**Транспортная задача**.

Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Запасы |
| A1 | 17 | 7 | 11 | 8 | 16 | 6 | 173 |
| A2 | 15 | 5 | 13 | 10 | 12 | 18 | 118 |
| A3 | 6 | 10 | 16 | 13 | 7 | 16 | 155 |
| A4 | 9 | 15 | 15 | 8 | 18 | 7 | 164 |
| A5 | 8 | 16 | 14 | 5 | 15 | 9 | 105 |
| Потребности | 148 | 112 | 136 | 198 | 100 | 168 |  |

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.

∑a = 173 + 118 + 155 + 164 + 105 = 715

∑b = 148 + 112 + 136 + 198 + 100 + 168 = 862

Как видно, суммарная потребность груза в пунктах назначения **превышает** запасы. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Чтобы получить **закрытую** модель, введем дополнительную (фиктивную) базу с запасом груза, равным 147 (715—862).

Занесем исходные данные в распределительную таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Запасы |
| A1 | 17 | 7 | 11 | 8 | 16 | 6 | 173 |
| A2 | 15 | 5 | 13 | 10 | 12 | 18 | 118 |
| A3 | 6 | 10 | 16 | 13 | 7 | 16 | 155 |
| A4 | 9 | 15 | 15 | 8 | 18 | 7 | 164 |
| A5 | 8 | 16 | 14 | 5 | 15 | 9 | 105 |
| **A6** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **147** |
| Потребности | 148 | 112 | 136 | 198 | 100 | 168 |  |

**Этап I. Поиск первого опорного плана**.

1. Используя *метод наименьшей стоимости*, построим первый опорный план транспортной задачи.

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую, и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел ai, или bj.

Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя.

Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Искомый элемент равен c22=5. Для этого элемента запасы равны 118, потребности 112. Поскольку минимальным является 112, то вычитаем его.

x22 = min(118,112) = 112.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 17 | x | 11 | 8 | 16 | 6 | 173 |
| 15 | **5** | 13 | 10 | 12 | 18 | **118 - 112 = 6** |
| 6 | x | 16 | 13 | 7 | 16 | 155 |
| 9 | x | 15 | 8 | 18 | 7 | 164 |
| 8 | x | 14 | 5 | 15 | 9 | 105 |
| 0 | x | 0 | 0 | 0 | 0 | 147 |
| 148 | **112 - 112 = 0** | 136 | 198 | 100 | 168 |  |

Искомый элемент равен c54=5. Для этого элемента запасы равны 105, потребности 198. Поскольку минимальным является 105, то вычитаем его.

x54 = min(105,198) = 105.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 17 | x | 11 | 8 | 16 | 6 | 173 |
| 15 | 5 | 13 | 10 | 12 | 18 | 6 |
| 6 | x | 16 | 13 | 7 | 16 | 155 |
| 9 | x | 15 | 8 | 18 | 7 | 164 |
| x | x | x | **5** | x | x | **105 - 105 = 0** |
| 0 | x | 0 | 0 | 0 | 0 | 147 |
| 148 | 0 | 136 | **198 - 105 = 93** | 100 | 168 |  |

Искомый элемент равен c16=6. Для этого элемента запасы равны 173, потребности 168. Поскольку минимальным является 168, то вычитаем его.

x16 = min(173,168) = 168.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 17 | x | 11 | 8 | 16 | **6** | **173 - 168 = 5** |
| 15 | 5 | 13 | 10 | 12 | x | 6 |
| 6 | x | 16 | 13 | 7 | x | 155 |
| 9 | x | 15 | 8 | 18 | x | 164 |
| x | x | x | 5 | x | x | 0 |
| 0 | x | 0 | 0 | 0 | x | 147 |
| 148 | 0 | 136 | 93 | 100 | **168 - 168 = 0** |  |

Искомый элемент равен c31=6. Для этого элемента запасы равны 155, потребности 148. Поскольку минимальным является 148, то вычитаем его.

