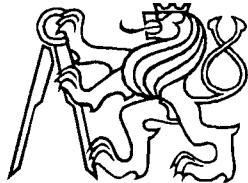
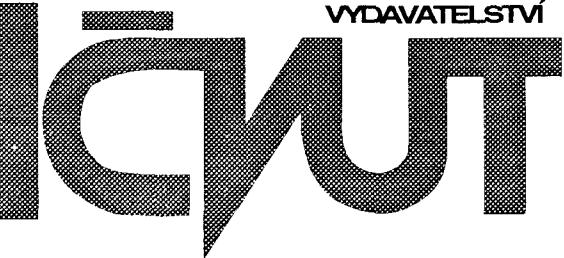


Fakulta  
strojní

VYDAVATELSTVÍ



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE



# MECHANIKA TEKUTIN

Prof. Ing. Jan Ježek, DrSc.

Ing. Blanka Váradiová, CSc.

Ing. Josef Adamec, CSc.

Prof. Ing. Jan Ježek, DrSc.  
Ing. Blanka Váradiová, CSc.  
Ing. Josef Adamec, CSc.

# MECHANIKA TEKUTIN

2000  
Vydavatelství ČVUT

## PŘEDMLUVA

V každém vědním oboru roste rok od roku množství poznatků. Protože bylo obtížné seznámit studenty se současným stavem oboru v jediném předmětu základního studia, zavedla se při reformě studia dvoustupňová výuka většiny základních předmětů a tedy i mechaniky tekutin. Není to novinka, neboť již dříve řada specializací, jako např. technika prostředí (větrání, topení, klimatizace), spalovací motory, vodní stroje, chemické a potravinářské stroje a j., měla ve vyšších ročnících nadstavbové předměty. V základním studiu se pak mohou probrat důkladně základy předmětu, tak, aby posluchač vnikl do fyzikální podstaty jevů. Nová látka je vykládána jako aplikace obecně platných fyzikálních zákonů, s nimiž se student seznámil v předchozím studiu. Přitom se poukazuje na souvislost s ostatními předměty, jako např. fyzikou, mechanikou atd. V nadstavbových předmětech, ve vyšších ročnících, se pak z ohromného množství látky vyberou jen partie důležité v příslušném oboru, přičemž se zpravidla používá i jiného matematického aparátu, např. tenzorový počet.

Tato skripta jsou určena pro předmět „Mechanika tekutin“ přednášený v jednom semestru základního studia v rozsahu tří hodin přednášek a dvou hodin cvičení týdně. Skripta jsou úvodem do mechaniky tekutin a klademe si za cíl, aby student sám uměl správně aplikovat základní fyzikální zákony, jako např. zákony zachování hmotnosti, hybnosti a energie i na pohyb tekutin. Zvládne-li základy mechaniky tekutin tak, že umí správně aplikovat základní zákony jako rovnici kontinuity, Bernoulliovu rovnici atd. v nejrůznějších příkladech, je pravděpodobné, že se i v praxi dokáže vypořádat s problémy, které nelze řešit podle normy či osvědčených a vyzkoušených podkladů. A to by mělo být tou pravou náplní práce inženýra - neustále hledat nové, dokonalejší, účinnější a ekonomičtější řešení. Solidní znalost základů navíc usnadní orientaci ve stále narůstajícím množství informací, umožní mu tyto informace samostatně, kriticky a fundovaně hodnotit a v nové situaci volit nejsprávnější resp. nevhodnější postup výpočtu.

Při výběru a volbě látky jsme vycházeli ze současných potřeb znalostí strojního inženýra. Neuvádíme však návody na výpočet např. hydraulických strojů ani různé praktické informativní údaje jako např. optimální rychlosti v potrubí ap., neboť se domníváme, že tato látka patří do monografií nebo příruček určených pro konstruktéry, u nás vydávaných jako tzv. „Technický průvodce“. Rovněž látku, jíž je nutno se učit nazepamět' (různé rovnice, vzorce a j.) jsme se snažili omezit na minimum. Dále jsme se snažili oprostit obsah od složitého matematického aparátu, který je nezbytný při výkladu teoretické mechaniky tekutin v nadstavbovém předmětu. Neuvádíme tu proto základní rovnice mechaniky tekutin v diferenciálním tvaru pro různé případy proudění jako např. Navierovy - Stokesovy rovnice, Prandtlové rovnice mezní vrstvy nebo Reynoldsovy rovnice pro turbulentní proudění. Důvodů pro jejich vypuštění bylo několik, např., že jejich poměrně dlouhé odvozování odvádí pozornost studenta od fyzikální stránky proudění a při zkoušce se soustředí na jen na matematickou stránku - formální odvození, nebo pouhé naučení výsledné rovnice nazepamět'. Řešení těchto rovnic je velmi obtížné a ve cvičeních v základním studiu se neprovádí, neboť studenti se během základního studia vůbec neseznámí s řešením parciálních diferenciálních rovnic. Domníváme se proto, že je zcela na místě jejich odvození i aplikaci na různé případy uvést až v nadstavbovém předmětu.

Při výkladu jsme postupovali od jednoduššího ke složitějšímu. Tato volba ovšem není jednoznačná. Lze např. postupovat takto: uvažovat nejprve jen model nevazké tekutiny a pro něj řešit nejprve stacionární proudění od jednorozměrných po prostorová a pak pro nestacionární proudění od jednorozměrných až po prostorová. Totéž pořadí pak lze volit i pro vazké tekutiny. Pro techniky se nám zdálo vhodnější postupovat od jednorozměrného

proudění nevazké a vazké tekutiny nejprve stacionárního a pak nestacionárního proudění k proudění vícerozměrnému. V této části se úmyslně dopouštíme určité nesystematicnosti, neboť laminární a turbulentní proudění v potrubí (což je případ prostorového proudění vazké tekutiny) představuje rovinnému potenciálnímu proudění. Důvod je ryze praktický. Proudění vazké tekutiny potrubím má pro inženýra velký praktický význam a měl by si ze studia odnést reálnou představu o rozložení rychlostí a tlaků v potrubí a to i tehdy, je-li nutno z různých důvodů výuku v semestru zkrátit. Rovinné potenciální proudění je obsaženo v téměř každém dalším stupni výuky mechaniky tekutin, je-li pro obor nutné.

Uvědomujeme si, že naše práce není prosta nedostatků a budeme vděčni všem za iniciativní upozornění, vedoucí k jejich odstranění.

Závěrem autoři děkují všem, kteří nám pomáhali a to prof. Ing. J. Nožičkovi, DrSc., prof. Ing. V. Brožovi, CSc. a doc. Ing. K. Bradovi, CSc. za pečlivé pročtení rukopisu a řadu podnětných připomínek a dále Ivanu Pressovi, posluchači 4. ročníku za pečlivé provedení obrázků a předloh pro tisk.

Praha 1. června 1982

Jan Ježek  
Blanka Váradiová

### PŘEDMLUVA KE 3. VYDÁNÍ

První vydání vyšlo asi před patnácti lety a od té doby se mnoho změnilo. V té době u nás prakticky nebylo možno řešit úlohy mechaniky tekutin na počítačích prostě proto, že je mělo k dispozici jen několik výpočetních středisek nebo ústavů v celé republice. Programování bylo obtížné, přístup k počítačům téměř žádný. V současné době se složitější úlohy řeší výhradně na počítačích a k dispozici jsou i komerční řešiče např. FLUENT ap. Uživatel se pak seznámuje s návodem na užívání softwaru aniž by byl nucen se zabývat základními rovnicemi mechaniky tekutin, jež jsou řešeny. Má-li posoudit zda získané výsledky jsou reálné nebo nereálné teprve pak zjišťuje, že mu chybí základní znalosti o vlivu jednotlivých sil atd. Proto byla přidána nová kapitola pojednávající o základních diferenciálních rovnicích mechaniky tekutin: Navierových - Stokesových rovnicích. Zmenšil se i rozsah výukových hodin a mechanika tekutin byla převedena do druhého ročníku. Všechny tyto okolnosti nás vedly k přepracování skript. Úpravy nejsou zásadního rázu, stále se klade důraz na jasný výklad, aby studenti pochopili fyzikální podstatu mechaniky tekutin. Proto jsou na konci většiny kapitol připojeny ilustrační příklady, kde se aplikují odvozené vztahy. Je žádoucí se nad úlohami a získanými výsledky zamyslet. Chcete-li u zkoušky a pak i v životě uspět, nestačí naučit se nazpaměť různé vzorečky a rovnice, ale je důležité umět a vědět kdy a jak je správně použít. Těchto pár příkladů však nestačí k osvojení probírané látky, s dalšími příklady se můžete seznámit ve skriptu: J. Adamec, M. Lísal, B. Váradiová: Mechanika tekutin - Sbírka příkladů. Některé partie, jež mají rozšířit základní znalosti, jsou vytiskeny odlišným typem písma. Při práci na tomto vydání byl kolektiv autorů rozšířen.

Praha, prosinec 1996

Jan Ježek  
Blanka Váradiová  
Josef Adamec

## OBSAH

PŘEDMLUVA	3
OBSAH	5
SYMBOLIKA	7
1. ÚVOD	10
2. ZÁKLADNÍ POJMY	11
2.1 Tekutina	11
2.2 Stavové veličiny	11
2.3 Fyzikální vlastnosti tekutin	13
3. HYDROSTATIKA	19
3.1 Hydrostatický tlak	19
3.2 Eulerova rovnice hydrostatiky	20
3.3 Hladinové plochy	22
3.4 Rozložení tlaku v tekutině	22
4. TLAKOVÉ SÍLY	31
4.1 Dno nádoby	31
4.2 Rovinné stěny	31
4.3 Zakřivené stěny	33
4.4 Hydrostatický vztlak	34
5. POTENCIÁL INTENZITY HMOTOVÝCH SIL	39
HYDRODYNAMIKA	43
6. STACIONÁRNÍ JEDNOROZMĚRNÉ PROUDĚNÍ IDEÁLNÍ NESTLAČITELNÉ TEKUTINY	44
6.1 Základní rovnice	44
6.2 Měření rychlosti	49
6.3 Měření průtoků	50
6.4 Stacionární proudění nevazké tekutiny potrubím	50
7. VÝTOK Z NÁDOB, PŘEPADY	57
7.1 Stacionární výtok kapaliny malým otvorem	57
7.2 Metoda korekcí	57
7.3 Nátrubky	58
7.4 Výtok zatopeným otvorem	59
7.5 Výtok velkým otvorem	59
7.6 Přepady	60
8. STACIONÁRNÍ PROUDĚNÍ VAZKÉ TEKUTINY POTRUBÍM	65
8.1 Základní rovnice pro vazké tekutiny	66
8.2 Hydraulické ztráty	67
8.3 Třecí ztráty v potrubí	69
8.4 Místní ztráty	72
9. NESTACIONÁRNÍ PROUDĚNÍ	79
9.1 Diferenciální tvary základních rovnic	79
9.2 Kvazistacionární proudění	81
9.3 Vynucené nestacionární proudění	83

9.4	Samovolné nestacionární proudění	84
9.5	Zavírání potrubí	87
10.	<b>RELATIVNÍ PRŮTOK</b>	94
10.1	Základní rovnice relativního průtoku	94
10.2	Přímočarý unášivý pohyb	94
10.3	Rotační unášivý pohyb	95
11.	<b>DYNAMICKÉ ÚČINKY PROUDU TEKUTINY</b>	101
11.1	Desky v klidu	101
11.2	Pohybující se desky	102
11.3	Optimální otáčky Peltonovy turbíny	103
11.4	Uzavřené kanály	104
11.5	Propulse	104
11.6	Zachování momentu hybnosti - točivosti	105
12.	<b>LAMINÁRNÍ PROUDĚNÍ</b>	108
12.1	Trubice kruhového průřezu	108
12.2	Paralelní desky	110
12.3	Stékání po stěně	112
12.4	Klínová mezera	113
13.	<b>TURBULENTNÍ PROUDĚNÍ</b>	115
13.1	Vznik turbulence	115
13.2	Charakteristiky turbulentního proudění	115
13.3	Matematický popis turbulentního proudění	117
14.	<b>OBTÉKÁNÍ TĚLES</b>	121
14.1	Mezní vrstva	121
14.2	Odpor těles $F_x$	124
14.3	Vztah $F_y$	127
14.4	Lopatkové mříže	128
15.	<b>FYZIKÁLNÍ PODOBNOST A TEORIE MODELOVÁNÍ</b>	129
15.1	Mechanická podobnost při proudění tekutin	129
15.2	Odvození podobnostních čísel z rovnic	130
15.3	Dimenzionální analýza	131
15.4	Úplná a částečná podobnost	133
16.	<b>ROVINNÉ POTENCIÁLNÍ PROUDĚNÍ</b>	134
16.1	Základní rovnice	134
16.2	Proudová funkce $\Psi(x,y)$	136
16.3	Rychlostní potenciál $\Phi(x,y)$	137
16.4	Základní případy potenciálního proudění	138
16.5	Skládání proudění	139
17	<b>SOUSTAVA ROVNIC PRO NEWTONSKÉ NESTLAČITENÉ TEKUTINY</b>	144
17.1	Rovnice kontinuity	144
17.2	Navierovy - Stokesovy rovnice	145
	<b>LITERATURA</b>	150

## SYMBOLIKA

$a$	(m/s <sup>2</sup> )	zrychlení
$a$	(m/s)	rychllosť zvuku
$b$	(m)	šířka, rozpětí
$c$	(m/s)	absolutní rychlosť
$c_p$	(J/kgK)	měrná tepelná kapacita při stálém tlaku
$c_p$	(1)	tlakový součinitel
$c_v$	(J/kgK)	měrná tepelná kapacita při stálém objemu
$d$	(m)	průměr
$d_h$	(m)	hydraulický průměr
$e$	(J/kg)	měrná energie
$g$	(m/s <sup>2</sup> )	gravitační zrychlení
$h$	(m)	výška, hloubka
$k$	(m)	absolutní drsnost
$l$	(m)	délka
$m$	(kg)	hmotnost
$\dot{m}$	(kg/s)	hmotnostní tok
$o$	(m)	smočený obvod
$p$	(Pa)	měrný tlak, přetlak
$p_a$	(Pa)	absolutní tlak
$p_b$	(Pa)	barometrický tlak
$p_d$	(Pa)	dynamický tlak
$p_h$	(Pa)	hydrostatický tlak
$p_0$	(Pa)	tlak okolí, počáteční tlak
$p_s$	(Pa)	statický tlak
$q$	(Pa)	kinetický tlak
$q$	(J/kg)	měrné teplo
$r$	(m)	radiusvektor, poloměr
$r_h$	(m)	hydraulický poloměr
$s$	(1)	korekční součinitel dynamického tlaku
$s$	(m)	dráha, vzdálenost
$t$	(s)	čas
$u$	(n/s)	obvodová rychlosť
$u$	(J/kg)	měrná vnitřní energie
$v$	(m <sup>3</sup> /kg)	měrný objem
$v$	(m/s)	rychllosť, relativní rychlosť
$w$	(J/kg)	měrná práce
$x$	(m)	souřadnice
$y$	(m)	souřadnice
$z$	(m)	souřadnice

$A$	(Pas)	zdánlivá viskozita
$A$	(m <sup>2</sup> )	plocha
$D_{xy}$	(m <sup>4</sup> )	deviační moment plochy k osám xy
$E$	(J)	energie
$Eu$	(1)	Eulerovo číslo
$F$	(N)	síla
$Fr$	(1)	Froudeho číslo
$G$	(N)	tíha

$H$	(m)	výška, hloubka
$H$	(kgm/s)	hybnost
$\dot{H}$	(N)	tok hybnosti
$I_y$	(m <sup>4</sup> )	kvadratický moment plochy k ose $y$
$K$	(Pa)	modul objemové pružnosti
$K$	(1)	konstanta
$K$	(N/kg)	intenzita hmotových sil (vnější zrychlení)
$L$	(kgm <sup>2</sup> /s)	moment hybnosti - točivost
$M$	(Nm)	moment síly
$P$	(W)	výkon
$Q$	(J)	teplo
$Q$	(m <sup>2</sup> /s)	průtok křivkou při roviném potenciálním proudění
$R$	(m)	poloměr
$Re$	(1)	Reynoldsovo číslo
$Sh$	(1)	Strouhalovo číslo
$S_y$	(m <sup>3</sup> )	lineární moment plochy k ose $y$
$T$	(°C,K)	teplota
$U$	(J)	vnitřní energie
$U$	(m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	potenciál intenzity hmotových sil
$V$	(m <sup>3</sup> )	objem
$\dot{V}, \dot{Q}$	(m <sup>3</sup> /s)	objemový tok
$W$	(J)	vnější práce

$\alpha$	(1)	úhel,
$\alpha$	(1)	kontrakční součinitel
$\beta$	(1)	úhel
$\beta$	(1/K)	součinitel objemové roztažnosti
$\delta$	(1/K)	stlačitelnost
$\delta$	(m)	tloušťka mezní vrstvy
$\varepsilon$	(1)	intenzita turbulence
$\eta$	(1)	bezrozměrná souřadnice
$\eta$	(1)	účinnost
$\eta$	(Pas)	dynamická viskozita
$\varphi$	(1)	úhel
$\varphi$	(1)	rychlostní součinitel
$\kappa$	(1)	Coriolisova konstanta
$\kappa$	(1)	poměr měrných telepných kapacit $c_p/c_v$
$\lambda$	(1)	součinitel třecích ztrát
$\lambda$	(1)	modul, měřítko
$\mu$	(1)	výtokový součinitel
$\rho$	(kg/m <sup>3</sup> )	hustota
$\sigma$	(N/m)	povrchové napětí
$\tau$	(Pa)	tečné napětí
$\nu$	(m <sup>2</sup> /s)	kinematická viskozita
$\omega$	(1/s)	úhlová rychlosť
$\psi$	(1)	úhel
$\zeta$	(1)	ztátový součinitel

$\Phi$	(1)	bezrozměrná rychlosť
$\Phi$	(m <sup>2</sup> /s)	rychlostní potenciál
$\Gamma$	(m <sup>2</sup> /s)	cirkulace
$\Pi$	(1)	bezrozměrný argument
$\Theta$	(1)	úhel
$\Psi$	(m <sup>2</sup> /s)	proudová funkce

Za některými kapitolami jsou uvedeny:

a) pod titulkem **Víte, že** různé zajímavosti a to na stránkách:

16, 27, 29, 35, 56, 61, 64, 78, 100, 107, 114, 128, 133, 143, 148, 149

b) obsahle komentované příklady, někdy trochu neobvyklého zadání, ilustrující jak široké jsou možnosti aplikace znalostí mechaniky tekutin:

	Strana
P 2.1 Výška atmosféry při $\rho = \text{konst.}$	17
P 2.2 Kinematická viskozita krve	18
P 3.1 Tlak vody na dně moře	28
P 3.2 Tlak vzduchu ve výšce 8,4 km	30
P 4.1 Síla na zátkovou tyč licí pánve	36
P 4.2 Práce potřebná k posuvu pistu	37
P 5.1 Potenciál hmotových sil při rotaci nádoby	40
P 5.2 Teoretické zploštění Země	41
P 6.1 Dostřík vodního paprsku	52
P 6.2 Měření rychlosti v sání ventilátoru	53
P 6.3 Perpetuum mobile	54
P 7.1 Doba vyprázdnění sudu	62
P 7.2 Doba vyprázdnění licí pánve	63
P 8.1 Hltnost Peltonovy turbíny	75
P 8.2 Větrání důlní chodby	76
P 9.1 Stoupení tlaku při uzavírání potrubí	92
P 10.1 Směr větru v atmosféře	99
P 17.1 Směr geostrofického větru	149

# MECHANIKA TEKUTIN

## 1. ÚVOD

Mechanika tekutin je částí fyziky, zabývající se pohybem a rovnováhou tekutin za účinku vnějších sil. V technické praxi slouží mechanika tekutin ke stanovení vzájemného účinku tuhých stěn na tekutiny a naopak i dalších úkolů jako např. měření rychlosti a průtoku tekutin atd. Jejím úkolem je vysvětlovat jevy vznikající v tekutinách pomocí fyzikálních zákonů a předvídat chování tekutin v určitých podmínkách, tj. stanovit rozložení tlaků, hustoty, teploty, rychlostí a případně změny těchto veličin s časem v různých místech uvnitř tekutiny. Na základě těchto znalostí pak lze poskytnout podklady konstruktérům.

Mechaniku tekutin lze rozdělit podle různých hledisek např. na:

1. statiku tekutin,
2. kinematiku tekutin,
3. dynamiku tekutin.

Podle druhu tekutin na:

1. mechaniku kapalin tj. hydromechaniku,
2. mechaniku plynů tj. aeromechaniku,
3. magneto- aero- hydromechaniku elektricky vodivých tekutin,
4. mechaniku vícefázových tekutin.

Podle vyšetřovacích metod na:

1. teoretickou,
2. experimentální.

S mechanikou tekutin a aplikací jejich zákonů se setkáváme nejen v praxi strojního inženýra ve strojírenství, dopravě, energetice, ale i jiných oborech jako chemickém, papírenském, potravinářském, sklářském, báňském a hutním průmyslu, ve stavebnictví, zemědělství, medicíně, biologii, hydrologii, meteorologii, astrofyzice a celé řadě dalších oborů.

V praxi se setkáváme s prouděním tekutin, jejichž vlastnosti se mohou značně lišit zvláště tehdy, nacházejí-li se v extrémně vysokých či nízkých teplotách nebo tlacích. V chemickém a potravinářském průmyslu je řada látek, které se i za normálního tlaku a teploty chovají jinak než voda nebo vzduch, jejichž chování považujeme za normální. Některé tekutiny se vlastnostmi podobají více elastickým či plastickým látkám, tak výrazně je jejich anomální chování. Studiem proudění takových látek tzv. newtonských tekutin se zabývá reologie.

V těchto skriptech se budeme zabývat převážně prouděním nestlačitelných newtonských tekutin.

## 2. ZÁKLADNÍ POJMY

### 2.1 Tekutina

Tekutina je látka, která se účinkem vnějších sil nevratně deformuje. Nemá vlastní tvar. Je složena z molekul, ale v našem případě nedbáme molekulární struktury a budeme tekutinu považovat za spojité prostředí - kontinuum, abychom mohli použít k řešení úloh mechaniky tekutin diferenciálního a integrálního počtu. Za působení i nepatrých tečných sil se částice tekutiny snadno uvedou do pohybu (výjimkou jsou některé nenewtonské tekutiny).

Tekutiny dělíme na:

1. nestlačitelné, tj. takové, které za působení rostoucího tlaku mění jen málo svůj objem, sem patří kapaliny, jež jsou prakticky nestlačitelné. Malé objemy kapalin tvoří kapky. Zaujmají tvar nádoby, vyplňují její spodní část (s ohledem na výsledné zrychlení, resp. vektor intenzity silového pole) a vytvářejí volnou hladinu.
2. stlačitelné a tedy i rozpínavé, které vyplňují vždy celý objem nádoby. Podle toho, zda jejich stav je blízký či vzdálený bodu zkapalnění, je dělíme na páry a plyny. Společný název užívaný pro oba druhy je vzdušiny.

Vedle stlačitelnosti je další důležitou vlastností tekutin viskozita. Uvažujeme-li obě vlastnosti, pak řešení proudění tekutin vede na řešení soustavy nelineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu tzv. Navierových - Stokesových rovnic. Exaktní řešení lze nalézt jen pro velmi jednoduché případy, jako např. pro paralelní proud. I přibližné řešení - pro všechny ostatní případy - je velmi obtížné a bez použití počítačů je většinou nelze provést. Proto místo s reálnou tekutinou počítáme s určitým matematickým modelem tekutiny, jehož vlastnosti jsou idealizovány (viz předpoklad o spojitém rozložení hmoty). Aby výsledky výpočtu byly pro praxi použitelné, je důležitá volba stupně idealizace tekutiny - modelu. Máme-li na zřeteli viskozitu a stlačitelnost tekutiny můžeme vytvořit tyto čtyři modely:

1. ideální kapalina tj. nevazká nestlačitelná tekutina,
2. ideální plyn tj. nevazká stlačitelná tekutina,
3. vazká kapalina tj. vazká nestlačitelná tekutina,
4. vazký plyn tj. vazká stlačitelná tekutina.

Poslední dva modely bývají také označovány jako reálná kapalina a reálný plyn.

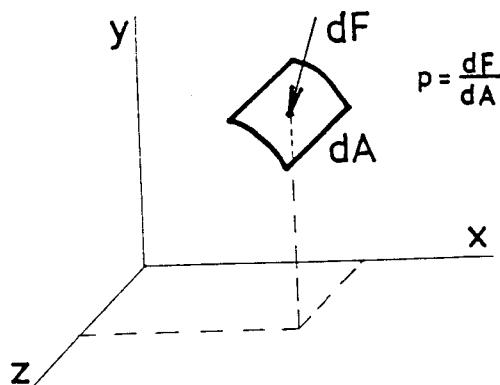
### 2.2 Stavové veličiny

Stav tekutiny nacházející se v rovnováze může být určen tlakem, hustotou a teplotou.

#### a) Měrný tlak $p$

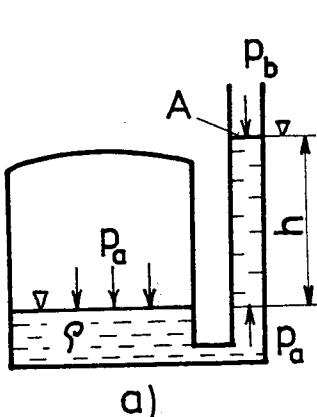
(v praxi zpravidla označován jen tlak)  
je roven poměru elementární tlakové síly  $dF$   
působící kolmo na elementární plošku  $dA$   
(obr. 1):

$$p = \frac{dF}{dA} \quad (\text{Pa}).$$

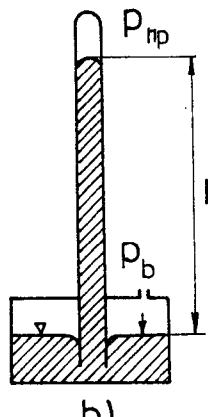


Obr. 1 Stanovení lokální hodnoty měrného tlaku

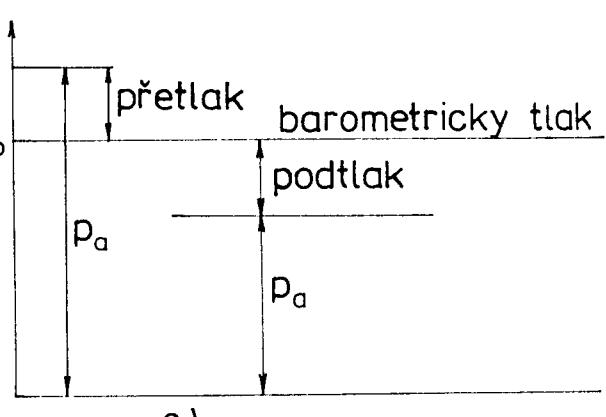
Menší hodnoty tlaků lze měřit pomocí sloupce kapaliny piezometrickou trubicí (obr. 2).



Obr. 2a



Obr. 2b



Obr. 2c

Obr. 2a Měření tlaku piezometrickou trubicí je-li v nádobě tlak větší než je tlak barometrický

Obr. 2b Schéma měření barometrického tlaku  $p_b$  rtuťovým barometrem,  $p_{np}$  je tlak nasycených par

Obr. 2c Absolutní tlak  $p_a$ , přetlak a podtlak se odečítají od barometrického tlaku.

Je-li nad hladinou kapaliny v uzavřené nádobě tlak  $p_a$  větší než barometrický tlak  $p_b$ , působící na hladinu kapaliny v otevřeném konci piezometrické trubice, pak hladina v trubici se ustálí ve výšce  $h$ . Působí-li na kapalinu jen gravitační zrychlení, vytvoří se vodorovná hladina, což je současně geometrické místo bodů se stejným tlakem rovným barometrickému tlaku. Všechny vodorovné roviny budou také izobarické plochy, ale protože na částice níže položené budou působit svou tíhou částice kapaliny nacházející se nad nimi, bude tlak s hloubkou narůstat. Na vodorovné rovině procházející hladinou v nádobě, obr. 2a, je všude tlak roven  $p_a$ , ale současně je tento tlak i v piezometrické trubici v hloubce  $h$  pod hladinou, tj. v místech, kde ji zmíněná vodorovná rovina protíná. Uvolněme si nyní tento sloupec kapaliny. Z rovnováhy sil působících na sloupec kapaliny o výšce  $h$  a o průřezu  $A$  nacházející se v trubici:

$$p_b \cdot A + g\rho h A = p_a \cdot A$$

plyne, že absolutní tlak

$$p_a = p_b + g\rho h, \quad (1)$$

resp. přetlak

$$p = p_a - p_b = g\rho h. \quad (2)$$

Absolutní tlak se odečítá od nulové hodnoty tlaku, přetlak a podtlak se odečítají od barometrického tlaku (obr. 2c). Na obr. 2b je naznačeno měření barometrického tlaku  $p_b$  rtuťovým barometrem: vzduch působí na hladinu rtuti v nádobce manometru tlakem  $p_b$  a vytlačí do evakuované trubice rtuťový sloupec do výše  $h$ . Nad hladinou rtuti v trubici je tlak roven jejímu tlaku nasycených par (viz odst. 2.3.e).

b) Hustota  $\rho$  (měrná hmotnost) je rovna poměru hmotnosti elementární částice tekutiny  $dm$  ku jejímu elementárnímu objemu  $dV$ , obklopujícímu bod v němž hustotu určujeme

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (\text{kg/m}^3).$$

Převratná hodnota hustoty je měrný objem v

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{dV}{dm} \quad (\text{m}^3/\text{kg}).$$

Hustota kapalin se mění s tlakem a teplotou jen nepatrně a budeme ji považovat za konstantní:  $\rho = \text{konst.}$

Hustota plynů je funkcí stavových veličin tj. tlaku  $p$  a teploty  $T$  (v K). Pro její výpočet budeme používat jednoduchou stavovou rovnici ideálního plynu

$$pv = \frac{p}{\rho} = r \cdot T ,$$

kde  $r$  ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) je měrná plynová konstanta, jejíž velikost závisí na druhu plynu.

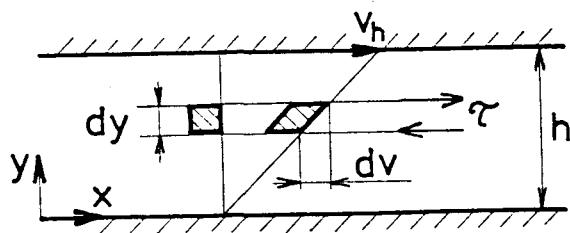
c) Teplota  $T$  ( ${}^\circ\text{C}$ , K). V našem případě budeme proudění považovat vždy za izotermní  $T = \text{konst.}$  Údaj teploty bude sloužit jen pro přesné určení parametrů tekutiny jako je hustota a viskozita.

## 2.3 Fyzikální vlastnosti tekutin

a) Viskoza je schopnost tekutiny přenášet tečná napětí. Je také příčinou odporu proti vzájemnému posunu čistic tekutiny a vzniku tečného napětí  $\tau$  na rozhraní mezi tekutinou a stěnou. Při laminárním proudění newtonských tekutin např. mezi dvěma deskami, obr. 3, platí

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dy}, \quad (\text{Newtonův zákon}) \quad (3)$$

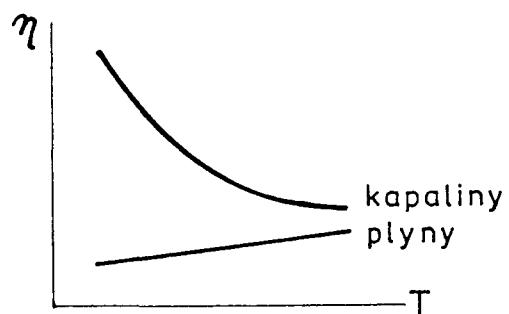
Obr. 3. Tečné napětí vznikající mezi vrstvami newtonské tekutiny, pohybují-li se rozdílnými rychlostmi mezi dvěma deskami.



kde  $\eta$  (Pas) je dynamická viskozita a  $dv/dy$  je rychlosť smykové deformace, při rovinném proudění nazývaná rychlostní gradient. V rovnicích mechaniky tekutin se často vyskytuje poměr dynamické viskozity  $\eta$  dělené hustotou  $\rho$  a nazývá se kinematická viskozita  $v = \eta / \rho$  ( $\text{m}^2/\text{s}$ ). Viskoza je silně závislá na teplotě.

U kapalin s teplotou klesá a u plynů roste, obr. 4.

Obr. 4 Závislost viskozity na teplotě.

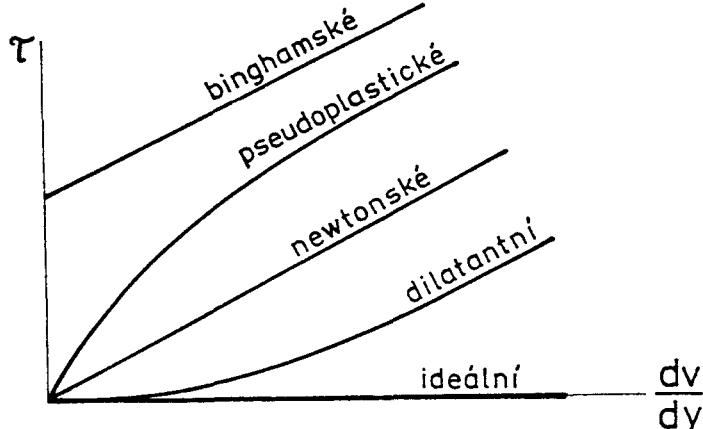


U časově nezávislých nenewtonských tekutin neplatí lineární závislost (3) mezi tečným napětím a rychlostí smykové deformace, jak je ukázáno na obr. 5 pro pseudoplastické, dilatantní a bighamské tekutiny. U časově závislých nenewtonských tekutin tixotropních a reopektních jsou vlastnosti závislé i na čase (délce působení sily) tj. na historii mechanického namáhání. Visko-elastické tekutiny jsou dalším typem nenewtonských tekutin, jež energii dissipují i akumuluji. U nenewtonských tekutin používáme místo Newtonova zákona (3) tzv.

konstitutivních rovnic. Pro smykové toku časově nezávislých nenewtonských tekutin lze např. počítat s obecnějším vztahem

$$\tau = K \left( \frac{dv}{dy} \right)^n + \tau_0$$

kde  $K$  je součinitel konzistence,  $n$  index toku,  $\tau_0$  mezní tečné napětí. U binghamských tekutin  $n = 1$  a  $\tau_0 \neq 0$ , u pseudoplastických  $n < 1$  a  $\tau_0 = 0$  u dilatantních  $n > 1$  a  $\tau_0 = 0$ , (obr. 5).



Obr. 5 Závislost tečného napětí na rychlosti deformace pro různé druhy tekutin.

b) **Stlačitelnost** tekutiny charakterizuje schopnost změny jejího objemu a tím i hustoty  $\rho$  s tlakem. Plyny a páry se vyznačují velkou stlačitelností, zatím co kapaliny lze do tlaků 10 MPa považovat v technické praxi za nestlačitelné. Součinitel stlačitelnosti, nebo krátce stlačitelnost  $\delta$ , závisí na počátečním objemu  $V$  a na rychlosti změny objemu s tlakem  $\partial V / \partial p \neq 0$ :

$$\delta = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T=konst} = \frac{1}{K} \quad (4)$$

kde  $K$  je modul objemové pružnosti.

U plynů, tj. stlačitelných tekutin, jsou hodnoty těchto koeficientů závislé na druhu změny. Ze stavové rovnice ideálního plynu lze např. určit pro izotermickou změnu  $K = p_0$ , kde  $p_0$  je počáteční tlak.

U kapalin, tj. nestlačitelných tekutin, jsou hodnoty  $\delta$  resp.  $K$  značně závislé na množství nerozpustěného plynu v kapalině, tj. na přítomnosti bublinek vzduchu.

Stlačitelnost lze rovněž charakterizovat rychlostí zvuku  $a$ , tj. rychlosť, kterou se ve stlačitelném prostředí šíří nekonečně malé změny tlaku:

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (5)$$

(Uvažujeme změnu izoentropickou, což v tomto případě znamená bez přívodu resp. odvodu tepla).

**Teorie hydromechaniky je jednodušší než teorie aeromechaniky, protože lze zpravidla brát  $\rho = konst.$**  Jsou-li změny tlaku v plynu relativně malé  $\Delta p/p_0 \ll 1$ , budou i změny hustoty malé a v těchto případech lze i pro plyn použít zákony hydromechaniky. Jedná se o případy, kdy za normálních podmínek je rychlosť vzduchu menší než 70 m/s, nebo výška vrstvy vzduchu menší než 100 m. Stlačitelnost kapalin nelze zanedbat v případech, kdy dochází k velkým změnám tlaku, nebo rychlosť, např. ve vstřikovacím potrubí naftových motorů, při náhlém uzavření potrubí, u hydrostatických převodů (hydraulických mechanismů) s pracovními tlaky oleje 40 MPa a vyššími.

c) Teplotní roztažnost tekutin charakterizuje změnu objemu a hustoty tekutiny s teplotou. Součinitel objemové roztažnosti:

$$\beta = \frac{I}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p=konst.} \quad (6)$$

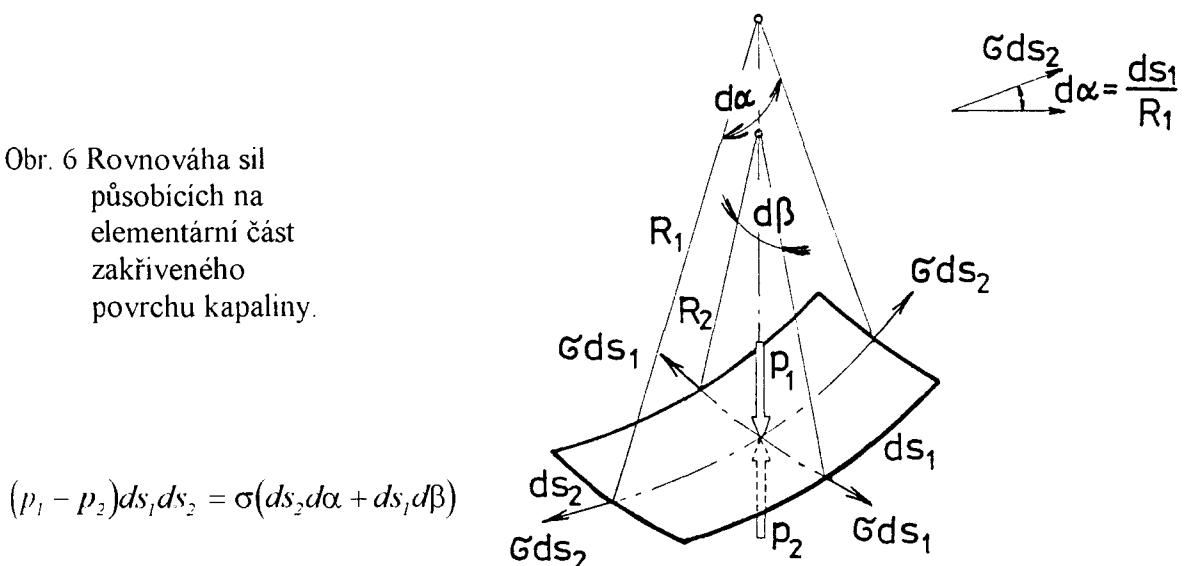
V našem případě se budeme zabývat převážně izotermním prouděním ( $T = \text{konst.}$ ) nestlačitelných tekutin a uvedený vztah bude užíván např. pro korekci na změnu teploty při měření tlaků, kdy lze brát součinitel objemové roztažnosti konstantní.

d) Povrchové napětí  $\sigma$  u kapalin je způsobeno kohézními silami působícími mezi molekulami, jež se snaží zmenšit povrch kapaliny na minimum, jako by na hladině byla tenká pružná membrána. Na zakřiveném povrchu kapaliny pak vzniká rozdíl tlaků, obr. 6, odkud z rovnováhy sil působících na elementární plošku  $ds_1 ds_2$  plyne:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (7)$$

kde  $R_1$  a  $R_2$  jsou poloměry křivosti ve dvou k sobě kolmých rovinách, kolmých k tečné rovině.

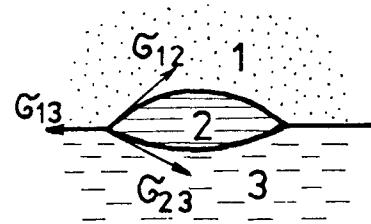
Obr. 6 Rovnováha sil působících na elementární část zakřiveného povrchu kapaliny.



Velikost povrchového napětí je důležitá na rozhraní tekutin, kdy dochází ke styku dvou nebo tří nemísících se tekutin, případně s tuhou stěnou.

Při styku tří tekutin mohou nastat dva případy, buď se na hladině vytvoří „čočka“ druhé kapaliny (mastné oko na polévce), obr. 7, nebo se druhá kapalina rozteče po povrchu první kapaliny a vytvoří velmi tenkou vrstvu (minerální oleje na vodě).

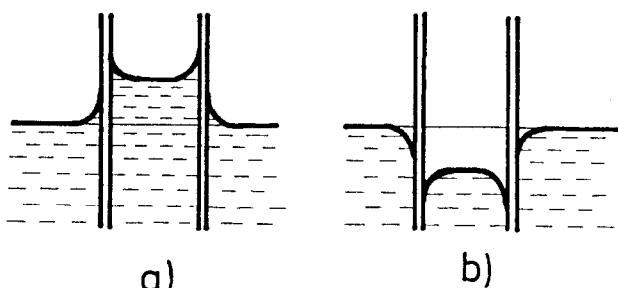
Obr. 7 Povrchové napětí na rozhraní tří tekutin v případě, že se nemísí a že  $\sigma_{13} < (\sigma_{12} + \sigma_{23})$ .



Při vypuklém povrchu kapaliny se tlak v kapalině zvětší a při vydutém se tlak zmeneši, viz obr. 8. Tím lze vysvetlit i kapilární elevaci (smáčivé kapaliny) obr. 8a a kapilární depresi obr. 8b (nesmáčivé kapaliny) v trubičkách malého průměru.

Obr. 8 Kapilární jevy:

- a) kapilární elevace
- b) kapilární deprese.



e) Tlak nasycených par je hodnota tlaku par nad hladinou kapaliny, při němž nastává rovnováha mezi počtem molekul opouštějících kapalinu a vracejících se zpět. U jednosložkových kapalin závisí pouze na teplotě a roste s teplotou. Čím je tlak nasycených par kapaliny při dané teplotě vyšší, tím je kapalina těkavější. Tlak nad hladinou kapaliny musí být vyšší, než je tlak nasycených par, jinak by mohlo dojít k prudkému odpaření (varu). Klesne-li tlak uvnitř kapaliny pod hodnotu tlaku nasycených par dochází ke vzniku kavitace, viz odstavec 9.3. Vynucené nestacionární proudění.

Otázky ke kapitolám 1. a 2.:

- 1) Jak rozdělujeme mechaniku tekutin?
- 2) Jak rozdělujeme tekutiny?
- 3) Kterými veličinami určujeme stav tekutiny? (uveďte jednotky).
- 4) Které vlastnosti tekutin jsou v mechanice tekutin důležité?
- 5) Jaký je rozdíl mezi dynamickou a kinematickou viskozitou?
- 6) Jak závisí viskozita na teplotě a tlaku?
- 7) Co jsou to nenewtonské tekutiny?
- 8) V které látky je rychlosť zvuku největší: ocel, vzduch, voda?
- 9) Proč používáme k měření tlaků skleněných trubic o průměru 6 mm a více?
- 10) Jak se měří absolutní tlak, barometrický (atmosférický) tlak, přetlak nebo podtlak?

Víte, že

- nejlehčí ze všech látek je vodík (v plyném i kapalném stavu). Za normálních podmínek je jeho hustota  $\rho = 0,09 \text{ kg/m}^3$ .
- Druhý nejlehčí plyn je helium. Za stejných podmínek má hustotu asi dvojnásobnou  $\rho = 0,18 \text{ kg/m}^3$ .
- Helium je inertní plyn, zatím co vodík tvoří se vzduchem třaskavou směs, jež byla příčinou řady katastrof balónů a vzducholodi. Tečkou za transatlantickými lety vzducholodí byla katastrofa německé vzducholodi HINDENBURG na letišti v Lakehurstu 5. května 1937.
- Balónové létání v Čechách má své začátky v minulém století. Už v roce 1892 vznikla v Praze Česká společnost aeronautická pod vedením Ferdinanda Wandase a Františka Hůlky. Společnost zakoupila balón nazvaný později „Ressel“. Podnikla s ním přes sedmdesát úspěšných startů. Po roce 1900 se klub rozpadl a vzduchoplavby ustaly. Později koupil František Hůlka nový balón „Praha“ a podnikal s ním úspěšné volné lety. V roce 1908 ve finanční tísni spáchal sebevraždu.
- V „psí jeskyni“ u Neapole neustále vzniká oxid uhličitý, který je asi 1,5x těžší než vzduch, a vytéká po dně jeskyně v nízké vrstvě ven. Proto se člověk může v jeskyni pohybovat bez rizika, ale pro psy může návštěva jeskyně končit tragicky.
- Nejlehčí kapalinou je kapalný vodík  $\rho \doteq 70 \text{ kg/m}^3$  (při teplotě  $T \doteq -250^\circ\text{C}$ ).
- Nejtěžší kapalinou je rtuť  $\rho \doteq 13\,590 \text{ kg/m}^3$ .

## Příklad P 2.1

Tak jako v oceánech s rostoucí hloubkou pod hladinou tlak přibývá (viz rov. (1)), tak v atmosféře tlak s výškou ubývá. Na rozdíl od vody je vzduch stlačitelný - s tlakem se mění ostatní stavové veličiny jako měrný objem a hustota.

Stanovte do jaké výše nad povrchem Země by sahala atmosféra, kdyby se hustota vzduchu s výškou neměnila a byla konstantní, rovná hustotě při  $y = 0$  m (hladině moře):  $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$ , odpovídající tlak  $p_0 = 1\,013,25 \text{ hPa}$  (toto jsou hodnoty převzaté ze „Standardní atmosféry“ tj. modelu atmosféry používaného při výpočtu výkonů letadel, kalibraci výškoměrů a p.)

$$\text{Dán: pro } y = 0 \quad \rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3 \quad p_b = p_0 \approx 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Určit:  $y_k = ? \text{ m}$  pro  $p_a = 0 \text{ Pa}$

### Rozbor (schéma):

Absolutní tlak  $p_a$  u nestlačitelných tekutin ( $\rho = \text{konst.}$ ) klesá podle přímky  $p_a = p_0 - \rho gy$ .

S výškou  $y$  se tlak vzduchu  $p_a$  zmenšuje, ale současně se zmenšuje i hustota  $\rho$ .

Proto průběh tlaku nebude lineární, tak jak je tomu v nestlačitelných tekutinách a absolutní tlak vzduchu s výškou klesá asymptoticky k nule.

### Předpoklady:

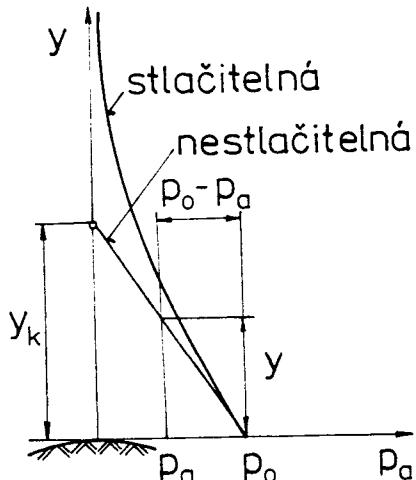
1. Konstantní hustota vzduchu  $\rho_0$ .
2. Konstantní teplota vzduchu.
3. Atmosféra končí ve výšce, kde absolutní tlak je roven nule.

### Řešení:

Za uvedených předpokladů platí rovnice

$$p_0 - p_a = \rho gy \quad \text{po dosazení za } p_a = 0$$

$$\text{určíme } y_k = \frac{p_0}{g\rho_0} \approx \frac{1,013 \cdot 10^5}{9,81 \cdot 1,225} \doteq 8\,400 \text{ m.}$$



Obr. P 2.1

### Diskuse výsledku:

Za našich nereálných předpokladů nám vyšla výška atmosféry o něco větší než 8 km (tj. méně než je výška Mount Everestu, jehož vrcholu dosáhli horolezci i bez kyslíkových přístrojů, což potvrzuje, že atmosféra sahá do větších výšek). Za horní hranici celé atmosféry je považována výška 35 000 km, kde vzduchové částice ještě rotují se Zemí (tedy jiné kritérium než naše).

Vlivem počasí se hodnoty  $p_0$  mění asi o  $\pm 5\%$ . S výškou tlak klesá asi na polovinu na každých 5,5 km.

## Příklad P 2.2

Při teplotě  $T = 37^\circ\text{C}$  je dynamická viskozita krve  $\eta \doteq 0,004 \text{ Pas}$ . Hustota krve  $\rho \doteq 1050 \text{ kg/m}^3$ . Stanovte kinematickou viskozitu krve. Porovnejte ji s kinematickou viskozitou vody  $v^*$  při téže teplotě.

$$\begin{array}{lll} \text{Dáno: } T = 37^\circ\text{C}, & \eta \doteq 0,004 \text{ Pas}, & \rho = 1050 \text{ kg/m}^3 \\ \text{Určit: } v = ? \text{ (m}^2/\text{s}), & v/v^* = ? \end{array}$$

Rozbor (schéma):

Kinematická viskozita je rovna dynamické viskozitě dělené hustotou:  $v = \frac{\eta}{\rho}$ .

$$\text{závislost } v^* \text{ (vody) na teplotě: } v^* = \frac{1,775 \cdot 10^{-6}}{1 + 0,0337 \cdot T + 0,000221 \cdot T^2} \text{ (m}^2/\text{s}; {}^\circ\text{C)}$$

Předpoklady:

1) Krev je homogenní tekutina

$$\text{Řešení: krev } v_{37} = \frac{\eta}{\rho} = \frac{0,004}{1050} = 3,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{voda } v^* = \frac{1,775 \cdot 10^{-6}}{1 + 0,0337 \cdot 37 + 0,000221 \cdot 37^2} = 0,696 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

(kinematická viskozita vody při teplotě místo  $\sim 20^\circ\text{C}$  je  $v \approx 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ )

$$\frac{v}{v^*} = \frac{3,8 \cdot 10^{-6}}{0,696 \cdot 10^{-6}} = 5,5.$$

Diskuse:

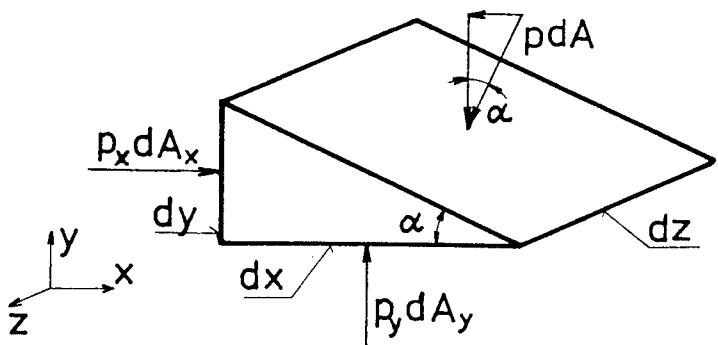
Kinematická viskozita krve je při teplotě  $37^\circ\text{C}$  asi pětkrát větší než viskozita vody. Tento údaj je nutno brát s rezervou, neboť dynamická viskozita krve  $\eta$  byla zadána jen přibližně na jedno desetinné místo a z reologického hlediska je krev nenewtonskou tekutinou a její viskozita závisí i na velikosti tečného napětí. Krev je suspense, jež obsahuje 40 až 50 % deformovatelných částic v krevní plazmě, hlavně červené krvinky - erytrocyty, jejichž střední průměr je asi  $8 \mu\text{m}$ . Srdečně - cévní systém je složitou soustavou tepen a žil o různých průměrech (aorta má průměr asi 26 mm, kapiláry asi  $3 \mu\text{m}$ ) zajišťující transport krve a kyslíku a zpět metabolický „odpad“. Celkový objem krve je asi 5 až 5,5 litrů, z toho v srdci bývá asi 10%, v tepnách asi 15%, v kapilárách asi 5%, v malých a velkých žilách asi 60% a v plicích asi 10%. V cévách o  $\varnothing 0,1 \text{ mm}$  a větším lze krev považovat za newtonskou tekutinu.

### 3. HYDROSTATIKA

#### 3.1 Hydrostatický tlak

Na žádnou částici tekutiny, která se nachází v rovnovážném stavu (klidu) nemohou působit tečné sily, neboť by ji uvedly do pohybu, jak plyne z definice newtonských tekutin. To platí pro částice uvnitř objemu tekutiny i pro částice na rozhraní např. v kontaktu s tuhou stěnou. Z toho plyne, že na tekutinu nacházející se ve stavu rovnovážném mohou působit jen normálné sily resp. napětí. V technické praxi se bude jednat vždy o tlak, neboť jen dokonale čisté a odvzdušněné kapaliny mohou odolávat tahu. Pevnost v tahu speciálně neupravených kapalin je přibližně rovna nule a ve výpočtech předpokládáme, že k porušení kontinuity kapaliny dojde v místech, kde tlak klesne pod hodnotu tlaku nasycených par a dojde zde k varu - změně fáze, viz poznámka o kavitaci v odstavci 9.3.

Velikost měrného tlaku v určitém místě uvnitř kapaliny tj. hydrostatický tlak  $p_h$ , nezávisí na směru a je tedy skalární veličinou.



Obr. 9 Síly působící na vytknutou elementární částici tekutiny nacházející se v klidu.

Důkaz: vytkněme z tekutiny elementární hranol - prisma, obr. 9 s trojúhelníkovou základnou s odvěsnami  $dx$ ,  $dy$  a výškou  $dz$  a napišme pro něj podmínky rovnováhy. Na hranol budou působit síly povrchové - tlakové a objemové např. tíha. Síly objemové jsou však o jeden řád menší sil povrchových a lze je tedy zanedbat. Kdyby hydrostatický tlak nebyl skalár, jeho velikost by závisela na směru a označme proto tlaky indexy označující směr. Napišme nyní rovnice rovnováhy sil pro směry  $x$  a  $y$ :

$$p_x dA_x = pdA \sin \alpha$$

$$p_y dA_y = pdA \cos \alpha$$

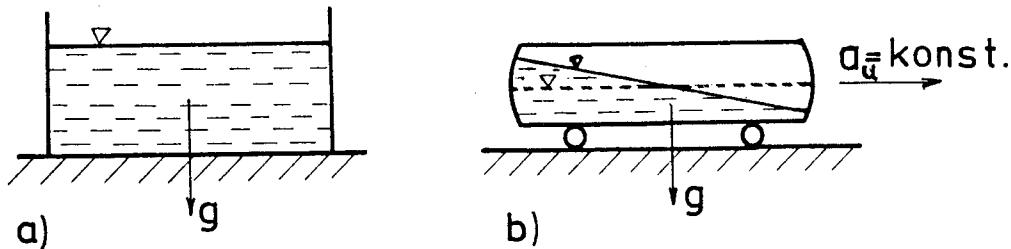
ale  $dA_x = dA \sin \alpha$ ,  $dA_y = dA \cos \alpha$  a po úpravě dostaneme (ddto lze provést i pro směr z pootočíme-li hranolek o  $90^\circ$  kolem osy  $y$ )

$$p_x = p_y = p_z \quad (8)$$

což znamená, že hydrostatický tlak je nezávislý na směru a je to tedy skalár.

*Poznámka: důkaz není z hlediska matematiky přesně formulován. Správný postup vyžaduje vytknutí hranolku (nebo čtyřstěnu) o hraničích  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , určení středních hodnot  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ ,  $p$  na příslušných plochách, výpočet povrchových a objemových sil, napsání rovnovážných rovnic a jejich limitování k nulovým rozměrům hranolku. Výsledek by byl týž. Tento zkrácený i když formálně nepřesný postup budeme užívat i dále, aby se fyzikální stránka nezamlžovala matematickým popisem.*

Tekutina se může nacházet buďto v absolutní nebo relativní rovnováze, obr. 10, podle toho, zda je nádoba v klidu nebo pohybu vzhledem k absolutnímu prostoru.



Obr. 10a) Absolutní rovnováha tekutiny - nádoba i kapalina jsou v klidu vzhledem k absolutnímu prostoru.

b) Relativní rovnováha tekutiny - kapalina je v klidu vzhledem ke stěnám nádoby, která se však vzhledem k absolutnímu prostoru pohybuje.

V technické praxi se často považuje za absolutní prostor (s postačující přesností) prostor charakterizovaný souřadnicemi spojenými se zemským povrchem. Není-li uvažovaný pohyb nádoby přímočarý a rovnoměrný, pak musíme uvažovat, že na tekutinu, pokud zůstala v klidu vzhledem k nádobě, působi i setrvačné síly od unášivého pohybu viz odst. 3.4 c). V tomto případě nemusí nastat vždycky rovnovážný stav.

### 3.2 Eulerova rovnice hydrostatiky

Obecným úkolem hydrostatiky je určení tlaku v libovolném místě tekutiny, která je v rovnováze, tj. stanovení skalárního pole:  $p = p(x, y, z)$ . Úkol rozložíme do dvou etap. Pomoci Eulerovy rovnice hydrostatiky určíme přírůstek tlaku v nekonečně blízkém sousedním bodu a integrací těchto rovnic podél křivkového integrálu stanovíme pak konečný přírůstek tlaku mezi počátečním a konečným bodem křivky.

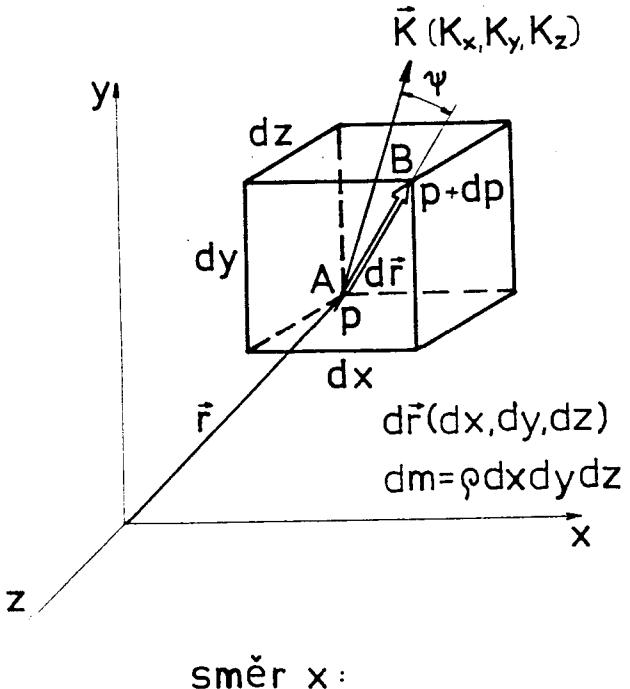
Uvažujeme případ relativní rovnováhy, kdy na tekutinu působí vnější síly charakterizované vektorem relativního zrychlání  $\vec{K}$  nebo přesněji řečeno intenzitou hmotových sil  $\vec{K}$ , neboť  $\vec{K}$  představuje velikost síly působící na jednotkovou hmotu. (V případě absolutní rovnováhy je  $\vec{K} = \vec{g}$  tj. gravitačnímu zrychlání a hmotnostní síle je těla). Zavedeme si dále souřadný systém pevně spojený s pohybující se nádobou. V bodě A je tlak  $p$  a v bodě B vzdáleném o  $d\vec{r}$  bude tlak  $p + dp$ , viz obr. 11. Přírůstek tlaku mezi oběma body bude závislý na hustotě tekutiny  $\rho$ , intenzitě hmotových sil  $\vec{K}$  a vzdálenosti bodů  $d\vec{r}$ . Hledáme tedy závislost  $dp = p(\rho, \vec{K}, d\vec{r})$ .

Vektor intenzity hmotových sil můžeme rozložit do složek, jež jsou dány jako funkce souřadnic:

$$K_x = K_x(x, y, z), \quad K_y = K_y(x, y, z), \quad K_z = K_z(x, y, z).$$

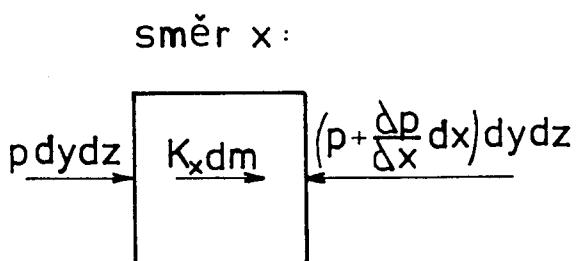
Rovněž vektor  $d\vec{r}$  rozložíme do složek  $dx, dy, dz$ .

Velikost přírůstku tlaku  $dp$  odvodíme jako součet přírůstků ve směru souřadních os. Přírůstek tlaku resp. rychlost změny  $\partial p / \partial x$  ve směru osy  $x$  odvodíme z rovnováhy elementárního hranolku tekutiny o hmotnosti  $dm = \rho dx dy dz$ , obr. 11.



Obr. 11 Síly působící na vytknutý elementární hranolek tekutiny.

Obr. 12 Rovnováha sil působících na elementární hranolek tekutiny ve směru  $x$ .



Rovnováha sil ve směru osy  $x$ , obr. 12:

$$pdydz + K_x dm - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz = 0 ,$$

$$pdydz + K_x \rho dx dy dz - pdydz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = 0 ,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho K_x .$$

Cyklickou záměnou obdržíme pro směry  $y$  a  $z$ :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho K_y \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho K_z .$$

Celkový přírůstek tlaku na dráze  $d\vec{r}$  bude roven:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad \text{a po dosazení} \quad dp = \rho(K_x dx + K_y dy + K_z dz) . \quad (9)$$

Výraz v závorce je skalární součin vektorů  $\vec{K}$  a  $d\vec{r}$ , svírajících úhel  $\psi$ , a tento součin můžeme zapsat i pomocí modulů vektorů

$$K_x dx + K_y dy + K_z dz = K \cos \psi dr = \vec{K} d\vec{r}$$

a dostaváme jiný tvar této rovnice

$$dp = \rho K \cos \psi dr . \quad (10)$$

Přírůstek tlaku je úměrný práci vektoru intenzity hmotových sil, přičemž konstantou úměrnosti je hustota tekutiny.

Ukázky integrace těchto rovnic budou uvedeny v dalších odstavcích.

### 3.3 Hladinové plochy

Hladinové plochy jsou místa s konstantní hodnotou skalární veličiny, tj. v našem případě s tlakem  $p = \text{konst}$ . Přírůstek tlaku mezi dvěma body ležícími na stejné hladinové ploše musí být roven nule, což platí i pro soumezné body,  $dp = 0$ . Dosazením do rovnice (9) dostaneme obecnou rovnici hladinových ploch v diferenciálním tvaru:

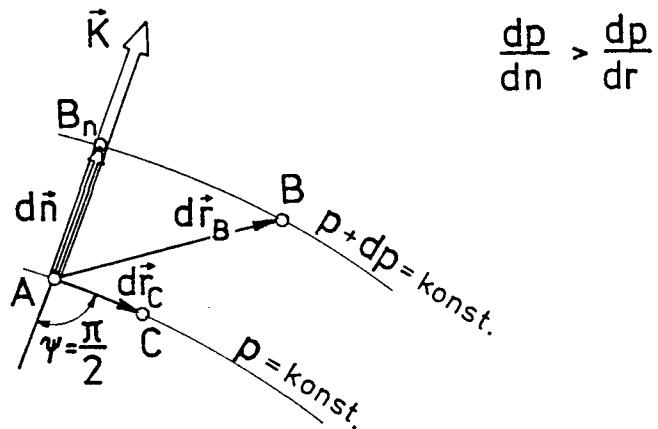
$$K_x(x, y, z)dx + K_y(x, y, z)dy + K_z(x, y, z)dz = 0 \quad (11)$$

Hladinové plochy jsou vždy kolmé k vektoru intenzity hmotových sil  $\vec{K}$ . Důkaz: leží-li vektor  $d\vec{r}$  na hladinové ploše, např. v obr. 13 pro bod C, pak rozdíl tlaků  $dp = 0$ .

Dosazením do rov. (10)  $dp = 0 = \rho K \cos \psi dr$  plyne, že  $\cos \psi = 0$ . a tedy  $\psi = \pi/2$  neboť  $\rho K a dr$  jsou od nuly rozdílné.

Ve směru vektoru  $\vec{K}$ , který je shodný se směrem normály k hladinové ploše, roste tlak nejrychleji, neboť

$$\frac{dp}{dn} > \frac{dp}{dr_B}$$

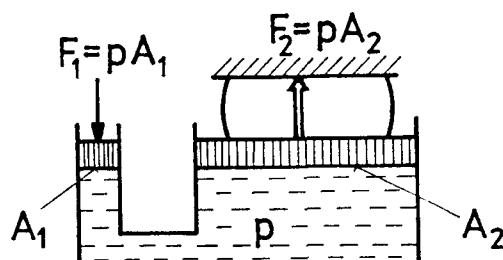


Obr. 13 Řez soumeznými hladinovými plochami, jež jsou kolmé k vektoru intenzity hmotových sil  $\vec{K}$ . Ve směru normály k hladinovým plochám roste tlak nejrychleji, protože  $|dn| < |dr_B|$ , kde B je libovolný bod na soumezné hladinové ploše.

### 3.4 Rozložení tlaku v tekutině

a) Beztížný stav je charakterizován hodnotou  $\vec{K} = 0$ . Z rovnic (9) a (10) pak plyne, že  $dp = 0$  a po integraci  $p = \text{konst}$ . tj. tlak uvnitř tekutiny je všude stejný. U malých objemů kapalin - kapiček - to neplatí přesně, neboť se uplatní povrchové napětí.

Zvýšíme-li v určitém místě tlak, třeba na rozhraní kapaliny s jinou fází, změní se tlak i v celém objemu kapaliny, což je obsahem Pascalova zákona: tlak v kapalině se šíří rovnoměrně všemi směry. Toho se využívá např. u hydraulických zvedáků a lisů, obr. 14. Působíme-li na malý píst silou  $F_1$ , vyvoláme na velkém pístu sílu  $F_2 > F_1$ .



Obr. 14 Princip hydraulického lisu.

b) Absolutní rovnováha tekutin nastává tehdy, je-li tekutina v klidu vzhledem ke stěnám nádoby jež je v klidu, nebo vykonává přímočary rovnoměrný pohyb vzhledem k absolutnímu prostoru, viz obr. 10. Pokud považujeme povrch Země za absolutní prostor, pak  $\vec{K} = \vec{g}$  a složky vektoru intenzity hmotových sil nabývají těchto hodnot:

$$K_x = 0, \quad K_y = -g, \quad K_z = 0. \quad (12)$$

Hladinové plochy jsou vodorovné roviny a největší přírůst tlaku je ve světlém směru. Lze jej vypočítat po dosazení rov. (12) do Eulerovy rov. (9):

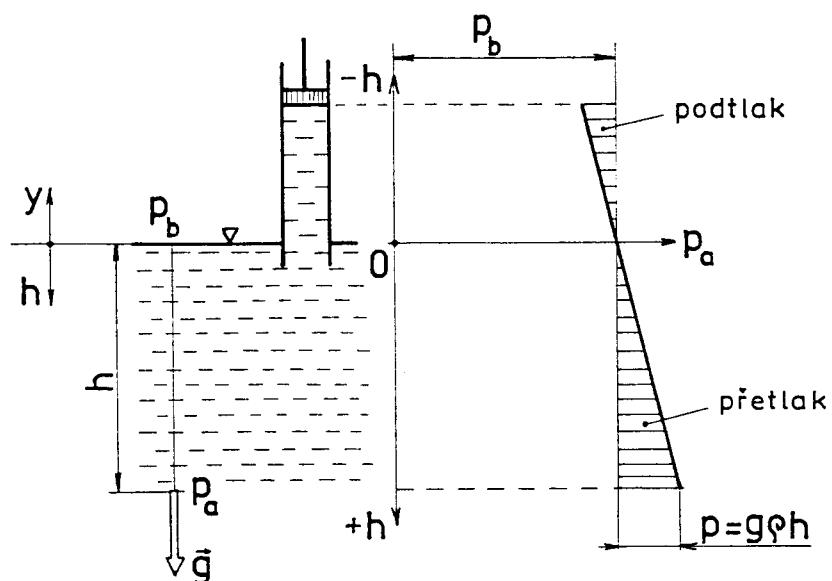
$$dp = -\rho g dy.$$

Pro kapaliny je hustota  $\rho = \text{konst.}$  a v běžné technické praxi lze brát i  $g = \text{konst.}$  Místo souřadnice  $y$  zavedeme hloubku  $h$  pod hladinou, mající opačný smysl, obr. 15 a pak  $dy = -dh$ . Přetlak vypočteme integrací rovnice

$$\int_{p_b}^{p_a} dp = \rho g \int_0^h dh$$

$$p_a - p_b = \rho g h, \quad (2)$$

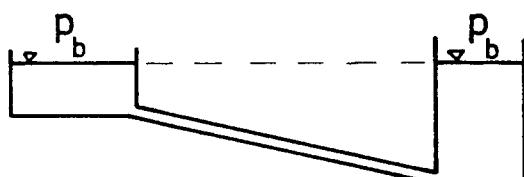
kde  $p_a$  je absolutní tlak v hloubce  $h$  pod hladinou kapaliny o hustotě  $\rho$  a  $p_b$  je barometrický tlak působící na hladině, kde  $h = 0$ . Průběh absolutního tlaku i přetlaku je nakreslen na obr. 15. Poslední rovnice (2) byla získána již dříve jiným způsobem, viz odst. 2.2 a) Měrný tlak.



