TEMA 1: MODELOS DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS

A. Beyaert, M. Camacho

con la colaboración de M. González, A. Quesada

Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

Lo que estudiaremos en este tema:

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

1. **Introducción, especificación y supuestos**

    1.1 Motivación

    1.2 Especificación y supuestos del MES: Forma estructural y forma reducida

2. **El problema de la identificación**

    2.1 Motivación

    2.2. Método general de identificación

    2.3. Método particular de identificación

3. **Causalidad simultánea: el problema de la endogeneidad**

    2.1 Concepto de causalidad simultánea

    2.2 Endogeneidad y sus consecuencias

    2.3 El estimador de variables instrumentales

    2.4. Otras causas de endogeneidad

Lo que estudiaremos en este tema:

UNIVERSIDAD DE **MURCIA**

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Lo que estudiaremos en este tema:

7. Otros modelos multiecuacionales

7.1 Modelos recursivos

7.2 Modelos SURE

7.3 Modelos VAR

Bibliografía básica:

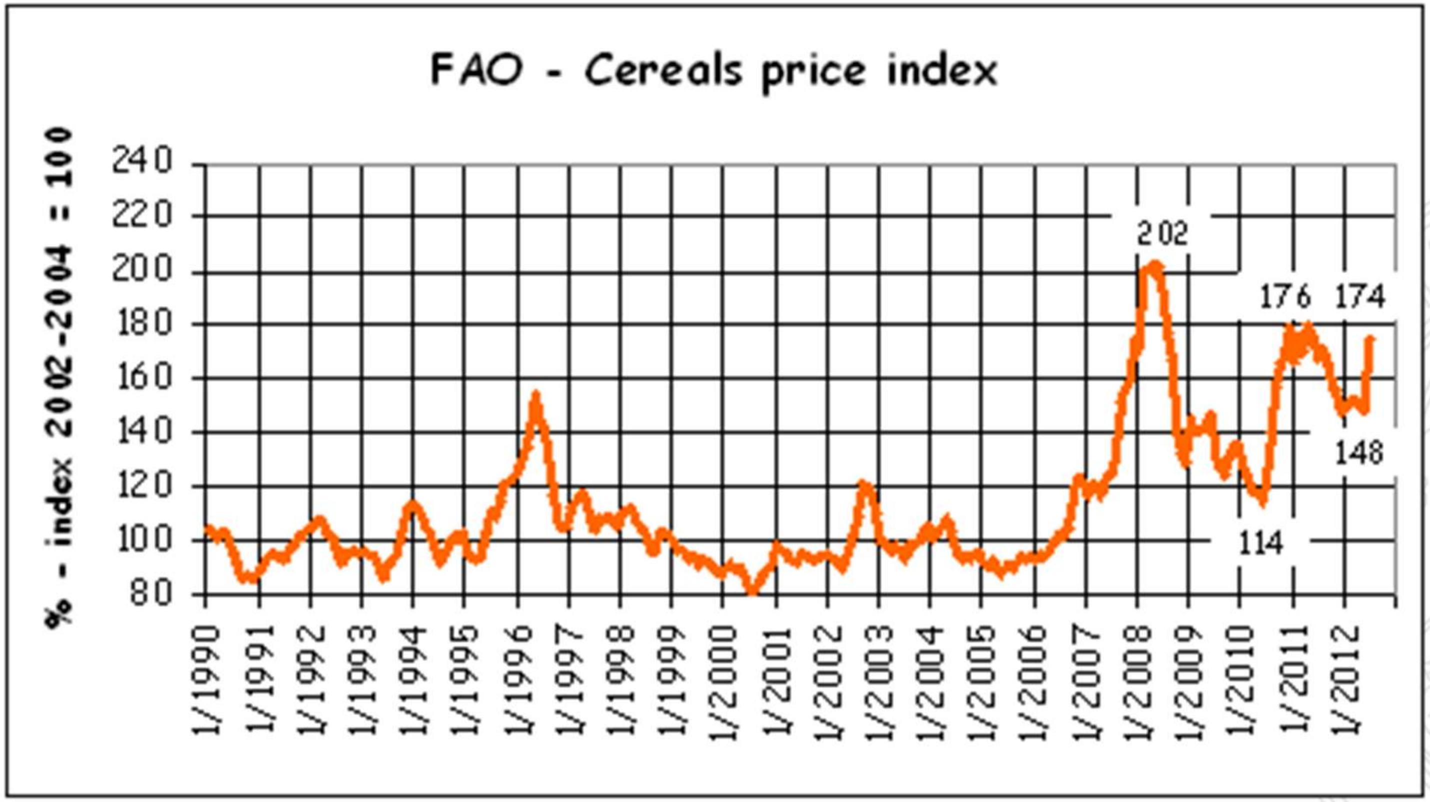
Johnston, J. y Dinardo, J. 2001. *Métodos de Econometría.* Ed. Vicens Vives, cap. 9.4

Maddala, G. 1996*. Introducción a la Econometria.* Ed. Prentice Hall, cap. 9

Novales, A. Novales, A. 1993. *Econometría*. Ed. Mc Graw Hill, cap. 17 y 18

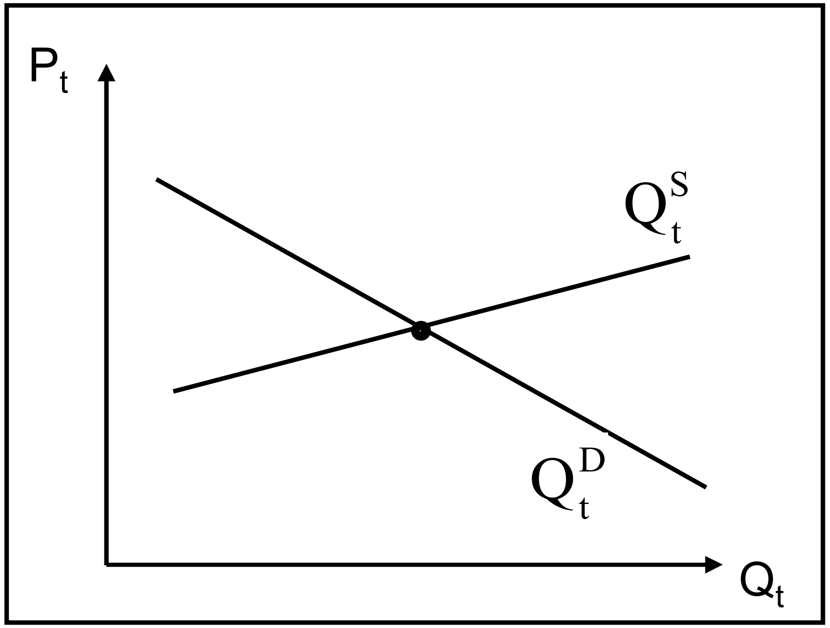
Wooldridge, J. 2007. *Introducción a la econometría: un enfoque moderno*. Ed. Thomson, cap. 16

- Datos históricos del precio de los cereales:



- Este índice se determina en los mercados como consecuencia del cruce entre oferta y demanda de cereales

- Gráfico de oferta y demanda de cereales. Para cada t:



- Ejemplo de modelo de ecuaciones simultáneas:
  Oferta y demanda de cereales

(1) Ecuaciones de comportamiento

- Ecuación de oferta: R_t cantidad de lluvia (exógena)

$$Q_t^S = \beta_1 P_t + \beta_2 R_t + \varepsilon_{1t} \qquad \varepsilon_{1t} \sim iid\left(0, \sigma_1^2\right)$$

- Ecuación de demanda

$$P_t = \alpha Q_t^D + \varepsilon_{2t} \qquad \varepsilon_{2t} \sim iid\left(0, \sigma_2^2\right)$$

$$E\left(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}\right) = \sigma_{12}$$

$$E\left(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2\tau}\right) = 0$$
$$\forall t \neq \tau$$

(2) Condición de equilibrio

$$Q_t^S = Q_t^D$$

- Sustituiremos (2) en (1) hasta quedarnos sólo con dos ecuaciones de comportamiento que explican las dos variables endógenas del modelo

$$Q_t = \beta_1 P_t + \beta_2 R_t + \varepsilon_{1t}$$

$$P_t = \alpha Q_t + \varepsilon_{2t}$$

Queda claro que las variables explicadas en una ecuación son explicativas en otra.

- Como economistas, queremos conocer el valor de α. ¿Cómo podemos obtenerlo de la mejor manera posible?

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Tipos de variables. En la ecuación de oferta del siguiente ejemplo:

$$Q_t = \beta_1 P_t + \beta_2 R_t + \beta_3 Q_{t-1} + \varepsilon_{1t} \qquad\qquad P_t = \alpha Q_t + \varepsilon_{2t}$$

  - Endógenas: Q_t y P_t $\quad E\left(\varepsilon_{1t}/P_t\right) \neq E\left(\varepsilon_{1t}\right)$
  - Predeterminadas (Q_{t-1} y R_t): $E\left(\varepsilon_{1t}/Q_{t-1}, R_t\right) = E\left(\varepsilon_{1t}\right) = 0$
    - Exógenas (R_t): $E\left(\varepsilon_{1t}/R_{t+j}\right) = E\left(\varepsilon_{1t}\right) = 0, \ \forall \ t, j \quad \Rightarrow$ Exog estricta
    - Endógenas retardadas (Q_{t-1}): $E\left(\varepsilon_{1t}/Q_{t-1}\right) = E\left(\varepsilon_{1t}\right) = 0 \quad \Rightarrow$ Exog débil
- Requeriremos:
  - Que el sistema sea completo, es decir, que el número de ecuaciones sea igual al de endógenas
  - No deben existir ecuaciones redundantes

Problemática

- La econometría estudiada hasta ahora: una ecuación
- Pero la mayor parte de los modelos económicos tienen varias ecuaciones
- Distintas formas de acercarnos al problema: básicamente MES y VAR

Modelos de ecuaciones simultáneas (MES)

- Modelos de varias ecuaciones (variables endógenas)
- Hay que distinguir a priori entre variables endógenas y exógenas
- Explicadas en una ecuación actúan de explicativas en otras
- Pueden ser estáticos o dinámicos
- Están siempre basados en la teoría económica

Distinguimos entre ***forma estructural*** y ***forma reducida***:

FORMA ESTRUCTURAL:

- Recoge las ecuaciones tal y como las describe la teoría económica
- Las ecuaciones reflejan las relaciones causales establecidas por la teoría económica
- Las variables endógenas de una ecuación son explicativas en otras
- Los coeficientes tienen interpretación económica