x31 = min(155,148) = 148.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | 11 | 8 | 16 | 6 | 5 |
| x | 5 | 13 | 10 | 12 | x | 6 |
| **6** | x | 16 | 13 | 7 | x | **155 - 148 = 7** |
| x | x | 15 | 8 | 18 | x | 164 |
| x | x | x | 5 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | 0 | 0 | x | 147 |
| **148 - 148 = 0** | 0 | 136 | 93 | 100 | 0 |  |

Искомый элемент равен c35=7. Для этого элемента запасы равны 7, потребности 100. Поскольку минимальным является 7, то вычитаем его.

x35 = min(7,100) = 7.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | 11 | 8 | 16 | 6 | 5 |
| x | 5 | 13 | 10 | 12 | x | 6 |
| 6 | x | x | x | **7** | x | **7 - 7 = 0** |
| x | x | 15 | 8 | 18 | x | 164 |
| x | x | x | 5 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | 0 | 0 | x | 147 |
| 0 | 0 | 136 | 93 | **100 - 7 = 93** | 0 |  |

Искомый элемент равен c14=8. Для этого элемента запасы равны 5, потребности 93. Поскольку минимальным является 5, то вычитаем его.

x14 = min(5,93) = 5.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | **8** | x | 6 | **5 - 5 = 0** |
| x | 5 | 13 | 10 | 12 | x | 6 |
| 6 | x | x | x | 7 | x | 0 |
| x | x | 15 | 8 | 18 | x | 164 |
| x | x | x | 5 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | 0 | 0 | x | 147 |
| 0 | 0 | 136 | **93 - 5 = 88** | 93 | 0 |  |

Искомый элемент равен c44=8. Для этого элемента запасы равны 164, потребности 88. Поскольку минимальным является 88, то вычитаем его.

x44 = min(164,88) = 88.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 8 | x | 6 | 0 |
| x | 5 | 13 | x | 12 | x | 6 |
| 6 | x | x | x | 7 | x | 0 |
| x | x | 15 | **8** | 18 | x | **164 - 88 = 76** |
| x | x | x | 5 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | x | 0 | x | 147 |
| 0 | 0 | 136 | **88 - 88 = 0** | 93 | 0 |  |

Искомый элемент равен c25=12. Для этого элемента запасы равны 6, потребности 93. Поскольку минимальным является 6, то вычитаем его.

x25 = min(6,93) = 6.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 8 | x | 6 | 0 |
| x | 5 | x | x | **12** | x | **6 - 6 = 0** |
| 6 | x | x | x | 7 | x | 0 |
| x | x | 15 | 8 | 18 | x | 76 |
| x | x | x | 5 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | x | 0 | x | 147 |
| 0 | 0 | 136 | 0 | **93 - 6 = 87** | 0 |  |

Искомый элемент равен c43=15. Для этого элемента запасы равны 76, потребности 136. Поскольку минимальным является 76, то вычитаем его.

x43 = min(76,136) = 76.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 8 | x | 6 | 0 |
| x | 5 | x | x | 12 | x | 0 |
| 6 | x | x | x | 7 | x | 0 |
| x | x | **15** | 8 | x | x | **76 - 76 = 0** |
| x | x | x | 5 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | x | 0 | x | 147 |
| 0 | 0 | **136 - 76 = 60** | 0 | 87 | 0 |  |

Искомый элемент равен c63=0. Для этого элемента запасы равны 147, потребности 60. Поскольку минимальным является 60, то вычитаем его.

x63 = min(147,60) = 60.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 8 | x | 6 | 0 |
| x | 5 | x | x | 12 | x | 0 |
| 6 | x | x | x | 7 | x | 0 |
| x | x | 15 | 8 | x | x | 0 |
| x | x | x | 5 | x | x | 0 |
| x | x | **0** | x | 0 | x | **147 - 60 = 87** |
| 0 | 0 | **60 - 60 = 0** | 0 | 87 | 0 |  |

