

JIŘÍ FÜRST

METODA KONEČNÝCH OBJEMŮ I

Toto dílo podléhá licenci Creative Commons Uveďte původ-Neužívejte
dílo komerčně-Zachovejte licenci 4.0 Mezinárodní. Pro zobrazení
licenčních podmínek navštivte [https://creativecommons.org/
licenses/by-nc-sa/4.0/](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).



Obsah

1	Základní rovnice mechaniky tekutin	7
1.1	Reynoldsov transportní teorém	7
1.1.1	Zákon zachování hmoty	9
1.1.2	Zákon zachování hybnosti	9
1.1.3	Zákon zachování momentu hybnosti	10
1.1.4	Zákon zachování celkové energie	10
2	Lineární rovnice konvekce v 1D	11
2.1	Charakteristiky pro lineární rovnici konvekce	11
2.2	Počáteční úloha pro lineární konvekci	12
2.3	Směšená úloha pro rovnici konvekce	12
2.4	Numerické řešení počáteční úlohy pomocí metody konečných diferencí	14
2.4.1	Lokální chyba aproximace, konzistence	15
2.4.2	Stabilita lineárních schémat	16
2.4.3	Konvergence, Laxova věta o ekvivalenci.	18
3	Nelineární rovnice konvekce v 1D	21
3.1	Kvazilineární tvar rovnice a její charakteristiky	21
3.2	Nespojitosti a slabé řešení	23
3.3	Rychlost pohybu nespojitosti	26
3.4	Entropická podmínka	26
3.5	Riemannův problém	28
3.5.1	Řešení Riemannova problému ve tvaru nespojitosti	29
3.5.2	Řešení Riemannova problému ve tvaru zředějící vlny	29
4	Hyperbolické systémy rovnic v 1D	31
4.1	Lineární hyperbolické systémy	32
4.2	Riemannův problém pro lineární systém	34
4.3	Nelineární hyperbolický systém	34
4.4	Riemannův problém pro nelineární hyperbolický systém	39
5	Metoda konečných objemů pro jednorozměrný skalární problém	47
5.1	Odvození metody konečných objemů	47

5.2	Konzistentnce numerického toku	49
5.3	Konzervativita	51
5.4	Konvergence (Laxova-Wendroffova věta)	53
6	TVD a monotónní schémata pro jednorozměrný problém	55
6.1	TVD schéma pro skalární konvekci	55
6.2	Monotónní schémata	58
6.3	Konstrukce TVD schémat vyššího řádu přesnosti	59
6.4	Zobecnění pro libovolné a	62
6.5	TVD schéma pro hyperbolické systémy	64
7	Godunovova metoda pro jednorozměrný problém	69
7.1	TVD rozšíření Godunovovy metody na vyšší řád přesnosti.	70
7.2	Rozšíření pomocí NVD interpolace	72
7.3	Godunovova metoda pro systémy rovnic	74
8	Numerický tok pro jednorozměrný hyperbolický systém	77
8.1	Roeho schéma	77
8.1.1	Roeho schéma pro Eulerovy rovnice	78
8.1.2	Roeho schéma pro rovnice mělké vody	81
8.2	HLL schéma	83
8.3	AUSM schéma	84
9	Jednorozměrné proudění trubící s nekonstantním průřezem	87
9.1	Matematický model	87
9.2	Formulace smíšené úlohy	89
9.2.1	Proudění trubící s podzvukovým vstupem a pod- zvukovým výstupem	90
9.2.2	Proudění trubící s podzvukovým vstupem a nad- zvukovým výstupem	91
9.3	Diskretizace pomocí MKO	91
9.3.1	Diskretizace zdrojového členu	91
9.3.2	Diskretizace okrajové podmínky na vstupu	93
9.3.3	Diskretizace okrajové podmínky na výstupu	95
10	Jednorozměrné proudění mělké vody přes nerovné dno	97
10.1	Matematický model	97
10.2	Okrajové podmínky a jejich implementace	98
10.3	Aproximace zdrojového členu	99
11	Metoda konečných objemů pro vícerozměrné problémy	103
11.1	Numerický tok pro vícerozměrný problém	108
11.1.1	HLL tok pro dvourozměrné Eulerovy rovnice	108
11.1.2	AUSM schéma pro dvourozměrný případ	109
11.2	Podmínka stability pro vícerozměrný problém	110

Úvod

Tento text je určen jako podpůrný studijní materiál pro předmět *Metoda konečných objemů I* vyučovaný na FS ČVUT v Praze. Text začal vznikat v době omezené výuky z důvodu pandemie Covid-19 jako doplněk k on-line přednáškám a je průběžně aktualizován.

Vzhledem k okolnostem vzniku nelze tento text v žádném případě považovat za bezchybný a jediný zdroj informací a čtenáři se důrazně doporučuje použití další literatury.

1

Základní rovnice mechaniky tekutin

V této kapitole odvodíme základní rovnice mechaniky tekutin. Přestože podobné odvození lze nalézt ve většině knížek věnovaných mechanice tekutin, považuji za přínosné toto odvození uvést i zde a to především kvůli zdůraznění integrálního tvaru rovnic.

1.1 Reynoldsův transportní teorém

Základním nástrojem pro odvození rovnic mechaniky tekutin je tzv. Reynoldsův transportní teorém. Ten dává návod pro výpočet tzv. materiálové derivace. Veličinou $\phi(\vec{x}, t)$ označíme hustotu nějaké veličiny. Její celkové množství v časově závislém objemu $\Omega(t)$ je tedy

$$\Phi(t) = \iiint_{\Omega(t)} \phi(\vec{x}, t) d\vec{x}. \quad (1.1)$$

Pro vyjádření rychlosti změny Φ potřebujeme spočítat časovou derivaci. Nejprve převedeme vhodnou substitucí integrál v časově proměnné oblasti na integrál přes fixní oblast. K tomuto účelu zavedeme zobrazení

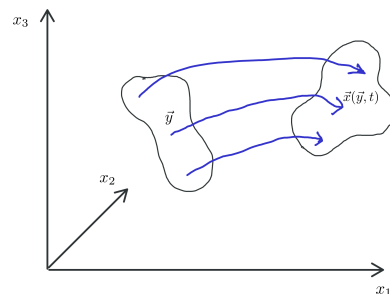
$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{y}, t), \quad (1.2)$$

kde symbolem \vec{x} značíme aktuální souřadnici bodu v čase $t \geq 0$ a symbolem \vec{y} souřadnici toho samého bodu v referenčním čase $t = 0$.

U této transformace požadujeme následující vlastnosti:

1. Spojitost prvních derivací vzhledem k \vec{y} a t ,
2. $\forall t \geq 0$ je zobrazení $\vec{x}(\cdot, t)$ prosté (tj. každému bodu v referenční konfiguraci pro $t = 0$ odpovídá právě jeden bod v aktuální konfiguraci pro $t \geq 0$,
3. pro $t = 0$ je zobrazení $\vec{x}(\cdot, t)$ identitou, tj. $\vec{x}(\vec{y}, 0) = \vec{y}$.

Nejčastěji je toto zobrazení definováno pomocí tzv. materiálových bodů kdy pro pevně zvolené \vec{y} představuje $\vec{x}(\vec{y}, t)$ trajektorii částice.



Obrázek 1.1: Kontinuum v referenčním čase $t = 0$ a čase $t > 0$.

Není to však nevyhnutelně nutné a zobrazení nemusí být nutně spojeno s pohybem jednotlivých bodů kontinua. My však budeme v dalším textu uvažovat, že zobrazení je dáno pohybem jednotlivých materiálových bodů kontinua. Potom pro pevně zvolený materiálový bod (tj. $\vec{y} = konst.$) je rychlost

$$\vec{u} = \frac{\partial \vec{x}(\vec{y}, t)}{\partial t}. \quad (1.3)$$

Pomocí tohoto zobrazení lze integrál (1.1) převést na integrál přes referenční oblast $\Omega(0)$, tedy

$$\Phi(t) = \iiint_{\Omega(t)} \phi(\vec{x}, t) d\vec{x} = \iiint_{\Omega(0)} \phi(\vec{x}(\vec{y}, t), t) J d\vec{y}, \quad (1.4)$$

kde $J = |\det(\partial \vec{x} / \partial \vec{y})|$ je absolutní hodnota determinantu Jakobiánu transformace (viz pravidla pro substituci v integrálu).

Potom tedy

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(0)} \phi(\vec{x}(\vec{y}, t), t) J d\vec{y} = \\ &= \iiint_{\Omega(0)} \frac{\partial \phi(\vec{x}(\vec{y}, t), t)}{\partial t} J d\vec{y} + \iiint_{\Omega(0)} \phi(\vec{x}(\vec{y}, t), t) \frac{\partial J}{\partial t} d\vec{y}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

První z integrálů je roven (pro stručnost jsou vynechávány argumenty funkcí)

$$\iiint_{\Omega(0)} \frac{\partial \phi(\vec{x}(\vec{y}, t), t)}{\partial t} J d\vec{y} = \iiint_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) J d\vec{y}. \quad (1.6)$$

V posledním integrálu provedeme zpětnou substituci (tj. přejdeme zpět k souřadnicím \vec{x}), za časovou derivaci dosadíme rychlost a dostáváme

$$\iiint_{\Omega(0)} \frac{\partial \phi(\vec{x}(\vec{y}, t), t)}{\partial t} J d\vec{y} = \iiint_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \right) d\vec{x}. \quad (1.7)$$

Pro výpočet druhého z integrálů v rovnici (1.5) vypočteme nejprve $\partial J / \partial t$. Při odvození budeme využívat Einsteinovo sumační pravidlo (sčítáme přes dvojici stejných indexů). Nejprve vyjádříme J jako

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} \frac{\partial x_3}{\partial y_k}. \quad (1.8)$$

Potom je

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial y_i} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} \frac{\partial x_3}{\partial y_k} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} \frac{\partial^2 x_2}{\partial t \partial y_j} \frac{\partial x_3}{\partial y_k} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} \frac{\partial^2 x_3}{\partial t \partial y_k} = \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_1}{\partial y_i} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} \frac{\partial x_3}{\partial y_k} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} \frac{\partial u_2}{\partial y_j} \frac{\partial x_3}{\partial y_k} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} \frac{\partial u_3}{\partial y_k}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Toho se využívá například v tzv. zobecněné Lagrangeovsko-Eulerovské formulaci neboli *Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation*

ϵ_{ijk} je tzv. Levi-Civitaův symbol, $\epsilon_{ijk} = 1$ pro $i, j, k = 1, 2, 3$ nebo $2, 3, 1$ nebo $3, 1, 2$, $\epsilon_{ijk} = -1$ pro $i, j, k = 3, 2, 1$ nebo $2, 1, 3$ nebo $1, 3, 2$. Jinak je $\epsilon_{ijk} = 0$.

V posledním řádku jsme prohodili pořadí derivací a nahradili derivace \vec{x} pomocí rychlosti \vec{u} .

Dále vyjádříme derivace $\partial u_m / \partial y_n$ jako

$$\frac{\partial u_m}{\partial y_n} = \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_n} \quad (1.10)$$

a dostáváme

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_i} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} \frac{\partial x_1}{\partial y_k} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} \frac{\partial u_2}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \frac{\partial x_1}{\partial y_k} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} \frac{\partial u_3}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_k}. \quad (1.11)$$

Podrobněji rozebereme první výraz na pravé straně posledního vztahu. Máme sčítat (mimo jiné) přes l . Pro $l = 1$ je

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial u_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_i} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} \frac{\partial x_1}{\partial y_k} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} \frac{\partial x_1}{\partial y_k} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} J. \quad (1.12)$$

Pro $l = 2$ je

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial u_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_i} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} \frac{\partial x_1}{\partial y_k} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_2}{\partial y_i} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} \frac{\partial x_1}{\partial y_k} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.13)$$

V determinanty jsou totiž dva shodné řádky. Podobně to dopadne i pro $l = 3$. Máme tedy

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial u_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_i} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} \frac{\partial x_1}{\partial y_k} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} J. \quad (1.14)$$

Podobně upravíme i další dva členy a dostáváme

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} J = \nabla \cdot \vec{u} J. \quad (1.15)$$

Odtud tedy

$$\iint_{\Omega(0)} \phi \frac{\partial J}{\partial t} d\vec{y} = \iint_{\Omega(0)} \phi \frac{\partial u_i}{\partial x_i} J d\vec{y} = \iint_{\Omega(t)} \phi \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\vec{x}. \quad (1.16)$$

Kombinací vztahů (1.7) a (1.16) dostáváme

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \iiint_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial (\phi(\vec{x}, t) u_i(\vec{x}, t))}{\partial x_i} \right) d\vec{x}. \quad (1.17)$$

1.1.1 Zákon zachování hmoty

Dopsat ...

