

1η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ

Κωδικός Ομάδας:80

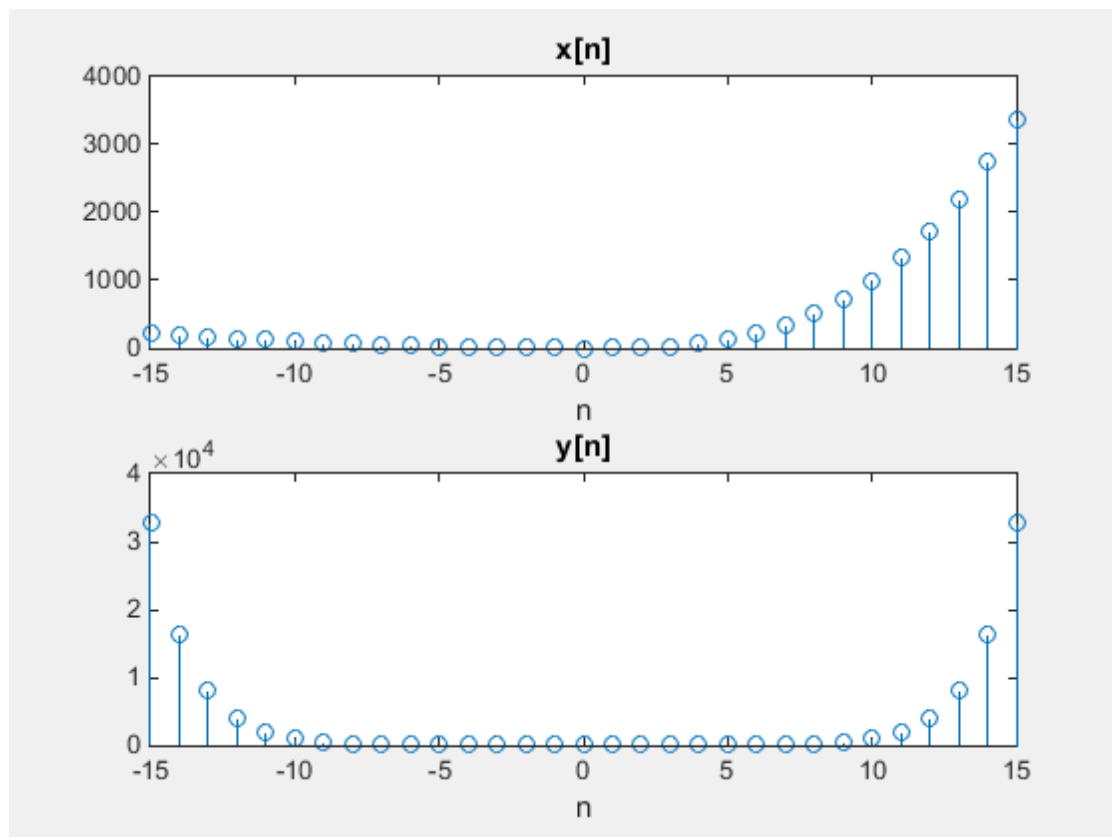
Φοιτητές που εργάστηκαν:

- 1.Λεοντής Παναγιώτης 2018030099
- 2.Πρινίτης Πολύδωρος 2018030098
- 3.Μαντέλος Βασίλης 2018030128



Άσκηση 1

α)



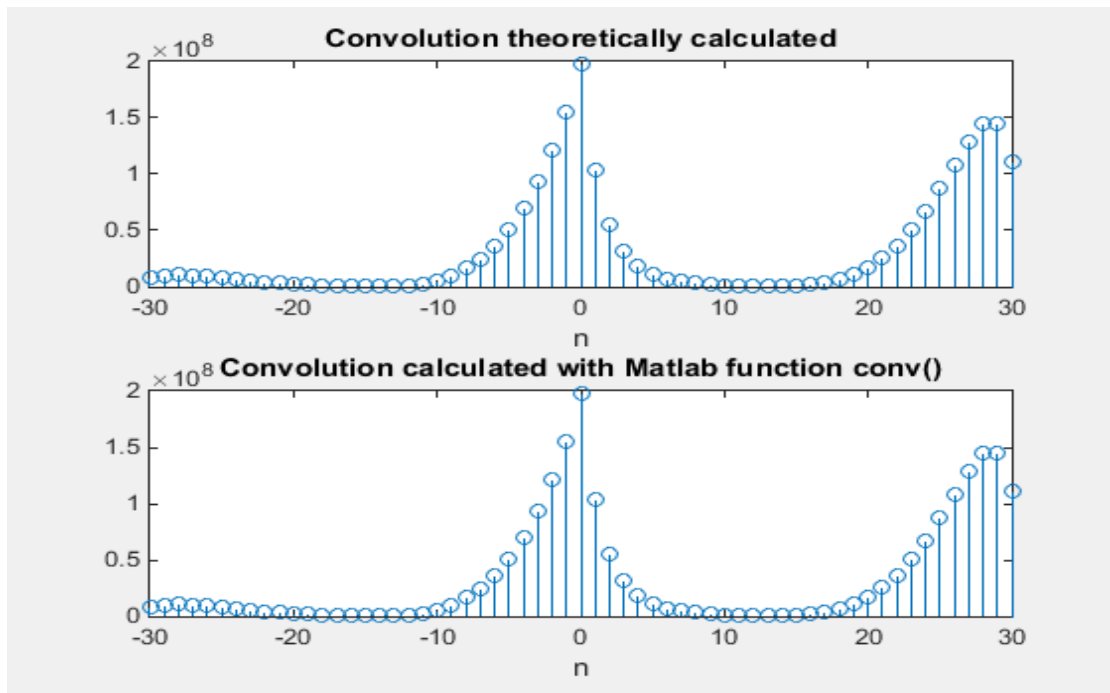
Εικόνα 1: Τα σήματα $x[n]$ και $y[n]$ που χρησιμοποιούνται για συνέλιξη.