Искомый элемент равен c65=0. Для этого элемента запасы равны 87, потребности 87. Поскольку минимальным является 87, то вычитаем его.

x65 = min(87,87) = 87.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 8 | x | 6 | 0 |
| x | 5 | x | x | 12 | x | 0 |
| 6 | x | x | x | 7 | x | 0 |
| x | x | 15 | 8 | x | x | 0 |
| x | x | x | 5 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | x | **0** | x | **87 - 87 = 0** |
| 0 | 0 | 0 | 0 | **87 - 87 = 0** | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Запасы |
| A1 | 17 | 7 | 11 | 8[5] | 16 | 6[168] | 173 |
| A2 | 15 | 5[112] | 13 | 10 | 12[6] | 18 | 118 |
| A3 | 6[148] | 10 | 16 | 13 | 7[7] | 16 | 155 |
| A4 | 9 | 15 | 15[76] | 8[88] | 18 | 7 | 164 |
| A5 | 8 | 16 | 14 | 5[105] | 15 | 9 | 105 |
| A6 | 0 | 0 | 0[60] | 0 | 0[87] | 0 | 147 |
| Потребности | 148 | 112 | 136 | 198 | 100 | 168 |  |

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность потребителей удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 11, а должно быть m + n - 1 = 11. Следовательно, опорный план является *невырожденным*.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

F(x) = 8∙5 + 6∙168 + 5∙112 + 12∙6 + 6∙148 + 7∙7 + 15∙76 + 8∙88 + 5∙105 + 0∙60 + 0∙87 = 4986

**Этап II. Улучшение опорного плана**.

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.

u1 + v4 = 8; 0 + v4 = 8; v4 = 8

u4 + v4 = 8; 8 + u4 = 8; u4 = 0

u4 + v3 = 15; 0 + v3 = 15; v3 = 15

u6 + v3 = 0; 15 + u6 = 0; u6 = -15

u6 + v5 = 0; -15 + v5 = 0; v5 = 15

u2 + v5 = 12; 15 + u2 = 12; u2 = -3

u2 + v2 = 5; -3 + v2 = 5; v2 = 8

u3 + v5 = 7; 15 + u3 = 7; u3 = -8

u3 + v1 = 6; -8 + v1 = 6; v1 = 14

u5 + v4 = 5; 8 + u5 = 5; u5 = -3

u1 + v6 = 6; 0 + v6 = 6; v6 = 6

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=14 | v2=8 | v3=15 | v4=8 | v5=15 | v6=6 |
| u1=0 | 17 | 7 | 11 | 8[5] | 16 | 6[168] |
| u2=-3 | 15 | 5[112] | 13 | 10 | 12[6] | 18 |
| u3=-8 | 6[148] | 10 | 16 | 13 | 7[7] | 16 |
| u4=0 | 9 | 15 | 15[76] | 8[88] | 18 | 7 |
| u5=-3 | 8 | 16 | 14 | 5[105] | 15 | 9 |
| u6=-15 | 0 | 0 | 0[60] | 0 | 0[87] | 0 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj < cij

(1;2): 0 + 8 > 7; ∆12 = 0 + 8 - 7 = 1 > 0

(1;3): 0 + 15 > 11; ∆13 = 0 + 15 - 11 = 4 > 0

(4;1): 0 + 14 > 9; ∆41 = 0 + 14 - 9 = **5 > 0**

(5;1): -3 + 14 > 8; ∆51 = -3 + 14 - 8 = 3 > 0

max(1,4,5,3) = 5

Выбираем максимальную оценку свободной клетки **(4;1): 9**

Для этого в перспективную клетку (4;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Запасы |
| 1 | 17 | 7 | 11 | 8[5] | 16 | 6[168] | 173 |
| 2 | 15 | 5[112] | 13 | 10 | 12[6] | 18 | 118 |
| 3 | 6[148][-] | 10 | 16 | 13 | 7[7][+] | 16 | 155 |
| 4 | 9[+] | 15 | 15[76][-] | 8[88] | 18 | 7 | 164 |
| 5 | 8 | 16 | 14 | 5[105] | 15 | 9 | 105 |
| 6 | 0 | 0 | 0[60][+] | 0 | 0[87][-] | 0 | 147 |
| Потребности | 148 | 112 | 136 | 198 | 100 | 168 |  |