1.1.2 Zákon zachování hybnosti

Dopsat ...

1.1.3 *Zákon zachování momentu hybnosti*

Dopsat ...

1.1.4 *Zákon zachování celkové energie*

Dopsat ...

2

Lineární rovnice konvekce v 1D

Jedním z nejjednodušších modelů, na kterém lze prezentovat některé vlastnosti rovnic mechaniky tekutin, je tzv. skalární lineární rovnice konvekce. Ta má tvar

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je daná konstanta a $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R})$ je hledaná funkce. V dalším textu budeme pro stručnost zápisu někdy vynechávat argumenty funkce u a parciální derivace budeme značit pomocí dolních indexů. Rovnici tedy budeme zapisovat jako

$$u_t + au_x = 0. \quad (2.2)$$

2.1 Charakteristiky pro lineární rovnici konvekce

Při hledání řešení rovnice konvekce si můžeme úlohu zjednodušit. Namísto hledání řešení v celé polorovině $t \geq 0$ budeme řešení hledat pouze na nějaké křivce $x = \xi(t)$.

Místo $u(x, t)$ budeme tedy hledat funkci $\hat{u}(t) = u(\xi(t), t)$. Pro funkci \hat{u} máme

$$\frac{d\hat{u}(t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\xi}{dt}. \quad (2.3)$$

Pokud křivku zvolíme tak, že

$$\frac{d\xi}{dt} = a, \quad (2.4)$$

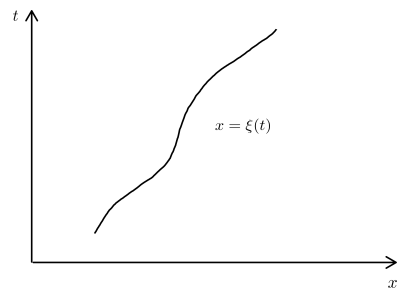
tak dostaneme (viz (2.1))

$$\frac{d\hat{u}(t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.5)$$

Tedy je-li u řešením dané rovnice, tak je každé křivce splňující rovnici $\frac{dx}{dt} = a$ konstantní!

Řešením rovnice $\frac{dx}{dt} = a$ je přitom sada přímek (nebo polopřímek uvažujeme-li $t \geq 0$) $x - at = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

$\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R})$ je prostor reálných funkcí zobrazujících polorovinu $t \geq 0$ do \mathbb{R} se spojitými prvními derivacemi.



Obrázek 2.1: K odvození charakteristik pro rovnici konvekce

Definice 1 Mějme dáno libovolné $c \in \mathbb{R}$. Polopřímku $x - at = c$ pro $t \geq 0$ nazveme **charakteristikou** rovnice $u_t + au + x = 0$.

2.2 Počáteční úloha pro lineární konvekci

Formulujme nyní počáteční (neboli Cauchyovu) úlohu pro lineární rovnici konvekce. U počáteční úlohy budeme řešit danou rovnici v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ a v čase $t = 0$ budeme mít zadanou tzv. počáteční podmínku. Počáteční úlohu tedy formulujeme takto:

Definice 2 Mějme danou funkci $u_0 \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$. Tu budeme nazývat **počáteční podmínkou**. **Počáteční úlohou** pro rovnici $u_t + au_x = 0$ pak budeme rozumět nalézt funkci $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R})$ takovou, že

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 : u_t + au_x = 0$,
2. $\forall x \in \mathbb{R} : u(x, 0) = u_0(x)$.

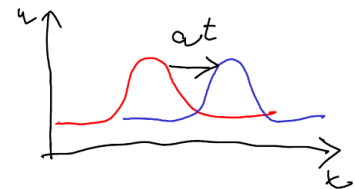
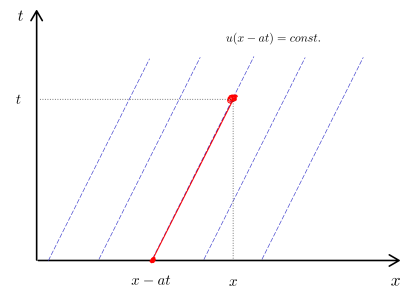
Ze zavedení a odvození charakteristik však víme, že řešení u zůstává konstantní podél každé z charakteristik. Řešení počáteční úlohy v libovolném bodě $[x, t]$ tedy můžeme snadno nalézt tak, že daným bodem vedeme charakteristiku a nalezneme její průsečík s osou x . Máme tedy

Věta 1 Řešením počáteční úlohy pro lineární rovnici konvekce je funkce

$$u(x, t) = u_0(x - at). \quad (2.6)$$

Řešení v čase $t > 0$ je tedy pouhým posunutím počáteční podmínky o at .

Poznamenejme, že výše uvedený vztah by bylo možné použít i pro počáteční podmínku mimo C^1 . Pak by však $u \notin C^1$ a nebylo by tedy řešením ve smyslu výše uvedené definice.

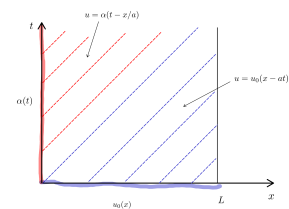


2.3 Smíšená úloha pro rovnici konvekce

Dalším typem úlohy je tzv. smíšená úloha. Tuto úlohu řešíme na omezeném intervalu $x \in [0, L]$. Na kraji intervalu musíme přidat tzv. okrajovou podmínku. Na rozdíl od rovnic druhého řádu však pro rovnici konvekce předepisujeme okrajovou podmínku pouze na jedné straně intervalu a to v závislosti na znaménku a .

Uvažujme nejprve $a > 0$.

Potom charakteristiky směřují doprava a počáteční podmínka určuje řešení pouze pro $x \geq at$. Okrajovou podmínku tedy budeme předepisovat na levém okraji intervalu, tj. v $x = 0$. Smíšenou úlohu pak budeme definovat následovně.



Obrázek 2.2: Smíšená úloha pro $a > 0$.

Definice 3 Mějme dán interval $[0, L]$, funkci $u_0 \in \mathcal{C}^1([0, L] \rightarrow \mathbb{R})$ a funkci $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R})$ a $a > 0$. **Smíšenou úlohou** pro rovnici $u_t + au_x = 0$ pak rozumíme nalézt funkci $u \in \mathcal{C}^1([0, L] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R})$ takovou, že

1. $\forall x \in (0, L), \forall t > 0 : u_t + au_x = 0$,
2. $\forall x \in [0, L] : u(x, 0) = u_0(x)$,
3. $\forall t \geq 0 : u(0, t) = \alpha(t)$.

Funkci $\alpha(t)$ nazveme **okrajovou podmínkou**. Řešení pak najdeme opět pomocí charakteristik. Zvoleným bodem vedeme charakteristiku. Ta se protne buď s osou x na v intervalu $[0, L]$, nebo s osou t pro $t > 0$. V prvním případě je řešení dáno počáteční podmínkou u_0 , ve druhém okrajovou podmínkou α . Z hladkosti u_0 a α vyplývá i hladkost řešení u s výjimkou “rozhraní” $x = at$. Z požadavku hladkosti u na tomto rozhraní dostáváme požadavky na u_0 a α (tzv. podmínky souhlasu):

$$u_0(0) = \alpha(0), \quad (2.7)$$

$$\frac{d\alpha}{dt}(0) + a \frac{du_0}{dx}(0) = 0. \quad (2.8)$$

Derivace v posledním vztahu jsou tzv. jednostranné.

Věta 2 Necht' $a > 0$, $L > 0$ a necht' jsou dány funkce $u_0 \in \mathcal{C}^1([0, L] \rightarrow \mathbb{R})$ a $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R})$ splňující podmínky souhlasu (2.7) a (2.8). Potom existuje právě jedno řešení smíšené úlohy a je dáno vztahem

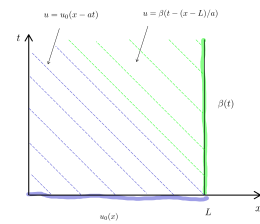
$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - at) & \text{pro } x \geq at, \\ \alpha(t - x/a) & \text{pro } x < at. \end{cases} \quad (2.9)$$

V případě $a < 0$ je situace analogická.

Charakteristiky jdou tentokrát doleva a okrajovou podmínku budeme tedy předepisovat na pravém kraji intervalu (tj. pro $x = L$). Formulace smíšené úlohy tedy je:

Definice 4 Mějme dán interval $[0, L]$, funkci $u_0 \in \mathcal{C}^1([0, L] \rightarrow \mathbb{R})$ a funkci $\beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R})$ a $a < 0$. **Smíšenou úlohou** pro rovnici $u_t + au_x = 0$ pak rozumíme nalézt funkci $u \in \mathcal{C}^1([0, L] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R})$ takovou, že

1. $\forall x \in (0, L), \forall t > 0 : u_t + au_x = 0$,
2. $\forall x \in [0, L] : u(x, 0) = u_0(x)$,
3. $\forall t \geq 0 : u(L, t) = \beta(t)$.



Obrázek 2.3: Smíšená úloha pro $a < 0$.

Podmínky souhlasu musí být splněny v $x = L$ a jsou tedy

$$u_0(L) = \beta(0), \quad (2.10)$$

$$\frac{d\beta}{dt}(0) + a \frac{du_0}{dx}(L) = 0. \quad (2.11)$$

Řešení pak nalezneme pomocí následující věty.

Věta 3 *Nechť $a < 0$, $L > 0$ a necht' jsou dány funkce $u_0 \in C^1([0, L] \rightarrow \mathbb{R})$ a $\beta \in C^1(\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R})$ splňující podmínky souhlasu (2.10) a (2.11). Potom existuje právě jedno řešení smíšené úlohy a je dáno vztahem*

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - at) & \text{pro } x \leq L + at, \\ \beta(t - (x - L)/a) & \text{pro } x > L + at. \end{cases} \quad (2.12)$$

2.4 Numerické řešení počáteční úlohy pomocí metody konečných diferencí

Uvažujme počáteční úlohu pro skalární lineární rovnici konvekce

$$u_t + au_x = 0, \quad (2.13)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (2.14)$$

Numerické řešení určíme metodou sítí nazývanou též metodou konečných diferencí. Zvolme na osách x a t rovnoměrně rozložené body $x_j = j\Delta x$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ a $t^n = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, \dots$, přičemž Δx je krok v prostorové souřadnici a Δt je krok v časové souřadnici. Tím získáme síť bodů $P_j^n = [x_j, t^n]$. Numerické řešení hledané v těchto bodech budeme značit u_j^n .

Základním nástrojem pro sestavení schémat pro metodu konečných diferencí je Taylorův rozvoj a nahrazení derivací pomocí konečných diferencí. Časovou derivaci nahradíme například pomocí

$$\frac{\partial u(x_j, t^n)}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}. \quad (2.15)$$

Z Taylorova rozvoje je totiž pro $u \in C^2$

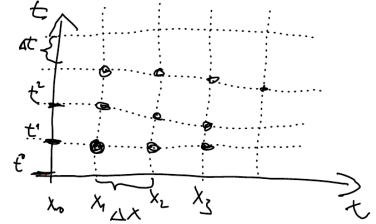
$$u(x_j, t^{n+1}) = u(x_j, t^n + \Delta t) = u(x_j, t^n) + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (2.16)$$

a tedy

$$\frac{\partial u(x_j, t^n)}{\partial t} = \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t). \quad (2.17)$$

Podobným způsobem lze nahradit prostorové derivace. Zde se přímo nabízejí tři možnosti

$$\frac{\partial u(x_j, t^n)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \\ \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \\ \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \end{cases} \quad (2.18)$$



Zápis $f(h) = g(h) + \mathcal{O}(h)$ znamená, že $\exists K, h_0 > 0, \forall h < h_0: |f(h) - g(h)| < Kh$.