FORMA REDUCIDA:

- Las endógenas son sólo función de predeterminadas
- Se obtiene a partir de la forma estructural
- Los coeficientes no tienen interpretación económica, porque son una combinación lineal de los coeficientes estructurales
- Refleja los efectos directos e indirectos de las variables predeterminadas en las variables endógenas del modelo

FORMA ESTRUCTURAL

- En nuestro ejemplo:

$$Q_t = \beta_1 P_t + \beta_2 R_t + \varepsilon_{1t}$$

$$P_t = \alpha Q_t + \varepsilon_{2t}$$

$$V(\varepsilon_{1t}) = \sigma_1^2, \quad V(\varepsilon_{2t}) = \sigma_2^2, \quad Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = \sigma_{12}$$

Escrito en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_t \\ P_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} R_t + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$AY_t = BX_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim iid(0, \Sigma)$$

Expresión general

- Tenemos $y_{1t}, \ldots, y_{Mt}$ variables endógenas en el vector de M filas $Y_t = (y_{1t}, \ldots, y_{Mt})'$
- Tenemos $X_{1t}, \ldots, X_{kt}$ predeterminadas en el vector de K filas $X_t = (1, X_{1t}, \ldots, X_{kt})'$
- Tenemos $\varepsilon_{1t}, \ldots, \varepsilon_{Mt}$ perturbaciones aleatorias en el vector de *M* filas $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \ldots, \varepsilon_{Mt})'$

$$\varepsilon_t \sim \mathrm{iid}(0,\Sigma) \Rightarrow \begin{cases} E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Sigma \\ E(\varepsilon_t \varepsilon_\tau') = 0, t \neq \tau \end{cases} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1M} & \cdots & \sigma_M^2 \end{pmatrix}$$

- Entonces

$$AY_t = BX_t + \varepsilon_t \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t} \\ \vdots \\ y_{Mt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{M0} & b_{M1} & \cdots & b_{Mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X_{1t} \\ \vdots \\ X_{kt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{Mt} \end{pmatrix}$$

- Nota: Si hay término constante K = k+1

FORMA REDUCIDA

- En nuestro ejemplo $Y_t = A^{-1}BX_t + A^{-1}\varepsilon_t = \Pi X_t + U_t$

$$\begin{pmatrix} Q_t \\ P_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} R_t + \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Q_t \\ P_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta_2}{1-\alpha\beta_1} \\ \dfrac{\alpha\beta_2}{1-\alpha\beta_1} \end{pmatrix} R_t + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-\alpha\beta_1} & \dfrac{\beta_1}{1-\alpha\beta_1} \\ \dfrac{\alpha}{1-\alpha\beta_1} & \dfrac{1}{1-\alpha\beta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_{11} \\ \pi_{21} \end{pmatrix} R_t + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q_t &= \pi_{11} R_t + u_{1t} \\ P_t &= \pi_{21} R_t + u_{2t} \end{aligned} \qquad V(u_{1t}) = \omega_1^2,\ V(u_{2t}) = \omega_2^2,\ Cov(u_{1t}, u_{2t}) = \omega_{12}$$

- La matriz A debe ser cuadrada y no singular para que exista A^{-1}. Ocurre si

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \alpha\beta_1 \neq 1 \quad \Rightarrow$ oferta y demanda distintas pendientes

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Expresión general

- Partimos del modelo en forma estructural $AY_t = BX_t + \varepsilon_t, \quad E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Sigma$
- Despejamos para encontrar la forma reducida

$$Y_t = A^{-1}BX_t + A^{-1}\varepsilon_t = \Pi X_t + U_t, \qquad U_t \sim (0,\Omega), \quad \Omega = A^{-1}\Sigma(A^{-1})'$$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ \vdots \\ y_{Mt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MM} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{M0} & b_{M1} & \cdots & b_{Mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X_{1t} \\ \vdots \\ X_{kt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MM} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{Mt} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ \vdots \\ y_{Mt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_{10} & \pi_{11} & \cdots & \pi_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_{M0} & \pi_{M1} & \cdots & \pi_{Mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X_{1t} \\ \vdots \\ X_{kt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ \vdots \\ u_{Mt} \end{pmatrix}, \qquad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \cdots & \omega_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{1M} & \cdots & \omega_M^2 \end{pmatrix}$$

- Centrémonos en los coeficientes del modelo
- ¿Podemos encontrar $\alpha,\ \beta_1,\ \beta_2$ a partir de π_{11}, π_{21}?
  - Tenemos 2 ecuaciones y 3 incógnitas

$$\pi_{11} = \frac{\beta_2}{1-\alpha\beta_1} \qquad \pi_{21} = \frac{\alpha\beta_2}{1-\alpha\beta_1}$$

  - Veremos cómo, en nuestro ejemplo, *algunos* (pero *no todos*) los parámetros de FE sí se pueden obtener a partir de los parámetros de FR

- Este problema está relacionado con el hecho de que no podamos obtener los parámetros estructurales de forma única a partir de los de la forma reducida
- En el ejemplo podemos recuperar los parámetros estructurales de la ecuación de demanda porque está identificada

$$\pi_{11} = \frac{\beta_2}{1-\alpha\beta_1} \qquad \pi_{21} = \frac{\alpha\beta_2}{1-\alpha\beta_1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi_{21}}{\pi_{11}}$$

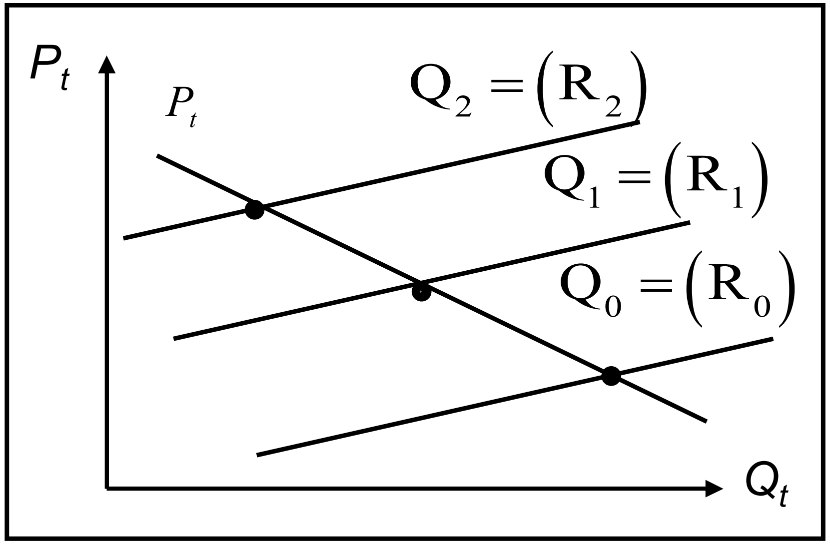
- Pero no los de la oferta

$$\beta_2 = \pi_{11}\left(1-\alpha\beta_1\right) = \pi_{11}\left(1-\frac{\pi_{21}}{\pi_{11}}\beta_1\right)$$

- En este ejemplo es sencillo comprobar si hay identificación. Pero necesitamos un método más general para analizar la identificación en casos más complicados porque la identificación es esencial para poder estimar adecuadamente los parámetros estructurales

- El hecho de que la ecuación de demanda esté identificada es esencial para poder estimarla. Pero no podemos estimar adecuadamente la ecuación de oferta porque no está identificada

INTUICION GRAFICA



Los desplazamientos de la ecuación de oferta para cada valor de R perfilan la ecuación de demanda (*ecuación identificada*), pero no ocurre lo mismo para la ecuación de oferta (*ecuación no identificada*)

- Siempre se **normaliza** el MES: generalmente *diag*(A)=1
- Una teoría económica se diferencia de otra en las **restricciones** que imponen sobre los parámetros de la forma estructural
  - Restricciones de exclusión: hacemos algunos parámetros iguales a cero. Son las más utilizadas. En nuestro ejemplo:

$$AY_t = BX_t + \varepsilon_t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_t \\ P_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} R_t + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

  - Restricciones sobre las covarianzas: las veremos más adelante
  - Otras restricciones. Ej. combinaciones lineales entre parámetros $\alpha = \beta_1 + \beta_2$

- Definición 1: **Modelos Observacionalmente Equivalentes (MOE)**
  - Sea una teoría económica
    - su estructura económica se refleja en FE1 (A, B, Σ)

$$AY_t = BX_t + \varepsilon_t \qquad E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Sigma$$

    - genera unos datos que se recogen en la FR (Π, Ω)

$$Y_t = A^{-1}BX_t + A^{-1}\varepsilon_t = \Pi X_t + U_t \qquad E(U_t U_t') = \Omega = A^{-1}\Sigma(A^{-1})'$$

  - Podría existir otra teoría cuyos parámetros sean una combinación lineal de los anteriores $(FA, FB, F\Sigma F')$, donde F es una matriz $M \times M$ invertible
    - su FE2 será $FAY_t = FBX_t + F\varepsilon_t \qquad E(F\varepsilon_t \varepsilon_t' F') = F\Sigma F'$
    - tendría la misma FR

$$Y_t = A^{-1}F^{-1}FBX_t + A^{-1}F^{-1}F\varepsilon_t = \Pi X_t + U_t$$

  - Ambos modelos serán MOE porque **tienen la misma FR**. Dada la FR no sabremos cuál de las dos teorías económicas (FE) generó esos datos (FR).

