TP 14 : Expressions arithmétiques symboliques

Notions : Arbres

1 Introduction

Les logiciels qui manipulent les expressions arithmétiques comme l'éditeur d'équation de Word ou les logiciels de calcul symbolique (mapple) doivent avoir une représentation interne de ces expressions. Pour faciliter ces manipulations, on utilise une représentation en arbre. Vous allez réaliser une application qui trace une expression entrée au clavier, calcule sa dérivée formelle et trace cette dérivée, comme dans l'exemple ci dessous.

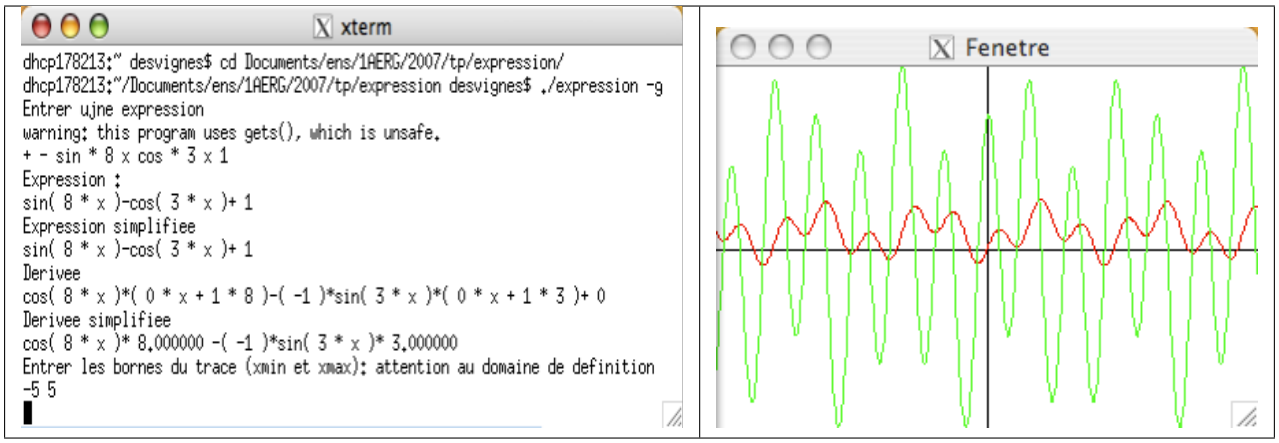
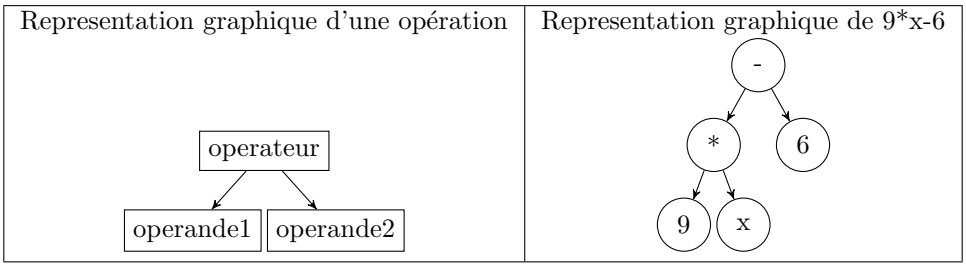


FIGURE 1 – Exemple

Toute expression arithmétique correctement formée est une succession d'opérations binaires $(+, -, *, /,)$ ou unaires (sin, cos, tan, etc..). L'écriture usuelle est une écriture infixée, qui impose des parenthèses en fonction des priorités des opérateurs utilisés. Ainsi, les expressions $9 * x - 6$ ou $(9 * x) - 6$ sont identiques, alors que $9 * (x - 6)$ est différente. La forme générale d'une opération est `(opérande1 opérateur opérande2)`.



L'écriture préfixée supprime les parenthèses, moyennant un peu de gymnastique intellectuelle. Il suffit de représenter une opération en commençant la notation par l'opérateur : `opérateur opérande1 opérande2`. Les parenthèses deviennent inutiles et l'expression `(9*x)-6` s'écrit alors `- * 9 x 6`.