Kombinací výše uvedených vztahů můžeme sestavit základní explicitní schémata. Prvním z nich je tzv. **centrální** schéma využívající třetí z výše uvedených náhrad prostorové derivace, tj.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad (2.19)$$

neboli

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \quad (2.20)$$

Další schéma je tzv. **protiproudové** (neboli *upwind*) schéma aproximující prostorovou derivaci pomocí zpětné difference pro $a > 0$ a dopředné difference pro $a < 0$. Tedy

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n), & \text{pro } a > 0, \\ u_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n), & \text{pro } a < 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Jako další můžeme uvést tzv. **Rusanovovo** schéma vycházející z centrálního schématu s přidaným členem ve tvaru druhé difference

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{q}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (2.22)$$

kde parametr $q \in (0, 1]$.

Mimo výše uvedená schémata existuje celá řada dalších schémat lišících se použitou aproximací jednotlivých členů, podrobnější přehled je možno nalézt např. v (R J LeVeque, 2008).

Numerické schéma nám obecně dává návod, jak provést výpočet hodnot u_j^n . Neříká ovšem nic o tom, zda vypočtené hodnoty mají “něco společného” s analytickým řešením. V následujících kapitolách si ukážeme, za jakých předpokladů tyto vypočtené hodnoty aproximují hledané řešení.

2.4.1 Lokální chyba aproximace, konzistence

Zapišme numerické schéma v operátorovém tvaru jako

$$u^{n+1} = \mathcal{H}_\Delta u^n, \quad (2.23)$$

kde $u^n = \{u_j^n\}_j$. Necht' $u(x, t)$ je řešením rovnice $u_t + au_x = 0$. Potom

Definice 5 Necht' $u(x, t)$ je řešením rovnice $u_t + au_x = 0$ a \mathcal{H}_Δ reprezentuje numerické schéma s kroky Δt a Δx . **Lokální chybou** aproximace pak rozumíme

$$L_\Delta(x, t) = \frac{1}{\Delta t} [u(x, t + \Delta t) - (\mathcal{H}_\Delta u)(x, t)]. \quad (2.24)$$

Poznamenejme, že ve výše uvedené definici jsme aplikovali operátor \mathcal{H}_Δ na funkci u , tj. např. pro centrální schéma je

$$(\mathcal{H}_\Delta u)(x, t) = u(x, t) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)). \quad (2.25)$$

Později ukážeme, že centrální schéma je nestabilní.

Definice 6 Řekneme, že numerické schéma je **konzistentní** s danou rovnicí jestliže $\forall u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ je

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0+} \|L_\Delta u\| = 0, \quad (2.26)$$

Dále je možné definovat řád přesnosti metody.

Definice 7 Necht' existují $p > 0$ a $q > 0$. Řekneme, že numerické schéma je p -tého řádu v prostoru a q -tého řádu v čase jestliže $\forall u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ je

$$\|L_\Delta u\| = \mathcal{O}(\Delta x^p) + \mathcal{O}(\Delta t^q). \quad (2.27)$$

Pokud $p = q$, budeme hovořit zkráceně o schématu p -tého řádu.

Příklad 2.1 Konzistence a řád centrálního schématu

Z definice lokální chyby máme

$$\begin{aligned} L_\Delta u(x, t) &= \frac{1}{\Delta t} \left[u(x, t + \Delta t) - u(x, t) + \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)) \right] = \\ &= \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + a \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} = \\ &= u_t(x, t) + \mathcal{O}(\Delta t) + au_x(x, t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Centrální schéma je tedy konzistentní s rovnicí $u_t + au_x = 0$ a je prvního řádu v čase a druhého v prostoru. \square

Cvičení 2.1 Konzistence a řád protiproudového schématu

Určete řád přesnosti protiproudového schématu

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n). \quad (2.29)$$

\square

2.4.2 Stabilita lineárních schémat

Dalším důležitým pojmem při analýze numerické metody je stabilita.

Definice 8 Necht' u_j^n je numerická aproximace získaná zvoleným lineárním schématem s kroky diskretizace Δx a Δt . Označme $u^n = \{u_j^n\}_j$. Řekneme, že zvolené schéma je **stabilní** v normě $\|\cdot\|_*$, pokud $\forall T > 0, \exists K > 0$ a $\exists \Delta > 0$ takové, že $\forall \Delta x, \Delta t < \Delta, \forall n < T/\Delta t$

$$\|u^n\|_* \leq K \|u^0\|_*. \quad (2.30)$$

Výše uvedená definice připouští určitý nárůst řešení. Často se využívá jednodušší následující definice nepřipouštějící nárůst řešení. Ta zní

Definice 9 Necht' u_j^n je numerická aproximace získaná zvoleným lineárním schématem s kroky diskretizace Δx a Δt . Řekneme, že zvolené schéma je **stabilní** v normě $\|\cdot\|_*$, pokud $\forall n > 0, \forall \Delta x, \Delta t > 0$ a $\forall u^0 = \{u_j^0\}_j$

$$\|u^n\|_* \leq \|u^0\|_*. \quad (2.31)$$

Nejběžnějším postupem při vyšetřování stability lineárních schémat je použití tzv. *spektrálního* nebo též VonNeumannova kritéria. Postup si předvedeme na případě centrálního a protiproudového schématu.

Příklad 2.2 (Ne)stabilita centrálního schématu

Rozšíříme řešení do komplexní roviny a budeme předpokládat počáteční podmínku u_j^n ve tvaru

$$u_j^n = \lambda^n e^{ij\sigma}, \quad (2.32)$$

kde $i = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka, $\sigma \in \mathbb{R}$ je libovolné reálné číslo a λ je komplexní číslo. Dosadíme tento tvar řešení do schématu

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \quad (2.33)$$

neboli

$$\lambda^{n+1} e^{ij\sigma} = \lambda^n e^{ij\sigma} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (\lambda^n e^{i(j+1)\sigma} - \lambda^n e^{i(j-1)\sigma}). \quad (2.34)$$

Rovnici vydělíme $\lambda^n e^{ij\sigma}$ a máme

$$\lambda = 1 - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (e^{i\sigma} - e^{-i\sigma}) = 1 - i \frac{a\Delta t}{\Delta x} \sin(\sigma). \quad (2.35)$$

Využijeme Eulerova vztahu $e^{i\omega} = \cos(\omega) + i \sin(\omega)$.

Potom

$$|\lambda|^2 = \operatorname{Re}(\lambda)^2 + \operatorname{Im}(\lambda)^2 = 1 + \frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2(\sigma). \quad (2.36)$$

$|\lambda|$ je tedy pro $\sigma \neq k\pi$ větší než 1 a centrální schéma tedy není stabilní! \square

Příklad 2.3 Podmíněná stabilita protiproudového schématu

Aplikujeme stejný postup na protiproudové schéma s $s > 0$. Tedy

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n), \quad (2.37)$$

neboli

$$\lambda^{n+1} e^{ij\sigma} = \lambda^n e^{ij\sigma} - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (\lambda^n e^{ij\sigma} - \lambda^n e^{i(j-1)\sigma}). \quad (2.38)$$

Po zkrácení je tedy

$$\lambda = 1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (1 - e^{-i\sigma}). \quad (2.39)$$

Označme $v = a\Delta t / \Delta x$. Potom

$$\lambda = 1 - v(1 - \cos(\sigma) + i \sin(\sigma)). \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned}
|\lambda|^2 &= (1 - \nu(1 - \cos(\sigma)))^2 + \nu^2 \sin^2(\sigma) = \\
&= 1 - 2\nu(1 - \cos(\sigma)) + \nu^2(1 - 2\cos(\sigma) + \cos^2(\sigma)) + \nu^2 \sin^2(\sigma) = \\
&= 1 - 2\nu(1 - \cos(\sigma)) + 2\nu^2(1 - \cos(\sigma)) = \\
&= 1 - 2\nu(1 - \nu)(1 - \cos(\sigma)). \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Rozdíl $1 - \cos(\sigma)$ je vždy ≥ 0 . Pro stabilitu (tj. $|\lambda| < 1$ tedy stačí volit $0 \leq \nu \leq 1$). Dostáváme tedy, že protiproudové schéma s $a > 0$ je podmíněně stabilní s časovým krokem splňujícím nerovnost

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{a}. \quad (2.42)$$

□

Cvičení 2.2 Podmíněná stabilita Rusanovova schématu

Vyšetřete stabilitu Rusanovova schématu

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{q}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (2.43)$$

kde a je libovolné a $q \geq 0$.

□

2.4.3 Konvergence, Laxova věta o ekvivalenci.

Samotná stabilita ani konzistence ještě neposkytuje informaci o tom, zda je numerické řešení v nějakém vztahu k analytickému řešení. K tomu potřebujeme nejprve definovat pojem globální chyby řešení a poté využijeme tzv. Laxovu větu o ekvivalenci.

Definice 10 Necht' u je přesné řešení počáteční úlohy pro rovnici $u_t + au_x$ s počáteční podmínkou u_0 a u_j^n je numerické řešení získané konzistentním schématem s počáteční podmínkou u^0 . **Globální chybou** nazveme rozdíl

$$E_j^n = u(x_j, t^n) - u_j^n. \quad (2.44)$$

Definice 11 Řekneme, že numerické schéma je konvergentní právě tehdy, když $\forall T > 0, \forall n < T/\Delta t$

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \|E^n\| = 0. \quad (2.45)$$

Vyjádříme nyní globální chybu schématu pomocí lokální chyby. Z definice lokální chyby máme

$$u(x_j, t^n) = \mathcal{H}_\Delta u(x_j, t^{n-1}) + \Delta t L_\Delta(x_j, t^{n-1}). \quad (2.46)$$

Odečteme od tohoto výrazu numerické schéma

$$u_j^n = \mathcal{H}_\Delta u_j^{n-1} \quad (2.47)$$

využijeme linearity \mathcal{H}_Δ a dostáváme

$$E_j^n = \mathcal{H}_\Delta E_j^{n-1} + \Delta t L_\Delta(x_j, t^{n-1}). \quad (2.48)$$

Předchozí postup budeme rekurentně opakovat a dostaneme

$$E_j^n = (\mathcal{H}_\Delta)^n E_j^0 + \Delta t \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{H}_\Delta^{n-m-1} L_\Delta(x_j, t^m). \quad (2.49)$$

Předpokládejme, že schéma je stabilní a splňuje $\|\mathcal{H}_\Delta\| \leq 1 + c\Delta t$.
Potom

$$\|E^n\| \leq (1 + c\Delta t)^n \left(\|E^0\| + \Delta t \sum_{m=0}^{n-1} \|L_\Delta(\cdot, t^m)\| \right). \quad (2.50)$$

Pro $t < T$ je $(1 + c\Delta t)^n < e^{cT}$. Je-li dále schéma konzistentní a p -tého řádu přesnosti, je

$$\|E^n\| \leq e^{cT} \left(\|E^0\| + CT\Delta x^p \right). \quad (2.51)$$

Věta 4 (Laxova věta o ekvivalenci) *Necht' u_j^n je numerická aproximace získaná pomocí*

- *lineárního,*
- *stabilního, a*
- *konzistentního schématu, a*
- *chyba počáteční podmínky $\|E^0\| \rightarrow 0$ při $\Delta x \rightarrow 0$.*

Potom numerická aproximace konverguje k přesnému řešení.

Pokud je navíc schéma p -tého řádu přesnosti a počáteční podmínka je aproximovaná maximálně s chybou $\mathcal{O}(\Delta x^p)$, je i globální chyba

$$E_j^n = \mathcal{O}(\Delta x^p). \quad (2.52)$$

3

Nelineární rovnice konvekce v 1D

V této kapitole se budeme věnovat složitějšímu případu nelineární rovnice konvekce ve tvaru

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

kde $f \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ je spojitě diferencovatelná funkce. Tuto funkci budeme nazývat **tok**.