- Definición 2: **Transformaciones Admisibles (TA)**
  - Una teoría económica se concreta en los parámetros de su FE1 (A, B, Σ) donde impone restricciones
  - Una teoría observacionalmente equivalente a la anterior que se concreta en sus parámetros estructurales $(FA, FB, F\Sigma F')$ es una transformación admisible de la primera si las restricciones que impone sobre sus parámetros estructurales coinciden

$$(FA, FB, F\Sigma F') \Leftrightarrow (A, B, \Sigma)$$

$\Leftrightarrow$ Se lee: "cumple las mismas restricciones que"

- Definición 3: Un MES está **identificado** si, debidamente normalizado, la única transformación admisible es $F = I$. Implicaciones
  - El MES sólo admite una TA que es él mismo
  - Podremos encontrar todos los parámetros de la FE a partir de la FR de manera única

- La forma de normalizar los modelos observacionalmente equivalente es imponiendo que la diagonal principal de F sean 1
- ¿Está identificado el MES del ejemplo anterior? **NO**
  - La FE1 normalizada del modelo está definida por (A, B, Σ)

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right]$$

  - Los MOE a este son

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & f_{12} \\ f_{21} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & f_{12} \\ f_{21} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & f_{12} \\ f_{21} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & f_{12} \\ f_{21} & 1 \end{pmatrix}'\right]$$

  - Esos MOE serán TA si cumplen con las mismas restricciones que FE1

$$(FA, FB, F\Sigma F') \Leftrightarrow (A, B, \Sigma)$$

- $¿FA \Leftrightarrow A?$ en A no se ha impuesto ninguna restricción (sólo la normalización) => no sacamos ninguna información sobre F
- $¿F\Sigma F' \Leftrightarrow \Sigma?$ en Σ no se ha impuesto ninguna restricción => no sacamos ninguna información sobre F
- $¿B \Leftrightarrow FB?$ Tendremos que imponer en FB las mismas restricciones que en B

$$\begin{pmatrix} 1 & f_{12} \\ f_{21} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ f_{21}\beta_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para ello debemos imponer $f_{12}\beta_2=0 \Rightarrow f_{12}=0$

- La F de los MOA que son TA de FE1 es $\begin{pmatrix} 1 & f_{12} \\ f_{21} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Como FE1 admite TA sin que F=I , el MES no está identificado

- Aunque no podamos identificar todo el MES, es importante saber si algunas de sus ecuaciones están identificadas porque serán las ecuaciones cuyos parámetros estructurales podremos estimar
- ¿Cómo saber si la ecuación j del MES está identificada?
  - Buscamos las TA
  - Si la fila j de F en las TA es como la fila j de la matriz identidad $\Rightarrow$ la única TA de la ecuación j es ella misma $\Rightarrow$ la ecuación j estará identificada
- En el ejemplo anterior la ecuación de demanda está identificada

$$\begin{pmatrix} 1 & f_{12} \\ f_{21} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Intentaremos estimar α, aunque no podremos estimar β_1, β_2

- Podemos simplificar el método general para saber de forma sencilla si la ecuación j de un MES está identificadas:
  - Sólo sirve cuando hay restricciones de exclusión en A o B
  - No sirve cuando las restricciones están en Σ o no sean de exclusión
- Definamos el número de endógenas y exógenas de la ecuación j

	Endógenas	Exógenas
Incluidas	m_j	K_j
Excluidas	$\overline{m}_j$	K_j^*
Total	M-1	K

- En nuestro ejemplo: $P_t = \alpha Q_t + \varepsilon_{2t} \Rightarrow m_2 = k_2^* = 1, \quad k_2 = \overline{m}_2 = 0$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Sin pérdida de generalidad
  - Supongamos j=1
  - Las endógenas excluidas y las exógenas excluidas se colocan al final
  - Los parámetros de la 1ª fila de A y B en el MES son

$$(A,B) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \underset{\substack{\uparrow \\ 1\times \bar{m}_1}}{0} , & b_1 & \underset{\substack{\uparrow \\ 1\times K_1^*}}{0} \end{pmatrix}$$

  - Los parámetros de la 1ª fila de los MOE son

$$(FA,FB) \longrightarrow (1, F_1)\left[\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ C_1 & C_2 & \underset{\substack{\uparrow \\ (M-1)\times \bar{m}_1}}{C_3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ C_4 & \underset{\substack{\uparrow \\ (M-1)\times K_1^*}}{C_5} \end{pmatrix}\right]$$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Las TA deben cumplir que $F_1C_3 = 0$ y $F_1C_5 = 0$, o bien

$$F_1\left(C_3, C_5\right) = F_1 \underset{(M-1)\times(\bar{m}_1 + K_1^*)}{C} = 0$$

- Estará identificada sólo si las restricciones $F_1C=0$ implican $F_1=0$
- Para ello debemos poder despejar F_1 como sigue $F_1CC'(CC')^{-1} = 0 \Rightarrow F_1 = 0$
- Existe $(CC')^{-1}$ cuando $\text{rango}(C) = M-1$ (**condición de rango**). Es una condición **suficiente** para la identificación de la 1ª ecuación

- Para que $\text{rango}(C) = M-1$ es **necesario** que C al menos tenga tantas cols $(\bar{m}_1 + K_1^*)$ como filas $(M-1) = m_1 + \bar{m}_1$. Esto implica $K_1^* \geq m_1$ y le llamamos **condición de orden**.

  Para que una ecuación del MES esté identificada es **necesario** que estén excluidas al menos tantas predeterminadas como endógenas incluidas. Sobreidentificada cuando $K_1^* > m_1$

- Método práctico para examinar la condición de rango

  - Esquematizamos la estructura del modelo en una tabla. El símbolo X se refiere a que la variable está incluida y el 0 a que no lo está en la ecuación

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3
Ec 1	X	0	X	X	0	X
Ec 2	X	0	0	X	0	X
Ec 3	0	X	X	X	X	0

  - Identificamos las columnas donde la ecuación tiene 0
  - Montamos una matriz (C) con el resto de elementos y comprobamos su rango

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Examinemos la identificación de las ecuaciones de oferta y demanda

$$Q_t = \beta_1 P_t + \beta_2 Z_t + \varepsilon_{1t} \quad P_t = \alpha Q_t + \varepsilon_{2t}$$

- Construimos la tabla

	Q	P	Z
Oferta	1	$-\beta_1$	β_2
Demanda	$-\alpha$	1	0

- Oferta
  - Cond. orden: $M_1=1 < K^*_1 = 0 \Rightarrow$ no identificada
  - Cond. rango: No hace falta porque no cumple condición necesaria
- Demanda
  - Cond. orden: $M_1=1 < K^*_1 = 1 \Rightarrow$ potencialmente identificada
  - Cond. rango: $C = \beta_2 \Rightarrow$ rango(C) = 1 = M-1 $\Rightarrow$ identificada

- Causalidad simultánea:

Se produce cuando dos o más variables se causan mutuamente.

- Ejemplo: Oferta y demanda de cereales
  - Ecuación de oferta: R_t cantidad de lluvia (exógena)

$$Q_t = \beta_1 P_t + \beta_2 R_t + \varepsilon_{1t}, \quad \varepsilon_{1t} \sim iid\left(0, \sigma_1^2\right)$$

  - Ecuación de demanda

$$E\left(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}\right) = \sigma_{12}$$

$$P_t = \alpha Q_t + \varepsilon_{2t}, \quad \varepsilon_{2t} \sim iid\left(0, \sigma_2^2\right)$$

- La causalidad simultánea implica que alguna explicativa no sea ni siquiera débilmente o contemporáneamente exógena: es endógena.

- ¿Sirve MCO para estimar la ecuación de demanda de cereales?
  - Recuerda: ecuaciones de oferta y demanda. Suponemos $\alpha < 0,\ \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0$

$$Q_t = \beta_1 P_t + \beta_2 R_t + \varepsilon_{1t} \quad P_t = \alpha Q_t + \varepsilon_{2t}$$

  - ¿Cumple Q la exogeneidad débil en la ecuación de demanda?

Calculemos la covarianza $\operatorname{cov}(Q_t, \varepsilon_{2t})$ (siempre que $\beta_1 \alpha \neq 1$)

$$\operatorname{cov}(Q_t,\varepsilon_{2t}) = \operatorname{cov}(\beta_1 P_t + \beta_2 Z_t + \varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = \operatorname{cov}(\beta_1(\alpha Q_t + \varepsilon_{2t}) + \beta_2 Z_t + \varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = \beta_1 \alpha \operatorname{cov}(Q_t, \varepsilon_{2t}) + \beta_1 \sigma_2^2 + \sigma_{12}$$

$$\operatorname{cov}(Q_t, \varepsilon_{2t}) = \sigma_{Q\varepsilon_2} = \frac{\beta_1 \sigma_2^2 + \sigma_{12}}{1 - \beta_1 \alpha}$$

  - Sabemos que $\operatorname{plim}(\hat{\alpha}) = \alpha + \dfrac{\sigma_{Q\varepsilon_2}}{\sigma_Q^2} \neq \alpha$ $\Rightarrow$ **MCO no es consistente**

- En general, la variable X_{jt} es **endógena** cuando $E\left(\varepsilon_{it}/X_{jt}\right) \neq E\left(\varepsilon_{it}\right)$
- En términos generales, la endogeneidad provoca que **MCO sea sesgado e inconsistente**

$$\hat{\beta} = \left(X'X\right)^{-1} X'Y = \left(X'X\right)^{-1} X'\left[X\beta + \varepsilon\right] = \beta + \left(X'X\right)^{-1} X'\varepsilon$$

- Sesgadez $E\left(\hat{\beta}/X\right) = \beta + E\left(\left(X'X\right)^{-1} X'\varepsilon/X\right) \neq \beta$
- Inconsistencia

$$\text{plim}\left(\hat{\beta}\right) = \text{plim}\left(\beta + \left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1} \frac{X'\varepsilon}{T}\right) = \beta + \text{plim}\left(\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1}\right) \text{plim}\left(\underbrace{\frac{1}{T}\sum X_t \varepsilon_t}\right) \neq \beta$$

- Es una media
- Su *plim* es su esperanza
- No 0 por endogeneidad

- Tenemos que buscar un estimador alternativo: el **estimador de variables instrumentales (VI)**

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Sea el modelo lineal con K_1 endógenas (X_{En}) y K_2 predeterminadas (X_{Ex})

$$Y = X\beta + \varepsilon = (X_{En}, X_{Ex})\beta + \varepsilon$$

- Supongamos *r* variables $w_1, \ldots, w_r$ (**instrumentos**) tal que:

  (1) No relacionadas con ruido: $E(\varepsilon_t / w_{1t}, \ldots, w_{rt}) = E(\varepsilon_t) = 0$

  (2) Relacionados con las endógenas. Cada endógena debe estar relacionada con, por lo menos, un instrumento distinto. Debe cumplirse

$$\operatorname{cov}(w_{jt}, X_{End}) \neq 0, \forall j$$

- Supongamos transformación $\varphi(w_1, \ldots, w_r)$ con dimensión TxK_1

- Sea $W = [\varphi(w_1, \ldots, w_r), X_{Ex}]$. El **estimador por variables instrumentales (VI)**

$$\boxed{\hat{\beta}_{VI} = (W'X)^{-1} W'Y}$$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Propiedades del estimador por variables instrumentales

$$\hat{\beta}_{VI} = \left(W'X\right)^{-1} W'Y = \left(W'X\right)^{-1} W'\left[X\beta + \varepsilon\right] = \beta + \left(W'X\right)^{-1} W'\varepsilon$$