Obr. 15 Průběh tlaků v kapalině.

#### Technické aplikace

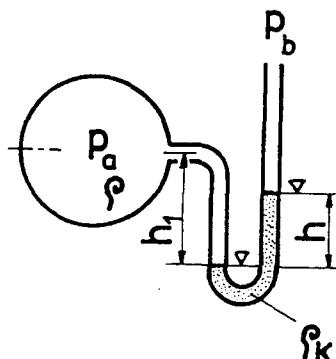
- 1) Spojité nádoby, obr. 16. Jsou-li nádoby otevřené a kapalina v klidu, musí být hladiny stejně vysoko, neboť nad hladinami je stejně velký tlak - barometrický tlak  $p_b$ , resp. nulový přetlak a podle rovnice (2) jsou přetlak  $p$  a výška  $h$  spolu jednoznačně svázány. Spojitými nádobami je i hadicová vodováha, používaná pro přenášení výšek (hladin) ve stavebnictví.



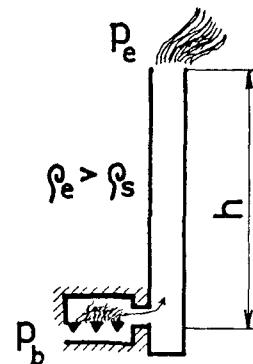
Obr. 16 Spojité nádoby.

2) Měření tlaků v kapalinách obr. 2, v plynech obr. 17. Je-li v nádobě plyn o hustotě  $\rho$  a v U-trubici kapalina o hustotě  $\rho_k$  pak platí rovnice, vyplývající z rovnováhy sil působících v rovině spodní hladiny v U-trubici:  $p_a + g\rho h_1 = p_b + g\rho_k h$ .

Absolutní tlak v ose nádoby bude roven  $p_a = p_b + g\rho_k h \left(1 - \frac{\rho h_1}{\rho_k h}\right)$ . Protože  $\rho \ll \rho_k$  a  $h_1 \approx h$  lze druhý člen v závorce zanedbat. Je-li v nádobě jiná kapalina, např. voda, a v U-trubici rtuť, pak nelze druhý člen v závorce zanedbat.



Obr. 17 Měření tlaku plynu U-trubicí.



Obr. 18 Vznik tahu v komíně.

3) Komín, obr. 18. Neuvažujeme-li pokles tlaku, který nastává při pohybu, je v ohništi kamen nebo kotle barometrický tlak  $p_b$ , neboť kamna musí být otevřena, aby byl v dostatečném množství přiváděn vzduch potřebný pro hoření (přesněji kyslík).

Vně komína platí  $p_e + g\rho_e h = p_b$ , kde  $p_e$  je tlak ve výšce  $h$ , kde je vyústění otvoru komína a je  $\rho_e$  hustota vnějšího vzduchu. Do výšky  $h = 100$  m lze hustotu  $\rho_e$  brát konstantní. Uvnitř komína bude s hloubkou tlak růst pomaleji, protože hustota spalin  $\rho_s$  je menší než hustota vnějšího studeného vzduchu  $\rho_e$ . Zjednodušíme si úkol a uvažujeme, že komín je nahoru uzavřen a rychlosť plynů je nulová. Tlak v úrovni ohniště bude pak roven

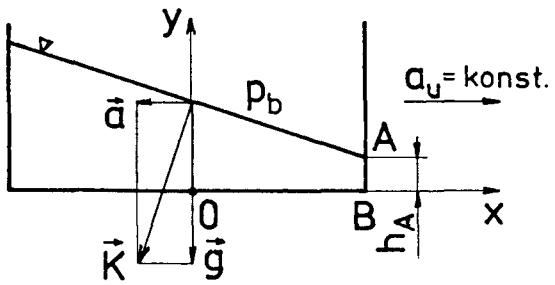
$$p_i = p_e + g\rho_s h < p_b .$$

Odstraníme-li uzávěr komína, vlivem rozdílu tlaků  $\Delta p = p_b - p_i = g(\rho_e - \rho_s)h$  vznikne „tah“, který je příčinou proudění v komíně.

c) Relativní rovnováha tekutin nastává tehdy, jestliže tekutina je v klidu vzhledem ke stěnám nádoby a nádoba se vzhledem k absolutnímu prostoru pohybuje. Je-li unášivý pohyb nádoby zrychlený je současný systém spojený s nádobou neinerciální a je třeba zavést vliv setrváčních sil podle D'Alembertova principu. Intenzita hmotových sil  $\vec{K}$  je pak rovna vektorovému součtu absolutního zrychlení  $\vec{g}$  a doplňkového zrychlení  $\vec{a}$ , jež je stejně veliké jako zrychlení  $\vec{a}_u$ , ale má opačný smysl  $\vec{a} = -\vec{a}_u$  a

$$\vec{K} = \vec{g} + \vec{a} . \quad (13)$$

1) Přímočarý unášivý rovnoměrně zrychlený pohyb ve vodorovném směru, obr. 19. Unášivé zrychlení  $a_u = \text{konst.}$  Složky a modul vektoru intenzity hmotových sil budou rovny  $K_x = -a$ ,  $K_y = -g$ ,  $K_z = 0$  a  $K = \sqrt{a^2 + g^2}$ . Rovnice hladinových ploch, po dosazení do rovnice (11), bude rovna  $-a dx - g dy = 0$  a po integraci  $y = -\frac{a}{g}x + \text{konst.}$ , což je rovnice rovin paralelních s hladinou, obr. 19.



Obr. 19 Relativní rovnováha kapaliny v nádobě pohybující se přímočáre vodorovně s konstantním zrychlením.

Tlak v libovolném bodě vypočteme integrací Eulerovy rovnice (9) jež po dosazení za složky  $\vec{K}$  je rovna  $dp = \rho(-ady - gdy + 0)$ .

Zvolíme-li integrační dráhu  $AB$ , tj. svislou úsečku, pak  $x = \text{konst.}$  a  $dx = 0$  ( $p_A = p_b$ )

$$\int_{p_A}^{p_B} dp = -g\rho \int_{h_A}^0 dy \quad p_B - p_b = g\rho h_A. \quad (14)$$

V tomto případě tlak roste lineárně s hloubkou podle stejné závislosti jako při absolutní rovnováze, neboť unášivé zrychlení nemá složku do svislého směru. Ovšem hodnoty tlaků se proti absolutní rovnováze změní, protože se změní poloha hladiny a tím i místní hloubky.

2) Přímočarý unášivý rovnoměrně zrychlený pohyb ve svislém směru, obr. 20.

Směruje-li konstantní unášivé zrychlení vzhůru, pak doplňkové zrychlení  $a$  směruje dolů a složky vektoru  $\vec{K}$  a modul jsou rovny  $K_x = 0$ ,  $K_y = -(a + g)$ ,  $K_z = 0$ ,  $|K| = |K_y| = a + g$ .

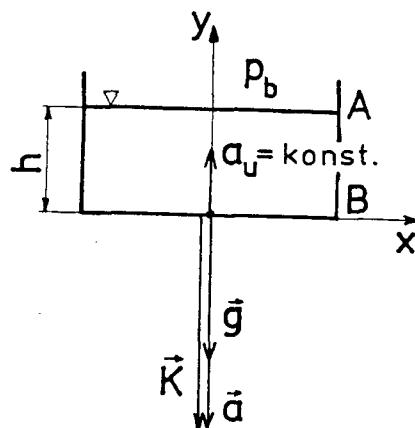
Hladinové plochy budou vodorovné roviny. Tlak u dna vypočteme po dosazení do rov. (9) integraci rovnice

$$\int_{p_b}^{p_B} dp = -(g + a)\rho \int_h^0 dy.$$

Přetlak  $p$  bude po celém dně stejný

$$p = p_B - p_b = (1 + \frac{a}{g})g\rho h. \quad (15)$$

v tomto případě narůstá tlak s hloubkou rychleji než při absolutní rovnováze.



Obr. 20 Relativní rovnováha kapaliny v nádobě pohybující se přímočáre vzhůru, ve svislém směru, s konstantním zrychlením.

3) Nádoba rotující kolem svislé osy konstantní úhlovou rychlosí, obr. 21.

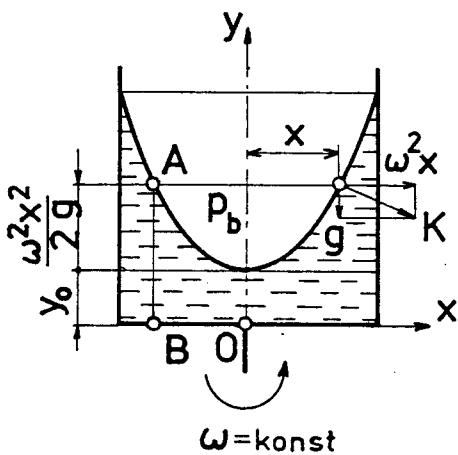
Unášivé zrychlení je dostředivé zrychlení. Doplňkové zrychlení je fiktivní zrychlení odstředivé  $a = \omega^2 x$ . Pro částici tekutiny nalézající se v rovině  $xy$ , obr. 21 jsou složky a modul vektoru  $\vec{K}$  rovny  $K_x = \omega^2 x$ ,  $K_y = -g$ ,  $K_z = 0$ ,  $|K| = \sqrt{(\omega^2 x)^2 + g^2}$ . Po dosazení do obecné rovnice hladinových ploch (11) dostaneme:

$$\omega^2 x dx - g dy = 0$$

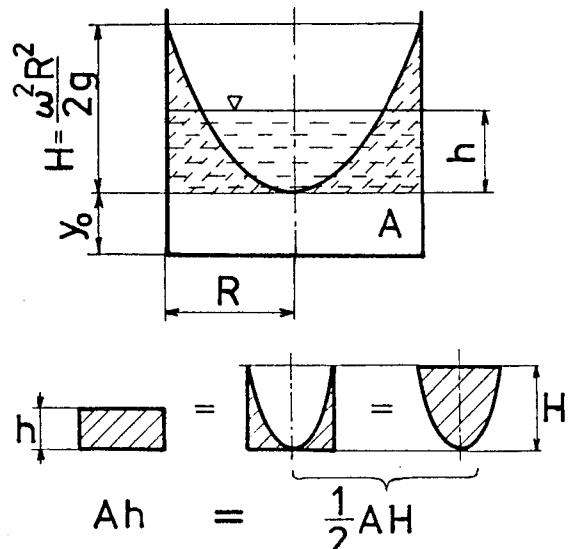
a po integraci:

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} - gy = C \quad (16)$$

Meridiánový řez hladinovou plochou je parabola. Hladinové plochy jsou rotační paraboloidy.



Obr. 21 Relativní rovnováha kapaliny v nádobě rotující kolem svislé osy konstantní úhlovou rychlosťí.



Obr. 22 Rovnost vyšrafovovaných objemů, jež kapalina zaujala před rotací a za rotace.

Pro hladinu lze integrační konstantu C stanovit tím, že dosadíme do rovnice (16) souřadnice některého bodu hladiny např.  $x = 0, y = y_o$ , pak  $C = -gy_o$  a rovnice hladiny bude rovna

$$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + y_o = \frac{u^2}{2g} + y_o \quad (17)$$

kde  $u = \omega x$  je místní obvodová rychlosť. Pokud vrchol této paraboly není pod dnem nádoby a nevytekla-li během rotace z nádoby žádná kapalina, pak z rovnosti objemů kapaliny před rotací a za rotace vypočteme, že původní hladina půlí výšku rotačního paraboloidu. Uvažujme, že výška rotačního paraboloidu je  $H$ , obr. 22. Objem rotačního paraboloidu je jak známo roven  $1/2 HA$ , kde  $A$  je průřez nádoby. Kapalina, jež se za klidu nacházela ve válci  $hA$ , tj. objem nad tečnou rovinou k vrcholu paraboloidu, vyplňuje při rotaci prostor mezi válcem a hladinou a její objem je roven rozdílu objemu válce  $HA$  a objemu rotačního paraboloidu  $1/2HA$ . Z rovnosti objemů  $1/2HA = hA$  plyne  $h = H/2$ . (18)

Při výpočtu tlaků dosadíme do Eulerovy rovnice (9) příslušné složky vektoru  $\vec{K}$ :  $dp = \rho(\omega^2 x dx - g dy)$ . Vhodnou volbou integrační cesty, obr. 21, stanovíme tlak v bodě B ( $x = \text{konst.}, dx = 0$ )

$$p_B - p_b = g\rho \left( \frac{\omega^2 x^2}{2g} + y_o \right) = g\rho y \quad (19)$$

4. Při rotaci nádoby kolem vodorovné nebo šikmé osy nenastane relativní rovnováha. Při vysokých otáčkách, jako je tomu u odstředivek, je  $\omega^2 r \gg g$  a hladinové plochy jsou souosé válcové plochy.

## Otázky ke kapitole 3.:

- 1) Je hydrostatický tlak veličinou skalární či vektorovou? Jak to dokážeme?
- 2) Jaký je rozdíl mezi absolutní a relativní rovnováhou?
- 3) Jak můžeme vysvětlit Eulerovu rovnici hydrostatiky?
- 4) Co jsou to hladinové plochy?
- 5) Ve kterém směru roste hydrostatický tlak nejrychleji?
- 6) Jak narůstá tlak s hloubkou v oleji ve srovnání s vodou za působení zemské tíže?
- 7) Jak se využívá Pascalova zákona v praxi?
- 8) Proč v létě kamna „kouří“ rozděláme-li oheň až v poledních hodinách?
- 9) Jak závisí hydrostatický tlak u dna nádoby, jež koná unášivý zrychlený pohyb směrem dolů, na velikosti unášivého zrychlení?
- 10) Jak se změní rozložení hydrostatického tlaku u dna válcové nádoby, která byla v klidu a začala se otáčet kolem svislé osy?
- 11) Jaké je rozložení hydrostatického tlaku v kapalině u odstředivek s vodorovnou osou rotace?

## Víte, že

- si zpravidla ani neuvědomujeme, že žijeme na dně vzdušného oceánu - atmosféry
- i když vzduch je průzračný a tedy neviditelný, byl jako „látka“ znám již ve starověku. Např. Aristoteles (384 - 322 př. Kr.) v traktátě „Fyzika“ píše, že střela je hnána vpřed vzduchem, který vyplňuje prostor za letící střelou a naráží na její zadní stěnu (tedy představa analogická plachetnicí hnane větrem). Podle této domněnky by byl let střely ve vzduchoprázdnou nemožný, neboť by zde nebylo hmotné prostředí, které by tlačilo střelu vpřed. K tomuto závěru dospěl na základě nesprávné hypotézy, že příroda má strach z prázdnотy - „horror vacui“ - a také proto, že ještě nebyla známa setrvačnost.

Existence vzduchu byla tedy vzata na vědomí již ve starověku, ale důsledek, že vzduch působí na všechna tělesa a jejich povrch tlakem bylo nutno dlouho dokazovat. Ještě ve středověku se těšil Aristoteles a jeho učení velké vážnosti. Co bylo psáno v bibli a v Aristostotelových knihách bylo považováno za absolutní pravdu a tedy i dříve zmíněné „horror vacui“. Tím se vysvětlovalo, proč voda sleduje půst čerpadla na sací straně. Když ale v 17. století chtěl vévoda toskánský zavlažovat své výše položené zahrady ukázalo se, že čerpadla nenasávala vodu výše než do 18 florentinských loktů (asi 9 m), potom se půst vzdaloval od vody - vytvořila se „prázdnota“. O vysvětlení tohoto jevu byl požádán tehdy již starý ale slavný fyzik Galileo Galilei (1564 - 1642), ale teprve jeho žák Jan Evangelista Torricelli (1608 - 1647), který několik měsíců ošetřoval osleplého Galilea, navrhl pokus, který v roce 1643 provedl jeho přítel Viviani: naplnil rtutí skleněnou trubici více než dva lokty dlouhou a na jednom konci zatavenou. Po uzavření otevřeného konce prstem trubici obrátil a ponořil do nádoby se rtutí a potom prst uvolnil. Hladina rtuti pokaždé klesla, ale vždy jen do výšky 760 mm. Nad hladinou vznikl podtlak a rtuť byla držena v trubici atmosférickým tlakem, který působil na hladinu rtuti v nádobce. Vtip pokusu spočíval v tom, že vodu nahradil mnohem těžší kapalinou a neprůhlednou trubici sklem.

- Torricelliho vysvětlení záhadu pumpy toskánského vévody a zavedení pojmu atmosférický tlak nezvítězilo rázem. Měl řadu odpůrců držících se nejen Aristotela. Někteří se pokoušeli i o jiná vysvětlení. Teprve Francouz Blaise Pascal (1623 - 1662) nadaný a již v mladém věku vynikající matematik a fyzik, přesvědčil všechny Torricelliho odpůrce. Opakoval pokus nejen se rtutí, ale i s vodou a červeným víinem v trubici dlouhé 13 m. Voda dosahovala do výšky cca 10 m.
- Pádným důkazem existence atmosférického tlaku byl pokus, který prokázal, že s výškou atmosférický tlak ubývá. V rovinaté pařížské krajině jej nebylo možno provést a proto požádal svého švagra Periera, bydlícího v Clermontu, aby vystoupil na horu Puy de Dôme 975 m vysokou, zatím co by někdo zaznamenal tlak na úpatí kopce. Pokus byl proveden v roce 1648.
- V roce 1654 názorně demonstroval účinek tlaku vzduchu magdeburský (děvínanský) starosta Otto von Guericke. Nechal vyrobit dvě měděné polokoule o průměru 37 cm, jedna byla opatřena kohoutkem. Mezi ně vložil kožené těsnění a vyčerpal vzduch. Zachoval se popis pokusu, vydaný r. 1672 latinsky v Amsterodamu v němž se líčí, že ani 16 koní nedokázalo polokoule odtrhnout, ale vpustil-li se kohoutem vzduch, mohl je oddělit člověk pouze rukama. Tah osmi koní (neboť osm koní na druhé straně mohl nahradit dobré zapuštěný kul) nestačil k oddělení „děvínanských polokoulí“ i když je „nic“ nespojovalo, pouze vzduch.

### Příklad P 3.1

Vypočítejte tlak a hustotu vody na dně Mariánského příkopu v hloubce  $H = 10\ 912$  m

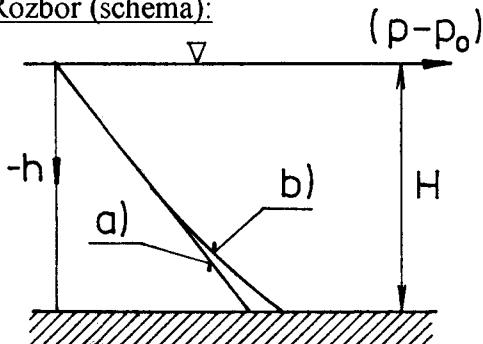
- bez uvažování stlačitelnosti,
- s uvažováním stlačitelnosti vody.

Předpokládejme, že se s hloubkou nemění teplota, slanost vody i modul objemové pružnosti. Hustota mořské vody na hladině  $\rho_0 = 1\ 030 \text{ kg/m}^3$ , modul objemové pružnosti  $K = 2,1 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ .

Dáno: pro  $h = 0$ ,  $\rho_0 = 1\ 030 \text{ kg/m}^3$ ,  $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $K = 2,1 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

Určit: a)  $p_H = ? \text{ Pa}$  pro  $\rho = \text{konst.}$   
 b)  $p_H = ? \text{ Pa}$  pro  $\rho \neq \text{konst.}$

Rozbor (schéma):



Uvažujeme-li nestlačitelnou kapalinu, bude  $\rho = \rho_0 = \text{konst.}$  a tlak narůstá podle přímky. U stlačitelné tekutiny se bude s tlakem tj. s hloubkou, zvětšovat i hustota, viz rov. (4)

$$-\frac{dv}{v} = \frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{K}$$

Obr. P 3.1

Předpoklady:

- ad a)  $\rho = \text{konst.}$ , ad b)  $K = \text{konst.}$
- Teplota je konstantní.
- Slanost je konstantní.

Řešení:

a)  $p_H - p_0 = g\rho_0 H = 9,81 \cdot 1\ 030 \cdot 10\ 912 = 1,103 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ ,  
 $p_H = 1,104 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 110,4 \text{ MPa}$ .

b)  $dp = g\rho dh = K \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \int_0^h dh = \frac{K}{g} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2}$

po integraci a úpravě

$$\rho = \rho_0 \frac{K}{K - g\rho_0 h}$$

Hustota v hloubce  $H$ :  $\rho = 1030 \frac{2,1 \cdot 10^9}{2,1 \cdot 10^9 - 9,81 \cdot 1030 \cdot 10912} = 1\ 087 \text{ kg/m}^3$ .

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1,055 \quad \text{rozdíl činí } 5,5\%.$$

Závislost tlaku  $p$  na hloubce  $h$ :

$$\int_{p_0}^p dp = K \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow p - p_0 = K \ln \frac{\rho}{\rho_0} = K \ln \frac{K}{K - g \rho_0 h} ,$$

tlak v hloubce H

$$p_H = p_0 + K \ln \frac{K}{K - g \rho_0 H} = 1,013 \cdot 10^5 + 2,1 \cdot 10^9 \ln \frac{2,1 \cdot 10^9}{2,1 \cdot 10^9 - 9,81 \cdot 1030 \cdot 10912}$$

$$p_H = 1,134 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 113,4 \text{ MPa} \quad \text{tj. o } 2,7\% \text{ větší než ad a).}$$

Diskuse výsledku:

Podle očekávání vyšel tlak při respektování stlačitelnosti větší, ale rozdíl byl menší než 3%. Je třeba si uvědomit, že i při uvažování stlačitelnosti jsme neuvažovali změny teploty vody s hloubkou (teplota hladiny je závislá na ročním období). Vlivem větru a proudění je u hladiny vrstva vody promichávána a její teplota je téměř konstantní, pak následuje prudký pokles teploty asi do hloubky 400 m, kde je teplota přibližně 10 °C a později pomalý pokles. Rovněž jsme neuvažovali, že modul objemové stlačitelnosti vody je závislý na teplotě a tlaku (např. pro  $T = 0^\circ\text{C}$  je při malých tlacích do 5 MPa  $K \approx 1,9 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ , při velkých tlacích kolem 200 MPa  $K \approx 3,5 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ . Při  $T = 40^\circ\text{C}$  a tlacích do 5 MPa je  $K \approx 2,2 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ ). V lednu 1960 Jacques Picard a Don Walsh se v batyskafu „Trieste“ ponorili na dno Mariánského příkopu do hloubky se kterou počítáme a naměřili teplotu vody +3°C a tlak 1 187 at tj.  $1,164 \cdot 10^8 \text{ Pa}$  tj. o 2,6 % více, než jsme spočítali s uvažováním stlačitelnosti.

Dne 24. března 1995 japonská dálkově řízená ponorka bez lidské posádky KAIKÓ dosedla na dno Mariánského příkopu v hloubce 10 911,4 metru.

**Vite, že**

- roku 1578 sestrojil dřevěnou ponorku Angličan William Bourne. První úspěšný pokus s dřevěnou ponorkou provedl roku 1624 Holanďan Cornelius van Drebbel v Anglii, když plavbou pod vodou překonal vzdálenost mezi Westminsterem a Greenwichem asi za tři hodiny. V roce 1771 zkonztruoval v Americe ponorku David Bushnell a jiný Američan, původně malíř Robert Fulton zkoušel ve Francii v letech 1797 ponorku „Nautilus“ s lodním šroubem, poháněným stále ještě jen lidskou silou. Když pokusy na Seině a v Le Havru skončily úspěšně, měl roku 1800 předvést Napoleonovi její použití na moři a přiblížit se ke kotvíci anglické lodi. Dva muži v ponorce však nebyli schopni překonat mořský příliv a Napoleon ztratil zájem i o úspěšnější torpédrový člun z roku 1801 se šroubem poháněným 24 muži. Po návratu do Ameriky zahájil v roce 1807 parníkem „Clermont“ první veřejnou paroplavební dopravu na řece Hudson.
- V roce 1817 chtěl předvádět Josef Božek, mistr z dílen pražské polytechniky, ve Stromovce na Vltavě vlastní konstrukci parního člunu. Pro nedostatek peněz musel s pokusy přestat.
- V květnu 1841 byl spuštěn na Vltavu kolesový parník „Bohemia“ postavený v pražské továrně Rustonice. Sloužil pro osobní dopravu z Prahy do Drážďan. Protože ve Vltavě býval nízký stav vody museli být pasažéri dopraveni z Prahy do Obříství dostavníkem.
- V roce 1857 byl na Vltavu spuštěn další parník „Mecsey“, který hned při první plavbě v červenci uvízl na mělčině a 14. srpna téhož roku se potopil u Vraného nad Vltavou.
- V roce 1865 zahájil pravidelnou osobní dopravu z Prahy do Štěchovic kolesový parník „Praha“ dlouhý 42 m a široký 4,6 m pro 600 cestujících.
- Pražská paroplavební společnost prožívala období konjunktury i stagnace. Obrazová dokumentace týkající se pražské paroplavby je umístěna v odbočce Muzea hlavního města Prahy Na výtoni.
- Wilhelm Bauer zkoušel v letech 1848-56 řadu ponorek, jež se po prvních jízdách většinou potopily.

## Příklad P 3.2

Stanovte velikost tlaku  $p$  a hustotu  $\rho$  vzduchu ve výšce  $y_k = 8,4$  km za předpokladu, že se jedná o ideální plyn a že teplota je konstantní. Porovnejte výsledek s případem, kdy jsme neuvažovali stlačitelnost vzduchu - příklad P 2.1. Zadané hodnoty jsou stejné jako v příkladu P 2.1.

Dáno: pro  $y = 0$ ,  $p_0 = 1,013 \cdot 10^5$  Pa,  $\rho_0 = 1,225$  kg/m<sup>3</sup>,  $T_0 = 15^\circ\text{C} = 288$  K,  
 $r = 287$  J/kgK,  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>

Určit:  $p = ?$  Pa pro  $y = 8400$  m.

### Rozbor:

U stlačitelných tekutin - vzduchu - bude tlak a hustota s výškou klesat nelineárně. Tento průběh však bude závislý i na další stavové veličině - teplotě.

### Předpoklady:

- 1) Vzduch se řídí stavovou rovnici  $p/\rho = rT$
- 2) Teplota vzduchu je konstantní  $T = T_0$ .

### Řešení:

Z Eulerovy rovnice hydrostatiky plyne pro absolutní rovnováhu

$$dp = -g\rho dy.$$

Ze stavové rovnice dosadíme za  $\rho$  a upravíme

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{rT} dy.$$

Pro izotermickou změnu  $\alpha = g/rT_0 = 9,81/(287 \cdot 288) = 1,187 \cdot 10^{-4}$  m<sup>-1</sup> se rovná konstantě

$$a můžeme integrovat \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\alpha \int_0^y dy \quad \ln \frac{p}{p_0} = -\alpha y \Rightarrow p = p_0 e^{-\alpha y}.$$

Ve výšce  $y_k$  bude tlak  $p_k = p_0 e^{-\alpha y_k} = 1,013 \cdot 10^5 \cdot e^{-1,187 \cdot 10^{-4} \cdot 8,4 \cdot 10^3} = 37375$  Pa.

Ze stavové rovnice dostaneme pro izotermickou změnu

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p}{\rho} \Rightarrow \frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \text{takže} \quad \rho_k = \rho_0 e^{-\alpha y_k} = 1,225 \cdot e^{-0,99708} = 0,452 \text{ kg/m}^3.$$

### Diskuse:

Za předpokladu, že teplota vzduchu je konstantní, jsme dostali výsledek, že ve výšce 8,4 km (kde podle příkladu P 2.1 byl absolutní tlak roven nule) je tlak roven asi jedné třetině tlaku u hladiny moře. Ve skutečnosti u povrchu Země do výšky cca 11 km (troposféra) teplota s výškou ubývá (pokud není teplotní inverze). Ve standardní atmosféře se počítá pokles 6,5 °C na 1 km výšky, takže na hranici troposféry je teplota -56,5 °C a ve spodní části stratosféry asi do výše 20 km je teplota konstantní. Skutečné hodnoty teplot se mohou od těchto teplot opět lišit a to dosti značně.

Podle standardní atmosféry je ve výšce  $y = 8400$  m teplota  $T = -39,5^\circ\text{C}$ , tlak  $p_a = 33640$  Pa a hustota  $\rho = 0,502$  kg/m<sup>3</sup>.

## 4. TLAKOVÉ SÍLY

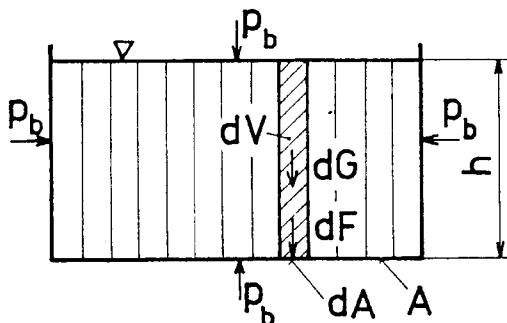
Pro technickou praxi je důležitá znalost sil, kterými tekutiny působí na tuhé stěny. Známe-li rozložení tlaku  $p$  po povrchu stěny můžeme síly vypočítat integrací po celém povrchu A :

$$\vec{F} = \iint_A p d\vec{A} . \quad (20)$$

Proveďme výpočet tohoto integrálu pro některé případy absolutní rovnováhy.

### 4.1 Dno nádoby

Při výpočtu síly na rovinné dno nádoby, obr. 23, vidíme, že barometrický tlak  $p_b$  působí na volnou hladinu a na dno v opačném smyslu a jeho účinek se ruší.



Obr. 23 Výpočet síly na dno nádoby

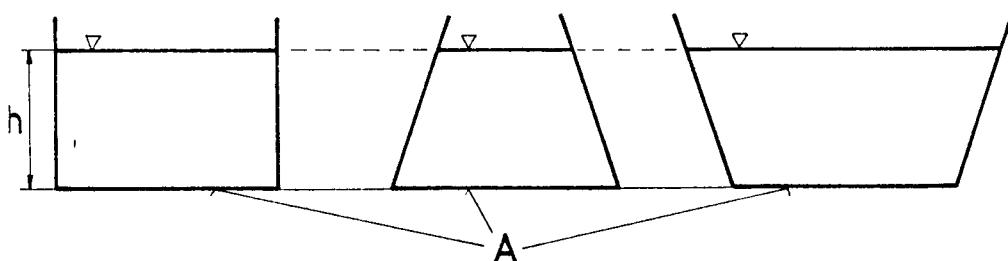
Počítáme proto dále jen s přetlakem  $p$  a nikoli s absolutním tlakem. Přetlak u dna  $p = g\rho h$ . Na elementární plošce  $dA$  pak působí síla  $dF = p dA = g\rho h dA$ . Součin  $h dA = dV$ , což je elementární objem nad ploškou, v obr. 23 vyšrafováný. Pak  $dF = g\rho dV = g dm = dG$  tj. síla  $dF$  je rovna tíze kapaliny  $dG$  nad ploškou  $dA$ . Celková síla na dno je dána součtem těchto sil po celé ploše dna  $A$  a je rovna tíze kapaliny  $G$  obsažené v nádobě (máme-li svislé stěny):

$$F = G = g\rho h A . \quad (21)$$

Ke stejnemu výrazu dojdeme integrací rovnice (20), po dosazení za přetlak  $p$  :

$$F = g\rho h \iint_A dA = g\rho h A .$$

Hydrostatické paradoxon. V obr. 24 jsou nakresleny tři nádoby různého tvaru, obsahující různé množství kapaliny, ale mající stejnou velikost dna  $A$  a výšku hladiny v nádobě  $h$ . Jak

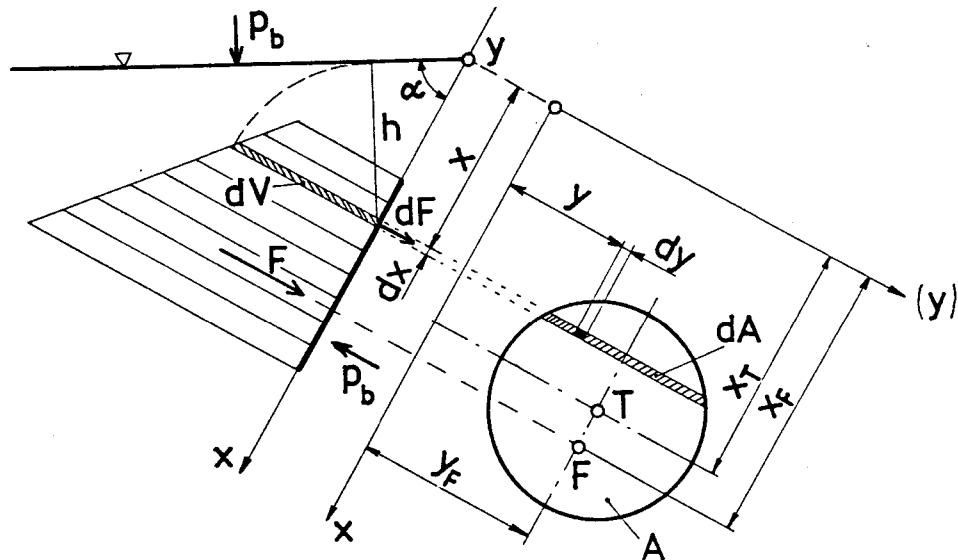


Obr. 24 Hydrostatické paradoxon

vyplývá z rov. (21) bude síla na dno ve všech případech stejná, i když je v každé téma obsažené kapaliny jiná. Síla na dno nezávisí na tvaru nádoby.

### 4.2 Rovinné stěny

Počítáme opět s přetlakem, neboť účinek barometrického tlaku se ruší, jak vidíme z obr. 25, na němž je znázorněno víko kryjící otvor ve stěně nádoby.



Obr. 25 Určení velikosti síly a působiště síly na rovinnou stěnu.

Zvolme stejný postup jako u předchozí úlohy. V hloubce  $h$  je přetlak  $p = g\rho h = g\rho sin \alpha x$ , který vyvolá na ploše  $dA$  sílu

$$dF = pdA = g\rho h dA = g\rho dV = dG = g\rho sin \alpha x dA \quad (22)$$

Tato síla je opět rovna tíze kapaliny  $dG$  v elementárním objemu  $dV = hdA$ , v obr. 25 vyšrafováném, který dostaneme sklopením hloubky  $h$  do směru normály k  $dA$ . Součet těchto elementárních sil po celé ploše  $A$  je pak roven tíze kapaliny  $G$  v zatěžovacím obrazci, nakresleném v obr. 25 nad plochou  $A$ :

$$F = G \quad (23)$$

Tento způsob výpočtu lze použít má-li plocha  $A$  jednoduchý geometrický tvar - čtverec, kruh a p. Dosadíme-li do rov. (20) za tlak  $p$  ze vztahu (22) pak

$$F = g\rho sin \alpha \iint_A x dA = g\rho sin \alpha S_y, \quad (24)$$

kde  $S_y$  je lineární (statický) moment plochy  $A$  k ose  $y$ , který lze vyjádřit jako  $S_y = x_T A$ , kde  $x_T$  je vzdálenost těžiště  $T$  plochy  $A$  od osy  $y$ . Po dosazení do rov. (24) za  $S_y$

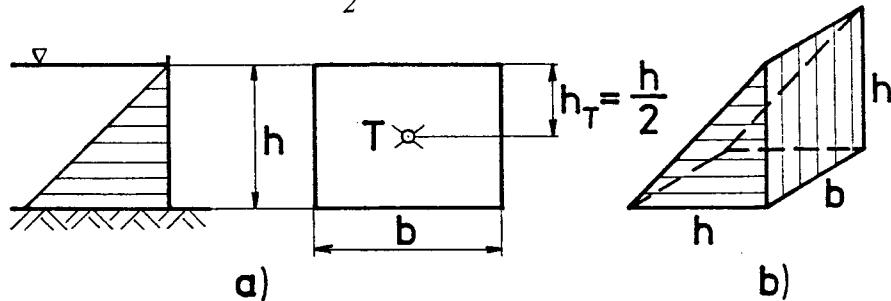
$$F = g\rho sin \alpha x_T A = g\rho h_T A = p_T A, \quad (25)$$

dostáváme jednoduchý vzorec, kde  $h_T$  je hloubka a  $p_T$  tlak v těžišti plochy  $A$ . Síla na rovinnou stěnu je rovna součinu: tlak v těžišti  $p_T$  krát plocha  $A$ .

Příklad 1: Stanovte sílu, kterou působí voda na stavidlo konstantní šířky  $b$ , obr. 26 a:

$$A = bh, \quad p_T = g\rho h / 2$$

$$F = p_T A = \frac{1}{2} g\rho b h^2 \quad (26)$$



Obr. 26

a) Stavidlo - svíslá stěna.

b) Zatěžovací obrazec.

Ke stejnemu výsledku dojdeme, určíme-li sílu  $F$  jako tíhu kapaliny v zatěžujícím obrazci obr. 26 b, jehož objem  $V = 1/2 h \cdot h \cdot b$

$$F = g\rho V = \frac{1}{2} g\rho b h^2 .$$

Protože hydrostatický tlak s hloubkou roste bude působiště síly  $F$  ležet níže než těžiště plochy  $A$ . Abychom stanovili souřadnice působiště vytkněme si elementární plošku  $dx \cdot dy$ , na níž působí elementární síla  $dF$ . Z momentové podmínky k ose  $y$ :

$$Fx_F = \iint_A x dF$$

dostaneme s použitím vztahů (22) a (24)

$$x_F = \frac{\iint_A x dF}{F} = \frac{g\rho \sin \alpha \iint_A x^2 dA}{g\rho \sin \alpha \iint_A x dA} = \frac{I_y}{S_y} ,$$

kde  $I_y$  je kvadratický moment plochy  $A$  k ose  $y$ . Je-li plocha  $A$  symetrická k ose jdoucí těžištěm a paralelní s osou  $x$  pak síla  $F$  leží na ose symetrie. Je-li plocha  $A$  nesymetrická, pak z momentové podmínky k ose  $x$

$$Fy_F = \iint_A y dF$$

lze použitím vztahů (22) a (24) určit

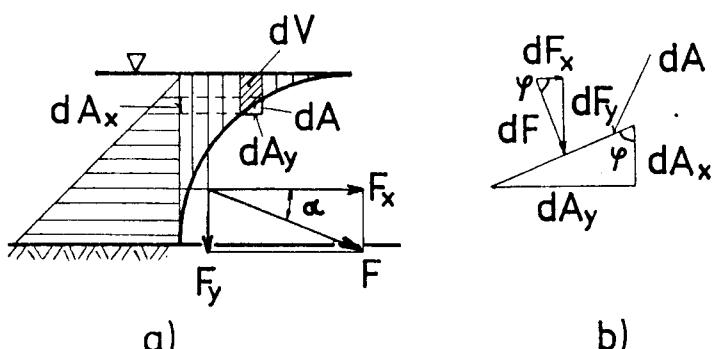
$$y_F = \frac{\iint_A y dF}{F} = \frac{g\rho \sin \alpha \iint_A xy dA}{g\rho \sin \alpha \iint_A x dA} = \frac{D_{xy}}{S_y} ,$$

kde  $D_{xy}$  je deviační moment plochy  $A$  k osám  $x$  a  $y$ .

#### 4.3 Zakřivené stěny

V tomto případě si nejprve integrací rovnice (20) stanovíme složky  $F_x$  a  $F_y$  síly  $\vec{F}$ , obr.

27.



Obr. 27 a) Určení složek  $F_x$  a  $F_y$  síly působící na zakřivenou stěnu.

b) Elementární ploška se silami na ni působícími.

Vytkneme si elementární plošku  $dA$  obr. 27a. Na ni působí elementární síla  $dF$ , obr. 27b, kterou rozdělíme do složek

$$dF_x = dF \cos \varphi = pdA \cos \varphi = pdA_x ,$$

$$dF_y = dF \sin \varphi = pdA \sin \varphi = pdA_y .$$

Z rovnic vidíme, že složky jsou rovny součinu přetlaku a příslušného průmětu plošky  $dA$ . Výsledné složky dostaneme opět integrací po celé ploše  $A$ . Promítnutím stěny ve směru  $x$  dostaneme svislou stěnu - obr. 27a, pak vodorovná složka

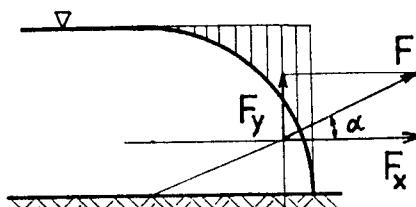
$$F_x = \iint_A pdA_x = p_T A_x ,$$

kde  $p_T$  je tlak v těžišti a  $A_x$  je velikost průmětu křivé stěny ve směru  $x$ . Výpočet síly na svislou stěnu je uveden jako příklad 1).

Svislá složka  $F_y = \iint_A p dA_y = g\rho \iint_A h dA_y = g\rho \iint_A dV = \iint_A dG = G$  je tedy rovna tíze kapaliny nad křivou plochou, což lze odvodit stejným postupem jako pro dno s tím rozdílem, že nyní je  $h$  proměnné. Výsledná síla a směr se určí z rovnic

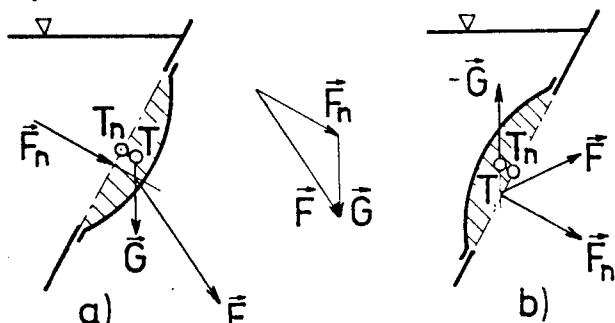
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_y}{F_x}. \quad (27)$$

*Poznámka: není-li nad křivou plochou kapalina, Jako je tomu u obr. 28, pak svislá složka se počítá opět jako tíha kapaliny nad křivou plochou (neboť tlak v určitém místě závisí na hloubce  $h$  pod hladinou!), ale  $F_y$  nyní směřuje vzhůru jako vztlak.*



Obr. 28 Zakřivená stěna nad níž není kapalina je vystavena vztlaku.

V některých případech je výhodné počítat sílu na křivou stěnu metodou náhradní roviny. Oddělme kapalinu nacházející se v zakřiveném víku obr. 29a od kapaliny v nádobě

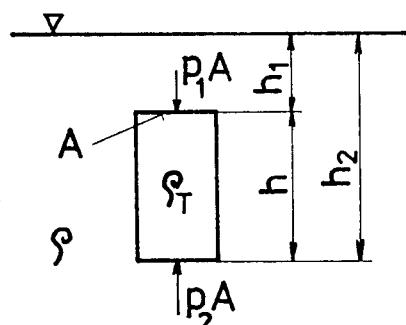


Obr. 29 Metoda náhradní roviny.

náhradní rovinou. Účinek kapaliny v nádobě nahradíme silou na náhradní rovinu  $F_n = p_T A$ . Přičteme-li k ní vektorově tíhu kapaliny  $\vec{G}$  nacházející se ve víku dostáváme výslednici  $\vec{F}$ . Není-li ve víku kapalina, obr. 29b, musíme tíhu vektorově odečíst.

#### 4.4 Hydrostatický vztlak

Je-li do kapaliny ponořeno těleso obr. 30, kde pro jednoduchost je nakreslen váleček



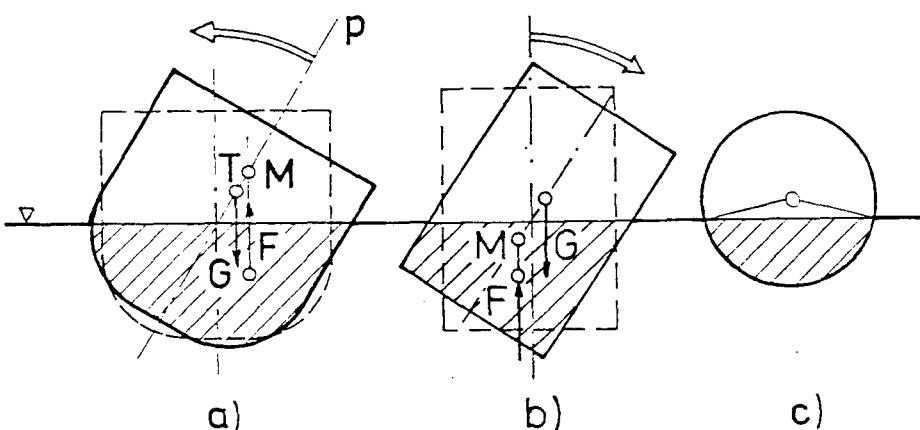
Obr. 30 Síly působící na ponořené těleso.

konstantního průřezu  $A$  (což nemění nic na obecnosti výsledku), pak účinek ve vodorovném směru je nulový, neboť hydrostatický tlak je ve vodorovných rovinách konstantní (působí jen namáhání tlakem). Stanovme výslednou sílu působící ve svislém směru:

$$F = p_2 A - p_1 A = g\rho(h_2 - h_1)A = g\rho h A = g\rho V = gm = G, \quad (28)$$

kde  $\rho$  je hustota kapaliny,  $h$  je výška tělesa a  $\rho_T$  je hustota tělesa, jež se v rovnici (28) vůbec nevyskytuje. Rov. (28) dokazuje Archimedův zákon: těleso ponořené do tekutiny je nadlehčováno silou rovnou tíze tekutiny tělesem vytlačené. Působíště vztlaku je v těžišti vytlačeného objemu tekutiny.

Je-li hustota tělesa  $\rho_T < \rho$ , pak těleso plave na povrchu kapaliny v takové rovnovážné poloze, aby tíha tělesa byla rovna hydrostatickému vztlaku. Rovnovážný stav může být stabilní, indiferentní, nebo labilní, podle toho, zda při malé výchylce z rovnovážné polohy se výchylka bude zmenšovat nebo zvětšovat. U plovoucích těles může nastat stabilní rovnováha i tehdy, je-li těžiště tělesa nad působištěm vztlaku, obr. 31, podmínkou však je, aby průsečík plavební osy  $p$  s nositelkou vztlaku, tzv. metacentrum  $M$ , ležel nad těžištěm tělesa  $T$ . V tomto případě tíha  $G$  a vztlak  $F$  vytvářejí stabilizující moment, který s výchylkou tělesa zpravidla nejprve roste a při větších výchylkách klesá až nakonec nabývá záporných hodnot. Plovoucí koule je v indiferentním stavu.



Obr. 31 Plování těles. a) Stabilní poloha - metacentrum  $M$  leží nad těžištěm  $T$ ,  
 b) labilní poloha - při vychýlení vznikne destabilizující moment,  
 leží-li metacentrum pod těžištěm,  
 c) indiferentní poloha.

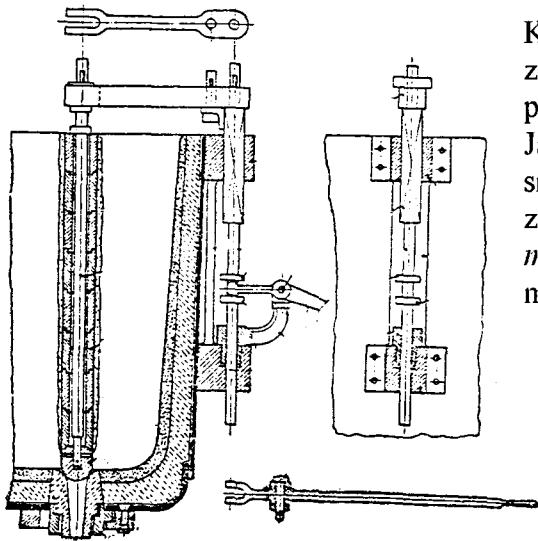
#### Otázky ke kapitole 4.:

- 1) Na čem závisí velikost tlakové síly na dno nádoby?
- 2) Co nazýváme „hydrostatické paradoxon“?
- 3) Jak počítáme tlakovou sílu na rovinou stěnu? Je nutno počítat složky?
- 4) Jak stanovíme působiště síly ad 3)?
- 5) Jak počítáme síly na zakřivenou stěnu? (2 metody).
- 6) Jak počítáme vodorovnou a svislou složku tlakové síly na zakřivenou stěnu?
- 7) Jak se v praxi využívá Archimedův zákon?

#### Víte, že

- Archimedes (kolem r. 287 - 212 př. Kr.) patřil k největším matematikům, fyzikům a konstruktérům starověku. První vypočítal poměrně přesně poměr obvodu kružnice ku průměru a dokázal, že jeho hodnota leží v intervalu  $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ . Sestrojil čerpadlo na kapaliny a sypké látky - Archimedův šroub, kladkostroj, vojenské metací stroje aj. K objevu Archimedova zákona se váže tato legenda: Byl pověřen vládcem Syrakus Hieronem zjistit, zda si zlatník při výrobě koruny ve tvaru věnce neponechal část zlata a nenahradil je stříbrem. (Hustota stříbra je  $10\ 500 \text{ kg/m}^3$  a zlata  $19\ 300 \text{ kg/m}^3$ ). Tíha koruny odpovídala tíze kusu zlata. Při vstupu do vany zcela naplněné část vody vytékla a když se ponořil ucítil vztlak. S výkřikem „heuréka“ (našel jsem) běžel překontrolovat tíhu koruny a zlata ve vzduchu a ve vodě.

## Příklad P. 4.1



Kruhový otvor ve dně licí pánve je uzavřen tzv. zátkovou tyčí obr. P 4.1a. Pro jednoduchost předpokládejme, že její konec má tvar kuželeta. Jak velkou silou působí roztavená ocel na smočenou část kuželeta  $F_{pl}$ ? Jakou silou  $F_t$  je zátková tyč tlačena do sedla, je-li její hmotnost  $m = 600 \text{ kg}$  a je-li  $H = 3 \text{ m}$ ,  $h = 0,3 \text{ m}$  a  $R = 0,1 \text{ m}$ .

Dáno:  $m = 600 \text{ kg}$ ,  $R = 0,1 \text{ m}$ ,  $h = 0,3 \text{ m}$ ,  $H = 3 \text{ m}$

Určit:  $F_{pl} = ? \text{ N}$   
 $F_t = ? \text{ N}$

### Rozbor (schéma):

Výsledná vodorovná složka síly, kterou působí roztavená ocel na plášť kuželeta je rovna nule (to platí i pro celou zátkovou tyč) (viz obr. P 4.1.b).

Svislá složka síly, kterou působí roztavená ocel na smočený plášť kuželeta se dá vyjádřit jako tíha kapaliny nad uvažovanou plochou obr. P 4.1.c. Síla, kterou je tyč stlačena do sedla je rovna rozdílu tíhy tyče a ferrostatického vztlaku.

### Předpoklady:

1. Kuželové zakončení tyče (skutečné je polokulové).
2. Kužel dosedá do otvoru právě v polovině své výšky  $h$ .
3. Hustota roztavené oceli  $\rho = 7\,000 \text{ kg/m}^3$ .

### Řešení:

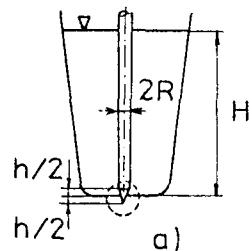
Sílu na smočenou část pláště kuželeta spočítáme jako tíhu oceli ve vyšrafovovaném rotačním objemu  $V$ , obr. P.4.1.c složeného z dutého válce o objemu:

$$V_1 = \pi \left[ R^2 - \left( \frac{R}{2} \right)^2 \right] \left( H - \frac{h}{2} \right) = \frac{3}{4} \pi R^2 \left( H - \frac{h}{2} \right) \quad a$$

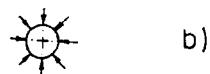
objemu vzniklému rotací pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami  $h/2$  a  $R/2$ , resp. polovině objemu dutého

$$\text{válce o výšce } h/2: V_2 = \frac{3}{16} \pi R^2 h$$

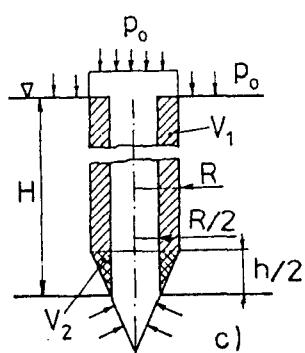
$$V = V_1 + V_2 = \frac{3}{4} \pi R^2 \left( H - \frac{h}{2} \right) + \frac{3}{16} \pi R^2 h = \frac{3\pi R^2}{4} \left( H - \frac{1}{4} h \right)$$



Obr. P 4.1 a



Obr. P4.1b



Obr. P 4.1 c

$$F_{pl} = g\rho V = 9,81 \cdot 7000 \cdot \frac{3\pi}{4} \cdot 0,1^2 \left( 3 - \frac{1}{4} 0,3 \right) = 4732 \text{ N.}$$

Síla, kterou je tyč tlačena do sedla, je-li pánev naplněna:

$$F_t = G - F_{pl} = gm - F_{pl} = 9,81 \cdot 600 - 4732 = 1154 \text{ N.}$$

#### Diskuse výsledku:

Ke stejnemu výsledku lze dospět matematicky náročněji integrací elementárních tlakových sil po povrchu smočené části pláště kuželes, resp. tyče. Sílu na zátkovou tyč nelze počítat jako tíhu kapaliny vytlačenou celým tělesem, neboť na spodní část, zakrývající otvor o poloměru  $R/2$ , obr. P 4.1c, působí tlak  $p_0$ , který je menší než tlak u dna.

#### Příklad 4.2

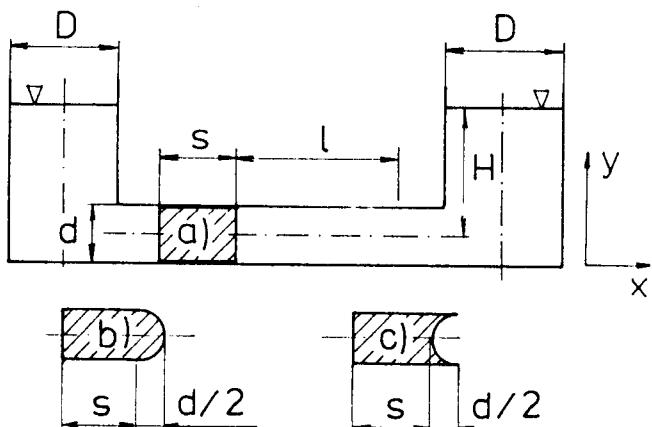
Dvě otevřené válcové nádoby o stejném průměru  $D$  jsou spojeny potrubím o průměru  $d$ , ve kterém se nachází píst, který může být různě tvarován. Obě jsou naplněny rtutí do stejné výše. Jak velkou práci  $W$  musíme dodat, aby se pisty posunuly o délku  $l$ ? Jak velká síla působí na pisty na konci posuvu?

Dáno:  $D = 40 \text{ mm}$ ,  $d = 20 \text{ mm}$ ,  $s = 40 \text{ mm}$ ,  $l = 0,1 \text{ m}$ ,  $H = 60 \text{ mm}$ ,  $\rho = 13600 \text{ kg/m}^3$

Urcit: práci  $W = ?$ , síly  $F_a = ?$ ,  $F_b = ?$ ,  $F_c = ?$

#### Rozbor (schéma):

Mezi stěnou pistu a potrubím je vůle (i když velmi malá), proto na počátku působí na pist pouze svislá složka, vodorovné složky síly jsou v rovnováze, bez ohledu na tvar pistu. Posune-li se pist doprava hladina v levé nádrži klesne a v pravé stoupne - proti pohybu bude působit výsledná vodorovná složka tlakové síly, kterou je nutno překonat.



#### Předpoklady:

Pohyb pistu je velmi pomalý, bez tření, průtok vůli mezi pistem a stěnou potrubí je zanedbatelný.  
Síly počítáme jako v hydrostatici.

P 4.2

#### Řešení:

Při posuvu pistu o  $x$  se hladiny vychýlí z rovnovážné polohy o  $\pm y = x(\frac{d}{D})^2$ . Výsledná vodorovná složka síly na pisti nezávisí na tvaru pistu

$$F_x = \Delta p \frac{\pi d^2}{4} = g\rho [(H + y) - (H - y)] \frac{\pi d^2}{4} = 2g\rho y \frac{\pi d^2}{4}, \text{ dosazením za } y: F_x = \frac{\pi}{2} g\rho \frac{d^4}{D^2} x$$

se mění od nuly v počáteční poloze ( $x = 0$ ) do maxima na konci posuvu ( $x = l$ ). Práci proto

stanovíme integrací. Pro posunutí pístu o  $dx$ , nachází-li se v odlehlosti  $x$  od počáteční polohy je počáteční práce  $dW = F_x dx$ .

Celková práce pak je:

$$W = \int_0^l F_x dx = \frac{\pi}{2} g \rho \frac{d^4}{D^2} \int_0^l x dx = \frac{\pi}{4} g \rho \frac{d^4}{D^2} l^2 = \frac{\pi}{4} 9,81 \cdot 13600 \cdot \frac{0,02^4}{0,04^2} 0,1^2 = 0,105 J$$

Síly na píst na konci posuvu:

Všechny vodorovné složky jsou stejné:

$$F_x = \frac{\pi d^2}{4} 2g\rho y = \frac{\pi 0,02^2}{2} 9,81 \cdot 13600 \cdot \left(\frac{0,02}{0,04}\right)^2 0,1 = 2,10 N, \text{ kde } y = \left(\frac{d}{D}\right)^2 l.$$

Svislé složky (Archimedův zákon):

$$\text{a)} F_{ya} = g \rho \frac{\pi d^2}{4} s = 9,81 \cdot 13600 \cdot \frac{\pi 0,02^2}{4} 0,04 = 1,68 N.$$

$$F_a = \sqrt{F_x^2 + F_{ya}^2} = \sqrt{2,10^2 + 1,68^2} = 2,69 N.$$

$$\text{b)} F_{yb} = g \rho \left( \frac{\pi d^2}{4} s + \frac{1}{2} \frac{\pi d^3}{6} \right) = g \rho \frac{\pi d^2}{4} s \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{d}{s} \right) = F_{ya} \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{0,02}{0,04} \right) = 1,68 \cdot 1,167 = 1,96 N.$$

$$F_b = \sqrt{2,10^2 + 1,96^2} = 2,87 N.$$

c)

$$\begin{aligned} F_{yc} &= g \rho \left( \frac{\pi d^2}{4} s + \frac{\pi d^2}{4} \frac{d}{2} - \frac{1}{2} \frac{\pi d^3}{6} \right) = g \rho \frac{\pi d^2}{4} s \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{d}{s} - \frac{1}{3} \frac{d}{s} \right) = F_{ya} \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{d}{s} \right) = \\ &= 1,68 \left( 1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{0,02}{0,04} \right) = 1,82 N \end{aligned}$$

$$F_c = \sqrt{2,10^2 + 1,82^2} = 2,78 N.$$

Diskuse:

I výsledná síla na píst je prakticky nezávislá na tvaru pistu ( $\pm 3\%$ ). Hladiny v nádobkách kolísají o  $\pm 25$  mm. Kdyby byl píst poháněn klikovým mechanismem, konal by vratný pohyb a setrvačné síly, závislé na otáčkách, by už nebyly zanedbatelné, viz. kap. 9 Nestacionární proudění.

## 5. POTENCIÁL INTENZITY HMOTOVÝCH SIL

Chceme-li stanovit tlak v bodě  $B$ , obr. 19, pak integrujeme Eulerovu rovnici hydrostatiky podle křivky spojující body  $A$  a  $B$ :

$$\int_{pA}^{pB} dp = p_B - p_A = \rho \int_{AB} (K_x dx + K_y dy + K_z dz).$$

Z teorie křivkových integrálů víme, že výsledek integrace nezávisí na dráze, je-li výraz v závorce úplným diferenciálem skalární funkce  $U(x,y,z)$

$$dU = K_x dx + K_y dy + K_z dz = \frac{dp}{\rho}. \quad (29)$$

Tuto funkci nazýváme potenciálem intenzity hmotových sil (resp. potenciálem relativního zrychlení).

a) Je-li dána potenciální funkce  $U = U(x,y,z)$ , pak lze přírůstek tlaků stanovit snadno jako přírůstek potenciálů násobený hustotou, aniž bychom museli řešit křivkový integrál, neboť

$$\int_{pA}^{pB} dp = p_B - p_A = \rho \int_{U_A}^{U_B} dU = \rho(U_B - U_A). \quad (30)$$

Složky intenzity hmotových sil pak vypočteme z rovnice

$$K_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad K_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad K_z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (31)$$

neboť platí

$$dU = \frac{dp}{\rho} = K_x dx + K_y dy + K_z dz$$

a současně

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Rovnice (31) dostaneme porovnáním obou posledních rovnic.

b) Jsou-li dány složky vektoru intenzity hmotových sil

$$K_x = K_x(x,y,z); \quad K_y = K_y(x,y,z); \quad K_z = K_z(x,y,z)$$

ptáme se, zda v tomto případě existuje potenciál  $U(x,y,z)$ . Je-li  $dU$  úplným diferenciálem, pak pro smíšené derivace platí rovnice

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}. \quad (32)$$

Vezmeme-li v úvahu rov. (31) dostaváme pro existenci potenciálu i relativní rovnováhy tyto tři podmínky:

$$\frac{\partial K_x}{\partial y} = \frac{\partial K_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial K_y}{\partial z} = \frac{\partial K_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial K_z}{\partial x} = \frac{\partial K_x}{\partial z}. \quad (33)$$

### Příklad P.5.1

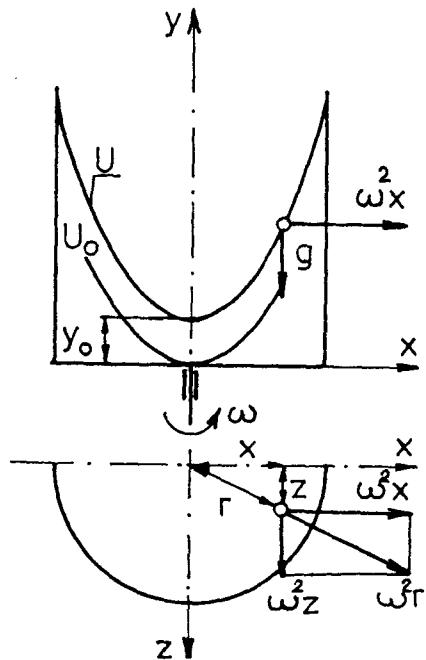
Stanovte potenciál intenzity hmotových sil pro případ relativní rovnováhy, kdy nádoba rotuje kolem svislé osy úhlovou rychlosťou  $\omega = \text{konst.}$ , za působení zrychlení zemské tíže  $g$ .

Dáno:  $\omega = \text{konst.}$ ,  $g = \text{konst.}$

Určit:  $U = ?$

Rozbor (schéma):

Na kapalinu rotující společně s nádobou jako tuhé těleso působí vedle síly tíže ještě odstředivá síla. Při rotaci kolem svislé osy může nastat relativní rovnováha a tedy existuje potenciál intenzity hmotových sil. Vzájemná vazba je dána rovnicemi (31):



Předpoklady:

- 1)  $\omega = \text{konst.}$ , uvažujeme už ustálenou rotaci (částice kapaliny v relativním klidu).
- 2)  $g = \text{konst.}$
- 3)  $\rho = \text{konst.}$

Obr. P 5.1

Řešení:

Složky intenzity hmotových sil

$$K_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 x ; \quad K_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -g ; \quad K_z = \frac{\partial U}{\partial z} = \omega^2 z \Rightarrow$$

$dU = \omega^2 x dx - g dy + \omega^2 z dz$ . Integrací dostaneme potenciál ve tvaru (pro  $x = y = z = 0$   $U = U_0$ ).

$$U - U_0 = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + z^2) - gy = \frac{\omega^2 r^2}{2} - gy.$$

Na velikost integrační konstanty příliš nezáleží, neboť vždy počítáme s rozdíly potenciálů.

Diskuse výsledků:

V tomto případě se potenciál skládá ze dvou složek  $U_g = -gy$  což je potenciál zrychlení zemské tíže a  $U_\omega = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + z^2) = \frac{\omega^2}{2} r^2$ , což je potenciál odstředivé síly.

Protože platí rov. (29)  $dU = dp/\rho$  budou ekvipotenciální plochy  $U = \text{konst.}$  shodné s hladinovými plochami  $p = \text{konst.}$  V tomto případě dostaneme např. rovnici volné hladiny ve tvaru:

$$y = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + y_0, \text{ tj. rotační paraboloid.}$$

## Příklad P.5.2

Jaký je stabilní tvar rotujícího velkého objemu stejnorodé kapaliny ( $\rho = \text{konst.}$ ), jsou-li její částice přitahovány ke středu gravitační silou nepřímo úměrnou kvadrátu poloměru  $R$ .

Potenciál gravitačních sil, vztažen k jednotce hmotnosti, lze vyjádřit rovnicí  $U_1 = \frac{\kappa m}{R}$ , kde

$\kappa$  je gravitační konstanta,  $m$  celková hmotnost kapalin a  $R$  je vzdálenost částice od středu celého objemu (je počátkem souřadného systému). Pro potenciál odstředivé síly jsme v příkladu P.5.1 odvodili vztah  $U_2 = \frac{\omega^2 r^2}{2}$ , kde  $\omega = \text{konst.}$  je úhlová rychlosť rotace a  $r$  je kolmá vzdálenost od osy rotace  $y$ . Porovnejte dosažené výsledky s tvarem Země.

$$\underline{\text{Dáno:}} \quad U_1 = \frac{\kappa m}{R} \quad U_2 = \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

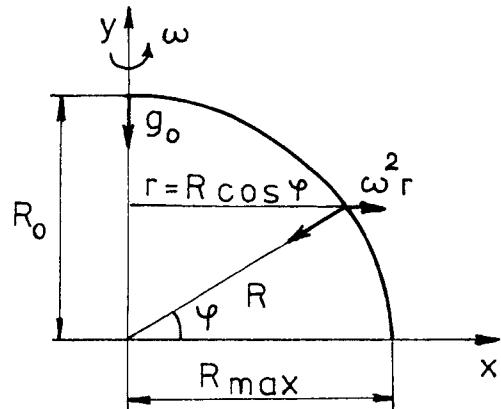
Určit:  $U = U_1 + U_2 = \text{konst.}$ , porovnat s tvarem Země.

Rozbor (schéma):

Tvar rotujícího objemu kapaliny stanovíme jako hladinovou plochu potenciálu hmotnostních sil  $U = \text{konst.}$  Abychom mohli porovnat náš teoretický výsledek pro homogenní kapalinu (Země není homogenní!) uvedeme, že poloosy Země  $R_0 = 6\ 356\ \text{km}$ ,  $R_{\max} = 6\ 378\ \text{km}$ ,  $g_0 = 9,832\ \text{m/s}^2$  a  $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$ . (poznámka: hvězdný den má 86 164 s, což je méně než součin 24.60.60).

Předpoklady:

- 1)  $\omega = \text{konst.}$  je relativně malá.
- 2)  $\rho = \text{konst.}$
- 3) malé zploštění.



Obr. P 5.2

Řešení:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{\kappa m}{R} + \frac{\omega^2 r^2}{2} = \frac{\kappa m \cos \varphi}{r} + \frac{\omega^2 r^2}{2} = \frac{\kappa m}{R} + \frac{\omega^2}{2} R^2 \cos^2 \varphi = C = \text{konst.},$$

tj. rovnice osově symetrického tělesa - sféroidu. Konstantu  $C$  určíme z této rovnice napsané pro „severní pól“ kde  $\varphi = \pi/2$  a  $\cos \varphi = 0$ ,  $R = R_0$ :  $C = \frac{\kappa m}{R_0}$ .