Graphiquement, une expression est représentée par un arbre binaire dont la racine détient l'opérateur et dont les fils représentent respectivement le premier et le second opérande. Chaque fils peut être lui même une expression binaire. Une expression est donc formée récursivement d'éléments de base (des noeuds) du type :

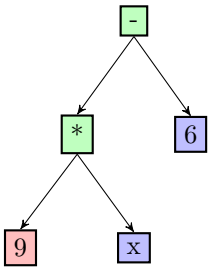
— un nœud qui contient une chaîne de caractères représentant les opérateurs `"+","-","*","/"]` et possède exactement deux fils. Chacun de ses fils est lui-même une expression.

— un nœud qui contient une chaîne de caractères représentant les opérateurs `"sin", "cos", "tan", "sqrt"` et possède un fils unique. Ce fils est une expression. Par convention, le fils gauche sera NULL.

— une feuille qui contient une chaîne de caractères représentant soit une variable soit un nombre et dont les 2 fils sont nuls.

Un nœud de l'arbre est donc représenté par une structure comportant au moins 3 champs : la valeur du noeud, un pointeur vers le sous arbre gauche (éventuellement vide), un pointeur vers le sous arbre droit (éventuellement vide).

L'expression précédente se traduit par l'arbre ci-dessous :

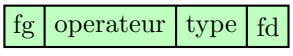


1.1 Structure de données

Les structures de données fournies dans le fichier `arbre.h` que vous allez utiliser sont les suivantes :

```
typedef  enum { OPERATEUR_BINAIRE, OPERATEUR_UNAIRE, VALEUR, VARIABLE }  TYPE;
```

`TYPE` est un type qui représente les 4 constantes possibles : `OPERATEUR_BINAIRE, OPERATEUR_UNAIRE, VALEUR, VARIABLE`. Il sera utilisé pour connaître la nature du noeud de l'arbre (voir la fonction `creerNeoud` ou la fonction `derivArbre` dans la partie 2 du sujet par exemple).




```
typedef
  struct noeud {
    char* val;
    TYPE type;
    struct noeud* fg;
    struct noeud* fd; }* ARBRE;
```

`ARBRE` : c'est le type permettant de définir les noeuds d'un arbre. `fd` et `fg` sont les fils gauche et droit, donnant accès aux sous arbres gauche et droit. Les informations utiles pour notre application sont les champs `val`, qui contient une chaîne de caractères (un nom de fonction comme "sin", un opérateur comme "+", une variable comme "x" ou un nombre comme "3.14159") et le champ `type`, qui indique quelle est la nature du noeud et qui peut prendre les valeurs `OPERATEUR_BINAIRE, OPERATEUR_UNAIRE, VALEUR, VARIABLE`. L'arbre représentant `9*x+6` est celui présenté figure 2

1.2 Les fonctions déjà réalisées

Les fonctions qui permettent de lire une expression préfixée au clavier et de créer l'arbre correspondant sont déjà réalisées. Elles se trouvent dans le fichier `arbre.c`, déclarées dans le fichier d'entete `arbre.h`.

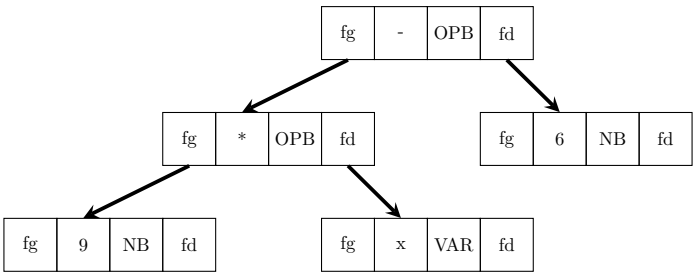


FIGURE 2 – Arbre e 9*x+6

— `ARBRE lireArbre(char* s)` qui transforme la chaîne de caractère `s` introduite en écriture préfixée en un arbre que vous pourrez ensuite utiliser. Les opérateurs et fonctions prévues sont les opérateurs $+, -, *, /,$' $sin, cos, tan, sqrt, log$. Elle retourne NULL si l'expression est mal formée.

— `ARBRE creerNoeud(char* s)` : construit un unique noeud correspondant à la chaîne s. Cette fonction alloue la mémoire nécessaire à un noeud, copie la chaîne s dans le champ `val` de ce nœud et positionne le champ `type` selon la nature de al chaine `s` (`OPERATEUR_BINAIRE, OPERATEUR_UNAIRE, VALEUR, VARIABLE`).

— `ARBRE simplifieArbre(ARBRE r)` : simplifie si possible l'arbre `r` et retourne l'arbre simplifié. L'arbre initial peut être modifié. Les simplifications concernent les multiplications par 1 ou 0, les additions avec 0, les additions et les multiplications de constantes.