Výše uvedenou rovnici budeme často zapisovat pro stručnost jako

$$u_t + f(u)_x = 0. \quad (3.2)$$

Často budeme v dalším textu používat speciální případ nelineární rovnice, tzv. **Burgersovu rovnici** danou volbou $f(u) = \frac{1}{2}u^2$.

Podobně jako pro lineární rovnici formulujeme i pro nelineární rovnici počáteční a smíšenou úlohu. Pro jednoduchost se budeme nyní zabývat pouze počáteční úlohou.

Definice 12 Mějme danou funkci $u_0 \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$. Tu budeme nazývat **počáteční podmínkou**. **Počáteční úlohou** pro rovnici $u_t + f(u)_x = 0$ pak budeme rozumět nalézt funkci $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R})$ takovou, že

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 : u_t + f(u)_x = 0,$

2. $\forall x \in \mathbb{R} : u(x, 0) = u_0(x).$

Jak si ukážeme později, takto definované řešení nemusí existovat a budeme muset zavést další definici řešení. Abychom tato řešení od sebe navzájem jasně odlišili, budeme o výše definovaném řešení mluvit jako o **klasickém řešení**.

3.1 Kvazilineární tvar rovnice a její charakteristiky

Předpokládejme nejprve, že hledaná funkce u je z C^1 , tedy že má spojitě derivace podle x i t . Rovnici pak můžeme přepsat do **kvazilineárního tvaru**

$$u_t + f'(u)u_x = 0. \quad (3.3)$$

Označme $a(u) = f'(u)$ a máme tedy rovnici

$$u_t + a(u)u_x = 0. \quad (3.4)$$

Ta je velmi podobná lineární rovnici konvekce a pro její řešení se tedy pokusíme zopakovat stejný postup. Nejprve nalezneme charakteristiky této rovnice. Zavedeme funkci $\zeta(t)$ a $\hat{u}(t) = u(\zeta(t), t)$ (viz (2.3)). Pokud bude platit

$$\frac{d\zeta}{dt} = a(\hat{u}), \quad (3.5)$$

bude opět $d\hat{u}/dt = 0$ a tedy \hat{u} je konstantní podél charakteristiky. Je-li však $\hat{u} = \text{const.}$, pak i $a(\hat{u})$ je podél charakteristiky konstantní a charakteristika je tedy přímka (nebo její část).

Na rozdíl od lineární rovnice se však sklon jednotlivých charakteristik (tj. $a(u)$) navzájem liší.

To ovšem znamená, že pro případ počáteční úlohy s nekonstantní počáteční podmínkou se charakteristiky mohou v čase $t_c > 0$ protnout (viz obrázek 3.1)!

Protože je však řešení rovnice konstantní podél charakteristiky, muselo by v bodě C na obrázku nabývat stejné hodnoty jako v bodě x_1 a také jako v bodě x_2 . Funkce u ale v bodě C nemůže nabývat dvou různých hodnot a proto nelze v tomto bodě použít standardní metodu charakteristik. Problémem spočívá v tom, že funkce u není v bodě C spojitá (probereme později) a předpoklady pro odvození charakteristik tedy v tomto bodě nejsou splněny.

Pokud by se však charakteristiky nikde neprotínaly, můžeme klasické řešení nalézt pomocí nelineární rovnice

$$u(x, t) = u_0(x - a(u(x, t))t), \quad (3.6)$$

Hodnotu u v bodě $[x, t]$ lze tak získat například pomocí Newtonovy metody řešením

$$u - u_0(x - a(u)t) = 0. \quad (3.7)$$

Vezměme si nyní situaci zobrazenou na obr. 3.1). Čas t_c můžeme určit jako

$$t_c = -\frac{x_2 - x_1}{a(u_0(x_2)) - a(u_0(x_1))}. \quad (3.8)$$

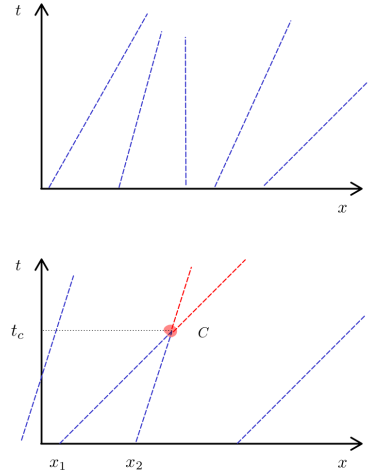
Pokud $x_1 \rightarrow x_2$, dostáváme

$$t_c \rightarrow -\frac{1}{a'(u_0(x))u_0'(x)}. \quad (3.9)$$

Odtud plyne následující věta:

Věta 5 *Nechť $u_0 \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ a $f \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$. Potom klasické řešení počáteční úlohy pro rovnici $u_t + f(u)_x = 0$ s počáteční podmínkou $u(x, 0) = u_0(x)$ existuje pouze pro $t < t_{crit}$, kde*

$$\frac{1}{t_{crit}} = -\max_{x \in \mathbb{R}} \min(f''(u_0(x))u_0'(x), 0). \quad (3.10)$$



Obrázek 3.1: Charakteristiky pro nelineární rovnici $u_t + f(u)_x = 0$.

3.2 Nespojivosti a slabé řešení

Z výše uvedeného rozboru řešení nelineární rovnice konvekce vyplývá, že klasické řešení existuje jen pro krátký časový interval. Pro čas větší než t_{crit} je třeba rozšířit smysl řešení i na nespojitě funkce u .

Uvažujme nejprve klasické řešení počáteční úlohy, tj. hladkou funkci u splňující danou rovnici a vyhovující dané počáteční podmínce $u(0, x) = u_0(x)$. Dále mějme tzv. testovací funkci $\phi(x, t) \in \mathcal{C}_0^1$ (tj. funkci se spojitými prvními derivacemi a s kompaktním nosičem).

Vynásobme rovnici funkcí ϕ a integrujme součin přes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (u_t(x, t)\phi(x, t) + f(u(x, t))_x \phi(x, t)) dt dx = 0. \quad (3.11)$$

Nosič ϕ je omezený a tedy integrály existují a jsou vlastní. Rozdělíme nyní integrál na dva sčítance, použijeme integraci per-partes a využijeme omezenosti nosiče ϕ (tj. $\phi(\pm\infty, t) = 0$ a $\phi(x, \infty) = 0$).

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} u_t \phi dt \right) dx + \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)_x \phi dx \right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left([u\phi]_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} u \phi_t dt \right) dx + \\ &\quad + \int_0^{\infty} \left([f(u)\phi]_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \phi_x dx \right) dt = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) \phi(x, 0) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (u \phi_t + f(u) \phi_x) dt dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ve výše odvozené rovnosti se již nevyskytují derivace funkce u a tak ji lze použít pro rozšíření pojmu řešení na nespojitě funkce u .

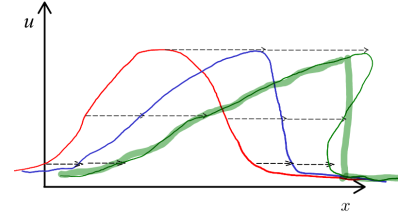
Definice 13 Necht' $u_0 \in L_{loc}^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ je lokálně integrabilní funkce. Potom $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R})$ nazveme **slabým řešením** počáteční úlohy pro rovnici (3.1) právě tehdy, když pro každou testovací funkci $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R})$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (u \phi_t + f(u) \phi_x) dt dx = - \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) \phi(x, 0) dx. \quad (3.13)$$

Viz např. (Randall J LeVeque, 1992).

Lemma 1 Necht' u je slabým řešením počáteční úlohy a navíc $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R})$. Potom je u také klasickým řešením této úlohy.

Příklad 3.1 Nespojitě slabé řešení počáteční úlohy pro Burgersovu rovnici



Nosič funkce $\phi(x, t)$ je množina

$$\text{supp}(\phi) = \{[x, t] \in \mathbb{R}^2 : \phi(x, t) \neq 0\}$$

O funkci ϕ řekneme, že má kompaktní nosič právě tehdy, když je uzavřen $\overline{\text{supp}(\phi)}$ kompaktní množina

V Eukleidovském prostoru konečné dimenze je množina kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená

\mathcal{L}_{loc}^1 jsou funkce integrabilní na každé omezené podoblasti definičního oboru.

Uvažujme Burgersovu rovnici

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0 \quad (3.14)$$

s počáteční podmínkou

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x > 0, \\ 1 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Ukážeme, že $u(x, t) = u_0(x)$ (tj. funkce nezávisící na čase) je slabým řešením.

Nejprve vyčíslíme levou stranu rovnosti (3.13):

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dt dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} (1\phi_t + f(1)\phi_x) dt dx + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (-1\phi_t + f(-1)\phi_x) dt dx = \\ &= - \int_{-\infty}^0 \phi(x, 0) dx + \int_0^{\infty} \phi(x, 0) dx + \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\phi_x dt dx = \\ &= - \int_{-\infty}^0 \phi(x, 0) dx + \int_0^{\infty} \phi(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pravá strana rovnosti je

$$R = - \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\phi(x, 0) dx = - \int_{-\infty}^0 \phi(x, 0) dx + \int_0^{\infty} \phi(x, 0) dx \quad (3.17)$$

a tedy $L = R$ pro libovolnou funkci ϕ . \square

Přechod ke slabému řešení umožňuje překonat omezení na $t < t_{crit}$. Na druhou stranu však přináší komplikace ohledně nejednoznačnosti. Následující příklad ukazuje dvě rozdílná řešení počáteční úlohy pro Burgersovu rovnici.

Příklad 3.2 Nejednoznačnost slabého řešení

Mějme počáteční úlohu pro Burgersovu rovnici s počáteční podmínkou

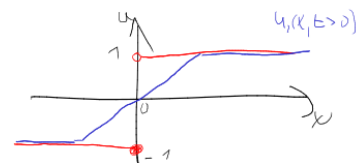
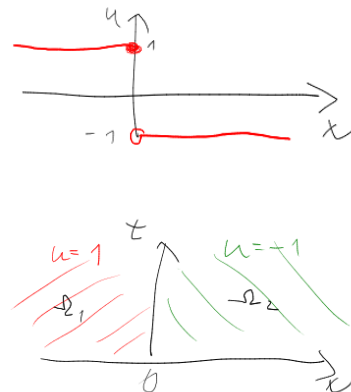
$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ -1 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Ukážeme, že tato úloha má alespoň 2 řešení a to

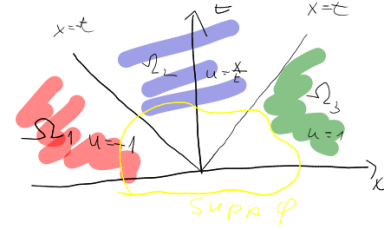
$$u_1(x, t) = u_0(x), \quad (3.19)$$

a

$$u_2(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < -t, \\ \frac{x}{t} & \text{pro } |x| < t, \\ 1 & \text{pro } x > t. \end{cases} \quad (3.20)$$



Pro u_1 je postup naprosto stejný, jako v předchozím příkladě a proto ho nebudeme opakovat. Pro $u = u_2$ rozdělíme polorovinu $t \geq 0$ na tři části $\Omega_1 = \{[x, t] : x < -t\}$, $\Omega_2 = \{[x, t] : -t < x < t\}$ a $\Omega_3 = \{[x, t] : t < x\}$. Potom je levá strana



$$\begin{aligned} L &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dt dx = \\ &= \iint_{\Omega_1} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dt dx + \iint_{\Omega_2} (...) dt dx + \iint_{\Omega_3} (...) dt dx. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Vyčíslíme postupně jednotlivé integrály:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_1} (...) dt dx &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{-x} (-1\phi_t + f(-1)\phi_x) dt dx = \\ &= - \int_{-\infty}^0 [\phi]_{t=0}^{-x} dx + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{-t} \frac{1}{2} \phi_x dx dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 \phi(x, 0) dx - \int_{-\infty}^0 \phi(x, -x) dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \phi(-t, t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 \phi(x, 0) dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \phi(x, -x) dx. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Pro integrál přes Ω_2 máme s použitím per-partes