- Sesgado

se relaciona con ε

$$E\left(\hat{\beta}_{VI}/X\right) = \beta + E\left(\left(W'X\right)^{-1} W'\varepsilon/X\right) \neq \beta$$

- Consistente

$$\text{plim}\left(\hat{\beta}_{VI}\right) = \text{plim}\left(\beta + \left(\frac{W'X}{T}\right)^{-1} \frac{W'\varepsilon}{T}\right) = \beta + \text{plim}\left(\left(\frac{W'X}{T}\right)^{-1}\right) \text{plim}\underbrace{\left(\frac{1}{T}\sum W_t \varepsilon_t\right)}_{} = \beta$$

- Es una media
- Su *plim* es su esperanza
- Vale 0 por exogeneidad de W

- Contrastes asintóticos válidos
  - $V\hat{a}r\left(\hat{\beta}_{VI}\right)$ la da EVIEWS

- ¿Sirve VI para estimar la ecuación de demanda de cereales?
  - Recuerda las ecuaciones de oferta y demanda

$$Q_t = \beta_1 P_t + \beta_2 R_t + \varepsilon_{1t}, \qquad P_t = \alpha Q_t + \varepsilon_{2t}$$

  - En este caso no hay X_{Ex}, y además $X = Q,\ \ X_{En} = Q,\ \ Y = P$
  - Elegimos como instrumento $w_{1t} = R_t$. Cumple las propiedades:

$$E(\varepsilon_{2t}/R_t) = E(\varepsilon_{2t}) = 0 \qquad Cov(R_t, Q_t) \neq 0$$

  - Ahora elegimos la transformación $\varphi(w_1) = R$ por lo que $W = R$
  - Calculamos el estimador VI como,

$$\hat{\alpha}_{VI} = (W'X)^{-1} W'Y = (R'Q)^{-1} R'P = \frac{\sum R_t P_t}{\sum R_t Q_t}$$

Nota aclaratoria

- La endogeneidad afecta por igual a los datos de corte transversal.

- Además de la causalidad simultánea, existen otras causas de endogeneidad:

- Omisión de variables relevantes

  Ejemplo $\text{nota}_i = \beta_0 + \beta_1 \text{horas}_i + \varepsilon_i$ la inteligencia de cada individuo no es observable, estará en ε_i y se relaciona con horas_i

- Errores de medida en las variables explicativas

- Interés por estimar coeficientes estructurales: tienen interpretación económica

- Sólo se pueden estimar los coeficientes estructurales de las ecuaciones identificadas

  - Si todas las ecuaciones del modelo están identificadas, podemos estimarlas todas a la vez: método “de información completa”.

  - Si alguna ecuación no está identificada, sólo podremos estimar las ecuaciones identificadas: método “de información limitada”.

- Las ecuaciones estructurales contienen regresores endógenos $\Rightarrow$ MCO es inconsistente (“sesgo de simultaneidad”) $\Rightarrow$ hay que recurrir a estimadores alternativos, para lograr la consistencia (VI).

- Estudiaremos dos tipos de estimadores VI aplicados a MES
  - de información limitada: Mínimos Cuadrados en 2 Etapas (MC2E)
  - de información completa: Mínimos Cuadrados en 3 etapas (MC3E)

Notación complementaria, para distinguir los componentes en cada ecuación y para asimilarla más a la notación de los modelos uniecuacionales

FE para la **ecuación j**, tomando en cuenta las restricciones de exclusión:

- En t:

$$\underset{(1\times 1)}{y_{jt}} = \left[\underset{(1\times m_j)}{Y'_{jt}} \;,\; \underset{(1\times K_j)}{X'_{jt}} \right] \begin{bmatrix} \overset{(m_j\times 1)}{a_j} \\ \underset{(K_j\times 1)}{b_j} \end{bmatrix} + \underset{(1\times 1)}{\varepsilon_{jt}} = \underset{1\times(m_j+K_j)}{Z'_{jt}} \cdot \underset{(m_j+K_j)\times 1}{\delta_j} + \underset{(1\times 1)}{\varepsilon_{jt}} \;;\; \varepsilon_{jt} \sim iid(0,\sigma_j^2)\ \forall t$$

- Para todas las observaciones:

$$\underset{(T\times 1)}{y_j} = \left[Y_j , X_j \right] \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \end{bmatrix} + \underset{(T\times 1)}{\varepsilon_j} = \underset{T\times(m_j+K_j)}{Z_j} \cdot \underset{(m_j+K_j)\times 1}{\delta_j} + \underset{(T\times 1)}{\varepsilon_j} \;;\; \varepsilon_j \sim (0,\Sigma_j) \;,\; \Sigma_j = \sigma_j^2 I_T$$

Notación complementaria

FE para el **modelo completo**, tomando en cuenta las restricciones de exclusión:

- Para todas las observaciones:

$$\underset{(TM\times 1)}{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}} = \underset{TM\times\sum_{j=1}^{M}(m_j+K_j)}{\begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & Z_M \end{bmatrix}} \cdot \underset{\sum_{j=1}^{M}(m_j+K_j)\times 1}{\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_M \end{bmatrix}} + \underset{TM\times 1}{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_M \end{bmatrix}} \quad \text{o bien} \quad \tilde{y} = \tilde{Z}\delta + \tilde{\varepsilon}$$

con $\tilde{\varepsilon} \sim (0, \tilde{\Sigma})$ donde $\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I_T & \sigma_{12} I_T & \cdots & \sigma_{1M} I_T \\ \sigma_{12} I_T & \sigma_2^2 I_T & & \sigma_{2M} I_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1M} I_T & \sigma_{2M} I_T & \cdots & \sigma_M^2 I_T \end{bmatrix}$

Notación complementaria

FR para la variable **endógena j :**

- En t:

$$\underset{1\times 1}{y_{jt}} = \underset{1\times K}{X_t^{'}} \cdot \underset{K\times 1}{\pi_j} + \underset{1\times 1}{u_{jt}} \quad , \quad u_{jt} \sim iid(0, \omega_j^2)$$

- Para todas las observaciones:

$$\underset{T\times 1}{y_j} = \underset{T\times K}{X} \cdot \underset{K\times 1}{\pi_j} + \underset{T\times 1}{u_j} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} X_1^{'} \\ \vdots \\ X_T^{'} \end{bmatrix} \quad , \quad u_j \sim (0, \omega_j^2 I_T)$$

Notación complementaria

FR para las variables **endógenas explicativas en la ecuación j :**

- En t:

$$\underset{1\times m_j}{Y_{jt}} = \underset{1\times K}{X_t^{'}} \cdot \underset{K\times m_j}{\Pi_j} + \underset{1\times m_j}{U_{jt}}$$

cada columna contiene los coeficientes de FR de una variable endógena diferente

- Para todas las observaciones:

$$\underset{T\times m_j}{Y_j} = \underset{T\times K}{X} \cdot \underset{K\times m_j}{\Pi_j} + \underset{T\times m_j}{U_j} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} X_1^{'} \\ \vdots \\ X_T^{'} \end{bmatrix}$$

Notación complementaria

FR para el **modelo completo**

- Para todas las observaciones:

$$\underset{(TM\times 1)}{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}} = \underset{TM\times KM}{\begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & X \end{bmatrix}} \cdot \underset{KM\times 1}{\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_m \end{bmatrix}} + \underset{TM\times 1}{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}} \quad \text{o bien} \quad \tilde{y} = \tilde{X}\pi + \tilde{u}$$

con $\tilde{u} \sim (0, \tilde{\Omega})$ donde $\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 I_T & \omega_{12} I_T & \cdots & \omega_{1M} I_T \\ \omega_{12} I_T & \omega_2^2 I_T & & \omega_{2M} I_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{1M} I_T & \omega_{2M} I_T & \cdots & \omega_M^2 I_T \end{bmatrix}$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

A. Estimación de la **FR**: MCO

- Queremos estimar la ecuación j,

$$y_j = X \cdot \pi_j + u_j \qquad u_j \sim (0, \omega_j^2 I_T)$$

- Todos los regresores son predeterminados $\Rightarrow$ la estimación MCO es consistente:

$$\boxed{\hat{\pi}_j = (X'X)^{-1} X' y_j}$$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

B. Estimación de la **FE**: Mínimos cuadrados en 2 etapas (MC2E)

- Queremos estimar la ecuación estructural j,

$$y_j = Y_j a_j + X_j b_j + \varepsilon_j = Z_j \delta_j + \varepsilon_j \quad \text{con} \quad Z_j = \left[Y_j, X_j \right], \quad \delta_j = \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \end{bmatrix}$$

- Sabemos que:
  - MCO inconsistente $\Rightarrow$ Necesitamos utilizar el estimador VI
  - Como Y_j contiene m_j variables endógenas $\Rightarrow$ Necesitamos, al menos, m_j instrumentos distintos de X_j
  - ¿Podemos usar como instrumentos las predeterminadas? Sabemos que habrán en el MES al menos m_j instrumentos distintos de X_j (por identificación: $K_j^* \geq m_j$)
  - Necesitamos proponer una transformación φ de los instrumentos

- Tenemos que estimar $y_j = Z_j\delta_j + \varepsilon_j = (Y_j, X_j)\delta_j + \varepsilon_j \qquad \varepsilon_j \sim (0, \sigma_j^2 I_T)$
  - *Etapa 1:* Buscamos instrumentos entre **todas** las predeterminadas

$w_1, \ldots w_r$ son $x_1, \ldots, x_k$, los transformamos eligiendo $\varphi(w_1, \ldots, w_r) = \hat{Y}_j = X\hat{\Pi}_j \Rightarrow$

regresamos Y_j sobre X y obtenemos el valor ajustado (estimación) de la FR.

$$\hat{Y}_j = X\hat{\Pi}_j = X(X'X)^{-1}X'Y_j$$

⇨ Intuición: $Y_j = \boxed{\hat{Y}_j} + \boxed{\hat{U}_j}$

Sólo depende de X, no relacionado con ε

Parte de Y_j relacionada con ε

  - *Etapa 2:* Usar VI con $W = \hat{Z}_j = (\hat{Y}_j, X_j)$

$$\boxed{\hat{\delta}_{j,MC2E} = (\hat{Z}'_j Z_j)^{-1} \hat{Z}'_j y_j}$$

- ¿Por qué este estimador se llama MC2E? $y_j = Z_j\delta_j + \varepsilon_j = (Y_j, X_j)\delta_j + \varepsilon_j$