Σύντομη περιγραφή

Τα δύο τυχαία σήματα που επιλέχθηκαν για την συνέλιξη της πρώτης άσκησης ήταν τα παρακάτω:

$$x[n] = \begin{cases} n^2, & n < 0 \\ n^3, & n \geq 0 \end{cases} \quad y[n] = 2^{|n|}$$

Έτσι, υλοποιήθηκαν τα παραπάνω σήματα αφού πρώτα κατασκευάστηκαν οι αντίστοιχοι άξονες του διακριτού χρόνου. Στην συνέχεια, όσον αφορά το κομμάτι της συνέλιξης, όμοια κατασκευάστηκε ο άξονας του χρόνου της συνέλιξης, που προέκυψε από το άθροισμα των αξόνων των παραπάνω σημάτων, τοποθετήθηκαν τα απαραίτητα μηδενικά ώστε να γίνουν όλοι οι πολλαπλασιασμοί και δημιουργήθηκε το ανακλασμένο σήμα $y[-n]$ και στους δύο άξονες, με στόχο να προκύψει η υλοποίηση του τύπου: $\sum_{-\infty}^{\infty} x[k] \times y[k - n]$

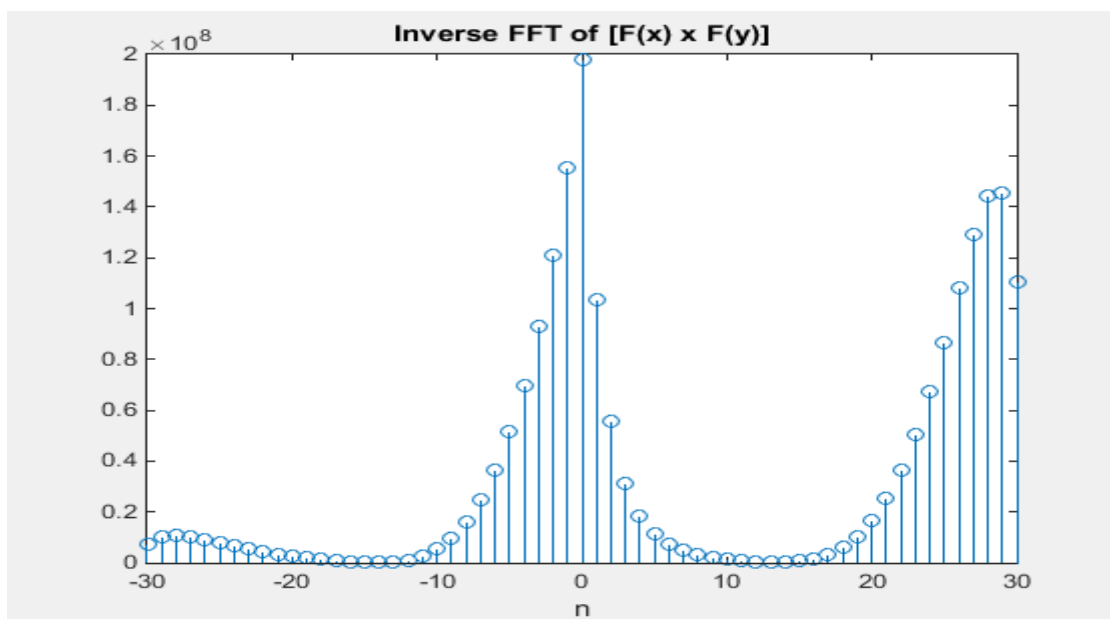


Εικόνα 2: Τα αποτελέσματα της συνέλιξης των παραπάνω σημάτων με και χωρίς την χρήση της conv().

Σύντομη Περιγραφή

Η διαδικασία της συνέλιξης με την χρήση της conv ήταν αρκετά πιο απλή, καθώς αρχικά διαμορφώνεται το σήμα και τον χρόνο της συνέλιξης και ύστερα απλά εκτελείται η συνάρτηση conv(x,y).

β)



Εικόνα 3: Αντίστροφος Fourier του πολλαπλασιασμού των μετασχηματισμών Fourier του $x(t)$ και του $y(t)$.