— `ARBRE libereArbre(ARBRE r)` : libère la mémoire allouée à l'arbre r et retourne NULL

2 Première partie : affichage et évaluation d'une expression

2.1 Affichage d'un arbre

Pour afficher l'expression sous la forme (op1 operateur op2), il suffit d'utiliser une fonction récursive qui s'écrit en quelques lignes dont la forme générale est :

1. on affiche d'abord l'opérande 1 entre parenthèses, c'est à dire qu'on affiche le fils gauche
2. on affiche l'opérateur, c'est le contenu du noeud
3. on affiche l'opérande 2 entre parenthèses, c'est à dire qu'on affiche le fils droit

Pour améliorer cet affichage qui comporte beaucoup trop de parentheses, on remarque que les parenthèses sont nécessaires lorsqu'on affiche un noeud `*` ou `/` et que l'operande est un opérande additif `+` ou `-`. Les parenthèses sont aussi indispensables pour l'operande 2 (fils droit) des noeuds `-` et `^`.

1. Dans le fichier `fonctions.c`, écrire la fonction d'affichage `void affiche(ARBRE r)` : affiche l'expression `r` en notation infixée (habituelle), avec les parenthèses nécessaires. Cette fonction affiche ((9*x)-6) à l'écran avec l'exemple précédent.
2. Faire un programme qui lit une expression au clavier en notation préfixée, puis affiche cette expression en notation infixée. Utiliser la fonction `gets` ou `fgets` pour la lecture (cf fichier `expression1.c`). Tester ce programme sur plusieurs exemples.

2.2 Evaluation d'un arbre

Lorsqu'une expression dépend d'une variable, on peut calculer la valeur du résultat pour différentes valeurs de cette variable. On utilise la récursivité pour trouver la valeur de l'expression dont la racine est le noeud r :

— Si le nœud r est un nombre, la valeur de l'expression est le nombre lui même. La conversion d'une chaine de caractere en nombre se fait grâce à la fonction `double atof(char*)`.

— Si le noeud r est une variable, la valeur de l'expression est la valeur de x
— Si r est un "+", la valeur de l'expression est la somme de la valeur du sous arbre gauche (l'opérande1) pour x (il suffit d'utiliser la fonction sur le sous arbre gauche, ie le fils gauche) ET de la valeur du sous arbre droit (l'opérande 2) pour x (il suffit d'utiliser la fonction sur le sous arbre droit, ie le fils droit)
— etc...

1. Dans le fichier `fonctions.c`, écrire la fonction `double evalArbre(ARBRE r, double x)` qui calcule la valeur de l'expression `r` pour la valeur donnée par `x`. Cette fonction s'écrit en 20 lignes au maximum, dont la moitié sont similaires.
2. Faire un programme qui lit une expression préfixée au clavier, et affiche la valeur de cette expression pour différentes valeurs de la variable.

2.3 Premier test graphique

Le fichier `expression1.c` lit une chaîne au clavier et affiche l'expression en notation classique, puis affiche le tracé de la fonction dans une fenêtre graphique avec les 2 axes.

Vous pouvez le tester après avoir télécharger le fichier `Makefile` et compiler avec la commande unix : `make expression1`.

2.4 Fonctions utiles

— `double atof(char* s)` convertit une chaîne de caractère contenant un nombre en réel double précision.
— `int strcasecmp(char* s1, char* s2)` compare les deux chaînes s1 et s2 sans tenir compte des majuscules et minuscules. Cette fonction sera utile pour déterminer quelles sont les fonctions mathématiques utilisées (sin, cos, sqrt, etc...) et stockées dans le champ val d'un noeud.

3 Deuxième partie : dérivation d'une expression

3.1 Copie d'abre

La copie d'arbre est une fonction récursive. Pour recopier l'expression "r" **non vide**, il faut créer un nouveau nœud "a" dont les champs val et type seront identiques à ceux de r, puis mettre dans le fils gauche de "a" la copie du fils gauche de "r" et mettre dans le fils droit de "a" la copie du fils droit de "r".