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_2} (...) dt dx &= \int_0^{\infty} \int_{-t}^t \left(\frac{x}{t} \phi_t + f\left(\frac{x}{t}\right) \phi_x \right) dx dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|x|}^{\infty} \left(\frac{x}{t} \phi_t \right) dt dx + \int_0^{\infty} \int_{-t}^t \frac{x^2}{2t^2} \phi_x dx dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left[\frac{x}{t} \phi \right]_{t=|x|}^{\infty} - \int_{|x|}^{\infty} \frac{-x}{t^2} \phi dt \right) dx + \\ &+ \int_0^{\infty} \left(\left[\frac{x^2}{2t^2} \phi \right]_{x=-t}^t - \int_{-t}^t \frac{x}{t^2} \phi dx \right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 \phi(x, -x) dx - \int_0^{\infty} \phi(x, x) dx + \\ &+ \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \phi(t, t) dt - \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \phi(-t, t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \phi(x, -x) dx - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \phi(x, x) dx. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Konečně třetí z integrálů je (viz úpravy prvního integrálu)

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_3} (...) dt dx &= \int_0^{\infty} \int_0^x (\phi_t + f(1)\phi_x) dt dx = \\ &= \int_0^{\infty} -\phi(x, 0) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \phi(x, x) dx. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Součet je tedy

$$L = \int_{-\infty}^0 \phi(x, 0) dx - \int_0^{\infty} \phi(x, 0) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) \phi dx = R. \quad (3.25)$$

□

3.3 Rychlost pohybu nespojitosti

Budeme nyní uvažovat nespojité řešení s nespojitostí pohybující se rychlostí s . Dále budeme předpokládat, že řešení u je na levé i pravé straně nespojitosti hladké (alespoň v okolí zvoleného bodu) a nabývá hodnot přibližně u_l na levé a u_r na pravé straně nespojitosti. Potom lze pro rychlost pohybu nespojitosti odvodit tzv. Rankinovu-Hugoniotovu podmínku.

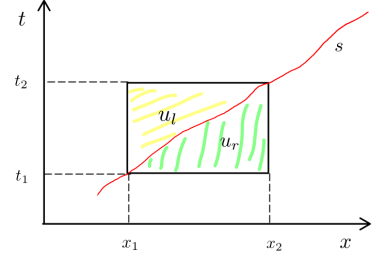
Integrujeme-li zákon zachování přes oblast $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$, dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} (u_t + f(u)_x) dt dx = \\ &= (u_l - u_r) \Delta x + (f(u_r) - f(u_l)) \Delta t \end{aligned} \quad (3.26)$$

a tedy

$$s = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l}. \quad (3.27)$$

Pozn. pro stacionární případ ($s = 0$) je $f(u_l) = f(u_r)$ a tedy $f(u(x, t))$ je spojitá funkce x .



3.4 Entropická podmínka

V předchozím příkladě jsme ukázali, že existují minimálně dvě slabá řešení zadané počáteční úlohy. Bohužel lze ukázat, že může existovat dokonce nekonečně mnoho slabých řešení. V úlohách souvisejících s mechanikou tekutin je vhodné z množiny všech řešení vybrat *fyzikálně přípustné* řešení.

Jednou z možností pro definici přípustného řešení je použití tzv. mizející viskozity. Tzn. místo rovnice

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (3.28)$$

budeme řešit rovnici s kladnou viskozitou ϵ , tedy

$$u_t^\epsilon + f(u^\epsilon)_x = \epsilon u_{xx}^\epsilon. \quad (3.29)$$

Tato parabolická rovnice má pro každé $\epsilon > 0$ jednoznačné řešení a přípustné řešení pak definujeme jako

$$u = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u^\epsilon. \quad (3.30)$$

Příklad 3.3 Stacionární nespojitost pro Burgersovu rovnici

Uvažujme stacionární řešení Burgersovy rovnice s vazkostí, tj. rovnice

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = \epsilon u_{xx} \quad (3.31)$$

s $\epsilon > 0$ s okrajovými podmínkami $u(-\infty, t) = 1$ a $u(\infty, t) = -1$.

Podmínky jsou předepsané v $\pm\infty$ a nezaručují existenci ani jednoznačnost řešení. Doplníme tedy tuto úlohu o podmínku $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u'(x, t) = 0$ a $u(0, t) = 0$.

Ze symetrie úlohy vyplývá, že stačí řešit úlohu na $[0, \infty)$:

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = \epsilon u_{xx} \quad (3.32)$$

pro $x \geq 0$. Integrujeme tuto poprvé a dostáváme

$$\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}c^2 = \epsilon u_x. \quad (3.33)$$

Integrační konstantu jsme volili rovnou jako $-c^2/2$ a to proto, že $u(0) = 0$ a $u(\infty) = -1$ a tedy musí být alespoň někde $u'(x) < 0$. Protože však $u(\infty) = 1$ a $u'(\infty) = 0$, je $c = 1$.

Integrujeme podruhé (separovatelná rovnice) a dostáváme

$$\ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| = \frac{x+K}{\epsilon}. \quad (3.34)$$

Z $u(0) = 0$ je $K = 0$. Uvažujme-li $u \in (-1, 1)$, je

$$\frac{1-u}{1+u} = e^{\frac{x}{\epsilon}} \quad (3.35)$$

a tedy

$$u^\epsilon(x) = \frac{1 - e^{\frac{x}{\epsilon}}}{1 + e^{\frac{x}{\epsilon}}} = -\tanh\left(\frac{x}{2\epsilon}\right). \quad (3.36)$$

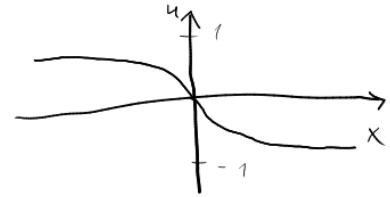
Řešením problému s vazkostí ϵ je tedy funkce $u^\epsilon(x) = -\tanh(x/(2\epsilon))$. Ta pro $\epsilon \rightarrow 0+$ jde v limitě k

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x > 0, \end{cases} \quad (3.37)$$

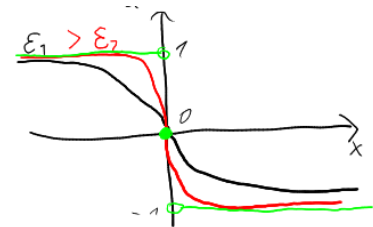
která je tedy entropickým řešením dané počáteční úlohy pro Burgersovu rovnici bez viskozity.

Budeme-li uvažovat okrajové podmínky $u(-\infty, t) = -1$ a $u(\infty, t) = 1$ (opačná znaménka než před chvílí) a $u'(0) > 0$, bude integrační konstanta vzniklá při první integraci kladná, tj. budeme řešit rovnici

$$u^2 + c^2 = 2\epsilon u_x \quad (3.38)$$



Ze vztahu pro u lze určit "šířku" nespojitosti pro problém s viskozitou jako $\delta \approx \Delta u / u'(0) = \epsilon$.



a tedy s použitím $u(0) = 0$ je

$$u^\epsilon(x) = c \tan\left(\frac{cx}{2\epsilon}\right). \quad (3.39)$$

Toto řešení je definováno pouze v omezeném intervalu a nelze jej prodloužit pro $x \rightarrow \infty$. Navíc pro $x \rightarrow \epsilon\pi/c -$ jde $u \rightarrow \infty$.

Pro první konfiguraci okrajových podmínek jsme tedy našli řešení problému s viskozitou a ukázali, že pro $\epsilon \rightarrow 0+$ jde toto řešení limitně k nespojitě avšak omezené funkci. Pro druhou konfiguraci řešení neexistuje. \square

V (Randall J LeVeque, 1992) je zaveden pojem entropie a entropický tok a provedeno odvození integrální nerovnosti podobné rovnosti v definici slabého řešení. My si v následujícím textu vystačíme s jednodušší entropickou podmínkou pro ryze konvexní f dle Laxe (Randall J LeVeque, 1992). U této podmínky uvažujeme nespojitost pohybující se rychlostí s s tím, že hodnota řešení na levé straně nespojitosti je u_l a na pravé u_r .

Definice 14 O nespojitosti pohybující se rychlostí s řekneme že splňuje Laxovu entropickou podmínku pokud

$$f'(u_l) \geq s \geq f'(u_r). \quad (3.40)$$

Příklad 3.4 Laxova podmínka pro počáteční úlohu pro Burgersovu rovnici

Uvažujme opět Burgersovu rovnici s počáteční podmínkou z minulého příkladu. f je ryze konvexní funkce $f'(u) = u$, $u_l = -1$, $u_r = 1$ a $s = 0$. Pro splnění Laxovy entropické podmínky by tedy mělo být

$$f'(u_l) = u_l = -1 > 0 > 1 = f'(u_r)! \quad (3.41)$$

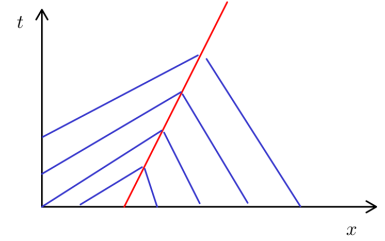
To však neplatí! Naproti tomu nespojitost s $u_l = 1$, $u_r = -1$ a $s = 0$ Laxovu podmínku splňuje. \square

Tuto podmínku lze interpretovat též jako podmínku pro charakteristiky. Ty podle výše uvedené Laxovy podmínky nemohou vycházet z nespojitosti, viz obrázky 3.2 a 3.3.

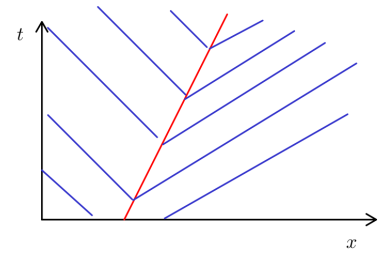
3.5 Riemannův problém

Jednou za základních úloh týkajících se analytického či numerického řešení zákonů zachování je řešení tzv. **Riemannova problému**. Jedná se přitom o počáteční úlohu se speciální počáteční podmínkou danou konstantami u_l a u_r jako

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & \text{pro } x < 0, \\ u_r & \text{pro } x \geq 0. \end{cases} \quad (3.42)$$



Obrázek 3.2: Charakteristiky vyhovující Laxově entropické podmínce (červeně vyznačena nespojitost).



Obrázek 3.3: Charakteristiky nevyhovující Laxově entropické podmínce (červeně vyznačena nespojitost).

Pro případ lineární rovnice $u_t + au_x = 0$ je řešení $u(x, t) = u_l$ pro $x < at$ a $u = u_r$ pro $x \geq at$. Pro případ nelineární rovnice je to však složitější. I pro případ ryze konvexní funkce f mohou nastat dva případy. Prvním z nich je řešení ve tvaru pohybující se nespojitosti. Druhým je tzv. zřed'ující vlna.

3.5.1 Řešení Riemannova problému ve tvaru nespojitosti

Je-li

$$f'(u_l) \geq \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l} \geq f'(u_r), \quad (3.43)$$

potom existuje řešení ve tvaru pohybující se nespojitosti a má tvar

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{pro } x < st, \\ u_r & \text{pro } x \geq st, \end{cases} \quad (3.44)$$

kde $s = (f(u_r) - f(u_l)) / (u_r - u_l)$ je rychlost pohybu nespojitosti.

3.5.2 Řešení Riemannova problému ve tvaru zřed'ující vlny

Je-li $f'(u_l) < f'(u_r)$, pak podle Laxovy entropické podmínky nemůže existovat nespojitě řešení. Budeme tedy hledat tzv. soběpodobné řešení, tj. řešení ve tvaru $u(x, t) = \hat{u}(\xi)$, kde $\xi = x/t$.