Σύντομη Περιγραφή- Συμπεράσματα

Χρησιμοποιούμε τα δύο σήματα του προηγούμενου ερωτήματος, επομένως περιμένουμε τελικά να αντικρίσουμε ίδιο σχήμα με την **Εικόνα 2**. Επιπλέον, ο μετασχηματισμός Fourier δημιουργήθηκε με την χρήση της λειτουργίας `fft`, ενώ η μετακίνηση του στοιχείου μηδενικής συχνότητας στο κέντρο του φάσματος επιτυγχάνεται με το `fftshift` για κάθε σήμα. Αφού κάναμε τον μετασχηματισμό για κάθε σήμα, έπειτα πολλαπλασιάστηκαν οι Fourier μεταφέρθηκαν στον άξονα του χρόνου με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier ώστε να μπορούν να συγκριθούν τα γραφήματα. Χρησιμοποιήθηκε η εντολή `ifft()`. Συνεπώς, σύμφωνα, με το παραπάνω σχήμα γίνεται αντιληπτό ότι η συνέλιξη δύο σημάτων στο πεδίο του χρόνου ισοδυναμεί και γραφικά με τον πολλαπλασιασμό των ίδιων σημάτων στο πεδίο της συχνότητας.

Άσκηση 2

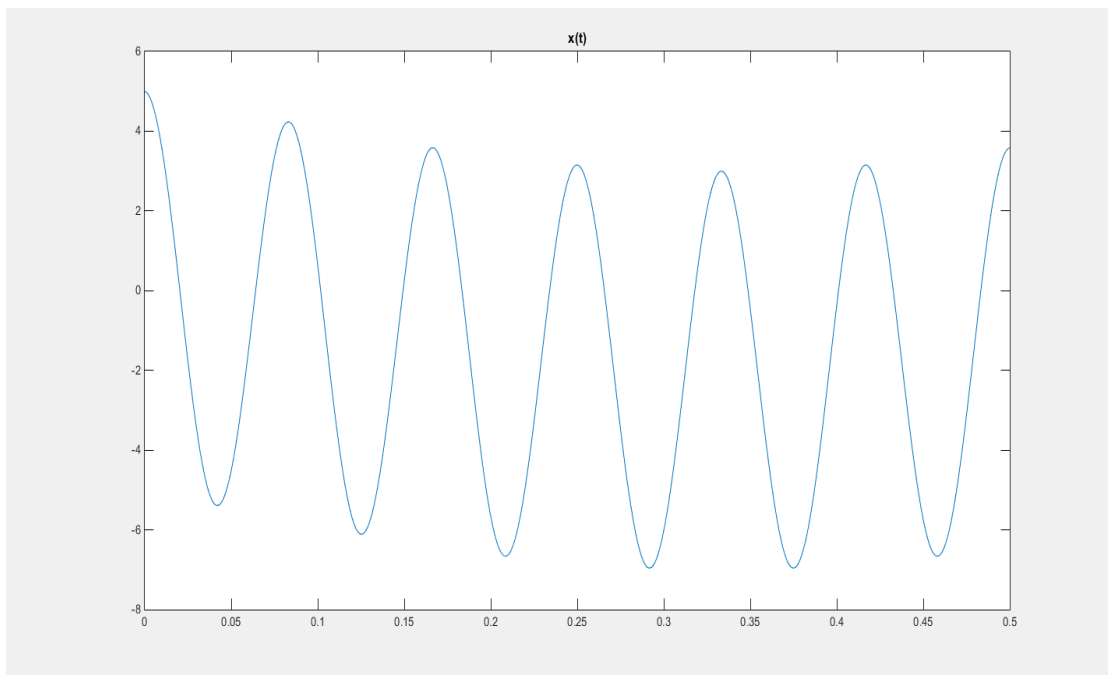
Είναι γνωστό ότι ο μετασχηματισμός Fourier ενός συνεχούς σήματος δίνεται από τον εξής τύπο: $X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \times e^{-j2\pi Ft} dt$.

Από το παραπάνω προκύπτει ότι: $\{\cos(2\pi F_0 t)\} \xleftrightarrow{F} 1/2\delta(F-F_0) + 1/2\delta(F+F_0)$.

Όμοια, προκύπτει ότι: $\{\sin(2\pi F_0 t)\} \xleftrightarrow{F} (1/2j)\delta(F-F_0) - (1/2j)\delta(F+F_0)$.