1. Ecrire la fonction `ARBRE copieArbre(ARBRE r)` qui copie une expression en récréant une nouvelle expression identique : tous les nœuds et feuilles de l'arbre d'origine sont recopiés dans l'arbre copié. Cette fonction s'écrit en 6 lignes.
2. Tester la fonction `copieArbre` grâce au fichier `expression2.c`. On lit une expression au clavier, on la copie dans une autre expression, on libère la première, on affiche la première (elle est vide) puis on affiche la copie et on trace la copie.
   Compiler avec la commande unix : `make expression2`.
   Si la fonction de copie est mal réalisée, l'exécution produira une erreur de segmentation ou un message d'erreur de l'allocateur mémoire du type `malloc: *** error for object 0x7fecc244b5d0: pointer being freed was not allocated .....`.

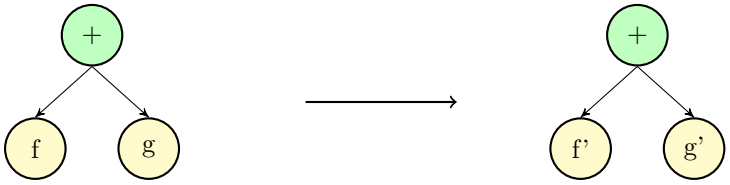
3.2 Dérivation

La dérivée formelle de l'expression $f+g$ est $f'+g'$, celle de $f*g$ est $f'*g+f*g'$, etc... A partir de l'arbre représentant une expression, on peut construire un nouvel arbre représentant la dérivée formelle. L'arbre dérivé est un arbre indépendant de l'expression d'origine. La fonction est récursive et l'algorithme ressemble alors à :

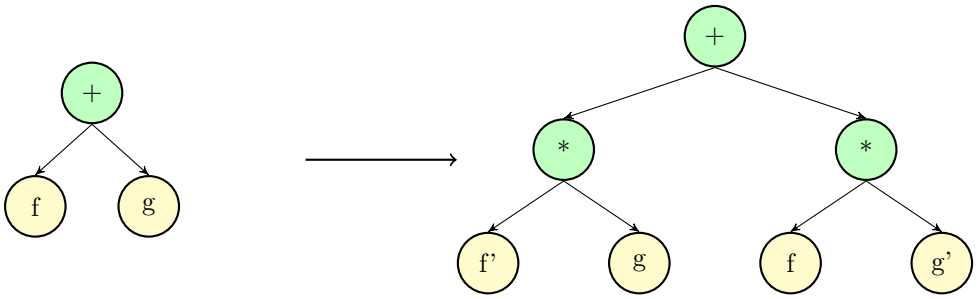
— Si le noeud "r" est un nombre constant, sa dérivée est nulle et on retourne un nœud contenant la valeur '0'.

— Si le noeud "r" est la variable x, sa dérivée est 1 et on retourne un nœud contenant la valeur '1'.

— Si le noeud "r" est un +, on a alors une expression du type f+g ie (le fils gauche) + (le fils droit). Sa dérivé est donc f'+g'. Il faut donc créer un nœud "a" de type opérateur contenant '+'. Il faut mettre f' (la dérivée du fils gauche du noeud "r") dans le fils gauche de "a". De même, le fils droit contient la dérivée du fils droit du noeud "r"



— Si c'est un *, la dérivée est un peu plus complexe et l'arbre dérivé est :



Le code de cette fonction derivArbre pour l'opérateur plus ressemblera donc à cela :

```
ARBRE derivArbre(ARBRE r) { ARBRE c;
  if (r!=NULL)  /* L'expression n'est pas vide */
    switch(r->type)  {
      case OPERATEUR_BINAIRE : /*  Une expression binaire*/
        if (r->val[0]=='+' ) {  /* C'est un + */
           c=creernoeud("+");   /* Creation d'un noeud + */
           c->fg=derivArbre(r->fg);  /* Copie de la derivee du fg*/
           c->fd=derivArbre(r->fd);  /* Copie de la derivee du fd*/
           return c ;     /* On retourne learbre derive cree*/
        } ......
```