Protože nemáme dánou hmotnost  $m$  vyjádříme si zrychlení na pólu  $g_0$  (kde  $r = 0$ ) jako derivaci potenciálu  $U_1$  ve směru  $R$

$$g_0 = \frac{\partial U_1}{\partial R} \Big|_{r=0} = -\frac{\kappa m}{R^2} \Big|_{r=0} = -\frac{\kappa m}{R_0^2} \Rightarrow \kappa m = g_0 R_0^2 \quad a \quad C = g_0 R_0.$$

Rovnice povrchu rotující kapaliny bude

$$\frac{g_0 R_0^2}{R} + \frac{\omega^2}{2} R^2 \cos^2 \varphi = g_0 R_0$$

a upravíme ji na takový tvar, abychom mohli určit  $R_{max}$ :  $\varphi = 0, \cos \varphi = 1$

$$1 + \frac{\omega^2 R_0}{2g_0} \frac{R_{max}^3}{R_0^3} = \frac{R_{max}}{R_0} \quad \text{tj. kubická rovnice pro } R_{max}.$$

Liší-li se sféroid jen málo od koule pak lze vyjádřit  $R_{max}/R_0 \approx 1 + \Delta$   
a  $\Delta$  stanovíme z rovnice

$$1 + \frac{\omega^2 R_0}{2g_0} (1 + \Delta)^3 = 1 + \Delta \quad \text{označme} \quad a = \frac{\omega^2 R_0}{2g_0} \\ 1 + a(1 + 3\Delta + 3\Delta^2 + \Delta^3) = 1 + \Delta$$

protože  $\Delta \ll 1$  lze zanedbávat členy s  $\Delta^2$  a  $\Delta^3$ , pak

$$1 + a(1 + 3\Delta) \approx 1 + \Delta$$

$$1 + 3\Delta \approx \frac{\Delta}{a}$$

$$\Delta = \frac{1}{\frac{1}{a} - 3} = \frac{a}{1 - 3a} .$$

$$R_{max} \approx R_0 \left( 1 + \frac{1}{(1/a) - 3} \right) .$$

$$\text{Zploštění sféroidu } \varepsilon = \frac{R_{max} - R_0}{R_0} = \frac{1}{(1/a) - 3} .$$

#### Diskuse výsledku:

$$\text{Zploštění Země } \varepsilon = \frac{6378 - 6356}{6356} = \frac{1}{288,9} = 0,00346 .$$

Za našich předpokladů je zploštění Země asi poloviční neboť

$$a = \frac{\omega^2 R_0}{2g_0} = \frac{(7,29 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6,356 \cdot 10^6}{2 \cdot 9,832} = \frac{1}{582,1} = 0,001718$$

$$\text{a teoretické zploštění } \varepsilon = \frac{1}{1/a - 3} = \frac{1}{582,1 - 3} = \frac{1}{579,1} .$$

Tento poměrně značný rozdíl je způsoben tím, že jádro Země (NiFe) má mnohem větší hustotu než zemská kůra (SiAl) a tím, že jsme neuvažovali vzájemné přitažlivé síly mezi česticemi.

# HYDRODYNAMIKA

## Základní pojmy.

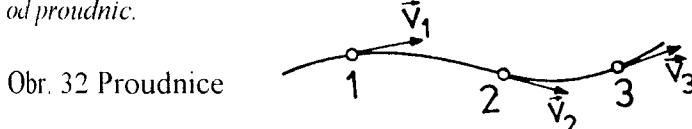
Pohyb tekutiny nazýváme tečením, tokem nebo prouděním. Proudění je ve skutečnosti vždy prostorové (3 rozměrné), ale v některých případech pro usnadnění řešení je považujeme za rovinné (2 rozměrné), nebo dokonce za 1 rozměrné, převažuje-li jeden rozměr nad zbývajícími dvěma, jako je tomu při proudění v potrubí.

Každý pohyb tekutiny někdy začíná a někdy končí, tj. mění se s časem. Takové proudění je neustálené tj. nestacionární. Jestliže v průběhu námi uvažovaného kratšího časového intervalu se proudění nemění nebo se mění jen nepatrně, lze je považovat za ustálené tj. stacionární nebo v druhém případě za kvazistacionární.

Budeme-li sledovat pohyb určité částice tekutiny, což je analogické vyšetřování pohybu hmotného bodu v mechanice tuhých těles, pracujeme tzv. Lagrangeovou metodou. U této metody narázíme zpravidla na nepřekonatelné matematické potíže. Proto se častěji používá Eulerova metoda, jež sleduje proudění v určitém místě (např. změnu rychlosti, tlaku a p.) jímž protékají stálé jiné částice tekutiny.

Trajektorie jsou dráhy částic tekutiny. Získali bychom je fotografováním „označených“ částic tekutiny dlouhodobou expozicí. „Označené“ částice se získají buď tak, že v určitém místě např. obarvíme částici kapaliny, nebo ohřejeme vzduch (změní se index lomu světla) ap. Trajektorie lze získat i zavedením částic odlišujících se nějak od proudící tekutiny, jako např. jemné bukové piliny, nebo nenapěněné polystyrenové kuličky ve vodě, nebo olejové páry - „bílý dým“ - zavedený do proudu vzduchu v kouřovém tunelu.

Proudnice je vektorová čára v rychlostním poli - vektory rychlosti jsou k proudnicí v každém bodě tečné, obr. 32. Proudnice získáme fotografováním „označených“ částic tekutiny krátkou expozicí, přičemž počet takových částic v proudovém poli musí být dostatečně veliký. Nedostaneme spojitu čáru, nýbrž velký počet krátkých úseček, jež pak plynule spojíme. Trajektorie a proudnice jsou vždy shodné při stacionárním proudění. Při nestacionárním proudění jsou trajektorie zpravidla rozdílné od proudnic.

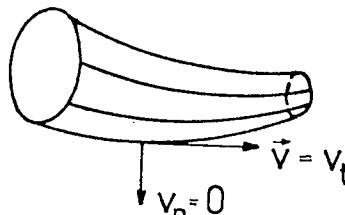


Obr. 32 Proudnice

**Emisní čára.** Plynulým přívodem barviva v určitém místě proudového pole (viz Reynoldsův pokus, kap. 8), nebo plynulým zaváděním částic jiných vlastností než má tekutina, např. dým do vzduchu, se vytvoří spojité vlákno, zřetelně se odlišující od okolní tekutiny - emisní čára. Emisní čára spojuje polohy všech částic tekutiny, jež postupně prošly určitým bodem proudového pole.

Při stacionárním proudění jsou trajektorie, proudnice a emisní čáry shodné. Při nestacionárním proudění jsou obecně tyto čáry rozdílné, výjimkou jsou zvláštní případy nestacionárního proudění, kdy směr rychlosti je stále stejný a mění se pouze její velikost např. paralelní proud, proudění po koncentrických kružnicích - vír ap.

Proudová trubice je pomyslná trubice v proudovém poli, jejíž pláště je tvořen proudnicemi, jež procházejí uzavřenou křivkou, obr. 33. Protože je rychlosť tečná k proudnicím, jsou normálně



Obr. 33 Proudová trubice

složky rychlosti  $v_n$  na pláště proudové trubice všude rovny nule a pláštěm tedy neprotéká žádná tekutina. Tato fiktivní trubice má z hlediska proudění stejné vlastnosti jako reálná trubice s tuhými nepropustnými stěnami.

Proudové vlákno je hmotný obsah proudové trubice.

## 6. STACIONÁRNÍ JEDNOROZMĚRNÉ PROUDĚNÍ IDEÁLNÍ NESTLAČITELNÉ TEKUTINY

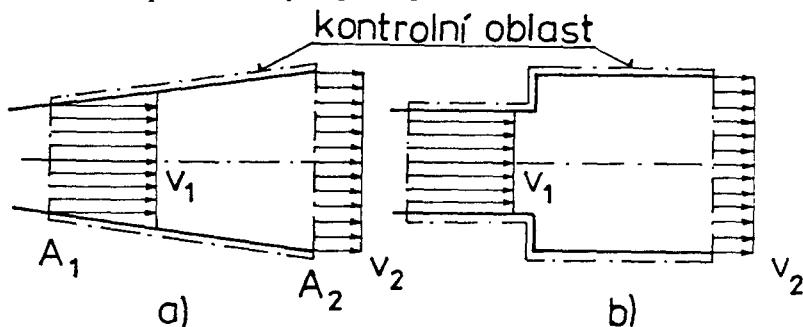
V této části se budeme zabývat pouze jednorozměrným prouděním tekutin za působení vnějších sil. Při proudění musí být splněny základní fyzikální zákony: zachování hmotnosti, hybnosti a energie. V mechanice tekutin se tyto zákony používají ve zcela určitém tvaru, integrálním nebo diferenciálním, které si v dalším odvodíme.

### 6.1 Základní rovnice

#### Integrální tvary:

##### a) Zákon zachování hmotnosti. Rovnice kontinuity.

Uvažujeme průtok nestlačitelné tekutiny ( $\rho = \text{konst.}$ ) elementární proudovou trubici, obr. 34. Nebudeme sledovat pohyb určité částice tekutiny, nýbrž si z proudové trubice vytkneme určitou část - **kontrolní oblast** - vyznačenou čerchovaně a pomocí bilanční rovnice si popíšeme průtok touto oblastí. Protože stěna proudové trubice je tvořena proudnicemi (rychlosť je v každém bodě tečná), neprotéká pláštěm proudové trubice žádná tekutina (jako u tuhé stěny potrubí). Tekutina přitéká do kontrolní oblasti pouze vstupním průřezem  $A_1$  a vytéká pouze výstupním průřezem  $A_2$ . Ve vstupním průřezu o velikosti  $A_1$  je rychlosť  $v_1$ , kterou s ohledem na to, že předpokládáme ideální tekutinu a malý průřez, můžeme považovat za konstantní po celém průřezu. Podobně předpokládáme, že i výstupní rychlosť  $v_2$  je rozložena rovnoměrně po celém výstupním průřezu  $A_2$ .



Obr. 34 Část proudové trubice, jež tvoří kontrolní oblast pro odvození integrálního tvaru rovnice kontinuity

a) plynulá změna průřezu

b) náhlá změna průřezu.

Za jednotku času proteče oběma průřezy stejně množství nestlačitelné tekutiny tj. hmotnostní tok je stejný

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= \dot{m}_2, & (\text{kg/s}) \\ \rho A_1 v_1 &= \rho A_2 v_2, \\ A_1 v_1 &= A_2 v_2 = \dot{V}. & (\text{m}^3/\text{s}) \end{aligned} \quad (34)$$

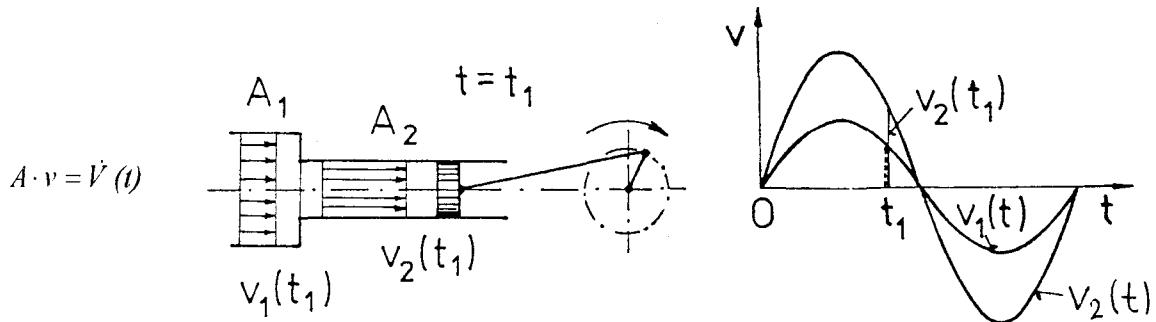
Z poslední rovnice tzv. rovnice kontinuity plyne, že součin průřezu a rychlosti je pro všechny průřezy stejný a je roven objemovému průtoku  $\dot{V}$ .

Ve velkém průřezu bude tedy malá rychlosť a v malém průřezu velká rychlosť,

obr. 34. Je-li proudění stacionární je průtok nezávislý na čase tj.  $\dot{V} = \text{konst.}$  a rovnici kontinuity lze psát ve tvaru

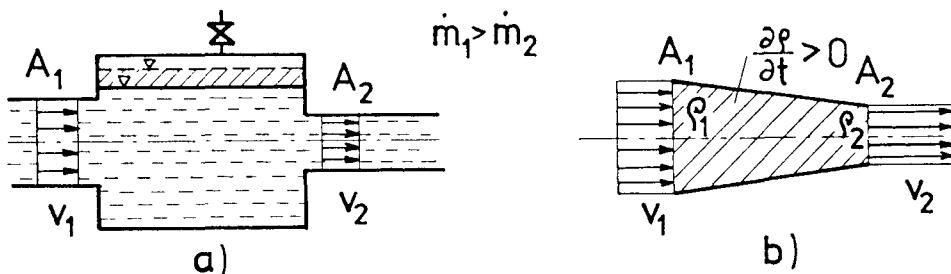
$$A \cdot v = \dot{V} = \text{konst.} \quad (35)$$

Při nestacionárním proudění, jež je naznačeno na obr. 35, kde píst vykonává vratný pohyb a jeho rychlosť a tedy i objemový průtok jsou funkcí času  $t^+ = \dot{V}(t)$  platí rovnice (35) jen pro určitý okamžik, resp.



Obr. 35 Rovnice kontinuity platí při nestacionárním proudění jen pro určitý okamžik.

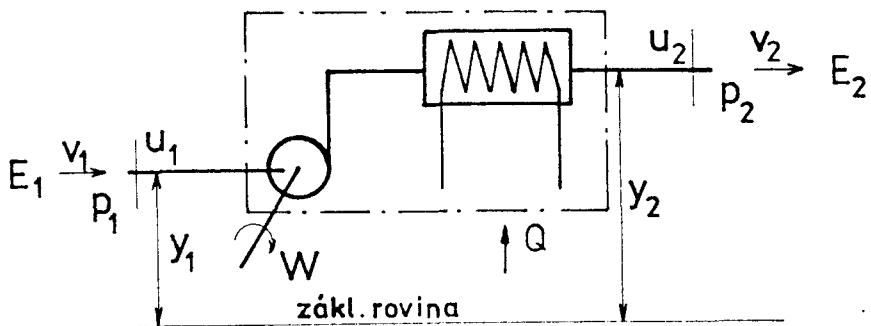
*Poznámka:* při odvození rovnice kontinuity jsme mléčky předpokládali, že mezi oběma pruženy  $A_1$  a  $A_2$  žádná hmotnost nevzniká ani nezaniká, že neexistují žádné jiné možnosti přítoku nebo odtoku tekutiny než uvažovanými pruženy a v případě, že se jedná o kapalinu, že nedojde k přetržení proudu a ke vzniku par (kavern). Dále předpokládáme, že v uvažovaném objemu mezi pruženy  $A_1$  a  $A_2$  nedojde k akumulaci (nebo ubytku) hmotnosti, což u nestlačitelných tekutin může nastat není-li pružez zcela vyplňen kapalinou a hladina se zvedá (nebo klesá), obr. 36a. U stlačitelných tekutin se může hustota  $\rho$  mezi oběma pruženy měnit a tedy i když je pružez tekutinou vyplňen, může dojít k akumulaci jestliže roste hustota s časem  $t$ .  $\partial\rho/\partial t > 0$  obr. 36b. V obou případech naznačených na obr. 36 bude vytékající množství  $m_2$  menší než přitékající  $m_1$  o hmotnost  $\Delta m$ , jež se akumuluje mezi vstupním a výstupním pružezem.



Obr. 36 Mezi vstupním a výstupním průřezem dochází k akumulaci tekutiny:  
a) zvedáním hladiny kapaliny, b) růstem hustoty plynu.

b) Zákon zachování energie, Bernoulliova rovnice.

Zákon zachování energie je ve fyzice formulován jako první věta termodynamiky. Aplikujeme ji na stacionární průtok nevazké nestlačitelné tekutiny kontrolní oblastí, obr. 37.



Obr. 37 Soustava potrubí, čerpadla a výměníku tepla uvnitř kontrolní oblasti pro odvození integrálního tvaru zákona o zachování energie.

V ní je tekutině za jednotku času dodávána mezi vstupním průřezem 1 a výstupním průřezem 2 mechanická energie čerpadlem  $W$  a tepelná energie  $Q$  ve výměníku.

Změna celkové energie soustavy  $\Delta E = E_2 - E_1$  je rovna součtu přivedené tepelné energie  $Q > 0$  (odvedené teplo  $< 0$ ) a přivedené mechanické energie  $W$ . V technické praxi se dodávaná práce (např. čerpadlem, kompresorem a p.) bere jako záporná, neboť u plynů se při stlačení objem zmenšuje. Proto dodávaná energie  $W < 0$  je záporná a musíme ji brát se znaménkem minus:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = Q - W. \quad (36)$$

Celková energie tekutiny  $E$  se skládá z energie vnitřní  $U$ , polohové  $E_p$ , tlakové  $E_S$  a kinetické  $E_K$ :

$$E = U + E_p + E_S + E_K. \quad (37)$$

Uvedené rovnice (36) a (37) se vztahují na celkové množství tekutiny  $m$  protékající systémem.

Při výpočtech se však většinou pracuje s měrnou energii  $e$ , což je podíl energie tekutiny  $E$  a její hmotnosti  $m$

$$e = E/m = u + e_p + e_S + e_K,$$

kde  $u$  je měrná vnitřní energie,  $e_p$  měrná polohová energie,  $e_S$  měrná tlaková energie a  $e_K$  měrná kinetická energie ve vyšetřovaném bodě. Vnitřní energie je u kapalin a ideálních plynů závislá pouze na teplotě  $u = c_V T$ , kde  $c_V$  je měrná tepelná kapacita tekutiny při stálém objemu a  $T$  termodynamická (absolutní) teplota. Měrná polohová energie  $e_p$  je rovna práci potřebné k přemístění částice tekutiny o hmotnosti 1 kg ze základní roviny do vyšetřovaného bodu. V gravitačním poli je  $e_p = gy$ , kde  $y$  je svislá vzdálenost bodu nad zvolenou vodorovnou základní rovinou. Měrná tlaková energie je rovna práci potřebné k protlačení částice o hmotnosti 1 kg ideálním pístem (bez tření a netěsnosti) do prostoru s tlakem  $p$ . Práce je rovna součinu síly  $F$  a dráhy pístu  $I$ :  $W_S = F \cdot I = p \cdot A \cdot l = p \cdot V$ , kde sílu  $F$  jsme vyjádřili jako součin statického tlaku  $p$  a průřezu  $A$ . Součin průřezu  $A$  a dráhy  $l$  je roven objemu  $V$  protlačené částice o hmotnosti  $m = 1 \text{ kg} = \rho V$ . Z této poslední rovnice plyne, že  $V = 1 \text{ kg}/\rho$  a tedy měrná tlaková energie  $e_S = W_S/m = p \cdot V/(\rho V) = p/\rho$ . Měrná kinetická energie  $e_K = v^2/2$ .

Samozřejmě zavedeme i měrné dodané teplo  $q$  a měrnou dodanou práci  $w < 0$ .

Dosazením výše uvedených vztahů do rovnic (36) a (37) dostaneme:

$$u_2 - u_1 + g(y_2 - y_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = q - w. \quad (38)$$

Pro izotermní proudění bez přívodu tepla ( $q = 0$ ) a mechanické energie ( $w = 0$ ) bude teplota  $T = \text{konst.}$  ( $u_1 = u_2$ ) a dostaváme Bernoulliovu rovnici pro částici tekutiny o hmotnosti 1 kg:

$$gy_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = gy_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} = C_m = \text{konst.} \quad (39a)$$

Dělíme-li rovnici gravitačním zrychlením  $g$ , dostaváme Bernoulliovu rovnici pro částici tekutiny o jednotkové tíze a každý člen má rozměr délky:

$$y_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = y_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = h_c = \text{konst.} \quad (39b)$$

První člen nazýváme polohovou výškou, druhý tlakovou a třetí rychlostní (kinetickou) výškou.

Při stacionárním proudění ideální nestlačitelné tekutiny v homogenním gravitačním poli je součet polohové, tlakové a rychlostní výšky konstantní.

Při proudění ve vodorovném směru je  $y_1 = y_2$  a polohová energie se nemění. Při proudění plynů, jež mají malou hustotu, je polohová energie zanedbatelná vzhledem k zbyvajícím členům. V obou případech pak zůstává v Bernoulliově rovnici jen tlaková a rychlostní výška. Vynásobíme-li nyní rov. (39b) členem  $g\rho$  dostaneme Bernoulliovu rovnici pro částici tekutiny o jednotkovém objemu a každý člen má rozměr tlaku:

$$p_{1s} + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_{2s} + \rho \frac{v_2^2}{2} = p_c , \quad (39c)$$

kde  $p_c$  je celkový tlak a  $p_s$  je statický tlak v uvažovaném místě. Statický tlak se měří tak, že ústí otvoru odběru tlaku je paralelní s proudnicemi, obr. 39a a není závislý na pohybu tekutiny. Veličina  $\rho v^2 / 2 = q$  je kinetický tlak. Ve starší české literatuře byla označována jako dynamický tlak. Podle doporučení ČSN 01 13 03 z r. 1979 je nyní termín dynamický tlak  $p_d = p_c - p_s = q.s$  rezervován pro rozdíl celkového a statického tlaku. U stlačitelných tekutin je  $p_d > q$  neboť s rostoucím tlakem roste i hustota  $\rho$ . Koefficient  $s$  korigující vliv stlačitelnosti je vždy větší než 1, pouze pro nestlačitelné tekutiny je  $s = 1$  a kinetický tlak je totožný s dynamickým. O měření celkového tlaku viz odstavec 6.2 Měření rychlostí. V dalším textu budeme statický tlak většinou označovat písmenem  $p$  bez indexu  $s$ , stejně jako v rovnících (38), (39a) a (39b).

*Poznámka: modelu nevazké tekutiny můžeme při výpočtech použít všude tam, kde je disipace energie malá. V těchto případech se vypočtené hodnoty nebudou příliš lišit od hodnot skutečných a hodnot opravných součinitelů jimiž korigujeme teoretické hodnoty budou blízké jedničce. Jedná se např. o měření rychlosti tekutiny pomocí Pitotovy nebo Prandtlové trubice a jím podobných sond, nebo výtok otvorem v tenké stěně nádoby - určení výtokové rychlosti a p. Tento model není vhodný pro vyšetřování proudění reálné (nevazké) tekutiny v potrubí, nebo pro vyšetřování obtékání těles např. pro určení odporu. V těchto případech není disipace energie zanedbatelná, odchyly skutečné rychlosti od teoretické by byly značné, korekční součinitel by se značně lišil od jedné. Je-li korekce řádově stejně velká jako skutečná veličina, nebo dokonce větší, svědčí to o nevhodnosti použitého modelu tekutiny (viz. kap. 8). U obtékacích těles nevazkou tekutinou býchom dostali nulový odpor, což odporuje naši zkušenosti. Ve větších vzdálenostech od povrchu tělesa (tj. mimo mezní vrstvu viz kap. 14) je vliv viskozity malý, takže rozložení tlaku lze opět počítat pomocí modelu nevazké tekutiny.*

### c) Zákon zachování hybnosti, Impulsová věta, Bernoulliova rovnice

Jestliže na těleso o hmotnosti  $m$  působí síla  $\vec{F}$  pak podle Newtonova druhého pohybového zákona se těleso bude pohybovat se zrychlením  $\ddot{a} = d\vec{v} / dt = \vec{F} / m$  resp. za dobu  $\Delta t$  působení síly se změní rychlosť z  $\vec{v}_1$  na  $\vec{v}_2$ :

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) , \quad (40)$$

kde  $\vec{F}\Delta t$  je impuls síly a  $m\Delta\vec{v}$  je změna hybnosti.

U tekutin aplikujeme tuto větu o změně hybnosti, nazývanou také impulsová věta, nikoli na částici tekutiny, nýbrž na tekutinu protékající vhodně zvolenou kontrolní oblastí za jednotku času  $\dot{m} = m / \Delta t = \rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2$ . Za předpokladu stacionárního proudění pak bude platit

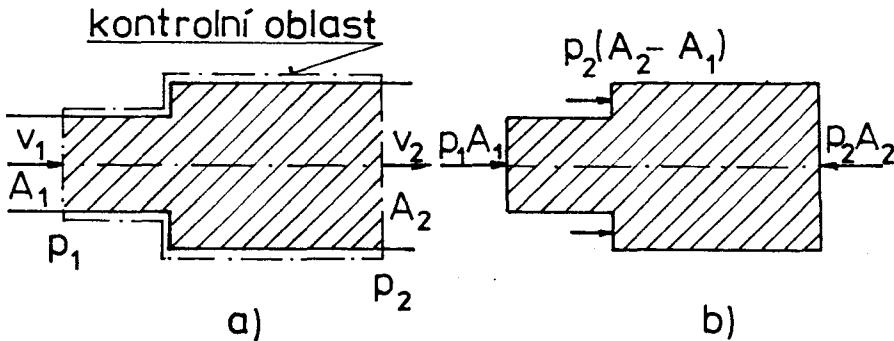
$$\vec{F} = \dot{m}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \rho A_1 v_1 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \rho A_2 v_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) , \quad (41)$$

kde  $\vec{F}$  je výsledná síla působící na tekutinu v kontrolní oblasti a  $\dot{m}$  hmotnostní tok.

Zatímco rovnice kontinuity (34) a rovnice energetická (38) byly rovnice skalární, je impulsová rovnice (pohybová rovnice) rovnici vektorovou a pouze pro jednorozměrné proudění se zúží na jednu rovnici. V předchozím odstavci 6.1.b byla odvozena Bernoulliova rovnice pro jednorozměrné stacionární proudění nevazké nestlačitelné tekutiny v integrálním tvaru, tj. rovnice (39 a, b, c), z energetické rovnice za předpokladu, že není přiváděna žádná mechanická práce ani teplo v uvažované kontrolní oblasti omezené vstupním a výstupním

průřezem. Bernoulliova rovnice je pohybovou rovnici a měla by se tedy odvodit z Newtonova pohybového zákona (viz odstavec 9.1 b, kde dostaneme rozšířenou Bernoulliovu rovnici o vliv tečných sil nejprve v diferenciálním tvaru a teprve integraci dostaneme integrální tvar).

Odvodíme nyní integrální tvar Bernoulliovovy rovnice pro nevazkou kapalinu přímo, ovšem za zjednodušujících podmínek. Uvažujme proudové vlákno, které se náhle nepatrně rozšíří obr. 38. Zvolme si kontrolní oblast omezenou vstupním průřezem  $A_1$ , stěnami proudového vlákna a výstupním průřezem  $A_2$ , obr. 38 a.



Obr. 38 a) Část proudového vlákna vyznačená čerchovaně vymezuje kontrolní oblast omezenou vstupním a výstupním průřezem a stěnami proudového vlákna,

b) sily působící na tekutinu nacházející se uvnitř kontrolní oblasti.

Napišme si pro tekutinu nacházející se v kontrolní oblasti větu o změně hybnosti, rov. (41). V ideální nevazké kapalině nepůsobí tečná napětí a proto budeme uvažovat pouze síly normálové - tlakové. Protože uvažujeme stacionární proudění tj. hmotnostní tok  $\dot{m} = \rho A_1 v_1 = \text{konst.}$  je zrychlení nulové a tlak se bude měnit jen tehdy, změní-li se průřez proudového vlákna. V části vlákna o průřezu  $A_1$  je tlak  $p_1$  a na vstupní průřez působí okolní tekutina, nacházející se mimo kontrolní oblast, silou  $p_1 A_1$ . V širším průřezu  $A_2$  bude tlak  $p_2$ . Ve výstupním průřezu bude tekutina nacházející se mimo kontrolní oblast působit na tekutinu v kontrolní oblasti silou  $p_2 A_2$  v opačném smyslu než je smysl tlakové síly působící ve vstupním průřezu. V místě náhlého rozšíření průřezu působí podle principu akce a reakce tekutina na stěnu proudového vlákna a naopak stěna působí stejně velikou silou opačného smyslu na tekutinu, viz obr. 38 b. V tomto rozšířeném průřezu budeme uvažovat že tlak  $p_2$  působí na plochu mezikruží rovnou rozdílu průřezů ( $A_2 - A_1$ ) ve směru proudění. V tomto velmi zjednodušeném modelu proudění vzniká ve zbývající části průřezu o velikosti  $A_1$  diskontinuita v rozložení tlaku:  $p_1$  se skokem mění na  $p_2$ , což ve skutečnosti je *nereálne*. Protože uvažujeme malou změnu průřezu bude i změna tlaku malá a ve zbývající části průřezu o velikosti  $A_1$  bude výsledná tlaková síla zanedbatelná, neboť tlaky působí proti sobě. Tím jsme probrali všechny síly působící na tekutinu uvnitř kontrolní oblasti. Všechny vektory sil i rychlostí leží na stejně nositelce a proto nemusíme v dalším označovat vektory šipkou. Dosadíme do impulsové rovnice (41):

$$p_1 A_1 + p_2 (A_2 - A_1) - p_2 A_2 = \rho A_1 v_1 (v_2 - v_1), \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 - p_2 A_1 - p_2 A_2 = \rho A_1 (v_1 v_2 - v_1^2)$$

po úpravě dostaneme

$$(p_1 - p_2) A_1 = \rho A_1 (v_1 v_2 - v_1^2).$$

Ze vztahu  $(v_1 - v_2)^2$  vypočteme  $v_1 v_2 = 1/2 (v_1^2 + v_2^2 - (v_1 - v_2)^2) \doteq 1/2 (v_1^2 + v_2^2)$ . Jelikož jsme předpokládali malou změnu průřezů, pak s ohledem na rovnici kontinuity bude rozdíl rychlostí malý a čtverec rozdílu rychlostí bude proti součtu čtverců rychlostí zanedbatelný. Po dosazení za  $v_1 v_2$  do impulsové rovnice dostaneme

$$p_1 - p_2 = \rho/2 (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1^2) \quad \text{a po úpravě} \\ p_1 + \rho v_1^2/2 = p_2 + \rho v_2^2/2,$$

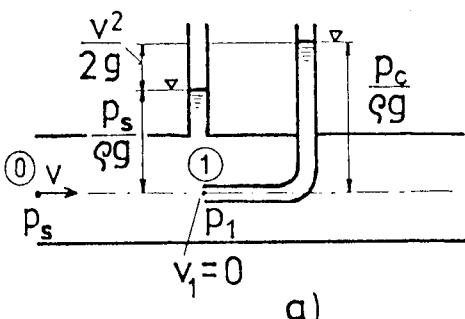
tj. Bernoulliova rovnice (39 c) ve tvaru pro proudění ve vodorovném směru. Takto jsme odvodili integrální tvar Bernoulliovovy rovnice aniž bychom integrovali, tj. stejně jako jsme odvodili rovnici kontinuity a energetickou rovnici.

## 6.2 Měření rychlosti

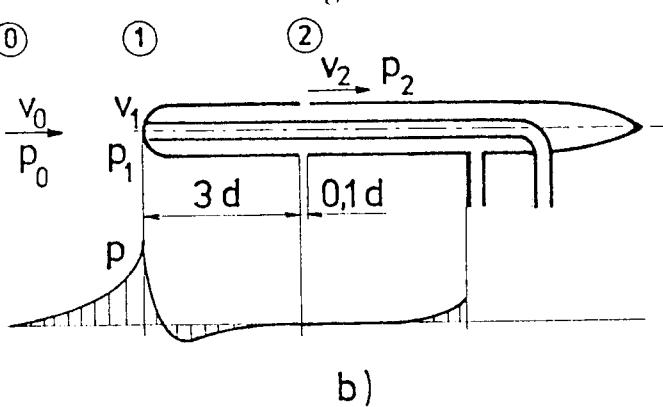
Je-li ve vodorovném potrubí přetlak  $p_s$  (statický tlak), pak voda vystoupí v piezometrické trubici připojené k otvoru navrtanému kolmo ke stěně a bez ořepů, obr. 39a, do výšky  $p_s/g\rho$ . Hladina v Pitotově trubici, zahnuté proti směru proudění, se bude nacházet vyše a bude závislá jak na přetlaku  $p_s$  tak i na rychlosti proudící tekutiny  $v$ . V ústí trubice bude místní rychlosť kapaliny rovna nule  $v_1 = 0$  a tedy tlak  $p_1$  bude roven tlaku celkovému  $p_c$ . Rozdíl těchto tlaků  $p_c - p_s = p_d$  je roven tlaku dynamickému, který u nestlačitelných tekutin je roven kinetickému tlaku  $\rho v^2/2$  jak plyne z Bernoulliovovy rovnice psané pro body 0 a 1:

$$p_s + \frac{\rho}{2} v^2 = p_1 + 0 .$$

Rozdíl hladin  $\frac{p_c}{\rho g} - \frac{p_s}{\rho g} = h = \frac{v^2}{2g}$  je roven rychlostní výšce  $\frac{v^2}{2g}$  a změříme-li  $h$  můžeme vypočítat  $v$ .



Obr. 39a Měření statického tlaku piezometrickou trubicí a celkového tlaku Pitotovou trubicí.



Obr. 39b Prandtlova trubice.  
Rozložení tlaku po povrchu trubice.

Prandtlova trubice, obr. 39b, je tvořena dvěma souosými trubičkami se vzduchotěsně oddělenými prostory a umožňuje odběr celkového tlaku  $p_1$  a statického tlaku  $p_2$  ve dvou blízkých bodech. Odběry statického tlaku jsou umístěny ve vzdálenosti minimálně tří vnějších průměrů od ústí trubice. Teprve v této vzdálenosti je tlak  $p_2$  opět téměř roven tlaku nerozrušeného proudu  $p_0$ .

Z Bernoulliovovy rovnice napsané pro body 0 a 1 a 2 pak plyne, že

$$\frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho g} + 0 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2} .$$

a pro  $p_0 = p_2$  je tedy i  $v_2 = v_0$  a

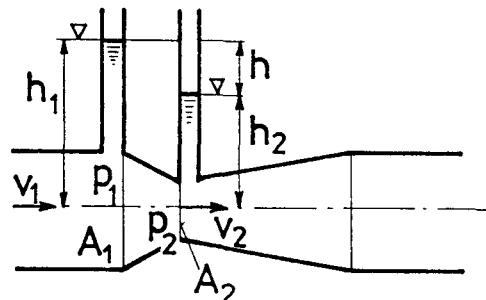
$$v_0 = \sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{\rho}} . \quad (42)$$

Při běžných rychlostech se vypočtená hodnota rychlosti liší od skutečné o méně než 1%. Tyto trubice, určené pro stanovení místní rychlosti se nazývají tlakové sondy nebo také pneumometrické.

### 6.3 Měření průtoků

Měření objemového průtoku tekutiny potrubím se velmi často převádí na měření tlakového rozdílu mezi dvěma průřezy, z nichž jeden je zúžen. Jako příklad si ukážeme Venturiho vodoměr (trubici), obr. 40, skládající se ze vstupního (a také kratšího) konfuzoru, krátké válcové části se zúženým průřezem a z delšího difuzoru, ve kterém se ve směru proudění průřez zvětšuje. V úzkém průřezu je větší rychlosť a menší tlak, jak plyne z rovnice kontinuity a rovnice Bernoulliové.

Obr. 40 Venturiho vodoměr



Stanovme teoretickou závislost mezi měřeným rozdílem tlaků  $\Delta p = p_1 - p_2$  a objemovým průtokem  $\dot{V}$ .

Předpokládáme proudění vodorovným potrubím s rovnoměrným rychlostním profilem a beze ztrát. Napišme Bernoulliovu rovnici a rovnici kontinuity mezi průřezy 1 a 2:

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}$$

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = \dot{V}_t$$

$$\text{Rozdíl tlaků } p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = g \rho h,$$

jak plyne z Bernoulliovovy rovnice a jak vidíme z obr. 40, neboť  $p_1 = \rho g h_1$ ,  $p_2 = \rho g h_2$  a  $h = h_1 - h_2$ . Z rovnice kontinuity lze dosadit

$$v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} \quad \text{nebo} \quad v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2},$$

$$\text{pak } \dot{V}_t = K \sqrt{h} \quad \text{tj. nelineární závislost, kde } K = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2g}{A_1^2 - A_2^2}}.$$

Protože u reálné tekutiny není rychlosť konstantní po celém průřezu a protože mezi průřezy 1 a 2 dojde vlivem viskozity k disipaci energie bude se skutečná konstanta Venturiho vodoměru od této teoretické lišit a je nutno ji určit kalibrací. Normalizovaný tvar Venturiho průtokoměru i průtokový součinitel lze nalézt v normě ČSN 25 77 10, kde jsou popsány i jiné metody měření průtoku.

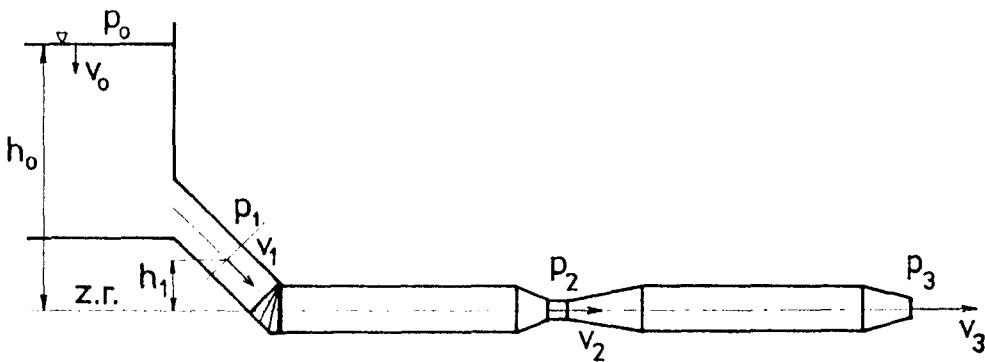
### 6.4 Stacionární proudění nevazké tekutiny potrubím

Použijeme nyní model nevazké a nestlačitelné tekutiny k vyšetřování poměrů při průtoku potrubím. V poznámce v kap. 6.1 b) jsme se zmínili o tom, že tento model je v tomto případě nevhodný, neboť velikost a rozložení tlaků a rychlostí bude ve skutečnosti dosti odlišné. Bude se jednat o typicky školní úlohy, jež mají za úkol ukázat na velmi zjednodušených případech postup řešení, tj. pracovní metodu aplikace základních rovnic a vypěstovat návyky použitelné pro řešení složitějších úkolů.

Při průtoku nevazké tekutiny potrubím předpokládáme, že na stěně je pouze složka rychlosti normálová (tj. složka kolmá k nepropustné stěně) rovna nule. Složka tangenciální (rovnoběžná se stěnou) bude od nuly rozdílná, obr. 33. Nevazká tekutina nelpí na stěně a rychlosť je po celém průřezu rozložena rovnoměrně.

Pokud není nevazké tekutině mezi uvažovanými průřezy dodávána nebo odbírána energie bude konstanta Bernoulliovovy rovnice stálá (tj. součet polohové, tlakové a kinetické energie).

Např. obr. 41 představuje výtok z nádoby potrubím proměnného průřezu. Chceme-li stanovit tlak nebo rychlosť v libovolném průřezu potrubí, pak nejprve napišeme Bernoulliovu rovnici (nejlépe ve směru proudění), přičemž v jednom místě musíme znát stav např. na hladině, z níž vycházíme.



Obr. 41 Výtok z nádoby potrubím.

Na hladině je polohová energie dána výškou  $h_0$  nad zvolenou (libovolně!) základní rovinou, tlaková energie je dána tlakem  $p_0$  a hustotou kapaliny  $\rho$  a kinetická energie je na hladině zanedbatelná, jak plyne z rovnice kontinuity, je-li průřez nádrže značně větší než průřez potrubí:  $v_0 \approx 0$ . Druhá strana Bernoulliovovy rovnice se pak píše pro místo, kde neznáme jednu veličinu např. rychlosť ve výstupním průřezu  $v_3$  (předpokládáme že známe  $p_3$ , např.  $p_3 = p_0$ ) :

$$gh_0 + \frac{p_0}{\rho} + 0 = 0 + \frac{p_3}{\rho} + \frac{v_3^2}{2} = C_m .$$

Z této rovnice vypočteme neznámou  $v_3$ . Chceme-li vypočítat rychlosť v jiném průřezu, např. 1, použijeme rovnice kontinuity

$$v_1 = v_3 \frac{A_3}{A_1} .$$

Chceme-li stanovit i tlak  $p_1$  v tomto průřezu pak napišeme Bernoulliovu rovnici mezi místem kde známe všechny veličiny např. hladinou a neznámým místem (ve směru proudění), nebo lze užít konstantu  $C_m$ :

$$gh_0 + \frac{p_0}{\rho} = gh_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = C_m ,$$

nebo mezi místem 1 a výtokem

$$C_m = gh_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_3}{\rho} + \frac{v_3^2}{2} .$$

*Poznámka: psát Bernoulliovu rovnici stále ve směru proudění je účelné neboť se později vyhneme chybám při řešení nestacionárního proudění a při proudění vazké tekutiny, kdy některé členy budou jen na jedné straně.*

*Tlak v místě 1 nelze počítat přímo z Bernoulliovovy rovnice psané pro hladinu a místo 1, neboť neznáme dvě veličiny  $p_1$  a  $v_1$  a máme jen jednu rovnici. Jediná místa, kde je předem znám tlak je zpravidla hladina a výstupní průřez.*

## Příklad P.6.1

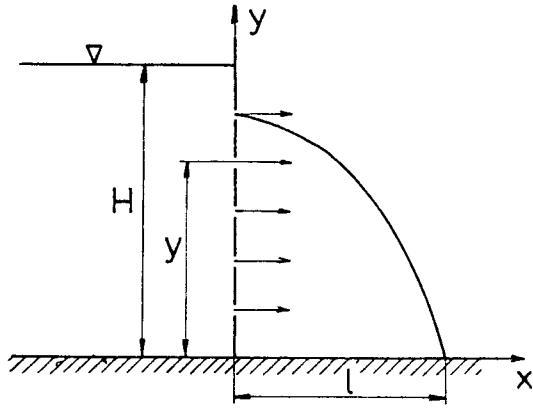
Z rozlehlé nádrže vytéká pěti stejnými otvory rovnoramenně rozmístěnými ve svislé stěně, obr. P 6.1, vodorovným směrem voda a dopadá na podlahu. Stanovte z kterého otvoru dostříkne voda nejdál. Zanedbejte vliv viskozity a odporu vzduchu. Paprsky zůstávají kompaktní.

Dáno:  $H = 4 \text{ m} = \text{konst.}$ ,  $n = 5$

Určit:  $y_{\text{opt}}$  pro  $l_{\text{max}}$ .

Rozbor:

Případ řešíme jako vodorovný vrh: ve směru  $x$  je pohyb rovnoramenný, ve svislém směru rovnoramenně zrychlený. Výtoková rychlosť je závislá na poloze otvoru nad hladinou. Z nejvyššího otvoru vytéká voda nejmenší rychlosťí, ale padá nejdéle. U nejnižšího otvoru je rychlosť největší, ale doba pádu je nejkratší. Optimální poloha otvoru bude asi mezi nimi.



Obr. P 6.1

Předpoklady:

- 1) Nevazká kapalina.
- 2) Nulový odpor vzduchu.
- 3) Proud vody se nerozpadne.

Řešení:

Zvolme libovolný otvor a stanovme výtokovou rychlosť

$$v = \sqrt{2g(H-y)} .$$

Dráha paprsku ve směru  $x$  se rovná  $l = v \cdot t$ , čas  $t$  stanovíme z rovnice pro svislý pád

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2y}{g}} .$$

Dosadíme za  $t$  a  $v$  do rovnice pro  $l$

$$l = \sqrt{2g(H-y)} \cdot \sqrt{\frac{2y}{g}} = 2\sqrt{(H-y)y} .$$

Optimální  $y$  najdeme jako extrém

$$\frac{dl}{dy} = \frac{2}{2} \frac{(-1)y + (H-y)}{\sqrt{(H-y)y}} = 0 \quad \Rightarrow \quad H - 2y = 0, \quad y_{\text{opt}} = \frac{H}{2} = 2 \text{ m.}$$

Diskuse:

Za výše uvedených předpokladů dopadne nejdále paprsek z prostředního otvoru.

## Příklad P. 6.2

Jak velký bude rozdíl hladin v U-trubici naplněné vodou, jestliže měříme rychlosť vzduchu v sacím potrubí ventilátoru Pitotovou trubicí. Průměr potrubí je  $d$  a ventilátor dodává  $\dot{m}$  vzduchu za minutu. Hustota vzduchu a vody je  $\rho$  a  $\rho_v$ .

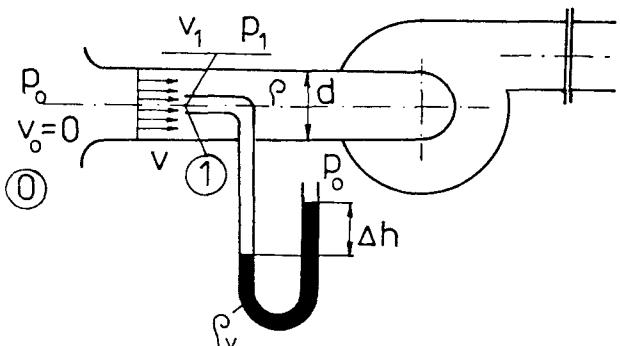
Dáno:

$$\dot{m} = 21 \text{ kg/min}, \rho = 1,23 \text{ kg/m}^3, \rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3, d = 120 \text{ mm}.$$

Určit:  $\Delta h$  (mm)

Rozbor:

Ventilátor, na rozdíl od kompresoru, je stroj, který dopravuje vzduch aniž by docházelo k významnějším změnám tlaku, takže můžeme považovat hustotu vzduchu za konstantní.



Obr. P 6.2

- 1) Hustota vzduchu  $\rho = \text{konst.}$
- 2) Vzduch je ideální tekutina - nevazká.
- 3) Rychlosť  $v$  je rozložena rovnoměrně po průřezu potrubí.

Řešení:

$$\text{Rychlosť v potrubí } v = \frac{4\dot{m}}{\rho\pi d^2} = \frac{4 \cdot 21}{60 \cdot 1,23 \cdot \pi \cdot 0,12^2} = 25,16 \text{ m/s.}$$

V ústí Pitotovy trubice je rychlosť  $v_1 = 0$  - kinetická energie se změní v tlakovou. Napišme Bernoulliovu rovnici mezi místem dostatečně vzdáleném od vstupu do sacího potrubí kde je vzduch v klidu ( $v_0 = 0$ ) a tlak je roven tlaku okolí  $p_0$  a ústím Pitotovy trubice

$$p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \quad \text{protože } v_0 = v_1 = 0,$$

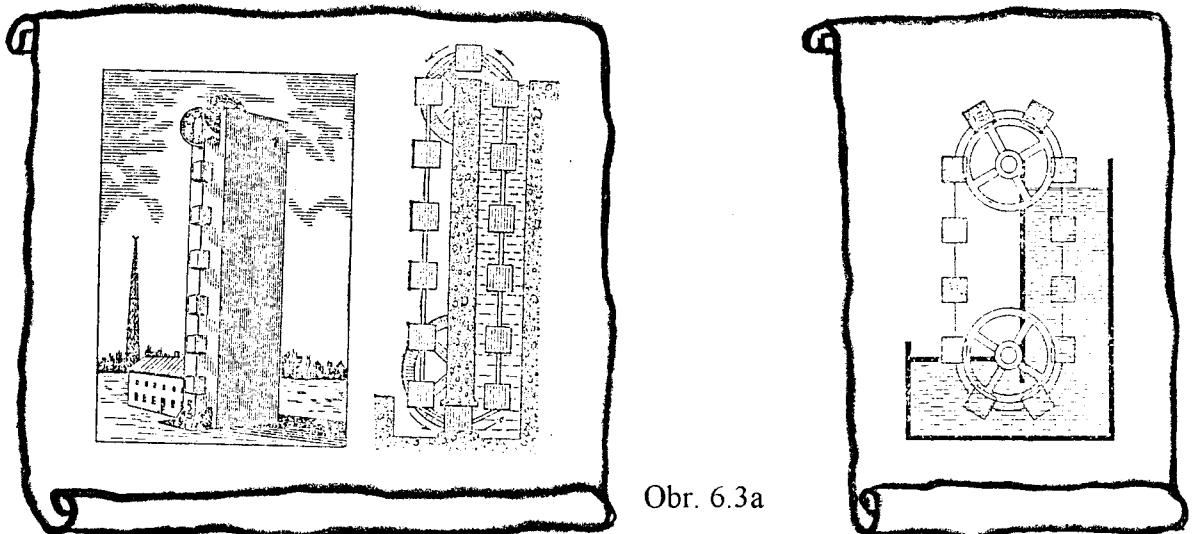
bude  $p_1 = p_0$ , ale v druhém rameni U-trubice působí rovněž tlak okolí  $p_0$  a rozdíl tlaků je 0. Proto i  $\Delta h = \Delta p/\rho g$  bude roven nule.

Diskuse:

V sacím potrubí bychom střední rychlosť měřili tak, že bychom měřili statický tlak otvorem ve stěně  $p$  pak  $p_0 = p + \frac{\rho v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2 \frac{p_0 - p}{\rho}}$ . Vlivem viskozity nebude rychlosť v potrubí rozložena rovnoměrně a na U-trubici dojde k výchylkám hladin. Z jejich rozdílu však nemůžeme stanovit místní rychlosť vzduchu, neboť rozdíl hladin je závislý i na tlakové ztrátě, jež vzniká při proudění vazké tekutiny potrubím, viz kapitolu 8. Místní rychlosti - tj. rychlostní profil bychom změřili Prandtlovou trubicí.

### Příklad P 6.3

Na obr. P 6.3a je nakreslen hydrostatický stroj, na který podal patentovou přihlášku v r. 1865 pan Hermann Leonhard ze St. Gallen jako na nový hnací motor. Jedná se o realizaci odvěkého sna vynálezců - perpetuum mobile. Mezi dvěma tvarovanými unášeči je napnut nekonečný řetěz stejných plováků. Část plováků prochází nádrží naplněnou kapalinou - vodou, zbyvající plováky se nacházejí ve vzduchu. Na této obrázce je nakreslena i jiná varianta.



Obr. 6.3a

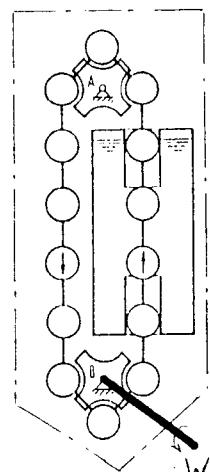
Na plováky v kapalině působí hydrostatický vztah podle Archimedova zákona, který by měl udržet řetěz v pohybu proti směru ručiček hodinových. Aby nedocházelo k úniku kapaliny je vstup ve dně nádoby konstrukčně upraven. Dokažte, že toto perpetuum mobile nebude fungovat ani při zanedbání třecích sil. Vyšetřete silové poměry, z nichž lze usoudit na chování tohoto zařízení, jež je opatřené kulovými plováky (kvůli vzprímení).

Dáno: hustota kapaliny  $\rho$ , průměr plováků  $d$ , počet plováků v nádrži  $n$ , výška hladiny v nádrži  $h$ .

Určit: velikost mechanické energie na hřídeli unašeče  $W$  a silový účinek na plováky

Rozbor:

Celé zařízení umístíme do kontrolní oblasti, ze které vychází pouze hřídel unašeče, obr. P 6.3 b, který by předával mechanickou práci  $W$  a na tuto oblast aplikujeme zákon o zachování energie. Protože uvnitř kontrolní oblasti se nemění ani vnitřní, ani polohová, ani kinetická, ani tlaková energie, neboť kapalina je v klidu a není dodáváno teplo, musí být mechanická energie na hřídeli  $W = 0$ .



Obr. P 6.3b

Řešení:

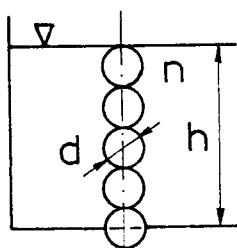
a) Z rovnice (38) dostaneme

$$w = u_1 - u_2 + g(y_1 - y_2) + (p_1 - p_2)/\rho + \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} + q = 0 \quad \text{protože}$$

$$u_1 = u_2, y_1 = y_2, p_1 = p_2, v_1 = v_2 = 0, q = 0.$$

b) Silový účinek na plováky:

Energetická rovnice uvažovala ustálený stav. Pokud nebudou síly působící na plováky v rovnováze, uvedou se do pohybu - autor předpokládal, že se budou pohybovat ve směru působení hydrostatického vztlaku. Abychom si výpočet zjednodušili předpokládejme, že kulové plováky jsou k sobě těsně přimknuty, obr. P 6.3 c, že pod hladinou se právě nachází  $n$  celých plováků a jeden plovák právě utěsňuje výtokový otvor.



Obr. P 6.3c

V tom případě platí  $h = n d + d/2$ . Vztlak působící na ponořené plováky je podle Archimedova zákona roven  $F = g \rho (n\pi d^3/6 + 1/2 \cdot \pi d^3/6)$  a na kouli, jež utěsňuje výtok, působí směrem dolů tlaková síla, rovnající se tize kapaliny nad povrchem této koule  $F_p = g \rho (\pi d^2/4 \cdot h - 1/2 \cdot \pi d^3/6)$ . Síla působící na řetěz plováků směrem dolů je tedy větší než síla vztlaková působící směrem vzhůru a řetěz by se začal otáčet právě opačným směrem než předpokládala vynálezce.

Diskuse výsledku:

Ze zákona o zachování energie plyne, že i při zanedbání tření nemůže toto zařízení předávat mechanickou energii. Podrobnější analýzou jsme zjistili, že plováky se budou pohybovat opačně, ale v tom případě by při ustáleném pohybu z nádoby unikala kapalina jejíž množství je závislé na velikosti objemu mezi dvěma plováky jež se nacházejí v trubici jež má sloužit k utěsnění výtoku. Nyní by zařízení mohlo fungovat, neboť vytékající voda zmenšuje svou polohovou energii, pak se už ovšem nejedná o perpetuum mobile. V současné době známe vodní turbíny, jež mají mnohem lepší účinnost a větší výkon než toto monstrum.

Matematický důkaz, že  $F_p > F$ :

$$F_p = g\rho\left(\frac{\pi d^2}{4}h - \frac{1}{2}\frac{\pi d^3}{6}\right) = g\rho\frac{\pi d^3}{6}\left(\frac{6}{4}h - \frac{1}{2}\right)$$

$$F = g\rho\left(n\frac{\pi d^3}{6} + \frac{1}{2}\frac{\pi d^3}{6}\right) = g\rho\frac{\pi d^3}{6}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$h = nd + d/2 = d(n + \frac{1}{2})$$

$$F_p > F$$

zkrátíme  $g\rho\pi d^3/6$

$$\frac{6}{4}h - \frac{1}{2} > n + \frac{1}{2}$$

$$\text{dosadíme za } \frac{h}{d} = n + \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2}n + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} > n + \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2}n + \frac{1}{4} > n + \frac{1}{2}$$

pro  $n > 1$

Mechanická práce na hřídeli bude tím větší čím větší je rozdíl sil:

$$F_v = F_p - F = g\rho \frac{\pi d^3}{6} \left[ \left( \frac{6h}{4d} - \frac{1}{2} \right) - \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] = g\rho \frac{\pi d^3}{6} \left[ \frac{3}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} - n - \frac{1}{2} \right]$$

$$F_v = g\rho \frac{\pi d^3}{6} \left( \frac{3}{2}n + \frac{3}{4} - n - 1 \right) = g\rho \frac{\pi d^3}{6} \left( \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \right).$$

Výsledná síla bude tím větší, čím bude průměr koule  $d$  větší (3. mocnina!), čím větší bude hustota kapaliny  $\rho$  (rtut'!) a čím větší počet plováků  $n$  bude ponořen.

Výkon závisí i na rychlosti plováků, jež bude menší než teoretická  $v_t = \sqrt{2gh}$ ,  $v_t = \sqrt{2gd(n + \frac{1}{2})}$ . Teoretický výkon  $P = F_v v_t = g\rho \frac{\pi d^3}{6} (\frac{n}{2} - \frac{1}{2}) \sqrt{2gd(n + \frac{1}{2})}$ .

Že sestrojení perpetua mobile je nemožné se objevilo již předtím než byl formulován zákon o zachování energie - Francouzská akademie věd ve svém prohlášení z r. 1775 rozhodla nepřijímat žádný projekt perpetua mobile k posouzení a vyzkoušení.

### **Víte, že**

- Leonhard Euler se narodil roku 1707 v Basileji, ve Švýcarsku. Otec byl ministr, zabývající se matematikou ve volných chvílích. Ve 13 letech začal studovat na univerzitě v Basileji, kde tehdy bylo 19 profesorů a 100 studentů. Otec Daniel Bernoulliho mu přednášel matematiku. Za tři roky obdržel akademický titul Mistr ve filozofii.

Euler a D. Bernoulli byli přátelé a když roku 1725 Daniel odjel do Petrohradu učit a studovat, přesvědčil hodnostáře v tamní Akademii, aby pozvala i Eulera, který se do Švýcarska nevrátil až do konce života. Euler zavedl představu, že tiak je veličina, jež se mění od místa k místu a odvodil známé diferenciální rovnice, které pak integroval po proudnici a obdržel Bernoulliovu rovnici ve tvaru, jak ji dnes používáme. Po odjezdu D. Bernoulliho 1733 převzal po něm výuku fyziky. Pracovní podmínky v Akademii byly příznivé, takže do roku 1741 připravil k publikaci 90 článků a napsal dvoudílnou knihu „Mechanica“. V roce 1740, během neklidné politické situace v Petrohradě se Euler přemístil do Berlína, kde Bedřich Veliký právě ustavil Berlinskou akademii věd a strávil zde 25 let a připravil 380 článků k publikaci. Za Eulerova života se k pohonu mlýnů a hamrů běžně používala vodní kola na spodní nebo horní vodu. Výjimkou bylo Segnerovo kolo, prototyp vodní reakční turbíny (viz odst. 10.3c) s nímž Jan Andreas Segner, rodák z Bratislavы, konal v letech 1750 - 1754 v Německu pokusy. Tento vodní stroj upoutal Eulerovu pozornost tak, že o jeho teorii napsal tři publikace v nichž podal linearizovanou teorii turbín a vlastně ji vytvořil o tři čtvrtiny století dříve než byla sestrojena první průmyslová vodní turbína. Přestože byl teoretik - matematik - prokázal i inženýrské schopnosti, když naznačil zlepšení Segnerova kola použitím většího množství trubic resp. kanálů, zařazení rozváděcího ústrojí a tak umožnit přítok po celém obvodu rotoru.

V roce 1766 však kvůli finanční neshodám s Bedřichem Velikým opouští Berlin a vrací se do Petrohradu. Ještě téhož roku oslepl na jedno oko a po operaci roku 1771 oslepl úplně, přesto pokračoval v práci - polovina jeho článků byla napsána po roce 1765. 18. září 1783 na přednášce z matematiky počítal let balónu a pak diskutoval s přáteli o právě objevené planetě Uranu, když v 5 hodin odpoledne utrpěl mozkovou mrtvici a poslední jeho slova byla „Umírám“. Skonal za šest hodin.

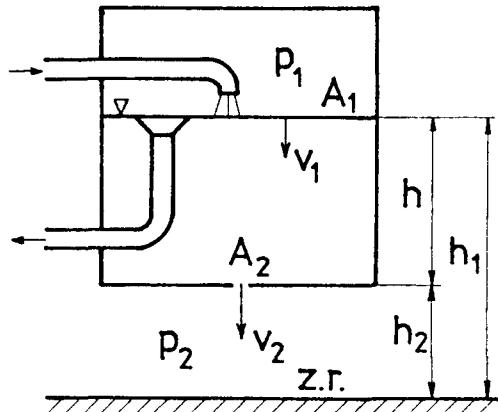
# PROUDĚNÍ VAZKÉ TEKUTINY

## 7. VÝTOK Z NÁDOB, PŘEPADY

Při výtoku tekutiny otvorem ve stěně nádoby nebo krátkým nátrubkem, kdy je styk se stěnou malý a tedy i disipace energie malá, lze považovat tekutinu za nevazkou a takto získané teoretické výsledky opravit různými korekčními součiniteli.

### 7.1 Stacionární výtok kapaliny malým otvorem

Aby bylo zajištěno stacionární proudění musíme nádobu opatřit přepadem a přivádět větší množství než které odtéká otvorem  $A_2$ , obr. 42.



Obr. 42 Stacionární výtok z nádoby  
otvorem ve dně.

Máme stanovit teoretické hodnoty výtokové rychlosti  $v_{2t}$  a objemového toku  $\dot{V}$ , je-li průřez nádoby  $A_1$ , výška hladiny nad základní rovinou  $h_1$  a tlak v nádobě  $p_1$ . Otvor se nachází ve výšce  $h_2$  a vnější tlak je  $p_2$ . Napíšeme-li opět mezi průřezy 1 a 2 Bernoulliovu rovnici

$$gh_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = gh_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_{2t}^2}{2}$$

a rovnici kontinuity  $A_1v_1 = A_2v_{2t}$  pak dosazením za  $v_1 = A_2v_{2t}/A_1$  dostaneme teoretickou výtokovou rychlosť

$$v_{2t} = \sqrt{\frac{2g(h + \frac{p_1 - p_2}{\rho})}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \quad (43)$$

Pro teoretický průtok pak platí  $\dot{V}_t = v_{2t}A_2$ . (44)

Bude-li nádoba otevřená bude  $p_1 = p_2$  a pro malý otvor  $A_2 \ll A_1$  se vzorec pro rychlosť zjednoduší na známý Torricelliho vzorec

$$v_{2t} = \sqrt{2gh} \quad (45)$$

U malého otvoru ve stěně dosazujeme za  $h$  hloubku těžiště otvoru, obr. 43.

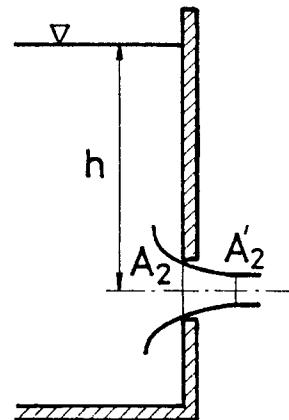
### 7.2. Metoda korekcí

Objemový tok vazké kapaliny bude ve skutečnosti menší než udává rov. (44) protože:

1) Skutečná výtoková rychlosť  $v_2$  bude v důsledku disipace energie menší než teoretická  $v_2 < v_{2t}$ . Pro tekutiny s malou viskozitou zavedeme rychlostní součinitel  $\varphi$ .

$$v_2 = \varphi v_{2t} = \varphi \sqrt{2gh} . \quad (46)$$

2) Proud kapaliny má v místě kde jsou už rychlosti rovnoběžné menší průřez než je průřez otvoru, neboť proudnice jsou vzhledem k hmotnosti částic tekutiny čáry se spojitu křivostí, obr. 43.



Obr. 43 Výtok z nádoby malým otvorem ve stěně.

Poměr průřezu proudu  $A'_2$  a průřezu otvoru  $A_2$  nazveme součinitelem kontrakce  $\alpha$ , takže skutečný průřez proudu je

$$A'_2 = \alpha A_2 . \quad (47)$$

Součinitel kontrakce je silně závislý na tvaru vstupní hrany otvoru. Při dokonalém zaoblení této hrany nedochází ke kontrakci (nebo při velmi pomalém proudění u velmi vazkých kapalin) a pak je  $\alpha = 1$ .

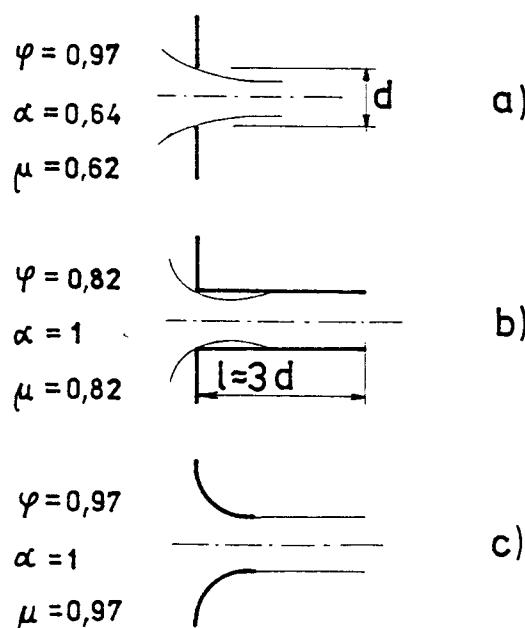
Skutečný objemový tok je pak roven součinu skutečného průřezu  $A'_2$  a skutečné rychlosti  $v_2$

$$\dot{V} = A'_2 v_2 = \alpha A_2 \varphi v_{2t} = \alpha \varphi A_2 \sqrt{2gh} = \mu \dot{V} , \quad (48)$$

kde  $\mu = \alpha \varphi$  je výtokový součinitel. Hodnoty korekčních součinitelů závisí nejen na tvaru otvoru, ale i na Reynoldsově čísle (viz kap. 15).

### 7.3 Nátrubky

Nátrubky jsou krátké trubice různého tvaru usměrňující proud tekutiny tak, aby proud splňoval určité požadavky. Chceme-li např. při stejném spádu  $h$  dosáhnout při daném průměru otvoru co největší výtok můžeme použít válcového (jednoduchý a levný), nebo konoidálního nátrubku, obr. 44.



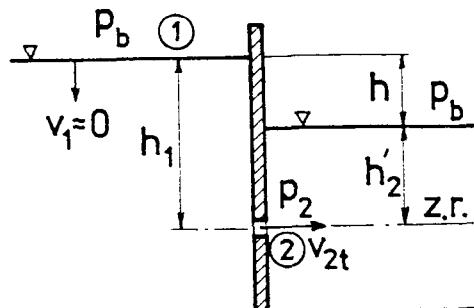
Obr. 44

- a) Otvor v tenké stěně,
- b) Válcový nátrubek,
- c) Konoidální nátrubek.

U správně navržených nátrubků nedochází ke kontrakci  $\alpha = 1$ . Délka válcového nátrubku, obr. 44b) nesmí být příliš krátká, protože by proud nepřilnul ke stěně ( $\alpha < 1$ ), ani příliš dlouhá, neboť třením o stěny roste disipace energie a klesá  $\varphi$  i výtoková rychlosť. Optimální délka je asi 3d až 4d.

## 7.4 Výtok zatopeným otvorem

Zatopeným otvorem nazýváme otvor ležící pod oběma hladinami, obr. 45.



Obr. 45 Výtok malým zatopeným otvorem.

Abychom stanovili teoretickou rychlosť v otvoru  $v_{2t}$  napišme Bernoulliovo rovnici mezi horní hladinou 1 a otvorem 2. Za předpokladu, že otvor ve stěně je dostatečně malý je rychlosť hladiny  $v_1$  zanedbatelná. Základní rovinu umístime do úrovně otvoru ( $h_2 = 0$ ):

$$gh_1 + \frac{p_b}{\rho} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_{2t}^2}{2}$$

Za předpokladu, že i pravá část nádrže za stěnou je rozlehlá, lze rychlosti v ní považovat za zanedbatelné (s výjimkou blízkého okolí otvoru) a tlak  $p_2$  určit jako hydrostatický tlak v hloubce  $h_2'$  pod hladinou:

$$p_2 = \rho gh_2' + p_b$$

Po dosazení tlaku  $p_2$  a rozdílu výšek hladin  $h = h_1 - h_2'$  dostáváme pro teoretickou a skutečnou rychlosť

$$v_{2t} = \sqrt{2gh} \quad \text{resp.} \quad v_2 = \varphi \sqrt{2gh}, \quad (49)$$

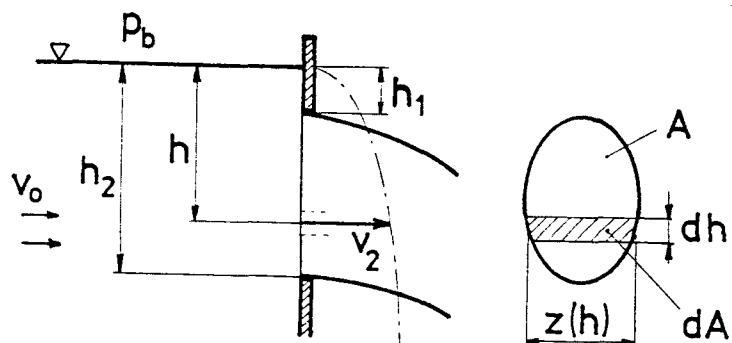
kde  $h$  je rozdíl výšek hladin. Výtoková rychlosť u zatopeného otvoru nezávisí na poloze otvoru pod hladinou, ale pouze na rozdílu výšek hladin.

## 7.5 Výtok velkým otvorem

Pro kvalifikaci otvoru - velký, resp. malý - máme na mysli poměr jeho výšky k poloze pod hladinou, nikoli šířku otvoru.

Při výtoku kapaliny do atmosféry velkým otvorem, jehož horní hrana se nachází blízko hladiny a poměr výšky otvoru ke hloubce těžiště otvoru je blízký jedné, obr. 46, je třeba uvažovat nelineární rozložení rychlosti po otvoru (čerchovaná parabola).

Obr. 46 Výtok velkým otvorem do atmosféry.