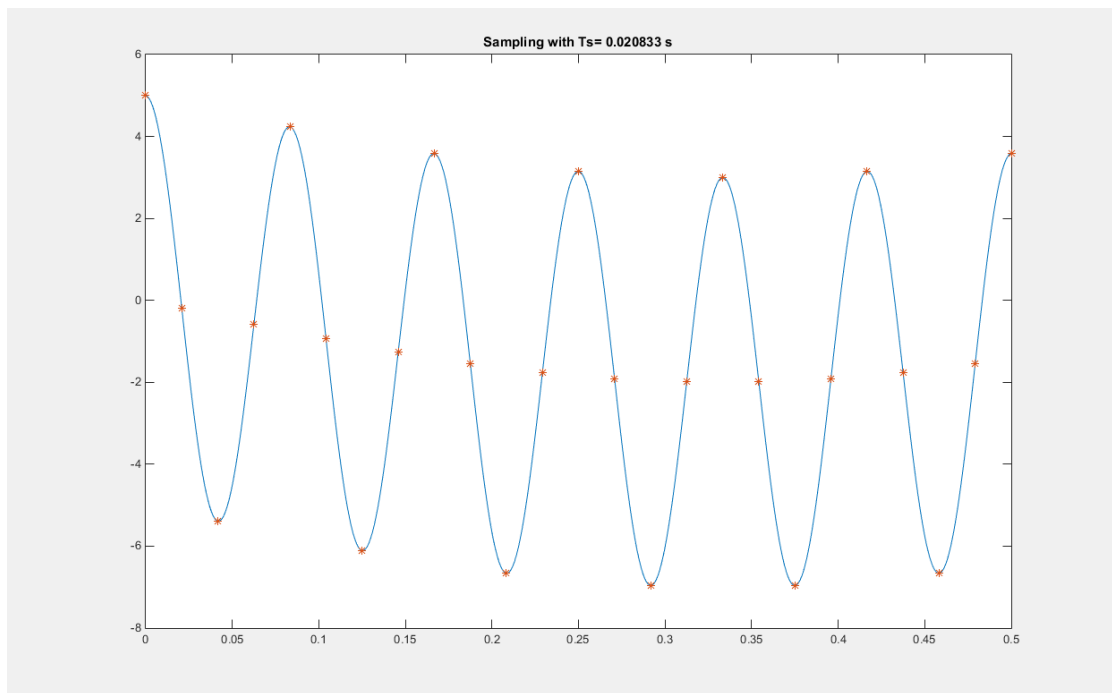
Επομένως, $\{5\cos(24\pi t) - 2\sin(1.5\pi t)\} \xleftrightarrow{F} 5/2\delta(F-12) + 5/2\delta(F+12) - (1/2j)\delta(F-0.75) + (1/2j)\delta(F+12)$.

Παρατηρείται ότι η μέγιστη μετατόπιση του σήματος στο φάσμα της συχνότητας είναι κατά 12. Έτσι, αφού πρέπει $f_n \geq 2f_{max}$, έχουμε ότι $f_s = 24$.



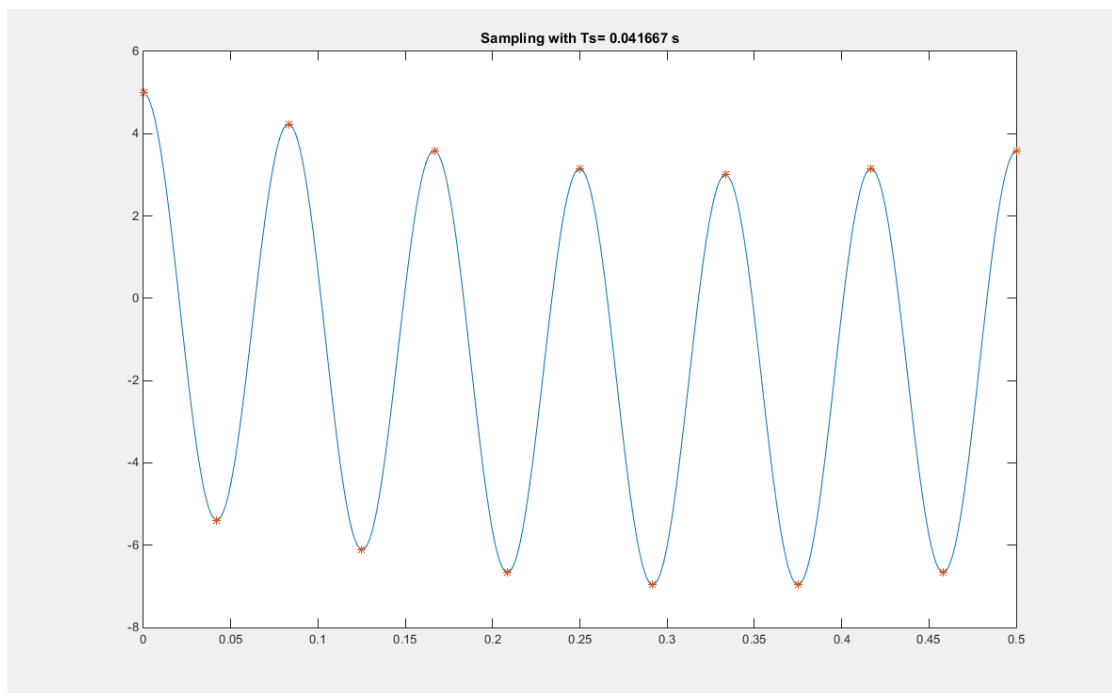
Εικόνα 4: Το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$.