1. Écrire une fonction `ARBRE derivArbre(ARBRE r)` qui dérive une expression arithmétique par rapport à la variable (x par exemple). Commencer par écrire la fonction dérivée pour les opérateurs + et –, les variables et les constantes. Tester votre fonction en vérifiant que l'arbre dérivé est correct sur des exemples simples ($3 + x, x + x, x + x + x – x, x + 2 – x + 8 + x - 7$)
2. Tests : le fichier `expression3.c` lit une expression, calcule sa dérivée, la simplifie, l'affiche et trace la courbe initiale et la dérivé dans une fenêtre graphique. Compiler avec la commande unix : `make expression3`
3. Compléter ensuite la fonction pour des expressions plus complexes à l'aide du tableau 1
4. Le fichier `expression3.c` utilise la fonction `simplifieArbre` pour simplifier l'expression dérivée, comme les expressions `x-x, x-0, 1*x, x/1`, etc... Il est cependant bien plus efficace de ne pas construire les arbres inutiles. Par exemple, la dérivée de `x + 1` devrait construire l'expression `1` et non l'expression `0 + 1`. Vous pouvez écrire les fonctions `ARBRE creerSomme(ARBRE f1, ARBRE f2)`, `ARBRE creerProduit(ARBRE f1, ARBRE f2)`, etc.. qui construisent les arbres `f1+f2` ou `f1*f2` uniquement si cela est nécessaire et les utiliser pour écrire la fonction `derivArbre`.

Fonction	Dérivée
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$f(x)-g(x)$	$f'(x)-g'(x)$
$f(x)*g(x)$	$f'(x)*g(x)+f(x)*g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)*g(x)-f(x)*g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$g'(x).f'(g(x))$
$sin(f(x))$	$f'(x).cos(f(x)$
$cos(f(x))$	$-f'(x).sin(f(x)$
$exp(f(x))$	$f'(x).exp(f(x)$
$log(f(x))$	$\frac{f'(x)}{log(f(x))}$

TABLE 1 – Tableau des principales dérivées

4 Troisième partie : Analyse syntaxique

Pour passer de l'écriture infixée à l'écriture préfixée (ou directement à l'arbre représentant les expressions), il faut utiliser un analyseur syntaxique dont le rôle est de vérifier si l'expression est correcte et de gérer les erreurs. Pour cela, on fait appel à la notion de grammaire formelle (voir CHOMSKY). Une grammaire comporte 4 objets différents :

1. l'alphabet A : Symboles terminaux ou unités lexicales qiu correspondent à tous les symboles de nos expressions : `'0'..'1','+','-','*','/','sin',` etc...
2. l'alphabet X : Symboles intermédiaires ou catégories grammaticales qui correspondent à des états intermédiaires dans l'analyse que l'on va faire.
3. Règles de grammaire de type $x->w$, avec $x \in X$ et $w \in (A \cup X)^*$
4. L'axiome à partir duquel on démarre l'analyse.

4.1 Grammaire des expressions arithmétiques simplifiée

Pour analyser des expressions ne comportant que des opérateurs `+` ou `*`, des variables `x` ou `y`, la grammaire sera la suivante :

1. Axiome ou point de départ de l'analyse : `Expression` (voir dans les règles)
2. A = `'0'..'9','.','x,'y', '+','*','(',')'`
3. X = Expression, Terme, Facteur, Nombre
4. Règles :
   - Règle 1 : $Expression \rightarrow Terme + Expression$
   - Règle 2 : $Expression \rightarrow Terme$
   - Règle 3 : $Terme \rightarrow Facteur * Terme$
   - Règle 4 : $Terme \rightarrow Facteur$
   - Règle 5 : $Facteur \rightarrow (Expression)$
   - Règle 6 : $Facteur \rightarrow Nombre$
   - Règle 7 : $Facteur \rightarrow Variable$
   - Règle 8 :$Nombre \rightarrow ['0'..'9'] + .['0'..'9']^+$
   - Règle 9 : $Variable \rightarrow x$
   - Règle 10 : $Variable \rightarrow y$

4.2 Exemple d'analyse

Pour analyser notre expression $9 * (x + 6)$ qui est correcte, on applique successivement les règles suivantes en partant du symbole de départ.

Appliquer une règle signifie identifier la partie gauche et la partie droite de cette règle avec l'expression en cours d'analyse. Si nous analysons l'expression $x+6$, appliquer la règle 1 signifie que dans cette règle, on considère que $expression = x+6$. On identifie alors dans la partie droite $Terme = x$, le + de $x+6$ correspond bien au + de la règle 1, et on identifie $Expression$ de la partie droite par $expression = 6$. Cette règle peut s'appliquer si l'analyse de $Terme = x$ et l'analyse de $expression = 6$ sont toutes les 2 validées récursivement (ce qui sera effectivement vérifié avec l'application des règles 4 et 8 pour $Terme = x$ et des règles 2,4,9 pour $Expression = 6$.