Цикл приведен в таблице (4,1 → 4,3 → 6,3 → 6,5 → 3,5 → 3,1).

Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (4, 3) = 76. Прибавляем 76 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 76 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Запасы |
| A1 | 17 | 7 | 11 | 8[5] | 16 | 6[168] | 173 |
| A2 | 15 | 5[112] | 13 | 10 | 12[6] | 18 | 118 |
| A3 | 6[72] | 10 | 16 | 13 | 7[83] | 16 | 155 |
| A4 | 9[76] | 15 | 15 | 8[88] | 18 | 7 | 164 |
| A5 | 8 | 16 | 14 | 5[105] | 15 | 9 | 105 |
| A6 | 0 | 0 | 0[136] | 0 | 0[11] | 0 | 147 |
| Потребности | 148 | 112 | 136 | 198 | 100 | 168 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.

u1 + v4 = 8; 0 + v4 = 8; v4 = 8

u4 + v4 = 8; 8 + u4 = 8; u4 = 0

u4 + v1 = 9; 0 + v1 = 9; v1 = 9

u3 + v1 = 6; 9 + u3 = 6; u3 = -3

u3 + v5 = 7; -3 + v5 = 7; v5 = 10

u2 + v5 = 12; 10 + u2 = 12; u2 = 2

u2 + v2 = 5; 2 + v2 = 5; v2 = 3

u6 + v5 = 0; 10 + u6 = 0; u6 = -10

u6 + v3 = 0; -10 + v3 = 0; v3 = 10

u5 + v4 = 5; 8 + u5 = 5; u5 = -3

u1 + v6 = 6; 0 + v6 = 6; v6 = 6

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=9 | v2=3 | v3=10 | v4=8 | v5=10 | v6=6 |
| u1=0 | 17 | 7 | 11 | 8[5] | 16 | 6[168] |
| u2=2 | 15 | 5[112] | 13 | 10 | 12[6] | 18 |
| u3=-3 | 6[72] | 10 | 16 | 13 | 7[83] | 16 |
| u4=0 | 9[76] | 15 | 15 | 8[88] | 18 | 7 |
| u5=-3 | 8 | 16 | 14 | 5[105] | 15 | 9 |
| u6=-10 | 0 | 0 | 0[136] | 0 | 0[11] | 0 |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.

Минимальные затраты составят: F(x) = 8∙5 + 6∙168 + 5∙112 + 12∙6 + 6∙72 + 7∙83 + 9∙76 + 8∙88 + 5∙105 + 0∙136 + 0∙11 = 4606

**Анализ оптимального плана**.

Из 1-го склада необходимо груз направить к 4-у потребителю (5 ед.), к 6-у потребителю (168 ед.)

Из 2-го склада необходимо груз направить к 2-у потребителю (112 ед.), к 5-у потребителю (6 ед.)

Из 3-го склада необходимо груз направить к 1-у потребителю (72 ед.), к 5-у потребителю (83 ед.)

Из 4-го склада необходимо груз направить к 1-у потребителю (76 ед.), к 4-у потребителю (88 ед.)

Из 5-го склада необходимо весь груз направить к 4-у потребителю.

Потребность 3-го потребителя остается неудовлетворенной на 136 ед.

Оптимальный план является вырожденным, так как базисная переменная x63=0.

Потребность 5-го потребителя остается неудовлетворенной на 11 ед.

Оптимальный план является вырожденным, так как базисная переменная x65=0.