α)



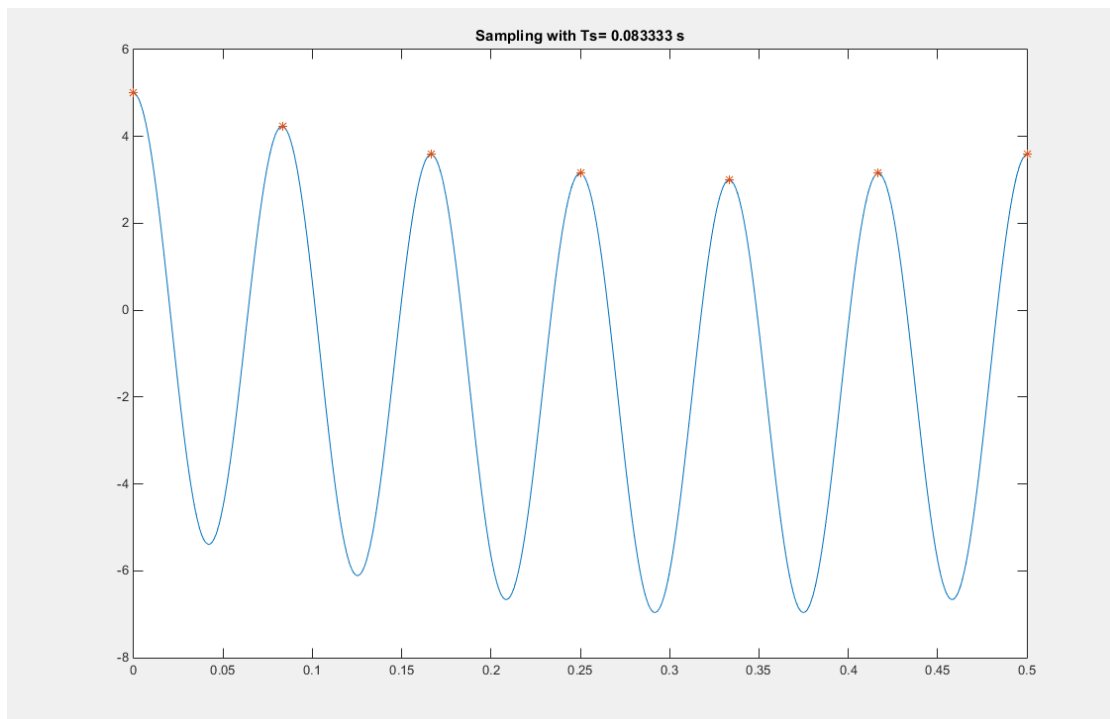
Εικόνα 5: Το σήμα $x(t)$ με συχνότητα δειγματοληψίας $T_s=1/48$.

β)



Εικόνα 6: Το σήμα $x(t)$ με συχνότητα δειγματοληψίας $T_s=1/24$.

γ)

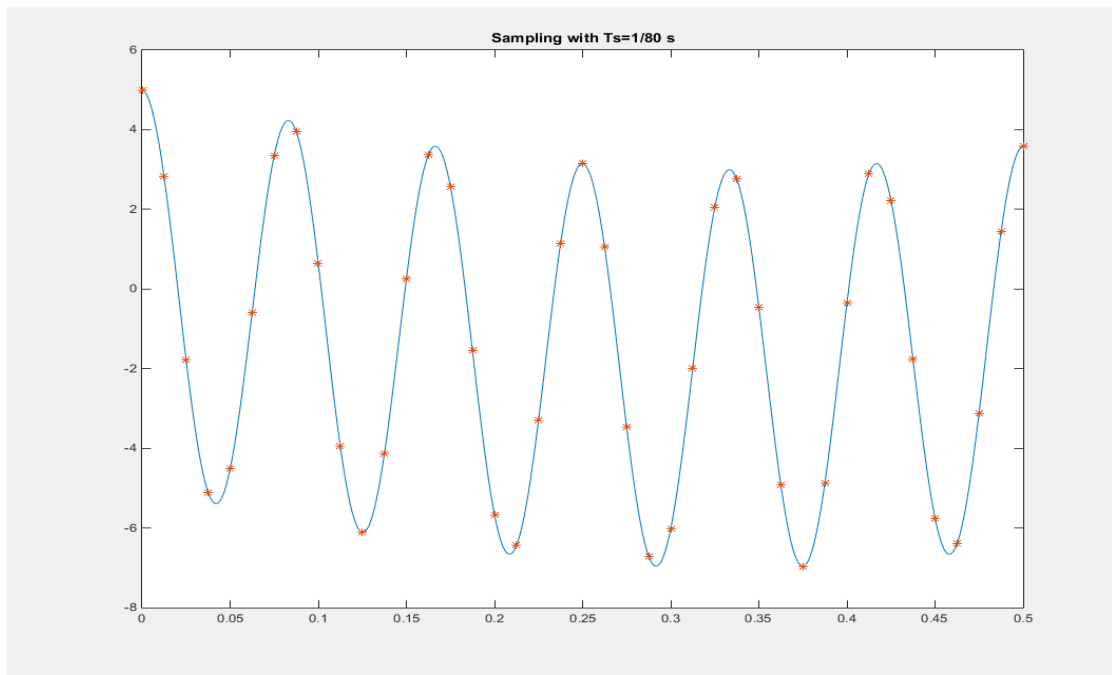


Εικόνα 7: Το σήμα $x(t)$ με συχνότητα δειγματοληψίας $T_s=1/12$.