Řešení tedy bude ve tvaru

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{pro } \xi \leq f'(u_l), \\ \hat{u}(\xi) & \text{pro } f'(u_l) < \xi < f'(u_r), \\ u_r & \text{pro } \xi \geq f'(u_r). \end{cases} \quad (3.45)$$

Tvar řešení ve zřed'ující vlně získáme přímým dosazením do zákona zachování

$$0 = u_t + f(u)_x = \hat{u}' \frac{-x}{t^2} + f'(\hat{u}) \hat{u}' \frac{1}{t}, \quad (3.46)$$

tedy \hat{u} je řešením nelineární rovnice

$$\xi = f'(\hat{u}(\xi)). \quad (3.47)$$

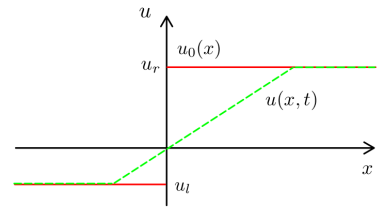
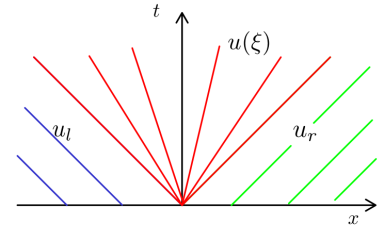
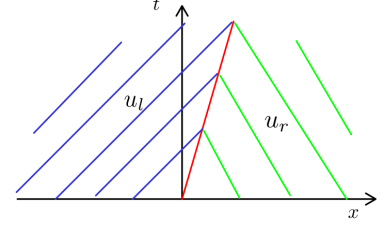
Příklad 3.5 Zřed'ující vlna pro Burgersovu rovnici

Pro Burgersovu rovnici je $f'(u) = u$ a rovnice určující \hat{u} je tedy

$$\xi = \hat{u}(\xi) \quad (3.48)$$

Řešení Riemannova problému pro případ $f'(u_l) < f'(u_r)$ (tj. $u_l < u_r$) je

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{pro } \xi \leq u_l, \\ \xi & \text{pro } u_l < \xi < u_r, \\ u_r & \text{pro } \xi \geq u_r. \end{cases} \quad (3.49)$$



Obrázek 3.4: Řešení Riemannova problému pro Burgersovu rovnici (zeleně)

□

4

Hyperbolické systémy rovnic v 1D

V této kapitole se budeme věnovat řešení systémů parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu ve tvaru

$$W_t + F(W)_x = 0, \quad (4.1)$$

kde W je hledaná vektorová funkce, tj. $W : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$, kde m je počet složek (dimenze) vektoru $W(x, t)$ a $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m)$.

Příkladem takového systému může být systém Eulerových rovnic popisující proudění stlačitelné nevazké tekutiny ve tvaru

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (4.2)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0, \quad (4.3)$$

$$(\rho E)_t + [(\rho E + p)u]_x = 0, \quad (4.4)$$

doplněný vztah pro tlak vycházející ze stavové rovnice ideálního plynu a ze vztahu pro jeho vnitřní energii

$$p(\rho, u, E) = (\gamma - 1)\rho \left(E - \frac{1}{2}u^2 \right). \quad (4.5)$$

Vektorová funkce W má pak složky $W = [\rho, \rho u, \rho E]^T$ a $F(W) = [\rho u, \rho u^2 + p, (\rho E + p)u]^T$.

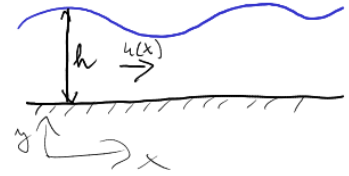
Dalším příkladem jsou rovnice popisující pohyb a šíření vln v mělké vodě, tzv. *shallow water equations*.

Ty mají tvar

$$h_t + (hu)_x = 0, \quad (4.6)$$

$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)_x = 0, \quad (4.7)$$

kde g je tíhové zrychlení, u je rychlost a h je výška hladiny nad rovným dnem. Vektor W je v tomto případě $W = [h, hu]^T$ a $F(W) = [hu, hu^2 + gh^2/2]^T$.



4.1 Lineární hyperbolické systémy

Analytické řešení nelineárních systémů je obecně velmi složité a proto se budeme nejprve zabývat lineárními systémy, kde $F(W) = AW$ a $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ je konstantní čtvercová matice. Systém má tedy tvar

$$W_t + AW_x = 0. \quad (4.8)$$

V dalším textu se budeme zabývat pouze třídou tzv. hyperbolických systémů vyhovujících následující definici.

Definice 15 *Lineární systém m parciálních diferenciálních rovnic ve tvaru (4.8) nazveme **hyperbolickým** právě tehdy, když je matice A diagonalizovatelná v oboru reálných čísel, tj. když existuje regulární matice $R \in \mathbb{R}^{m,m}$ a diagonální matice $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m,m}$ takové, že*

$$A = R\Lambda R^{-1}. \quad (4.9)$$

Matice Λ je přitom tvořena vlastními čísly λ_k matice A a matice $R = [r_1 | r_2 | \dots | r_m]$ obsahuje v každém sloupci odpovídající vlastní vektor $r_k \in \mathbb{R}^m$ matice A .

Lineární hyperbolické systémy lze potom přepsat jako

$$W_t + R\Lambda R^{-1}W_x = 0. \quad (4.10)$$

Po vynásobení maticí R^{-1} zleva dostaneme

$$R^{-1}W_t + R^{-1}R\Lambda R^{-1}W_x = (R^{-1}W)_t + \Lambda(R^{-1}W)_x = 0. \quad (4.11)$$

Definujeme-li $V = R^{-1}W$, dostaneme systém rovnic ve tvaru

$$V_t + \Lambda V_x = 0. \quad (4.12)$$

Formálně je to stále hyperbolický systém, avšak matice Λ je diagonální a jedná se tedy o soustavu m nezávislých rovnic pro jednotlivé složky vektoru $V = [v^1, v^2, \dots, v^k]^T$

$$v_t^k + \lambda_k v_x^k = 0. \quad (4.13)$$

Řešení počáteční úlohy pro hyperbolický systém v proměnných V tedy snadno nalezneme složku po složce, tj.

$$v^k(x, t) = v_0^k(x - \lambda_k t). \quad (4.14)$$

Zpětnou substitucí $W = RV$ pak dostáváme

$$W(x, t) = RV(x, t) = \sum_{k=1}^m r_k v^k(x, t) = \sum_{k=1}^m r_k v_0^k(x - \lambda_k t). \quad (4.15)$$

Můžeme tedy formulovat počáteční úlohu pro lineární hyperbolický systém a rovnou sestavíme i řešení této úlohy.

Definice 16 Mějme daný hyperbolický systém s maticí A a počáteční podmínku $W_0 \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m)$. **Počáteční úlohou** pro hyperbolický systém $W_t + AW_x = 0$ pak budeme rozumět nalézt funkci $W \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m)$ takovou, že

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 : W_t + AW_x = 0,$
2. $\forall x \in \mathbb{R} : W(x, 0) = W_0(x),$

Pro nespojitou počáteční podmínku můžeme počáteční úlohu formulovat ve smyslu slabého řešení, viz definice 13, tj. hledáme funkci W splňující pro každou testovací funkci ϕ integrální identitu analogickou (3.13).

Označme jako l_k k -tý řádek matice R^{-1} . Potom $v^k = l_k W$ a máme tedy

$l_i r_j = \delta_{ij}$ (řádek krát sloupec) ale
 $r_j l_i \in \mathbb{R}^{m,m}$ (sloupec krát řádek).

Věta 6 Řešením počáteční úlohy pro lineární hyperbolický systém rovnic je funkce

$$W(x, t) = \sum_{k=1}^m r_k l_k W_0(x - \lambda_k t). \quad (4.16)$$

Z rozboru je vidět, že proměnné V hrají při řešení hyperbolických systémů důležitou roli. Proto je nazýváme **charakteristickými proměnnými**.

Při řešení smíšené úlohy budeme postupovat podobně. Od proměnných W přejdeme k charakteristickým proměnným v a budeme řešit smíšenou úlohu pro jednotlivé složky vektoru V . Z rozboru skalárního lineárního problému přitom víme, že pokud je rychlost konvekce kladná, měli bychom zadávat okrajovou podmínku na levé straně intervalu, a pokud je záporná, tak bychom jí měli zadávat na pravé straně intervalu.

Definice 17 Mějme dán hyperbolický systém s maticí A jejíž vlastní čísla jsou $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_z < 0 < \lambda_{z+1} \leq \dots \leq \lambda_m$. Dále mějme interval $[0, L]$, funkci $W_0(x) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m)$ a funkce $\beta_k \in C^1(\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R})$ pro $k = 1, \dots, z$ a $\alpha_k \in C^1(\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R})$ pro $k = z + 1, \dots, m$. **Smíšenou úlohou** pak rozumíme nalézt funkci $W \in C^1([0, L] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m)$ takovou, že

1. $\forall x \in (0, L), \forall t > 0 : W_t + AW_x = 0,$
2. $\forall x \in [0, L] : W(x, 0) = W_0(x),$
3. $\forall t > 0 : l_k W(0, t) = \alpha_k(t)$ pro $k = z + 1, \dots, m$ (tj. pro $\lambda_k > 0$),
4. $\forall t > 0 : l_k W(L, t) = \beta_k(t)$ pro $k = 1, \dots, z$ (tj. pro $\lambda_k < 0$).

Co když $\lambda_k = 0$?

Pro zadání okrajových podmínek jsou tedy rozhodující znaménka vlastních čísel matice A !

4.2 Riemannův problém pro lineární systém

Pro případ lineárního hyperbolického systému lze snadno nalézt řešení Riemannova problému. Ze vztahu odvozeného v předchozí části máme totiž

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \sum_{k=1}^m r_k l_k W_0(x - \lambda_k t) = \sum_{k, x - \lambda_k t < 0} r_k l_k W_l + \sum_{k, x - \lambda_k t \geq 0} r_k l_k W_r = \\ &= \sum_{k, x - \lambda_k t < 0} r_k v_l^k + \sum_{k, x - \lambda_k t \geq 0} r_k v_r^k = W_l + \sum_{k, x - \lambda_k t \geq 0} r_k (v_r^k - v_l^k). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Řešení Riemannova problému je tedy pro zvolený čas $t > 0$ ve tvaru po částech konstantní funkce se skoky v $x = \lambda_k t$. Velikost těchto skoků je přitom $r_k \delta v^k$, tj. odpovídá skokům charakteristických proměnných v počáteční podmínce.

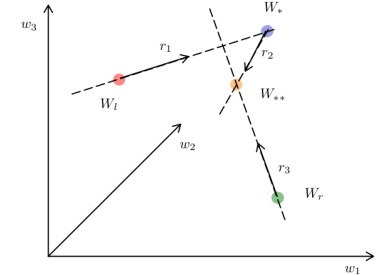
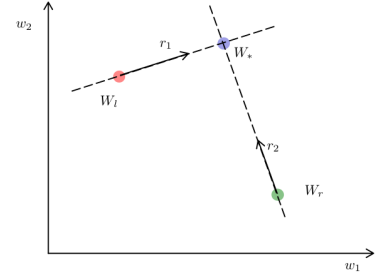
Geometricky lze řešení Riemannova problému znázornit ve fázovém prostoru. Uvažujme pro jednoduchost $m = 2$. Potom ($\xi = x/t$) je

$$W(x, t) = \begin{cases} W_l & \text{pro } \xi < \lambda_1, \\ W_* & \text{pro } \lambda_1 < \xi < \lambda_2, \\ W_r & \text{pro } \lambda_2 < \xi. \end{cases} \quad (4.18)$$

Ze stavu W_l se do W_* přitom dostaneme změnou ve směru vektoru r_1 . Množina všech stavů, kam je možné se z W_l dostat změnou první charakteristické proměnné, je tedy ve fázovém prostoru přímka procházející bodem W_l se směrovým vektorem r_1 . Analogicky je množina všech stavů, ze kterých lze dosáhnout W_r změnou v_2 přímka procházející bodem W_r se směrovým vektorem r_2 . Vektory r_1 a r_2 jsou lineárně nezávislé a proto mají tyto dvě přímky vždy právě jeden průsečík W_* .