Elementární tok  $d\dot{V}$  ploškou  $dA = z(h) dh$  nacházející se v hloubce  $h$  je roven

$$d\dot{V}_t = v_{2t} dA = \sqrt{2ghz(h)} dh .$$

Celkový teoretický objemový průtok pak dostaneme integrací

$$\dot{V}_t = \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{2ghz(h)} dh . \quad (50)$$

Skutečný objemový průtok  $\dot{V} = \mu \dot{V}_t$  ,

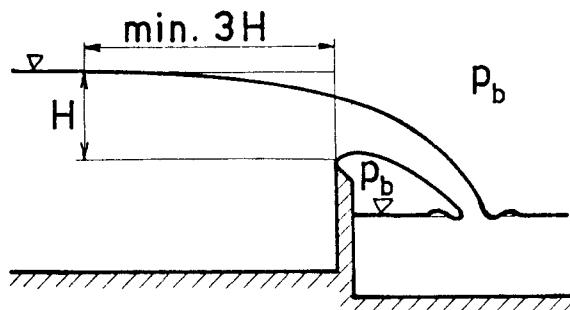
přičemž výtokový součinitel bude v sobě zahrnovat nejen vliv disipace energie a kontrakce proudu, ale i vliv přítokové rychlosti  $v_o$ .

V odstavci 7.1 jsme u malého otvoru ve stěně počítali s konstantní rychlostí v otvoru rovnou rychlosti v těžišti. Při výpočtu průtoku velkým otvorem by použitím této metody (bez integrace) vznikla tím větší chyba, čím větší je nelineárnost rychlostního profilu.

U zatopeného otvoru je rychlosť pouze funkcí rozdílu výšek hladin a teoretická rychlosť je konstantní po celém průřezu, bez ohledu na jeho výšku (neuvážujeme zde vliv viskozity).

## 7.6 Přepady

Přepady lze považovat za zvláštní případ velkého otvoru sahajícího až k hladině. Pro měření průtoku v korytech se používá přepadů ostrohranných, dobře větraných, aby v celém proudu byl barometrický tlak (obr. 47).



Obr. 47 Dokonalý přepad.

Výšku hladiny před přepadovou hranou musíme měřit v dostatečné vzdálenosti před přepadem, neboť nad přepadem je hladina níže (část polohové energie se již změnila v kinetickou). Pro výpočet teoretického průtoku lze opět použít rovnici (50), přičemž dosadíme tyto meze:  $h_1 = 0$  a  $h_2 = H$ .

Skutečný průtok bude opět menší v důsledku kontrakce proudu a viskozity kapaliny. Podrobnosti lze najít v normách ČSN.

Otázky ke kapitolám 6 a 7.:

- 1) S jakými veličinami počítáme v rovnici kontinuity při proudění nestlačitelné tekutiny ?
- 2) Jaký je rozdíl mezi rovnicí kontinuity pro stacionární a nestacionární proudění ?
- 3) Napište rovnici Bernoulliovu pro výtok z nádoby, vysvětlete význam jednotlivých členů a odhadněte jejich velikost (relativní).
- 4) Jaký je rozdíl mezi celkovým, statickým, kinetickým a dynamickým tlakem?
- 5) Jakými způsoby měříme rychlosť tekutiny?
- 6) Jakými metodami měříme průtok tekutiny potrubím?
- 1) Jaký je rozdíl mezi Torricelliho vzorcem a vzorcem pro rychlosť volného pádu tělesa ve vakuu?
- 2) Co je rychlostní, kontrakční a výtokový součinitel?

- 3) K čemu používáme nátrubky ?
- 4) Na čem je závislá výtoková rychlosť v zatopeném otvoru ?
- 5) Jaké je rozdelení rychlosťi pri výtoku kapaliny veľkým otvorem do atmosféry ?
- 6) Jaký je průběh rychlosťi v kapalnom paprsku tekouciho pries prepad?
- 7) Jaké je rozdelení rychlosťi ve veľkom zatopenom otvoru ?
- 8) Doplňte v obr. 41 průběh statického tlaku v potrubí. Dokreslete si piezometrické trubice v rôznych prúzezech.

### **Víte, že**

- Isaac Newton v „Principiis“ vydaných v roce 1687 stanovil jako první závislost mezi silou, hmotnosťí a zrychlením, resp. hybnosťí, ale neaplikoval ji na proudenie tekutin. Za zakladatele teoretické mechaniky tekutin se považují Daniel Bernoulli, Leonard Euler a Jean Le Rond d'Alembert.

- Daniel Bernoulli se narodil v Groningen, v Holandsku (1700 - 1782). Pocházel z rodiny jejíž členové na počátku 18. století patřili k významným evropským matematikům a fyzikům. Jeho strýc Jakob byl profesorem matematiky na Universitě v Basileji (Švýcarsko), zavedl termín „integrál“. Jan Bernoulli, otec Daniela byl profesorem matematiky v Groningen, a po smrti Jakoba (1705) přešel do Basileje. Rovněž oba bratři Daniela - Mikuláš a Jan a synovci Jan a Jakub byli výbornými matematiky a fyziky. Daniel studoval na Universitě v Basileji filosofii a logiku. Pokračoval studiem medicíny v Heidelbergu a Strasburgu a v roce 1721 obdržel doktorát. Během studia se zajímal i o matematiku a v roce 1724 publikoval práci „Exercitationes Mathematicae“ jež vzbudila značnou pozornost a byla mu udělena cena Pařížské akademie - první z deseti dalších jež získal během svého života. V roce 1725 byl pozván do Petrohradu. Osm let strávených v tamní Akademii bylo velmi plodných. Napsal tam věhlasné dílo „Hydrodynamica“, jež dokončil roku 1734, ale publikoval až v roce 1738. V roce 1733 se vrátil do Basileje na katedru anatomie a botaniky a v roce 1750 byla pro něj zřízena katedra fyziky.

Daniel Bernoulli byl členem snad všech učených společností a akademíí existujících v té době. Zavedl do literatury termín „hydrodynamika“. Ve své knize se zabýval jak praktickými problémy jako proudením v potrubí, propulsí a p., ale i problémem teoretickým - snažil se získat vztah mezi rychlosťí tekutiny a tlakem. Jeho odvození je klopotné, považoval tekutinu tak jak to bylo v té době běžné, za soubor částic. Jejich polohová energie se při pohybu změní v kinetickou energii a místo tlaku počítá s jakousi manometrickou výškou. Bernoulliovu rovnici, ve tvaru jak se používá dnes, v knize nenalezneme. Jeho otec Jan vydal v roce 1743 knihu „Hydraulica“ v níž už počítá s tlakem jako silou působící na tekutinu. Tuto knihu antidaktoval - udával rok vydání 1732 aby prý vznikl dojem, že on byl první kdo tuto rovnici odvodil. Někteří autoři zabývající se historií vědy předhazují otci nekorektní jednání k synovi. Jsou i jiní, kteří se snaží toto tvrzení vyvrátit. Zůstane asi pravdou, že tvar rovnice jaký nyní užíváme, odvodil až Euler a nazval ji Bernoulliovou na jeho počest.

Obrovský význam Bernoulliovy rovnice spočívá ve vysvětlení jevu, který byl v minulém století nazýván „hydrodynamické paradoxon“. V myšlenkách lidí je zafixován názor získaný ze života - při obtékání překážky tekutinou např. lodní plachty vzduchem tj. větrem je tlak na plachtu tím větší čím je větší rychlosť větru a tím rychleji se loď pohybuje. Podle Bernoulliovy rovnice musí však být v místě s velkou rychlosťí malý tlak a naopak. Mezi oběma tvrzeními není ve skutečnosti rozpor jen si musíme uvědomit, že v Bernoulliově rovnici se jedná vždy o rychlosť a tlak ve stejném místě, např. v úzkém průzezu potrubí zatímcó při účinku větru na plachtu se hovoří o rychlosći větru, kterou můžeme změřit daleko od plachetnice, ale současně hovoříme o tlaku na plachtu, kde je rychlosť vzduchu podstatně menší a kinetická energie se změní v tlakovou.

- Na podzim roku 1912 plul na volném moři jeden z tehdy největších osobních parníků „Olympic“, vyrobený v roce 1911 o délce 269 m a výtlaku 45 300 BRT. K němu se velkou rychlosťí přiblížil menší křížník „Hawke“. Když se vzdálenost zmenšila asi na stovky metrů počal plout paralelně s „Olympicem“ a v tom se stalo něco neočekáváno - „Hawke“ samovolně prudce změnil kurs, otočil se přídí k „Olympicu“ navzdory opačnému pohybu kormidla se zařízl do jeho boku a vážně jej poškodil. Námořní soud uznal vinným kapitána „Olympicu“ protože neuvolnil cestu křížníku, o čemž svědčila díra v boku lodě. Rozsudek byl dlouho diskutován a kapitán „Olympicu“ se hájil, že je nevinný. Pravděpodobnou příčinou bylo to, že mezi rovnoběžně blízko sebe plujícími loděmi vzniká zužující se kanál, kterým proudí voda rychleji než na vnějších stranách lodí, kde je prostor prakticky neomezený. Mezi loděmi bude tlak menší (hladina poklesne) než tlak vody působící na vnější boky lodí. Výsledný efekt je takový, že se paralelně plující lodě budou přitahovat a to tím více čím bude jejich rychlosť větší a vzdálenost menší. Menší loď se bude přirozeně přiblížovat rychleji.

## Příklad P 7.1

Plechový sud o průměru  $d_1$  je naplněn do výšky  $h$  vodou. Za jak dlouho se vyprázdní, jestliže otvor ve dně má průměr  $d$  a výtokový součinitel je  $\mu$  a součinitel kontrakce  $\alpha$ . Kolik vody vytče za dvě hodiny?

### Dáno:

$$d_1 = 0,8 \text{ m}, d = 4 \text{ mm}, h = 1,1 \text{ m}, \mu = \alpha\varphi = 0,78.$$

Určit: čas  $t_0 = ?$ , tj. doba vyprázdnění a objem  $V = ?$  tj. objem vytekly za dvě hodiny.

### Rozbor:

Výtoková rychlosť  $v$  závisí na výšce hladiny, která se při vyprazdňování sudu stále zmenšuje. Uvažujme tedy výtok v určitém okamžiku  $t$  kdy hladina je ve výšce  $y$  nade dnem. V tomto okamžiku platí rovnice kontinuity

$$v_1 A_1 = v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = v \alpha \frac{\pi d^2}{4} = v A, \text{ kde } A \text{ je skutečný průřez}$$

$$\text{vodního paprsku } A = \alpha \frac{\pi d^2}{4}, \text{ kde } \alpha \text{ je kontrakční}$$

součinitel a  $v_1 = -\frac{dy}{dt}$  je

rychlosť klesání hladiny v sudu (znaménko minus jsme

zavedli proto, že rychlosť  $v_1$  považujeme za kladnou

veličinu, ale  $dy$  je veličina záporná - hladina klesá,  $y$  se zmenšuje s časem  $t$ ). Výtoková rychlosť v tomto okamžiku závisí na okamžité výšce hladiny  $y$ :  $v = \varphi \sqrt{2gy}$ . Po dosazení do rovnice kontinuity a úpravě dostaneme diferenciální rovnici popisující klesání hladiny, kterou pak budeme integrovat.

### Předpoklady:

- 1) Změny rychlosťí jsou malé, můžeme zanedbat setrvačné síly, proudění je kvazistacionární,
- 2) Hodnoty součinitelů jsou konstantní,
- 3) Při nízkých polohách hladiny se nevytvoří vír.

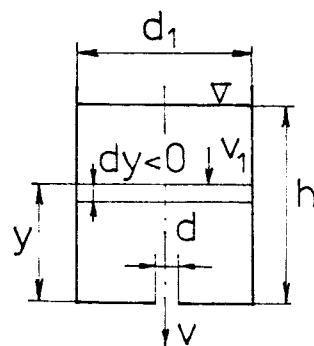
### Řešení:

Dosadíme do rovnice kontinuity

$$-\frac{dy}{dt} \frac{\pi d_1^2}{4} = \varphi \sqrt{2gy} \alpha \frac{\pi d^2}{4},$$

$$\int_0^{t_0} dt = -\frac{1}{\mu \sqrt{2g}} \left(\frac{d_1}{d}\right)^2 \int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{y}},$$

$$t_0 = \frac{2}{\mu} \left(\frac{d_1}{d}\right)^2 \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2g}} = \frac{2}{0,78} \left(\frac{0,8}{0,004}\right)^2 \frac{\sqrt{1,1}}{\sqrt{2 \cdot 9,81}} \doteq 2430 \text{ s, tj. asi } 6 \frac{3}{4} \text{ hodiny.}$$



Obr. P 7.1

Výsledný vzorec můžeme upravit násobením a dělením  $\sqrt{h}$  pak v čitateli dostaneme počáteční objem vody  $V_1 = A_1 h = 0,553 \text{ m}^3$  a ve jmenovateli  $v_{\max} = \sqrt{2gh}$  je počáteční výtoková rychlosť. Pak  $t_0 = \frac{2 \cdot V_1}{\dot{V}_{\max}}$  tj. doba výtoku je dvojnásobkem doby za kterou by se nádoba vyprázdnila kdyby rychlosť byla konstantní a rovna rychlosti počáteční a v nasem případě  $\dot{V}_{\max} = \mu \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gh} = 0,78 \frac{\pi 0,004^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,1} = 0,0000455 \text{ m}^3/\text{s}$ .  $t = \frac{2 \cdot 0,553}{0,0000455} = 24\,300 \text{ s}$ .

Abychom stanovili objem vody, který vyteče za 2 hodiny musíme znát jak se mění výška hladiny s časem. Budeme naší diferenciální rovnici integrovat od počátečního stavu  $t = 0$ ,  $y = h$  do obecného stavu: v okamžiku  $t$  je hladina ve výši  $y$ . Pak

$$t = \frac{2 \left( \frac{d_1}{d} \right)^2}{\mu} \frac{1}{\sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{y}) .$$

$$\text{Odtud } \sqrt{y} = \sqrt{h} - \frac{\mu \sqrt{2g}}{2} \left( \frac{d}{d_1} \right)^2 t = \sqrt{1,1} - \frac{0,78 \sqrt{2 \cdot 9,81}}{2} \left( \frac{0,004}{0,8} \right)^2 \cdot 2 \cdot 3600 ,$$

$$\sqrt{y} = 1,049 - 0,311 = 0,738 \text{ m}^{1/2} .$$

Za dvě hodiny je hladina ve výšce  $y = 0,545 \text{ m}$ .

$$\text{Ze sudu vytéklo za dvě hodiny } V = \frac{\pi d_1^2}{4} (h - y) = 0,279 \text{ m}^3 \text{ vody.}$$

#### Diskuse:

Voda vytéká pomalu, takže nemusíme uvažovat vliv setrvačných sil. Výtok přesto není rovnoměrný, polovina obsahu sudu vytékne za méně než 1/3 celkové doby vyprázdnění. Jak se změní poměry bude-li průměr otvoru ve dně 10x větší, tj.  $d = 40 \text{ mm}$ ? Protože celková doba výtoku je nepřímoúměrná kvadrátu průměru otvoru, bude nyní  $t_0 = 243 \text{ s}$ , tj. asi 4 minuty.

## Příklad P 7.2

Lící pánev, viz příklad P 4.2, je naplněna do výše  $H$  roztavenou ocelí. Stanovte, za jak dlouho se vyprázdní, jsou-li dány rozměry  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $H$ , průměr otvoru ve dně  $d$  a výtokový součinitel  $\mu$ .

Dáno:  $D_1 = 2 \text{ m}$ ,  $D_2 = 1,5 \text{ m}$ ,  $H = 3 \text{ m}$ ,  $d = 0,06 \text{ m}$ ,  $\mu = 0,8$ .

Určit: dobu vyprázdnění  $t_0 = ?$  (není-li výtok škrcen).

#### Rozbor (schema):

Průřez pánve se s výškou  $y$  mění. Za čas  $dt$  poklesne hladina o  $dy$  a tento objem vytékne otvorem ve dně. Před integrací musíme vyjádřit závislost průměru  $D$  na výšce  $y$ .

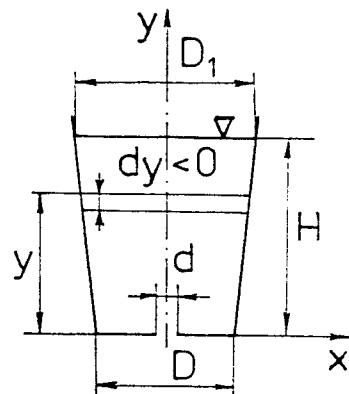
### Řešení:

$$-\frac{\pi D^2}{4} dy = \mu \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gy} dt ;$$

$$dt = -\frac{1}{\mu \sqrt{2g}} \left( \frac{D}{d} \right)^2 \frac{dy}{\sqrt{y}} ;$$

$$D = D_2 + (D_1 - D_2) \frac{y}{H} ;$$

$$\int_0^{t_0} dt = -\frac{1}{\mu \sqrt{2g}} \frac{1}{d^2} \int_H^0 \left[ D_2 + (D_1 - D_2) \frac{y}{H} \right]^2 \frac{dy}{\sqrt{y}}$$



Obr. P 7.2

$$t_0 = \frac{1}{\mu \sqrt{2g} d^2} \int_0^H \left[ D_2^2 + 2D_2(D_1 - D_2) \frac{y}{H} + (D_1 - D_2)^2 \frac{y^2}{H^2} \right] \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$t_0 = \frac{1}{\mu d^2 \sqrt{2g}} \left[ 2D_2^2 \sqrt{H} + \frac{2D_2(D_1 - D_2)}{H} \frac{2}{3} \sqrt{H^3} + \frac{(D_1 - D_2)^2}{H^2} \frac{2}{5} \sqrt{H^5} \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{H}}{\mu d^2 \sqrt{2g}} \left[ 2D_2^2 + \frac{4}{3} D_2(D_1 - D_2) + (D_1 - D_2)^2 \frac{2}{5} \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{0,8 \cdot 0,06^2 \sqrt{2 \cdot 9,81}} \left[ 2 \cdot 1,5^2 + \frac{4}{3} 1,5 \cdot 0,5 + (2 - 1,5)^2 \frac{2}{5} \right],$$

$$t_0 = 135,77(4,5 + 1 + 0,1) = 760,3 \text{ s tj. } 12,7 \text{ minut.}$$

### Víte, že

- vedle slunečních hodin sloužily už za dávných časů vodní hodiny - klepsydry. Nejstarší nálezy pocházejí z Babylónu. Měly tvar duté krychle o délce hrany asi 0,5 m, ve dně byl malý otvor vyvrtaný v achátu nebo jiném tvrdém minerálu. Protože výtoková rychlosť klesá s poklesem hladiny byla krychlová klepsydra nahrazována kuželovou, obracenou vrcholem dolů. Klesání hladiny pak bylo rovnoměrnější. Vodní hodiny měli i Číňané, Indové a Egyptané. Indické hodiny tvořila lastura s malým otvorem, plující na vodní hladině. Za hodinu se lastura naplnila a klesla ke dnu.
- ve starém Egyptě potřebovali kněží určovat noční čas, aby mohli vykonávat ve správnou dobu obřady, neboť věřili, že Horus, bůh Slunce, každou noc umírá, aby ráno opět ožil. Za jasných nocí mohli určit čas podle hvězd. Když bylo zataženo, sloužily k určení správného času k obětování chrámové klepsydry. Nejstarší egyptské dosud objevené pocházejí z chrámu boha Ré v Karnaku (fragmenty byly nalezeny v r. 1905) a měly tvar květináče. Stupnice byla vyznačena uvnitř nádoby. Pocházejí z doby vlády faraóna Amenhotepa III. (asi 1417 - 1379 př. Kr.). Za jejich vynálezce, nebo konstruktéra, se podle nápisu na náhrobku považuje Amenemhet (asi 1556 - 1515 př. Kr.), dvorní úředník v Thébách.



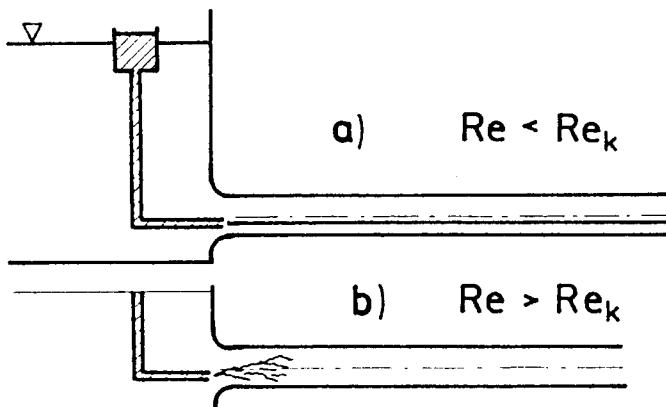
Karnacké vodní hodiny

## 8. STACIONÁRNÍ PROUDĚNÍ VAZKÉ TEKUTINY POTRUBÍM

Při výtoku vazké kapaliny otvorem z nádoby se převážná část její počáteční energie změní v energii kinetickou - viditelnou, nebo měřitelnou běžnými přístroji - a jen nepatrná část, dvě až pět procent se přemění v teplo - disipuje, změní se v kinetickou energii pouhým okem neviditelného pohybu molekul tekutiny. Při proudění velmi vazké tekutiny potrubím je tomu právě naopak. Převážná část počáteční energie kapaliny disipuje a jen menší část se změní v energii kinetickou. Znamená to tedy, že se při proudění mění - roste - vnitřní energie vazké tekutiny a je pak nutno s její změnou v energetické rovnici počítat. Kinetická energie tekutiny a tedy i rychlosť proudění bude u vazké tekutiny vždy menší než rychlosť vypočtená za stejných podmínek pro nevazkou tekutinu.

Reálná tekutina na stěnách lpi, rychlosť na stěně je rovna nule. Tedy nejenom normálová, ale i tangenciální složka rychlosťi je rovna nule.

Pokusy se zviditelňováním proudění provedené v druhé polovině minulého století ukázaly, že vazká tekutina proudí ve stejné trubici při stejné teplotě ve vrstvách - laminárně, obr 48a), je-li rychlosť malá, nebo chaoticky, neuspořádaně - turbulentně, je-li rychlosť veliká, obr. 48b).



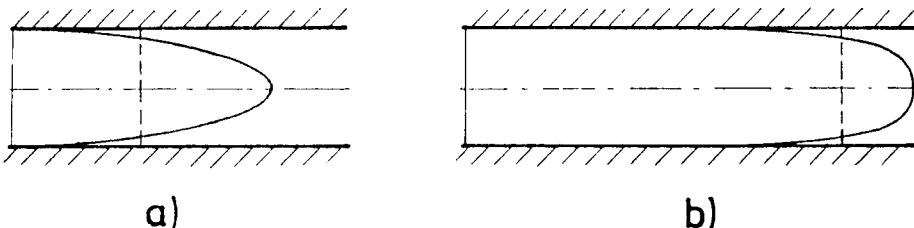
Obr. 48 Reynoldsův pokus.

a) Laminární proudění.

b) Turbulentní proudění.

Reynoldsovy systematické pokusy s barvou obr. 48 ukázaly, že k přechodu laminárního proudění v turbulentní dochází v potrubí kruhového průřezu zpravidla při určité hodnotě poměru  $v d / \nu$ , kde  $v$  je střední rychlosť,  $d$  průměr potrubí a  $\nu$  kinematická viskozita tekutiny. Později byl tento poměr pojmenován Reynoldsovo číslo a značí se  $Re$ . Nejnižší hodnota při níž dochází k přechodu proudění laminárního v turbulentní tj. ke vzniku turbulence, se nazývá dolní kritické číslo a pro potrubí kruhového průřezu je  $Re_k = 2\,300$ . Při vytvoření vhodných podmínek (uklidněná kapalina, dobré zaoblený vstup do potrubí atd.) lze laminární proudění v laboratoři udržet i při  $Re \sim 10^4$  a vyšším. V této oblasti však je laminární proudění nestabilní a při nepatrné poruše se mění v turbulentní.

Při laminárním proudění je rozložení rychlosťi zcela jiné než při proudění turbulentním. V obou případech je rychlosť na stěně nulová a rychlosť maximální je na ose. Při laminárním proudění je rychlostní profil mnohem štíhlejší, obr. 49a než při proudění turbulentním, obr. 49b.



Obr. 49 Rychlostní profily.

a) Laminární proudění.

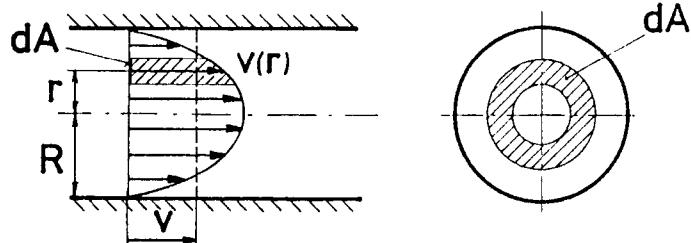
b) Turbulentní proudění.

## 8.1 Základní rovnice pro vazké tekutiny

### a) Rovnice kontinuity

Při průtoku reálné tekutiny trubicí konečného průřezu je rychlosť  $v(r)$  po průřezu rozložena nerovnoměrně, obr. 50. V tomto případě počítáme se střední rychlostí  $v$  tj. taková rychlosť, konstantní po celém průřezu, při níž je stejný průtok obr. 50.

Obr. 50 Stanovení střední rychlosti podle objemového průtoku.



Objemový průtok  $\dot{V}$  lze vyjádřit

a) jako součet elementárních průtoků

$$\dot{V} = \iint_A d\dot{V} = \iint_A v(r)dA, \quad (51)$$

kde  $v(r)$  je místní rychlosť na elementární ploše  $dA$ , nebo

b) pomocí střední rychlosti ( $v = \text{konst.}$ )

$$\dot{V} = \iint_A v dA = v \iint_A dA = vA.$$

Z poslední rovnice lze vypočítat střední objemovou rychlosť známe-li objemový průtok a průřez

$$v = \frac{\dot{V}}{A}. \quad (52)$$

Při laminárním proudění je střední rychlosť rovna polovině maximální rychlosti, při turbulentním proudění je střední rychlosť rovna asi 0,75 až 0,8 maximální rychlosti.

Při stacionárním proudění vazkých nestlačitelných tekutin je objemový tok  $\dot{V}$  stejný ve všech průřezech  $\dot{V} = \text{konst.}$ . Dosadíme-li do rovnice kontinuity tj. místo integrálů, rov. (51), střední rychlosť, rov. (52), bude mít rovnice kontinuity shodný tvar pro nevazké i vazké tekutiny.

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = \text{konst.} \quad (35)$$

### b) Rovnice energetická. Rozšířená Bernoulliova rovnice

Uvažujeme proudění vazké tekutiny mezi dvěma průřezy 1 a 2, obr. 41, bez přívodu vnější energie (mechanické nebo tepelné). Mezi oběma průřezy však dochází vlivem disipace ke změně vnitřní energie  $u$ . Zákon zachování energie pak lze psát ve tvaru

$$u_1 + gh_1 + \frac{p_1}{\rho} + \kappa_1 \frac{v_1^2}{2} = u_2 + gh_2 + \frac{p_2}{\rho} + \kappa_2 \frac{v_2^2}{2}. \quad (53)$$

Je-li vlivem disipačního procesu  $u_2 > u_1$ , došlo v průřezu 2 ke snížení mechanické energie kapaliny. Vzniklý přírůstek vnitřní energie - tepla - má nízký potenciál a nelze ho přeměnit v užitečnou práci. Proto se v praxi označují tyto členy (jež opět mohou být vyjádřeny i jako výšky nebo tlaky) jako ztráty:

$$u_2 - u_1 = e_z = gh_z = \frac{p_z}{\rho},$$

kde  $e_z$  je měrná ztrátová energie,  $h_z$  ztrátová výška a  $p_z$  tlaková ztráta.

Bernoulliova rovnice rozšířená pro stacionární proudění reálných nestlačitelných tekutin o ztráty bude pak mít tvar:

$$gh_1 + \frac{p_1}{\rho} + \kappa_1 \frac{v_1^2}{2} = gh_2 + \frac{p_2}{\rho} + \kappa_2 \frac{v_2^2}{2} + e_z \quad (54)$$

nebo

$$h_1 + \frac{p_1}{g\rho} + \kappa_1 \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{p_2}{g\rho} + \kappa_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_z \quad (55)$$

### c) Coriolisův součinitel $\kappa$

V Bernoulliově rovnici pro vazké tekutiny (53) až (55) se u kinetické energie objevil korekční člen  $\kappa$ . Tento součinitel závisí na tvaru rychlostního profilu a může se podél potrubí měnit, pokud se bude měnit rychlostní profil. Tím respektujeme nerovnoměrné rozdělení rychlosti po průřezu i když do Bernoulliovy rovnice dosazujeme střední rychlosť  $v$  podle objemu, rov. (52). Správné by však bylo dosazovat střední rychlosť podle kinetické energie  $v_e$

$$\dot{E}_k = \dot{m} \frac{v_e^2}{2} = \iint_A \frac{[v(r)]^2}{2} dm = \iint_A \frac{[v(r)]^2}{2} \rho v(r) dA = \iint_A \frac{\rho}{2} [v(r)]^3 dA .$$

Coriolisův součinitel je poměr této skutečné energie proudu při daném rychlostním profilu ku kinetické energii proudu s obdélníkovým rychlostním profilem

$$\kappa = \frac{\dot{E}_k}{\frac{v^2}{2} \rho v A} = \iint_A \left[ \frac{v(r)}{v} \right]^3 \frac{dA}{A} ,$$

kde  $v = \dot{V}/A$  je střední rychlosť podle objemu. Pro kruhový průřez, obr. 50 je  $dA = 2\pi r dr$  a  $A = \pi R^2$ . Označíme-li bezrozměrnou (relativní) rychlosť  $\Phi = v(r)/v$  a bezrozměrný (relativní) poloměr  $\eta = r/R$  dostaneme po úpravě

$$\kappa = 2 \int_0^1 \Phi^3 \eta d\eta .$$

Pro laminární proudění, po dosazení relativní rychlosť z rovnice rychlostního profilu (viz kap. 12), dostaneme  $\kappa = 2$ . Pro turbulentní proudění bereme přibližně  $\kappa \approx 1$ .

## 8.2 Hydraulické ztráty

a) Disipace energie, způsobená vazkostí tekutiny (tj. hydraulické ztráty způsobené překonáváním hydraulických odporů) je závislá na řadě parametrů např. viskozitě tekutiny, geometrii potrubí a jeho drsnosti, ale hlavně na rychlosťi proudění. Při výpočtu se ztráty vyjadřují jako násobek kinetické energie (vztažené na střední objemovou rychlosť):

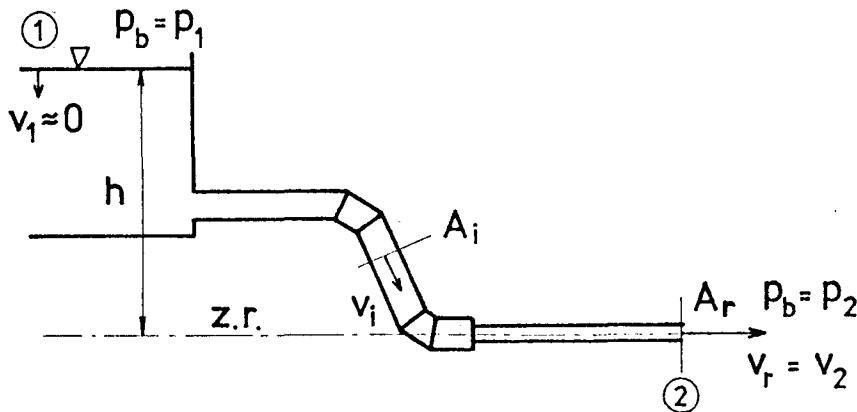
$$e_z = gh_z = \frac{p_z}{\rho} = \zeta \frac{v^2}{2} , \quad (56)$$

kde  $\zeta$  je ztrátový součinitel, závislý na druhu ztrát. Hodnotu ztrátového součinitele  $\zeta$  najdeme v různých příručkách, vztaženou vždy na místní rychlosť. U dlouhých potrubí převažují třecí ztráty, úměrné délce, u krátkých se uplatní ztráty způsobené vířením tekutiny v tzv. místních ztrátech např. v ohybech, při změně průřezu a pod., obr. 51.

Zpravidla předpokládáme, že se každý hydraulický odpor projevuje nezávisle na účinku ostatních odporů. Celková ztráta je pak dána součtem jednotlivých ztrát způsobených každým odporem samostatně:

$$e_{zcelk} = \sum e_{zi} \quad resp. \quad h_{zcelk} = \sum h_{zi} \quad resp. \quad p_{zcelk} = \sum p_{zi} . \quad (57)$$

Při výpočtu složitějších soustav potrubí, s měnícími se průměry a rychlostmi, je vhodné přepočítat hodnoty ztrátových součinitelů na určitou referenční rychlosť  $v_r$ , ve zvoleném místě, pomocí rovnice kontinuity, obr. 51.



Obr. 51 Výtok z nádrže potrubím. Výstupní průřez zvolen jako referenční průřez.

$$\begin{aligned} v_i A_i &= v_r A_r \Rightarrow v_i = \frac{A_r}{A_i} v_r \\ e_{zi} &= \zeta_i \frac{v_i^2}{2} = \zeta_i \left( \frac{A_r}{A_i} \right)^2 \frac{v_r^2}{2} = \zeta'_i \frac{v_r^2}{2} \\ \zeta'_i &= \zeta_i \left( \frac{A_r}{A_i} \right)^2 \end{aligned} \quad (58)$$

$\zeta'_i$  je tzv. redukovaný ztrátový součinitel.

b) Srovnání metody ztrátových součinitelů s metodou korekci. Uvažujme případ, kdy k nádobě je připojeno potrubí, obr. 51. Pak za předpokladu, že je nádrž rozměrná je rychlosť na hladině  $v_i \approx 0$  a je-li nádoba otevřená a výtok z potrubí jde do atmosféry, bude  $p_1 = p_2 = p_b$ . Při turbulentním proudění bude  $\kappa = 1$ . Napíšeme-li pak Bernoulliovu rovnici se ztrátami mezi průřezy 1 - 2 můžeme vypočítat přímo skutečnou výtokovou rychlosť, známe-li celkový ztrátový součinitel  $\zeta'_c$  (redukovaný):

$$\begin{aligned} gh + \frac{p_1}{\rho} + 0 &= 0 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_r^2}{2} + \zeta'_c \frac{v_r^2}{2} \\ v_r &= \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta'_c}} . \end{aligned}$$

Kdybychom použili Bernoulliovu rovnici pro nevazkou kapalinu vypočetli bychom teoretickou rychlosť  $\sqrt{2gh}$ . Vynásobíme-li ji rychlostním součinitelem  $\varphi$  dostaneme opět skutečnou výtokovou rychlosť (viz kap. 7)  $v_r = \varphi \sqrt{2gh}$ .

Porovnáním obou výrazů dostaneme vztah, který platí mezi rychlostním a ztrátovým součinitelem:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta'_c}} \quad resp. \quad \zeta'_c = \frac{1}{\varphi^2} - 1 .$$

*Poznámka: metoda korekčních součinitelů se zpravidla používá jen při výtoku tekutiny z nádoby otvorem nebo nátrubky. Je-li k nádobě připojeno potrubí používáme metody ztrátových součinitelů.*

### 8.3 Třecí ztráty v potrubí

a) Potrubí kruhového průřezu. Třecí ztráty jsou závislé jednak na tekutině dopravované potrubím (na množství, hustotě, viskozitě, koncentraci příměsi), jednak na potrubí (na jeho délce, průměru, drsnosti). Protože tyto veličiny se mohou během používání - exploatace - potrubí měnit, (např. průměr se může zmenšovat vlivem zarůstání potrubí, drsnost zvětšovat vlivem koroze), budou i ztráty závislé na čase. Během 200 let se nashromázdilo asi tisíc vzorců pro výpočet třecích ztrát, některé úzce specializované pro určitý druh tekutiny, potrubí, teplotu a p., jiné s obecnější platností. Dnes v Evropě se nejvíce počítá s Weisbachovým vzorcem

$$e_z = gh_z = \frac{p_z}{\rho} = \lambda \frac{l v^2}{d^2}, \quad (59)$$

kde  $v$  (m/s) je střední objemová rychlosť,  $l$  (m) délka potrubí,  $d$  (m) průměr potrubí,  $\lambda$  (1) je součinitel třecích ztrát.

Je-li dán objemový průtok, délka a průměr potrubí, lze rov. (59) přepsat na tvar:

$$e_z = \lambda \frac{16}{\pi^2} \frac{l}{d^5} \frac{V^2}{2}.$$

Z této rovnice vidíme, že pro přesné určení ztrát je důležité správně stanovit průměr potrubí, jehož relativní chyba má na stanovení chyby ztrát 5x větší váhu než např. chyba ve stanovení délky potrubí.

Pro přesné určení ztrát je důležité i správné stanovení součinitele třecích ztrát  $\lambda$ , který bude funkci střední rychlosti  $v$ , viskozity  $\nu$ , průměru a délky potrubí  $d$  a  $l$ , jeho absolutní drsnosti  $k$ , času, koncentrace příměsi atd.

$$\lambda = f(v, \nu, d, l, k, t, \dots).$$

U dostatečně dlouhých potrubí  $l/d > 100$  je závislost ztrát na délce lineární, rov. (59) a pak součinitel  $\lambda$  už na délce nezávisí, což neplatí pro krátká potrubí.

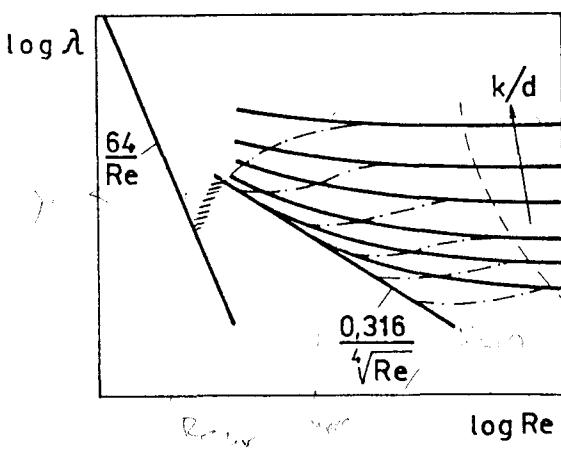
Pomocí teorie podobnosti, kap. 15, lze počet nezávisle proměnných dále snížit. Pokud nebudeme uvažovat změnu drsnosti a průměru s časem, lze počet snížit na dvě a to Reynoldsovo číslo  $Re = vd/\nu$  a relativní drsnost  $k/d$ :

$$\lambda = f(Re, k/d).$$

Teoretické odvození této závislosti lze provést pouze v laminární oblasti, kap. 12. Proto byla provedena systematická měření nejprve s umělou drsností (např. Nikuradse) a později s přirozenou drsností s komerčním potrubím ve velkém rozsahu Reynoldsových čísel a relativních drsností. Tato závislost je naznačena na obr. 52 v logaritmických souřadnicích.

Obr. 52

Závislost součinitele třecích ztrát na Reynoldsově čísle. V turbulentní oblasti závisí  $\lambda$  i na relativní drsnosti  $k/d$ . Pro umělou drsnost platí čerchované čáry, pro přirozenou drsnost plné čáry.



V laminární oblasti závisí  $\lambda$  jen na  $Re$        $\lambda = \frac{64}{Re}$       a klesá s rostoucím  $Re$ . Při

přechodu  $\lambda$  roste prudce s  $Re$  (asi mezi  $Re = 2\ 000$  až  $3\ 000$ ). V turbulentní oblasti (nad  $5\ 000$ ) je  $\lambda$  závislé na  $Re$  i  $k/d$ .

Pro hladké potrubí

$$\lambda = \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}} \quad \text{pro } Re < 80\ 000.$$

Zatímco u potrubí s přirozenou (ostrohrannou) drsností  $\lambda$  monotónně klesá s rostoucím  $Re$  (plná čára) u umělé drsnosti (čerchovaně) se v průběhu  $\lambda$  na  $Re$  objevuje „sedlo“. Při velkých Reynoldsových číslech závisí  $\lambda$  jen na drsnosti  $k/d$  a to tak, že čím větší drsnost, tím větší  $\lambda$ .

b) **Hydraulická hladkost.** Z diagramu  $\lambda = f(Re, k/d)$  obr. 52 vyplývá, že při menších drsnostech dojde k odchylce od křivky platné pro hladké potrubí teprve nad určitou hodnotou Reynoldsova čísla. Při nižších hodnotách  $Re$  se chová toto drsné potrubí jako hladké.

Tento jev se vysvětluje změnou charakteru turbulentního proudění v blízkosti stěny v tzv. vazké podvrstvě vznikající u stěny, jejíž tloušťka se s rostoucím  $Re$  zmenšuje a přestane překrývat nerovností povrchu, viz kap. 13.

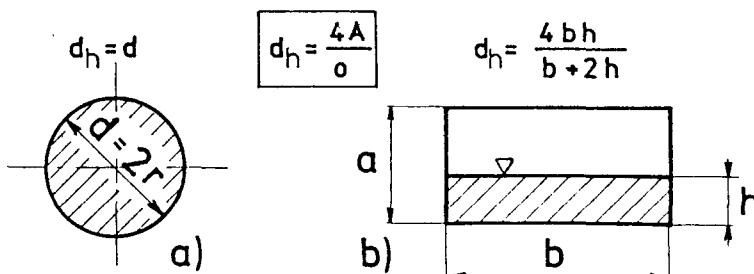
c) **Potrubí nekruhového průřezu.** Při proudění potrubím nekruhového průřezu, jaké se používá např. ve vzduchotechnice, musíme do Weisbachova vzorce (59) místo průměru potrubí dosadit jiný rozměr charakterizující geometrii potrubí. Může to být např. hydraulický průměr

$$d_h = \frac{4A}{o} . \quad (60)$$

kde  $A$  je průřez proudu tekutiny a  $o$  smočený obvod, tj. ta část obvodu průřezu potrubí, která se stýká s proudící tekutinou. Proudí-li potrubím plyn, který je rozpínavý, stýká se vždy se stěnou po celém obvodu průřezu.

Pro potrubí kruhového průřezu, zcela zaplněné tekutinou, obr. 53a) dostáváme rovnost hydraulického a geometrického průměru:  $d_h = 4 \frac{\pi d^2}{4} \frac{1}{\pi d} = d$ .

$$d_h = 4 \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi d} = d .$$



Obr. 53a) Při průtoku zcela zaplněným potrubím kruhového průřezu je hydraulický průměr  $d_h$  roven geometrickému průměru  $d$ .

b) Hydraulický průměr  $d_h$  je používán jako charakteristický rozměr při proudění potrubím nekruhového průřezu.

*Poznámka:* v některé literatuře se zavádí místo hydraulického průměru hydraulický poloměr definovaný jako průřez proudu dělený smočeným obvodem  $r_h = \frac{A}{o} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}$ . V tomto případě hydraulický a geometrický poloměr jsou rozdílné veličiny a docházelo k zaměnám a omylům.

Pro potrubí obdélníkového průřezu, obr. 53 b) naplněné kapalinou do určité výše  $h$  bude hydraulický průměr

$$d_h = \frac{4A}{o} = \frac{4bh}{2h+b}.$$

Další postup výpočtu třecích ztrát je pak stejný jako pro potrubí kruhového průřezu, tj. stanovíme nejprve  $Re = vd_h/\nu$  a pak z diagramu obr. 52 určíme pro danou drsnost potrubí  $\lambda$ , jež pak dosadíme do Weisbachova vzorce

$$e_z = \lambda \frac{l}{d_h} \frac{v^2}{2}.$$

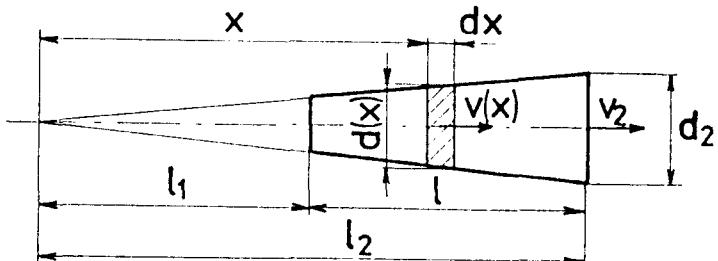
Tento přibližný výpočet, využívající hodnot  $\lambda$  určených pro potrubí kruhového průřezu, je vhodný jen pro turbulentní oblast. Při laminárním proudění nekruhovými průřezy bychom touto metodou dostali výsledky zatížené příliš velkou chybou. Kromě toho se dají ztráty při laminárním proudění nekruhovými průřezy spočítat přesně analyticky.

~~d)~~ d) Tření v kuželovém potrubí. Máme stanovit výpočtem ztráty vznikající např. při průtoku difuzorem, obr. 54, přitom chceme využít údajů zjištěných pro potrubí konstantního průřezu tj. součinitele třecích ztrát. Celková ztráta difuzoru pak bude rovna součtu třecích ztrát a přidavných ztrát způsobených změnou průřezu.

Podle stupně požadované přesnosti, podle hloubky znalosti matematiky (a případně dalších okolností) můžeme stanovit různé hydraulické resp. matematické modely tohoto případu proudění.

Nejjednodušší model považuje difuzor za potrubí s konstantním průměrem rovný aritmetickému průměru  $d_s = (d_1 + d_2)/2$ . Pro tento průměr stanovíme  $Re$ ,  $\lambda$  i třecí ztráty.

Poněkud složitější model vyžaduje již znalosti integrálního počtu. Vytkneme si elementární část difuzoru o délce  $dx$ , obr. 54, přičemž místní průměr  $d(x)$  a střední objemová rychlos  $v(x)$  jsou funkci souřadnice  $x$ .



Obr. 54 Přibližný výpočet třecích ztrát v difuzoru.

Třecí ztráty tohoto elementárního difuzoru budou rovny

$$de_{zt} = \lambda \frac{dx}{d(x)} \frac{[v(x)]^2}{2}.$$

Z podobných trojúhelníků lze vyjádřit

$$\frac{1}{d(x)} = \frac{l_2}{d_2} \frac{1}{x}$$

a z rovnice kontinuity

$$v(x) = v_2 \left( \frac{d_2}{d(x)} \right)^2 = v_2 \left( \frac{l_2}{x} \right)^2.$$

Třecí ztráty pak dostaneme integraci po dosazení posledních dvou závislostí do výrazu  $de_{zt}$ . Zavedeme-li další zjednodušení  $\lambda = \text{konst.}$ , pak

$$e_{zt} = \int_{l_1}^{l_2} de_{zt} = \lambda \frac{l_2^5}{d_2} \frac{v_2^2}{2} \int_{l_1}^{l_2} \frac{dx}{x^5} = \lambda \frac{l}{4(d_2 - d_1)} \left[ \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^4 - 1 \right] \frac{v_2^2}{2}.$$

Samozřejmě lze vytvořit modely ještě složitější, např. i pro prostorové proudění. Časová náročnost řešení roste s komplikovaností modelu a je třeba najít optimum mezi možnostmi řešení a požadovanou přesnosti výpočtu. Stejným způsobem se postupuje při řešení všech problémů mechaniky tekutin.

*Poznámka: uvedená řešení se nebudou příliš lišit od skutečnosti pouze v tom případě, že v difuzoru nedojde k odtržení proudu tekutiny od stěn. To lze očekávat v případech, kdy úhel rozšíření difuzoru je menší než 8°. Rychlostní profily v jednotlivých průřezech difuzoru však mají jiný tvar než rychlostní profily v potrubí konstantního průřezu. Tim vznikne rozdíl mezi vypočtenými třecími a skutečnými ztrátami v difuzoru i když nedojde k odtržení proudu. Tento rozdíl lze pak zahrnout do místní ztráty v difuzoru.*

## 8.4 Místní ztráty

Místní ztráty jsou přídavné ztráty k třecím ztrátám, způsobené změnou velikosti průřezu potrubí nebo změnou směru, což má za následek vznik vírů v tekutině. Kinetická energie těchto vírů se odebírá z energie hlavního pohybu proudu tekutiny tj. energie se změní v teplo - dissipuje.

Velikost místní ztráty se počítá ze vztahu

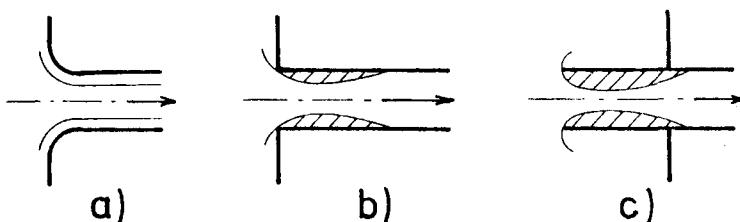
$$e_z = \zeta \frac{v^2}{2} ,$$

kde ztrátový součinitel  $\zeta$  je závislý na geometrii místní ztráty, ale při nižších hodnotách Reynoldsova čísla i na  $Re$ . Ztrátový součinitel se určuje většinou experimentálně a jeho hodnoty lze nalézt v různých příručkách.

Uveďme si pro informaci některé místní ztráty:

a) Vstup do potrubí, obr. 55. Při velkých hodnotách  $Re > 10^3$  budou hodnoty ztrátových součinitelů záviset jen na geometrii vstupu.

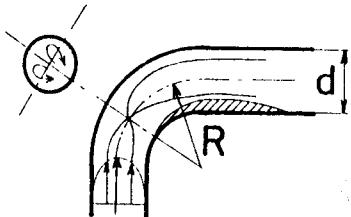
Pro dokonale zaoblený vstup, (obr. 55a)  $\zeta = 0,03$ , pro ostrohranný pravoúhlý vstup (obr. 55b)  $\zeta = 0,5$  a pro Bordův nátrubek, tj. potrubí zasunuté do nádrže, může být (obr. 55c)  $\zeta > 1$ . Protože při běžné výrobě nikdy nelze docílit dokonalou geometrickou podobnost, je třeba u všech místních ztrátových součinitelů počítat s poměrně velkým rozptylem.



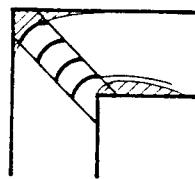
Obr. 55 Různé uspořádání vstupu do potrubí.

a) Zaoblený,                    b) ostrohranný,                    c) Bordův nátrubek.

b) Změna směru proudu (koleno, ohyb). Vzhledem k nerovnoměrnému rozložení rychlostí ve vstupním průřezu (max. rychlosť je v ose potrubí) a vlivem účinku odstředivých sil bude proudění v těchto případech vždy prostorové. Částice tekutiny se pohybují v ohybech po šroubovici, obr. 56. Za ohybem dochází na vnitřní straně k odtržení proudu. Ztrátový součinitel bude závislý na velikosti změny směru proudu a na relativním poloměru zakřivení  $R/d$ .



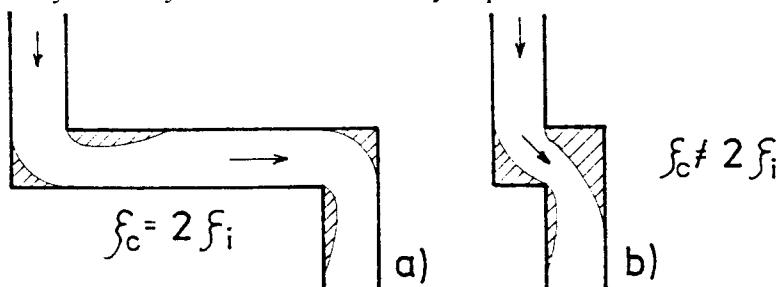
Obr. 56 Proudění v ohybu.



Obr. 57 Usměrňovací lopatky snižují místní ztráty při proudění v ohybu.

U ostrohranných ohybů se vytváří víry i na vnější straně. Ke snížení ztrát se do těchto ohybů vkládají usměrňovací lopatky, obr. 57.

Následují-li dvě místní ztráty těsně za sebou ovlivňují se navzájem. Proudové pole před, resp. za nimi je jiné, než kdyby se nacházely osamocené v přímém potrubí, což je případ pro který byly hodnoty ztrátových součinitelů určeny experimentálně.



Obr. 58 Průtok dvěma místními ztrátami (ohyby) umístěnými za sebou,

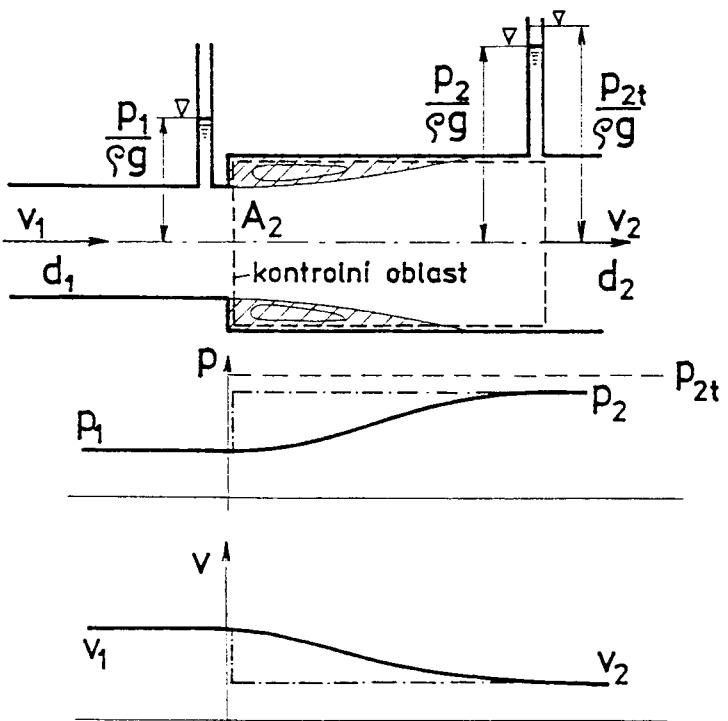
a) ve větší vzdálenosti - neovlivňují se

b) blízko za sebou - dochází k interakci

V případě, že dochází k interakci nelze stanovit výslednou ztrátu jako součet jednotlivých ztrát. Na obr. 58a) jsou dva ohyby daleko za sebou, pak celkový ztrátový součinitel  $\zeta_c = 2\zeta$ . Jsou-li však těsně za sebou, obr. 58b) vtéká tekutina do druhého pod šikmým úhlem a  $\zeta_c < 2\zeta$  a ztrátový součinitel  $\zeta_c$  musíme stanovit zvlášť pro celek tvořený těmito dvěma blízkými ohyby.

c) Náhlé rozšíření průřezu, Bordova ztráta. Při náhlém rozšíření průřezu potrubí, obr. 59, by se teoreticky, podle rovnice kontinuity, měla okamžitě zmenšit střední rychlosť na hodnotu  $v_2 = v_1(d_1/d_2)^2$  a tlak stoupnout o

$$(p_2 - p_1)_t = \rho \frac{v_1^2 - v_2^2}{2}.$$



Obr. 59 Náhlé rozšíření průřezu se skutečným a teoretickým rozložením tlaků a rychlostí.

Ve skutečnosti nebude proud sledovat stěny potrubí, dojde k odtržení proudu, který se bude rozširovat postupně a u stěn se vytvoří víry, jež pro nás představují disipaci energie. Skutečné stoupnutí tlaku bude tedy nižší než odpovídá teoretickému a vypočteme je z věty o změně hybnosti psané pro kontrolní oblast ve tvaru válce o základně  $A_2$ , obr. 59. Ve směru proudění působí tlakové síly na čela. Třecí sílu na plášt' zanedbáme:

$$A_2(p_1 - p_2) = \dot{m}(v_2 - v_1) = \rho A_2 v_2(v_2 - v_1) .$$

Z rozšířené Bernoulliovovy rovnice psané mezi průřezy 1 a 2 lze určit ztrátu náhlým rozšířením průřezu - Bordovu ztrátu

$$e_z = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} - \frac{p_2 - p_1}{\rho} ,$$

kde první člen charakterizuje teoretické a druhý skutečné stoupnutí tlaků. Po dosazení z věty o změně hybnosti

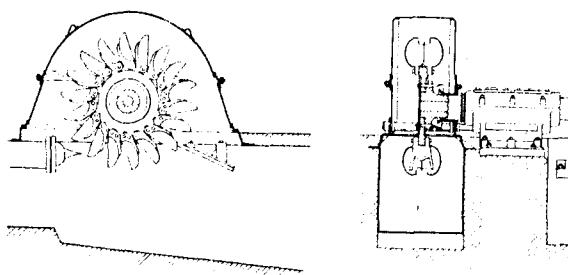
$$\begin{aligned} e_z &= \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + \frac{\rho v_2(v_2 - v_1)}{\rho} = \frac{v_1^2 - v_2^2 + 2v_2^2 - 2v_1 v_2}{2} \\ e_z &= \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2} , \end{aligned} \quad (61)$$

kde  $\zeta_1 = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 < 1$  resp.  $\zeta_2 = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 > \zeta_1$ .

### Otázky ke kap. 8.:

- 1) Jaké jsou rozdíly při řešení proudění potrubím konstantního průřezu použijeme-li model nevazké nestlačitelné tekutiny oproti proudění reálné tekutiny.
- 2) Jak se projeví disipace energie při proudění reálné tekutiny vodorovným potrubím konstantního průřezu, nebo při výtoku z nádoby svislým potrubím konstantního průřezu?
- 3) Kdy nastane laminární resp. turbulentní proudění a jaký je mezi nimi rozdíl?
- 4) Jaký je rozdíl v zápisu rovnice kontinuity pro nevazkou a reálnou nestlačitelnou tekutinu?
- 5) Čím se liší rozšířená Bernoulliovova rovnice používaná pro nestlačitelnou vazkou tekutinu od Bernoulliovovy rovnice pro nevazkou nestlačitelnou tekutinu?
- 6) Co je příčinou hydraulických ztrát? Jak je dělíme?
- 7) Za jakých předpokladů lze jednotlivé ztráty sčítat, takže celková ztráta je rovna součtu ztrát?
- 8) Na čem závisí třecí ztráty?
- 9) Jak počítáme třecí ztráty v potrubí nekruhového průřezu při turbulentním nebo laminárním proudění?
- 10) Nakreslete závislost součinitele třecích ztrát na Reynoldsově čísle a drsnosti stěn.
- 11) Jak se počítají přibližně třecí ztráty v difuzoru?
- 12) Na čem závisí velikost místní ztráty?
- 13) Jak lze zmenšit ztrátu při vstupu do potrubí?
- 14) Popište proudění při změně směru proudu a jakým způsobem lze tuto ztrátu zmenšit?
- 15) Jak se počítá ztráta při změně průřezu potrubí?
- 16) Jak lze zmenšit ztrátu při rozšíření průřezu potrubí?

## Příklad P 8.1



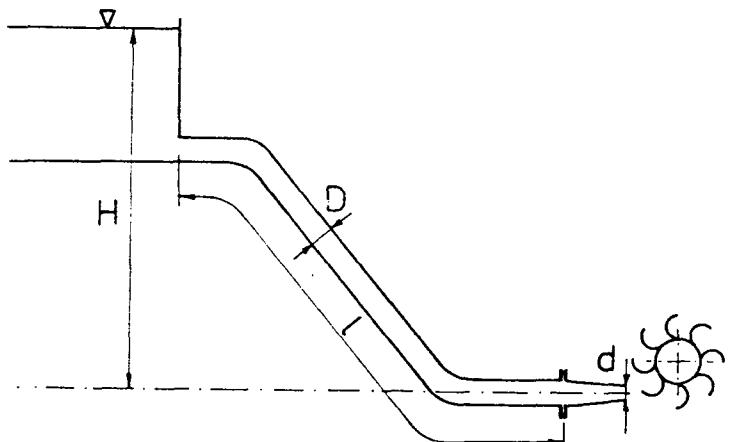
Tlakové potrubí o průměru  $D$  a délce  $l$  přivádí vodu do hydroelektrárny na Peltonovu turbinu opatřenou jednou tryskou o průměru  $d$ , obr. P 8.1. Dán geodetický spád  $H$ , ekvivalentní drsnost stěn potrubí  $k$ , součinitel vstupní ztráty  $\zeta_v$ , ohybu  $\zeta_o$  a ztrátový součinitel trysky  $\zeta_t$  (vztažen na rychlosť ve výstupním průřezu). Určete průtok  $\dot{Q}$  ( $\text{m}^3/\text{s}$ ), výkon proudu vody, tj. kinetickou energii vody ve výstupním průřezu, hydraulické ztráty v přívodním potrubí a účinnost přívodního potrubí.

Dáno:  $H = 250 \text{ m}$ ,  $D = 0,6 \text{ m}$ ,  $l = 1500 \text{ m}$ ,  $k = 0,2 \text{ mm}$ ,  $d = 0,1 \text{ m}$ ,  $\zeta_v = 0,5$ ,  $\zeta_o = 0,1$ ,  $\zeta_t = 0,04$ .

Určit: hĺbkosť turbíny  $\dot{Q}$  ( $\text{m}^3/\text{s}$ ), hydraulické ztráty  $h_z$  (m), účinnosť potrubí  $\eta_p$ , výkon proudu vody  $P$  (MW).

### Rozbor (schéma):

Průměr potrubí přivaděče se určí jako optimální a to tak, že z hľadiska hydraulických ztrát volíme co možno nejväčší, neboť pak je rychlosť v ním malá (ztráty závisí na kvadráte rychlosťi), z hľadiska pořizovacích nákladov je zase výhodnejší - levnejší - malý průměr.



### Předpoklady:

Obr. P 8.1

- 1) Proudění v přivaděči spadá do kvadratického režimu. Součinitel třecích ztrát  $\lambda = 0,11 \left( \frac{k}{D} \right)^{1/4}$ .
- 2) Na výstupu z trysky je obdélníkový rychlosťní profil.
- 3) Účinnosť potrubí  $\eta_p = \frac{H - h_z}{H} = \frac{v^2 / 2g}{H}$ .

### Řešení:

Z Bernoulliovy rovnice napsané pro hladinu a výstupní průřez trysky určíme výstupní rychlosť  $v_2$ :

$$H = \left( \zeta_v + \lambda \frac{l}{D} + 2\zeta_o \right) \frac{v_1^2}{2g} + (1 + \zeta_t) \frac{v_2^2}{2g},$$

$$H = \left[ \left( \zeta_v + \lambda \frac{1}{D} + 2\zeta_o \right) \left( \frac{d}{D} \right)^4 + (1 + \zeta_t) \right] \frac{v_2^2}{2g},$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gH}{\left( \zeta_v + \lambda \frac{l}{D} + 2\zeta_o \right) \left( \frac{d}{D} \right)^4 + (1 + \zeta_t)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 250}{\left( 0,5 + 0,015 \frac{1500}{0,6} + 2 \cdot 0,1 \right) \left( \frac{0,1}{0,6} \right)^4 + 1 + 0,04}},$$

kde  $\lambda = 0,11 \left( \frac{0,2}{600} \right)^{1/4} = 0,015$ , pak  $v_2 = 67,7$  m/s a hlnost  $\dot{Q} = \frac{\pi d^2}{4} v_2 = \frac{\pi}{4} 0,1^2 \cdot 67,7 = 0,53$  m<sup>3</sup>/s.

Rychlosť v potrubí  $v_1 = v_2 \left( \frac{d}{D} \right)^2 = 67,7 \left( \frac{0,1}{0,6} \right)^2 = 1,88$  m/s

a Reynoldsovo číslo  $Re = \frac{v_1 D}{\nu} = \frac{1,88 \cdot 0,6}{10^{-6}} = 1,13 \cdot 10^6$ .

Hydraulické ztráty v přivaděči

$$h_z = \left( \zeta_v + \lambda \frac{l}{D} + 2\zeta_o \right) \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_t \frac{v_2^2}{2g} = \left( 0,5 + 0,015 \frac{1500}{0,6} + 2 \cdot 0,1 \right) \frac{1,88^2}{2 \cdot 9,81} + 0,04 \frac{67,7^2}{2 \cdot 9,81} = 6,88 + 9,34 = 16,22 \text{ m.}$$

Účinnost přivaděče  $\eta_p = \frac{H - h_z}{H} = \frac{250 - 16,22}{250} \cdot 100\% = 93,5\%$ .

Výkon vodního proudu  $P = \rho \dot{Q} \frac{v_2^2}{2} = 10^3 \cdot 0,53 \cdot \frac{67,7^2}{2} = 1,21 \text{ MW.}$

Diskuse:

Turbina nevyužije celý výkon vodního proudu a i elektrický generátor má účinnost menší než jedna. Výsledná účinnost je pak dána součinem všech tří účinností.

## Příklad P 8.2

Pro větrání důlní chodby dlouhé  $l$  se přivádí hladkým potrubím o průměru  $d$  čerstvý vzduch v množství  $\dot{Q}_o$ . Stanovte v jakém poměru budou tlakové ztráty v přívodním potrubí, jestliže:

a) všechn čerstvý vzduch přivádíme až na konec chodby, obr. P 8.2a.

b) vzduch rozdělujeme rovnoměrně po celé délce potrubí, obr. P 8.2b:  $\dot{Q}_x = \dot{Q}_o (1 - x/l)$ .

Nakreslete průběh statického tlaku podél potrubí pro oba případy.

Dáno:

$d = 0,2$  m,  $l = 1$  km,  $\dot{Q}_o = 1$  m<sup>3</sup>/s, hladké potrubí,  $\rho = 1,25$  kg/m<sup>3</sup>,  $\nu = 15 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s.

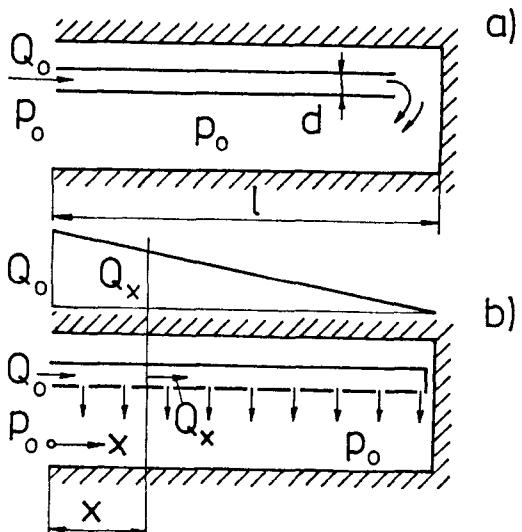
Určit:  $p_z$  (Pa), nakreslit  $p = f(x)$  (pro a) i b)).

### Rozbor (schéma):

Nejdříve stanovíme rychlosť vzduchu v potrubí  $v_0$  a je-li Machovo číslo  $Ma = v_0/a < 0,3$  zanedbáme stlačitelnost ( $a \approx 340$  m/s je rychlosť zvuku). V případě a) je rychlosť konstantní po celé délce potrubí a ztráty určíme běžným způsobem. V případě b), kdy rychlosť v potrubí se ve směru proudění zmenšuje, určíme ztráty jen pro elementární část potrubí o délce  $dx$  a tuto rovnici pak integrujeme přes celou délku potrubí. Průběh statického tlaku stanovíme pomocí Bernoulliovy rovnice.

### Předpoklady:

- 1) Vzduch lze považovat za nestlačitelnou tekutinu.
- 2) Součinitel třecích ztrát  $\lambda = 0,0054 + 0,396 Re^{-0,3} = \text{konst.}$
- 3) Chodba má velký průřez, tlak v chodbě je přibližně konstantní.
- 4) Zanedbáme ztráty odbočením proudu vzduchu.



Obr. P 8.2a, P 8.2b)

### Řešení:

#### a) Střední rychlosť v potrubí

$$v_0 = \frac{4\dot{Q}_0}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 1}{\pi \cdot 0,2^2} = 31,8 \text{ m/s.}$$

Kontrola předpokladu nestlačitelnosti vzduchu

$$Ma = \frac{v_0}{a} = \frac{31,8}{340} = 0,09 < 0,3 ; \text{ podmínka je splněna.}$$

$$\text{Reynoldsovo číslo } Re = \frac{v_0 d}{\nu} = \frac{31,8 \cdot 0,2}{15 \cdot 10^{-6}} = 4,24 \cdot 10^5.$$

$$\text{Součinitel třecích ztrát } \lambda = 0,054 + 0,396(4,24 \cdot 10^5)^{-0,3} = 0,0135.$$

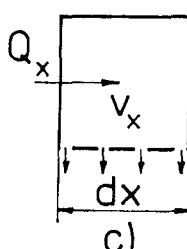
Tlaková ztráta v přívodním potrubí

$$p_{za} = \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{v_0^2}{2} = 0,0135 \frac{1000}{0,2} 1,25 \frac{31,8^2}{2} = 42,7 \text{ kPa,}$$

$$\text{tomu odpovídá } h_{za} = \frac{p_{za}}{g\rho} = \frac{42700}{9,81 \cdot 1000} = 4,35 \text{ m vodního sloupce.}$$

b) Při rovnoramenném rozdělování vzduchu je průtok  $\dot{Q}_x$  a rychlosť  $v_x$  funkcií  $x$ . Místní tlaková ztráta způsobená třením se stanoví pro elementární úsek potrubí o délce  $dx$  obr. P 8.1c.

$$dp_{zb} = \lambda \frac{1}{d} \rho \frac{v_x^2}{2} dx = \lambda \frac{1}{d} \rho \frac{\dot{Q}_0^2}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{16}{\pi^2 d^4} dx,$$



na úseku o délce potrubí  $x$  bude tlaková ztráta rovna

$$\int_0^{p_{zbx}} dp_{zb} = 8\lambda \frac{\rho \dot{Q}_0^2}{\pi^2 d^5} \int_0^x \left(1 - 2 \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right) dx,$$

Obr. P 8.2c

$$p_{zbx} = 8\lambda \frac{\rho \dot{Q}_0^2}{\pi^2 d^5} \left( x - \frac{x^2}{l} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^2} \right) = \frac{\lambda \rho}{d} \frac{\dot{Q}_0^2}{2} v_0^2 \left( x - \frac{x^2}{l} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^2} \right).$$

Tlaková ztráta pro celou délku potrubí  $x = l$

$$p_z = 8\lambda \frac{\rho \dot{Q}_0^2}{\pi^2 d^5} \frac{l}{3} = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} v_0^2 \frac{1}{3} = \frac{p_{za}}{3} = 14,2 \text{ kPa}$$

je rovna jedné třetině tlakové ztráty  $p_{za}$ .