Σύντομη Περιγραφή και Παρατηρήσεις

Από τα παραπάνω διαγράμματα διαφαίνεται ότι όταν η συχνότητα δειγματοληψίας $f_s \geq 2f_n = 24$ (εικόνες 4,5), τότε το σήμα δειγματοληπτείται επαρκώς με αποτέλεσμα να μπορεί και να ανακατασκευαστεί σύμφωνα με τα δείγματα, σε αντίθεση με την εικόνα 7, όπου δεν ισχύει η παραπάνω σχέση, το ανακατασκευασμένο σήμα δεν θα είναι το ίδιο με το αρχικό. Με αυτόν τον τρόπο, επιβεβαιώνονται και τα θεωρήματα Nyquist και Shannon. Όσον αφορά το κομμάτι του κώδικα, αρχικά δημιουργήθηκε το σήμα $x(t)$ με βήμα $DT=0.001$ και ύστερα θέσαμε σε αυτό τις διάφορες τιμές της περιόδου δειγματοληψίας, χρησιμοποιώντας την holdon για να παρουσιαστεί στην ίδια γραφική με τα δείγματα.

Επαναλαμβάνουμε την παρακάτω διαδικασία όπου σαν συχνότητα δειγματοληψίας επιλέγεται ο αριθμός της ομάδας μας. (80)



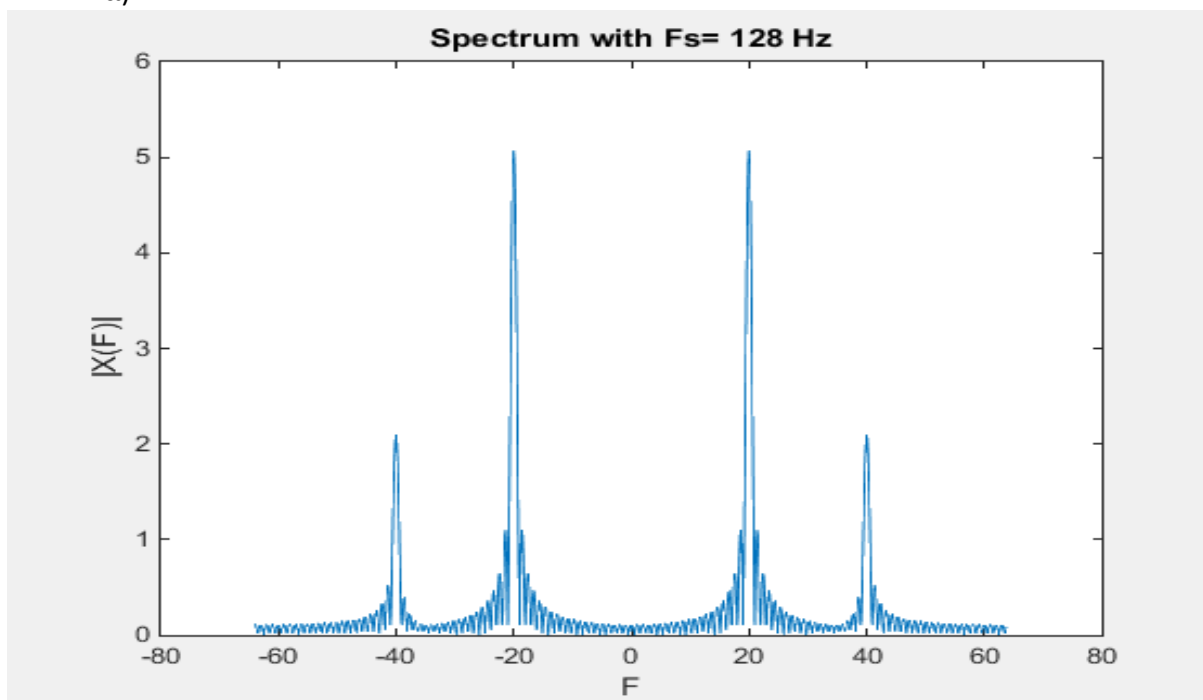
Εικόνα 8: Το σήμα $x(t)$ με συχνότητα δειγματοληψίας $T_s=1/80$.

Παρατήρηση

Στην παραπάνω γραφική παράσταση με $f_s=80>24$, φαίνεται ότι το σήμα δειγματοληπτείται επαρκώς, επομένως μπορεί να ανακατασκευαστεί σε αρκετά καλό βαθμό.