  Porque la **segunda etapa** se puede ver como la regresión MCO en el modelo original donde las variables con problemas de endogeneidad se sustituyen por sus estimaciones MCO en la forma reducida

$$y_j = \hat{Z}_j\delta_j + \varepsilon_j = (\hat{Y}_j, X_j)\delta_j + \varepsilon_j \quad \Rightarrow \quad \hat{\delta}_{jMC2E} = \left(\hat{Z}_j'\hat{Z}_j\right)^{-1}\hat{Z}_j'y_j$$

  Demostración (recuerda: en MCO los residuos son ortogonales a explicativas y a la estimación)

$$\hat{Z}'_j Z_j = \hat{Z}'_j\left(\hat{Z}_j + \hat{U}_j\right) = \hat{Z}'_j\hat{Z}_j + \hat{Z}'_j\hat{U}_j = \hat{Z}'_j\hat{Z}_j$$

$$\hat{Z}'_j\hat{U}_j = \left(\hat{Y}_j, X_j\right)'\hat{U}_j = 0$$

- De esta manera, las dos etapas quedan como:
  - *Etapa 1:* MCO en la regresión de Y_j sobre $X \Rightarrow \hat{Y}_j \Rightarrow \hat{Z}_j = \left[\hat{Y}_j, X_j\right]$
  - *Etapa 2:* MCO en la regresión de y_j sobre $\hat{Z}_j$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- En nuestro ejemplo:

(1) Definición e interpretación:

Etapa 1: regresamos $Q_t = \pi_{11}R_t + u_{1t} \Rightarrow \hat{Q}_t = \hat{\pi}_{11}R_t$

Etapa 2: regresamos $P_t = \alpha\hat{Q}_t + \varepsilon_{2t}$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} \hat{\alpha}_{MC2E} = \frac{\hat{Q}'P}{\hat{Q}'\hat{Q}}$$

(2) Consistencia:

Como es un estimador por VI ya hemos demostrado que es consistente

UNIVERSIDAD DE MURCIA

4.3 Método de información completa: MC3E

- Se realiza la estimación de todas las ecuaciones a la vez: método “de información completa”
- Ventaja: cada ecuación se estima con más información, por lo que se gana en eficiencia
- Inconvenientes:
  - indispensable que todas las ecuaciones estén identificadas
  - la mala especificación de una ecuación de FE puede empeorar la estimación de las otras ecuaciones
  - método más complejo, computacionalmente más pesado incluso para los ordenadores actuales cuando el número de ecuaciones es grande
- Esto explica que se use menos que MC2E

UNIVERSIDAD DE MURCIA

A. Estimación de la **FR**: MCO

$$\underset{(TM\times 1)}{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}} = \underset{TM\times KM}{\begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & X \end{bmatrix}} \cdot \underset{KM\times 1}{\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_M \end{bmatrix}} + \underset{TM\times 1}{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix}}$$

o bien $\tilde{y} = \tilde{X}\pi + \tilde{u}\ ,\ \tilde{u} \sim (0, \tilde{\Omega})$

- Todos los regresores son predeterminados $\Rightarrow$ la estimación MCO es consistente.
- Parece que deberíamos tomar en cuenta la estructura no escalar de la matriz $\tilde{\Omega}$: hay heteroscedasticidad y autocorrelación $\Rightarrow$ MCGF
- Sin embargo, dada la estructura del modelo, MCGF y MCO coinciden (ver ejercicio) y MCO es tan eficiente como MCGF.
- Por tanto, la estimación de la FR con información completa es la misma que con información incompleta:

$$\boxed{\hat{\pi} = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'\tilde{y}}$$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

B. Estimación de la **FE**: Mínimos Cuadrados en 3 Etapas (MC3E)

$$\underset{(TM\times 1)}{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & Z_M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_M \end{bmatrix} + \underset{TM\times 1}{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_M \end{bmatrix}} \quad \text{o bien} \quad \tilde{y} = Z\delta + \tilde{\varepsilon}$$

$$\text{con} \quad \tilde{\varepsilon} \sim (0, \tilde{\Sigma}) \quad \text{donde} \quad \tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I_T & \sigma_{12} I_T & \cdots & \sigma_{1M} I_T \\ \sigma_{12} I_T & \sigma_2^2 I_T & & \sigma_{2M} I_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1M} I_T & \sigma_{2M} I_T & \cdots & \sigma_M^2 I_T \end{bmatrix}$$

- Los regresores combinan variables predeterminadas y variables endógenas $\Rightarrow$ **MCO es inconsistente**.
- Además, $\tilde{\Sigma}$ no escalar: sabemos que hay **“heteroscedasticidad” en el modelo completo y correlación entre ecuaciones** $\Rightarrow$ podemos **ganar eficiencia usando esta información.**

- *Etapa 1*: obtener la estimación MC2E para $\delta_j \ , j=1,\cdots,M$ y los residuos de todas las ecuaciones FE:

$$\hat{\delta}_{MC2E} = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{1,MC2E} \\ \vdots \\ \hat{\delta}_{M,MC2E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\hat{Z}_1'\hat{Z}_1\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \left(\hat{Z}_M'\hat{Z}_M\right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Z}_1'y_1 \\ \vdots \\ \hat{Z}_M'y_M \end{bmatrix}$$

$$\hat{\tilde{u}}_{MC2E} = \begin{bmatrix} \hat{u}_{1,MC2E} \\ \vdots \\ \hat{u}_{M,MC2E} \end{bmatrix} \quad \text{donde } \hat{u}_{j,MC2E} = y_j - \hat{Z}_j\hat{\delta}_{j,MC2E} \ , \ j=1,\ldots,M$$

- *Etapa 2*: con ello, estimar $\tilde{\Sigma}$

$$\hat{\tilde{\Sigma}}_{MC2E} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^2_{1,MC2E} I_T & \hat{\sigma}_{12,MC2E} I_T & \cdots & \hat{\sigma}_{1M,MC2E} I_T \\ \hat{\sigma}_{12,MC2E} I_T & \hat{\sigma}^2_{2,MC2E} I_T & & \hat{\sigma}_{2M,MC2E} I_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_{1M,MC2E} I_T & \hat{\sigma}_{2M,MC2E} I_T & \cdots & \hat{\sigma}^2_{M,MC2E} I_T \end{bmatrix}$$

$$\text{con} \quad \hat{\sigma}_{ij,MC2E} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_{it,MC2E} \hat{u}_{jt,MC2E}}{T} \quad , \quad \hat{\sigma}^2_{j,MC2E} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}^2_{jt,MC2E}}{T}$$

- *Etapa 3*: usar $\hat{\hat{\Sigma}}_{MC2E}$ para mejorar la estimación de δ
  - Usamos $\hat{Z}_j$ (definido en MC2E) para cada j y construimos

$$\hat{\hat{Z}} = \begin{bmatrix} \hat{Z}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \hat{Z}_M \end{bmatrix}$$

  - Usamos $\hat{\hat{\Sigma}}_{MC2E}$ en un enfoque MCGF y obtenemos $\hat{\delta}_{MC3E}$

$$\hat{\delta}_{MC3E} = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{1,MC3E} \\ \vdots \\ \hat{\delta}_{M,MC3E} \end{bmatrix} = \left(\hat{\hat{Z}}' \hat{\hat{\Sigma}}^{-1}_{MC2E} \hat{\hat{Z}} \right)^{-1} \hat{\hat{Z}}' \hat{\hat{\Sigma}}^{-1}_{MC2E} \tilde{y}$$

- *Caso particular:*
  - Si $E(\tilde{u}\tilde{u}') = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 I & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_M^2 I \end{pmatrix}$, entonces $\hat{\delta}_{j,MC3E} = \hat{\delta}_{j,MC2E}$
    - Ojo: al hacer MC3E en Eviews siempre estimamos $\tilde{\Sigma}$
    - Demostración para el caso de 2 ecuaciones:

$$\hat{\beta}_{MC3E} = \left(\hat{\tilde{Z}}'\tilde{\Sigma}^{-1}\hat{\tilde{Z}}'\right)^{-1}\hat{\tilde{Z}}'\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{y} = \left[\begin{pmatrix} \hat{Z}_1 & 0 \\ 0 & \hat{Z}_2 \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} \sigma_1^2 I & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \hat{Z}_1 & 0 \\ 0 & \hat{Z}_2 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} \hat{Z}_1 & 0 \\ 0 & \hat{Z}_2 \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} \sigma_1^2 I & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sigma_1^2}\hat{Z}'_1\hat{Z}_1\right)^{-1}\frac{1}{\sigma_1^2}\hat{Z}_1'y_1 \\ \left(\frac{1}{\sigma_2^2}\hat{Z}'_2\hat{Z}_2\right)^{-1}\frac{1}{\sigma_2^2}\hat{Z}'_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\hat{Z}'_1\hat{Z}_1\right)^{-1}\hat{Z}_1'y_1 \\ \left(\hat{Z}'_2\hat{Z}_2\right)^{-1}\hat{Z}'_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\delta}_{1,MC2E} \\ \hat{\delta}_{2,MC2E} \end{pmatrix}$$

  - En este caso no ganamos eficiencia al estimar MC3E frente a MC2E

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Se puede demostrar que:

$$\hat{\delta}_{j,MC2E} \underset{T\to\infty}{\approx} N\left(\delta_j, \hat{\sigma}_j^2 \left[\hat{Z}_j'\hat{Z}_j\right]^{-1}\right) \qquad \text{con} \quad \hat{\sigma}^2_{j,MC2E} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}^2_{jt,MC2E}}{T}$$

$$\hat{\hat{\delta}}_{MC3E} \underset{T\to\infty}{\approx} N\left(\delta\ , \hat{\hat{Z}}'\hat{\hat{\Sigma}}^{-1}_{MC3E}\hat{\hat{Z}}\right)\ ,$$

$$\text{con} \quad \hat{\hat{\Sigma}}_{MC3E} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^2_{1,MC3E} I_T & \hat{\sigma}_{12,MC3E} I_T & \cdots & \hat{\sigma}_{1M,MC3E} I_T \\ \hat{\sigma}_{12,MC3E} I_T & \hat{\sigma}^2_{2,MC3E} I_T & & \hat{\sigma}_{2M,MC3E} I_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_{1M,MC3E} I_T & \hat{\sigma}_{2M,MC3E} I_T & \cdots & \hat{\sigma}^2_{M,MC3E} I_T \end{bmatrix}$$

donde $\hat{\sigma}_{ij,MC3E}$ y $\hat{\sigma}^2_{j,MC3E}$ se obtienen con los residuos MC3E.