Průběh statického tlaku podél potrubí:

B.r. 0-x:  $p_a + \rho \frac{v_0^2}{2} = p_x + \rho \frac{v_x^2}{2} + p_{zx}$

a) V tomto případě  $v_x = v_0 = \text{konst.}$ :  $p_x = p_a - p_{za} = p_a - \lambda \frac{\rho \dot{Q}_0^2}{\pi^2 d^5} x = p_a - \lambda \frac{x}{d} \rho \frac{v_0^2}{2}$ ,

kde  $p_a = p_{za} = 42\ 700 \text{ Pa}$  je přetlak v průřezu  $x = 0$  a tlak ve směru proudění klesá podle přímky.

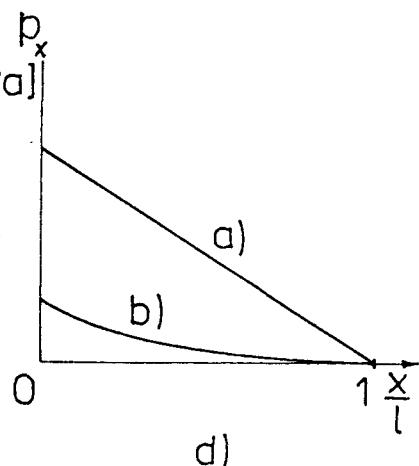
b) V tomto případě ve směru proudění rychlosť klesá podle přímky  $v_x = v_0 \left( 1 - \frac{x}{l} \right)$ .

$$\begin{aligned} p_x &= p_b + \frac{\rho}{2} v_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{v_x}{v_0} \right)^2 \right] - p_{zbx} = \\ &= p_b + \frac{\rho}{2} v_0^2 \left[ 1 - \left( 1 - 2 \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right) - \frac{\lambda}{d} \left( x - \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{3l^3} \right) \right] \end{aligned}$$

$$p_x = p_b + \frac{\rho}{2} v_0^2 \left[ 2 \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} - \frac{\lambda l}{d} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{3l^3} \right) \right]$$

kde  $p_b = p_{zb} - \frac{\rho}{2} v_0^2 = 13,6 \text{ kPa}$  je přetlak

v průřezu  $x = 0$ , statický tlak klesá ve směru proudění nelineárně, viz obr. P 8.2d.



Diskuse:

Obr. P 8.2d

Z číselných výsledků je vidět, že tlaková ztráta v případě a) je asi 3x větší, než v případě b).

### Víte, že

- římské vodovody patřily k technickým divům starověku? Za císaře Konstantina zásobovalo Řím 19 vodovodů. Třetí v pořadí „aqua Marcia“ přiváděl vodu ze vzdálenosti 91 km. Vodovod císaře Claudia z poloviny 1. století byl 69 km dlouhý a z toho 13 km dlouhý úsek vedl po mohutných obloucích. Voda se odebírala v kašnách, nebo ji za mírný poplatek donesli nosiči. Ty soukromé byty, které byly napojeny přímo na vodovod, měly úředně určeny velikosti bronzových trysk, aby mohla být určena spotřeba vody. Někteří si zvětšovali přítok tím, že k trysce přidali nátrubek ve tvaru difuzoru (viz lit. Fox, Mc Donald str. 354), takže výtokový průřez byl větší než průřez kalibrované trysky. V roce 97 byla proto vydána směrnice, že trubice připojená k trysce musí mít nejméně 15 délkových metrů od veřejného vodovodu konstantní průřez, stejný jako tryska.
- první vodovod pro zásobování pražských domácností byl zřízen roku 1337, ale opevněná města jako Pražský hrad a Vyšehrad měla vodovody starší, asi z 11. století. V roce 1430 byla vybudována Staroměstská vodárna, dříve než ve velkých západoevropských městech.
- v současné době je délka pražské vodovodní sítě asi 3000 km, z toho je 1/6 za hranicí životnosti. Některé úseky jsou v provozu osmdesát a dokonce i více než sto let. Proto se ztráty ve vodovodní síti odhadují na 40%.

## 9. NESTACIONÁRNÍ PROUDĚNÍ

Při nestacionárním proudění se veličiny charakterizující proudění tekutiny, jako např. tlak nebo rychlosť, mohou obecně měnit nejenom s drahou, ale i s časem. Jsou tedy funkci dvou nezávisle proměnných a proto počítáme s parciálními derivacemi.

Tyto poměrně složité úlohy lze v některých případech zjednodušit, např. jsou-li změny s časem velmi pomalé není třeba uvažovat vliv setrvačných sil a řešíme je jako kvazistacionární proudění, viz příklad 7.1 a odstavec 9.2. V případě, kdy se průřez proudu s drahou nemění, lze místo parciálních diferenciálních rovnic pracovat s obyčejnými diferenciálními rovnicemi.

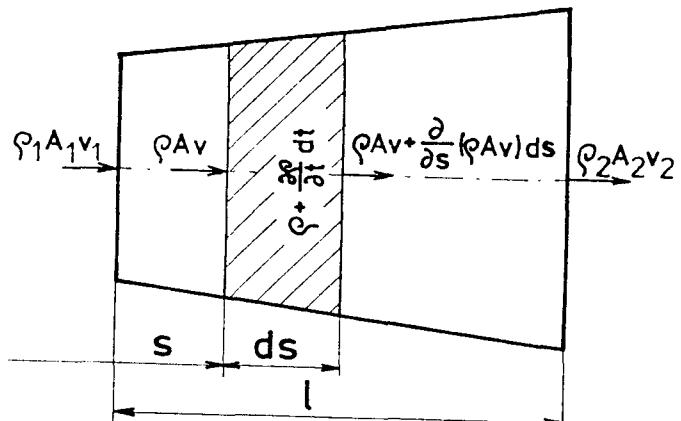
Při velmi rychlých změnách rychlosti však může nastat tak velké stoupnutí tlaku, že je nutno uvažovat i stlačitelnost kapalin a pružnost potrubí, viz odst. 9.5.

### 9.1 Diferenciální tvary základních rovnic

Diferenciální rovnice popisuje proudění elementární částice tekutiny. Pokud se nám podaří je řešit, dostaneme mnohem více informací než z integrálních tvarů.

- a) Rovnice kontinuity pro jednorozměrné nestacionární proudění stlačitelné tekutiny ( $\rho \neq \text{konst.}$ ). V tomto případě rozdíl hmotnosti vtékající a vytékající za daný časový interval z kontrolní oblasti, obr. 60, může, ale nemusí být roven nule  $(\rho_1 v_1 A_1 - \rho_2 v_2 A_2)dt \geq 0$ .

Obr. 60 Kontrolní oblast pro odvození rovnice kontinuity pro nestacionární jednorozměrné proudění stlačitelné tekutiny.



Je-li tento rozdíl odlišný od nuly dochází uvnitř kontrolní oblasti k akumulaci nebo úbytku hmotnosti s časem a tedy  $\partial\rho / \partial t \neq 0$ .

Uvažujme nejprve průtok elementární části kontrolní oblasti o délce  $ds$ . Za časový úsek  $dt$  vteče vstupním průřezem hmotnost  $\rho Av dt$ . Ve výstupním průřezu, vzdáleném od vstupního o elementární dráhu  $ds$ , lze tok hmotnosti vyjádřit jako součet hmotnostního toku ve vstupním průřezu a elementární změny tohoto toku na dráze  $ds$ .

Výstupním průřezem tedy za čas  $dt$  vteče

$$\left[ \rho Av + \frac{\partial}{\partial s} (\rho Av) ds \right] dt .$$

U stlačitelných tekutin musíme ještě vyjádřit změnu hmotnosti tekutiny obsažené ve zvolené kontrolní oblasti s časem. Obsahuje-li element v čase  $t$  tekutinu, jejíž hmotnost je  $\rho Ads$ , pak v čase  $t+dt$  bude hmotnost tekutiny uvnitř elementu rovna

$$\left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) Ads .$$

Napišme nyní bilanční rovnici pro hmotnost tekutiny v uvažovaném elementu:

$$\text{odtok} - \text{přítok} + \text{akumulace} = 0, \text{ resp.}$$

$$\left[ \rho A v + \frac{\partial}{\partial s} (\rho A v) ds \right] dt - \rho A v dt + \left[ \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) A ds - \rho A ds \right] = 0$$

po úpravě

$$\frac{\partial}{\partial s} (\rho A v) ds + \frac{\partial \rho}{\partial t} A ds = 0. \quad (62)$$

Chceme-li získat rovnici pro celou kontrolní oblast budeme rov. (62) integrovat mezi vstupním a výstupním průřezem po dráze  $l$ :

$$\int_0^l \frac{\partial}{\partial s} (\rho A v) ds + \int_0^l \frac{\partial \rho}{\partial t} A ds = 0 \\ \rho_2 A_2 v_2 - \rho_1 A_1 v_1 + \int_0^l \frac{\partial \rho}{\partial t} A ds = 0. \quad (63)$$

Při stacionárním průtoku stlačitelné tekutiny bude  $\partial \rho / \partial t = 0$  a rovnice se zjednoduší na

$$\rho_2 A_2 v_2 = \rho_1 A_1 v_1.$$

Při stacionárním i nestacionárním proudění nestlačitelné tekutiny je  $\rho_1 = \rho_2 = \rho = \text{konst.}$  a tedy

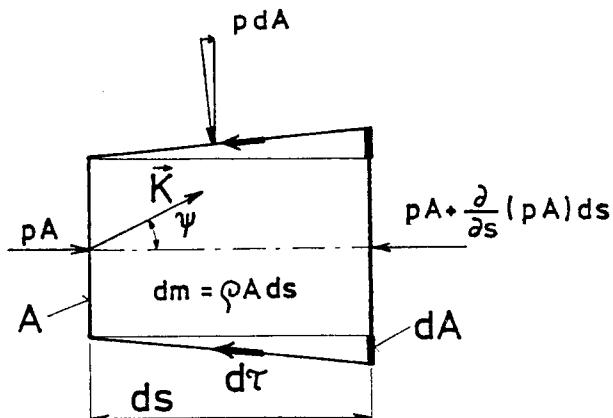
$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \dot{V},$$

přičemž  $v_1$ ,  $v_2$  a  $\dot{V}$  jsou při nestacionárním proudění funkci času.

b) **Pohybová rovnice.** Z druhého Newtonova pohybového zákona lze dostat rovnici pro jednorozměrné nestacionární proudění reálné, tj. stlačitelné a vazké tekutiny proudovým vláknem:

$$\sum d\vec{F} = dm \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

V určitém časovém okamžiku působí na elementární částici tekutiny, obr. 61, síly objemové (hmotnostní) a povrchové - tlakové a třecí. Uvažujme, že na částici tekutiny, pohybující se v neinerciálním souřadném systému, působí hmotová síla charakterizovaná vektorem intenzity hmotových sil  $\vec{K}$ , viz kap. 3 a. Její složka působící ve směru  $s$  je rovna  $\vec{K} \cos \psi dm$ .



Obr. 61 Elementární částice tekutiny vytknutá pro odvození pohybové rovnice pro jednorozměrné nestacionární proudění tekutiny.

Výsledná tlaková síla působící ve směru pohybu na částici je rovna součtu sil působících na čela částice a složky tlakové síly působící na plášť částice, jež je dána (při zanedbání nekonečně malých veličin vyššího rádu) součinem tlaku  $p$  a velikosti průmětu pláště do roviny kolmé ke směru  $s$ , viz kap. 4, což je právě rovno přírůstku průřezu

$$dA = \frac{\partial A}{\partial s} ds$$

$$pA - \left[ pA + \frac{\partial}{\partial s} (pA)ds \right] + p \frac{\partial A}{\partial s} ds = - \frac{\partial p}{\partial s} dsA .$$

Třetí síly působící na plášť částice lze přibližně vyjádřit jako součin tečného napětí  $\tau$  a plochy pláště (působí proti pohybu, proto minus)

$$- \tau o ds ,$$

kde  $o$  je obvod průřezu částice.

Při nestacionárním proudění je zrychlení částice závislé na dráze i na čase

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} ,$$

neboť  $ds = vdt$ . První člen  $\partial v / \partial t$  je lokální zrychlení, druhý  $v \partial v / \partial s$  konvektivní zrychlení. Dosadíme-li všechny tyto výrazy do Newtonova zákona dostaneme

$$K \cos \psi dm - \frac{\partial p}{\partial s} dsA - \tau o ds = \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \right) dm .$$

Dosadíme-li hmotnost částice  $dm = \rho A ds$  a podělíme rovnici členem  $(-\rho A)$  dostaneme

$$-K \cos \psi ds + \frac{\partial p}{\partial s} ds \frac{1}{\rho} + \frac{\tau o}{\rho A} ds + \frac{\partial v}{\partial t} ds + v \frac{\partial v}{\partial s} ds = 0 ,$$

označme  $dp = (\partial p / \partial s)ds$ ,  $dv = (\partial v / \partial s)ds$  a skalární součin vektorů  $\vec{K}$  a  $d\vec{s}$  napišme pomocí složek:

$$- \left( K_x dx + K_y dy + K_z dz \right) + \frac{dp}{\rho} + d\left( \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} ds + de_z = 0 , \quad (64)$$

kde  $d(v^2/2) = vdv$  a  $de_z = (\tau/\rho)(o/A)ds$  je možno považovat za energii disipovanou vlivem viskozity tekutiny, kterou jsme v kap. 8 vyjádřili jako  $\zeta v^2/2$ . Všimněme si, že  $o/A = 1/r_h$  tj. hydraulický poloměr.

Při proudění nestlačitelné vazké tekutiny za působení jenom zemské tíže ( $\rho = \text{konst.}$ ,  $K_x = K_z = 0$ ,  $K_y = -g$ ) můžeme rov. (64) integrovat mezi dvěma průřezy a dostaneme (pro proudové vlákno)

$$\begin{aligned} g \int_{y_1}^{y_2} dy + \frac{1}{\rho} \int_{p_1}^{p_2} dp + \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \int_0^l \frac{\partial v}{\partial t} ds + \int_0^l de_z &= 0 \\ g(y_2 - y_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \int_0^l \frac{\partial v}{\partial t} ds + e_z &= 0 . \end{aligned} \quad (65)$$

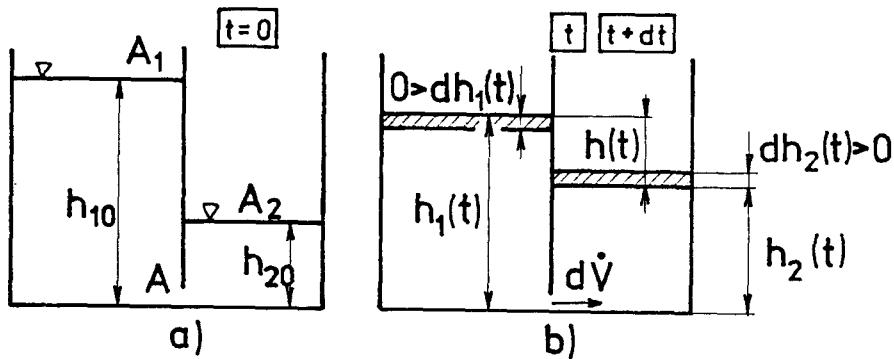
Pro reálnou trubici konečného průřezu by se u kinetické energie objevil korekční součinitel  $\kappa$ . Lokální zrychlení  $\partial v / \partial t$  bývá označováno  $a_t$ .

Pro stacionární proudění nevazké tekutiny dostaneme Bernoulliovu rovnici

$$gy_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = gy_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} . \quad (39a)$$

## 9.2 Kvazistacionární proudění

V některých případech nestacionárního proudění, jako např. při výtoku z nádob viz př. P 7.1 a při vyrovnávání hladin malými otvory je člen obsahující zrychlení resp. zpoždění  $\partial v / \partial t$  v určitých stádiích proudění zanedbatelně malý proti ostatním členům rozšířené Bernoulliově rovnici (65). Případ pak řešíme, jako by proudění bylo sice s časem proměnné, ale v každém okamžiku ustálené - stacionární, což samozřejmě neplatí v počátečním stádiu, kdy se rychlosť mění z nulové hodnoty na hodnotu odpovídající stacionární rychlosti. Chceme-li však sledovat např. okamžité polohy hladin, dostáváme zcela vyhovující výsledky. Jako příklad si uvedeme vyrovnání hladin ve spojitéch nádobách malým otvorem, obr. 62.



Obr. 62 Vyrovnání hladin ve spojitéch nádobách (kvazistacionární).

a) počáteční stav,

b) poloha hladin v čase  $t$  a  $t+dt$  (pro sestavení diferenciální rovnice popisující děj).

Známe-li průřezy nádob a otvoru  $A_1, A_2 \gg A$ , počáteční polohu hladin  $h_{10}, h_{20}$  (v čase  $t = 0$ ), obr. 62a, resp. počáteční rozdíl hladin  $h_0 = h_{10} - h_{20}$  a výtokový součinitel  $\mu$ , můžeme stanovit polohy hladin v libovolném okamžiku a dobu za kterou se hladiny vyrovnají. Abychom mohli sestavit diferenciální rovnici popisující děj, musíme uvažovat polohy hladin v obecném okamžiku  $t$ , kdy jsou hladiny v polohách  $h_1(t), h_2(t)$ , resp. rozdíl hladin  $h(t) = h_1(t) - h_2(t)$ , obr. 62b. Pro řešení použijeme nyní jinou metodu, než tu kterou jsme postupovali v příkladu P 7.1. Napišeme si nyní bilanční rovnici pro objemové toky, viz komentovaný příklad P 7.2. Za časový interval  $dt$  klesne hladina v levé nádrži o  $dh_1(t)$  a v pravé stoupne o  $dh_2(t)$ , obr. 62b. Pro nestlačitelné kapaliny musí platit rovnost objemů

$$dV = -A_1 dh_1(t) = A_2 dh_2(t). \quad (66)$$

Znaménko minus na levé straně musíme zavést proto, že  $dh_1(t) < 0$ , hladina s časem klesá, zatímco  $dh_2(t) > 0$ .

Z obr. 62 vidíme, že platí  $h(t) = h_1(t) - h_2(t)$ .

Diferencováním této rovnice dostaneme  $dh(t) = dh_1(t) - dh_2(t)$ . (67)

Objem  $dV$  musí z levé do pravé nádrže protéci otvorem za čas  $dt$

$$dV = dV/dt = \mu A \sqrt{2gh(t)} dt. \quad (68)$$

U zatopeného otvoru je rychlosť závislá na rozdílu hladin  $h(t)$ . Z rovnic (68) a (66) lze stanovit

$$dh_1(t) = -\frac{\mu A}{A_1} \sqrt{2gh(t)} dt; \quad dh_2(t) = \frac{\mu A}{A_2} \sqrt{2gh(t)} dt.$$

a po jejich dosazení do rovnice (67) dostaneme

$$-\int_{h_0}^{h(t)} \frac{dh(t)}{\sqrt{h(t)}} = \mu A \sqrt{2g} \frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2} \int_0^t dt,$$

kterou integrujeme od počátečního stavu  $t = 0$ , kdy rozdíl hladin byl  $h_0$  do obecného okamžiku  $t$ , kdy rozdíl hladin je roven  $h(t)$ :

$$2(\sqrt{h_0} - \sqrt{h(t)}) = \mu A \sqrt{2g} \frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2} t. \quad (69)$$

Dobu úplného vyrovnání hladin vypočteme, položíme-li  $h(t) = 0$ :

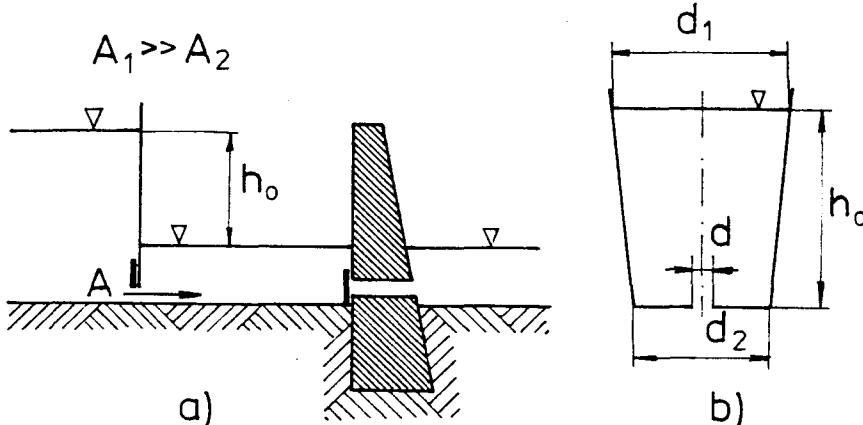
$$t_v = \frac{2}{\mu A \sqrt{2g}} \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \sqrt{h_0}. \quad (70)$$

Z této rovnice lze jako zvláštní případ vypočítat dobu vyprázdnění nádoby konstantního průřezu, příklad 7.1, položíme-li  $h_0 = h$  a  $A_2 \gg A_1$ . V tomto případě

$$\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{A_1}{\frac{A_1}{A_2} + 1} \doteq A_1 \quad \text{a} \quad t_v = \frac{2A_1}{\mu A \sqrt{2g}} \sqrt{h_0} .$$

Rozšířením pravé strany  $\sqrt{h_0}$  dostaneme  $t_v = \frac{2A_1 h_0}{\mu A \sqrt{2gh_0}}$ .

Kdybychom měli stanovit dobu za kterou se naplní plavební komora, pak budeme předpokládat, že  $A_1 \gg A_2 \gg A$ , obr. 63a. Kdyby průřez nádoby  $A_1$  nebyl konstantní, jako např. u licí kokily naplněné tekutou ocelí, obr. 63b, museli bychom vyjádřit závislost  $A_1(h)$  a integrace je pak složitější viz příklad P 7.2.



Obr. 63a) Náčrt plavební komory

Obr. 63b) Licí pánev - komolý kužel

### 9.3 Vynucené nestacionární proudění

U pístových čerpadel lze dráhu, rychlosť a zrychlení pístu stanovit jako funkci času z kinematiky hnacího mechanismu. Pokud kapalina sleduje pohyb pístu můžeme tyto veličiny dosadit do pohybové rovnice a řešení případu se tak zjednoduší.

Na příklad u pístového čerpadla poháněného klikovým mechanismem, obr. 64, lze za předpokladu nekonečně dlouhé ojnici vyjádřit dráhu  $x_p$ , rychlosť  $v_p$  a zrychlení  $a_p$  rovnicemi harmonického pohybu

$$x_p = R - R \cos \omega t = R(1 - \cos \omega t) ,$$

$$v_p = \partial x_p / \partial t = \omega R \sin \omega t ,$$

$$a_p = \partial v_p / \partial t = \omega^2 R \cos \omega t .$$

Chceme-li pak vypočítat tlak na stěně pístu  $p_p$  napišeme pohybovou rovnici mezi hladinou a stěnou pístu

$$0 + \frac{p_b}{\rho} + 0 = gh + \frac{p_p}{\rho} + \frac{v_p^2}{2} (1 + \zeta'_c) + \int_0^{h+l} a_s ds + \int_0^{x_p} a_p ds .$$

Derivací rovnice kontinuity podle času

$$\frac{\partial}{\partial t} (v_s A_s) = \frac{\partial}{\partial t} (v_p A_p)$$

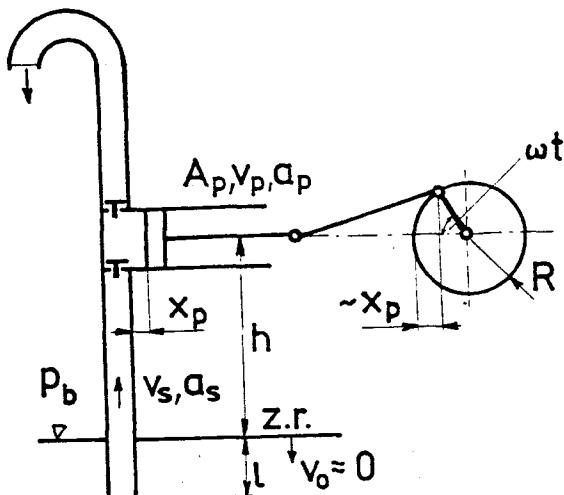
zjistíme, že platí i pro zrychlení

$$a_s A_s = a_p A_p ,$$

pak

$$p_p = p_b - gph - \frac{\rho}{2} v_p^2 (1 + \zeta'_c) - a_p \left[ (h + l) \frac{A_p}{A_s} + x_p \right] \rho .$$

Výraz v závorce se označuje jako redukovaná délka potrubí  $l_{red}$ .



Obr. 64 Pístové čerpadlo

Klesne-li hodnota tlaku v kapalině pod hodnotu tlaku nasycených par  $p'$  vznikají v tomto místě bublinky páry (kapalina vře za studena), které jsou rozpínavé. Při menším množství parních bublinek dochází nejprve ke zhoršení účinnosti čerpadla, při větším množství by mohlo dojít k přerušení funkce, neboť kapalná fáze přestane sledovat pohyb pístu. Tím je omezena sací výška čerpadla, jíž pak lze stanovit z rovnice

$$h = \frac{p_b}{\rho g} - \left( \frac{p'}{\rho g} + \frac{v_p^2}{2g} + \frac{a_p}{g} l_{red} + \zeta'_{celk} \frac{v_p^2}{2g} \right).$$

Vidíme, že závisí na barometrickém tlaku  $p_b$ , který s nadmořskou výškou klesá, na tlaku nasycených par  $p'$ , který roste s teplotou kapaliny, na kinetické energii udělené kapalině, na zrychlení kapaliny a velikosti ztrát.

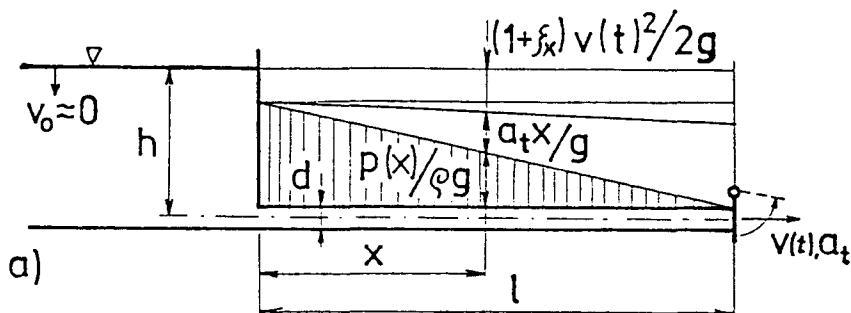
Jev, při němž dochází ke vzniku bublinek páry, který jsme zjednodušeně popsali, se nazývá kavitace a projevuje se ještě navíc erozí materiálu v místech, kde dochází ke kondenzaci parních bublinek, což je zvlášť nebezpečné u lopatek vodních strojů - čerpadel a turbin. Kavitace může vzniknout i při stacionárním proudění.

#### 9.4 Samovolné nestacionární proudění

V případech, kdy kapalina je uvedena do pohybu silou tříce jsou zrychlení, rychlosť a dráha neznámé, což vede na diferenciální rovnice. Ukažme si řešení úloh na zjednodušených modelech:

a) Výtok z nádoby při náhlém otevření potrubí. Nechtějme k rozsáhlé nádrži připojeno vodorovné potrubí konstantního průřezu, obr. 65, o délce  $l$  a výška hladiny je  $h$ . Kdybychom vyšetřovali již ustálené proudění, pak výška hladiny  $h = \text{konst.}$  a tedy i rychlosť

$$v_{st} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_c}} \quad \text{viz odst. 8.2 b} \quad (71)$$



Obr. 65 Nestacionární výtok při náhlém otevření potrubí  
a) Rozložení energetických výšek podél potrubí v určitém okamžiku  $t$ ,  
b) změna relativní rychlosti s časem.

Ke stejnemu výsledku bychom dospěli, kdybychom při náhlém otevření potrubí zanedbali vliv setrvačných sil a řešili případ jako kvazistacionární. Pro  $t \leq 0$  by rychlosť byla rovna nule. Pro  $t > 0$  by rychlosť skokem vzrostla na konstantnou hodnotu  $v_{st}$ . To ovšem odporuje skutečnosti, neboť rychlosť bude růst z nulové hodnoty na  $v_{st}$  plynule - spojite, obr. 65b. Závislost okamžité hodnoty rychlosťi na čase dostaneme z pohybové rovnice napsané pro hladinu a výtokový otvor

$$gh = \frac{v^2(t)}{2} (1 + \zeta_c) + \frac{\partial v(t)}{\partial t} l . \quad (72)$$

Z rovnice (71) lze vypočítat a dosadit do rov. (72)

$$gh = (1 + \zeta_c) \frac{v_{st}^2}{2} ,$$

pak po úpravě a po nahrazení symbolu parciální derivace obyčejnou derivací, neboť rychlosť se mění pouze s jednou nezávisle proměnnou  $t$ :

$$\int_0^t dt = \frac{2l}{1 + \zeta_c} \int_0^{v(t)} \frac{dv(t)}{v_{st}^2 - v^2(t)}$$

protože

$$\frac{1}{v_{st}^2 - v^2(t)} = \frac{1}{2v_{st}} \left( \frac{1}{v_{st} + v(t)} + \frac{1}{v_{st} - v(t)} \right)$$

$$t = \frac{l}{(1 + \zeta_c)v_{st}} \ln \frac{v_{st} + v(t)}{v_{st} - v(t)}, \quad \text{resp.} \quad t = \frac{l}{(1 + \zeta_c)v_{st}} \ln \frac{1 + \frac{v(t)}{v_{st}}}{1 - \frac{v(t)}{v_{st}}} \quad (73)$$

což lze upravit na tvar

$$\frac{v(t)}{v_{st}} = \operatorname{tg} h \left( \frac{1 + \zeta_c}{2} Sh \right)$$

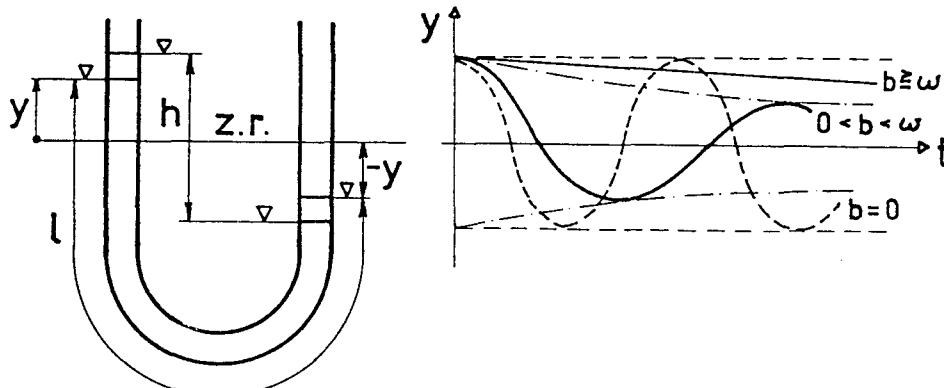
kde  $Sh = v_{st}t/l$  je tzv. Strouhalovo číslo, nazvané podle českého fyzika, který se v minulém století zabýval třecími tóny („zpívání telefonních drátů“) a ve své práci publikované v roce 1878 poprvé tento bezrozměrný komplex použil. Z průběhu rychlosťi resp. z rov. (73) plyne, že k ustálení proudění tj.  $v(t) = v_{st}$  dojde teoreticky za nekonečně dlouhou dobu.

Chceme-li vyšetřit průběh tlaku podél potrubí napišeme si pohybovou rovnici mezi hladinou a průřezem potrubí ve vzdálenosti  $x$  od nádoby

$$gh = \frac{p(x)}{\rho} + (1 + \zeta_x) \frac{v^2(t)}{2} + a_x x .$$

Z této rovnice vidíme, že okamžitý průběh tlaku je lineární funkcí  $x$  (vlivem třecích ztrát a setrvačných sil), obr. 65. S průběhem času, tak jak roste rychlosť v potrubí, obr. 65b, se bude sklon této přímky zmenšovat.

b) Kmitání sloupce kapaliny v U-trubici. Kapilární U-trubice konstantního průřezu se svislými rameny je naplněna sloupcem vazké kapaliny o celkové délce  $l$ , obr. 66.



Obr. 66 Kmitání sloupce kapaliny v U-trubici. U reálné kapaliny může být pohyb tlumený aperiodický ( $b \geq \omega$ ) nebo periodický ( $\omega > b > 0$ ), u nevazké kapaliny ( $b = 0$ ) je pohyb harmonický.

V čase  $t = 0$  je kapalina v klidu a hladiny nejsou ve stejné výšce, počáteční rozdíl je  $h$ , způsobený počátečním rozdílem tlaků. Otevřením obou ramen budou nad hladinami stejné tlaky a kapalina se uvede do pohybu. Stanovme rovnici určující okamžitou polohu hladin za předpokladu, že proudění bude laminární a třecí ztráty lze počítat stejným způsobem jako při stacionárním proudění:

$$e_z = \frac{64v}{\nu(t)d} \frac{l}{d} \frac{v^2(t)}{2} = k v(t) .$$

Položme počátek souřadného systému do rovnovážné polohy a předpokládejme, že v obecném čase  $t$  se hladiny nacházejí v poloze  $\pm y$ . Napišme pohybovou rovnici mezi oběma hladinami

$$gy + \frac{v^2(t)}{2} = -gy + \frac{v^2(t)}{2} + k v(t) + a_t l . \quad (74)$$

Protože dráha, kterou hladiny proběhnou  $s = h/2 - y$   
bude rychlosť a zrychlení rovno

$$v(t) = \frac{\partial s}{\partial t} = -\dot{y}, \quad a = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\ddot{y} .$$

Po dosazení do předcházející rovnice a po úpravě dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou.

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega^2 y = 0$$

kde

$$b = k / 2l$$

$$a$$

$$\omega^2 = 2g / l .$$

Obecný integrál této rovnice je

$$y = c_1 e^{A_1 t} + c_2 e^{A_2 t} ,$$

kde  $\Lambda_1$  a  $\Lambda_2$  jsou kořeny charakteristické rovnice

$$\begin{aligned}\Lambda^2 + 2b\Lambda + \omega^2 &= 0 \\ \Lambda_{1,2} &= -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2} .\end{aligned}$$

Při proudění velmi viskózní kapaliny, kdy  $b > 0$  a současně  $b \geq \omega$  bude pohyb tlumený aperiodicky. Při proudění méně viskózní kapaliny, kdy  $b > 0$  a  $0 < b < \omega$  budou kořeny komplexně sdružená čísla, pohyb bude periodický tlumený a obecný integrál lze upravit na tvar

$$y = c_1 e^{-bt} \cos(\omega_1 t + \phi) \quad (75)$$

kde

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2} .$$

Pro model nevazké tekutiny je  $b = 0$  a

$$y = c_1 \cos(\omega t + \phi) , \quad (76)$$

což je rovnice harmonického pohybu ( $\omega > \omega_1$ ). Integrační konstanty  $C_1$  a  $\phi$  stanovíme z počátečních podmínek pro:  $t = 0$  je  $y = h/2$ , a  $\dot{y} = 0$ , pak  $\phi = 0$  a  $C_1 = h/2$ .

## 9.5 Zavírání potrubí

Při regulaci průtoku tekutiny potrubím např. ventilem nebo jiným škrtícím orgánem vzniká také nestacionární proudění. Před ventilem se při škrcení tj. zmenšování průtoku vytváří vyšší tlak než za ním. U dlouhých potrubí dopravujících kapalinu a rovněž při velmi rychlém havarijním uzavření kratších potrubí může vzniknout tak velké stoupení tlaku, že může dojít k poruše potrubí. U plynů toto nebezpečí nehrozí vzhledem k jejich malé hustotě.

a) Pomalé uzavírání potrubí. Uvažujme, že mezi dvěma nádržemi s rozlehlými hladinami, spojenými vodorovným potrubím konstantního průřezu, obr. 67a, se ustálil průtok. Potenciální energie kapaliny v levé nádrži, daná rozdílem hladin, se spotřebuje na překonání třecích a místních ztrát a na vytvoření kinetické energie kapaliny, která se však při vtoku do pravé nádrže zmaří v teplo - (ztráta na výstupu):

$$h = h_0 - h_2 = \left( \lambda \frac{l' + l''}{d} + \zeta_{vst} + \zeta_{vent} + \zeta_{vyst} \right) \frac{v_{st}^2}{2g} = h_{zcelk} .$$

Z této rovnice lze ze známých veličin  $h$ ,  $\lambda$ ,  $l'$ ,  $l''$ ,  $d$ ,  $\zeta_{vst}$ ,  $\zeta_{vent}$  a  $\zeta_{vyst}$  určit rychlosť v potrubí  $v_{st}$ .

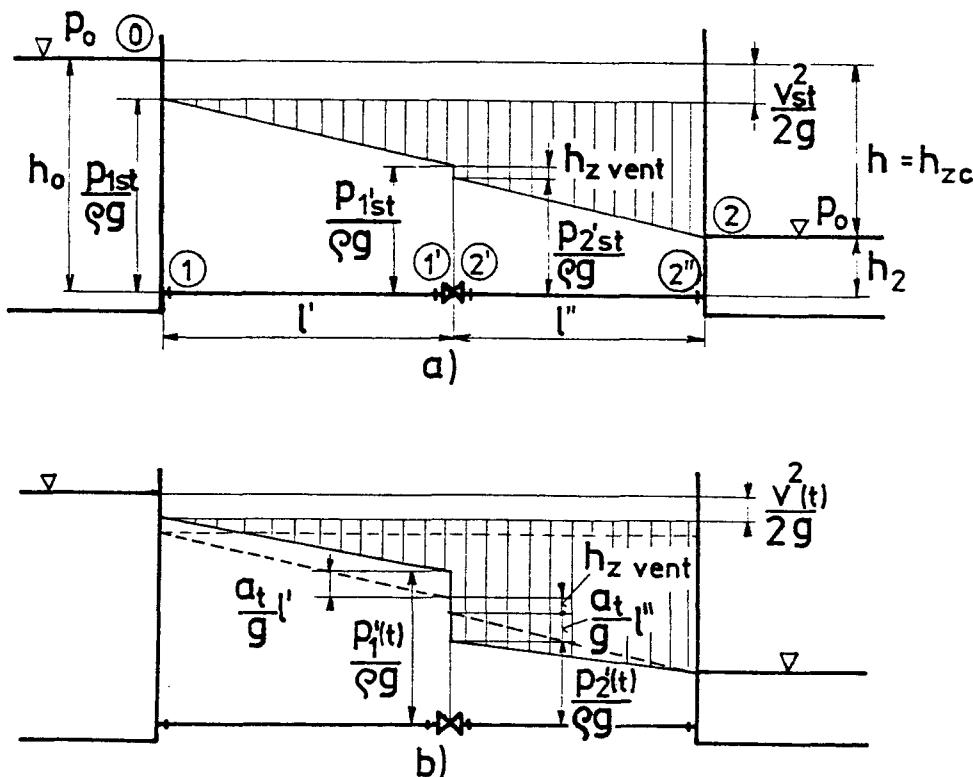
Napišeme-li pohybové rovnice mezi hladinou a některým průřezem potrubí lze vypočítat místní tlak např. mezi místy 0 - 1' ( $\kappa = 1$ ):

$$h_0 = \frac{p_{1' st}}{\rho g} + \frac{v_{st}^2}{2g} \left( 1 + \zeta_{vst} + \lambda \frac{l'}{d} \right)$$

nebo mezi místy 2' - 2 ( $v_2 = 0$ ):

$$\frac{p_{2' st}}{\rho g} + \frac{v_{st}^2}{2g} = h_2 + \frac{v_{st}^2}{2g} \left( \lambda \frac{l''}{d} + \zeta_{vyst} \right) .$$

Průřezy 1' a 2' jsou těsně před a za ventilem. V obou rovnicích počítáme s přetlaky.



Obr. 67 Rozložení tlaků podél potrubí, ( $\zeta_{vst} \ll 1$ )

a) při stacionárním proudění,

b) při pomalém uzavírání potrubí tj. nestacionárním proudění.

Cárkováné čáry odpovídají stacionárnímu proudění.

Chceme-li zmenšit průtok kapaliny potrubím můžeme přivřít náhle nepatrně regulační ventil. Jeho odpor i součinitel odporu  $\zeta_v$  tím vzrostou a rychlosť kapaliny tj. její kinetická energie resp. rychlostní výška se zmenší - porovnejte na obr. 67a a 67b  $v_{st}^2 / 2g$  a  $v^2(t) / 2g$ . Ponecháme-li přiškrcený ventil v nové poloze, vytvoří se nový ustálený stav proudění s jinými hodnotami  $\zeta_{vent}$ ,  $\lambda$ ,  $v_{st}$ ,  $p_{1,st}$ ,  $p_{2,st}$  než byly počáteční hodnoty. Tento nový ustálený stav nenastane okamžitě po regulačním zásahu, neboť setrvačné síly mají snahu zpomalit dosažení nového ustáleného stavu. V přechodové fázi mezi oběma ustálenými stavami proudění se rychlosť kapaliny, resp. průtok, zmenšuje plynule i když změna polohy ventila byla rychlá, téměř skokem. Aby se kapalina v potrubí zpomalila, musí na ni působit síla proti jejímu pohybu. Sledujeme nyní tu část potrubí, jež se nachází před ventilem. Při přiškrcení průtoku se před ventilem vytvoří větší tlak  $p_{1'}(t)$  než odpovídá stacionárnímu průtoku  $p_{1,st}$ , viz obr. 67. Toto stoupení tlaku záleží v prvním okamžiku na setrvačné síle sloupce kapaliny v potrubí:  $m \cdot a_t$ , kde  $m = \rho l' \pi d^2 / 4$  je hmotnost kapaliny v potrubí a  $a_t = \partial v / \partial t < 0$  je retardace kapaliny. Poněkud jiná je situace v potrubí za ventilem, neboť na konci potrubí, jež ústí do nádrže, bude tlak prakticky konstantní, roven hydrostatickému tlaku  $\rho g h_2$ . Aby vznikla síla působící proti pohybu kapaliny musí těsně za ventilem tlak klesnout a tento pokles záleží v prvním okamžiku opět na velikosti setrvačné síly, tj.  $m \cdot a_t = \rho l'' \pi d^2 / 4 \cdot \partial v / \partial t$ . V přechodové fázi se vytvoří u ventilu rozdíl tlaků  $p_{1'}(t) - p_{2'}(t)$ , který je větší než odpovídá stacionárnímu průtoku, kdy je tento rozdíl tlaků pouze funkcí hydraulického odporu. Tento rozdíl tlaků se postupně zmenšuje tak jako  $|\partial v / \partial t|$ , jež při ustáleném stavu je rovno nule. Kdybychom znali okamžité hodnoty rychlosti  $v(t)$  a zrychlení  $a_t = \partial v / \partial t < 0$  mohli bychom průběh tlaků vypočítat z pohybových rovnic napsaných

a) mezi hladinou a průřezem před ventilem 0 - 1':

$$h_0 = \frac{p_{1'}(t)}{\rho g} + \frac{v^2(t)}{2g} (1 + \zeta_{vst} + \lambda \frac{l'}{d}) + \frac{a_t}{g} l'$$

b) mezi průřezem za ventilem a hladinou v druhé nádrži 2' - 2:

$$\frac{p_{2'}(t)}{\rho g} + \frac{v^2(t)}{2g} = h_2 + \frac{v^2(t)}{2g} \left( \lambda \frac{l''}{d} + \zeta_{vyst} \right) + \frac{a_t}{g} l''$$

Při stacionárním proudění je tlakový spád, tj. rozdíl tlaků, na ventilu závislý jen na odporu ventilu:

$$p_{1'st} - p_{2'st} = \zeta_{vent} \rho \frac{v_{st}^2}{2} \quad (77)$$

při nestacionárném proudění však tlakový spád závisí i na vlivu setrvačných sil, který je v počáteční fázi největší a postupně se zmenšuje:

$$p_{1'}(t) - p_{2'}(t) = \zeta_{vent}^* \rho \frac{v^2(t)}{2} = |a_t| (l' + l'') \rho + \zeta_{vent} \rho \frac{v_{st}^2}{2} \quad (78)$$

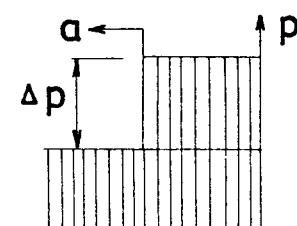
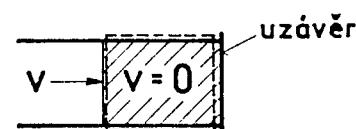
přičemž při uzavírání ventilu je zrychlení  $a_t < 0$  (tj. vlastně zpozdění).

b) Rychlé uzavírání ventilu. Vodní ráz. Při velmi rychlém zavírání ventilu by se časový interval  $\Delta t \approx 0$  a zpozdění  $|a_t| \approx |\Delta v / \Delta t| \rightarrow \infty$ . Podle rovnice (78) by v tomto případě stoupení tlaku bylo  $\Delta p \rightarrow \infty$ . Experimenty však bylo zjištěno, že stoupení tlaku je konečné, i když dosažené hodnoty tlaků jsou vysoké, takže musíme uvažovat i stlačitelnost kapalin a pružnost potrubí. Část kinetické energie kapaliny se nyní akumuluje, podobně jako u pružiny a ve vhodný časový interval se opět uvolní. Vznikne tedy v kapalině tlumený kmitavý děj, analogický kmitání pružiny, který nazýváme vodní ráz. Totální ráz je případ odpovídající okamžitému zastavení pohybu kapaliny v potrubí. Ve skutečnosti probíhá zmenšování rychlosti proudění v určitém konečném časovém intervalu. V kap. 2.3 jsme konstatovali, že malé tlakové poruchy se v pružném prostředí šíří rychlostí zvuku

$$a = \sqrt{\frac{dp}{dp}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Pro vodu (neobsahující vzduchové bublinky) je modul objemové stlačitelnosti  $K \doteq 2 \cdot 10^9$  Pa a  $a \doteq 1450$  m/s.

Stoupení tlaku v kapalině při náhlém uzavření potrubí můžeme stanovit pomocí věty o změně hybnosti. Tlaková síla jež zabrzdí kapalinu a jež je tedy závislá na stoupení tlaku u uzavíracího orgánu  $\Delta p$  musí být rovna změně hybnosti kapaliny, která se zabrzdí za jednotku času. Protože stoupení tlaku (tlaková porucha) se jako tlaková vlna pohybuje proti proudící kapalině rychlostí zvuku, obr. 68, bude hmotnost zabrzdená za jednotku času rovna  $\dot{m} = pAa$ .



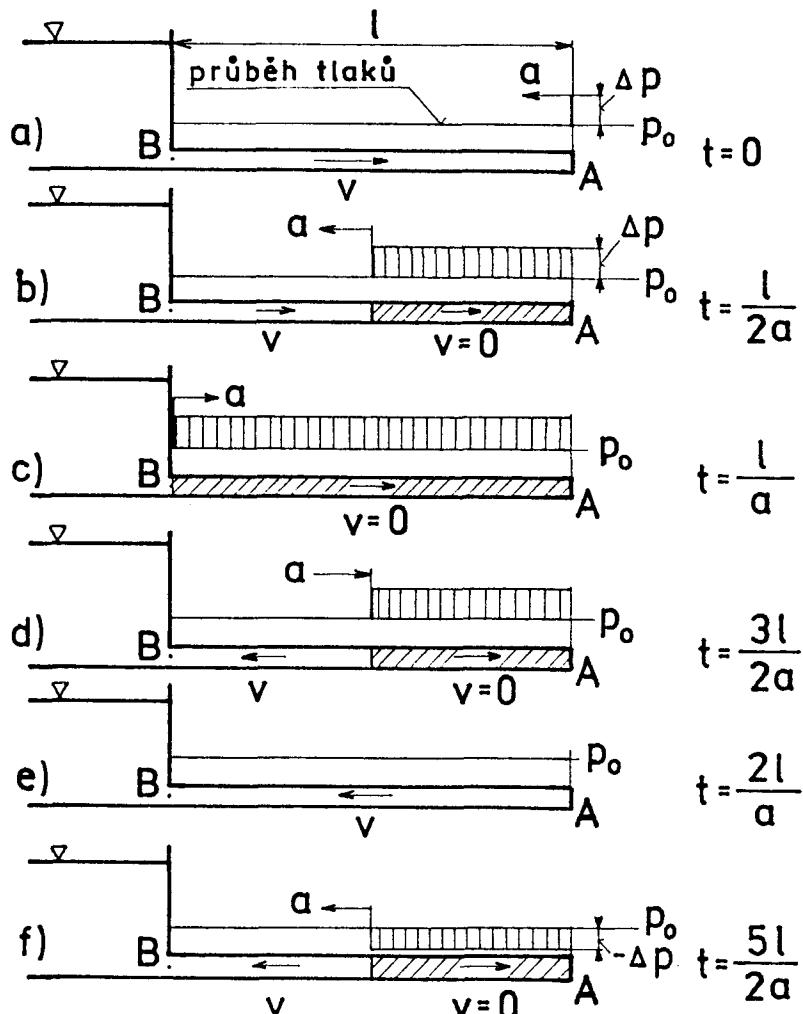
Obr. 68 Stoupení tlaku při náhlém uzavření potrubí. Tlaková vlna se šíří rychlosí  $a$  proti proudu tekutiny.

Původní rychlosť  $v$  se zmenšila na nulu. Z věty o změně hybnosti

$$-\Delta p A = m(0 - v) \quad (79)$$

lze stanovit stoupnutí tlaku  $\Delta p = \rho av$ . (80)

Za předpokladu, že kapalina s nulovou viskozitou vytéká z rozlehlé nádrže rychlosť  $v$ , bude se při náhlém uzavření potrubí v místě A v okamžiku  $t = 0$  jev vyvíjet takto, obr. 69:



Obr. 69 Jednotlivé fáze zidealizovaného hydraulického rázu.

a) Kapalina, která je v přímém styku s uzávěrem je brzděna a její tlak stoupne z  $p_0$  o  $\Delta p$  rov. (80). Tlaková vlna se bude rychlosťí  $a$  šířit proti proudu. Ostatní kapalina v potrubí se však stále pohybuje rychlosťí  $v$  k uzávěru A.

b) V čase  $t = l/2a$  je tlaková vlna právě v polovině délky potrubí, část kapaliny mezi tlakovou vlnou a uzávěrem je v klidu  $v = 0$ , část kapaliny mezi nádrží, bod B, a tlakovou vlnou se ještě pohybuje rychlosťí  $v$ .

c) Dosáhne-li tlaková vlna vstupu do potrubí, bod B, v okamžiku  $t = l/a$ , je kapalina v celém potrubí v klidu a má větší tlak než je tlak v nádrži. Protože množství kapaliny v nádrži je mnohem větší než množství kapaliny v potrubí, nemůže se změnit tlak kapaliny v nádrži účinkem tlakové vlny. Vstupní průřez do potrubí je hranicí na níž se stýkají dvě prostředí s rozdílnými tlaky. Vlivem tohoto rozdílu tlaků začne kapalina stlačená v potrubí proudit opět do nádrže, tj. opačným směrem, než před uzavřením potrubí a tlak v potrubí opět klesne na hodnotu  $p_0$ . Tato expanzní tlaková vlna se bude pohybovat potrubím rychlosťí  $a$  opačným směrem tj. od bodu B k bodu A.

d) V čase  $t = 3l/2a$  bude tlaková vlna opět v polovině potrubí.

e) V čase  $t = 2l/a$  dosáhne tlaková vlna uzávěru, bodu A. Kapalina v celém potrubí má nyní tlak  $p_0$  a rychlostí  $v$  vytéká z nádrže. Vzhledem k setrvačnosti hmoty se v kapalině objeví tendence odtrhnout se od uzávěru A. To má za následek další pokles tlaku u uzávěru. Pokud tlak neklesne pod hodnotu tlaku nasycených par, zůstane kapalina lít na uzávěru, její rychlosť bude opět rovna nule a tlak v této oblasti nyní klesne o hodnotu  $\Delta p$  pod hodnotu normálního tlaku  $p_0$ . Tato expanzní tlaková vlna se rychlosťí  $a$  pohybuje zpět k bodu B.

f) V čase  $t = 5l/a$  je opět v polovině délky potrubí. Mezi tlakovou vlnou a uzávěrem A je kapalina v klidu a je v ní podtlak, před vlnou je tlak normální a kapalina vytéká z potrubí do nádrže.

Dosáhne-li nyní tlaková vlna bodu B, bude v cílem potrubí podtlak a kapalina v klidu ( $t = 3l/a$ ). Protože tlak v nádrži je větší začne opět proudit kapalina z nádrže do potrubí a v čase  $t = 4l/a$  se dosáhne původního stavu, zobrazeného na obr. 69a a celý cyklus se bude opakovat.

Tento značně zidealizovaný model totálního rázu se od skutečnosti liší. Vlivem pružnosti potrubí a vzduchu obsaženého v kapalině se rychlosť šíření tlakové vlny zmenší. Vlivem viskozity se kmitavý děj tlumí.

Otzádky ke kap. 9.:

- 1) Odvodte rovnici kontinuity v diferenciálním tvaru pro jednorozměrné nestacionární proudění stlačitelné tekutiny, provedte zjednodušení pro stacionární proudění stlačitelné tekutiny a pro proudění nestlačitelné tekutiny.
- 2) Z kterého zákona vycházíme při odvození pohybové rovnice a které síly uvažujeme?
- 3) Jak charakterizujeme kvazistacionární proudění?
- 4) Vypočtěte dobu kvazistacionárního vyprázdnění vařáku - nádoby ve tvaru koule.
- 5) Jaký je rozdíl mezi vynuceným a samovolným nestacionárním prouděním?
- 6) Čím je omezena sací výška čerpadla?
- 7) Za jakou dobu vznikne stacionární proudění při náhlém otevření potrubí konstantního průřezu. Dokažte.
- 8) Nakreslete, jak se mění průběh tlaku s časem podél potrubí při náhlém otevření potrubí za předpokladu, že kapalina je nevazká.
- 9) Jak je velké Strouhalovo číslo v okamžiku, kdy je výtoková rychlosť rovna polovině rychlosti stacionární?
- 10) Jaký je rozdíl mezi kmitavým pohybem nevazké a vazké kapaliny v U-trubici? Na čem závisí úhlová frekvence kmitavého pohybu vazké tekutiny?
- 11) Jak se mění tlak před a za ventilem při jeho pomalém zavírání?
- 12) Co je to vodní ráz ?
- 13) Na čem závisí resp. nezávisí stoupení tlaku při totálním rázu ?
- 14) Co je to kavitace ? Jak se projevuje ?

**Víte, že**

- název kavitace (prázdnota) pochází od anglického učence a konstruktéra lodí Williama Frouda (1810 -1879)? Možnost vzniku kavitace předpovíděl už v roce 1754 Euler a v roce 1873 Reynolds. V technické praxi se významně projevila v roce 1893, kdy byla spuštěna na vodu anglická válečná loď „DERING“, která byla opatřena lodním šroubem a měla mít dvojnásobnou rychlosť než tehdejší loď. Když spustili stroje na plný výkon voda za lodí se vzpříma aniž by rychlosť vzrostla a ta byla značně menší než předpokládaná rychlosť. Podobný osud stíhl i první loď opatřenou parní turbínou „TURBINIA“ na níž se bezvýsledně zkoušelo sedm různých lodních šroubů. Teprve když byla opatřena třemi lodními šrouby dosáhla rychlosťi 32 uzlů (asi 59 km/h).
- první experimentální výzkum kavitace na speciálním vodním kanálu provedl konstruktér parní turbíny Charles Parsons (1854-1931) v roce 1895 po neúspěchu „Turbinie“.
- Pro technickou praxi je nejdůležitější kavitační eroze, ke které dochází v místech kondenzace bublinek. Ta probíhala někdy tak rychle, že po několikatýenním provozu bylo nutno vyměnit lodní šroub nebo rotor vodního stroje. Např. na Džacharovské vodní elektrárně v Arménii se narušily kavitací rozváděcí lopatky turbíny za 10 dní do hloubky 25 mm.

## Příklad P 9.1

Z velké nádrže, obr. P 9.1a vytéká voda vodorovným ocelovým potrubím o průměru  $d$ , tloušťce stěny  $t$  a délce  $l$ . Stacionární průtok je  $\dot{V}$ . Relativní drsnost stěn potrubí je  $k/d$ . Modul pružnosti potrubí je  $E$ , modul pružnosti vody je  $K$ .

Stanovte:

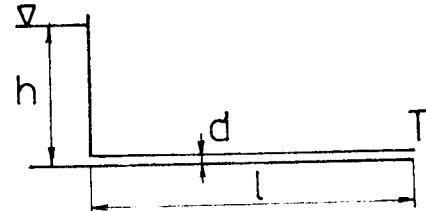
- 1) ztráty při stacionárním proudění známe-li součinitel vstupní ztráty  $\zeta_v$  a ztrátový součinitel otevřeného šoupátka  $\zeta_s$ .
- 2) stoupení tlaku před šoupátkem při jeho zavírání, jestliže je tok rovnoměrně zpožděný a potrubí se uzavře během časového intervalu  $\Delta t$ . Porovnejte stoupení tlaku před šoupátkem při jeho uzavírání a při úplném zavření potrubí.
- 3) stanovte stoupení tlaku  $\Delta p$  před šoupátkem při náhlém uzavření šoupátka - totální ráz - s uvažováním pružnosti potrubí. Jak velký vliv má pružnost potrubí na vzrůst tlaku při totálním rázu?
- 4) nakreslete průběhy tlaků při uzavřeném šoupátku, při stacionárním výtoku, při „pomalém“ uzavírání a při náhlém uzavření šoupátka.

Dáno:  $\dot{V} = 56,52 \text{ l/s}$ ,  $d = 0,2 \text{ m}$ ,  $t = 10 \text{ mm}$ ,  $l = 1200 \text{ m}$ ,  $k/d = 0,002$ ,  $v = 10^{-6} \text{ m/s}$ ,  $\Delta t = 2 \text{ s}$ ,  $E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $K = 2,05 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ ,  $\zeta_v = 0,5$ ,  $\zeta_s = 0,02$ .

Určit:  $h = ? \text{ m}$ ,  $\Delta p = ? \text{ MPa}$ .

Rozbor (schéma):

Ztráty při proudění a kinetická energie vytékající vody jsou kryty spádem  $h$ . Při „pomalém“ uzavírání potrubí závisí stoupení tlaku na délce potrubí  $l$  zpoždění tekutiny  $a_t$  a hustotě  $\rho$ . Při náhlém uzavření potrubí závisí stoupení tlaku na pružnosti soustavy tekutina - potrubí, což je charakterizováno rychlostí zvuku  $a$ , rychlostí proudění  $v$  a hustotou tekutiny  $\rho$ .



Obr. P 9.1a

Řešení:

- 1) Stanovíme nejprve rychlosť stacionárního proudění v potrubí

$$v = \frac{4\dot{V}}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,05652}{\pi \cdot 0,2^2} = 1,8 \text{ m/s},$$

pak Reynoldsovo číslo  $Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{1,8 \cdot 0,2}{10^{-6}} = 360\,000$ ,

$$\begin{aligned} \text{součinitel třecích ztrát } \lambda &= 0,11 \left( \frac{k}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25} = 0,11 \left( 0,002 + \frac{68}{360000} \right)^{0,25} = \\ &= 0,11(0,002+0,00019)^{0,25} = 0,024. \end{aligned}$$

Z Bernouliovovy rovnice psané pro hladinu v nádrži a výstupní průřez určíme spád  $h$

$$\begin{aligned} h &= \frac{v^2}{2g} + h_z = \frac{v^2}{2g} \left( 1 + \zeta_v + \lambda \frac{l}{d} + \zeta_s \right) = \frac{1,8^2}{2 \cdot 9,81} \left( 1 + 0,5 + 0,024 \frac{1200}{0,2} + 0,02 \right) = \\ &= 0,165 (1+0,5+144+0,02) = 24,0 \text{ m}. \end{aligned}$$

- 2) Při stacionárním proudění je ve výstupním průřezu opatřeném šoupátkem nulový přetlak. Při postupném zavírání šoupátka působí brzděná kapalina se zpožděním  $a_t$  na šoupátko určitou silou  $F$ .

$$\text{Zpoždění vody } \alpha_t = \frac{v}{\Delta t} = \frac{1,8}{2} = 0,9 \text{ m}^2/\text{s} = \text{konst.}$$

Hmotnost vody v potrubí, jež je zpožďována  $m = \rho \cdot A \cdot l = 1000 \cdot \frac{\pi}{4} 0,2^2 \cdot 1200 = 37680 \text{ kg}$ .

Setrvačná síla působící na šoupátko  $F = m \cdot a_t = \rho \cdot A \cdot l \cdot a_t = 1000 \cdot \frac{\pi}{4} 0,2^2 \cdot 1200 \cdot 0,9 = 33912 \text{ N}$

$$\text{Přírůstek tlaku u šoupátka } \Delta p = \frac{F}{A} = \frac{\rho A l a_t}{A} = \rho a_t l = 1000 \cdot 0,9 \cdot 1200 = 1,08 \text{ MPa.}$$

Ke stejnemu výsledku lze dojít přímo z Bernouliovovy rovnice rozšířené o nestacionární člen  $\Delta p = \rho a_t l$ . Při úplném uzavření šoupátka bude voda v potrubí v klidu (hydrostatika) a tlak u šoupátka bude závislý na výšce hladiny v nádrži  $h$ , obr. P 9.1b  $p = \rho gh = 9,81 \cdot 1000 \cdot 24 = 235440 \text{ Pa}$ , tj. 0,235 MPa, tj. téměř pětkrát menší tlak než při zavíráni.

3) Při náhlém uzavření potrubí je stoupení tlaku závislé na pružnosti soustavy kapalina + potrubí. Kdyby bylo potrubí absolutně tuhé a voda bez bublinek vzduchu pak rychlosť zvuku - rovnice (5) - bude rovna:

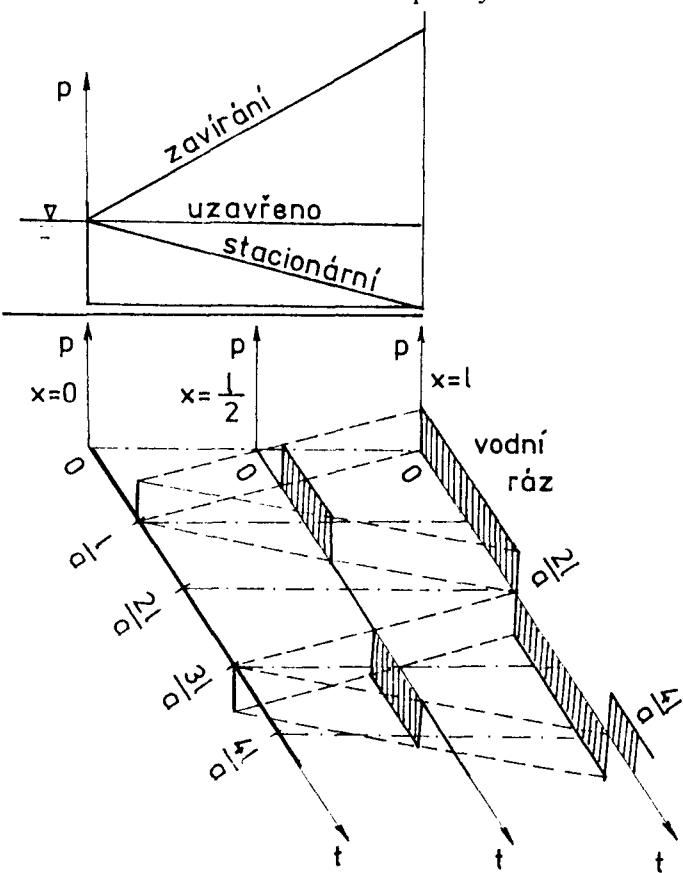
$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{2,05 \cdot 10^9}{10^3}} = 1432 \text{ m/s.}$$

Uvažujeme-li pružnost potrubí, rychlosť šíření tlakové vlny se zmenší a lze ji stanovit z rovnice, kterou uvedeme bez odvození

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho \left( \frac{1}{K} + \frac{d}{t \cdot E} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{1000 \left( \frac{1}{2,05 \cdot 10^9} + \frac{0,2}{0,01 \cdot 2,06 \cdot 10^{11}} \right)}} = 1307 \text{ m/s.}$$

Uvažujeme-li pružnost potrubí je rychlosť zvuku asi o 9% menší. O tolik bude nižší i stoupení tlaku - rovnice (80):

$$\Delta p = \rho a v = 1000 \cdot 1307 \cdot 1,8 = 2352600 \text{ Pa, tj. 2,35 MPa, tj. asi dvojnásobné než při pomalém zavíráni.}$$



Obr. P 9.1b

4) Při uzavřeném potrubí bude podél potrubí všude tlak stejný daný výškou hladiny v nádrži, obr. P 9.1b. Při stacionárním výtoku bude ve směru proudění tlak klesat podle přímky. Při pomalém zavíráni bude naopak tlak stoupat podle přímky. Při rázu vznikne v potrubí kmitavý děj, průběh tlaku v závislosti na čase závisí na poloze průřezu potrubí od vstupu. Na obr. P 9.1b jsou nakresleny ideální průběhy tlaků v závislosti na čase pro průřezy  $x = 0$ ,  $x = l/2$  a  $x = l$ .

#### Diskuse:

Při průtoku dlouhým potrubím jsou místní ztráty zanedbatelné. Skutečné průběhy tlaků při vodním rázu budou dány spojitou křivkou a amplituda se bude s časem zmenšovat vlivem vaznosti (tlumený kmitavý děj).

## 10. RELATIVNÍ PRŮTOK

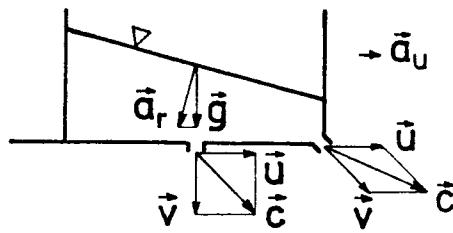
Již v hydrostatice jsme se zabývali případy, kdy se tekutina nacházela v klidu vzhledem ke stěnám nádoby, jež vykonávala unášivý pohyb, kap. 5. V těchto případech jsme souřadný systém spojovali s pohybující se nádobou a tyto případy jsme nazývali relativní rovnováhou (když nastal rovnovážný stav). Pokud byl unášivý pohyb nádoby a tím i souřadného systému ustálený a přímočarý (inerciální souřadný systém) nevznikly od unášivého pohybu žádné přídavné síly a případ se řešil stejně jako případ absolutní rovnováhy. Jestliže však pohyb nádoby byl nestacionární nebo rotační (neinerciální souřadný systém) bylo nutno uvažovat i vliv setrvačních sil. Tyto úvahy budou platit i pro relativní průtok s tím, že relativní rychlosť nebude nulová a řešení těchto případů bude složitější.

### 10.1. Základní rovnice relativního průtoku

Nyní budeme za absolutní souřadný systém uvažovat systém spojený se zemským povrchem a rychlosti k němu vztažené označovat jako absolutní  $\vec{c}$ . Relativní souřadný systém spojený s nádobou bude vykonávat unášivý pohyb rychlostí  $\vec{u}$  a relativní rychlosť  $\vec{v}$  bude rychlosť tekutiny vztažená k tomuto pohybujícímu se souřadnému systému. Pro rychlosť musí platit, že absolutní rychlosť se rovná vektorovému součtu rychlosťi unášivé a relativní, obr. 70.

Obr. 70 Výtok z pohybující se nádoby:

$\vec{c}$  absolutní rychlosť,  $\vec{u}$  unášivá rychlosť,  $\vec{v}$  relativní rychlosť,  $\vec{g}$  gravitační zrychlení,  $\vec{a}_u$  unášivé zrychlení,  $\vec{a}_r$  relativní zrychlení.  
 $\vec{c} = \vec{u} + \vec{v}$ .



Podobně pro zrychlení bude platit, že absolutní zrychlení (v našem případě zrychlení zemské třídy) je rovno vektorovému součtu zrychlení relativního  $\vec{a}_r$  a zrychlení unášivého  $\vec{a}_u$  a v případě, že unášivý pohyb je rotační a relativní rychlosť  $\vec{v} \neq 0$  i zrychlení Coriolisova  $\vec{a}_C = 2(\vec{\omega} \times \vec{v})$ :  $\vec{g} = \vec{a}_r + \vec{a}_u + \vec{a}_C$ , takže relativní zrychlení vztažené k souřadnému systému spojenému s nádobou  $\vec{a}_r = \vec{g} - \vec{a}_u - \vec{a}_C$ .