Άσκηση 3

α)



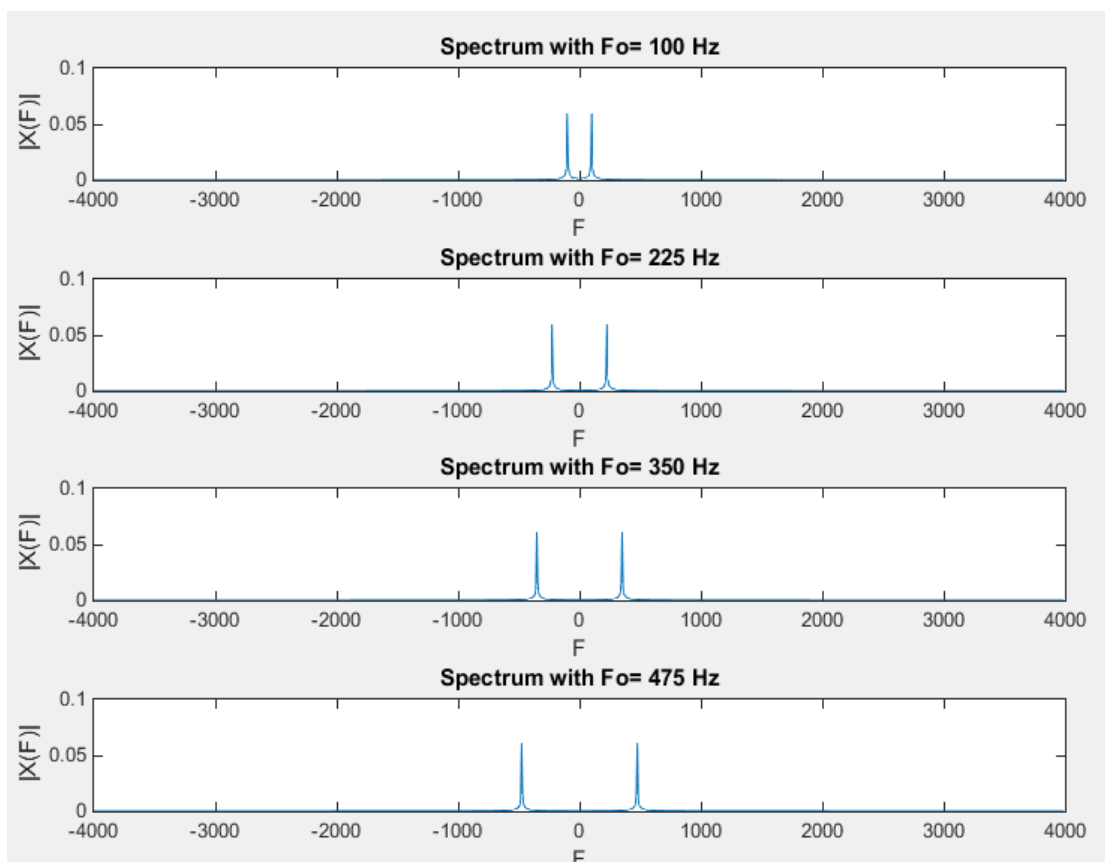
Εικόνα 9: Το φάσμα του $X(F)$.

Σύντομη Περιγραφή και Παρατήρηση

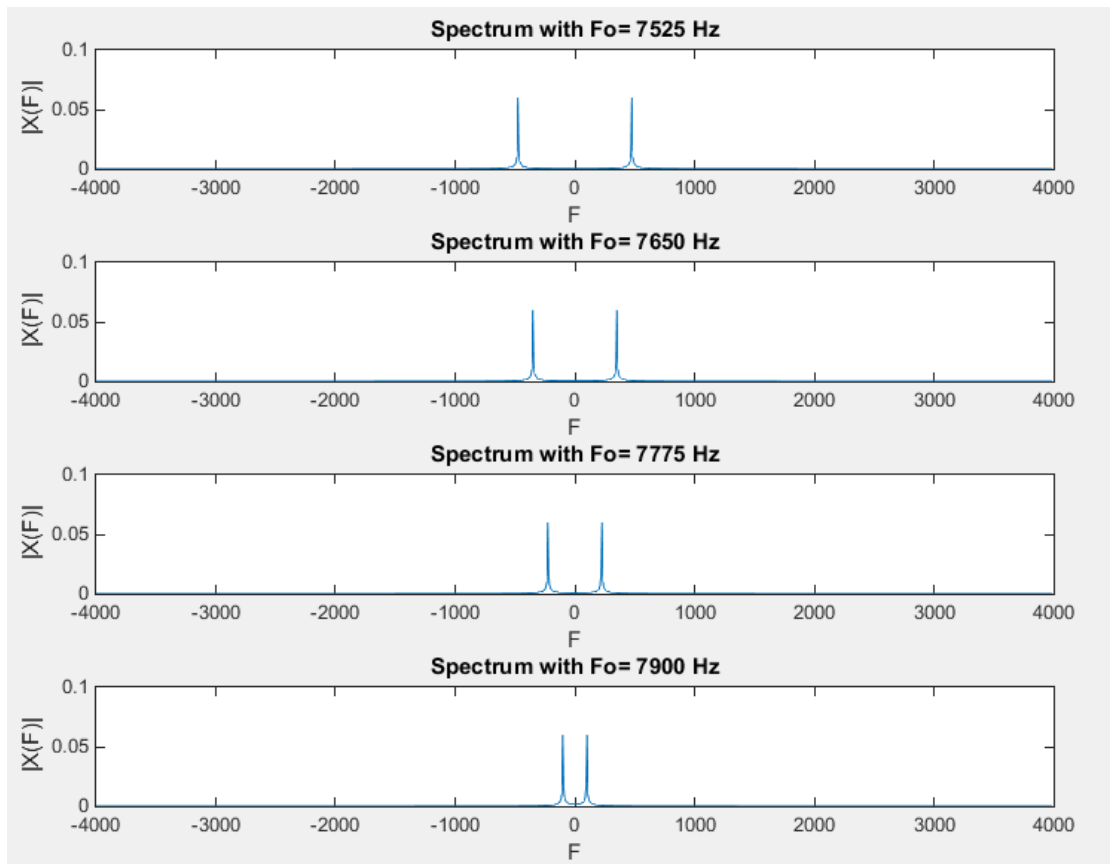
Αρχικά κάναμε τη δειγματοληψία του σήματος με συχνότητα $f_s=128$ Hz και σε διάστημα χρόνου από 0 έως 1 sec. Έτσι επιτύχαμε τα 128 δείγματα που μας ζητήθηκαν. Έπειτα, το φάσμα της συχνότητας στον οριζόντιο άξονα θα αντιστοιχεί στο διάστημα $F[-F_s/2:F_s/2-F_s/N]$ με βήμα F_s/N . Όμοια με προηγούμενη άσκηση μετακινούμε το στοιχείο μηδενικής συχνότητας στο κέντρο με `fftshift` και εκτελούμε τον μετασχηματισμό Fourier με το `fft`, με αποτέλεσμα την συμμετρία του παραπάνω γραφήματος. Επιπλέον, παρατηρείται ότι δεν υπάρχει aliasing καθώς η επιλεγμένη συχνότητα $f_s=128 > 2f_{1,2}$, όπου $f_1=20$ και $f_2=40$. Αυτή η σχέση προκύπτει καθώς για να μην υπάρχει aliasing πρέπει: $\Omega_s \geq \Omega_N$ και $\Omega=2\pi f$. Επιπλέον παρατηρούμε τα 8 στις θετική και στην αρνητική τιμή της κάθε βασικής συχνότητας. $(-20,20), (-40,40)$.

