线性方程组

2025年9月9日　10:24

一、Gauss-Jordan 算法

1. $m,n\in\mathbb{Z}^+$，以 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 为变量的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (*)$$

a_{ij} — 系数　　　$b_1,b_2,\dots,b_n$ — 常数项

2. 方程组的初等变换

① 交换两个方程的顺序

② 某个方程之 k 倍加到另一个方程上

③ 某个方程之非0倍数

3. 增广矩阵与系数矩阵

① (*) 的增广矩阵为 $\tilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

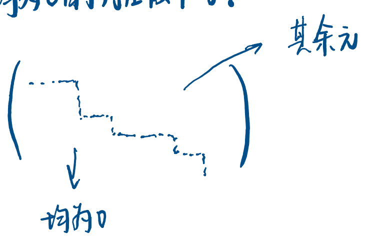
② (*) 的系数矩阵为 $A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

据此显然可知矩阵的初等行变换.

4. 阶梯形矩阵

· 自上而下第一个非0元之前的0的个数严格增加.

· 均为0的行在最下方。



注1：最简阶梯形

① 是阶梯形

②各行第一个非0元均为1，且此"1"所在列之其他元均为0。

注2：解方程之过程即为将$\tilde{A}$之系数部分转化为最简阶梯形

例1：解方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2-x_3=3 \\ 2x_1-2x_2-x_3=5 \end{cases}$

解：
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+①\times(-2)]{②+①\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[③\times(-\frac{1}{3})]{②\times(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{①+②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

故方程的通解为 $\begin{cases} x_1=2+x_2 \\ x_3=-1 \end{cases}$ 其中 x_2 为自由变量。

定理：适当调整变量顺序，$\tilde{A}$ 必可化成如下阶梯形。

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ii}\neq 0 \ (1\leq i\leq r)$

$m-(r+1)$ 个 0 行

方程解况分析：

- $d_{r+1}\neq 0$：无解。
- $d_{r+1}=0$：此时 $r\leq n$。
  (1) 若 $r=n$，有唯一解。
  (2) 若 $r<n$，有无限解（含 $n-r$ 个自由变量）。

例2：解方程组 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & -8 & 17 & 11 & a \\ 3 & -6 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

答案：当 $a\neq -4$ 时，方程无解。

当 $a=-4$ 时，方程的通解为 $\begin{cases} x_1=\frac{12}{7}+2x_2 \\ x_2=-\frac{9}{7} \end{cases}$

当 $a=-4$ 时，方程的通解为 $\begin{cases} x_1 = \frac{12}{7} + 2x_2 \\ x_3 = -\frac{9}{7} \\ x_4 = 1 \end{cases}$

其中 x_2 为自由变量.

定义：称 (*) 为齐次的，当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

齐次方程必有解 ($d_{r+1} = 0$)

(1) $r = n$. 有唯一解，称作零解 ($x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

(2) $r < n$. 有无限解.

二、数域

若 $F \subset \mathbb{C}$ 且 F 中至少含有 2 个不同的数. 称 F 为数域，若 F 对 $+ - \times \div$ 封闭.

例：$\mathbb{R}$ 实数域，$\mathbb{C}$ 复数域，$\mathbb{Q}$ 有理数域.

例：m 为无平方因子的正整数. $\mathbb{Q}[\sqrt{m}] \triangleq \{a + b\sqrt{m} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$ 为数域.

注：$\mathbb{Q} \subseteq F$.

术语：称一个方程组/矩阵是定义在 F 上的，若其系数均在 F 中.

约定求方程组的解均指求 F-有理解.