L'analyse de l'expression $9 * (x + 6)$ se fait alors par l'application des règles suivantes :

1. Règle 2 = $Expression : 9 * (x + 6) \rightarrow Terme : 9 * (x + 6)$
2. Règle 3 = $Terme : 9 * (x + 6) \rightarrow Facteur : 9 * Terme(x + 6)$
3. Règle 6 = $Facteur : 9 \rightarrow Nombre : 9$
4. Règle 8 = $Nombre : 9 \rightarrow 9 : c'est\ bien\ un\ nombre.$
   On a bien trouvé un nombre, mais il reste la partie suivante (x+6) à analyser d'après la règle 3 en cours d'analyse à l'étape 2.
5. Règle 4 = $Terme : (x + 6) \rightarrow Facteur : (x + 6)$
6. Règle 5 = $Facteur : (x + 6) \rightarrow (Expression : x + 6)$
7. Règle 1 = $Expression : x + 6 \rightarrow Terme : x + Expression : 6$
8. Règle 4 = $Terme : x \rightarrow Facteur : x$
9. Règle 7 = $Facteur : x \rightarrow Variable : x$
10. Règle 9 = $Variable : x \rightarrow x$: c'est bien une variable autorisée.
    Mais il reste la partie suivante 6 à analyser d'âpres la règle 1 en cours d'analyse à l'étape 7.
11. Règle 2 = $Expression : 6 \rightarrow Terme : 6$
12. Règle 4 = $Terme : 6 \rightarrow Facteur : 6$
13. Règle 6 = $Facteur : 6 \rightarrow Nombre : 6$
14. Règle 8 = $Nombre : 6 \rightarrow 6$: c'est bien un nombre.
15. Fin de l'expression complète $9 * (x + 6)$, qui est correcte, la règle 2 de l'étape 1 a bien été complètement identifiée.

4.3 Exemple de codage

Pour implanter une telle analyse et réaliser une action (ici, construire l'arbre syntaxique représentant l'expression), avec une grammaire aussi simple, on peut utiliser un schéma récursif. On définit une fonction par règle, implantant directement cette analyse.

4.3.1 Fonction de découpage en lexeme

La premiere chose à réaliser est le découpage de la chaine en lexeme, c'est à dire en mots tels que `sin, log, x, + , 3.156, 2` . Pour cela, la fonction `char* strtok(char* s, char* separateur)` découpe la chaine `s` selon les séparateurs définis par `separateur` en l'utilisant de la manière suivante :

1. Le premier appel à la fonction sous la forme `strtok(s,sep);` initialise le découpage et le pointeur retourné par `strtok` pointe sur le premier mot de la chaine `s` ;
2. Les appels suivants de la forme `strtok(NULL,sep);` retournent successivement un pointeur sur les différents mots de la chaine. **Notez le parametre NULL à la place de s**.
3. Quand le dernier mot est lu, la fonction retourne le pointeur `NULL`.

Pour illustrer son utilisation, le programme ci dessous lit une chaine au clavier, puis affiche les différents mots de la chaine tapée au clavier.

```
#include <string.h>
#include <stdio.h>
int main() { int i=0;
  char* p;          /* Le pointeur vers les differents mots */
  char s[512];    /* Le tableau qui contient la chaine lue au clavier*/
  char *sep=" "; /* Les separateurs sont uniquement l'espace */
  puts("Entrer une chaine de mots au clavier");
  fgets(s,511,stdin); s[strlen(s)-1]=0; /* Lecture de la chaine de mots */
  p = strtok(s,sep); /* On initialise le decoupage : p pointe sur le premier mot, la chaine s est
   modifiee, les separateurs (espaces) sont remplaces par des marques de fin de chaines '\0' */
  do {
    printf("Le %d ieme mot est %s\n",i,p);  /* On affiche le mot */
    p = strtok(NULL, sep);        /* On passe au mot suivant */
    i=i+1;
  } while (p!=NULL);
}
```

L'execution de programme donne :

```
$ ./a.out
Entrer une chaine de mots au clavier
Test de la fonction strtok sur 8 mots
Le 0 ieme mot est Test
Le 1 ieme mot est de
Le 2 ieme mot est la
Le 3 ieme mot est fonction
Le 4 ieme mot est strtok
Le 5 ieme mot est sur
Le 6 ieme mot est 8
Le 7 ieme mot est mots
```

A retenir : la fonction `strtok` permet de passer au mot suivant dans une chaine de caractères.