β)

Ουσιαστικά, στην διαδικασία της δειγματοληψίας ενός συνεχούς σήματος λαμβάνονται κάποια δείγματα του σήματος αυτού ανά κάποια χρονικά διαστήματα. Ο χρόνος αυτός ονομάζεται περίοδος δειγματοληψίας $T=nT_s$. Επομένως κατά τα γνωστά η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f=n/f_s$. Έτσι προκύπτει ότι αν κάνουμε δειγματοληψία στο σήμα $x(t)=\sin(2\pi f_0 t + \phi)$, θα εμφανιστεί το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]=\sin(2\pi(f_0/f_s)*n + \phi)$.



Εικόνα 10: Το φάσμα του $X(F)$ για τις διάφορες τιμές του F_0 που ζητούνται.



Εικόνα 11: Το φάσμα του $X(F)$ για τις διάφορες τιμές του F_0 που ζητούνται.

Σύντομη Περιγραφή και Παρατήρηση

Ο κώδικας εκτέλεσης του γραφήματος της εικόνας 10 είναι πανομοιότυπος και ίδιας λογικής με τα παραπάνω ερωτήματα, όπου και αναλύσαμε. Απλώς εδώ χρησιμοποιήσαμε μια `for loop`, για λόγους ευκολίας, ώστε να διασχίσει τις συχνότητες που χρειάζονταν στο δοθέν φάσμα με βήμα 125 Hz, προσθέτοντας παράλληλα την `phase=80` (αριθμός ομάδας). Ο κώδικας της εικόνας 11 είναι ακριβώς ίδιος με της εικόνας 10 απλά με διαφορετικές F_0 .

Παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται η συχνότητα F_0 του σήματος στο εύρος μεταξύ 100 έως και 475 Hz με βήμα 125 Hz, η απόσταση των δύο $\delta(F \pm F_0)$ στο πεδίο της συχνότητας μεγαλώνει. Αναμενόμενο αφού αναμένουμε να τα συναντήσουμε στην θετική και στην αρνητική τιμή της βασικής συχνότητας F_0 . Αυτό συμβαίνει μέχρι να φτάσουμε στο σημείο όπου πληρείται οριακά το κριτήριο του Nyquist. Δηλαδή $F_{0_{MAX}} = \frac{F_s}{2} = 4000 \text{ Hz}$ όπως φαίνεται και στα άκρα του διαγράμματος. Από εκεί και έπειτα η περαιτέρω αύξηση της F_0 , όπως παρατηρούμε στο εύρος μεταξύ 7525 Hz έως και 7900 Hz με βήμα 125 Hz, οδηγεί τα σήματα $\delta(F \pm F_0)$ όλο και πιο κοντά στην αρχή των αξόνων αναλόγως με το πόσο πάνω από την συχνότητα Nyquist είναι η τιμή της F_0 . Επομένως υπάρχει επικάλυψη και το σήμα δεν μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως. Τέλος, μεταβάλαμε πειραματικά τις τιμές της φάσης ϕ ώστε να παρατηρήσουμε τον ρόλο της. Καταλήξαμε στο ότι το ϕ δεν επηρεάζει το φάσμα της συχνότητας.