- Es decir: los estimadores MC2E y MC3E se aproximan a una N si T grande

- Por tanto: los contrastes sobre los coeficientes estructurales estimados por MC2E o MC3E
  - usan las fórmulas asintóticas habituales para los estadísticos
  - son válidos para muestras suficientemente grandes

- Permite hacer contrastes individuales/conjuntos sobre elementos de δ_j o $\tilde{\delta}$

- Eviews proporciona las matrices de varianzas-covarianzas estimadas, necesarias para realizar estos contrastes

UNIVERSIDAD DE **MURCIA**

- La distinción entre endógenas y exógenas no siempre es clara. Sin embargo, es una distinción importante para:
  - que la ecuación estructural esté identificada
  - que la estimación, por MC2E o por MC3E, sea consistente

- Por tanto, es importante comprobar si:
  - una variable es endógena o no: **contraste de endogeneidad**
  - disponemos de instrumentos útiles: **contraste de relevancia**
  - disponemos de suficientes instrumentos exógenos: **contraste de sobreidentificación**

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Nos centramos en la ecuación estructural "j" :

$$y_j = Z_j\ \delta_j + \varepsilon_j = Y_j\, a_j + X_j b_j + \varepsilon_j \quad \text{donde } Y_j : (T \times m_j)$$

- $H_0 : Y_j$ exógenas $\quad H_A$: al menos 1 endógena en Y_j

- <u>Contraste de endogeneidad:</u>
  - Obtener los residuos MCO de la FR de las m_j variables en Y_j : $\hat{u}_{j1}, \hat{u}_{j2}, \cdots, \hat{u}_{jm_j}$
  - Regresión auxiliar (por MCO) : $\hat{y}_j = Z_j\ \hat{\delta}_j + \boxed{\hat{u}_{j1}\hat{\lambda}_1 + \cdots + \hat{u}_{jm_j}\hat{\lambda}_{m_j}}$
  - Contraste:

$H_0 : \lambda_1 = \ldots = \lambda_{m_j} = 0 \Rightarrow$ exog $\longrightarrow$
• con F si $m_j > 1$
• con t si $m_j = 1$

H_a : no $H_0 \Rightarrow$ endog

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Nos centramos en la ecuación estructural "j" :

$$y_j = Z_j\,\delta_j + \varepsilon_j = Y_j\,a_j + X_j b_j + \varepsilon_j \;\; ; \; X = \left[X_j\,;X_j^*\right]; \;\; X_j^* : (T \times K_j^*), K_j^* \geq m_j$$

- Es necesario que los instrumentos distintos a X_j (las predeterminadas no incluidas X_j^*) sean muy relevantes para hacer inferencia asintótica

- $H_0 : X_j^*$ no relevantes $\quad H_A : X_j^*$ relevantes

- Contraste de relevancia:
  - Obtener la estimación MCO de la FR de las m_j variables Y_j
  - En cada ecuación, contraste (asintótico) GLOBAL de significatividad de X_j^*

- Nos centramos en la ecuación estructural "j" :

$$y_j = Z_j\,\delta_j + \varepsilon_j = Y_j a_j + X_j b_j + \varepsilon_j \;\; ; \; X = \left[X_j ; X_j^*\right], \;\; X_j^* : (T \times K_j^*), \;\; K_j^* > m_j$$

- Nota técnica: necesitamos $K_j^* > m_j$ (sobreidenditificación)
- $H_0 : X_j^*$ exógenos (ec. sobreidentificada) $H_A : X_j^*$ no todos exógenos
- Esperamos que los instrumentos no tengan relación con ε_j
- $\Rightarrow$ Contraste "J" de sobreidentificación:
  - Obtener la estimación MC2E de δ_j y los residuos : $e_{j,MC2E} = y_j - Z_j \hat{\delta}_{j,MC2E}$
  - Regresamos $e_{j,MC2E}$ sobre X_j y X_j^* : $e_{j,MC2E} = X_j^* \mu_J^* + X_j \mu_J + \eta_J$
  - Como esperamos que X_j^* no se correlacione con los ruidos, el contraste:

$$H_0 : \mu_j^* = 0 \Rightarrow \text{exog}$$
$$H_a : \text{no } H_0 \Rightarrow \text{endog}$$

$$\Longrightarrow \boxed{J = k_j^* F \underset{H_0}{\sim} \chi^2_{k_j^* - m_j}}$$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- La **economía es dinámica**: lo que acontece hoy depende de lo que ocurrió en periodos anteriores
- La teoría económica refleja esta dinámica. Por ello, los **MES a menudo contienen ecuaciones dinámicas**
- Entre las variables predeterminadas encontraremos ahora:
  - exógenas contemporáneas
  - **exógenas retardadas**
  - **endógenas retardadas**
- Los MES dinámicos aportan sobre todo información sobre:
  - **sendas temporales de las endógenas ante cambios en predeterminadas**
  - **multiplicadores dinámicos** (de corto, medio y largo plazo)

FORMA ESTRUCTURAL:

- Antes: $AY_t = BX_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim iid(0, \Sigma)$
- En MES dinámico:

$$A_0 Y_t = B_0 X_t + B_1 X_{t-1} + \cdots + B_q X_{t-q} + A_1 Y_{t-1} + \cdots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim iid(0, \Sigma)$$

- Usando operadores de retardo:

$$A_0 Y_t = (B_0 + B_1 L + \cdots + B_q L^q) X_t + (A_1 L + \cdots + A_p L^p) Y_t + \varepsilon_t$$

$$(A_0 - A_1 L - \cdots - A_p L^p) Y_t = (B_0 + B_1 L + \cdots + B_q L^q) X_t + \varepsilon_t$$

$$\boxed{A(L) Y_t = B(L) X_t + \varepsilon_t}$$

FORMA REDUCIDA:

- Queremos expresar las endógenas sólo en función de las **predeterminadas : exógenas y endógenas retardadas**
- Partamos de la FE expresada como

$$A_0 Y_t = (B_0 + B_1 L + \cdots + B_q L^q) X_t + (A_1 L + \cdots + A_p L^p) Y_t + \varepsilon_t$$

$$Y_t = A_0^{-1}\left[(B_0 + B_1 L + \cdots + B_q L^q) X_t + (A_1 L + \cdots + A_p L^p) Y_t + \varepsilon_t\right]$$

$$Y_t = A_0^{-1}\left[B(L) X_t + A^*(L) Y_t + \varepsilon_t\right]$$

$$Y_t = A_0^{-1} B(L) X_t + A_0^{-1} A^*(L) Y_t + A_0^{-1}\varepsilon_t$$

$$\boxed{Y_t = \Pi(L) X_t + C^*(L) Y_t + u_t \quad , \quad u_t \sim iid(0,\Omega) \ , \ \ \Omega = A_0^{-1}\Sigma\left(A_0^{-1}\right)'}$$

FORMA FINAL:

- Queremos expresar las endógenas sólo en función de las **exógenas**
- Partamos de la FR expresada como
- $$Y_t = \Pi(L)X_t + C^*(L)Y_t + u_t$$
- => $\left[I - C^*(L)\right]Y_t = \Pi(L)X_t + u_t$ ó sea: $C(L)Y_t = \Pi(L)X_t + u_t$

$$\Rightarrow Y_t = C(L)^{-1}\Pi(L)X_t + C(L)^{-1}u_t$$

- $\boxed{Y_t = F(L)X_t + v_t}$ con $\begin{cases} F(L) = C(L)^{-1}\Pi(L) \rightarrow \boxed{\text{F(L) de orden } \infty} \\ v_t = C(L)^{-1}u_t \rightarrow \boxed{\text{v es un MA}(\infty)} \end{cases}$

- Sirve para cuantificar los **efectos netos de las exógenas sobre las explicadas, a corto, medio y largo plazo.**

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Ejemplo del modelo de la telaraña con explicativas:

- Forma estructural:

$$\begin{cases} Q_t = b_1^0 R_t + a_{12}^1 P_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\ P_t = a_{21}^1 P_{t-1} + a_{21}^0 Q_t + \varepsilon_{2t} \end{cases}$$

- Pasando FE a notación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21}^0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_t \\ P_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} R_t + \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^1 \\ 0 & a_{21}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{t-1} \\ P_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Ejemplo del modelo de la telaraña con explicativas:

- Forma reducida:

$$\begin{pmatrix} Q_t \\ P_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21}^0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} R_t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21}^0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^1 \\ 0 & a_{21}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{t-1} \\ P_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21}^0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Q_t \\ P_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ a_{21}^0 b_1 \end{pmatrix} R_t + \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^1 \\ 0 & a_{21}^0 a_{12}^1 + a_{21}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{t-1} \\ P_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ a_{21}^0 \varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$Y_t = \Pi_0 X_t + C_1 Y_{t-1} + u_t$$

- Los coeficientes de X recogen los efectos directos de la lluvia R sobre P y Q, pero no los indirectos de medio y largo plazo que se producen a través de los retardos de P y Q.

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Ejemplo del modelo de la telaraña con explicativas:

- Forma final: partiendo de la FR,

$$Y_t - C_1 Y_{t-1} = \Pi_0 X_t + u_t \quad \text{ó} \quad [I - C_1 L] Y_t = \Pi_0 X_t + u_t$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^1 \\ 0 & a_{21}^0 a_{12}^1 + a_{21}^1 \end{pmatrix} L \right] \begin{pmatrix} Q_t \\ P_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ a_{21}^0 b_1 \end{pmatrix} R_t + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ a_{21}^0 \varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} Q_t \\ P_t \end{pmatrix} = \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^1 \\ 0 & a_{21}^0 a_{12}^1 + a_{21}^1 \end{pmatrix} L \right]^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ a_{21}^0 b_1 \end{pmatrix} R_t} + \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^1 \\ 0 & a_{21}^0 a_{12}^1 + a_{21}^1 \end{pmatrix} L \right]^{-1} \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}}$$

$$Y_t = C(L)^{-1} \Pi_1 X_t + C(L)^{-1} u_t$$
$$= F(L) X_t \quad + \quad v_t$$

- Los coeficientes de X recogen los efectos directos e indirectos de la lluvia R sobre P y Q, a corto, medio y largo plazo.