Při výpočtu relativního proudění dosazujeme do rovnice kontinuity relativní rychlosti:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2. \quad (81)$$

Rovněž do pohybové rovnice dosadíme lokální relativní zrychlení a relativní rychlosť

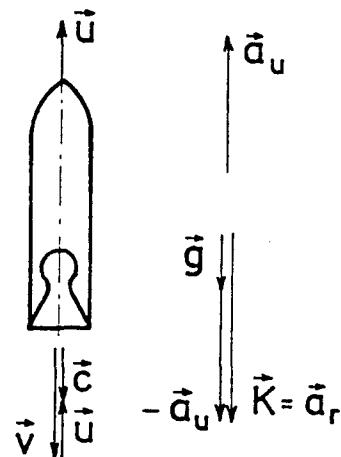
$$-K \cos \psi ds + \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v}{\partial t} ds + de_z = 0. \quad (82)$$

Za intenzitu hmotových sil  $\vec{K}$  dosadíme výslednou sílu působící na částici tekutiny o jednotkové hmotnosti danou vektorovým součtem síly od vnějšího silového pole (tj. gravitačního pole) a výsledné síly setrvačné od unášivého pohybu včetně Coriolisovy síly a pak  $\vec{K} = \vec{a}_r$ .

### 10.2 Přímočarý unášivý pohyb

Při rozjezdu a při brzdění různých dopravních prostředků (letadla, rakety, auta, kluzáky, letecké modely atd.) se mohou vyskytnout po určité časový interval dosti velká zrychlení, resp. zpoždění, jež mohou nepříznivě ovlivnit proudění kapalin např. v regulačních,

mrazicích, chladicích či palivových systémech zvláště tam, kde pohyb kapalin není vynucen čerpadlem. Poměry při startu rakety jsou nakresleny na obr. 71.

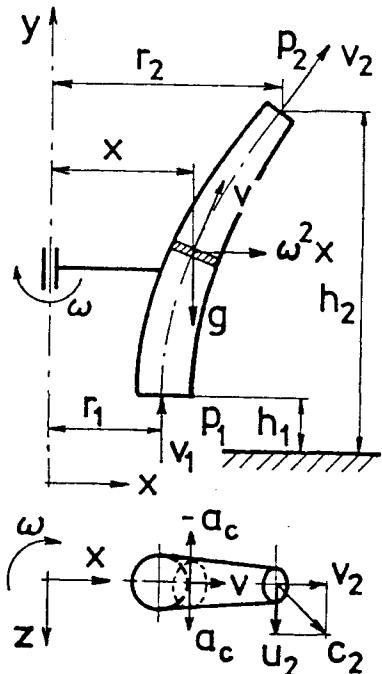


Obr. 71 Výtok plynů z raketového motoru.

Absolutní rychlosť zplodin vytékajúcich z motoru  $\vec{c}$  je maximální v okamžiku, kdy  $\vec{u} = 0$  a s časom postupne klesá, tak, jak roste rychlosť rakety  $\vec{u}$ . Relativné zrychlenie  $\vec{a}_r = \vec{K}$  je väčšie než zrychlenie zemské tíže  $\vec{g}$ . (V hydrostatickej jsmeme zavádzeli doplnkové zrychlenie  $\vec{a} = -\vec{a}_u$ , jež charakterizovalo vliv setrvačných sil, pak  $\vec{K} = \vec{g} + \vec{a}$  tj. rovnice (13)).

### 10.3 Rotační unášivý pohyb

a) **Rotující kanál.** Uvažujeme stacionárni proudenie tekutiny kanáleom rotujúcim kolem svislé osy stálou úhlovou rychlosťou  $\omega$ , obr. 72. Kdybychom použili souřadný systém spojený s povrchem zemským, bylo by proudenie vzhľedom k tomuto inerciálnemu souřadnému systému nestacionárni, neboť např. na obvodu kružnice  $r_2$  ve výške  $h_2$  by bola rychlosť v každém bodě rovna nule s výjimkou okamžiku, kdy tímto bodom procházi rotujúci kanál. Spojime-li však souřadný systém s kanáleom, takže se s ním bude společně otáčet (neinerciálni souřadný systém), bude proudenie vzhľedom k tomuto systému stacionárni, ale je nutno navíc uvažovať setrvačné síly. Např. na časticu tekutiny nacházející se na polomeru  $x$ , ježíž relativná rychlosť je  $\vec{v}$ , pôsobí vedle zrychlenia zemské tíže  $K_y = -g$  doplnkové zrychlenie od rotačného pohybu  $K_x = \omega^2 x$  a od Coriolisova zrychlenia  $K_z = -a_c$ , kde  $\vec{a}_c = 2(\vec{\omega} \times \vec{v})$ . Vektor  $\vec{a}_c$  je kolmý k rovině tvorené vektorom  $\vec{\omega}$  a  $\vec{v}$  a nemá tedy do smere  $\vec{v}$  a tím i do smere proudnice žiadnu složku. (Vektor Coriolisova zrychlenia nemá do smere proudnice žiadnu složku i tehdy, když kanál není radiálni ako na obr. 72).



Obr. 72 Průtok rotujícím kanálem.

Rozepíšeme-li skalárni součin  $K \cos \psi ds$  v rov. (82) pomocí složek na  $K_x dx + K_y dy + K_z dz$  dostaneme v našem případě rovnici ( $dz = 0$  pro radiálni kanál)

$$-\omega^2 x dx + g dy + 0 + \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v}{\partial t} ds + de_z = 0 .$$

Po integraci mezi vstupním a výstupním průřezem kanálu dostaneme pro stacionární průtok ( $\partial v / \partial t = 0$ )

$$\frac{\omega^2(r_1^2 - r_2^2)}{2} + g(h_2 - h_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + c_{z12} = 0 ,$$

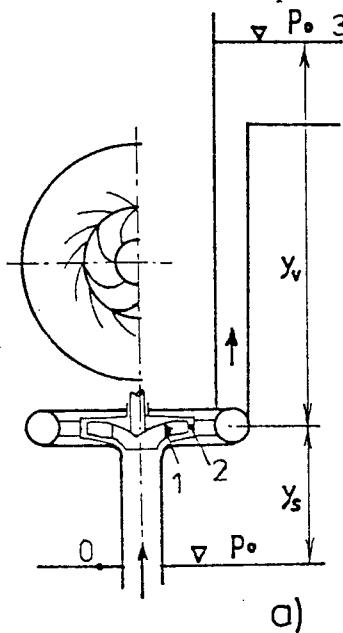
kde  $u_1 = r_1\omega$  a  $u_2 = r_2\omega$  jsou obvodové rychlosti ve vstupním a výstupním průřezu a rovnici lze po dosazení za

$$\frac{\omega^2(r_1^2 - r_2^2)}{2} = -\frac{u_2^2 - u_1^2}{2}$$

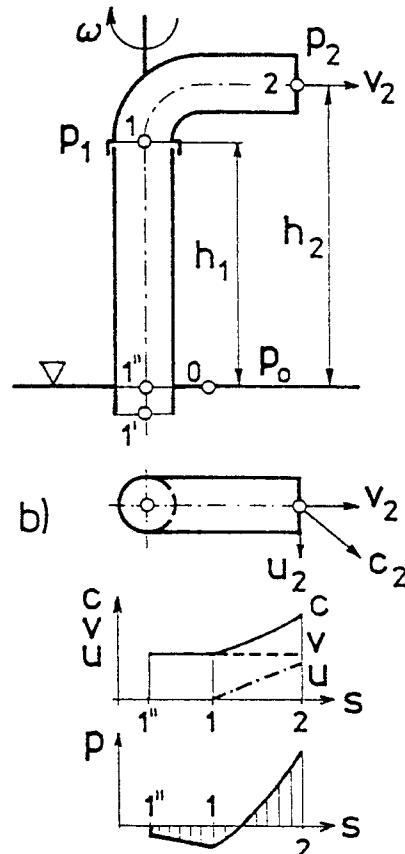
přepsat do tvaru  $gh_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} = gh_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} + c_{z12} . \quad (83)$

Člen  $(u_2^2 - u_1^2)/2$  je roven práci odstředivé síly mezi vstupním a výstupním průřezem a představuje zvýšení energie částice tekutiny o jednotkové hmotnosti vzhledem k rotujícímu souřadnému systému.

b) **Odstředivé čerpadlo.** Princip odstředivého čerpadla si objasníme na modelu čerpadla vytvořeného jedním kanálem konstantního průřezu  $A = \text{konst.}$ , obr. 73b. Skládá se ze sacího potrubí  $1' - 1$ , které je v klidu a rotujícího kolena  $1 - 2$ . Z rovnice kontinuity vyplývá, že relativní rychlosť  $v_1 = v_2 = v = \text{konst.}$  Unášivá rychlosť roste se vzdáleností od osy rotace lineárně (mezi průřezy  $1-2$ ). Absolutní rychlosť je mezi průřezy  $0-1$  shodná s relativní, ale mezi průřezy  $1-2$  roste nelineárně. Tlak v sacím potrubí je nižší než tlak atmosférický (a to i v průřezu  $1''$ , který leží v úrovni hladiny!). Nejvyšší podtlak je v místě  $1$ , kde končí sací potrubí a odkud začíná tlak stoupat vlivem energie dodávané na hřídel rotoru.



Obr. 73a Schéma odstředivého čerpadla.



Obr. 73b Stylizované odstředivé čerpadlo s průběhem rychlosťí a tlaků po dráze s mezi vstupním průřezem  $1''$  a výstup. průřezem  $2$ .

Průtok sacím potrubím lze popsat rovnici mezi průřezy 0-1:

$$\frac{p_0}{\rho} = gh_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} + e_{z01} . \quad (84)$$

Sací potrubí je v klidu  $u_1 = 0$  a tedy  $c_1 = v_1$ . (85)

Průtok rotujícím kolenem mezi průřezy 1-2 popíšeme rovnici pro relativní průtok ( $p_2 > p_0$ ):

$$gh_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} = gh_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} + e_{z12} . \quad (86)$$

Po dosazení rovnice (84) do (86) a eliminaci tlaku  $p_1$  dostaneme

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = gh_2 + \frac{p_2 - p_0}{\rho} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{2} + e_{z02} , \quad (87)$$

což dokazuje větu napsanou v závěru předchozího odstavce, neboť  $(u_2^2 - u_1^2)/2$  je rovno zvýšení polohové, tlakové a kinetické energie a disipaci energie mezi průřezy 0-2, vztažené na částici tekutiny o jednotkové hmotnosti (zde je  $u_1 = 0$  a  $|v_1| = |c_1|$ ).

Z uvedených rovnic lze dospět k témtu závěrům:

protože mezi průřezy 0 až 1 není v sacím potrubí dodávána kapalině žádná energie, je k vstupnímu otvoru rotoru kapalina vytlačena účinkem atmosférického tlaku  $p_0$ . Musíme však v průřezu 1 vytvořit podtlak, u odstředivého čerpadla rotaci kapaliny (spolu s rotem). Z

rovnice (86) lze stanovit  $p_1 = p_2 + \rho \left[ g(h_2 - h_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right] - \rho \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \rho e_{z1,2}$  (88)

Rozměry odstředivého čerpadla jsou zpravidla mnohem menší než je výška do které kapalinu čerpáme a polohové výšky vstupního a vstupního průřezu rotoru jsou přibližně stejné  $h_2 \approx h_1$  a jejich rozdíl je  $\approx 0$ . Rovněž relativní rychlosti ve vstupním a výstupním průřezu se nebudou o mnoho lišit (to záleží na volbě velikosti vstupního a výstupního průřezu rotoru) a lze jejich rozdíl v našich dalších úvahách položit roven nule. Poslední člen v rovnici (88)  $e_{z1,2}$  představuje disipaci energie při průtoku kapaliny rotem. U dobré navrženého čerpadla by při jmenovitém průtoku (tj. průtoku na nějž bylo čerpadlo navrženo) měl být i tento člen malý. Podtlak  $p_1$  je tedy hlavně závislý na členu, který se odečítá. Zvyšováním  $u_2$  tj. otáček nebo průměru kola, roste podtlak. Pokud by ale v kanálech rotoru nebyla kapalina, ale vzduch, který má mnohem menší hustotu,  $\rho_{vzduchu} \ll \rho$ , nedosáhne se dostatečného podtlaku ani při vysokých otáčkách a čerpadlo nenasává - nepracuje. Pokud odstředivé čerpadlo není konstruováno jako samonasávací (tj. speciální konstrukce), je nutno sací potrubí opatřit zpětnou klapkou a před zahájením provozu čerpadla naplnit kapalinou - „zalít“.

Napišeme-li nyní energetickou rovnici pro model čerpadla, obr. 73b pro souřadný systém spojený se zemským povrchem, pak musíme dosazovat absolutní rychlosť  $c_0$  a  $c_2$ . Mezi průřezy 0-2 je kapalině dodávána měrná práce  $w < 0$ !

$$\frac{p_0}{\rho} - w = gh_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + e_{z02} \quad -w = gh_2 + \frac{p_2 - p_0}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + e_{z02} .$$

Z rovnice (87) vyplývá, že  $gh_2 + \frac{p_2 - p_0}{\rho} + e_{z02} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} - \frac{c_1^2}{2} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$ .

Spojením posledních dvou rovnic lze vyjádřit měrnou práci čerpadla,

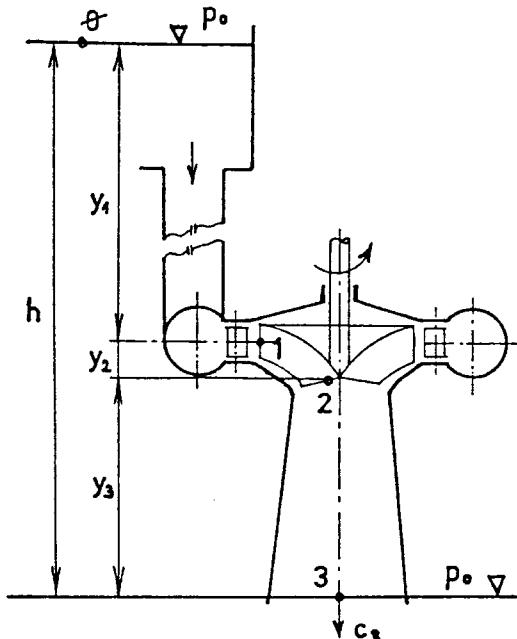
$$-w = gh_2 + \frac{p_2 - p_0}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + e_{z02} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \quad (89)$$

Při radiálním výtoku, je  $c_2^2 = u_2^2 + v_2^2$ . S uvážením  $|v_1| = |c_1|$  a  $u_1 = 0$  pak dostaneme pro stylizované čerpadlo:

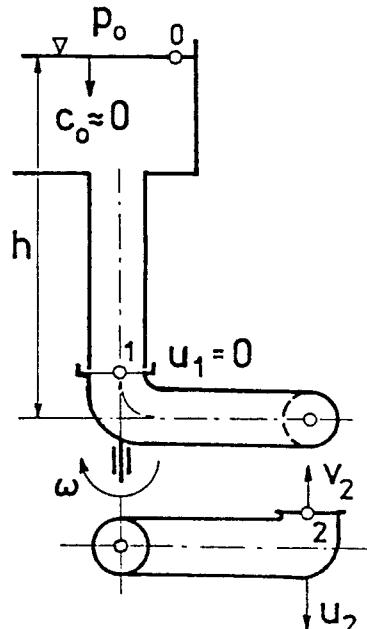
$$-w = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{u_2^2 + v_2^2}{2} - \frac{c_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} = u_2^2 .$$

Poznámka: v literatuře zabývající se čerpadly se bere dodaná práce v kladná, pak znaménko u w je opačné, tj. +. Skutečná čerpadla mají rotor vytvořen jako kotouč s několika zakřivenými kanály proměnlivého průřezu, viz schéma na obr. 73a.

c) Vodní turbina. Čerpadla (hydrogenerátory) dopravují kapaliny do míst výše položených nebo s vyšším tlakem a musí kapalině dodávat energii. Turbiny (hydromotory) naopak odebírají vodě (oleji) energii a předávají ji např. na hřídel elektrického generátoru. Princip vodní turbíny si opět ukážeme na modelu s jedním kanálem konstantního průřezu tzv. Segnerovým kolem, obr. 74b; tohoto principu se např. používá při zavlažování postřikem.



Obr. 74a Schéma vodní turbíny



Obr. 74b Segnerovo kolo

Při průtoku vody se polohová energie vody na hladině v nádrži změní na kinetickou energii vody odtékající z turbíny, užitečnou práci, která se odvádí hřidelem a část energie disipuje - tj. spotřebuje se na překonání hydraulických ztrát. Napišeme-li energetickou rovnici mezi průřezy 0-2 v souřadném systému spojeném se zemí (abs. rychlosti) pak

$$gh + \frac{p_0}{\rho} - w = \frac{p_0}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + e_{z02}, \quad (90)$$

kde  $w > 0$  je měrná práce odebraná kapalině. Napišeme-li zvlášť energetickou rovnici pro přiváděcí potrubí mezi průřezy 0 - 1:

$$gh + \frac{p_0}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} + e_{z01} \quad (91)$$

a rotující část tj. mezi průřezy 1 - 2, kdy  $p_2 = p_0$  (rovnice pro rotující kanál !):

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} + e_{z12} \quad (92)$$

pak měrná práce turbíny, kterou lze z rovnice (90) vyjádřit jako

$$w = gh - e_{z02} - \frac{c_2^2}{2}$$

se eliminací výrazu  $gh - e_{z02}$  z rov. (91) a (92) dá napsat pomocí rozdílu čtverců rychlostí:

$$w = - \left( \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) \quad (93)$$

což je Eulerova turbínová rovnice.

Poznámka: v kap. 11 Dynamické účinky proudu se budeme toužou ještě zabývat.

## Příklad P 10.1

Určete směr proudění vzduchu v atmosféře, jestliže tlak vzduchu není konstantní:

- bez uvažování vlivu vazkosti vzduchu (geostrofický vítr),
- s uvažováním viskozity vzduchu tj. v atmosférické mezní vrstvě.

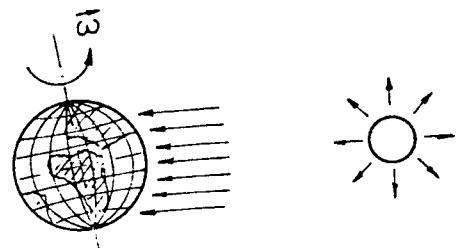
Dáno: tlakové pole,  $\vec{\omega} = \text{konst.}$

Určit: směr vektoru rychlosti  $\vec{v}$ .

Rozbor (schéma):

Spolu se Zemí se otáčí i její atmosféra, obr. P 10.1a. Země je zahřívána slunečními paprsky, jež blízko rovníku na ní dopadají téměř kolmo a proto se tam její povrch a od něj i vzduch zahřívá na vyšší teplotu než na zbývající části Země.

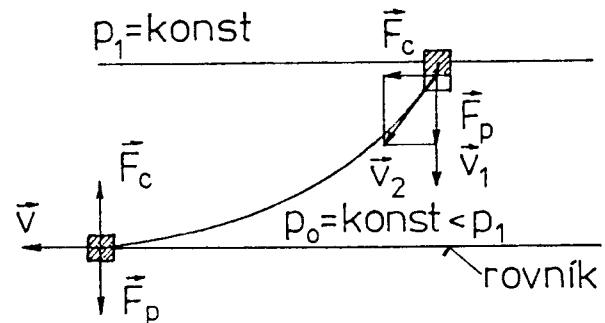
Teplý vzduch má menší hustotu a proto tam stoupá vzhůru a bude tam i menší tlak než dále od rovníku. Při značné idealizaci můžeme považovat rovnoběžky (nebo alespoň jejich část) za izobary. Rozdílem tlaků se uvede vzduch do pohybu - z míst s vyšším tlakem do míst s nižším tlakem - vzniká vítr.



Obr. P 10.1a

ad a) Na částici vzduchu působí v tečné rovině k povrchu Země (vodorovně) tlaková síla  $\vec{F}_p$ , obr. P 10.1b, daná rozdílem tlaků  $p_1 - p_0$  a uvede ji v prvním okamžiku do pohybu rychlostí  $\vec{v}_1$ , kolmou na izobary.

Protože se Země otáčí úhlovou rychlosí  $\vec{\omega}$  začne na pohybující se částici vzduchu působit Coriolisova síla, která je úměrná vektorovému součinu  $2(\vec{\omega} \times \vec{v})$  a působí ve směru kolmém k rychlosti  $\vec{v}$  a vychýlí částici z původního směru  $\vec{v}_1$  do směru  $\vec{v}_2$  (na severní polokouli doprava, obr. P 10.1b, na jižní doleva). Toto vychylování způsobuje Coriolisova síla  $\vec{F}_c$  tak dlouho, pokud nebude v rovnováze s tlakovou silou  $\vec{F}_p = \vec{F}_c$ .

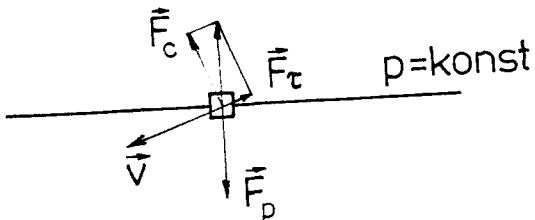


Obr. P 10.1b

V tomto ustáleném stavu bude směr rychlosti  $\vec{v}$  shodný se směrem izobar neboť  $\vec{v} \perp \vec{F}_c$  a tedy izobary budou shodné s proudnicemi. Toto proudění vzduchu se v meteorologii nazývá geostrofický vítr. Směr proudění je vždy takový aby byl nižší tlak po levé ruce vane-li nám vítr do zad. Na synoptických mapách obr. P 10.1d meteorologové přidělávají k izobaram šipky a to u tlakové níže (cyklóny) proti směru ručiček hodinových, u tlakové výše (anticyklóny) ve směru pohybu hodinových ručiček.

b) V blízkosti povrchu Země se vlivem viskozity - tření - rychlosť změnuje. Tato vrstva bývá nazývána atmosférická mezní vrstva a její tloušťka se pohybuje od několika stovek metrů (nad hladkým povrchem - moře) do několika kilometrů. Proti příkladu a) působí nyní proti pohybu částice vzduchu odpor  $\vec{F}_t$ , obr. P 10.1c.

Tlaková síla  $\vec{F}_p$  musí nyní být v rovnováze s výslednicí sil  $\vec{F}_c$  a  $\vec{F}_t$ . Rychlosť  $\vec{v}$  už nyní nemá směr shodný s izobarami, ale svírá s nimi určitý úhel, který je tím větší, čím více se blížíme k zemskému povrchu, kde je tření největší.



Obr. P 10.1c

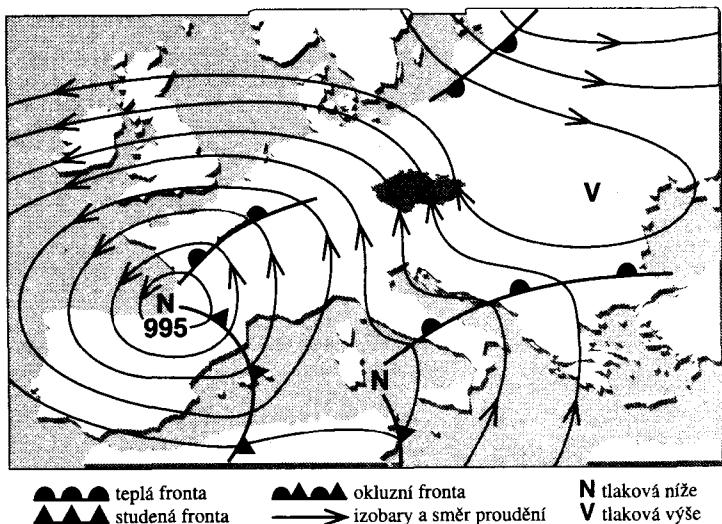
Vítr se tedy s výškou stáčí (Ekmanova spirála). V blízkosti rovníku vznikají pravidelné větry - pasáty - vanoucí na severní polokouli od severovýchodu a na jižní od jihovýchodu.

### Řešení:

Při řešení těchto úloh musíme vycházet z diferenciálních rovnic mechaniky tekutin, jež pro inerciální souřadný systém jsou odvozeny až v kap. 17. Tam je bez odvození uvedena i diferenciální pohybová rovnice ve vektorovém tvaru pro souřadný systém, který rotuje spolu se Zemí (neinerciální souřadný systém). Jako příklad P 17.1 je dokázána úloha a).

### Diskuse:

Samotná velikost barometrického tlaku není rozhodující veličinou, jež určuje vývoj počasí. Máme-li na barometru v domácnosti - aneroidu - u nižších tlaků připsáno „Děšť“ a u vyšších tlaků „Pěkně“, je třeba brát to s rezervou. Kdyby existovala tato přímá souvislost, nepotřebovali bychom meteorology pro předpovídání počasí. Na vývoj počasí má vliv řada faktorů jako tlakové pole - tj. rozložení tlaku, teplotní pole - teplotní zvrstvení s výškou, vlhkost vzduchu atd.



Obr. P 10.1d

S dalšími podrobnostmi o proudění v atmosféře a rozptylu škodlivin se posluchači mohou seznámit v přednáškách „Přenosové jevy v ekologii“ ve vyšších ročnících.

### **Víte, že**

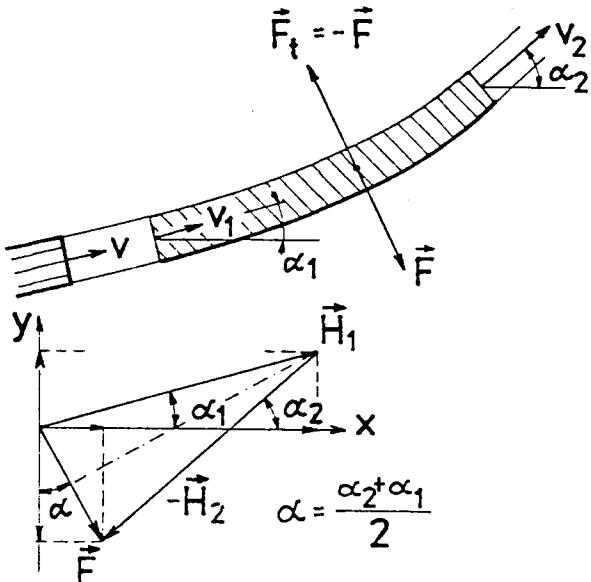
- renesanční umělec a technik Leonardo da Vinci (1452-1519) se zabýval konstrukcí různých zařízení, jež většinou nerealizoval, např. odstředivé čerpadlo (ale také padák, helikoptéra, letadlo s mavavými křídly - ornitoptera - atd.).
- první použitelné odstředivé čerpadlo zkonztruoval roku 1689 Denis Papin (1647-1712?).
- první průmyslovou vodní přetlakovou turbínu o výkonu 4,5 kW a účinnosti asi 80% sestrojil roku 1827 Benoit Fourneyron. Tuto turbínu zdokonalil Angličan James Bicheno Francis (1849) tím, že rotor je uvnitř rozváděcího kola. Viktor Kaplan (1876 - 1934) za svého působení v Brně navrhl axiální vrtulovou turbínu.

## 11. DYNAMICKÉ ÚČINKY PROUDU TEKUTINY

Na začátku dynamiky tekutin v kapitole 6.1 odst. c, byla odvozena vedle rovnice kontinuity a energetické rovnice i impulsová věta - věta o změně hybnosti. Lze ji v inženýrské praxi výhodně použít všude tam, kde nás zajímá jen výsledný silový účinek tekutiny na stěnu (integrální veličiny). Uvedeme několik ukázek z velkého a rozmanitého množství aplikací tohoto zákona.

### 11.1 Desky v klidu

Uvažujme, že proud tekutiny obdélníkového průřezu  $A = b \cdot h$ , kde  $b$  je šířka a  $h$  výška proudu, dopadá tečně na desku, obr. 75, a je deskou odkloněn z původního směru  $\alpha_1$  do směru  $\alpha_2$ . Zanedbejme účinek zemského zrychlení  $g$  a disipaci energie. Proud i deska jsou obklopeny vzduchem a na povrchu proudu i desky stýkající se vzduchem bude všechno atmosférický tlak  $p_0$ . Předpokládejme, že v celém průřezu proudu je rychlosť stejná.



Obr. 75 Dynamické účinky proudu tekutiny na desku.

Zvolme si nyní kontrolní objem ohrazený vnějším povrchem desky, vstupním a výstupním průřezem proudu a volným povrchem proudu (na obr. 75 vyšrafován). Silový účinek od konstantního tlaku  $p_0$  na kontrolní objem je roven nule a (stejně jako při výpočtu sil na stěnu v hydrostatické, kap. 4) budeme počítat pouze s přetlakem. Na vnitřním, smáčeném povrchu desky, bude přetlak, který je závislý na změně směru proudu. Deska působí na kapalinu silou  $\vec{F}_t$ , a podle principu akce a reakce působí kapalina na stěnu silou stejně velikou, ale opačného smyslu  $\vec{F} = -\vec{F}_t$ .

Napišme větu o změně hybnosti pro tekutinu uvnitř kontrolního objemu:

$$\vec{F}_t = \vec{H}_2 - \vec{H}_1 .$$

V této rovnici veličina označená  $\vec{H} = \dot{m}\vec{v}$  není hybnost, ale tok hybnosti, neboť rychlosť  $\vec{v}$  [ $m/s$ ] je násobena hmotnostním tokem  $\dot{m}$  [ $kg/s$ ] a měla by se správněji označovat  $\vec{H}$ . V praxi je zvykem nerozlišovat je a označovat obě veličiny stejně jednodušším symbolem.

Za předpokladu, že se velikost tj. modul vektoru rychlosti nemění  $|v| = |v_1| = |v_2|$ , síla na desku se pak rovná

$$\vec{F} = -\vec{F}_t = \vec{H}_1 - \vec{H}_2 = \dot{m}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \rho A v (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) .$$

Tato rovnice je znázorněna graficky, viz vektorový polygon na obr. 75.

Řešíme-li případ analyticky, rozložíme vektory do složek

$$F_x = H_{1x} - H_{2x} = \rho A v^2 (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

$$F_y = H_{1y} - H_{2y} = \rho A v^2 (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$$

a výsledná síla

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \rho A v^2 \sqrt{(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)^2 + (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)^2}$$

$$F = k \rho A v^2 \quad (94)$$

kde  $k = \sqrt{2[1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)]}$ , závisí na tvaru desky, tj. na úhlu ohybu proudů.

*Poznámka:* protože moduly vektorů hybností jsou stejné  $|H_1| = |H_2|$ , je výslednice  $F$  kolmá k ose úhlu ( $\alpha_2 - \alpha_1$ ), obr. 75.

Pak

$$F_x = F \sin \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = F \sin \alpha$$

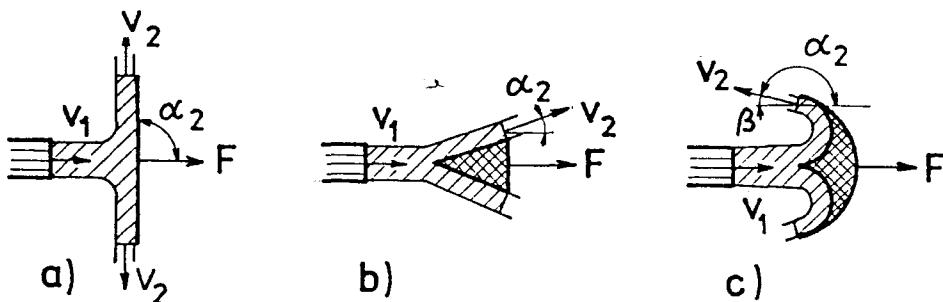
$$F_y = F \cos \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = F \cos \alpha .$$

V tomto případě výslednice  $\vec{F}$  svírá úhel  $\alpha$  s osou  $y$ !

Jestliže se roviný proud po dopadu na desku dělí symetricky na dva proudy, obr. 76, pak složka  $F_y = 0$  a výsledná síla bude rovna vodorovné složce (pro  $\alpha_1 = 0$ )

$$F = F_x = H_{1x} - H_{2x} = \rho A v^2 (1 - \cos \alpha_2) = k \rho A v^2$$

což je zvláštní tvar rov. (94) pro  $\sin \alpha_1 = 0$  a člen  $\sin \alpha_2$  odpadá z důvodů symetrie k ose  $x$ .



Obr. 76 Účinek proudu kapaliny na a) velkou kolmou desku,

b) klín nebo malou desku kolmou k proudu,

c) rovinnou lopatku Peltonovy turbíny.

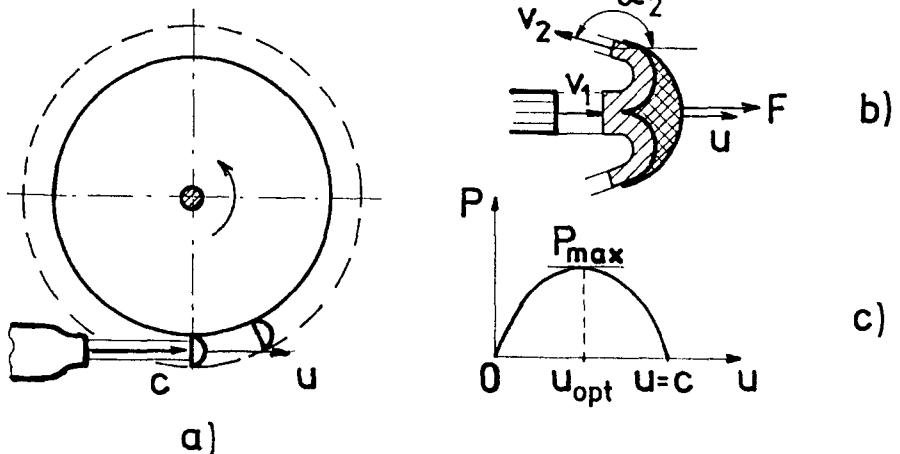
Součinitel  $k = 1 - \cos \alpha_2$  je tedy opět závislý na tvaru desky. U desky kolmé k proudu, obr. 76a), je  $\alpha_2 = \pi/2$  a  $k = 1$ . Pro  $\alpha_2 < \pi/2$  je  $\cos \alpha_2 > 0$  a  $k < 1$ , obr. 76b). Je-li úhel  $\alpha_2 > \pi/2$  jako je tomu u lopatky Peltonovy turbíny, obr. 76c), je  $\cos \alpha_2 < 0$  a  $k > 1$ ! Pro  $\beta = 0$  resp.  $\alpha_2 = \pi$  by  $k = 2$  a síla dvojnásobná než u kolmé desky.

*Poznámka:* u Peltonovy lopatky lze zavést doplnkový úhel  $\beta$  pak  $k = 1 + \cos \beta$ !

## 11.2 Pohybující se desky

Lopatky Peltonových turbín se však spolu s rotorem otáčejí, obr. 77. Jejich unášivá rychlosť  $u$  je rovna obvodové rychlosti turbíny.

Síla na lopatku ustupující před proudem bude menší oproti síle působící na stojící lopatku, neboť voda dopadá na ni pouze relativní rychlostí  $v = c - u$  a i množství vody  $\dot{m}$ , které na lopatku dopadne za jednotku času bude menší, bude závislé na relativní rychlosti  $v$ :  $\dot{m} = \rho A v$ .



Obr. 77 a) Schéma Peltonovy turbíny,  
b) pohybující se lopatka Peltonovy turbíny,  
c) závislost výkonu turbíny na obvodové rychlosti.

Chceme-li stanovit sílu  $F$  působící na pohybující se lopatku, uvažujeme kontrolní oblast pohybující se spolu s lopatkou, obr. 77b, do níž tekutina vstupuje relativní rychlostí  $v_1 = c - u$  a vystupuje relativní rychlostí  $|v_2| = |v_1|$ . Pak

$$\begin{aligned} F &= \rho A v_1 (v_1 - v_2 \cos \alpha_2) \\ F &= \rho A (c - u)^2 (1 - \cos \alpha_2) = k \rho A v^2, \end{aligned} \quad (95)$$

kde součinitel  $k$  je stejný jako pro desky v klidu.

Výkon jedné lopatky je dán součinem síly a rychlosti lopatky

$$P = F \cdot u = k \rho A (c - u)^2 \cdot u. \quad (96)$$

Je-li unášivá rychlosť  $u = c$  tj. výtokové rychlosti vody z nátrubku, bude výkon nulový, neboť síla na lopatku bude rovna nule (voda nemůže dohonit lopatku). Zabrzdíme-li turbínu bude  $u = 0$  a výkon bude opět nulový. Mezi těmito hodnotami bude ležet optimální rychlosť (tj. otáčky) při které bude výkon maximální  $P_{\max}$ :

$$\frac{\partial P}{\partial u} = k \rho A (c - u)(c - 3u) = 0$$

odtud

$$u_{opt} = c / 3 \quad \text{a} \quad P_{\max} = k \rho A \frac{4}{27} c^3.$$

### 11.3 Optimální otáčky Peltonovy turbíny

Protože na skutečné Peltonově turbíně není jen jedna lopatka, využívá se energie veškeré vody jež vyteče z nátrubku za jednotku času, tj.  $\dot{m} = \rho A c$ . V tomto případě lze výkon turbíny vyjádřit vztahem

$$P = k \rho A c (c - u) u, \quad (97)$$

což je kvadratická závislost, znázorněná v obr. 77c a stejným postupem jako v předchozím odstavci dostaneme pro optimální rychlosť vztah

$$u_{opt} = c / 2 \quad \text{a} \quad P_{\max} = k \rho A \frac{1}{4} c^3.$$

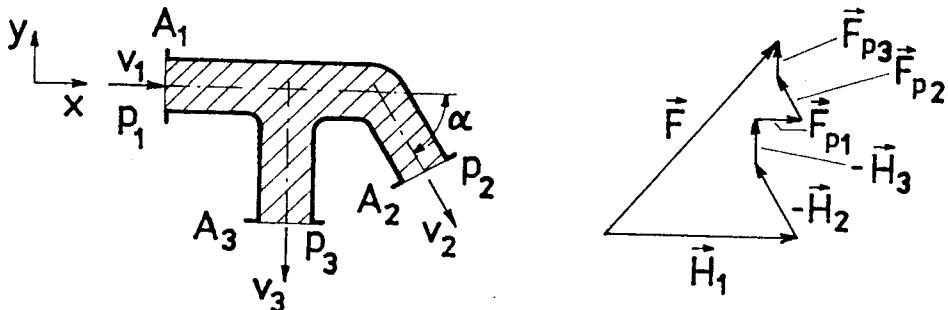
## 11.4 Uzavřené kanály

Impulsovou větu lze aplikovat i při průtoku tekutin uzavřenými kanály, v tomto případě je však nutno uvažovat i vliv tlakových a případně třecích sil. V kap. 8 byla tak určena tlaková ztráta při náhlém rozšíření průřezu potrubí.

Podobně lze stanovit silové účinky na potrubí při dělení a slévání proudu, např. pro potrubní tvarovku, obr. 78 ( $H_{3x} = 0$ ,  $H_{1y} = 0$ ,  $F_{p3x} = 0$ ,  $F_{p1y} = 0$ ):

$$F_x = H_1 - H_{2x} + F_{p1} - F_{p2x} = \rho A_1 v_1^2 - \rho A_2 v_2^2 \cos\alpha + p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\alpha$$

$$F_y = -(-|H_{2y}| - |H_3|) + F_{p2y} + F_{p3} = \rho A_2 v_2^2 \sin\alpha + \rho A_3 v_3^2 + p_2 A_2 \sin\alpha + p_3 A_3$$



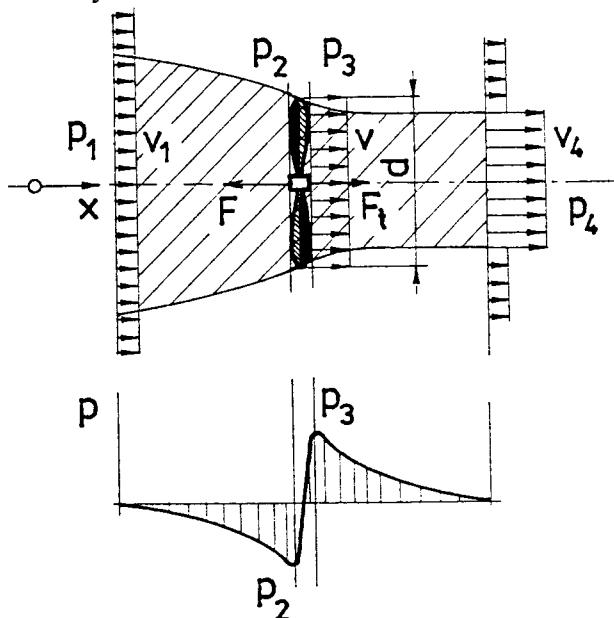
Obr. 78 Stanovení silového účinku proudu tekutiny na potrubní tvarovku, bez uvažování síly tíže.

*Poznámka:* při zvoleném souřadném systému jsou  $H_{2y}$  a  $H_3$  záporné a při výpočtu síly na stěnu se hybnosti vytékající z kontrolní oblasti berou se záporným znaménkem. Pro kontrolu znaménka je vhodné si nakreslit vektorový polygon, obr. 78.

## 11.5 Propulse

Pomocí impulsové věty lze také vypočítat tah vrtule, tryskového a raketového motoru a p. Ve všech těchto případech vzniká tah změnou hybnosti.

Např. vrtule o průměru  $d$  urychlí proud vzduchu v ohraničené oblasti, obr. 79, z rychlosti  $v_1$  na  $v_4$ . Tyto rychlosti jsou měřeny v dostatečných vzdálenostech před a za vrtulí, kde tlak  $p_1 = p_4$  je roven barometrickému tlaku a tedy přetlak, resp. podtlak je roven nule. Těsně před vrtulí vzniká podtlak  $p_2$  a za vrtulí přetlak  $p_3$ , neboť při průchodu vzduchu plochou vrtule je mu udělena energie.



Obr. 79 Schematizovaný obraz proudění pro stanovení tahu vrtule.

Tah vrtule (vzhledem ke zvolenému souřadnému systému vychází záporný)

$$F = -F_t = H_1 - H_4 = \dot{m}(v_1 - v_4) = \rho A v(v_1 - v_4), \quad (98)$$

kde  $F_t$  je síla urychlující vzduch,  $A = \pi d^2/4$  je plocha disku vrtule a  $v$  je zatím neznámá rychlosť vzduchu v rovině vrtule. Tah lze také vyjádriť pomocí tlaků:

$$F = A(p_2 - p_3) = \frac{\pi d^2}{4}(p_2 - p_3). \quad (99)$$

Zanedbáme-li viskozitu a stlačitelnosť tekutiny lze napsať Bernoulliovu rovnici mezi průřezy 1 a 2 a 3 a 4 (polohové výšky  $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$ )

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 \quad (100)$$

$$p_3 + \frac{\rho}{2} v_3^2 = p_4 + \frac{\rho}{2} v_4^2$$

$$\text{Pro } p_1 = p_4 \text{ je } p_2 - p_3 = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_4^2). \quad (101)$$

Z rovnic (98), (99) a (101) lze stanovit rychlosť vzduchu v rovině vrtule

$$v = \frac{v_1 + v_4}{2}, \quad (102)$$

což je aritmetická střední hodnota rychlosťí na vstupu a výstupu z kontrolní oblasti a tah

$$F = \frac{\rho}{2} A(v_1^2 - v_4^2). \quad (103)$$

*Poznámka: v praxi bychom počítali s absolutní hodnotou, protože známe směr sily*

$$|F| = \frac{\rho}{2} A(v_4^2 - v_1^2) > 0.$$

## 11.6 Zachování momentu hybnosti - točivosti

U rotačních strojů je výhodnejší pracovat s momenty sil a s momentem hybnosti  $\vec{L}$  nazývaným též točivostí. Moment všech vnějších sil  $\vec{M}$  vztažený k určitému bodu nebo ose se rovná časové změně momentu hybnosti všech částic tekutiny v uvažovaném objemu, vztažených ke stejněmu bodu nebo ose

$$\begin{aligned} \sum \vec{M} &= d\vec{L} / dt \\ \sum (\vec{r} \times \vec{F}) &= \frac{d}{dt} \sum (\vec{r} \times m\vec{v}). \end{aligned} \quad (104)$$

Pro stacionární průtok rotorem turbíny, obr. 80, lze odvodit zvláštní tvar rov. (104). Uvažujme proudové vlákno pohybující se po stěně lopatky (řídce vyšrafováno). Za čas  $dt$  se uvažovaný objem tekutiny v proudovém vlákně posune o elementární dráhu závislou na místní rychlosti  $ds = vdt$ . Tím dojde ke změně momentu hybnosti tekutiny protékající proudovým vláknem k ose rotace, neboť částice jež za čas  $dt$  vstoupí resp. vystoupí z proudového vlákná na vstupu a výstupu z rotoru (viz hustě šrafovane objemy v obr. 80a) mají stejnou hmotnost  $dm = \rho A_1 ds_1 = \rho A_2 ds_2 = \rho A_1 v_1 dt = \rho A_2 v_2 dt = \rho \dot{V} dt$ , ale rozdílné rychlosťi a vzdálenosti od osy rotace. Změna momentu hybnosti je při stacionárním proudění dána rozdílem momentů hybnosti elementárních hmotových částic ve vstupu a výstupu z rotoru (ostatní částice tekutiny nacházející se mezi těmito dvěma částicemi při stacionárním proudění změnu momentu hybnosti neovlivní):

$$dL = dm(c_1 \cos\alpha_1 r_1 - c_2 \cos\alpha_2 r_2) = \rho \dot{V} dt (c_1 \cos\alpha_1 r_1 - c_2 \cos\alpha_2 r_2).$$

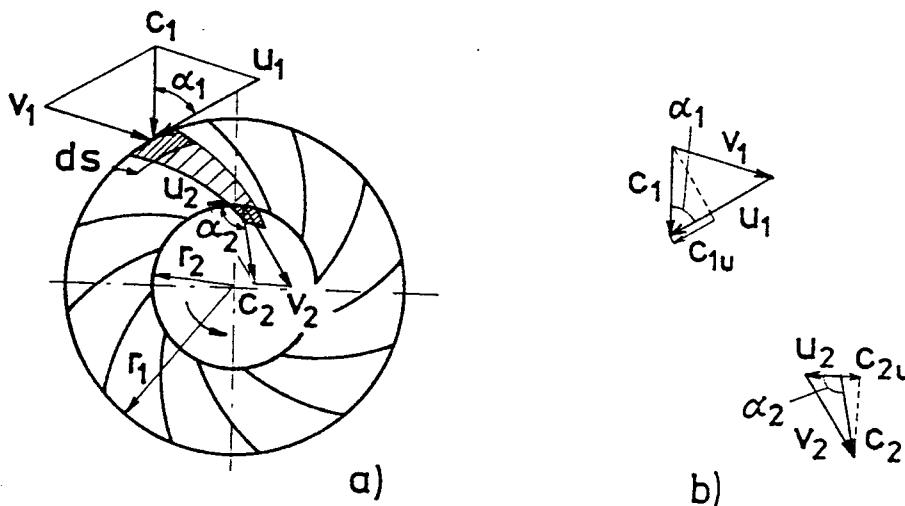
Po dosazení do rov. (104) dostaneme pro moment sil vyvolaný všemi částicemi protékající tekutiny (za předpokladu, že rychlosti ve vstupním a výstupním průřezu jsou rozloženy rovnoměrně, což u čerpadel není splněno)

$$M_r = \rho \dot{V} (c_1 \cos\alpha_1 r_1 - c_2 \cos\alpha_2 r_2).$$

Označíme-li složky absolutních rychlostí do směru obvodových rychlostí  $c_{1u} = c_1 \cos\alpha_1$  a  $c_{2u} = c_2 \cos\alpha_2$ , pak teoretický výkon turbíny lze vyjádřit vzorcem

$$P = M_r \omega = \rho \dot{V} (c_{1u} r_1 - c_{2u} r_2) \omega = \rho \dot{V} (c_{1u} u_1 - c_{2u} u_2)$$

neboť  $u_1 = \omega_1 r_1$  a  $u_2 = \omega_2 r_2$ .



Obr. 80 a) Schéma rotoru turbíny. Proudové vlákno (řídce šrafováné) je kongruentní (stejněho tvaru) s lopatkou.  
b) Rychlostní trojúhelníky ve vstupním a výstupním průřezu..

Měrná práce, tj. práce částice tekutiny o hmotnosti 1 kg

$$w = \frac{P}{\rho \dot{V}} = c_{1u} u_1 - c_{2u} u_2 , \quad (105)$$

což je Eulerova turbínová rovnice.

Zavedeme-li do dříve odvozené Eulerovy turbínové rovnice (kap. 10.3c)

$$w = -\frac{1}{2} (u_2^2 - u_1^2 + c_2^2 - c_1^2 - v_2^2 + v_1^2) ,$$

relativní rychlosti vyjádřené z rychlostních trojúhelníků, obr. 80 pomocí kosinové věty

$$\begin{aligned} v_1^2 &= c_1^2 + u_1^2 - 2u_1 c_1 \cos\alpha_1 = c_1^2 + u_1^2 - 2u_1 c_{1u} \\ v_2^2 &= c_2^2 + u_2^2 - 2u_2 c_2 \cos\alpha_2 = c_2^2 + u_2^2 - 2u_2 c_{2u} \end{aligned}$$

dostaneme opět rov. (105)

## Otázky ke kap. 10 a 11.:

- 1) Při kterých unášivých pohybech je třeba uvažovat i vliv setrvačných sil?
- 2) Čím se liší rovnice pro relativní průtok rotujícím kanálem od Bernoulliovovy rovnice?
- 3) Vysvětlete princip odstředivého čerpadla!
- 4) Odvod'te Eulerovu turbínovou rovnici !
- 5) Popište průtok čerpací stanici - obr. 73 a !
- 6) Popište průtok vodní turbínou (včetně přivaděče a savky) obr. 74a !

- 1) Na čem závisí silový účinek proudu tekutiny dopadajícího na desku ?
- 2) Který vodní zdroj lépe využije vodní energie vodní kolo, nebo vodní turbína ?
- 3) Vysvětlete vznik propulsního účinku tryskového a raketového motoru !

### Víte, že

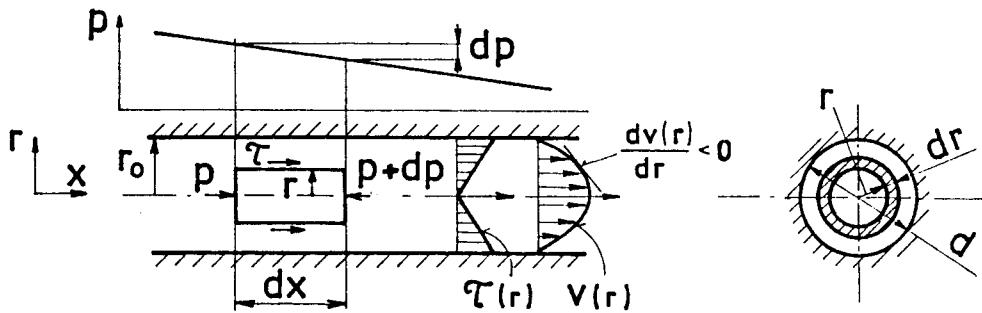
- první parní reakční turbínu - hračku - sestrojil Herón Alexandrijský asi v 1. století př. Kr. Z duté otočně uložené koule vycházela dvěma zahnutými trubičkami pára a roztáčela ji. Herón popsal ve svých spisech i jiné mechanizmy, jako různé pumpy, jeřáby, větrný mlýn. Bývá pokládán za vynálezce ozubeného převodu (podle jiných pramenů se vynález ozubeného soukolí připisuje Archimedovi).
- o prioritu užití lodního šroubu (správněji vrtule) k pohonu plavidel se v minulém století ucházela řada vynálezců. Např. v letech 1819 - 1833 konal pokusy Skot B. H. Wilson. Stejným problémem se již asi od roku 1812 zabýval i chrudimský rodák Josef Ressel (1793 - 1857). Jako lesmistr byl roku 1821 přeložen do Terstu, kde v roce 1829 předváděl zkušební jízdu s parníkem „Civetta“. Byla dlouhá 60 stop, 11 stop široká a 6 stop vysoká. Šroub byl umístěn pod vodou do tzv. vrtulového okna mezi zad plavidla a kormidlo. Parní stroj z rakouských strojíren v Sankt Stephanu, jež neměly s touto výrobou zkušenosť, měl výkon asi šesti kořiských sil (asi 4,5 kW). Rychlosť lodě byla asi šest mořských mil za hodinu (tj. asi 11,1 km/h). Lod' se však zastavila pro poruchu parního stroje, i protože původ páry byl připájen jen měkkou pájkou. Terští policejní ředitelství pak zakázalo v zájmu veřejné bezpečnosti všechny další pokusy. Ressel poslal svoje náčrty třem francouzským podnikatelům Picardovi, Malorovi a Rivierovi, kteří ho pozvali do Paříže a nechali vyrobit a vestavět do lodě šroub. O velikonocích Ressel úspěšně předvedl svůj vynález na Seině, ale protože s těmito podnikateli neměl uzavřenou smlouvu, nedostal žádnou finanční odměnu a zůstal v Paříži v obtížné situaci - bez prostředků. V roce 1836 získal Angličan Francis Pettit Smith patent na lodní šroub a jeho umístění, které už užil Josef Ressel. V roce 1838 postavili spolu John Ericsson a F. P. Smith šroubový parník „Archimedes“, který úspěšně završil dlouhou řadu pokusů, spojených s dalšími jmény jako Samuel Brown (šroub poháněný plynovým motorem), Cummerow, Dallery aj. Odměna 20 tisíc liber šterlinků, kterou anglická vláda vypsalala pro skutečného vynálezce lodního šroubu, byla právě nakonec rozdělena, neboť bylo sporné, kdo je vynálezcem a kdo jen zlepšovatelem. Josef Ressel sice koncem listopadu 1852 vypsal do podrobnosti svůj nárok na odměnu a poslal doporučeně kresby, spisy a zprávy z novin královské admirality v Londýně, ale spisy se ztratily. Zemřel v bídě na tyfus kdesi u Lublaně. Po smrti mu byl ve Vídni postaven pomník, na nějž sám císař věnoval jako první 525 zlatých.
- již asi ve střední době kamenné (8 až 5 tisíc let př. Kr.) si vyráběli k rybolovu lidé čluny vydlabané z kmene stromu a případně vory svázané z rákosí, podle dostupného materiálu na břehu. K pohonu se používala vesla, nebo bidla k odstrkování na mělké vodě. V mladší době kamenné (4.- 3. tisíciletí př. Kr.) se začala rozvíjet doprava po řekách a snad i po mořích. V Mezopotamii se vedle veslic začaly objevovat i plachetnice. Féničané ve Středozemním moři používali plachetnice se čtvercovou plachtou, což umožňovalo plout jen s větrem v zádech. Kolem roku 500 se začaly v Řecku stavět středozemní galéry - námořní lodě s více řadami vesel. Kolem roku 1000 se objevují trojúhelníkové podélné plachty umožňující plout i proti větru (křížování). Vývoj pokračoval až ke štíhlým čtyřstěžňovým clipperům pro rychlou přepravu čaje z Dálného východu. V 18. století bylo lodarství ovlivněno vynálezem parního stroje a hromadnou výrobou železa. Změna od dřevěných trupů k železným a od větru k páře probíhala pomalu. V roce 1807 vykonal Američan Robert Fulton úspěšnou dálkovou plavbu se svým kolesovým parníkem „Clermont“ po řece Hudson z New Yorku do Albany tj. asi 150 mil za 32 hodin. V roce 1858 byl na vodu spuštěn obr-plovoucí město - Great Eastern o délce 207m a výtlaku 27 000 tun pro 4 000 cestujících a 500 členů posádky. Výkon dvou parních strojů byl asi 6 100 kW. Měl 6 stěžňů, něco přes šest set m<sup>2</sup> plachet, pět komínů a kolena. Konstruktéry byli Isambard Kingdom Brunel a John Scott Russel.

## 12. LAMINÁRNÍ PROUDĚNÍ

Až dosud jsme při výpočtu proudění s viskozitou tekutin přímo nepočítali. Dosazovali jsme ji jen do Reynoldsova čísla. Pouze jsme se zmínili, že je přičinou disipace energie, vzniku turbulence a nerovnoměrného rozložení rychlostí v kanálech. Při jednorozměrném proudění jsme však neuvažovali ani tvar rychlostního profilu a počítali jsme se střední rychlosť podle objemu. V dalších kapitolách už nebudeme uvažovat jednorozměrné proudění, což nám umožní stanovit více informací o proudící tekutině, např. tvar rychlostního profilu atd. Uvažujme nejprve případy jednodušší, tj. případy laminárního proudění.

### 12.1 Trubice kruhového průřezu

Uvažujme stacionární laminární proudění (paralelní proudnice) trubicí kruhového průřezu o poloměru  $r_0$ , obr. 81.



Obr. 81 Laminární proudění trubicí kruhového průřezu.

Uvažujme částici tekutiny - váleček o poloměru  $r$  a délce  $dx$  v dostatečné vzdálenosti od vstupního a výstupního průřezu, aby byl splněn předpoklad, že tlakový spád je konstantní a rychlosť  $v$  závisí pouze na poloměru  $r$ . Stanovíme nyní postupně řadu veličin charakteristických pro toto proudění.

#### Rozložení tečného napětí:

Při stacionárním pohybu musí být síly působící na vytknutou částici tekutiny ve směru proudění v rovnováze. Abychom zdůraznili, že rychlosť i tečné napětí nejsou konstantní, nýbrž jsou závislé na souřadnici - poloměru  $r$  - budeme je v dalších rovnicích označovat  $v(r)$  a  $\tau(r)$ , zatímco tlak  $p$  je v určitém průřezu ( $x = \text{konst.}$ ) v celém průřezu stejný, nezávislý na poloměru  $r$ :

$$\tau(r)2\pi rdx = dp\pi r^2 ,$$

$$\tau(r) = \frac{dp}{dx} \frac{r}{2} ,$$

což je lineární závislost, obr. 81.

Protože tlak ve směru proudění (tj. ve směru  $x$ ) klesá  $dp/dx < 0$  vychází  $\tau < 0$  tj. skutečný smysl je opačný, než jsme zvolili v obr. 81. Zavedeme veličinu nazývanou tlakový spád  $i$  jako kladné číslo  $i > 0$

$$i = -\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{l} = -\frac{p_2 - p_1}{l} = \text{konst.},$$

pak

$$\tau(r) = -\frac{i}{2}r . \quad (106)$$

To je rovnice přímky. V ose potrubí, kde  $r = 0$  je tečné napětí rovno nule a maximální tečné napětí je na stěně

$$\tau(r_0) = -\frac{i}{2}r_0 = \frac{P_1 - P_2}{2l}r_0 .$$

### Rychlostní profil:

Pro newtonské kapaliny lze tečné napětí vyjádřit rovnicí (3) (viz kap. 2.3 a) Fyzikální vlastnosti tekutin), v níž musíme zavést souřadnici  $r$  místo  $y$ :

$$\tau(r) = \eta \frac{dv(r)}{dr} . \quad (3)$$

Protože reálná tekutina lpí na stěnách, obr. 81, je  $dv(r)/dr < 0$  a pro  $\eta > 0$  je  $\tau(r) < 0$  jako v rov. (106). Po dosazení do rov. (106) a separaci proměnných

$$dv(r) = -\frac{i}{2\eta} r dr$$

$$v(r) = -\frac{i}{4\eta} r^2 + K ,$$

tj. rovnice rotačního paraboloidu. Integrační konstantu určíme z okrajové podmínky na stěně:

Pro  $r = r_0$ ,  $v(r) = 0$ ,

$$K = \frac{ir_0^2}{4\eta} .$$

Rovnice rychlostního profilu

$$v(r) = \frac{i}{4\eta} (r_0^2 - r^2) \quad (107)$$

pro  $r = 0$  dostáváme maximální rychlosť v ose potrubí

$$v_{\max} = \frac{ir_0^2}{4\eta} . \quad (108)$$

### Průtok:

Objemový průtok je množství tekutiny, jež proteče každým průřezem za jednotku času a je roven součinu střední objemové rychlosti a průřezu. Protože zde je rychlosť funkcií poloměru  $r$  musíme průřez rozdělit na elementární plošky  $dA$ , stanovit v nich lokální rychlosť  $v(r)$  a jejich součin nám dá elementární místní průtoky, jež musíme sečist po celém průřezu

$$\dot{V} = \iint_A v(r) dA = \int_0^{r_0} \frac{i}{4\eta} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\pi i}{2\eta} \int_0^{r_0} (r_0^2 r - r^3) dr$$

$$\dot{V} = \frac{\pi i}{8\eta} r_0^4 = \frac{\pi i}{128\eta} d^4 , \quad (109)$$

kde  $dA = 2\pi r dr$  a  $d = 2r_0$ . To je tzv. Hagenův - Poiseuilleův zákon. Vidíme, že průtok je přímoúměrný tlakovému spádu  $i$  a čtvrté mocnině průměru  $d$  a nepřímoúměrný viskozitě.

Střední objemová rychlosť  $v$ , s níž jsme počítali při jednorozměrném proudění v rov. Bernoulliově a v rov. kontinuity:

$$v = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\pi i}{8\eta} r_0^4 \frac{1}{\pi r_0^2}$$

$$v = \frac{ir_0^2}{8\eta} = \frac{id^2}{32\eta} = \frac{v_{\max}}{2} . \quad (110)$$

To znamená, že střední rychlosť je rovna polovině rychlosti maximální.

Součinitel třecích ztrát  $\lambda$ :

Tlaková ztráta způsobená třením se vypočítá z Weisbachova vztahu (59)

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{v^2}{2},$$

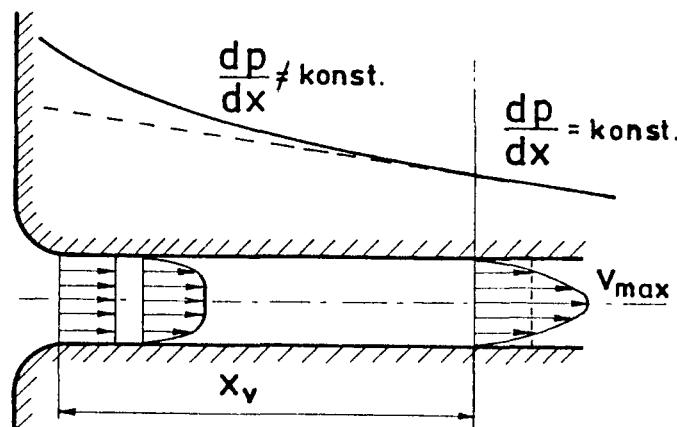
do něhož dosadíme  $|\Delta p| = il$  a za rychlosť z rov. (110) pak

$$il = \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{v}{2} \left( \frac{id^2}{32\eta} \right)$$

odkud

$$\lambda = \frac{64\eta}{vd\rho} = \frac{64\eta}{vd} = \frac{64}{Re}. \quad (111)$$

Při vyvinutém stacionárném izotermním laminárním proudění je součinitel třecích ztrát  $\lambda$  nepřímo úměrný první mocnině Reynoldsova čísla. Tento vztah nelze použít pro krátká potrubí, neboť v blízkosti vstupního průřezu se parabolický rychlostní profil teprve vyvíjí, proudnice nejsou paralelní přímky a tlakový spád není konstantní, obr. 82.



Obr. 82 Vývoj rychlostního profilu za vstupním průřezem potrubí. Tlakový spád zde není konstantní a je větší než u stabilizovaného proudění.

Délka potřebná k vývinu rychlostního profilu je podle různých autorů  $x_v = (0,03 \div 0,065) Re.d$ . U kratších potrubí je  $\lambda > 64/Re$ .

## 12.2 Paralelní desky

Stejným způsobem a za stejných předpokladů jako u předchozího případu budeme postupovat i nyní. Mezi dvěma paralelními deskami je vazká tekutina, obr. 83, která v případě a) je uvedena do pohybu tlakovým spádem ve směru osy  $x$  a obě desky jsou v klidu. V případě b) je tlak konstantní, ale horní deska se pohybuje rychlosť  $v_h$ . Protože diferenciální rovnice popisující toto proudění jsou lineární, lze tyto případy superponovat.

Při stacionárném proudění budou síly působící na vytknutou částici tekutiny (uvažujme jednotkovou šířku ve směru  $z$ ) v rovnováze.

$$\begin{aligned} [p - (p + dp)] dy \cdot 1 + [(\tau(y) + d\tau(y))] dx \cdot 1 - \tau(y) dx \cdot 1 &= 0 \\ \frac{dp}{dx} = \frac{d\tau(y)}{dy} & \\ d\tau(y) = \frac{dp}{dx} dy = -idy &. \end{aligned} \quad (112)$$

Po integraci

$$\tau(y) = -iy + \tau_0,$$

tj. opět lineární závislost, kde  $\tau_0$  je tečné napětí na pevné dolní stěně ( $y = 0$ ). Dosazením za  $\tau$  z Newtonova zákona dostaneme

$$dv(y) = -\frac{i}{\eta} y dy + \frac{\tau_0}{\eta} dy$$

a po integraci s okrajovou podmínkou  $v(y) = 0$  pro  $y = 0$

$$v(y) = -\frac{i}{2\eta} y^2 + \frac{\tau_0}{\eta} y . \quad (113)$$

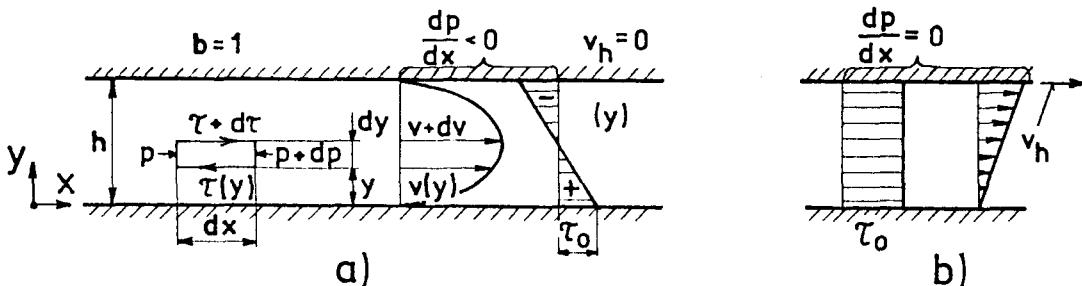
Zatím neznámé  $\tau_0$  určíme z podmínky, že rychlosť horní desky pro  $y = h$  je rovna  $v(h) = v_h$

$$\tau_0 = \eta \left( \frac{v_h}{h} + \frac{i}{2\eta} h \right) ,$$

což po dosazení do rov. (113)

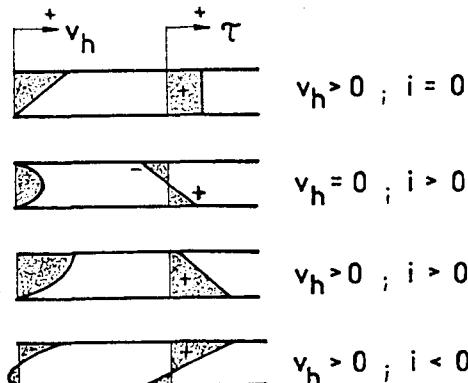
$$v(y) = \frac{i}{2\eta} (hy - y^2) + v_h \frac{y}{h} . \quad (114)$$

Je-li rychlosť  $v_h = 0$  je rychlostní profil parabola, tj. případ na obr. 83a. Je-li  $dp/dx = 0$  je rychlostní profil přímka, obr. 83b.



Obr. 83 Laminární proudění mezi paralelními deskami způsobené  
a) tlakovým spádem,  
b) pohybem horní desky.

Různou volbou velikosti a směru tlakového spádu  $i$  a rychlosťi  $v_h$  lze dostat různé tvary rychlostních profilů, obr. 84.

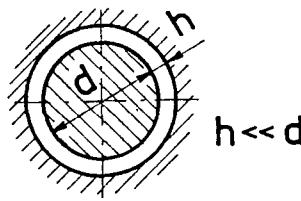


Obr. 84 Různé tvary průběhu rychlosťí a tečného napětí mezi deskami v závislosti na velikosti a směru rychlosťi horní desky a tlakového spádu.

Objemový tok ( $b =$  šířka)

$$\dot{V} = b \int_0^h v(y) dy = \frac{ih^3 b}{12\eta} + \frac{v_h hb}{2} . \quad (115)$$

Odvozené výrazy se často používají pro výpočet průtoku mezerou ve tvaru mezikruží, jež vzniká např. mezi stěnou pístu a válce, přičemž  $h$  je výška spáry a  $b = \pi d l$ , obr. 85.



Obr. 85 Kanál ve tvaru mezikruží.