4.3.2 Codage des fonctions

On définit une fonction par règle, implantant directement cette analyse. On écrit une fonction `Analyse` qui prend une chaine de caractère infixée et retourne l'arbre. Elle lance donc l'analyse et correspond à l'axiome.

Les fonctions correspondant à chaque groupe de règles (ou à chaque symbole intermédiaire) vérifient la syntaxe de ces symboles intermédiaires et construisent la partie de l'arbre correspondant, comme la fonction `Expression` ci-dessous qui correspond aux règles 1 et 2.

```
ARBRE  erreur(char** r) { printf("Erreur : %s \n",*r); return NULL; }

ARBRE Analyse(char* r){ ARBRE s;  char* t;
    /* strtok permet de separer les mots de la chaine, c'est a dire que si r="3.145 * x + 5.89" apres
    l'execution de t=strtok(r," "); t contient "3.145" et les prochains appels a strtok(NULL," ");
    retourneront alors les valeurs "*", puis ="x",  puis ="+" puis="5.89" */
    t=strtok(r," ");
    /* On cherche l'Axiome, qui est expression. La fonction expression retourne la chaine prefixee.*/
    s=Expression(&t);
    return s;
}

  /* La fonction Expression implemente les regles 1 et 2: on cherche un Terme ou un Terme + Expression
   */
ARBRE Expression(char** pr){
/*
pr est le pointeur sur la chaine a analyser: *pr est donc la chaine a analyser, modifiee par la
   fonction.
Si tout se passe correctement, *pr pointera la fin de la chaine analysee
et sera donc sur une marque de fin de chaine
Sinon, c'est qu'il y a une erreur. */
```

```
    ARBRE s1, s2, res;
    char s3[3];

/* Si la chaine est vide, c'est une erreur de syntaxe */
    if (*pr == NULL) return erreur(pr);

/*
Regle 1 et 2 : une expression comporte d'abord un Terme Le resultat de ce terme sera dans s1.
pr est mise a jour par la fonction Terme, donc pr pointe maintenant apres la partie deja analysee par
   Terme :
donc soit un + , soit rien; puis on doit trouver une Expression, dont le resultat sera dans s2. SI tout
    est OK, on construit l'arbre + s1 s2.
Par exemple, si on analyse 9 * x + 6, 9*x est le Terme, x est l'expression
*/
  /* Y a t il un Terme en debut ? */
    s1=Terme(pr);
      /* Ici, s1 est l'arbre representant le Terme, sauf si erreur; Pour 9 * x + 6,  s1 = * 9 x  */
    if (s1==NULL) return erreur()
  /*  Si il y a un + ensuite, c'est la regle 1 */
    if (*pr && (*pr)[0] == '+'){
    /* s3 contient la chaine "+" qui se trouve dans *pr pour former l'expression finale */
        strcpy(s3,*pr);
    /* on avance dans l'analyse de la chaine : on passe au mot qui suit le +  */
        *pr=strtok(NULL," ");
    /* cette partie doit etre une expression d'apres la regle 1. */
        s2=Expression(pr);
    /* Si ce n'est pas une expression, il y a donc une erreur de syntaxe ; Pour 9*x+6,  s2=6*/
        if (s2 == NULL) return erreur(r);
    /*  On peut maintenant construire l'arbre final :  + Terme Expression */
    /* On cree le noeud +, avec s1 comme fils gauche et s2 comme fils droit */
        res = creerNoeud(s3); res->fg=s1; res->fd=s2;
        return ( res);
    }
       /* Cas la regle 2 : il y a juste un Terme, c'est s1 */
    return s1;
}
```

4.4 Travail à réaliser

1. Dans le fichier `analyse.c`, Implanter les fonctions `Analyse, Expression, Terme, Nombre, Fonction, Variable` sur le modèle ci dessus pour générer l'arbre représentant une expression à partir d'une chaine infixée.
2. Télécharger le fichier `expression4.c` de manière à pourvoir entrer des expressions infixées habituelles et tester vos fonctions.

5 Grammaire plus complète

La grammaire précédente ne gère que les opérateurs `+` et `*`. On peut bien sur ajouter les opérateurs `-` et `/` dans les premières règles :

— Règle 1b : $Expression \rightarrow Terme - Expression$

— Règle 4b : $Terme \rightarrow Facteur/Terme$

Attention : Cette grammaire ne gère pas correctement les opérateurs `/` et `-`, qui doivent être parenthésés pour être correctement gérés : `a-b+c` sera vu comme `a-(b+c)`, `a-b-c` sera vu comme `a-(b-c)`. Pour gérer correctement les expressions comportant des opérateurs `-` ou `/` avec cette grammaire, il faut les considérer comme des opérateurs binaires et utiliser les parenthèses comme par exemple `a-(b-c)` et `a-(b+c)` pour les expressions ci dessus.