Pro obecné $m > 2$ je postup analogický. Např. pro $m = 3$ vyjdeme z W_l ve směru r_1 a stav W_* tedy dostaneme jako průsečík přímky dané W_l a r_1 s rovinou danou bodem W_r a dvojicí vektorů r_2 a r_3 . Z bodu W_* pak jdeme po přímce dané směrovým vektorem r_2 do stavu W_{**} ležícího na přímce dané W_r a r_3 .

Z výše uvedeného postupu je zřejmé, že pro lineární hyperbolický systém má Riemannův problém vždy právě jedno řešení.



4.3 Nelineární hyperbolický systém

Pro nelineární systém je situace značně složitější. Přejdeme-li ke kvazilineárnímu tvaru, dostáváme

$$W_t + F(W)_x = W_t + A(W)W_x = 0, \quad (4.19)$$

kde $A(W) = \partial F / \partial W$ je Jakobiho matice závislá na W . Potom můžeme definovat hyperbolický systém na základě vlastností matice

$A(W)$. Ta však nemusí být definovaná pro libovolné W a proto se omezíme na $W \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$.

Např. takové W , že $\rho > 0$ a $T > 0$.

Definice 18 *Necht' $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ je omezená souvislá množina. Řekneme, že nelineární systém je **hyperbolický** právě tehdy, když je matice*

$$A(W) = \frac{\partial F(W)}{\partial W} \quad (4.20)$$

diagonalizovatelná v \mathbb{R} pro libovolné $W \in \mathcal{D}$.

Pokusíme se nyní provést diagonalizaci daného hyperbolického systému. V případě lineárních systémů jsme přešli k charakteristickým proměnným $V = R^{-1}W$ a tedy $v_k = l_k W$. Tento postup zobecníme pro nelineární systém a budeme nyní volit k -tou složku vektoru $V(W)$ tak, aby

$$\mu_k \frac{\partial v_k}{\partial W} = l_k, \quad (4.21)$$

kde μ_k je tzv. integrační faktor (skalár). Tedy $\partial v_k / \partial W$ je rovnoběžná s řádkovým vektorem l_k . Potom je ale

$$\mu_k \frac{\partial v_k}{\partial W} r_j = l_k r_j = \delta_{jk} \quad (4.22)$$

a tedy ($M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$)

$$M \frac{\partial V(W)}{\partial W} R = E \quad (4.23)$$

resp.

$$\frac{\partial W(V)}{\partial V} = RM \quad (4.24)$$

Derivace $\partial W(V) / \partial t$ je potom

$$\frac{\partial W(V)}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial t} = RM \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (4.25)$$

podobně i pro derivaci podle x . Máme tedy

$$0 = W_t + AW_x = RMV_t + R\Lambda R^{-1}RMV_x = RM(V_t + \Lambda(V)V_x). \quad (4.26)$$

Pro diagonální matice platí $\Lambda M = M\Lambda$.

Systém tedy opět přechází do tvaru s diagonální maticí Λ

$$V_t + \Lambda(V)V_x = 0. \quad (4.27)$$

Přestože je tento systém formálně podobný lineárnímu systému, nerozpadá se na m nezávislých rovnic! Matice Λ totiž závisí na všech hodnotách vektoru W resp. V .

Definice 19 Proměnnou v_k splňující $\forall j \neq k$ vztah

$$\frac{\partial v_k}{\partial W} r_j = 0 \quad (4.28)$$

nazveme k -tým Riemannovým invariantem.

Význam Riemannových invariantů je hlavně pro konstrukci řešení Riemannova problému a při odvození vhodných okrajových podmínek pro nelineární systémy.

Podle odvození vztahu pro Riemannovy invarianty je vidět, že ve fázovém prostoru jsou podél k -té charakteristické křivky definované parametricky vztahem

$$\frac{dW(\zeta)}{d\zeta} = r_k(W(\zeta)) \quad (4.29)$$

j -té Riemannovy invarianty konstantní pro $j \neq k$ a mění se pouze hodnota k -tého invariantu. Je totiž

$$\frac{dv_k(W(\zeta))}{d\zeta} = \frac{\partial v_k}{\partial W} \frac{dW(\zeta)}{d\zeta} = \frac{1}{\mu_k} l_k r_j = 0. \quad (4.30)$$

Pro vícerozměrný případ je tedy charakteristická křivka jako průnik $k - 1$ variet daných rovnicemi $v_j = \text{const}$.

Příklad 4.1 Hyperbolicita systému Eulerových rovnic v 1D

Uvažujme systém Eulerových rovnic v 1D.

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (4.31)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0, \quad (4.32)$$

$$(\rho E)_t + ((\rho E + p)u)_x = 0, \quad (4.33)$$

s $p = (\gamma - 1)\rho(E - u^2/2)$. Vyšetřování systému Eulerových rovnic v tomto tvaru je poměrně pracné a proto přejdeme k tzv. primitivním proměnným $U = [\rho, u, p]^T$. To na vlastnostech systému nic nemění neboť

$$W_t + A(W)W_x = \frac{\partial W}{\partial U} U_t + A(W) \frac{\partial W}{\partial U} U_x = \frac{\partial W}{\partial U} (U_t + B(U)U_x), \quad (4.34)$$

kde $B = T^{-1}AT$ a $T = \partial W / \partial U$. Je-li λ vlastní číslo B a s odpovídající vlastní vektor, potom

$$\lambda s = Bs = T^{-1}ATs \Rightarrow \lambda Ts = ATs \quad (4.35)$$

a tedy λ je vlastní číslo A a $r = Ts$ je vlastní odpovídající vlastní vektor.

Máme tedy z první rovnice

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0. \quad (4.36)$$

Z druhé rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_t u + \rho u_t + (\rho u)_x u + \rho u u_x + p_x = \\ &= u (\rho_t + (\rho u)_x) + \rho \left(u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} p_x \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

a tedy

$$u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0. \quad (4.38)$$

Konečně z poslední rovnice je při dosazení $\rho E = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho u^2$

$$\begin{aligned} &\frac{p_t}{\gamma-1} + \frac{1}{2} (\rho u^2)_t + \frac{\gamma}{\gamma-1} (p u)_x + \frac{1}{2} (\rho u^3)_x = \\ &= \frac{1}{\gamma-1} (p_t + \gamma p u_x + \gamma u p_x) + \frac{1}{2} ((\rho u)_t u + \rho u u_t + (\rho u^2)_x u + \rho u^2 u_x) = \\ &= \frac{1}{\gamma-1} (p_t + \gamma p u_x + \gamma u p_x) + \frac{1}{2} (-p_x u - u p_x) = \\ &= \frac{1}{\gamma-1} (p_t + \gamma p u_x + u p_x). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Máme tedy Eulerovy rovnice (v nekonzervativním tvaru) pro primitivní proměnné U

$$\rho_t + u \rho_x + \rho u_x = 0, \quad (4.40)$$

$$u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0, \quad (4.41)$$

$$p_t + \gamma p u_x + u p_x = 0, \quad (4.42)$$

nebo

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \gamma p & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}_x = 0. \quad (4.43)$$

Vlastní čísla matice B určíme z rovnice

$$0 = \det \begin{bmatrix} u - \lambda & \rho & 0 \\ 0 & u - \lambda & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \gamma p & u - \lambda \end{bmatrix} = (u - \lambda)^3 - (u - \lambda) \frac{\gamma p}{\rho} \quad (4.44)$$

Řešením jsou

$$\lambda_1 = u - c, \quad (4.45)$$

$$\lambda_2 = u, \quad (4.46)$$

$$\lambda_3 = u + c, \quad (4.47)$$

kde $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ je rychlost zvuku.

Systém Eulerových rovnic je tedy **hyperbolický** a vlastní vektory matice B zapsány po sloupcích do matice S jsou

$$S = [s_1 | s_2 | s_3] = \begin{bmatrix} -\frac{\rho}{2c} & 1 & \frac{\rho}{2c} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{\rho c}{2} & 0 & \frac{\rho c}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Matice S je regulární (pro $\rho > 0$ a $c > 0$) a její inverze je

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\rho c} \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

□

Příklad 4.2 Okrajové podmínky pro linearizované Eulerovy rovnice

Mějme smíšenou úlohu pro systém Eulerových rovnic. Pro případ malých poruch kolem referenčního stavu $\bar{\rho}$, \bar{u} a \bar{p} lze systém aproximovat linearizovaným systémem

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{u} & \frac{1}{\bar{\rho}} \\ 0 & \gamma \bar{p} & \bar{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}_x = 0. \quad (4.50)$$

Vlastní čísla jsou $\bar{u} - \bar{c}$, \bar{u} a $\bar{u} + \bar{c}$.

Uvažujme případ s $0 < \bar{u} < \bar{c}$. Charakteristické proměnné pro linearizovaný systém jsou

$$V = S^{-1}U = \begin{bmatrix} u - \frac{p}{\bar{\rho}\bar{c}} \\ \rho - \frac{p}{\bar{c}^2} \\ u + \frac{p}{\bar{\rho}\bar{c}} \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

Pro $\bar{u} > \bar{c}$ je situace jednoduchá. V $x = 0$ zadáváme celý vektor U resp. W a v $x = L$ nezadáváme nic.

Na “vstupu” (tj. $x = 0$) bychom tedy měli předepisovat hodnoty

$$v_2 = \rho - \frac{p}{\bar{c}^2}, \quad (4.52)$$

$$v_3 = u + \frac{p}{\bar{\rho}\bar{c}} \quad (4.53)$$

a na výstupu (tj. $x = L$)

$$v_1 = u - \frac{p}{\bar{\rho}\bar{c}}. \quad (4.54)$$

□

Příklad 4.3 Riemannovy invarianty pro nelineární Eulerovy rovnice

Ze vztahu pro druhý Riemannův invariant máme v primitivních proměnných

$$dv_2 = \frac{\partial v_2}{\partial U} dU = \frac{1}{\mu_2} \left(1d\rho - \frac{1}{c^2} dp \right). \quad (4.55)$$

Pokud zvolíme integrační faktor $\mu_2 = \rho$, dostaneme

$$dv_2 = \frac{d\rho}{\rho} - \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p}. \quad (4.56)$$

Integrálem je

$$v_2 = -\frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = -\frac{1}{\gamma} \sigma, \quad (4.57)$$

kde $\sigma = \ln(p/\rho^\gamma)$.

Při určení v_1 a v_3 využijeme toho, že $\sigma = \text{const.}$ ($\frac{\partial v_{1,3}}{\partial W} r_2 = 0$) a tedy $p = K\rho^\gamma$. Potom

$$dv_{1,3} = \frac{1}{\mu_{1,3}} \left(du \mp \frac{1}{\rho c} dp \right) = \left(du \mp \sqrt{\frac{K^{1/\gamma}}{\gamma}} p^{-\frac{\gamma+1}{2\gamma}} dp \right), \quad (4.58)$$

kde jsme zvolili $\mu_{1,3} = 1$. Integrály jsou

$$v_{1,3} = u \mp \sqrt{\frac{K^{1/\gamma}}{\gamma}} \frac{2\gamma}{\gamma-1} p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = u \mp \frac{2c}{\gamma-1}. \quad (4.59)$$

Riemannovy invarianty pro systém Eulerových rovnic tedy jsou (pro $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u$ a $\lambda_3 = u + c$):

$$v_1 = u - \frac{2c}{\gamma-1}, \quad (4.60)$$

$$v_2 = \sigma = \ln(p/\rho^\gamma), \quad (4.61)$$

$$v_3 = u + \frac{2c}{\gamma-1}. \quad (4.62)$$

Eulerovy rovnice lze pak vyjádřit v diagonalizovaném tvaru

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + u \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0, \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0. \quad (4.65)$$

□

Ověřte!

4.4 Riemannův problém pro nelineární hyperbolický systém

V této kapitole naznačíme postup při řešení Riemannova problému pro nelineární hyperbolický systém. Nejprve se nebudeme zabývat entropickou podmínkou a budeme hledat pouze řešení složené z m nespojitostí.