### 12.3 Stékání po stěně

Uvažujme, že tenký film vazké kapaliny stéká stacionárně po svislé stěně a předpokládejme, že rychlostní profil je už vyvinutý, obr. 86. Tlak uvnitř filmu kapaliny bude všude stejný a bude roven atmosférickému tlaku, resp. tlaku okolí  $p_0$ . Výsledná tlaková síla na vytknutou částici tekutiny bude tedy rovna nule. Při výpočtu rovnováhy sil budeme uvažovat tíhu a třecí síly:

$$dG + [(\tau(y) + d\tau(y))]b dx - \tau(y)b dx = 0,$$

kde tíha  $dG = g\rho b dx dy$ . Pak

$$d\tau(y) = -g\rho dy. \quad (116)$$

Z Newtonova zákona dostaneme

$$d\tau(y) = \eta \frac{d^2 v(y)}{dy^2} dy. \quad (117)$$

Dosazením rov. (117) do (116) a dvojí integrací dostaneme

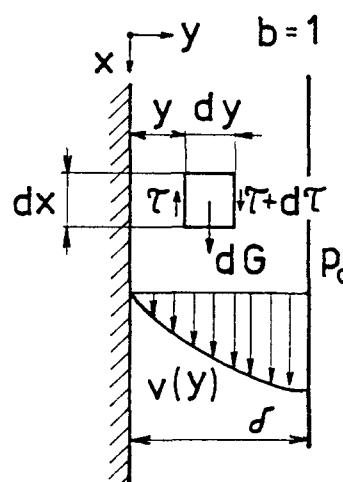
$$v(y) = -\frac{g}{2\rho} y^2 + K_1 y + K_2.$$

Integrační konstanty stanovíme z okrajových podmínek: Na stěně  $y = 0$  je  $v(y) = 0$  a tedy  $K_2 = 0$ . Na hladině, kde  $y = \delta$  je tečné napětí prakticky nulové (dynamická viskozita vzduchu je velmi malá) a tedy  $dv(y)/dy = 0$  odtud  $K_1 = g\delta/\rho$ . Rychlostní profil je opět parabolický

$$v(y) = \frac{g}{\rho} (\delta y - \frac{y^2}{2}). \quad (118)$$

Objemový průtok

$$\dot{V} = b \int_0^\delta v(y) dy = \frac{gb}{\rho} \int_0^\delta (\delta y - \frac{y^2}{2}) dy = \frac{gb\delta^3}{3\rho}. \quad (119)$$



Obr. 86 Stékání filmu vazké kapaliny po svislé stěně.

## 12.4 Klínová mezera

V předchozích příkladech jsme ukázali vliv viskozity na rychlostní pole a na disipaci energie, způsobené tangenciálními silami - viskozitou. Pro praxi velmi důležitý případ je vznik síly kolmé ke směru proudění v zužující se mezeře, obr. 87. Uvažujme rovinné proudění ( $v_z = 0$ ), šířka  $b = 1$ . Z rovnováhy sil působících při stacionárném proudění na elementární částici, obr. 87, dostaneme jako u paralelních desek

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{d\tau(y)}{dy} . \quad \text{tj. rov. (112)}$$

Dosadime za  $d\tau$  z rov. (117). Za předpokladu, že úhel  $\alpha \approx (h_1 - h_2)/L$  je malý a výška mezery  $h_1 < L$  bude tlak  $p$  závislý jen na souřadnici  $x$  a nezávislý na  $y$  (místo parciální derivace lze psát  $dp/dx$  a dostaváme obyčejnou diferenciální rovnici pro rozložení tlaku  $p$ ). Rychlostní profily pak budou parabolické, jako u paralelních desek a dostaneme je dvojí integrací rovnice

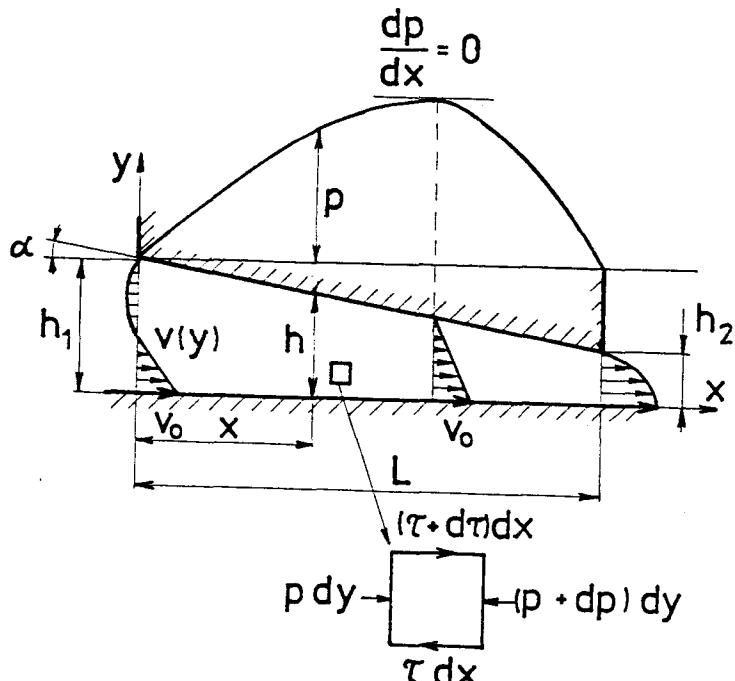
$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \eta \frac{d^2 v(y)}{dy^2} ; \\ \frac{dp}{dx} \int dy &= \eta \int \frac{d^2 v(y)}{dy^2} dy + K_1 , \end{aligned}$$

(při integraci po průřezu je  $dp/dx$  považováno za konstantní) a po druhé integraci

$$\frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} = \eta v(y) + K_1 y + K_2 .$$

Integrační konstanty stanovíme z okrajových podmínek  $v(h) = 0$  pro  $y=h$  a  $v(0) = v_0$  pro  $y=0$ . Pak

$$v(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) + v_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right) . \quad (120)$$



Obr. 87 Průtok klínovou mezou.

Vznik vztaku v patném ložisku.

Objemový tok  $\dot{V}$  musí být ve všech průřezech stejný, (nezávisle na odlehlosti  $x$ )

$$\dot{V} = \int_0^h v(y) dy = \frac{v_0 h}{2} - \frac{dp}{dx} \frac{h^3}{12\eta} . \quad (121)$$

Z této rovnice lze vypočítat zatím neznámý tlakový spád, který je funkcí  $x$ , proto dosadíme  $h = h_1 - \alpha x$ : (122)

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\eta v_0}{(h_1 - \alpha x)^2} - \frac{12\eta \dot{V}}{(h_1 - \alpha x)^3},$$

po integraci

$$p = \int \frac{dp}{dx} dx = \frac{6\eta v_0}{\alpha(h_1 - \alpha x)} - \frac{6\eta \dot{V}}{\alpha(h_1 - \alpha x)^2} + C.$$

V této rovnici neznáme průtok  $\dot{V}$  a integrační konstantu  $C$ . Protože ve vstupním a výstupním průřezu musí být stejné tlaky např. rovny nule, určíme  $\dot{V}$  a  $C$  pomocí podmínek  $p = 0$  pro  $x = 0$  a  $p = 0$  pro  $x = L$ :

$$\dot{V} = v_0 \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}, \quad C = \frac{-6\eta v_0}{\alpha(h_1 + h_2)}, \quad \text{kde } h_2 = h_1 - \alpha L,$$

pak

$$p = \frac{6\eta v_0}{h_1 + h_2} \frac{x(h - h_2)}{h^2}. \quad (123)$$

Mezi  $x = 0$  a  $x = L$  nabývá  $p$  kladných hodnot pro  $h > h_2$ , viz obr. 87. Dosadíme-li za  $h$  z rov. (122) do rov. (123) lze vypočítat vztah:

$$F_y = \int_0^L p dx = \frac{6\eta v_0 L^2}{(h_1 - h_2)^2} \left( \ln \frac{h_1}{h_2} - 2 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right). \quad (124)$$

*Poznámka: pro řešení složitějších případů proudění vazké tekutiny je nutno použít tzv. Navierovy-Stokesovy rovnice, viz kap. 17, a rovnice kontinuity. Jedná se o soustavu parciálních nelineárních diferenciálních rovnic, jejichž analytické řešení je velmi obtížné.*

Otázky ke kapitole 12.:

- 1) Jaká je vazba mezi průběhem tečného napětí a rychlostního profilu při laminárním proudění?
- 2) Co je to Hagenův-Poiseuillův zákon?
- 3) Jak lze pomocí kapilárních viskozimetrů určit dynamickou viskozitu a jakou korekci musíme přitom uvažovat?
- 4) Jaký je rozdíl ve tvaru rychlostního profilu mezi dvěma deskami, a) je-li pohyb tekutiny vyvolán pouze unášivým pohybem jedné desky při nulovém tlakovém spádu b) nebo je-li pohyb způsoben tlakovým spádem a obě desky jsou v klidu?
- 5) Jaké je rozložení tlaku v tekutině, která stéká v tenké vrstvě po svislé stěně?

**Víte, že**

vltavskou kaskádu tvoří 7 přehrad a to:

Místo přehrady	Spád m	Hltnost m <sup>3</sup> /s	Turbíny počet, druh	Celkový výkon MW	Rok výstavby	Zařazení přehrady
1) Lipno I	162	2x46	2 Francis.	120	1959	špičková
2) Lipno II	9,6	20	1 Kaplan.	1,6	1957	průtočná
3) Orlík	69,1	4x150	4 Kaplan.	364	1961	špičková
4) Kamýk	15,50	4x90	4 Kaplan.	40	1960	pološpičková
5) Slapy	56	3x100	3 Kaplan.	144	1954	špičková
6) Štěchovice 1	20	2x75	2 Kaplan.	22,5	1943	pološpičková
Štěchovice 2	220	2x12,5	2 Francis.	42	1946	špičk. přečerp.
7) Vrané	11	2x75	2 Kaplan.	12,5	1936	průtočná

## 13. TURBULENTNÍ PROUDĚNÍ

### 13.1 Vznik turbulence

Již v polovině minulého století Reynolds zjistil, že se tekutina může pohybovat dvěma kvalitativně zcela odlišnými typy proudění, které pak byly nazvány laminární a turbulentní. Rozhraní mezi oběma druhy proudění nám udává Reynoldsovo kritické číslo, s nímž jsme se seznámili v kap. 8. Jeho hodnota je závislá na řadě parametrů jako např. na geometrii proudu, tlakovém spádu atd. Pro potrubí kruhového průřezu je spodní mez asi 2 000. Pro ustálené laminární proudění je charakteristické, že se částice tekutiny pohybují po paralelních drahách, jednotlivé vrstvy se navzájem nemísí (neuvážujeme molekulární difuzi). Laminární proud vytékající z vodovodu má hladký povrch jako skleněná tyč. Pro turbulentní proudění jsou typické pulsace všech veličin jako např. rychlosti. Trajektorie částic tekutiny jsou nepravidelné, dochází k intenzivnímu promíchávání celého objemu proudící tekutiny. Povrch turbulentního proudu vody vytékajícího z vodovodu je proto nepravidelný, „drsný“ a proud je neprůhledný. Okamžité hodnoty veličin jako např. rychlosti neustále kolisají kolem střední hodnoty. Pro technické výpočty v praxi jsou většinou důležité střední hodnoty zjištěné za dostatečně dlouhý časový interval jako např. rychlostní profil - tj. závislost střední rychlosti na vzdálenosti od stěny potrubí - pro výpočet průtoku. Odchylky okamžitých hodnot od středních můžeme rozdělit na periodické a nahodilé, které nazýváme fluktuace. Např. fluktuace rychlosti při vyvinutém turbulentním proudění v potrubí dosahuje asi 10 % střední rychlosti.

Přechod laminárního proudění do turbulentního je ještě neuzavřený problém. Za příčinu vzniku turbulentního proudění se považuje nestabilita laminárního proudění při vyšších Reynoldsových číslech. Je-li Reynoldsovo číslo proudu  $Re$  větší než  $Re$  kritické neznamená to však ještě, že by laminární proudění nemohlo existovat, ale je nestabilní a i malé poruchy proudění, vznikající např. ve vstupním průřezu téměř neustále, mohou být příčinou „zhroucení“ laminárního proudu (analogický jev je štíhlá tyč namáhaná na vzpěr) neboť tyto odchylky od střední hodnoty exponenciálně narůstají. Je-li Reynoldsovo číslo menší než  $Re$  kritické jsou tyto poruchy viskozitou tekutiny utlumeny.

Při postupném zvyšování Reynoldsova čísla, např. zvyšováním rychlosti proudění v potrubí, nedochází zpravidla ke změně proudění náhle - skokem, nýbrž v určitém, i když relativně malém intervalu Reynoldsových čísel - v potrubí kruhového průřezu asi od 2 000 do 4 000. Při určitých hodnotách Reynoldsova čísla se v potrubí objevují zprvu krátké úseky turbulentního proudu vystřídané delšími úseky laminárního proudění (turbulentní zátky). Tento typ proudění se nazývá intermitentní proudění. S rostoucím  $Re$  jsou úseky turbulentního proudu stále delší a laminárního kratší až postupně laminární úseky zcela zmizí. Při průtoku potrubím se čelo turbulentní zátky pohybuje rychleji než její týl a zátna se s rostoucí vzdáleností od vstupního průřezu stále více prodlužuje až se v dostatečné vzdálenosti od vstupu do potrubí objevuje jen turbulentní proudění i když se Reynoldsovo číslo proudění nemění.

S laminárním a turbulentním prouděním se setkáme nejen při průtoku tekutin potrubím, tj. při vnitřních úlohách mechaniky tekutin, nýbrž i při obtékání těles tj. při vnějších úlohách mechaniky tekutin, viz kap. 14.

### 13.2 Charakteristiky turbulentního proudění

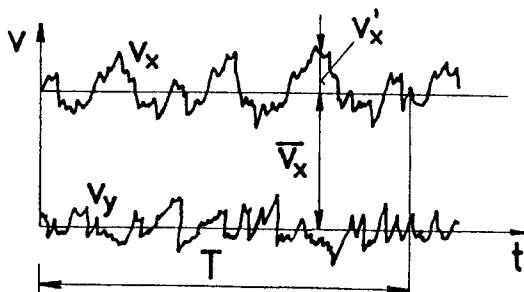
Slovo turbulence znamená zmatek, nepokoj, neukázněnost, nepravidelnost, nahodilost, divokost, bouřlivost. Zatím není jednotná definice turbulentního proudění, v jednotlivých

definicích se zdůrazňují zpravidla jen některé znaky. Turbulentní proudění je trojrozměrný, časově proměnný pohyb tekutiny, při němž každá veličina např. rychlosť, tlak, hustota, teplota ap. (pokud není z některých důvodů konstantní) se mění více méně nahodile. Někteří badatelé označují turbulenci za „stav kontinuální nestability“. Vždy, kdy dojde ke změně v důsledku nestability je naše možnost předem určit detaity proudění snížena. Náhodné (chaotické, stochastické) rysy turbulentního proudění jsou dominantní. Nelze však ani definovat turbulentní proudění za „zcela nahodilé“, jednak i turbulentní proudění je popisováno základními rovnicemi pro prostorové proudění, viz kap. 17, jednak turbulentní proudění obsahuje uspořádané skupiny vírů zvané „koherentní struktury“. K témuž poznatkům se dospělo během posledních několika desítek let, díky stále se zdokonalujícím experimentálním metodám. Vyvstává nyní otázka zda je nahodilost fluktuací postačující k tomu, aby turbulentní proudění bylo popisováno statistickými metodami nebo zda lze najít jiné vhodnější metody. V praxi se mohou vyskytnout proudění u kterých budeme na rozpacích zda je zařadit do kategorie turbulentního nebo neturbulentního proudění. Periodická proudění (např. vlny na vodní hladině) se nepovažují za turbulentní proudění.

Pro turbulentní proudění jsou, stručně shrnuto, charakteristické:

- 1) Fluktuace rychlosti, tlaku a případně dalších veličin.
- 2) Víry o různých velikostech, od největších s rozměry srovnatelnými s velikostí proudu tekutiny jako např. poloměrem potrubí, jež se deformují, promichávají a rozpadají až po nejmenší o průměru setin mm, jež jsou silně tlumeny viskozitou tekutiny a kinetická energie se přeměňuje ve vnitřní tepelnou energii.
- 3) Nahodilost (stochastičnost, chaotičnost) změn je dominantní i když i ve vyvinutém turbulentním proudění bylo prokázáno že existují uspořádané skupiny vírových struktur, vyznačující se náhodnými fluktuacemi fázového posunu.
- 4) Samobuzení. Jednou vzniklé turbulentní proudění se dále udržuje samo tím, že vytváří nové víry, které nahrazují víry jež jsou vlivem viskozity disipovány.
- 5) Promichávání (difuzivita) je mnohem intenzivnější než při laminárním proudění (směšování způsobené pohybem molekul), neboť turbulentní směšování je způsobeno velkými víry, pohybujícími se ve všech třech směrech na mnohem větší vzdálenosti než je střední volná dráha molekul.

Pro měření časově proměnných veličin bylo třeba vyvinout speciální přístroje s malou setrvačností, neboť spektrum fluktuací se pohybuje od 1 do 100 kHz. Např. pro měření okamžitých rychlostí resp. složek nelze užít Prandtlou trubici (měří střední hodnotu), nýbrž termoanemometr se žhaveným drátkem, nebo laserový anemometr. Tyto přístroje převádějí rychlosť na elektricky měřitelné veličiny. Na osciloskopu pak získáme např. záznam okamžitých hodnot složek rychlosť ve směru  $x$  a  $y$  v určitém místě jako funkci času, obr. 88.



Obr. 88

Průběh  $v_x$  a  $v_y$  považujeme za náhodný a můžeme ho charakterisovat těmito veličinami:

a) Střední hodnotou  $\bar{v}_x$  resp.  $\bar{v}_y$  za čas  $T$  např.

$$\bar{v}_x = \frac{1}{T} \int_0^T v_x dt . \quad (125)$$

Okamžitou hodnotu  $v_x$  lze pak vyjádřit jako součet hodnoty střední  $\bar{v}_x$  a fluktuační  $v'_x$  (nyní považujeme periodickou složku rovnu nule)

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x . \quad (126)$$

Z rovnice (125) plyne, že střední hodnota střední hodnoty je rovna střední hodnotě  $\bar{v}_x = \bar{v}_x$  a pak střední hodnota fluktuací je rovna nule

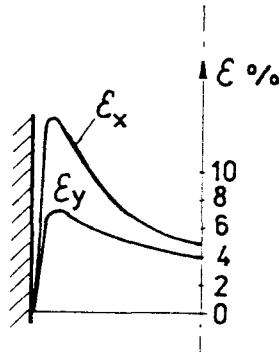
$$\bar{v}'_x = \frac{1}{T} \int_0^T v'_x dt = 0 \quad (127)$$

neboť  $v' = v_x - \bar{v}_x$  a po dosazení do rov. (127) dostaneme dva integrály a po integraci  $\bar{v}'_x = \bar{v}_x - \bar{v}_x = 0$ .

b) Intenzita turbulence charakterizuje relativní velikost amplitud fluktuací rychlosti vzhledem ke střední hodnotě rychlosti např. pro směr  $x$

$$\epsilon_x = \frac{\sqrt{v'^2_x}}{\bar{v}_x} . \quad (128)$$

Intenzita turbulence při vyvinutém proudění v potrubí kruhového průřezu je závislá na směru - podélné fluktuace jsou větší než příčné, v ose mají minimum, maximum je v těsné blízkosti stěny a na stěně jsou rovny nule.



Obr. 89 Rozložení intenzity turbulence v potrubí,  
x-ová složka je podélná - axiální,  
y-ová složka je radiální.

Intenzita turbulence je definována stejně jako variační koeficient v matematické statistice.

c) Korelace je stupeň statistické závislosti veličin. U stochastických jevů není jednoznačná závislost mezi dvěma nebo více veličinami, jako je tomu u deterministických závislostí, což se projevuje jako v detailech odlišné výsledky opakovaných experimentů. Existuje však určitá pravděpodobnost, že hodnotě jedné veličiny odpovídá určitá hodnota druhé veličiny. Tato závislost může být těsná nebo volná, případně žádná. Stupeň závislosti udává korelační součinitel. Z průběhu korelačních součinitelů lze pak určit různá měřítka turbulence. Např. délkové makroměřítko charakterizuje efektivní rozměr virů atd.

### 13.3 Matematický popis turbulentního proudění

Pokud uznáváme, že rovnice kontinuity a Navierovy - Stokesovy rovnice, viz kap. 17, lze aplikovat i na turbulentní proudění je možné je řešit pomocí počítačů. V současné době ani v dohledné budoucnosti však nebudou k disposici tak výkonné počítače, aby v rozumné době

provedly řešení tak komplikované úlohy jakou je turbulentní proudění. Emmons v roce 1970 uvedl, že výpočet jemných detailů turbulentního proudění v potrubí by si vyžádalo při použití dnešních superpočítačů nejméně stovky, ale spíše tisíce let.

Při řešení turbulence se postupovalo dvěma směry:

1) Statistické teorie. Přenosové jevy v turbulentním proudu mají dominantní náhodný charakter a bylo přirozené použít k jejich popisu aparát matematické statistiky. Již v minulém století Reynolds upravil Navierovy - Stokesovy rovnice pro turbulentní proudění tak, že nahradil okamžité hodnoty veličin jejich středními hodnotami a fluktuačními. Dostal tak tři nové rovnice, nazývané po něm Reynoldsovy rovnice, se šesti novými neznámými typu

$$\tau_{ij} = \rho \left| \overline{(v'_i v'_j)} \right|, \quad (129)$$

kde indexy  $i$  a  $j$  postupně nahradíme symboly pro souřadné osy  $x, y, z$ . Výraz  $\overline{(v'_i v'_j)}$  je střední hodnota součinu fluktuačních složek rychlostí. Pravé strany rovnice (129) mají rozdíl napětí a nazývají se Reynoldsova (zdánlivá) turbulentní napětí. Protože nyní počet neznámých převyšuje počet rovnic není soustava rovnic uzavřená a hledají se stále nové možnosti uzavření soustavy. Tímto směrem se zde nebudeme více zabývat.

2) Semiempirické modelování středních turbulentních veličin. Tento směr se soustředí na stanovení veličin jež mají význam pro inženýrskou praxi jako např. pole středních rychlostí, tečná napětí ap. První pokus řešení turbulentního proudění předložil Boussinesq (1877), který zavedl zdánlivou (vírovou) viskozitu  $A$ , jež je analogií dynamické viskozity tekutiny. Na rozdíl od ní není zdánlivá viskozita látkovou vlastností, nýbrž je funkcí souřadnic a je závislá na geometrii a dalších charakteristikách proudového pole. Pro rovinaté turbulentní proudění lze pak zdánlivé tečné napětí vyjádřit rovnicí

$$\tau_t = A \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (130)$$

a výsledné tečné napětí v turbulentním proudu bude rovno součtu

$$\tau = (\eta + A) \frac{d\bar{v}_x}{dy}. \quad (131)$$

Ve své době měl velký význam model přenosu hybnosti (Prandtl, 1925), vycházející z analogie s kinetickou teorií plynů. Analogií střední volné dráhy molekul byla tzv. směšovací délka, kterou bylo nutno určit experimentálně. I tato veličina byla funkcií souřadnic resp. geometrie proudového pole. Fluktuace rychlostí resp. zdánlivé tečné napětí bylo úměrné součinu směšovací délky a místního gradientu střední rychlosti. I přes velmi hrubé předpoklady byl získán významný a dodnes uznávaný výsledek - logaritmický rychlostní profil, obr. 90 a obr. 91:

$$\bar{v}_x = \frac{v_*}{\kappa} \ln y + K_1, \quad (132)$$

kde  $v_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$  = konstantě pro daný případ proudění.  $\tau_0$  je tečné napětí na stěně,  $\rho$  je hustota tekutiny. Druhá odmocnina z podílu těchto dvou veličin má rozdíl rychlosti a nazývá se třecí rychlosť  $v_*$ .  $y$  je odlehlosť od stěny potrubí,  $\kappa$  je tzv. Kármánova konstanta jejíž hodnota se pohybuje kolem 0,4 a  $K_1$  je integrační konstanta. Tento tzv. logaritmický zákon neplatí v blízkosti stěny, neboť na stěně, pro  $y = 0$ , dává nekonečně velikou rychlosť. Ani integrační konstantu nemůžeme stanovit jako obvykle z podmínky, že na stěně tekutina leží a rychlosť je nulová. Prandtl a Kármán proto rozdělili turbulentní proud v blízkosti stěny na tři oblasti, obr. 90

vazkou podvrstvou, v těsné blízkosti hladké stěny, kde převažuje viskózní tečné napětí nad zdánlivým turbulentním napětím, neboť příčné složky fluktuačních rychlostí jsou stěnou tlumeny. Tato vrstva byla původně nazývána laminární podvrstvou, ale experimenty bylo prokázáno, že se v ní vyskytuje fluktuační rychlosť. Tato vrstva je velmi tenká, zlomky milimetru, ale má velký význam při přestupu tepla. Rychlostní profil je přímkový; turbulentní jádro proudu, v určité vzdálenosti od stěny už tečné napětí způsobené viskozitou tekutiny je zanedbatelně malé ve srovnání se zdánlivým turbulentním napětím. V této oblasti platí logaritmický zákon v této formě zvaný zákon stěny; přechodová vrstva je ta část proudu, kde obě tečná napětí způsobená viskozitou nebo turbulentním směšovacím pohybem jsou řádově stejně veliká a rychlosť plynule přechází z přímkového na logaritmický zákon.

Na základě experimentů provedených v hladkých trubicích byly stanoveny i neznámé konstanty v logaritmickém zákoně:

$$\frac{\bar{v}_x}{v_*} = 5,75 \log \frac{v_* y}{v} + 5,5 . \quad (133)$$

V literatuře zabývající se turbulencí se zavádí bezrozměrná rychlosť

$$v^+ = \frac{\bar{v}_x}{v_*} \quad (134)$$

a bezrozměrná odlehlosť od stěny

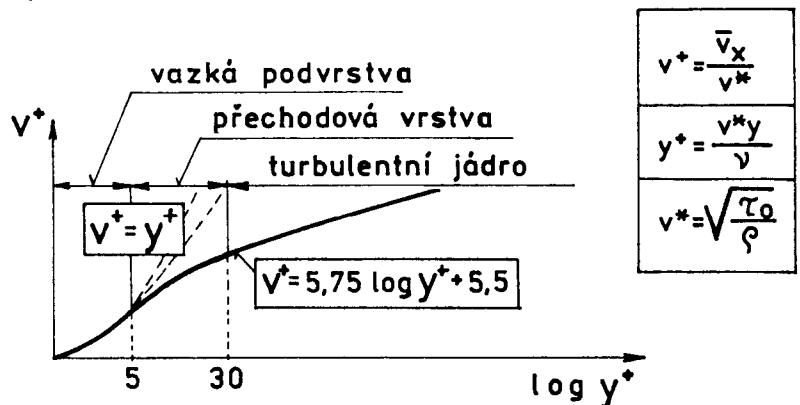
$$y^+ = \frac{v_* y}{v} . \quad (135)$$

Logaritmický zákon má pak tvar

$$v^+ = 5,75 \log y^+ + 5,5$$

a je znázorněn v semilogaritmických souřadnicích na obr. 90.

Obr. 90 Turbulentní rychlostní profil.  
U stěny (malé odlehlosť  $y^+$ ) tj. v přechodové vrstvě a vazké podvrstvě logaritmický zákon neplatí.  
Poznámka:  $y^+$  je vynášeno v logaritmické stupnici a proto je oblast u stěny roztažena.



Jestliže integrační konstantu  $K_1$  v rovnici (132) určíme z podmínky pro osu trubice pro niž je odlehlosť od stěny rovna poloměru trubice  $y = r_0$  a rychlosť je zde rovna maximální rychlosći  $\bar{v}_x = \bar{v}_{\max}$  dostaneme po úpravě rovnici pro tzv. deficit rychlosť (také defekt rychlosť)  $\bar{v}_{\max} - \bar{v}_x$  což je úbytek rychlosť vzhledem k rychlosći v ose:

$$\frac{\bar{v}_{\max} - \bar{v}_x}{v_*} = 5,75 \log \frac{r_0}{y} . \quad (136)$$

Z rovnice vidíme, že deficit rychlosť nezávisí na drsnosti, což bylo potvrzeno i experimentálně.

Známe-li rovnici rychlostního profilu středních rychlosťí  $\bar{v}(r)$  a dokážeme-li integraci po průřezu stanovit objemový průtok  $\dot{V}$ , střední objemovou rychlosť po průřezu  $v = \dot{V} / A$  a poměr maximální rychlosť na ose průřezu ku střední objemové rychlosći  $v$ , tj.

rychlost, kterou jsme dosazovali do rovnice kontinuity a do Bernoulliovy rovnice a stejně jako dříve ji budeme označovat prostým písmenem  $v$ , pak můžeme teoreticky odvodit i součinitel třecích ztrát při turbulentním proudění. Z podmínky rovnováhy psané pro elementární částici tekutiny ve tvaru válečku o průměru rovném průměru potrubí  $d$  a délce  $dx$

$$\tau_0 \pi d dx = dp \frac{\pi d^2}{4}$$

(odkud můžeme vypočítat i třetí rychlosť jako funkci tlakového spádu  $dp/dx$ ) a z upraveného Weisbachova vzorce (59)

$$\frac{dp}{dx} = \lambda \rho \frac{v^2}{2d},$$

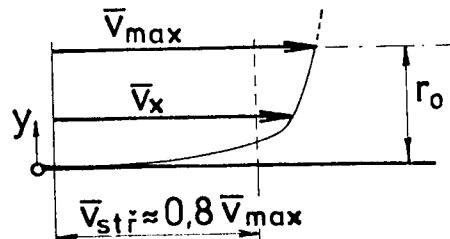
kde  $v$  je střední objemová rychlosť po průřezu, obdržíme výraz udávající závislost součinitel třecích ztrát na veličinách jež závisí na tvaru rychlostního profilu

$$\lambda = \frac{8 \frac{\tau_0}{\rho}}{v^2} = 8 \left( \frac{v_*}{v} \right)^2$$

Poznámka: Místo logaritmického zákona se v turbulentním proudění používá také staršího empirického mocninového zákona, obr. 91

$$\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_{\max}} = \left( \frac{y}{r_0} \right)^{1/n}, \quad (137)$$

kde  $\bar{v}_{\max}$  je maximální rychlosť tj. rychlosť v ose potrubí, jehož poloměr je  $r_0$ . Exponent  $n$  není konstanta, ale mění se s Reynoldsovým číslem od 7 do 10 a s drsností potrubí.



Obr. 91 Turbulentní rychlostní profil  
v obyčejných souřadnicích.

Výše uvedené dva modely turbulence mohou poskytnout pouze střední hodnoty složek rychlosťí, případně součinitel turbulentních třecích ztrát. Nedokáží stanovit další důležité veličiny, jež charakterisují turbulenci jako jsou např. Reynoldsova napětí, kinetická energie turbulentních fluktuací  $K = 1/2(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2)$  atd. Bouřlivý rozvoj modernějších modelů nastal s příchodem počítačů po roce 1968, kdy se konala první konference o turbulentních mezních vrstvách ve Stanfordu.

#### Otázky ke kapitole 13.:

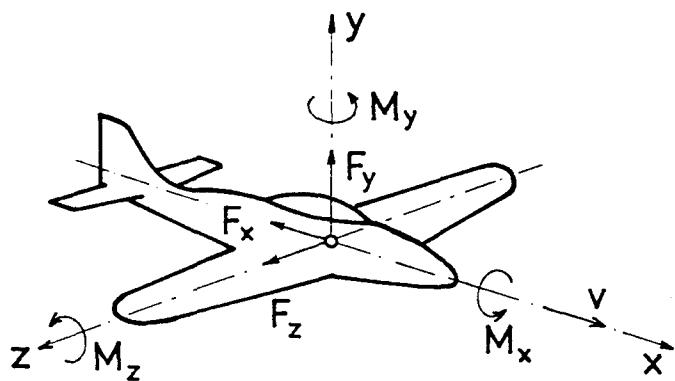
- 1) Jaké jsou rozdíly mezi laminárním a turbulentním prouděním?
- 2) Jak charakterizujeme turbulentní proudění?
- 3) Na čem jsou založeny teorie turbulence?
- 4) Jaký má tvar a rovnici turbulentní rychlostní profil?
- 6) Existuje souvislost mezi třecím ztrátami a tvarem rychlostního profilu?

## 14. OBTÉKÁNÍ TĚLES

Při obtékání těles tekutinou, nebo při pohybu tělesa (např. letadla) tekutinou, lze výslednou sílu a moment rozložit obecně na tři složky: odpor  $F_x$ , vztlak  $F_y$  a boční sílu  $F_z$  a moment klopivý  $M_z$ , klonivý  $M_x$  a zatáčivý  $M_y$ , obr. 92.

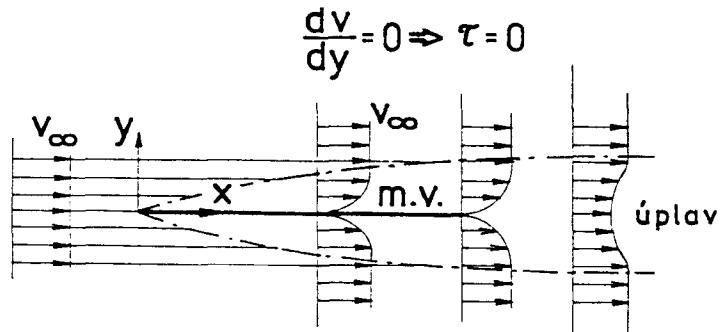
Obr. 92 Síly a momenty působící na obtékání těleso.

Při symetrickém obtékání těles pak budou některé z těchto složek rovny nule (boční síla a klonivý a zatáčivý moment).



Nachází-li se těleso v rozlehlém proudu tekutiny nelze již tak snadno určit rychlostní a tlakové pole kolem tělesa (jako tomu bylo v kap. 11., kdy proud tekutiny byl omezený) a teoretické stanovení např. odporu a vztlaku je velmi obtížná úloha. Jestliže provádime výpočet s modelem nevazké tekutiny dostáváme nulový odpor, což je v rozporu s naší zkušeností (D'Alembertův paradox), neboť i při obtékání těles vzduchem, který má velmi malou viskozitu, vzniká vždy odpor tj. složka paralelní s vektorem rychlosti. Experimentálně bylo zjištěno, že při velkých Reynoldsových číslech sahá vliv viskozity jen do malé vzdálenosti od povrchu tělesa a tato část proudu se nazývá mezní vrstva; úplav je odplavovaná mezní vrstva, obr. 93.

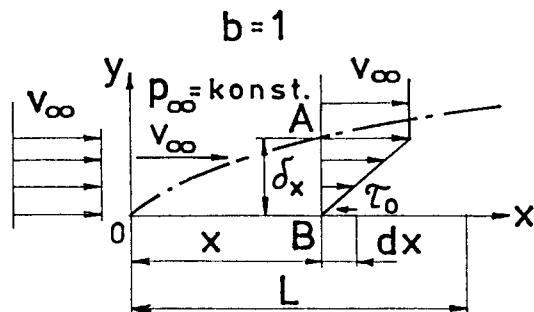
Obr. 93 Mezní vrstva - m. v. -na tenké desce. Úplav je odplavená mezní vrstva.



### 14.1. Mezní vrstva

Uvažujme nejjednodušší případ - mezní vrstvu na tenké desce paralelní s proudem tekutiny. Tlak je v celém objemu tekutiny konstantní. Tekutina na stěně líp  $v_0 = 0$ . Vlivem viskozity se zabrzdí nejbližší vrstvy tekutiny u povrchu desky. Rychlosť s odlehlostí od stěny narůstá až na hodnotu rychlosťi nenarušeného proudu  $v_\infty$ . Tato tloušťka „zabrzděné“ tekutiny  $\delta_x$  je u náběžné hrany nulová a na odtokové hraně je maximální. V mezní vrstvě a oblasti kolem desky nejsou proudnice paralelní přímky, ale tvoří mírně se rozvíjející svazek. Složka rychlosťi kolmá k desce  $v_y \ll v_x$  a lze ji zanedbat. Hranice mezní vrstvy není shodná s proudnicemi. Mimo mezní vrstvu je všude rychlosť přibližně konstantní, tedy  $\partial v / \partial y = 0$  a proto i tečné napětí je zde rovno nule, bez ohledu na viskozitu tekutiny. Mimo mezní vrstvu můžeme tedy počítat s Bernoulliiovou rovnici pro ideální tekutiny. V mezní vrstvě však musíme viskozitu uvažovat a proudění zde může být buď laminární nebo turbulentní.

Odvodíme pomocí věty o změně hybnosti vztah udávající růst tloušťky mezní vrstvy  $\delta_x$  se vzdáleností od náběžné hrany  $x$ , obr. 94.



Obr. 94 Idealizovaná mezní vrstva na desce.

Zvolme kontrolní oblast OAB, ohraničenou deskou, hranicí mezní vrstvy a úsečkou AB. Uvažujme jednotkovou šířku desky  $b$ . Pro zjednodušení nahraďme rychlostní profil přímkou, jež dá pro laminární mezní vrstvu vcelku vyhovující výsledek:

$$v = v_\infty \frac{y}{\delta_x} . \quad (138)$$

Ve směru proudění působí na tekutinu v uvažované oblasti pouze tření o stěnu:

$$F_x = \int_0^x \tau_0 dx , \quad (139)$$

kde  $\tau_0$  je tečné napětí na stěně

$$\tau_0 = \eta \left( \frac{dv}{dy} \right)_{y=0} = \eta \frac{v_\infty}{\delta_x} . \quad (140)$$

Z kontrolní oblasti vytéká průřezem AB

$$\dot{m} = \rho \int_0^{\delta_x} v dy = \rho \frac{v_\infty \delta_x}{2} . \quad (141)$$

Toto množství tekutiny přitéká do kontrolní oblasti plochou OA konstantní rychlostí  $v_\infty$ , takže hybnost přitékající tekutiny

$$H_1 = \dot{m} v_\infty = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \delta_x . \quad (142)$$

Hybnost tekutiny vytékající průřezem AB z kontrolní oblasti

$$H_2 = \int_0^{\delta_x} v \dot{m} dy = \rho \int_0^{\delta_x} v^2 dy = \frac{1}{3} \rho v_\infty^2 \delta_x . \quad (143)$$

Dosadíme-li rov. (139), (140), (142) a (143) do věty o změně hybnosti napsané pro elementární část mezní vrstvy o délce  $dx$ :

$$dF = d(H_1 - H_2) = \frac{\partial}{\partial x} (H_1 - H_2) dx ,$$

dostaneme

$$\tau_0 dx = \eta \frac{v_\infty}{\delta_x} dx = \frac{1}{6} \rho v_\infty^2 \frac{\partial \delta_x}{\partial x} dx .$$

Protože  $\frac{\partial \delta_x}{\partial x} dx = d\delta_x$  upravíme diferenciální rovnici separaci proměnných na tvar

$$\delta_x d\delta_x = \frac{6\eta}{\rho v_\infty} dx \text{ a po integraci}$$

$$\delta_x^2 = 12 \frac{\eta}{v_\infty} x + K , \quad (144)$$

což je parabola druhého stupně, kde  $K = 0$  neboť pro  $x = 0$  je  $\delta_x = 0$ . Zavedeme-li do rovnice (144) Reynoldsovo číslo, v němž charakteristickou délkou bude vzdálenost od náběžné hrany  $x$ :

$$\text{Re}_x = \frac{v_\infty x}{\nu} , \quad (145)$$

bude

$$\delta_x = \frac{3,46x}{\sqrt{\text{Re}_x}} . \quad (146)$$

Pomocí přesnějších výpočtů potvrzených experimenty dostaneme stejný výraz, jen konstanta je vyšší: 5,8.

Chceme-li vypočítat odpor, dosadíme z rov. (140) za použití rov. (144)

$$F_x = b \int_0^L \tau_0 dx = \frac{1,15}{\sqrt{\text{Re}_L}} b L \rho \frac{v_\infty^2}{2} , \quad (147)$$

tj. odpor jedné strany desky, jejíž plocha  $A = b \cdot L$ . Prvý zlomek se zpravidla označuje jako součinitel odporu  $c_x$  a přesnějším výpočtem dostaneme opět stejný vztah s vyšší konstantou

$$c_x = \frac{1,33}{\sqrt{\text{Re}_L}} . \quad (148)$$

Odpor desky se pak počítá z rovnice

$$F_x = c_x A \rho \frac{v_\infty^2}{2} , \quad (149)$$

kde  $\rho v_\infty^2 / 2 = p_d$  tj. dynamický (resp. kinetický) tlak.

Jestliže nabíhající proud tekutiny je turbulentní, nebo jestliže je proud laminární, ale před desku umístíme turbulizátor, např. síto, drát, pak tloušťka mezní vrstvy bude narůstat rychleji a odpor bude vyšší:

$$c_x = \frac{0,074}{\sqrt[5]{\text{Re}_L}} \quad (150)$$

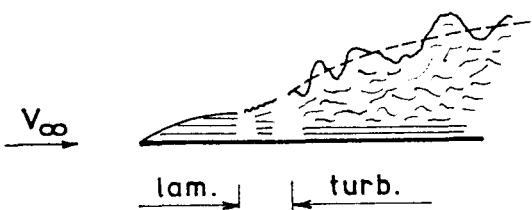
$$\delta_x = \frac{0,37x}{\sqrt[5]{\text{Re}_L}} \quad (151)$$

(tj. střední hodnota tloušťky, neboť  $\delta_x$  kolísá s časem, viz obr. 95).

Ale i když je proud tekutiny laminární a nepoužijeme turbulizátorů, pak laminární mezní vrstva po dosažení určité tloušťky se stane nestabilní a v určité vzdálenosti od náběžné hrany se změní v turbulentní a dostáváme tzv. smíšenou mezní vrstvu, obr. 95.

Obr. 95 Smíšená mezní vrstva na desce.

V přední části je m. v. laminární, v zadní turbulentní, mezi nimi přechodová oblast. Okamžitá hranice turbulentní m. v. - plná nepravidelná křivka - se s časem mění. Střední tloušťka turbulentní m. v. je zakreslena čárkováně.



Kritérium pro stanovení tohoto přechodu je opět kritické Reynoldsovo číslo, jehož hodnota se mění se stupněm turbulence proudu. Zpravidla se udává

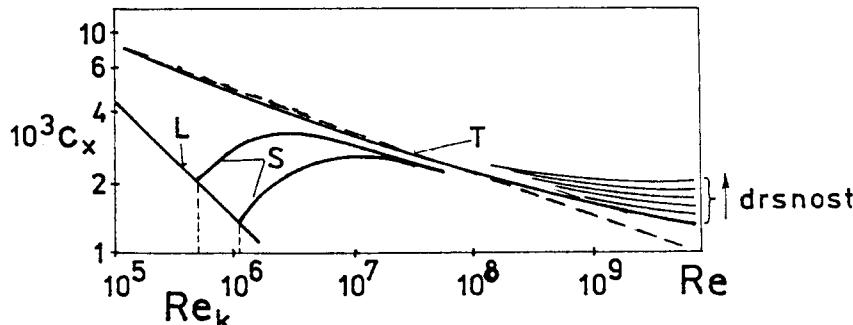
$$Re_k = \frac{v_\infty x_k}{\nu} = 5 \cdot 10^5 ,$$

ale může být větší (až  $2 \cdot 10^6$ ) i menší. Součinitel odporu pro smíšenou mezní vrstvu lze vyjádřit

$$c_x = \frac{0,074}{\sqrt[5]{Re_L}} - \frac{A}{Re_L} , \quad (152)$$

kde pro  $Re_K = 5 \cdot 10^5$  je  $A = 1700$ .

Závislost součinitele odporu  $c_x$  tenké desky na Reynoldsově čísle je na obr. 96. Protože je diagram vynesen v logaritmických souřadnicích je závislost součinitele odporu laminární mezní vrstvy, rov. (148), znázorněna přímkou  $L$  stejně jako součinitele odporu turbulentní mezní vrstvy pro hladkou desku, rov. (150) čárkovánou přímkou  $T$  s menším sklonem. Skutečné hodnoty součinitele odporu v turbulentní mezní vrstvě budou při vyšších hodnotách  $Re$  (nad  $10^7$ ) vyšší a jsou v obr. 96 znázorněny plnou křivkou. V turbulentní oblasti je odpor závislý i na drsnosti desky a s rostoucí drsností roste i součinitel odporu. Křivky pro smíšenou vrstvu  $S$  (je jich více podle velikosti  $Re_k$ ) se asymptoticky blíží křivkám součinitele odporu turbulentní mezní vrstvy, neboť při rostoucích Reynoldsových číslech je část plochy desky s laminární mezní vrstvou stále menší.



Obr. 96 Závislost součinitele odporu tenké desky na Reynoldsově čísle:

L - laminární mezní vrstva

S - smíšená mezní vrstva,

T - turbulentní mezní vrstva.

## 14.2 Odpory těles $F_x$

Při obtékání reálných těles konečné tloušťky, symetrických k vektoru rychlosti  $v_\infty$ , jsou všechny složky kromě odporu nulové:

$$F_x = c_x A \rho \frac{v_\infty^2}{2} . \quad (149)$$

Při obtékání těles menšími rychlostmi (aby se neuplatnil vliv stlačitelnosti) si celkový odpor rozkládáme na odpor třecí (vliv viskozity) daný integrálem tečných sil po povrchu a tlakový, způsobený nesymetrickým rozložením tlaku po povrchu tělesa. Podle toho, která složka odporu převládá, což závisí na tvaru, můžeme tělesa rozdělit do tří skupin: deskovitá paralelní s proudem, deskovitá kolmá k proudu a spojité zakřivená s relativně velikou tloušťkou.

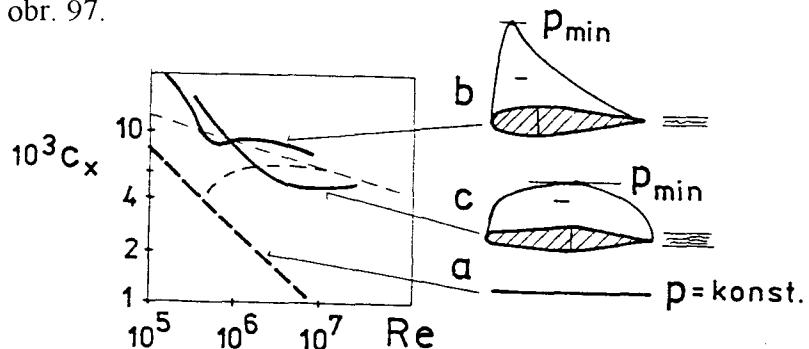
a) Ocasní plochy letadel, a p. jsou typickými příklady profilovaných desek u nichž převládá třecí odpor. Do rov. (149) se však obyčejně nedosazuje smočená plocha, jako u tenké desky, nýbrž plocha půdorysu neboť se určí snadněji.

Poznámka: kdybychom u tenké desky obtékání oboustranně dosazovali jako charakteristickou plochu A do rov. (149) místo smočené plochy  $2bL$  plochu půdorysu  $bL$ , jež je poloviční, pak hodnota součinitele odporu  $c_x$  musí být dvojnásobná abychom dostali správnou hodnotu odporu. Např. pro laminární mezní vrstvu konstanta v čitateli se změní z 1,33 na 2,66. Tento způsob výpočtu se používá např. při srovnávání odporu tenké desky s profilovanou deskou.

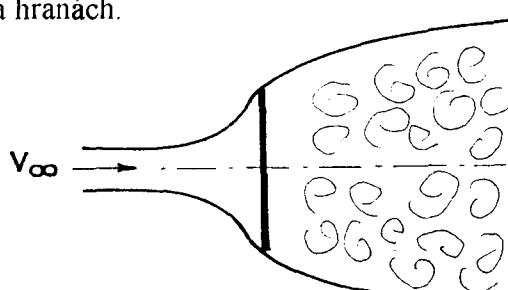
Součinitel odporu závisí na tvaru profilu desky, Reynoldsově čísle, drsnosti povrchu a turbulenci proudu. Průběh součinitele odporu v závislosti na Reynoldsově čísle je podobný jako pro tenkou desku, jen o něco větší vlivem malého tlakového odporu. Úplav je malý. Protože přechod laminárního proudění v turbulentní je silně závislý na tlakovém spádu, lze vhodným tvarováním snížit odpor v určité oblasti  $Re$ . Jedná se o tzv. laminární profily, u nichž je maximální tloušťka posunuta do vzdálenosti 40 až 60% od náběžné hrany, zatímco u klasických profilů byla asi 30%, obr. 97.

Obr. 97 Srovnání hodnot součinitele

- odporu při různých  $Re$  pro:
- a) tenkou desku (součinitel odporu vztažen na plochu půdorysu desky),
  - b) klasický profil
  - c) laminární profil.



Proto bod odtržení nemění svou polohu.

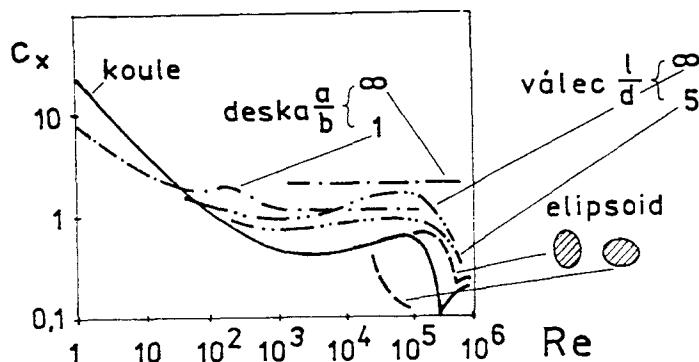


Obr. 98 Obtékání desky kolmě k proudu.

Před tělesem je přetlak, za tělesem podtlak (nevzhodné rozložení tlaku). Úplav je veliký. Součinitel odporu závisí hlavně na tvaru tělesa, jen pro malá Reynoldsova čísla  $Re < 10^3$  je závislý i na  $Re$ , neboť roste vliv viskozity, obr. 99.

Obr. 99 Závislost součinitele odporu různých těles na Reynoldsově čísle:

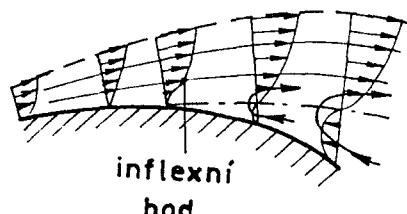
- koule,
- - - válec,
- - - elipsoid,
- · - deska.



Hodnoty součinitelů při  $Re > 10^3$  jsou závislé hlavně na tvaru např. kruhová a čtvercová deska mají  $c_x = 1,1$ ; obdélníková deska (s teoreticky nekonečným rozpětím)  $c_x = 2$ . Jako charakteristickou plochu A dosazujeme v tomto případě do rov. (149) plochu průmětu do roviny kolmě k rychlosti  $v_\infty$  - čelní průměr.

c) Pro tělesa spojité zakřivená (koule, elipsoidy, válce a p.) je charakteristické, že při určitých hodnotách Reynoldsových číseldochází k pronikavým změnám součinitele odporu  $c_x$ , např. na obr. 99, při  $Re \approx 10^5$ . Příčinou je posunutí bodu odtržení mezní vrstvy směrem dozadu při přechodu proudění v mezní vrstvě z laminárního na turbulentní. To má za následek zmenšení úplavu i odporu. K odtržení mezní vrstvy dochází zpravidla tehdy, když tekutina proudí do míst s vyšším tlakem např. na zadní části koule, válce, ale i v difuzoru a p. Tlakové a třetí síly působící proti pohybu částice, jsou překonávány setrvačností částice tekutiny, její rychlosť proto klesá, až v určitém místě na povrchu tělesa má rychlosť nulovou, obr. 100.

Rychlostní profil v tomto místě má inflexní bod. Za tímto místem mají rychlosti u stěny opačný smysl, než je tomu u hlavního proudu. U stěny vzniká zpětně proudění.



Obr. 100 Proudění v okolí bodu odtržení

V turbulentní mezní vrstvě mají částice u stěny větší kinetickou energii, protože rychlostní profil je plnější než při laminárném proudění. To je příčina posunu bodu odtržení dozadu a zmenšení úplavu při přechodu laminárního proudění v mezní vrstvě v proudění turbulentní. Proto při Reynoldsové kritickém čísle dojde k poklesu součinitele odporu, jak jsme dříve uvedli. (obr. 99).

Při velmi malých Reynoldsových číslech, menších než 1, převládá vliv vazkých sil nad tlakovými. U koule a válce je bod odtržení posunut daleko dozadu - nedochází téměř k odtržení. Součinitel odporu je silně závislý na  $Re$ . Pro kouli odvodil Stokes  $F_x = 3\pi\eta\nu_s d$ . Srovnáním s rov. (149) při dosazení  $A = \pi d^2/4$  dostaneme  $c_x = 24 Re$ . Při těchto obtékáních (tzv. plíživé proudění) nelze hovořit o mezní vrstvě, neboť vliv viskozity sahá velmi daleko od tělesa.

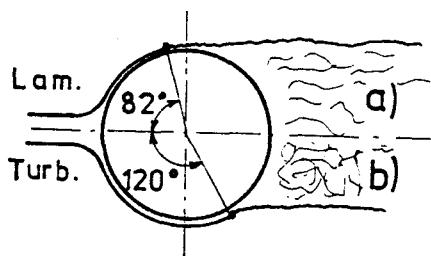
U válců dochází v oblasti  $40 < Re < 500$  k pravidelnému střídavému odtrhávání vírů a za válcem vzniká tzv. Kármánova vírová stezka. Tento jev je nutno respektovat u různých stavebních konstrukcí, dbát na to, aby nedošlo k rezonanci frekvence odtrhávání vírů a vlastní frekvence konstrukce. Tento jev je také příčinou „zpívání“ telefonních drátů - tzv. Strouhalových třecích tónů. Do Reynoldsova kritického čísla, jež pro kouli nabývá hodnot

$$Re_k = \frac{v_\infty d}{\nu} = (1,5 \sim 4) \cdot 10^5$$

je proudění v mezní vrstvě laminární - podkritické, bod odtržení mezní vrstvy je ještě před maximálním průřezem, obr. 101a. Při nadkritickém obtékání je bod odtržení za maximálním průřezem, obr. 101 b.

Obr. 101 Odtržení proudu při obtékání koule

- a) podkritické obtékání - laminární mezní vrstva,
- b) nadkritické obtékání - turbulentní mezní vrstva.



### 14.3 Vztlak $F_y$

Jestliže obtékání tělesa je nesymetrické vzhledem k rychlosti  $v_\infty$ , např. tím, že symetricky profilovaná deska je k  $v_\infty$  skloněna pod určitým úhlem náběhu  $\alpha$ , nebo proto, že deska je sama nesymetricky profilována, obr. 102, vzniká vedle odporu  $F_x$  i vztlak  $F_y$ . Vztlak nevzniká tím, že by se vzduch pod křídlem stlačoval - předpokládáme, že rychlosť vzduchu je menší než  $1/3$  rychlosťi zvuku, takže změny hustoty jsou zanedbatelné a vzduch se chová jako nestlačitelná tekutina. Vznik vztlaku při nízkých podzvukových rychlosťech si lze vysvětlit pomocí Bernoulliovy rovnice. Nad horní stranou profilu jsou rychlosťi větší než pod spodní stranou a kde je větší rychlosť bude menší tlak a naopak. Horní strana profilu se proto nazývá sací a spodní tlaková. Vztlak počítáme z podobné rovnice jako odpor jen součinitel odporu je nahrazen součinitelem vztlaku  $c_y$

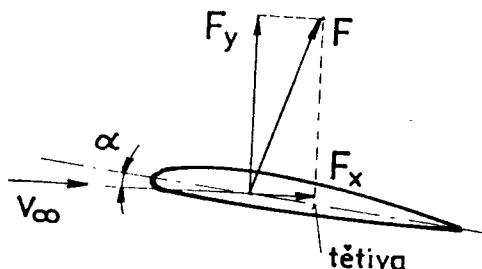
$$F_y = c_y A \rho \frac{v_\infty^2}{2} \quad (153)$$

Výsledná síla se počítá ze vzorce v němž vystupuje součinitel výsledné síly  $c_F$

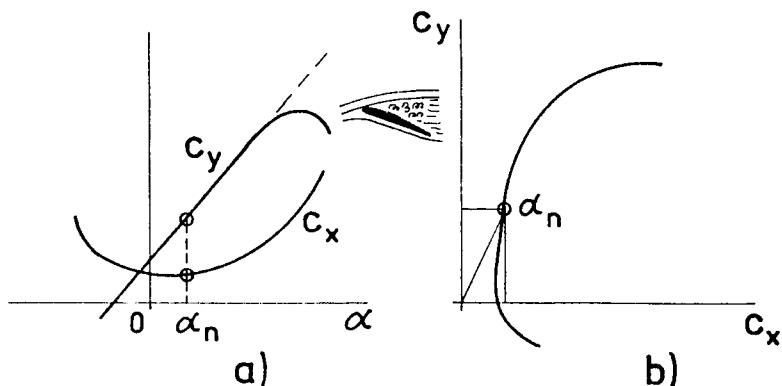
$$F = c_F A \rho \frac{v_\infty^2}{2}, \quad (154)$$

kde  $c_F = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$ , neboť  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$  a všechny součinitely  $c_F$ ,  $c_x$ ,  $c_y$  vztahujeme na stejnou charakteristickou plochu, tj. plochu půdorysu křídla. Vztlak je složka výsledné síly kolmá na směr vektoru rychlosťi nerozrušeného proudu  $v_\infty$  (tj. dostatečně daleko od profilu, v jehož blízkosti se velikost i směr rychlosťi částic vzduchu mění. Ve stagnačním bodě na náběžné hraně je rychlosť rovna nule!).

Obr. 102 Obtékání profilu:  $\alpha$  - úhel náběhu je úhel mezi vektorem rychlosťi  $v_\infty$  a tětvou profilu (spojnicí náběžné a odtokové hrany)



Závislost součinitelu vztlaku  $c_y$  na úhlu náběhu je lineární až téměř do úhlu, kde dojde k odtržení proudu na sací (tj. horní) straně desky, obr. 103 a.



Obr. 103 a) Závislost součinitelu vztlaku  $c_y$  odporu  $c_x$  na úhlu náběhu pro nesymetrický profil. Při velkých úhlech náběhu dojde k odtržení proudu a poklesu vztlaku.  
b) Polára profilu je závislost součinitelu vztlaku  $c_y$  na součiniteli odporu  $c_x$ . Každému bodu poláry odpovídá určitý úhel náběhu např.  $\alpha_n$ .

V téžemže obrázku je vynesena i závislost součinitele odporu  $c_x$  na úhlu náběhu. Jeho hodnoty však bývají řádově stokrát menší než hodnoty součinitele vztlaku. V praxi se častěji používá tzv. polára profilu, což je závislost  $c_y = f(c_x)$ , obr. 103b. Polára závisí na tvaru profilu, Reynoldsově čísle a u křidel konečného rozpětí i na štíhlosti, tj. poměru rozpětí ku hloubce profilu.

#### 14.4 Lopatkové mříže

U řady strojů (axiálních turbín, kompresorů a čerpadel) jsou lopatky uspořádány do věnce, blízko sebe, takže se navzájem ovlivňují a toto těsné uspořádání nazýváme lopatková mříž. Charakteristiky profilu nacházejícího se v mříži jsou jiné než u osamoceného profilu. Např. součinitel vztlaku při stejném úhlu náběhu je u profilu v mříži vždy vyšší.

Rozlišujeme lopatkové mříže rovnotlaké, turbínové a kompresorové. Při průtoku tekutiny rovnotlakou mříží dochází pouze ke změně směru proudění, rychlosť a tlak se při průtoku mříží nemění. Při průtoku tekutiny turbínovou mříží, kdy je strojem tekutině odnímána energie, se průřez mezi lopatkami - kanál - ve směru proudění zmenšuje, takže tekutina mění svůj směr proudění, zvětšuje rychlosť a zmenšuje tlak. U kompresorových mříží se průřezy kanálů mezi lopatkami ve směru proudění zvětšují, takže se rychlosť tekutiny zmenšuje a tlak zvětšuje. Zpravidla je před mříží oběžných lopatek připevněných k rotoru umístěn věnec rozváděcích lopatek spojený se statorem. Této dvojici lopatkových mříží se říká stupeň.

Otázky ke kap. 14:

- 1) Jaké síly a momenty působí na obtékána tělesa a jak se určují?
- 2) Co je to mezní vrstva?
- 3) Co je to d'Alembertův paradox?
- 4) Na čem závisí odpor těles? Jak se vypočte?
- 5) Kdy dochází k přechodu proudění v mezní vrstvě?
- 6) Kdy dochází k odtržení proudu tekutiny od povrchu tělesa?
- 7) Popište obtékání koule, resp. válce!
- 8) Jak vzniká vztlak? Jak se vypočte?
- 9) Co je polára profilu?
- 10) Jaké lopatkové mříže se v praxi používají?

**Víte, že**

- 1. července 1940 byl otevřen visutý most přes úžinu u Tacomy o rozpětí 854 m. Při mírném větru se jeho vozovka vlnila - zvedala se a klesala, proto se stal atraktivním cílem automobilistů toužících po dobrodružství. 7. listopadu 1940, při rychlosti větru asi 65 km/hod., se vozovka začala nejen ohýbat, ale i kroutit a asi za hodinu se střední část zřítila, což bylo na filmováno.
- na Orlické přehradě byl vybudován most u Žďákova o délce 540 m, rozpětí oblouku 330 m, výška klenby oblouku nad dnem údolí 110 m. Při rychlosti větru asi 30 km/hod se duté spojky (roury o průměru 0,9 m a délce 36,6 m) rozkmitaly tak, že amplituda kmitání ve středu spojky byla asi 130 mm. Příčinou bylo periodické odtrhávání víru - Kármánova vlnová stezka - a rezonance s vlastními kmity. Spojky pak byly naplněny pískem, tím se snížila vlastní frekvence spojky z 1,6 Hz na 0,73 Hz a kritická rychlosť větru klesla na 18 km/hod. Budící síly jsou úměrné čtverci rychlosťi a tedy se tak zmenšily, že amplituda kmitání ve středu mostní spojky se zmenšila 20x.
- na Eiffelově věži vybudoval její stavitel ve výšce 300 m laboratoř a v r. 1889 naměřil při rychlosti větru 29 m/s (asi 100 km/hod), že amplituda kmitů ve směru větru je 8 cm a v příčném směru je větší - 11 cm.

## 15. FYZIKÁLNÍ PODOBNOST A TEORIE MODELOVÁNÍ

Zatím jsme se zabývali teoretickým řešením úloh spadajících do mechaniky tekutin. V obecném případě jde o řešení Navierových - Stokesových diferenciálních rovnic. Jejich exaktní řešení je možné jen ve velmi prostých případech. Hledají se proto alespoň přibližná řešení tak, že se sestrojí model daného případu, popsaný jednoduššími rovnicemi ve kterých jsou zanedbány některé členy, např. při velmi malých Reynoldsových číslech setrvačné síly, nebo místo prostorového proudění považujeme proudění za jednorozměrné a místo Navierových - Stokesových rovnic počítáme s rovnicí Bernoulliovou. Informace takto získané nejsou už tak podrobné (např. místo rychlostního profilu v potrubí uvažujeme pouze konstantní střední rychlosť po celém průřezu) a mají omezenou platnost. Jsou však i případy, které neumíme řešit ani přibližně a dokonce některé ani nedokážeme popsat rovnicemi. Ve všech těchto případech přikročujeme k experimentu, který nám má ukázat meze platnosti výsledků přibližných řešení, což je nutné i pro numerická řešení prováděná na počítačích, případně poskytnout údaje které jinak získat neumíme.

### 15.1 Mechanická podobnost při proudění tekutin

Experiment lze provádět na hotovém díle, nebo na modelu. Studium přírodních dějů na modelech je dnes velmi rozšířeno, neboť má řadu předností: výsledky jednoho pokusu lze zobecnit na celou řadu podobných případů. Model bývá zpravidla menší než dílo a je levnější, lehčí a manipulace s ním je snadnější, vlastní výroba modelu je kratší, lze s ním experimentovat na zařízeních umístěných v laboratořích nezávisle na rušivých vlivech počasí. S ohledem na menší náklady lze vyšetřovat i několik alternativ, po případě provádět různé úpravy během experimentování. Přenášení výsledků experimentu z modelu na dílo je oprávněné jen tehdy, jsou-li model a dílo fyzikálně podobné.

Dva jevy jsou fyzikálně podobné když charakteristiky jednoho jevu vypočítáme z charakteristik druhého jevu násobením konstantou - měřítkem, modulem - podobně jako při přechodu z jedné soustavy jednotek do druhé.

Vymenujme si nyní základní příznaky podobnosti:

- 1) podobné jevy mají stejně diferenciální rovnice a jsou stejně fyzikální podstaty. Jsou-li rovnice stejné, ale fyzikální podstaty různé, jedná se o analogii.
- 2) Podobné jevy musí být geometricky podobné a musí mít podobné podmínky jednoznačnosti, tj. počáteční a okrajové podmínky.
- 3) Podobné jevy musí mít stejná podobnostní čísla.

Při proudění tekutin musí být splněna:

- 1) geometrická podobnost tzn. model je vyroben v určitém měřítku

$$\lambda_l = \frac{l}{l_m} = \frac{b}{b_m} = konst.,$$

kde veličiny s indexem m přísluší modelu.

- 2) Kinematická podobnost tj. podobnost rychlostí v odpovídajících si (homologických) bodech:

$$\lambda_v = \frac{v}{v_m} = \frac{v_1}{v_{1m}} = konst.$$

- 3) Dynamická podobnost tj. podobnost sil. Výsledná síla působící např. na vytknutou částici tekutiny nebo na stěnu tělesa je složena ze sil tlakových  $F_p$ , třecích  $F_t$ , tíhy  $F_G$  atd.

Pro výsledníci i pro jednotlivé její složky by opět mělo platit jediné měřítko sil

$$\lambda_F = \frac{F}{F_m} = \frac{F_p}{F_{pm}} = \frac{F_t}{F_{tm}} = \frac{F_G}{F_{Gm}} = konst.$$

Volbou měřítek základních jednotek (délky  $\lambda_l$ , času  $\lambda_t$ , hmotnosti  $\lambda_p$ ) jsou určena i měřítka všech odvozených jednotek např. ploch, zrychlení, napětí a p. Nelze tedy volit libovolně všechna měřítka! Vzájemný vztah mezi měřítky se nazývá indikátor podobnosti, z něhož lze stanovit zbyvající moduly. Z indikátorů podobnosti lze odvodit i podobnostní čísla, jež pro podobné jevy musí mít stejnou hodnotu. Mnohem častěji se podobnostní čísla odvozují buď z rovnic popisujících děj, nebo pomocí dimenzionální analýzy.

## 15.2 Odvození podobnostních čísel z rovnic

Odroďme si podobnostní čísla pro nestacionární proudění vazké nestlačitelné tekutiny. Toto proudění je pro jednorozměrný případ popsáno Bernoulliovou rovnicí

$$-K \cos \psi dl + \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v}{\partial t} dl + de_z = 0.$$

Označme  $F = -K \cos \psi$  složku hmotové síly ve směru proudění a diferenciál disipované energie vyjádříme

$$de_z = \frac{d\tau}{\rho} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial l^2} dl.$$

Upravená Bernoulliova rovnice popisující proudění v díle má nyní tvar

$$Fd l + \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v}{\partial t} dl + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial l^2} dl = 0. \quad (155)$$

Všechny veličiny vystupující v této rovnici nyní vyjádříme pomocí měřítek a veličin příslušných obtékání modelu:

$$F = \lambda_F F_m, \quad l = \lambda_l l_m, \quad p = \lambda_p p_m, \quad v = \lambda_v v_m, \quad t = \lambda_t t_m, \quad \eta = \lambda_\eta \eta_m, \quad \rho = \lambda_\rho \rho_m.$$

Dosaďme všechny tyto veličiny do rov. (155) a současně dělme celou rovnici  $\lambda_v^2$ :

$$\frac{\lambda_F \lambda_l}{\lambda_v^2} F_m dl_m + \frac{\lambda_p}{\lambda_\rho \lambda_v^2} \frac{dp_m}{\rho_m} + d\left(\frac{v_m^2}{2}\right) + \frac{\lambda_l}{\lambda_v \lambda_t} \frac{\partial v_m}{\partial t_m} dl_m + \frac{\lambda_\eta}{\lambda_\rho \lambda_v \lambda_t} \frac{\eta_m}{\rho_m} \frac{\partial^2 v_m}{\partial l_m^2} dl_m = 0. \quad (156)$$

Podle prvního příznaku podobnosti jsou oba jevy podobné, budou-li rovnice popisující obtékání díla (155) a modelu (156) stejné. Tuto podmíinku splníme tehdy, jestliže koeficienty (indikátory podobnosti) složené z měřítek jež jsou téměř u každého člena v rov. (156) budou rovny jedné, tak jak je to v rov. (155).

Položme

$$\frac{\lambda_\eta}{\lambda_\rho \lambda_v \lambda_t} = 1 \Rightarrow \frac{v l \rho}{\eta} = \frac{v_m l_m \rho_m}{\eta_m} \Rightarrow Re = Re_m = idem,$$

tj. oba jevy budou podobné, budou-li mít stejná Reynoldsova čísla (což se označuje idem). Podobně

$$\frac{\lambda_l}{\lambda_v \lambda_t} = 1 \Rightarrow \frac{v t}{l} = \frac{v_m t_m}{l_m} \Rightarrow Sh = Sh_m = idem,$$

kde Sh je Strouhalovo číslo.

