1)$ 到 $\mathbb{R}$ 的双射.

下证 $\overline{\overline{(0,1)}}>\aleph_0$. 首先，$\because g: k\mapsto\frac{1}{k},\ \forall k\in\mathbb{N}_+$ 为 $\mathbb{N}_+$ 到 $(0,1)$ 的单射.

$\therefore \overline{\overline{(0,1)}}\geq\aleph_0$.

假设 $\overline{\overline{(0,1)}}=\aleph_0$. 则 $\exists$ 双射 $T:\{1,2,3,\cdots\}\to(0,1)$.

即 $(0,1)$ 中的数可排成一列 $x_1,x_2,x_3,\cdots$.

设 x_k 有十进制小数表示（不以 9 为循环节）

即 $x_k=0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots$

设 $y=0.y_1y_2y_3\cdots$ 满足 $y_k=\begin{cases}1, & a_{kk}\neq1\\ 2, & a_{kk}=1\end{cases}$

则 y 和任何一个 x_k 不同，且 $y\in(0,1)$. 矛盾！ $\square$

$\therefore\ \aleph>\aleph_0$.

定理: $\aleph=2^{\aleph_0}$.

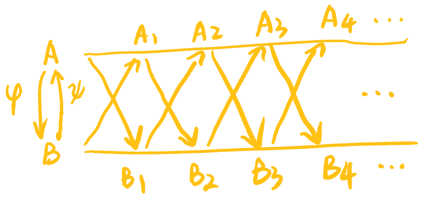
引理 (Bernstein 定理): 设 $\bar{\bar{A}}\le\bar{\bar{B}}$ 且 $\bar{\bar{B}}\le\bar{\bar{A}}$, 则 $\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{B}}$.

证明: 先证引理. 由条件, $\exists\varphi:A\to B$ 为单射, $\psi:B\to A$ 为单射.

记 $B_1=\varphi(A)$ (φ 的值域), $A_1=\psi(B)$.

对 $n\geq1$, 令 $B_{n+1}=\varphi(A_n)$

$A_{n+1}=\psi(B_n)$



由此, φ 为 A_n 到 B_{n+1} 的双射.

ψ 为 B_n 到 A_{n+1} 的双射.

故 $\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{B_1}}=\bar{\bar{A_2}}$, $\bar{\bar{B}}=\bar{\bar{A_1}}$. 下只需证 $\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{A_1}}$.

由上, $\psi\circ\varphi$ 为 A_n 到 A_{n+2} 的双射. 故 $\psi\circ\varphi$ 为 $A_n\setminus A_{n+1}$ 到 $A_{n+2}\setminus A_{n+3}$ 的双射.

由于 $A=\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k\right)\cup(A\setminus A_1)\cup(A_1\setminus A_2)\cup(A_2\setminus A_3)\cup\cdots$

$A_1=\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k\right)\cup(A_1\setminus A_2)\cup(A_2\setminus A_3)\cup\cdots$

故定义 A 到 A_1 的双射

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{若 } x\in\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k\right)\cup\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(A_{2n+1}\setminus A_{2n+2})\\ \psi(\varphi(x)), & \text{否则.}\end{cases}$$

$\therefore\ \bar{\bar{A}}=\bar{\bar{A_1}}=\bar{\bar{B}}$. $\square$

证明: 易证 $\overline{\overline{[0,1)}}=\aleph$,

① 构造 $[0,1)\to2^{N_+}$ 的单射.

对于 $x\in[0,1)$, 取其二进制小数表示 $x=0.a_1a_2a_3\cdots$ (不以 1 为循环节).

令 $F(x):=\{n\in N_+\mid a_n=1\}\subseteq N_+$.

则 $F(x)$ 为 $[0,1)$ 到 2^{N_+} 的单射.

$\therefore\ \overline{\overline{[0,1)}}\le2^{\overline{\overline{N_+}}}=2^{\aleph_0}$.

② 构造 $2^{N_+}\to[0,1)$ 的单射.

对于 $E\subseteq N_+$，定义 $a_n=\begin{cases}1, & n=2m,\ m\in E\\ 0, & \text{Otherwise}\end{cases}$

并令 $G(E):=0.a_1a_2a_3\cdots$.

$\therefore$ $G(E): 2^{N_+}\to[0,1)$ 为单射.

$\therefore$ $2^{\aleph_0}\le\overline{\overline{[0,1)}}$.

$\therefore$ $\aleph=2^{\aleph_0}$. □

定理：$N^{\infty}:=\{\{x_k|k\geq1\}\mid x_k\in N,\ k\in N_+\}$ 的势为 $\aleph$.

$R^{\infty}:=\{\{x_k|k\geq1\}\mid x_k\in R,\ k\in N_+\}$ 的势为 $\aleph$.

证明：(启发性的推导：$\aleph^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\times\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph$)

$\aleph_0\times\aleph_0$ 不妨想成是可列个可列集构成的方阵.

下证 $(0,1)^{\infty}$ 的势为 $\aleph$.

对 $\forall x\in(0,1)$，考虑其二进制表示(排除1为循环节)

$x_1=0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$

$x_2=0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$

$x_3=0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$

$\cdots\cdots$

考虑 $\overline{\overline{(0,1)}}=\aleph$ 即证.

注1(基数的三歧性) 对 $\forall$ 集合 E,F，$\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{F}}$，$\overline{\overline{E}}=\overline{\overline{F}}$，$\overline{\overline{E}}>\overline{\overline{F}}$ 是否仅成立一个？

注2(连续统问题) 是否存在集合 E，使 $\aleph_0<\overline{\overline{E}}<\aleph$.(在ZFC公理中无法回答)