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Interesa medir la respuesta de una variable y_j ante un cambio
  - en una de las variables exógenas x_i
  - en un ruido de la FE , ε_n , que refleje un cambio no anticipado en y_n

$$A_0Y_t = B_0X_t + B_1X_{t-1} + \dots + B_qX_{t-q} + A_1Y_{t-1} + \dots + A_pY_{t-p} + \varepsilon_t$$

- Los MESD se usan sobre todo para respuestas a cambios en X

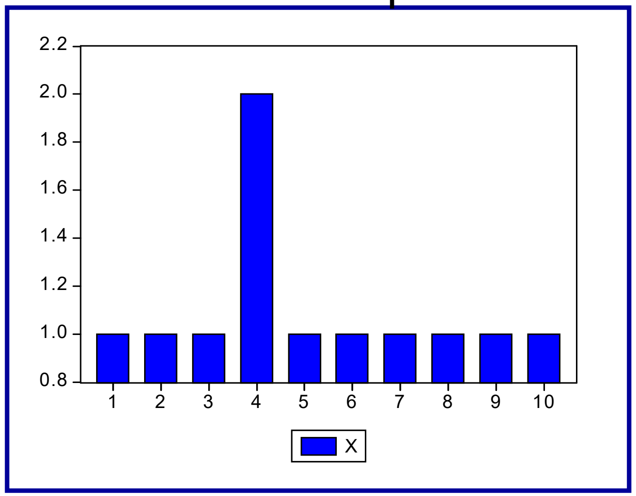
  Los VAR (tema II) para respuestas a sorpresas en Y (cambios en ε)
- X tiene un efecto directo sobre Y, y otro indirecto vía las Y retardadas
- => los efectos que nos interesan se encuentran en los coeficientes de la FF:

$$Y_t = F(L)X_t + v_t = F_0X_t + F_1X_{t-1} + F_2X_{t-2} + \cdots + v_t$$

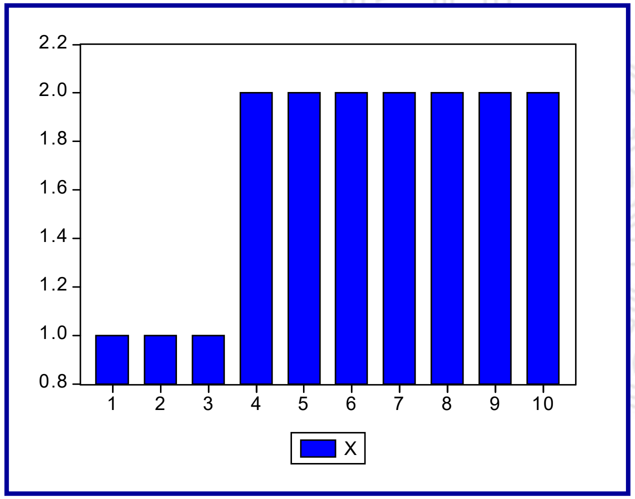
UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Examinaremos dos tipos de cambio en la exógena X_{it}
  - **Respuesta al impulso**: la exógena i cambia en t y vuelve a su valor inicial tras 1 periodo
  - **Respuesta al escalón**: la exógena i cambia en t y se mantiene en su nuevo valor
- Supondremos cambio unitario

Variación impulso



Variación escalón



UNIVERSIDAD DE MURCIA

- **Función de respuesta al impulso (FRI) :** muestra el efecto dinámico de un incremento de X_{it} durante 1 periodo, sobre $y_{jt}, y_{j,t+1}, y_{j,t+2}, y_{jt+3}, \cdots$ manteniendo el resto de exógenas constantes

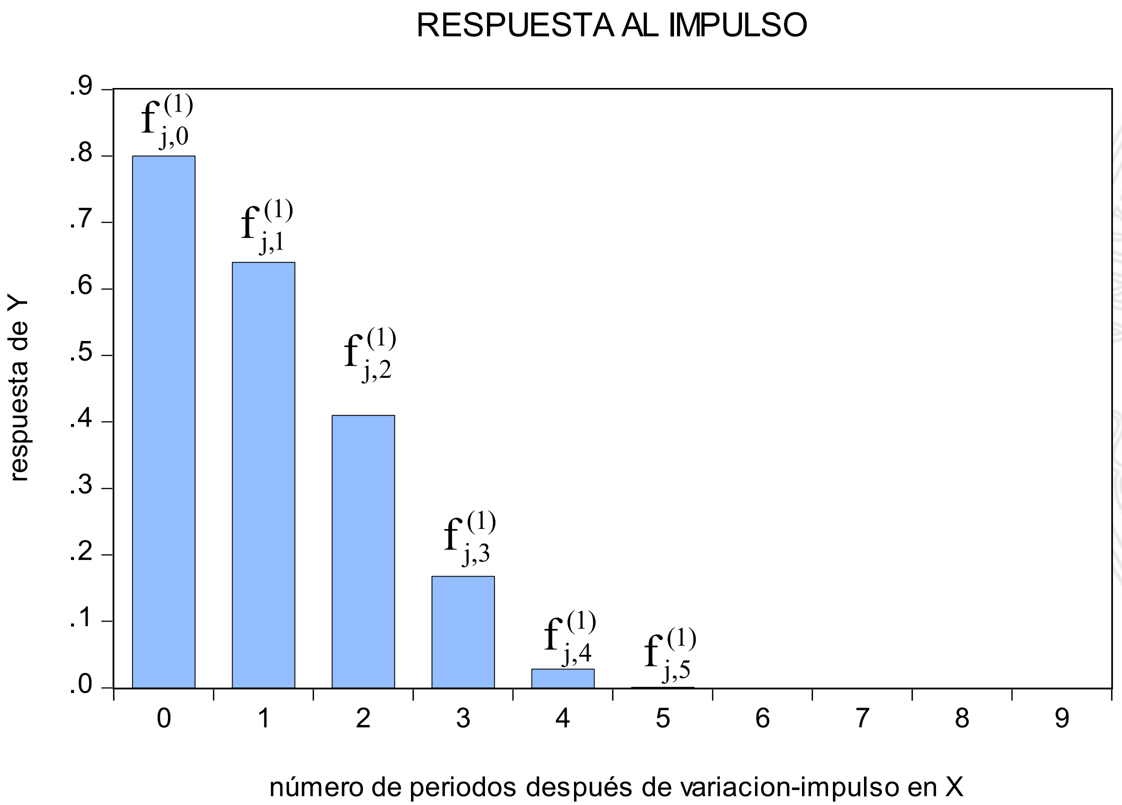
- Sin perdida de generalidad, supongamos que i=1 (cambio en X_{1t})

- La FRI para y_j se obtiene a partir del elemento referido a X_{1t} de la fila "j" de la FF

$$y_{jt} = f_{j,0}^{(1)} X_{1t} + f_{j,1}^{(1)} X_{1t-1} + f_{j,2}^{(1)} X_{1t-2} + f_{j,3}^{(1)} X_{1t-3} + \cdots + \underbrace{v_{jt}^{(1)}}$$

Hace referencia a los retardos de los ruidos de la ecuación j

- La función de respuesta al impulso se suele representar y analizar gráficamente



UNIVERSIDAD DE MURCIA

- **Función de respuesta al escalón (FRE) :** muestra el efecto dinámico de un incremento **permanente** de X_{it} sobre $y_{jt}, y_{j,t+1}, y_{j,t+2}, y_{jt+3}, \cdots$
- De nuevo, si i=1 (cambio en X_{1t}):

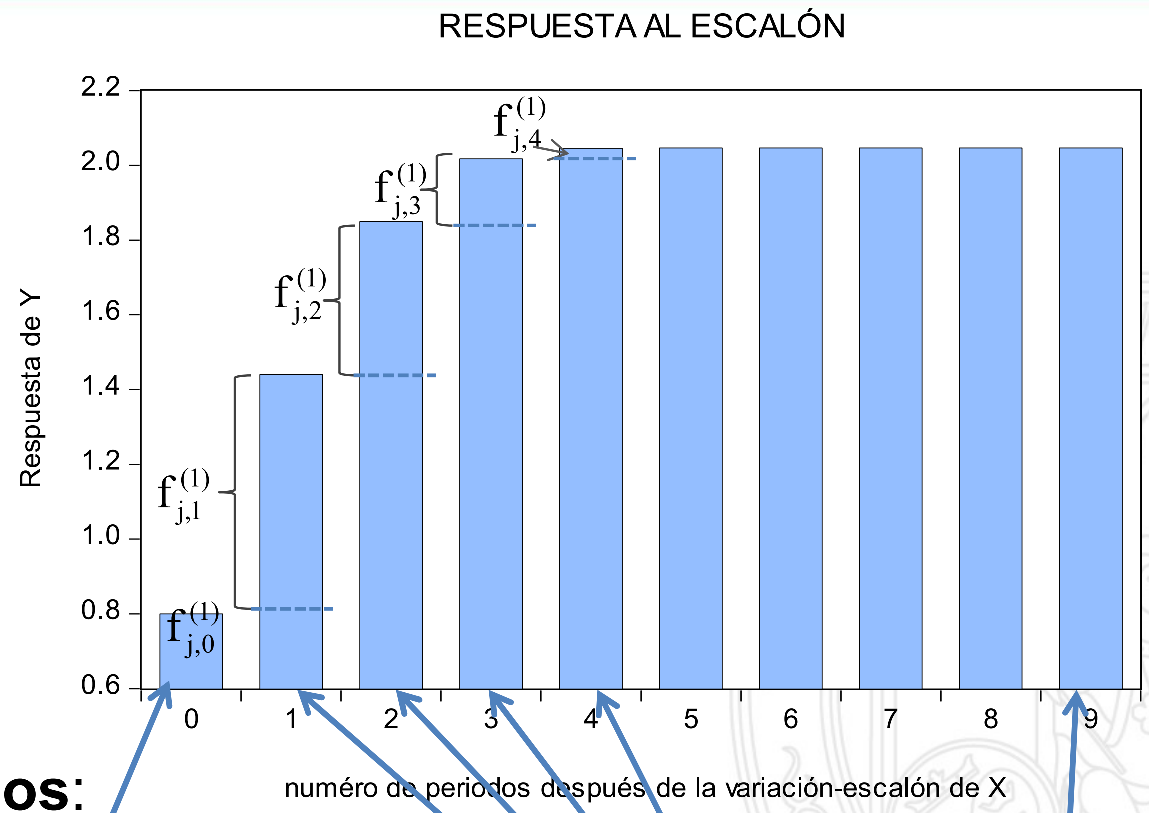
$$y_{jt} = f_{j,0}^{(1)} X_{1t} + f_{j,1}^{(1)} X_{1t-1} + f_{j,2}^{(1)} X_{1t-2} + f_{j,3}^{(1)} X_{1t-3} + \cdots + v_{jt}^{(1)}$$