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_\rho \lambda_v^2} = 1 \Rightarrow \frac{p}{\rho v^2} = \frac{p_m}{\rho_m v_m^2} \Rightarrow Eu = Eu_m = idem,$$

kde Eu je Eulerovo číslo.

$$\frac{\lambda_F \lambda_I}{\lambda_v^2} = 1 \Rightarrow \frac{v^2}{gl} = \frac{v_m^2}{g_m l_m} \Rightarrow Fr = Fr_m = idem,$$

kde  $Fr$  je Froudeho číslo.

Všechna podobnostní čísla jsou bezrozměrná, neboť jsou to v podstatě poměry sil. Např. Reynoldsovo číslo představuje poměr setrvačných a třecích sil, Eulerovo číslo poměr tlakových a setrvačných sil a p.

V teorii podobnosti se dokazuje, že každý matematický vztah mezi veličinami (i řešení diferenciálních rovnic) lze vyjádřit funkční závislostí mezi podobnostními čísly.

### 15.3 Dimenzionální analýza

Nemůžeme-li stanovit diferenciální rovnice řešeného problému, můžeme podobnostní čísla stanovit pomocí dimenzionální analýzy (užívá se též názvů analýza rozměrů, analýza rozměrovosti). Využívá se dimenzionální homogenity fyzikálních rovnic, což znamená, že ve fyzikální rovnici jednotlivé veličiny různých dimenzí nesmí v rovnici vystupovat osamoceně, nýbrž ve skupinách stejných dimenzí, např. v rovnici

$$g\rho h + p + \rho \frac{v^2}{2} = p_C$$

má každý člen dimenzi tlaku. Dělíme-li nyní rovnici jedním ze členů dostaneme všechny členy bezrozměrné, což je charakteristické pro podobnostní čísla. Obecný výraz pro vytváření bezrozměrných skupin lze zapsat např.

$$\rho^\alpha v^\beta p^\gamma = 1 ,$$

kde exponenty  $\alpha, \beta, \gamma$  najdeme z podmínky, že pravá strana je bezrozměrná.

Při použití dimenzionální analýzy volíme tento postup pro odvození podobnostních čísel:

- 1) vytneme veličiny jež se v daném problému vyskytují a jejich počet nechť je  $n$ .
- 2) Určíme počet základních jednotek - dimenzi  $p$ . V mechanice tekutin  $p = 3$  (L, T, M).
- 3) Sestavíme soustavu  $p$  lineárních rovnic pro jednotlivé základní dimenze.
- 4) Zkontrolujeme, zda rovnice jsou nezávislé (determinant soustavy  $p$ -té hodnosti  $\neq 0$ ).
- 5) Určíme  $(n-p)$  bezrozměrných argumentů - tj. podobnostních čísel.
- 6) Upravíme násobením nebo dělením jednotlivé argumenty, aniž bychom zmenšili jejich počet.

Příklad:

Stanovme podobnostní čísla pro stacionární proudění vazké tekutiny hladkým potrubím kruhového průřezu.

- 1) V problému vystupují tyto veličiny:

tlakový rozdíl  $\Delta p$  (Pa) na délce potrubí  $l$  (m) o průměru  $d$  (m) střední rychlosť  $v$  (m/s), viskozita  $\eta$  (Pas) a hustota tekutiny  $\rho$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ). Počet proměnných  $n = 6$ .

- 2) Počet základních jednotek  $p = 3$  metr, sekunda, kilogram, které označme obecně L, T, M.

Vyjádříme dimenze jednotlivých veličin pomocí těchto jednotek:

$\Delta p$ ...	$L^{-1}T^{-2}M$	$v$ ...	$LT^{-1}$
$l$ ...	$L$	$\eta$ ...	$L^{-1}T^{-1}M$
$d$ ...	$L$	$\rho$ ...	$ML^{-3}$

- 3) Sestavíme  $3 (= p)$  rovnic pro stanovení  $n - p = 3$  bezrozměrných argumentů  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  (tj. podobnostních čísel)

$$\Theta(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0 \quad (157)$$

$$\Theta(\Delta p^\alpha \cdot l^\beta \cdot d^\gamma \cdot v^\delta \cdot \eta^\epsilon \cdot \rho^\varphi) = 0. \quad (158)$$

Dosadíme do vztahu dimenze jednotlivých veličin

$$(L^{-1}T^{-1}M)^\alpha \cdot (L)^\beta \cdot (L)^\gamma \cdot (LT^{-1})^\delta \cdot (L^{-1}T^{-1}M)^\epsilon \cdot (ML^{-3})^\varphi = M^0 L^0 T^0$$

pro

$$\begin{aligned} L: -\alpha + \beta + \gamma + \delta - \epsilon - 3\varphi &= 0 \\ T: -2\alpha - \delta - \epsilon &= 0 \\ M: \alpha + \epsilon + \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (158a)$$

4) Determinant

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

rovnice nejsou lineárně závislé.

5) Protože je počet neznámých  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \varphi$  větší než počet rovnic vypočteme  $\alpha, \beta, \delta$  z rovnic (158a) jako funkce zbývajících neznámých

$$\alpha = -\epsilon - \varphi; \quad \beta = -\epsilon - \gamma; \quad \delta = +\epsilon + 2\varphi.$$

Po dosazení těchto hodnot do rov. (158) dostaneme

$$\Theta \left[ \left( \frac{\eta v}{\Delta pl} \right)^\epsilon, \left( \frac{\rho v^2}{\Delta p} \right)^\varphi, \left( \frac{d}{l} \right)^\gamma \right] = 0.$$

6) Bezrozměrné argumenty:

$$\Pi_1 = \frac{\eta v}{\Delta pl}, \quad \Pi_2 = \frac{\rho v^2}{\Delta p} = \frac{1}{Eu}, \quad \Pi_3 = \frac{d}{l}.$$

$\Pi_1$  a  $\Pi_2$  obsahují zpravidla předem neznámý rozdíl tlaků  $\Delta p$ . Bude vhodné upravit je tak, aby nový argument tuto neznámou veličinu neobsahoval a navíc abychom dostali v praxi běžně používané Reynoldsovo číslo

$$\Pi'_1 = \frac{\Pi_2 \Pi_3}{\Pi_1} = \frac{vd\rho}{\eta} = Re.$$

Funkční vztah mezi podobnostními čísly

$$\Theta(Re, Eu, l/d) = 0$$

je nutno určit experimentálně (pro jednodušší případ laminárního proudění s vyvinutým rychlostním profilem jej lze určit i teoreticky).

Pro výpočet tlakových ztrát vyjádříme

$$\begin{aligned} Eu &= \Theta_l(Re, l/d) \\ \Delta p &= \Theta_l(Re, l/d) \rho v^2 \end{aligned} \quad (159)$$

Porovnáním rov. (159) s Weisbachovým vzorcem

$$\Delta p = \lambda(Re) \frac{l}{d} \rho \frac{v^2}{2} \quad (59)$$

vidíme, že

$$\Theta_l(Re, l/d) = \frac{1}{2} \lambda(Re) \frac{l}{d}.$$

Příklad ukázal, že místo původních  $n = 6$  proměnných jsme po úpravě dostali funkční závislost mezi  $n - p = 3$  bezrozměrnými argumenty, čímž se zmenšil počet proměnných. To je v souladu s tzv. Buckinghamovým  $\Pi$ -teoremem: fyzikální závislost mezi  $n$  proměnnými lze přepsat na závislost mezi  $(n - p)$  bezrozměrnými  $\Pi$  argumenty, jestliže  $p$  je počet základních dimenzií.

Zmenšením počtu proměnných se zmenší při experimentování počet měření a to přináší sebou zlevnění pokusů.

Dimenzionální analýza má i některé nevýhody, např. problém je nutno důkladně prostudovat, aby nebyla opomenuta žádná důležitá veličina (zavedení více veličin opět zvětší počet experimentů). Protože stanovení  $\Pi$  - argumentů je neurčitá úloha, vyžaduje její řešení (takové, abychom z řady možných kombinací nezávislých bezrozměrných argumentů dostali vžitě tvary) určitou zkušenosť.

## 15.4 Úplná a částečná podobnost

Na proudící tekutiny působí různé druhy sil jako např. tlakové, třecí, tíha a pod. Pro každý druh síly jsme odvodili zvláštní podobnostní číslo. Při modelování bychom měli zajistit rovnost všech těchto čísel pro model a dílo. Na jednoduchém příkladu si ukážeme, že splnění podmínek úplné podobnosti není možné. Např. vyšetřování odporu výtlačové lodě na modelu ve vlečném kanálu pomocí modelu zhodoveného v měřítku  $\lambda_m = l/l_m$ . Celkový odpor lodě se skládá z odporu třecího, což vyžaduje rovnost  $Re_m = Re$  a odporu vlnového, což vyžaduje rovnost  $Fr_m = Fr$  neboť ve vlně se voda zvedá proti účinku gravitačního zrychlení. Stanovme jakou rychlosť je nutno vložit do modelu, je-li kanál také naplněn vodou ( $v_m = v$ ).

Z  $Re$  dostaneme:

$$\frac{v_m l_m}{\nu_m} = \frac{v l}{\nu} \Rightarrow \frac{\nu_m}{\nu} = \frac{l}{l_m}$$

Z  $Fr$  dostaneme jinou podmínsku ( $g_m = g$ )

$$\frac{v_m^2}{g_m l_m} = \frac{v^2}{gl} \Rightarrow \frac{\nu_m}{\nu} = \sqrt{\frac{l_m}{l}}$$

Obě podmínky však nelze splnit současně, neboť podle první by měla být rychlosť vlečení modelu  $v_m$  tím větší, čím menší je model, podle druhé právě naopak.

V takových případech je třeba rozhodnout, který druh sil je rozhodující - hlavní a vyhovíme pouze podmínce podobnosti hlavních sil - tj. modelujeme při částečné podobnosti.

Otázky ke kap. 15.:

- 1) V jakých případech používáme podobnost ?
- 2) Jaké jsou výhody a rizika při modelování ?
- 3) Jaké jsou případy podobnosti ?
- 4) Kdy je splněna mechanická podobnost při proudění tekutin ?
- 5) Odvodte některá podobnostní čísla z rovnic !
- 6) Jaký je princip dimenzionální analýzy ?
- 7) Stanovte pomocí dimenzionální analýzy podobnostní čísla pro obtékání tělesa (např. koule) vazkou tekutinou !
- 8) Co je to  $\Pi$  - teorém ?
- 9) Odvodte pomocí dimenzionální analýzy Weberovo číslo, které závisí na povrchovém napětí  $\sigma$ , hustotě  $\rho$ , rychlosti  $v$  a délce  $l$ .
- 10) Co je to částečná podobnost ?

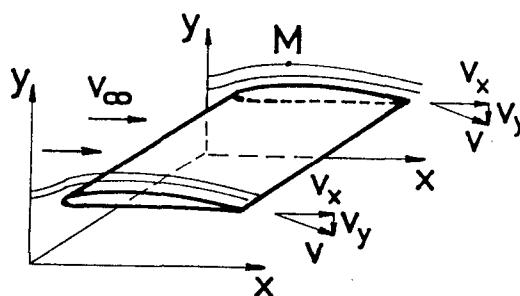
**Víte, že**

- velmi důležitý předpoklad pro experimentální stanovení sil jimiž působí tekutina na těleso, bylo Newtonovo tvrzení, že stejně zákony platí pro vodu i pro vzduch.
- Edme Mariotte (1620 - 1684) měřil sílu, kterou působí vodní proud na ponořenou desku.
- Jean Charles de Borda (1733 - 1799) (ve vodě) a Benjamin Robins (1707 - 1751) (ve vzduchu) měřili odpor těles různých tvarů upevněných na rotujícím rameni.
- Jean le Rond d'Alambert (1717 - 1783) a řada dalších badatelů zjišťovali odpor modelů lodí ve vlečném kanále. Zvlášť významný je přínos Williama Froude (1810 - 1879); v roce 1872 vybudoval vlečný kanál o délce 110 m, měřící úsek měl délku 60 m, šířku na hladině 11 m a hloubku 3 m.
- Francis Herbert Wenham (1824 - 1908) postavil první aerodynamický tunel v roce 1871. Modelováním a měřením v tunelech se zabývali i bratři Wrightové, N. E. Žukovský, Gustave Eiffel, Ludwig Prandtl a jiní.

## 16. ROVINNÉ POTENCIÁLNÍ PROUDĚNÍ

Stacionární rovinné potenciální proudění nestlačitelné, nevazké tekutiny je sice značně zidealizované, přesto má velký praktický význam při řešení obtékání štíhlých těles jako křídla, lopatky turbín a p., obr. 104.

Obr. 104 Rovinné potenciální proudění.

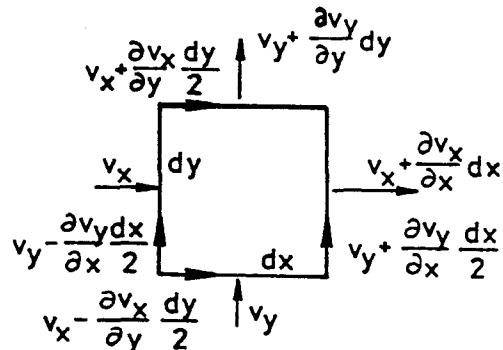


Vzdálenost rovin  $xy$  nechť je rovna jedné. Složka rychlosti  $v_z \equiv 0$ .

### 16.1 Základní rovnice

a) Rovnice kontinuity. Uvažujme elementární kontrolní objem, obr. 105, o rozměrech  $dx, dy$  a jednotkové výšce.

Obr. 105 Elementární kontrolní objem vytknutý z rovinného proudové pole - kinematické poměry.



Podle zákona o zachování hmotnosti se rozdíl výtoku a přítoku rovná nule ( $\rho = \text{konst.}$ )

$$\rho \left[ \left[ \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) - v_x \right] dy + \left[ \left( v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) - v_y \right] dx \right] = 0 ,$$

odkud

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 , \quad (160)$$

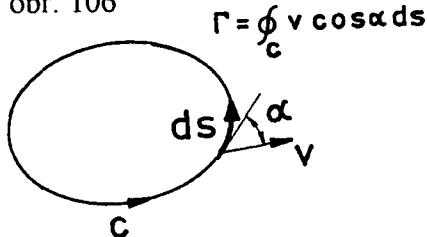
což je rovnice kontinuity pro rovinné proudění nestlačitelné tekutiny.

b) Cirkulace. Rychlosť otáčení elementární částice tekutiny kolem své osy lze charakterizovať střední úhlovou rychlosťí rotace  $\omega$  nebo cirkulací  $\Gamma$  definovanou křivkovým integrálem po uzavřené křivce

$$\Gamma = \oint_C v \cos \alpha ds , \quad (161)$$

kde  $\alpha$  je úhel, který svírají vektory  $v$  a  $ds$ , obr. 106

Obr. 106 Definice cirkulace.



Kladný smysl obíhání je takový, aby při obíhání byla plocha uzavřená křivkou  $c$  po levé ruce.  
Stanovme cirkulaci pro elementární částici, obr. 105

$$d\Gamma = \left( v_x - \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx + \left( v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy - \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx - \left( v_y - \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy$$

$$d\Gamma = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy . \quad (162)$$

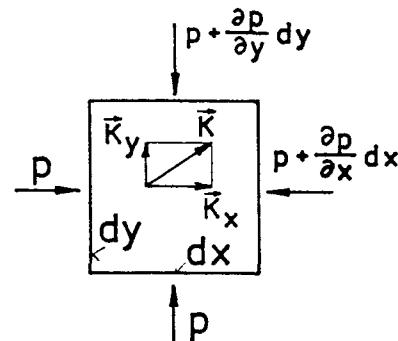
V potenciálním - nevřívém proudění vykonávají částice tekutiny pouze translační pohyb (s výjimkou singulárních bodů), tj. neotáčejí se kolem své osy a proto  $d\Gamma = 0$  a

$$\left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0 . \quad (163)$$

Kromě těchto kinematických vztahů si odvodíme ještě dynamické rovnice.

### c) Eulerovy pohybové rovnice.

Napišme pohybovou rovnici pro elementární částici tekutiny, obr. 107, na níž v ideální nevazké tekutině působí pouze síly tlakové a objemové.



Obr. 107 Elementární kontrolní objem vytknutý z rovinného proudového pole - silové poměry.

Pro směr  $x$  např. ( $dm = \rho dx dy I$ )

$$K_x \rho dx dy + pdy - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy = \frac{dv_x}{dt} \rho dx dy$$

a po úpravě dostaneme Eulerovy rovnice pro směr  $x$  a podobně i pro směr  $y$ :

$$K_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt} , \quad (164)$$

$$K_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv_y}{dt} .$$

$dv_i / dt = \partial v_i / \partial t + v_j \partial v_i / \partial x_j$  je substanciální zrychlení a při stacionárním proudění je lokální zrychlení  $\partial v_i / \partial t = 0$ . Konvektivní zrychlení je nelineární člen a proto obecné řešení těchto rovnic je obtížné.

Upravme rov. (164) tím, že zavedeme potenciál objemových sil:  $K_x = \partial U / \partial x$ ;  $K_y = \partial U / \partial y$  a na pravou stranu k první rovnici přičteme a odečteme  $v_y \partial v_y / \partial x$  a k druhé  $v_x \partial v_x / \partial y$

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} \right) - v_y \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) ,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} - v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} \right) + v_x \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) .$$

Poslední členy na pravé straně jsou v potenciálním proudění rovny nule, viz rov. (163).

Vynásobíme-li první rovnici  $dx$ , druhou rovnici  $dy$  a sečteme ( $v_x^2 + v_y^2 = v^2$ ) dostaneme

$$\left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \right) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) = \frac{\partial(v^2/2)}{\partial x} dx + \frac{\partial(v^2/2)}{\partial y} dy ,$$

což lze zapsat

$$dU = \frac{dp}{\rho} + d\frac{v^2}{2} \quad \text{resp.} \quad d\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} - U\right) = 0 .$$

Působí-li pouze gravitační zrychlení, pak  $U = -gy$  a po integraci dostaneme Bernoulliovu rovnici

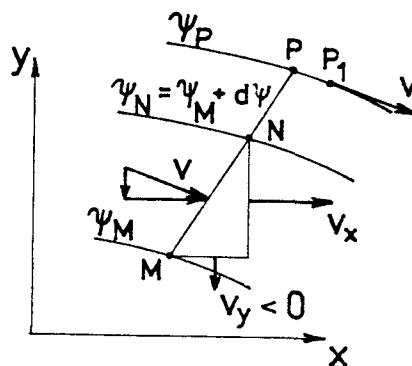
$$gy + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{konst.}$$

přičemž konstanta je stejná pro všechna proudová vlákna.

## 16.2 Proudová funkce $\Psi(x,y)$

Uvažujme proudění mezi dvěma paralelními rovinami  $xy$  o jednotkové vzdálenosti, jako na obr. 104 a zvolme na určité proudnice pevný bod  $M$ .

V těsném sousedství zvolme pohyblivý bod  $N$ , což je zvětšeno na obr. 108. Plochou  $MN1$  resp. křivkou  $MN$  proteče za jednotku času určitý objem  $dQ$ . Změní-li bod  $N$  polohu, přemístí-li se např. do bodu  $P$  změní se i průtok.



Obr. 108 Rovinné proudění (k definici proudové funkce a proudnic) - kartézský souřadný systém.

Průtok  $dQ$  křivkou  $MN$  označme  $d\Psi$ :

$$dQ = (-v_y)dx + v_x dy = d\Psi . \quad (165)$$

Integrací rov. (165) podél křivky  $MP$  dostaneme průtok křivkou (rozměr  $[Q] = \text{m}^2/\text{s}$ )

$$Q_{MP} = \int_{MP} d\Psi = \Psi_P - \Psi_M . \quad (166)$$

Proudová funkce  $\Psi(x,y)$  představuje množství tekutiny protékající za jednotku času libovolnou křivkou procházející body  $M$  a  $P$ .  $\Psi(x,y)$  je skalární funkce souřadnic, každému bodu roviny  $xy$  lze připsat určitou hodnotu  $\Psi$ . Vynášíme-li tyto hodnoty  $\Psi$  ve směru  $z$  vytvoří nad rovinou  $xy$  určitou plochu.

V kinematice jsme si zavedli proudnice, což jsou vektorové čáry vektorů rychlosti. Rychlosti jsou v každém bodě tečné k proudnicí. Stanovme rovnici proudnic: kdyby body  $P$  a  $P_1$ , obr. 108, ležely na stejné proudnici  $\Psi_P$  pak by průtok křivkou  $PP_1$  byl roven nule, viz rov. (165), tj.

$$d\Psi = 0 .$$

Rovnice proudnice pak bude  $\Psi = \text{konst.} = C$ . (167)

Proudnice jsou řezy plochy  $\Psi(xy)$  rovinou  $\Psi = C$ , paralelní s rovinou  $xy$  (analogie vrstevnice na mapě).

Pomocí proudové funkce lze stanovit i rychlostní pole, tj. složky rychlosti v každém bodě. Vyjádříme-li

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy , \quad (168)$$

pak porovnáním rovnic (165) a (168) dostaneme

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (169)$$

Dosazením vztahů (169) do podmínky nevřivosti (163) dostaneme

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 ,$$

tj. Laplaceovu rovnici a tedy proudové funkce rovinného potenciálního proudění je harmonickou funkcí.

Protože je v některých případech vhodnější použít polárních souřadnic místo kartézských, odvodíme si ještě výrazy pro radiální a tangenciální složku rychlosti. Průtok křívkou MN lze podle obr. 109 vyjádřit

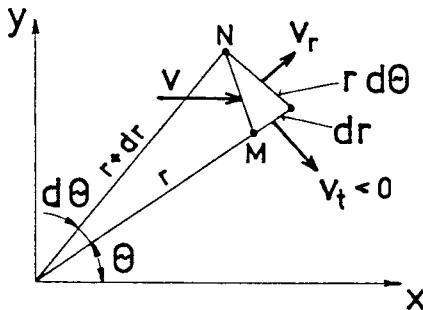
$$d\Psi = v_r r d\Theta - v_t dr \quad (170)$$

a

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} d\Theta + \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr . \quad (171)$$

Porovnáním obou rovnic

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \quad ; \quad v_t = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} . \quad (172)$$



Obr. 109 Rovinné proudění (k odvození vztahů pro výpočet radiální a tečné složky rychlosti).

### 16.3 Rychlostní potenciál $\Phi(x,y)$

Kromě proudové funkce  $\Psi$  lze rovinné potenciální proudění popsat i jinými funkcemi, např. potenciálem rychlosti  $\Phi(x,y)$ . Podmínka nevřivosti (163) bude splněna, bude-li mít vektor rychlosti potenciál, pak

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad ; \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} . \quad (173)$$

Dosazením do (160) dostaneme

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (174)$$

což je opět Laplaceova rovnice a rychlostní potenciál  $\Phi$  je opět harmonickou funkcí.

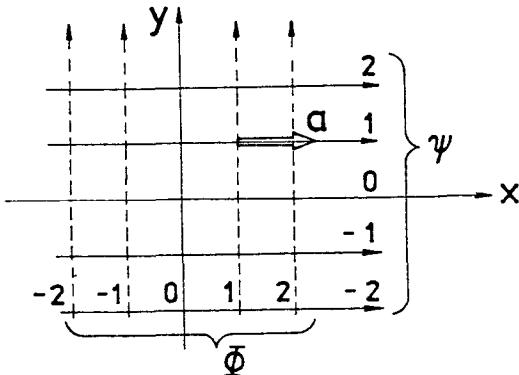
Pro složky rychlosti v polárních souřadnicích platí

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad v_t = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} . \quad (175)$$

Čáry  $\Phi(x,y) = \text{konst.}$  jsou ekvipotenciální čáry a jsou kolmé na proudnice.

## 16.4 Základní případy potenciálního proudění

a) Paralelní proud, obr. 110 je charakterizován rychlostí  $a$  stejnou co do velikosti a směru ve všech bodech proudového pole.



Obr. 110 Paralelní proud rovnoběžný s osou  $x$ . ( $a=1$ )

— proudnice  
--- ekvipotenciální čáry.

Proudová funkce

$$\Psi_1 = ay \quad (176)$$

a potenciál rychlosti  $\Phi_1 = ax$ .

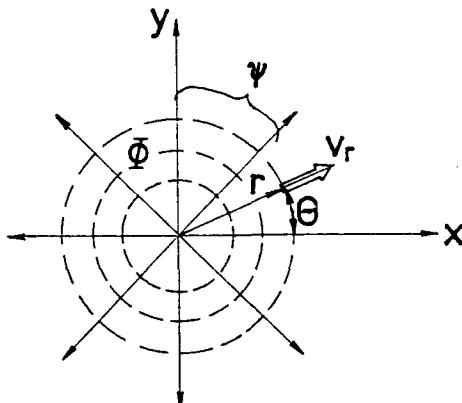
Rychlosť

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = a = \text{konst.}, \quad v_y = 0.$$

Proudnice  $\Psi = \text{konst.}$  jsou přímky paralelní s osu  $x$ , ekvipotenciální čáry  $\Phi = \text{konst.}$  jsou přímky paralelní s osou  $y$ .

Kterákoli proudnice může představovat tuhou stěnu (normální složka rychlosti je rovna nule).

b) Rovinný pramen (zdroj, zřídlo), obr. 111, představuje radiální proudění tekutiny z bodu do roviny.



Obr. 111 Rovinný pramen.

Pramen je charakterizován vydatností (mohutností)  $Q$  což je objem tekutiny vyteklý za jednotku času

$$Q = 2\pi v_r r = \text{konst.}, \quad (177)$$

odkud plyne pro rozložení rychlostí

$$v_r r = \frac{Q}{2\pi} = \text{konst.} \quad (178)$$

Rychlostní potenciál  $\Phi_2$  a proudová funkce  $\Psi_2$  pramenu:

$$\Phi_2 = \frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad \Psi_2 = \frac{Q}{2\pi} \Theta. \quad (179)$$

Proudnice jsou radiální přímky  $\Theta = \text{konst.}$ , ekvipotenciální čáry jsou soustředné kružnice.

Radiální složka rychlosti

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} = \frac{Q}{2\pi r}, \quad (180)$$

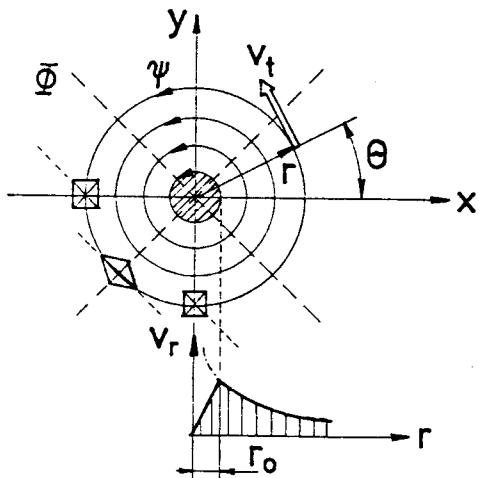
tangenciální složka  $v_t = 0$ .

Poznámka: centrální bod pramene je singulární bod, rychlosť je tu nekonečně veliká.

Rovinný propad (nor) se od pramene liší opačným směrem proudění tekutiny.

c) Potenciální vír, obr. 112 (vírové vlákno).

Částice tekutiny se posouvají po kruhových drahách (soustředných kružnicích), aniž by se otáčely kolem své osy. Částice konají translační pohyb, při kterém se deformují.



Obr. 112 Potenciální vír - částice tekutiny se po kruhových drahách posouvají (translace a deformace), aniž by se otáčely kolem své osy (s výjimkou jádra).

Rychlosť otáčení je charakterizována cirkulací  $\Gamma$ , definovanou rovnicí (161), která je u potenciálního víru rovna

$$\Gamma = 2\pi r v_t = \text{konst.}, \quad (181)$$

odtud dostaneme vztah

$$v_t r = \frac{\Gamma}{2\pi} = \text{konst.} \quad (182)$$

V ose víru vychází opět rychlosť nekonečně veliká (singulární bod). Zavádíme proto jádro víru o poloměru  $r_0$ , v němž se tekutina otáčí jako tuhé těleso, obr. 112. Rychlostní potenciál  $\Phi$  a proudová funkce potenciálního víru  $\Psi$ :

$$\Phi_3 = \frac{\Gamma}{2\pi} \Theta \quad ; \quad \Psi_3 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (183)$$

Proudnice, jak jsme již řekli, jsou soustředné kružnice, ekvipotenciální čáry jsou radiální přímky. tangenciální složka rychlosti, v oblasti mimo jádro víru, ubývá s poloměrem

$$v_t = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (184)$$

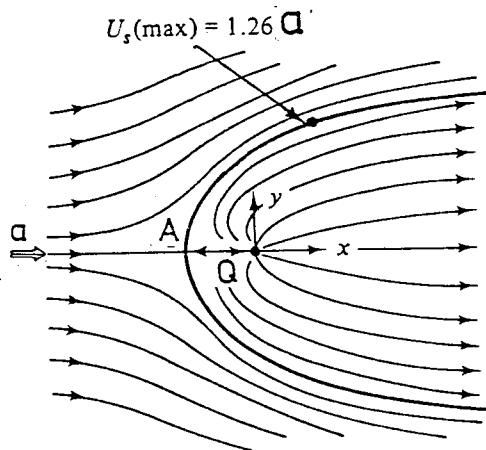
a radiální složka rychlosti  $v_r = 0$ .

Rychlostní potenciál  $\Phi$  a proudovou funkci  $\Psi$  lze u rovinného potenciálního proudění navzájem zaměnit (jak o tom svědčí poslední dva případy), neboť obě musí vyhovovat Laplaceově rovnici.

## 16.5 Skládání proudění

Rovinné potenciální proudění je popsáno diferenciální Laplaceovou rovnicí. Známe-li dvě řešení této diferenciální rovnice  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$ , bude i jejich součet  $\varphi_1 + \varphi_2$  novým řešením. Tímto způsobem lze nalézt řešení složitějších případů proudění.

a) **Rovinné polotěleso (deska).** Složením paralelního proudu a pramene dostaneme obtékání desky rozprostírající se až do nekonečna, obr. 113.

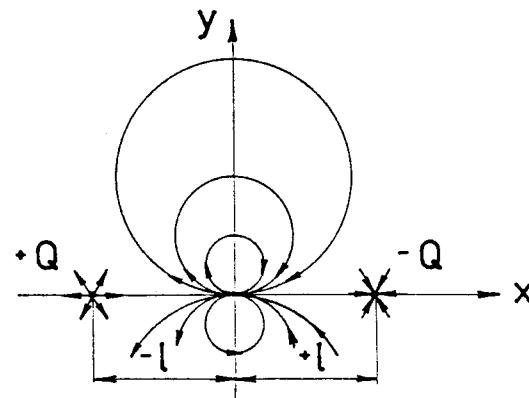


Obr. 113 Rovinné polotěleso, tj. deska rozprostírající se do nekonečna. Na obr. je nakresleno obtékání malé části tělesa.

Proudová funkce

$$\Psi_4 = \Psi_1 + \Psi_2 = ay + \frac{Q}{2\pi} \Theta . \quad (185)$$

b) **Rovinný dipól**, obr. 114, dostaneme tak, že složíme pramen a propad stejné mohutnosti  $Q$ , jestliže se vzdálenost mezi nimi  $2l$  blíží nule a mohutnost k nekonečnu tak, aby moment dipólu měl konečnou hodnotu  $M = 2Ql$ .



Obr. 114 Zmenšováním vzdálenosti  $2l$  mezi pramenem a propadem jež jsou symetricky umístěny vzhledem k počátku dostaneme dipól jehož proudnice jsou na obr. zakresleny.

Proudnice jsou kružnice se středy na ose  $y$  a dotýkají se počátku.

Proudová funkce dipólu

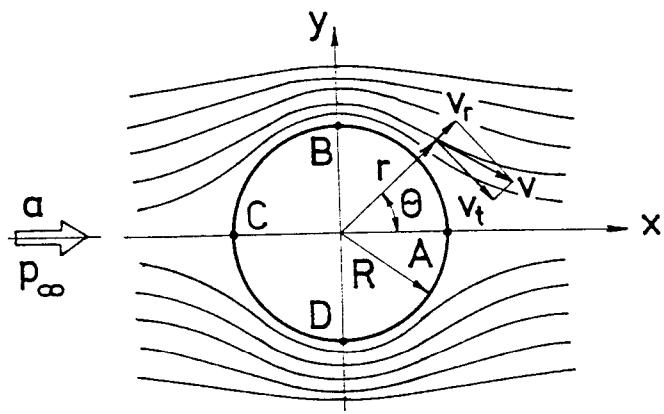
$$\Psi_5 = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{M \sin \Theta}{r} . \quad (186)$$

c) **Válec kruhového průřezu.** Složením paralelního proudu a rovinného dipólu dostaváme prakticky velmi důležitý případ obtékání válce kruhového průřezu.

Proudová funkce je rovna ( $R^2 = M/2\pi a$ )

$$\Psi_6 = a(r - \frac{R^2}{r}) \sin \Theta . \quad (187)$$

Položíme-li  $\Psi_6 = 0$  dostaváme  $\Theta = 0$  tj. osa  $x$  a rovnici kružnice  $r = R$  obr. 115.



Obr. 115 Potenciální obtékání válce kruhového průřezu.

Složky rychlosti

$$v_r = a \cos \Theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) , \quad (188)$$

$$v_t = -a \sin \Theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) . \quad (189)$$

Na povrchu válce  $r = R$  je radiální složka nulová a tangenciální

$$v_t = -2a \sin \Theta . \quad (190)$$

pro  $\Theta = 0$  a  $\pi$  je  $v_t = 0$  (stagnační body A a C) maximální rychlosti  $v_t = \pm 2a$  jsou v bodech  $\Theta = \pm \pi/2$  tj. body B a D.

Stanovme rozložení tlaku na povrchu válce (v nevazké tekutině jsou třetí síly rovny nule). Napišme Bernoulliovu rovnici mezi bodem v nekonečnu a bodem na povrchu válce

$$p_\infty + \rho \frac{a^2}{2} = p + \rho \frac{v_t^2}{2} . \quad (191)$$

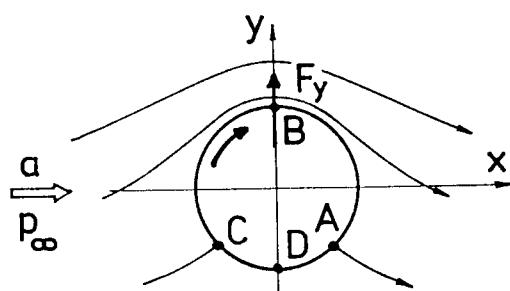
Rozložení tlakového součinitele  $c_p$  (bezrozměrného tlaku) dostaneme dosazením za  $v_t$  z rov. (190)

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\rho \frac{a^2}{2}} = 1 - \left(\frac{v_t}{a}\right)^2 = 1 - 4 \sin^2 \Theta \quad (192)$$

Ve stagnačních bodech A a C je tlak největší  $c_p = 1$ . V bodech B a D je nejmenší tlak  $c_p = -3$ . Rozložení tlaku je symetrické vzhledem k osám x a y. Integrací tlakových sil po povrchu válce dostaneme  $F_x = F_y = 0$  a výsledná síla je rovna nule (D'Alambertův paradox). Obtékání válce reálnou tekutinou souhlasí s potenciálním obtékáním pouze na přední straně válce.

d) Rotující válec. Složením paralelního proudu, dipólu a potenciálního víru dostaváme rovněž prakticky důležitý případ obtékání rotujícího válce, obr. 116.

Potenciální vír má zde opačný smysl otáčení než na obr. 112 a proto se u proudové funkce víru mění znaménko - na +.



Obr. 116 Obtékání rotujícího válce.  
Vznik vztlaku.

## Proudová funkce

$$\Psi_7 = a(r - \frac{R^2}{r}) \sin \Theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r . \quad (193)$$

Analogicky jako v předcházejícím případě určíme složky rychlostí

$$v_r = a \cos \Theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) , \quad (194)$$

$$v_t = -a \sin \Theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi r} . \quad (195)$$

Na povrchu válce  $r = R$  je radiální složka  $v_r = 0$  a tangenciální složka

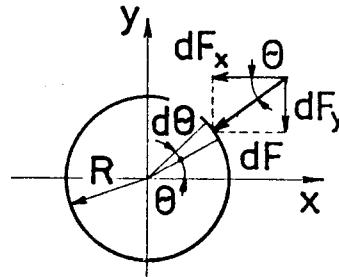
$$v_t = v = -2a \sin \Theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} . \quad (196)$$

Body nulové rychlosti (stagnační body A, C) leží nyní pod osou x, viz obr. 116 (pro  $\Gamma < 4\pi Ra$ ).

Cirkulace  $\Gamma$  narušuje symetrii proudění vzhledem k ose x: nad osou x, kde jsou výsledné rychlosti dané vektorovým součtem rychlosti paralelního proudu a potenciálního víru větší než v symetricky ležících bodech pod osou x, budou vzhledem k Bernoulliově rovnici tlaky menší. Tím vzniká tlaková síla, jež působí na rotující válec ve směru kolmém k rychlosti a tj. vztak  $F_y$ . Abychom mohli vypočítat jeho velikost stanovme nejprve pomocí Bernoulliovy rovnice rozložení tlaku na povrchu válce:

$$p = p_\infty + \rho \frac{a^2}{2} - \frac{\rho}{2} \left(-2a \sin \Theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2 . \quad (197)$$

Na povrchu válce o jednotkové délce vytkneme elementární plošku, obr. 117  $dA = Rd\Theta$



Obr. 117 Elementární tlaková síla působící na povrch válce.

a výslednou tlakovou sílu na ni působící  $dF = -p dA$

rozložíme na složky

$$dF_x = dF \cos \Theta = -pR \cos \Theta d\Theta ,$$

$$dF_y = dF \sin \Theta = -pR \sin \Theta d\Theta .$$

Integrací po povrchu válce dostaneme po dosazení za  $p$  z rov. (197)

$$F_x = \iint F_x = -R \int_0^{2\pi} p \cos \Theta d\Theta = 0 , \quad (198)$$

tj. nulový odpor, neboť proudění je symetrické vzhledem k ose y  
a vztak

$$F_y = \iint F_y = -R \int_0^{2\pi} p \sin \Theta d\Theta . \quad (199)$$

Po dosazení za  $p$  z rov. (197)

$$F_y = -R(p_\infty + \frac{a^2}{2}\rho) \int_0^{2\pi} \sin \Theta d\Theta + \frac{\rho R}{2} \int_0^{2\pi} (-2a \sin \Theta - \frac{\Gamma}{2\pi R})^2 \sin \Theta d\Theta ,$$

protože  $\int_0^{2\pi} \sin \Theta d\Theta = 0$  ;  $\int_0^{2\pi} \sin^3 \Theta d\Theta = 0$  ;  $\int_0^{2\pi} \sin \Theta^2 d\Theta = \pi$  ;

dostáváme pro vztlak tzv. Kutta-Žukovského vzorec  $F_y = \rho a \Gamma$  , (200)  
který tvoří základ teoretické aerodynamiky.

Otázky ke kapitole 16.:

- 1) Co je to potenciální proudění?
- 2) Odvodte rovnici kontinuity pro dvourozměrné proudění!
- 3) Co je to cirkulace ?
- 4) Odvodte Eulerovy pohybové rovnice !
- 5) Odvodte Bernoulliovu rovnici z Eulerových pohybových rovnic!
- 6) Co je to proudová funkce?
- 7) Jak stanovíme rychlostní pole pomocí proudové funkce?
- 8) Co je to rychlostní potenciál? Jak určíme rychlosť v určitém bodě pomocí potenciálu?
- 9) Které základní případy potenciálního proudění znáte?
- 10) Jak se mění rychlosť se souřadnicemi u pramene?
- 11) Jak se mění rychlosti a tlak s odlehlosťí od středu potenciálního víru?
- 12) Jaký je princip skládání proudění?
- 13) Jak řešíme obtékání rovinného polotělesa?
- 14) Co je to dipól?
- 15) Jak se řeší obtékání válce kruhového průřezu?
- 16) Jak řešíme obtékání rotujícího válce?

### Víte, že

- potenciální vír je jen velmi přibližným modelem proudění se kterým se setkáváme buď v přírodě - víry ve vodě nebo v atmosféře - prachový vír, tornádo tropické cyklóny (hurikán, tajfun), nebo v technické praxi jako např. v odlučovačích prachu - cyklonech, hydrocyklonech atp.
- malström je nebezpečný vír vznikající v mořském průlivu Moskenstraumen v Lofotských ostrovech u severozápadního pobřeží Norska. Běžně rozšířená představa, že zde odtéká voda otvorem ve dně vycházela ze zkušenosti, že při výtoku vody z umyvadla se také vytvoří vtokový vír. Ve skutečnosti průliv není bezedený, největší hloubka je 36 m. Průliv, kterým teče voda při přílivu do zálivu Vestfjorden je úzkým hrdlem se skalnatým a písčitým dnem, které stoupá od západu k východu. Až do jedné čtvrtiny výšky přílivu teče v průlivu všechna voda na východ. Když je příliv asi v jedné polovině okrajové proudy na severu a jihu se obrátí a tečou na západ, zatímco ve středu voda stále proudí na východ. Na rozhraní těchto protisměrných proudů pak vznikají divoké víry a vysoké vlny. Je-li výška přílivu ve svých třech čtvrtinách obrací se i střední proud a jako velký vír stáčející se ve směru hodinových ručiček se připojí k proudění západním směrem. Zvlášť nebezpečné situace, zvláště pro menší lodě nastávají při kombinaci špatného počasí s mořským dmutím.
- ve dvacátých letech tohoto století se objevily plachetnice bez plachet. Holandský inženýr A. Flettner využil Magnusova efektu a dal si v roce 1923 patentovat loď, jež měla rotující válce místo plachet. Z plachetnice „Buckau“, kterou přejmenoval na „Baden Baden“ sňal plachty a nahradil je dvěma rotujícími válci o průměru 3 m a výšce 13 m, otáčely se rychlosťí 750 1/min motorem o výkonu asi 4,5 kW. Loď plula rychlosťí asi 15-18 km/hod. V roce 1926 přeplul Atlantik. Pak postavil novou loď „Barbara“ se třemi rotory a dopravoval s ní citrusové plody ze Středozemního moře. Během tohoto provozu se ukázaly nevýhody - motory i rotující válce vyžadovaly údržbu, bylo nutno vézt sebou palivo, to zvětšovalo náklady a zmenšovalo nákladový prostor oproti placheticím, přičemž zůstala zachována nevýhoda plachetnic - nedodržování jízdního řádu při slabém větru nebo bezvětrí, neboť slabé motory nestačily na pohon celé lodě. Když ve třicátých letech nastala krize, skončila existence rotorové lodě. Tento princip pohonu lodí popularizoval i Albert Einstein.

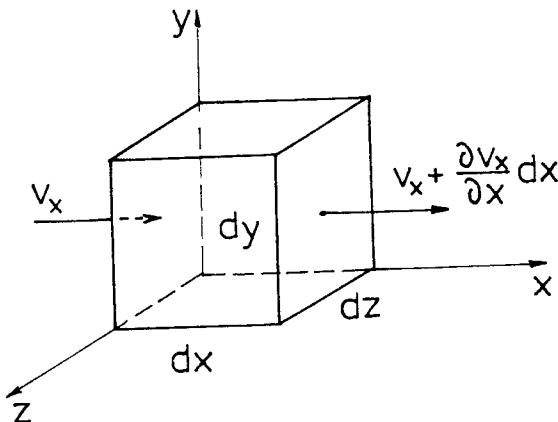
## 17. SOUSTAVA ROVNIC PRO NEWTONSKÉ NESTLAČITELNÉ TEKUTINY

V této kapitole si odvodíme podrobněji základní rovnice mechaniky tekutin v diferenciálním tvaru pro prostorové nestacionární proudění nestlačitelné newtonské tekutiny s obsáhlým komentářem, než tomu bylo při odvozování základních rovnic potenciálního proudění v kap. 16.

### 17.1 Rovnice kontinuity

Vytkněme si elementární kontrolní objem ve tvaru hranolku o rozměrech  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , který se nepohybuje, obr. 118. Všemi šesti stranami protéká tekutina - třemi vtéká a třemi vytéká. Rozměry hranolu jsou tak malé, že považujeme rychlosť po celé ploše stran za konstantní.

Vzhledem k rozměrům molekul a jejich střední volné dráze jsou rozměry hranolku dostatečně veliké, aby obsahoval tak velké množství molekul tekutiny, že ji můžeme považovat za kontinuum. Pak lze všechny její vlastnosti a veličiny popisující proudění tekutiny vyjádřit spojitou funkci souřadnic a času např.  $v_x = v_x(x, y, z, t)$ .



Obr. 118 Elementární kontrolní objem. Na obrázku je znázorněn jen přítok a odtok tekutiny ve směru  $x$ .

Na malé vzdálenosti např.  $dx$  se může změnit veličina, např.  $v_x$ , jen o malý přírůstek, který můžeme považovat za lineárně závislý na rychlosti změny veličiny v příslušném směru, což je rovno příslušné parciální derivaci, např.  $\partial v_x / \partial x$  a na vzdálenosti na které přírůstek stanovuje např.  $dx$ . Např. přírůstek složky rychlosti  $v_x$  na vzdálenosti  $dx$  mezi vstupním a výstupním průřezem kontrolního objemu, obr. 118, bude dán součinem  $\frac{\partial v_x}{\partial x} dx$ . Jestliže se rychlosť  $v_x$  v kladném směru  $x$  zvětšuje bude  $\partial v_x / \partial x > 0$ , jestliže se  $v_x$  v kladném směru  $x$  zmenšuje, bude  $\partial v_x / \partial x < 0$ . Pro zbývající směry  $y$  a  $z$  se budou naše úvahy opakovat.

Vyjádřeme si nyní přehledně hmotnostní toky jednotlivými stranami kontrolního objemu jako součin hustota  $\rho$  krát normálová složka rychlosti krát velikost plošky:

SMĚR	PŘÍTOK	VÝTOK
$x$	$\rho v_x dy dz$	$\rho \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy dz$
$y$	$\rho v_y dz dx$	$\rho \left( v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) dz dx$
$z$	$\rho v_z dx dz$	$\rho \left( v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) dx dz$

Aby byl splněn zákon o zachování hmotnosti musí se u nestlačitelných tekutin přítok rovnat výtoku z kontrolní oblasti (nestačí napsat tuto bilanční rovnici jen pro jeden směr). Zpravidla se celková bilance toků píše slovy ve tvaru

$$\sum \text{výtoků} - \sum \text{vtoků} = 0.$$

Sečteme-li zvlášť výtoky a přítoky a pak je odečteme dostaneme po zkrácení hustoty  $\rho$  proti nule

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (201)$$

To je diferenciální tvar rovnice kontinuity pro prostorové stacionární i nestacionární proudění vazké i nevazké nestlačitelné tekutiny. Při rovinném proudění je  $v_z$  i  $\partial v_z / \partial z$  rovno nule a dostaneme rovnici (160).

*Poznámka: zavedením symbolického vektoru (Hamiltonův operátor nabla)  $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$  lze rovnici*

*(201) zapsat jako skalární součin vektorů  $\nabla \cdot \vec{v}$ , který se označuje jako divergence  $\nabla \cdot \vec{v} = \text{div} \vec{v} = 0$ . Pro jednorozměrné proudění dostaneme z rovnice (201) zvláštní tvar rovnice kontinuity  $v = \text{konstanta}$ , neboť jsme zvolili u kontrolního objemu stejně veliké vstupní a výstupní průřezy. U stlačitelné tekutiny se může měnit i hustota  $\rho$  nejen v prostoru, ale i s časem a jestliže se uvnitř kontrolního objemu bude hustota zvětšovat  $\partial \rho / \partial t > 0$  bude se část přítékající tekutiny uvnitř akumulovat a přítok bude větší než výtok. Bilanční rovnice bude nyní mít tvar*

$$\sum \text{výtoků} - \sum \text{přítoků} + \text{akumulace} = 0, \text{ resp.}$$

$$\nabla(\rho \vec{v}) + \partial \rho / \partial t = 0.$$

*Ještě složitější situace nastává při vícefázovém proudění, kdy některé složky mohou vznikat a jiné zanikat.*

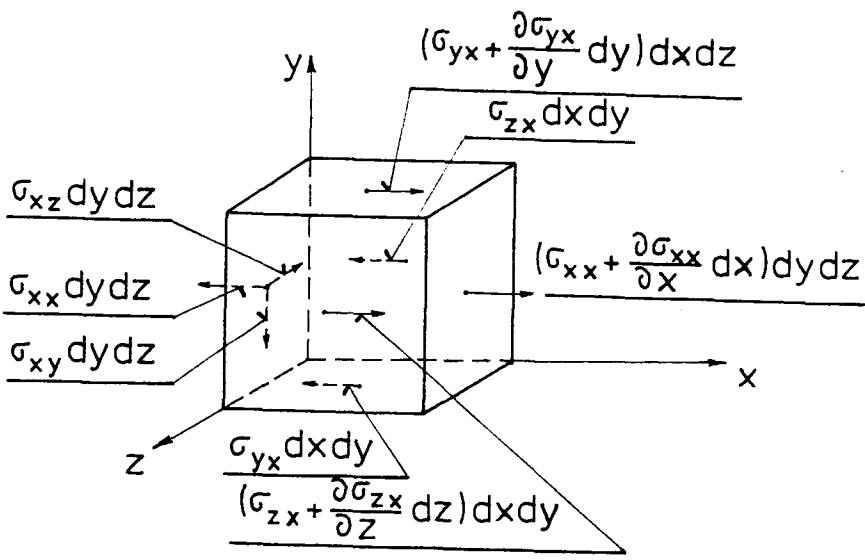
## 17.2 Navierovy - Stokesovy rovnice

Navierovy-Stokesovy rovnice odvodíme stejným způsobem jako Eulerovy pohybové rovnice kap. 16 odstavec 1c, ale nové viskózní členy nám trochu zkomplikují odvození.

Vytkněme si opět kontrolní částici ve tvaru hranolku  $dx, dy, dz$ , jako při odvození rovnice kontinuity, odst. 17.1 a podle Newtonova zákona  $\sum d\vec{F} = dm \cdot d\vec{v} / dt$  napíšeme pohybové rovnice pro všechny tři směry. Tekutinu pokládáme opět za kontinuum. Na částici tekutiny působí síly hmotnostní (objemové) a povrchové. Hmotnostní síly stanovíme jako součin vektoru místní intenzity hmotnostních sil  $\vec{K}$ , se složkami  $K_x, K_y, K_z$  a hmotnosti částice  $dm = \rho dx dy dz$ , viz též kap. 3 odst. 2. Složka hmotnostní síly ve směru  $x$  bude rovna  $K_x dm = K_x \rho dx dy dz$ .

Jestliže v ideální nevazké tekutině působí na stěny částice pouze tlakové síly tj. pouze normálové složky, pak stejně jako v hydrostatice bude tlak  $p$  v určitém místě nezávislý na směru a bude určen pouze svou velikostí (zde je tlak  $p$  skalár). Při proudění vazké tekutiny budou na jednotlivé stěny částice působit nejen normálové, ale i tangenciální složky povrchových sil. To znamená, že směr výsledné povrchové síly působící na stěnu částice nesouhlasí se směrem normály a tu pak rozkládáme do tří složek. Dělíme-li tyto složky velikostí plochy dostaváme napětí, jak je naznačeno na obr. 119.

Kvůli přehlednosti jsou všechny tři složky síly nakresleny pouze na levé svislé stěně o velikosti  $dydz$ . Každá složka napětí má dva indexy. První charakterizuje směr normály uvažované plošky a druhý index udává směr napětí. Takže napětí působící na výše zmíněnou levou svislou plošku jsou označena všechna prvním indexem  $x$ .



Obr. 119 Elementární částice tekutiny s vyznačenými povrchovými silami ve směru  $x$ . Jen na levé stěně jsou nakresleny všechny tři složky povrchové síly působící na tuto stěnu.

Normálové napětí má směr osy  $x$  a je označeno  $\sigma_{xx}$  (všechna normálová napětí mají oba indexy stejné). Tečné napětí působící na téže ploše ve směru  $y$  je označeno  $\sigma_{xy}$  a tečné napětí ve směru  $z$  je označeno  $\sigma_{xz}$  (tečná napětí mají rozdílné indexy). Obvykle jsou napětí působící na třech stranách procházejících počátkem souřadného systému (nebo bližší k počátku) orientována záporně a na zbývajících třech stranách jsou napětí (zvětšená o elementární přírůstky) orientována v kladném směru souřadných os. Abychom napsali pohybovou rovnici ve směru  $x$ , musíme uvažovat všechna napětí jejichž druhý index je  $x$ , obr. 119. Začneme s normálovými napětími: na levou plochu působí síla  $(-\sigma_{xx} dy dz)$ , na pravou plochu síla  $(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx) dy dz$  a protože mají opačný smysl je výsledná síla rovna  $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz$ .

Z tečných napětí je třeba uvažovat  $\sigma_{yx}$  a  $\sigma_{zx}$ . Na zadní plošku působí ve směru  $x$  tečná síla  $(-\sigma_{zx} dx dy)$  a na přední  $(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz) dx dy$  a jejich výslednice je rovna  $\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz dx dy$ .

Podobně výsledná tečná síla působící na dolní a horní plošku ve směru  $x$  bude rovna  $\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy dz$ . Dosadíme-li nyní do pohybového zákona napsaného pro směr  $x$

$$\sum dF_x = dm \frac{dv_x}{dt}$$

za hmotnostní i povrchové síly, dostaneme

$$K_x \rho dx dy dz + \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{dv_x}{dt} .$$

Zkrátíme-li objem částice  $dx dy dz$  dostaneme pohybové rovnice v napětích - analogicky bychom odvodili i rovnice pro směr  $y$  a  $z$ :

$$\begin{aligned}
 \rho K_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} &= \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\
 \rho K_y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} &= \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\
 \rho K_z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right).
 \end{aligned} \tag{202}$$

Abychom dostali N. S. rovnice musíme dosadit za jednotlivá napětí tzv. konstituční rovnice, jež charakterizují chování tekutiny za působení sil - resp. napětí. Pro jednoduché přímočaré smykové toky platila jednoduchá konstitutivní rovnice - Newtonův zákon rov. (3). Pro prostorová proudění tento zákon zobecnil Stokes. Pro newtonské viskózní nestlačitelné tekutiny platí:

$$\begin{aligned}
 \text{tečná napětí} \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} &= \eta \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\
 \sigma_{yz} = \sigma_{zy} &= \eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\
 \sigma_{zx} = \sigma_{xz} &= \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{203}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a normálová} \quad \sigma_{xx} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \\
 \sigma_{yy} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} \\
 \sigma_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{204}$$

Konstitutivní rovnice (203) a (204) vyjadřují lineární závislost napětí na rychlosti deformace částice. Při jednorozměrném proudění ve směru  $x$  ( $v_y = v_z = 0$ ) dostaneme z horní rovnice (203) Newtonův zákon (3). Sečteme-li rovnice (204) a vezmeme-li v úvahu rovnici kontinuity (201) dostaneme

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \tag{205}$$

tj. za statický tlak v proudící vazké tekutině je možno považovat aritmetickou střední hodnotu normálových napětí působících ve třech libovolně orientovaných vzájemně kolmých rovinách procházejících jedním bodem, vztahu se záporným znaménkem.

Po dosazení rovnic (203) a (204) do (202) dostaneme např. pro směr  $x$

$$\begin{aligned}
 \rho K_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \right) &= \rho \frac{dv_x}{dt} \\
 \rho K_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \eta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \rho \frac{dv_x}{dt}.
 \end{aligned}$$

Poslední člen na levé straně obsahuje rovnici kontinuity (201) a proto odpadá. Podobným postupem dostaneme rovnice i pro směr  $y$  a  $z$ :

$$\begin{aligned}
 \rho K_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) &= \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\
 \rho K_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) &= \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\
 \rho K_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) &= \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \quad (206)$$

To jsou základní diferenciální pohybové rovnice pro vazké newtonské nestlačitelné tekutiny nazývané Navierovy - Stokesovy rovnice. Spolu s rovnicí kontinuity (201) tvoří soustavu čtyř rovnic pro čtyři neznámé tlak  $p$  a tři složky rychlosti  $v_x, v_y, v_z$ . Při řešení konkrétní úlohy musí být zadány okrajové a při nestacionárním proudění i počáteční podmínky.

*Poznámka: jestliže rov. (206) dělíme hustotou  $\rho$  pak místo dynamické viskozity  $\eta$  se bude počítat s kinematickou viskozitou  $v$ . Viskoza je funkci tlaku a hlavně teploty, ale pokud jsou změny těchto veličin malé považujeme viskozitu za konstantu, zvláště u kapalin. Jsou-li osy  $x$  a  $z$  orientovány vodorovně a osa  $y$  svisle vzhůru, pak za působení pouze zemské tíže budou  $K_x = K_z = 0$  a  $K_y = -g$ . Jestliže rovnice (206) postupně vynásobíme jednotkovými vektory  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  a sečteme můžeme je zapsat jednou vektorovou rovnici*

$$\rho \vec{K} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (207)$$

kde vektor  $\nabla p$  je gradient tlaku.

*Okrajovými podmínkami (kinematickými) jsou zadány složky rychlosti: na stěně musí být normálová složka relativní rychlosti rovna nule (neprostupnost stěny platí i pro ideální nevazkou tekutinu). Je-li stěna v klidu je normálová složka rychlosti rovna nule. Pro tangenciální složku relativní rychlosti u vazké tekutiny platí totéž co pro normálovou - je rovna nule (tekutina na stěně lží, u ideální nevazké tekutiny jsou tangenciální složky rychlosti na stěně rozdílné od nuly). N. S. rovnice jsou nelineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu a s výjimkou jednoduchých případů jen obtížně analyticky řešitelné. Byla provedena řada přibližných řešení. V poslední době se řešení provádí výhradně numericky pomocí počítačů. Cílem úvodního kurzu mechaniky tekutin je rozvinout u studentů „cit“ pro správné řešení libovolné inženýrské úlohy.*

*V mnoha případech je výhodnější použít k řešení úloh N. S. rovnice nikoli v kartézských ale v cylindrických nebo sférických souřadnicích.*

## Víte, že

- Josef a Etienne Montgolfierové vypustili 15. listopadu 1782 v Avignonu model balónu plněného teplým vzduchem.
- Pilatre de Rozier vystupuje 15. října 1783 v Paříži do vzduchu s upoutanou montgolfierou a 21. listopadu 1783 spolu s markýzem d'Arlandem uskutečnil první volnou plavbu z Muette do Gobelins za 25 minut. O několik dní později vykonali mnohem delší plavbu (asi 15 km) J. A. C. Charles a M. N. Robert v balónu naplněném vodíkem, trvající tři a půl hodiny.
- r. 1809 George Cayley uveřejňuje projekt letadla s nosnou plochou, vrtulí, výškovým a směrovým kormidlem.
- Otto Lilienthal koná pokusy se závěsnými kluzáky v letech 1890 - 96, zavádí poláru profilu, vykonal asi 100 letů až 350 m dlouhých než smrtelně havaroval.
- bratři Wilbur a Orville Wrightové provedli 17. prosince 1903 v Kitty Hawk, Severní Karolině, první let s motorovým letadlem řízeným pilotem, trvající asi 13 vteřin po 12 metrovém rozjezdu. Výška letu 3 m, délka 36 m. Rozpětí letadla 12,25 m, váha 338 kg, motor asi 12 kW.
- 25.7.1909 přeletěl L. Blériot kanál La Manche široký 40 km za 37 minut rychlosť 65 km/hod.
- 20.5.1927 přeletěl Ch. Lindbergh na letadle „Spirit of St. Louis“ Atlantický oceán z New Yorku do Paříže za 33 hodiny 31 minut rychlosť 187 km/hod.
- 14.10.1947 překonal Ch. Yeager (USA) na letadle Bell X-1 s raketovým motorem rychlosť šíření zvuku.

Další podrobnosti z historie letectví se dozvete v přednáškách Dějiny techniky - letectví.

## Příklad P 17.1

Dokažte, že směr geostrofického větru  $\vec{v}$  je shodný se směrem tečny k izobáram (viz též příklad P 10.1). Země se otáčí úhlovou rychlostí  $\vec{\omega}$  a známe místní tlakový gradient  $\text{grad } p \equiv \nabla p$ .

Dáno:  $\text{grad } p$ ,  $\vec{\omega}$

Určit: směr  $\vec{v}$

Rozbor:

Spojíme-li souřadným systém s rotujícím povrchem Země musíme vzít v úvahu i síly vznikající od unášivého pohybu tj. odstředivou sílu  $\rho|\vec{\omega}^2 \vec{r}|$  a Coriolisovu sílu  $2\rho[\vec{\omega} \times \vec{v}]$ , takže rovnice (207) bude mít tvar

$$\rho \vec{K} - \nabla p - \rho \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}] - 2\rho[\vec{\omega} \times \vec{v}] + \eta \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} ,$$

kde první člen na levé straně je hmotnostní síla - tíha, která nemá složku do vodorovného směru. Druhý člen je tlakový gradient, je to vektor kolmý na izobary. Třetí člen je odstředivá síla v němž vystupuje úhlová rychlosť rotace Země  $\omega$  v kvadrátu a protože je  $\omega$  velmi malé ( $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ) je zanedbatelný proti ostatním členům. Čtvrtý člen je Coriolisova síla a pátý člen představuje třetí sílu. Geostrofický vítr se určuje pro výšky nad atmosférickou mezní vrstvou, kde je vliv viskozity zanedbatelný, zanedbáme i tento člen. Při rovnoramenném a ustáleném proudění bude i pravá strana rovnice rovna nule. Po úpravě dostaneme vektorovou rovnici

$$2[\vec{\omega} \times \vec{v}] = -\frac{1}{\rho} \nabla p .$$

Z této rovnice lze udělat závěr: Coriolisovo zrychlení je vektor kolmý k vektoru rychlosti  $\vec{v}$ . Protože levá strana rovnice se musí rovnat pravé straně musí být i  $\nabla p$  kolmé k  $\vec{v}$ . Ale i izobary jsou kolmé k  $\nabla p$ . To znamená směr geostrofického větru je shodný se směrem tečny k izobaře a že izobary jsou shodné s proudnicemi, viz příklad P 10.1.

### **Víte, že**

- slovo cyklóna znamená v řečtině hada stočeného do klubka.
- kruhový pohyb vzduchu v atmosféře bývá také označován cyklóna. Zvlášt' nebezpečné jsou tropické cyklóny, jež mají různé místní názvy; v karibské oblasti a Střední Americe hurikán, v jihovýchodní Asii tajfun, na severozápadním pobřeží Austrálie willy-willy. Na počátku čtyřicátých let vznikla tradice označovat je jmény, do roku 1979 ženskými, později i mužskými. Na Zemi vzniká ročně více než 100 tropických cyklón. Z toho asi polovina se pohybuje nad širým oceánem. Vznikají v pásmu pasátů, tj. mezi  $10^\circ$  a  $20^\circ$  zeměpisné šířky na obou polokoulích. Na podzim vznikají dvakrát častěji než v létě a v zimě dvacetkrát méně než na podzim, kdy je teplota vody na povrchu oceánu největší. Sluncem ohřívaná voda se vypařuje, vlivem proudění se tvoří husté mraky, z nichž vydatně prší, při kondenzaci páry se uvolňuje výparné teplo a asi 3% jako kinetická energie, jež představuje tropickou cyklónu. Průměr hurikánu může být až 500 km a asi desetinu průměru zaujímá tzv. „oko“ - tišina v jeho středu (analogie jádra potenciálního víru), kde vanou jen slabé větry a mraky jsou řidké. Kolem oka je spirálovitě rozložena hustá vrstva mraků sahajících až do výšky 16 km. Ve středu víru bývá nízký tlak, často až o 5% nižší než na okraji. Rychlosť vzduchu bývá 120 až 240 km/hod. Nad pevninou hurikán slabne.

## LITERATURA

- Adamec, J., Lísal, M., Váradiová, B.: Mechanika tekutin. Sbírka příkladů. ČVUT Praha, 1993, 1996
- Ježek, J.: Hydromechanika v příkladech. ČVUT Praha, 1975, 1988
- Ježek, J., Váradiová, B.: Mechanika tekutin pro pětileté obory. ČVUT Praha, 1983, 1991
- Jirsák, M.: Experimentální zařízení a metody v mechanice tekutin, ČVUT Praha, 1977
- Kocáb, J., Adamec, J.: Letadlové pohonné jednotky. NADAS Praha 1990
- Mašťovský, O.: Hydromechanika, SNTL Praha 1956, 1963
- Noskiewič, J. a kol.: Mechanika tekutin. SNTL/ALFA Praha 1987
- Nožička, J.: Mechanika a termodynamika. ČVUT, Praha 1991
- Tesař, V.: Mezní vrstvy a turbulence. ČVUT Praha 1984
- Valenta, J. a kol.: Biomechanika srdečně cévního systému, ČVUT Praha 1992
- V němčině:
- Albring, W.: Angewandte Strömungslehre Steinkopf, Dresden 1961, 1966, 1970
- Prandtl, L., Oswatitsch, K., Wieghardt, K.: Fuhrer durch die Strömungslehre Vieweg, Braunschweig, 1969
- Spurk, J. H.: Strömungslehre, Springer, Berlin 1989
- Szabó, I.: Geschichte der mechanischen Prinzipien, Birkhauser, Basel, 1979
- V angličtině:
- Fox, R. W., Mc Donald, A. T.: Introduction to Fluid Mechanics, J. Wiley & sons, New York, 1994
- Streeter, V. L.: Fluid Mechanics, Mc Graw-Hill, New York, 1971
- White, F. M.: Fluid Mechanics, Mc Graw-Hill, New York, 1986

Technické vysoké školy nesou hlavní zodpovědnost za výchovu technické inteligence a tím významně pomáhají vytvářet perspektivu hospodářské prosperity. Kromě garantované státní podpory je třeba hledat další zdroje - mimo jiné i zakládáním nadací. V roce 1993 byla na strojní fakultě ČVUT v Praze založena a řádně zaregistrována

## ZVONÍČKOVA NADACE FAKULTY STROJNÍ ČVUT.

**Správní rada nadace** touto cestou podává základní informace o Zvoníčkově nadaci a hledá vhodné sponzory pro činnosti, které směřují ke zvýšení úrovně studia a pro řešení projektů, které se ucházejí o podporu Zvoníčkovy nadace.

**Finanční prostředky** **Zvoníčkovy nadace fakulty strojní** jsou určeny především na podporu výchovy studentů, doktorandů a mladých perspektivních pedagogů a na podporu jejich účasti na tuzemských i zahraničních vědeckých konferencích a seminářích, na oceňování Studentské tvůrčí činnosti, diplomových prací, na řešení vybraných projektů nebo tematických úkolů, podporovaných sponzory, na pořádání přednášek významných odborníků a na zkvalitnění technického vybavení laboratoří fakulty.

**Sponzorům nadace nabízíme** poradenskou a konzultační činnost, jejich propagaci na fakultě a zveřejnění jejich podpory tématických vědeckých projektů, dále spoluúvlastnictví výsledků, příp. realizaci praktických projekčních výstupů a kontakt se studenty, zejména vyšších ročníků. Vědecký a odborný potenciál strojní fakulty není zanedbatelný a je sponzorům k dispozici. Cílenými finančními prostředky se vytváří potřebný prostor pro hmotné zabezpečení účelné a funkční spolupráce fakulty s jejimi partnery z průmyslu, výzkumu a obchodu, pro výchovu nastupující generace a pro budoucí prosperitu podporovaných oborů.

### Kontaktní adresa:

**ZVONÍČKOVA NADACE**, Fakulta strojní ČVUT v Praze, Technická 4, 166 07 Praha 6

TEL.: (+42 2) 2435 2564 (předseda správní rady ZN Prof.Ing. Pavel Zítek, DrSc.), 2435 2503 (tajemník ZN Doc.Ing. Pavel Baumruk, CSc.),

FAX: (+42 2) 24310292,

E-MAIL: ZITEK@fsid.cvut.cz, BAUMRUK@fsid.cvut.cz

### Bankovní spojení:

Komerční banka, a.s., pobočka Praha 6, Dejvická 5, PSČ 160 59, číslo účtu 196021100227/0100

Prof. Ing. Jan Ježek, DrSc., Ing. Blanka Váradiová, CSc., Ing. Josef Adamec, CSc.

### MECHANIKA TEKUTIN

Vydalo Vydavatelství ČVUT, Zikova 4, 166 36 Praha 6,  
v červnu 2000 jako svou 9620. publikaci.

Vytisklo Ediční středisko ČVUT, Zikova 4, Praha 6.  
150 stran, 139 obrázků.

Dotisk třetího přepracovaného vydání. Náklad 500 výtisků. Rozsah 14,96 AA, 15,29 VA.

PLU

2502

Kč 85,-