La grammaire suivante[1] gère correctement les opérateurs `-` et `/`.

1. Notations : dans les règles suivantes, le symbole | signifie OU et $['0'..'9']^+$ signifie au moins une fois un chiffre.

— Règles 1,2,3 : $Expression \rightarrow Expression + Terme \mid Expression - Terme \mid Terme$
— Règles 4,5,6 : $Terme \rightarrow Facteur * Terme \mid Facteur/Terme \mid Facteur$
— Règles 7,8,9,10 : $Facteur \rightarrow (Expression) \mid Nombre \mid Fonction\ Facteur \mid Variable$
— Règles 11,12 :$Nombre \rightarrow ['0'..'9']^+ \quad | \quad ['0'..'9']^+.['0'..'9']^+$
— Règles 13 : $Fonction \rightarrow sin \mid cos \mid tan \mid sqrt \mid exp \mid log$
— Règles 14 : $Variable \rightarrow x \mid y$

Malheureusement, cette grammaire est récursive à gauche : la règle 1 est du type $Expression \rightarrow Expression + Terme$. Son implantation récursive, selon l'exemple précédent, placerait un appel récursif infini en début de fonction comme cela :

```
ARBRE Expression(char** pr){    ARBRE s1, s2, res;
    char s3[3];
    if (*pr == NULL) return erreur(pr);
      /* CET APPEL RECURSIF EST INFINI !!!! */
    if ( (s1=Expression(pr))==NULL) return erreur()
    if (*pr && (*pr)[0] == '+'){  strcpy(s3,*pr);
        *pr=strtok(NULL," ");
        if ((s2=Terme(pr)) == NULL) return erreur(r);
        res = creerNoeud(s3); res->fg=s1; res->fd=s2;
        return ( res);
    }
    return s1;
}
```

La solution consiste à utiliser la grammaire suivante, où le symbole $(+Terme)^*$ signifie la présence de $+Terme$ 0 fois ou plus. La regle 1 correspond ainsi à une suite d'operations additives comme $a+b+c$, $a+b-c$, $a+b-c-d+e$,

— Règles 1,2 : $Expression \rightarrow Terme(+Terme)^* \mid Terme(-Terme)^*$
— Règles 3 et 4 : $Terme \rightarrow Facteur(*Facteur)^* \mid Facteur(/Facteur)^*$
— Règles 5,6,7,8 : $Facteur \rightarrow (Expression) \mid Nombre \mid Fonction\ Facteur \mid Variable$
— Règles 9 et 10 :$Nombre \rightarrow ['0'..'9']^+ \mid ['0'..'9']^+.['0'..'9']^+$
— Règles 11 : $Fonction \rightarrow sin \mid cos \mid tan \mid sqrt \mid exp \mid log$
— Règles 12 : $Variable \rightarrow x \mid y$

La grammaire peut alors se programmer avec des fonctions récursives (expression utilise facteur qui utilise expression) et itératives comme ci dessous. La boucle while implemente les parties $(+Terme)^*$ de la règle 1 et $(-Terme)^*$ de la règle 2.

```
ARBRE Expression(char** r){ ARBRE s1=NULL, s2=NULL, res=NULL;
    char s3[32];
    if (*r == NULL) return erreur(r);
    if ( (s1=Terme(r))==NULL) return erreur(r);
    while (*r && ((**r == '+')|| (**r == '-'))){
        strcpy(s3,*r);
        *r=strtok(NULL," ");
        s2=Terme(r);
        res=creerNoeud(s3);  res->fg=s1; res->fd=s2;
        s1=res;
    }
    return s1;
}
```

5.1 Travail à réaliser

Modifier vos fonctions d'analyse syntaxique pour prendre en compte une grammaire gérant les 4 opérations et les fonctions mathématiques simples.

Par exemple, la règle 1 $Expression \rightarrow Terme + Expression$, la règle 2 $Expression \rightarrow Terme - Expression$ et la règle 3 $Expression \rightarrow Terme$ sont regroupées en un groupe : $Expression \rightarrow Expression + Terme \mid Expression - Terme \mid Terme$.