- Cambio inmediato: $f_{j,0}^{(1)}$
- Cambio después de 1 periodo: $f_{j,0}^{(1)} + f_{j,1}^{(1)}$
- Cambio después de 2 periodos: $f_{j,0}^{(1)} + f_{j,1}^{(1)} + f_{j,2}^{(1)}$

…

- Cambio a largo plazo: $f_{j,0}^{(1)} + f_{j,1}^{(1)} + f_{j,2}^{(1)} + \cdots = \sum_{h=0}^{\infty} f_{j,h}^{(1)}$

- <u>Representación gráfica:</u>



- **<u>Multiplicadores dinámicos</u>**:
  - Multiplicador **de impacto**: $f_{j,0}^{(1)}$
  - Multiplicador **intermedio de orden h**: $\sum_{s=0}^{h} f_{j,s}^{(1)}$ (ejemplo: h=1,2,3,4)
  - Multiplicador **de largo plazo**: $\sum_{s=0}^{\infty} f_{j,s}^{(1)}$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Los paquetes informáticos permiten obtener con pocas operaciones los gráficos de las **funciones de respuesta al impulso**, de **respuesta al escalón** y el valor de **todos los multiplicadores dinámicos.**

- En la práctica, $f_{j,h}^{(i)}$ se obtienen por simulación:
  - ✓ Suponemos un cambio (de impulso o de escalón) en X_{it_0}
  - ✓ *Simulación 1*: usar el modelo para calcular el valor de las endógenas en t_0, t_0+1, t_0+2, t_0+3, … **antes** del cambio
  - ✓ *Simulación 2:* usar el modelo para calcular el valor de las endógenas en t_0, t_0+1, t_0+2, t_0+3, … **después** del cambio
  - ✓ $f_{j,h}^{(i)}$ son la diferencia en $y_{jt_0}, y_{j,t_0+1}, y_{j,t_0+2}, y_{jt_0+3}, \cdots$ después del cambio y antes del cambio.
  - ✓ A partir de $f_{j,h}^{(i)}$ podemos calcular las FRI, FRE y multiplicadores

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Las variables económicas se pueden catalogar entre I(0) o I(d), con d>0 (en general, d=1 ó 2). Si d>0, la variable tiene raíz unitaria: su varianza crece con el tiempo, la variable no es estacionaria.

- Si el MES está bien especificado, las ecuaciones deben estar **equilibradas** y el MES será **estacionario.**

- El MES es estacionario y las ecuaciones FE estarán equilibradas si:
  - todas I(0)
  - algunas I(d): una dependiente I(d) tiene que explicarse por una o varias explicativas I(d), de tal manera que las varianzas crecientes se cancelan mutuamente.

- La teoría económica, detrás de la especificación de los MES, debería garantizar que las ecuaciones estructurales estén equilibradas.

- En un MES estacionario, con o sin variables I(1), MC2E y MC3E se pueden utilizar con las mismas propiedades que en ausencia de I(1).

- El MES se puede utilizar para predecir el valor de las variables endógenas. Para ello, se necesita a priori el valor predicho de las variables exógenas.

- En la práctica, se obtiene la **predicción por simulación del modelo** con los valores predichos de las exógenas.

- Por ejemplo, en un MES dinámico, para un predicción de horizonte H con datos hasta la fecha T, se procede así:

  - se proporcionan los valores predichos de las exógenas a partir de T:

$$X_T^{(p)}, X_{T+1}^{(p)}, \cdots, X_{T+H}^{(p)}$$

  - se usa el modelo estimado para simular el valor futuro de las endógenas entre (T+1) y (T+H) en función de estos valores de las exógenas:

$$\hat{Y}_T^{(p)}, \hat{Y}_{T+1}^{(p)}, \cdots, \hat{Y}_{T+H}^{(p)}$$

  - se suele acompañar la predicción numérica con el gráfico de la senda predicha de las variables endógenas de mayor interés.

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Modelos Recursivos:

- Son un caso particular de modelos de ecuaciones simultáneas, donde:
  - Una variable endógena de posición inferior no influye contemporáneamente en las endógenas de posición superior $\Rightarrow$ la matriz A es triangular inferior.
  - Las covarianzas entre los ruidos de las ecuaciones son 0
- Todas las ecuaciones están identificadas
- Ejemplo

$$
\begin{aligned}
y_{1t} &= b_{10} + b_{11}X_{1t} + b_{21}X_{2t} + \varepsilon_{1t} \\
y_{2t} &= b_{20} + \alpha_{21}y_{1t} + b_{21}X_{1t} + b_{22}X_{2t} + \varepsilon_{2t} \\
y_{3t} &= b_{30} + \alpha_{31}y_{1t} + \alpha_{32}y_{2t} + b_{31}X_{1t} + b_{32}X_{2t} + \varepsilon_{3t}
\end{aligned}
$$

$$\operatorname{cov}\left(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{2t}\right)=\operatorname{cov}\left(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{3t}\right)=\operatorname{cov}\left(\varepsilon_{2t},\varepsilon_{3t}\right)=0$$

- Se pueden estimar por MCO ecuación a ecuación

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Descripción:

- No hay causalidad simultánea: cada ecuación describe el comportamiento de una variable endógena como función de variables predeterminadas exclusivamente

- Son modelos de ecuaciones aparentemente no relacionadas (SURE): las relaciones entre las ecuaciones vienen exclusivamente a partir de las correlaciones entre los términos de error.

- Expresión matemática de un modelo SURE

$$\begin{aligned} y_{1t} &= x'_{1t}\beta_1 + \varepsilon_{1t} \\ &\vdots \\ y_{Mt} &= x'_{Mt}\beta_M + \varepsilon_{Mt} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1 &= X_1\beta_1 + \varepsilon_1 \\ &\vdots \\ y_M &= X_M\beta_M + \varepsilon_M \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_M \end{pmatrix} \qquad E(\varepsilon\varepsilon'/X) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}I_T & \cdots & \sigma_{1M}I_T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{M1}I_T & \cdots & \sigma_{MM}I_T \end{pmatrix}$$

- ¿Cómo se estiman estos modelos?
  - No necesitan estimadores VI
  - Generalmente por MCGF, habiendo estimado las covarianzas
  - Si las explicativas fueran las mismas en todas las ecuaciones $\Rightarrow$ MCO

Descripción:

- No hay teoría económica tan *estricta* (y previa a la modelización) en la que se fundamenta el modelo como en MES
- El modelo no contiene variables exógenas puras
- Cada variable se hace depender de su propio pasado y del pasado del resto de variables del sistema. No se excluye ninguna variable de ninguna ecuación
- Estos modelos se expresan generalmente en forma reducida, ya que se usan sobre todo para predecir

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Forma reducida de un modelo VAR

$$y_{1t} = \delta_1 + \sum_{i=1}^{p} c_{11}^{i} y_{1t-i} + \ldots + \sum_{i=1}^{p} c_{1m}^{i} y_{mt-i} + u_{1t}$$

$$\vdots$$

$$y_{mt} = \delta_m + \sum_{i=1}^{p} c_{m1}^{i} y_{1t-i} + \ldots + \sum_{i=1}^{p} c_{mm}^{i} y_{mt-i} + u_{mt}$$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ \vdots \\ y_{mt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11}^{1} & \cdots & c_{1m}^{1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}^{1} & \cdots & c_{mm}^{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ \vdots \\ y_{mt-1} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} c_{11}^{p} & \cdots & c_{1m}^{p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}^{p} & \cdots & c_{mm}^{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-p} \\ \vdots \\ y_{mt-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ \vdots \\ u_{mt} \end{pmatrix}$$

$$Y_t = \delta + C_1 Y_{t-1} + \ldots + C_p Y_{t-p} + U_t \qquad E\left(U_t U_t'\right) = \Omega$$

- Se estiman por MCO. No es necesario MCGF porque las explicativas son las mismas en todas las ecuaciones

Lo que hemos aprendido:

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Características básicas de un modelo de ecuaciones simultáneas: forma estructural, forma reducida, causalidad simultánea.

- La causalidad simultánea provoca la inconsistencia de MCO para estimar los coeficientes de la FE. Hay que recurrir a estimadores alternativos, por variables instrumentales.

- Sólo tiene sentido (econométrico y económico) estimar las ecuaciones estructurales que estén identificadas.

- Una ecuación estructural está identificada si se puede la distinguir de una combinación lineal de ella misma con otra(s) ecuacion(es) estructural(es). Existe varios tipos de información a priori que pueden servir para identificar una ecuación.

- El método MC2E es un método de variables instrumentales, de información limitada, que proporciona una estimación consistente de una ecuación estructural a la vez. Ésta debe estar identificada.

Lo que hemos aprendido:

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- El método MC3E es un método de variables instrumentales, de información completa, que proporciona una estimación consistente de todas las ecuaciones estructurales a la vez. Todas deben estar identificadas. Es más eficiente que el MC2E si se aplica a un modelo bien especificado.

- Ambos estimadores son asintóticamente normales. Así, todas las fórmulas habituales de contraste sobre los coeficientes estructurales se pueden aplicar en su versión asintótica. Los contrastes serán válidos para muestras suficientemente grandes.

- Existen contrastes que permiten comprobar la endogeneidad de explicativas y la validez de las variables exógenas como instrumentos.

- . Los coeficientes de FR se pueden estimar consistentemente por MCO.

- A menudo, los MES montados sobre muestras temporales van a ser dinámicos. En tal caso, además de la FE y de la FR, también existe la FF que permite captar el efecto neto de las exógenas sobre las endógenas.

Lo que hemos aprendido:

UNIVERSIDAD DE **MURCIA**

- Los MES dinámicos pueden servir para examinar cómo las endógenas reaccionan a variaciones de impulso y a variaciones de escalón de una exógena. Podemos obtener las funciones de respuesta al impulso, al escalón, y los multiplicadores dinámicos (de impacto, intermedios y de largo plazo).

- En un MES dinámico, en el que pueden intervenir variables I(d), d>0, es importante que las ecuaciones estén equilibradas. Si lo están, la presencia de I(d) no presenta problemas de inferencia.

- Los MES en general, y los dinámicos en particular, pueden usarse para realizar predicciones de las endógenas condicionadas al valor predicho externamente de las variables exógenas.

- Además de los modelos de ecuaciones simultáneas, existen otros modelos multicuacionales interesantes: triangulares y recursivos, SURE, VAR.