Nejprve probereme případ dvou rovnic (tj. $m = 2$). Řešení bude pro čas $t > 0$ ve tvaru po částech konstantní funkce nabývající postupně hodnot W_l , W_* a W_r . Na rozdíl od lineárního případu však při

zobrazení ve fázové rovině již nejsou integrální křivky (tj. množiny stavů lišících se od výchozího stavu jen změnou jednoho Riemannova invariantu) přímkami. Proto není zaručeno, že se protnou.

To ale znamená, že nemáme obecně zaručenu existenci řešení Riemannova problému. Protože jsou však vektory r_1 a r_2 lineárně nezávislé, lze ukázat existence řešení Riemannova problému alespoň pro dostatečně blízká W_l a W_r .

Rozšíření Laxovy entropické podmínky pro případ nelineárních hyperbolických systémů je poměrně snadné. Vyšetříme změnu vlastního čísla λ_k podél k -té integrální křivky ve fázové rovině. Ta je

$$\frac{d\lambda_k}{d\zeta} = \frac{\partial\lambda_k}{\partial W} \frac{dW}{d\zeta} = \frac{\partial\lambda_k}{\partial W} r_k(W). \quad (4.66)$$

Pokud je $\frac{\partial\lambda_k}{\partial W} r_k(W) = 0$, hodnota λ_k zůstává podél integrální křivky konstantní a řešení Riemannova problému obsahuje nespojitost podél k -té charakteristiky nespojitost. Vzhledem k tomu, že je to případ podobný lineárnímu systému, mluvíme o **lineárně degenerované** složce.

Pokud je $\frac{\partial\lambda_k}{\partial W} r_k(W) \neq 0$, mluvíme o **ryze nelineární** složce. Nechť W_L je stav na levé straně nespojitosti a W_R na pravé. Potom nespojitost splňuje Laxovu entropickou podmínku právě tehdy, když $\lambda_k(W_L) > \lambda_k(W_R)$.

Pro případ Eulerových rovnic lze pro dostatečně blízké W_l a W_r nalézt řešení Riemannova problému (Toro, 2009). Postup však není jednoduchý a při jeho řešení je třeba podrobně analyzovat typy jednotlivých vln (nespojitost, zřed'ující vlna, kontaktní nespojitost) a řešení se pak liší dle konfigurace jednotlivých vln.

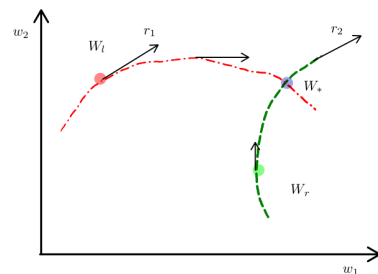
Příklad 4.4 Riemannův problém pro rovnice mělké vody

Pohyb vln v mělké vodě je popsán systémem rovnic ?? . Ten lze zapsat ve vektorovém tvaru jako

$$W_t + F(W)_x = 0, \quad (4.67)$$

kde $W = [h, hu]^T$ a $F(W) = [hu, hu^2 + gh^2/2]^T$. Pro $h > 0$ je systém hyperbolický a vlastní čísla Jacobiho matice $\partial F(W)/\partial W$ jsou $\lambda_1 = u - \sqrt{gh}$ a $\lambda_2 = u + \sqrt{gh}$. Označme $c = \sqrt{gh}$. Řešení Riemannova problému je tedy složeno ze tří stavů oddělených vlnami s rychlostmi λ_1 a λ_2 . Tyto vlny mohou být buď nespojitosti (rázové vlny) a nebo zřed'ující vlny. Označme po řadě tyto stavy W_L , W^* a W_R .

Vyšetřeme nejdříve vlnu odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = u - c$ oddělující stavy W_L a W^* . Z Laxovy entropické podmínky víme, že tato vlna je nespojitostí pouze pokud $\lambda_{1L} > \lambda_1^*$. V tomto případě řešení určíme z podmínek pro rychlost pohybu nespojitosti. Nechť $\hat{\lambda}_1$ je rychlost pohybu této nespojitosti. Potom musí platit $F(W^*) - F(W_L) = \hat{\lambda}_1(W^* - W_L)$. Po



Dokažte!

Vlna 1 ve tvaru nespojitosti.

složkách tedy

$$h^* u^* - h_L u_L = \hat{\lambda}_1 (h^* - h_L), \quad (4.68)$$

$$h^* u^{*2} + \frac{g}{2} h^{*2} - h_L u_L^2 + \frac{g}{2} h_L^2 = \hat{\lambda}_1 (h^* u^* - h_L u_L). \quad (4.69)$$

Máme tedy 2 rovnice pro tři neznámé h^* , u^* a $\hat{\lambda}_1$. Z první z rovnic vyjádříme u^* jako

$$u^* = \hat{\lambda}_1 + \frac{h_L}{h^*} (u_L - \hat{\lambda}_1). \quad (4.70)$$

Druhou rovnici nejprve upravíme do tvaru

$$h^* (u^* - \hat{\lambda}_1) u^* + \frac{g}{2} h^{*2} = h_L (u_L - \hat{\lambda}_1) u_L + \frac{g}{2} h_L^2, \quad (4.71)$$

na levé straně dosadíme z první rovnice za $h^* (u^* - \hat{\lambda}_1) = h_L (u_L - \hat{\lambda}_1)$ a za u^* z 4.70. Dostáváme tak

$$h_L (u_L - \hat{\lambda}_1) \left(\hat{\lambda}_1 + \frac{h_L}{h^*} (u_L - \hat{\lambda}_1) - u_L \right) = \frac{g}{2} (h_L^2 - h^{*2}) \quad (4.72)$$

a po úpravě

$$(u_L - \hat{\lambda}_1)^2 = \frac{g}{2} \frac{h^*}{h_L} (h_L + h^*). \quad (4.73)$$

Protože hledáme řešení ve tvaru nespojitosti, je z Laxovy entropické podmínky $\lambda_{1L} = u_L - c_L > \hat{\lambda}_1 > u^* - c^*$. Odtud tedy $u_L - \hat{\lambda}_1 > c_L = \sqrt{gh_L} > 0$. Můžeme tedy předchozí vztah odmocnit a dostáváme

$$u_L - \hat{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^*}{h_L} (h_L + h^*)}. \quad (4.74)$$

Z tohoto vztahu vyjádříme $\hat{\lambda}_1$ a dosadíme do vztahu pro u^* , viz 4.70. Po úpravě výrazu máme tedy

$$u^* = u_L + (h_L - h^*) \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{1}{h_L} + \frac{1}{h^*} \right)}. \quad (4.75)$$

Tento vztah udávající u^* jako funkci h^* je však platný pouze pro případ nespojitosti! Vrátime-li se k Laxově entropické podmínce, tak vidíme, že musí platit $u_L - \hat{\lambda}_1 > c_L$ a tedy

$$\sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^*}{h_L} (h_L + h^*)} < c_L = \sqrt{gh_L} \quad (4.76)$$

a tedy

$$h^* h_L + h^{*2} > 2h_L^2. \quad (4.77)$$

Tato podmínka je splněna pouze pro $h^* > h_L$.

Pokud je $h_L > h^*$, je řešení ve tvaru zřed'ujících vlny. To budeme hledat pomocí Riemannových invariantů. Upravme rovnice mělké vody do primi-

Vlna 1 je nespojitostí pouze pro $h_L < h^*$!

Vlna 1 ve tvaru zřed'ujících vlny.

tivních proměnných $U = [h, u]^T$.

Máme tedy rovnice

$$h_t + uh_x + hu_x = 0, \quad (4.78)$$

$$u_t + gh_x + uu_x = 0. \quad (4.79)$$

Matice B je tedy

$$B = \begin{bmatrix} u & h \\ g & u \end{bmatrix}. \quad (4.80)$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = u - \sqrt{gh}$ a $\lambda_2 = u + \sqrt{gh}$. Opět označme $c = \sqrt{gh}$. Vlastní vektory sestavené do matice S jsou potom

$$S = [s_1 | s_2] = \begin{bmatrix} c & c \\ -g & g \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

a inverzní matice je

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2c} & -\frac{1}{2g} \\ \frac{1}{2c} & \frac{1}{2g} \end{bmatrix}. \quad (4.82)$$

Obě složky jsou ryze nelineární protože

$$\frac{\partial \lambda_{1,2}}{\partial U} s_{1,2} = \left[\frac{\mp g}{2c}, 1 \right] \begin{bmatrix} c \\ \mp g \end{bmatrix} = \mp \frac{3}{2}g \neq 0. \quad (4.83)$$

Riemannovy invarianty určíme ze vztahů

$$dv_{1,2} = \frac{1}{\mu_{1,2}} \left(\frac{1}{2c} dh \mp \frac{1}{2g} du \right). \quad (4.84)$$

Volíme $\mu_{1,2} = \frac{g}{2}$, integrujeme a dostáváme

$$v_{1,2} = 2c \mp u. \quad (4.85)$$

Pro vlnu odpovídající vlastnímu číslu λ_1 dochází ke změně invariantu v_1 a ostatní invarianty (tj. v našem případě pouze v_2) zůstávají konstantní. Je tedy

$$v_2^* = u^* + 2c^* = u_L + 2c_L \quad (4.86)$$

a tedy

$$u^* = u_L + 2\sqrt{gh_L} - 2\sqrt{gh^*}. \quad (4.87)$$

Řešení ve zřed'ující vlně pak dostaneme tak, že parametrizujeme křivku $v_2 = \text{const.}$ ve fázové rovině pomocí parametru $\xi = x/t$. Pro primitivní proměnné je

$$U'(\xi) = \alpha_1(\xi) s_1(\xi) = \alpha_1(\xi) \begin{bmatrix} c \\ -g \end{bmatrix}. \quad (4.88)$$

Derivujeme rovnici $\xi = \lambda_1(\xi)$ a dostáváme

$$1 = \lambda_1'(U(\xi)) = \frac{\partial \lambda_1}{\partial U} U'(\xi) = \left[\frac{-g}{2c}, 1 \right] \alpha_1(\xi) \begin{bmatrix} c \\ -g \end{bmatrix} = -\frac{3}{2}g\alpha_1(\xi). \quad (4.89)$$

Je tedy $\alpha_1(\xi) = -\frac{2}{3g}$ a tedy

$$U'(\xi) = -\frac{2}{3g} \begin{bmatrix} c \\ -g \end{bmatrix}. \quad (4.90)$$

Integrací s počáteční podmínkou $U(u_L - c_L) = U_L$ dostáváme pro $u_L - c_L < \xi < u^* - c^*$

$$u(\xi) = \frac{1}{3}(2\xi + u_L + 2c_L), \quad (4.91)$$

$$c(\xi) = \sqrt{gh(\xi)} = \frac{1}{3}(u_L + 2c_L - \xi). \quad (4.92)$$

V obou případech (nespojitosť a zřed'ující vlna) dokážeme vyjádřit rychlost u^* jako funkci neznámé výšky hladiny h^* jako $u^*(h^*) = u_L + \phi_L(h^*)$, kde

$$\phi_L(h^*) = \begin{cases} (h_L - h^*)\sqrt{\frac{g}{2}\left(\frac{1}{h_L} + \frac{1}{h^*}\right)}, & \text{pro } h^* > h_L, \\ 2\sqrt{gh_L} - 2\sqrt{gh^*} & \text{pro } h^* \leq h_L. \end{cases} \quad (4.93)$$

Stejným postupem vyšetříme řešení v blízkosti vlny odpovídající vlastnímu číslu λ_2 . I v tomto případě je třeba rozlišit postup pro nespojitě řešení a pro zřed'ující vlnu. Rychlost u^* v tomto případě vyjde ve tvaru $u^*(h^*) = u_R - \phi_R(h^*)$, kde

$$\phi_R(h^*) = \begin{cases} u_R - (h_R - h^*)\sqrt{\frac{g}{2}\left(\frac{1}{h_R} + \frac{1}{h^*}\right)}, & \text{pro } h^* > h_R, \\ u_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\sqrt{gh^*} & \text{pro } h^* \leq h_R. \end{cases} \quad (4.94)$$

Dosud neznámý stav $W^* = [h^*, h^* u^*]^T$ pak dostaneme tak, že nejprve vyřešíme (numericky) nelineární rovnici

$$u_L + \phi_L(h^*) = u_R - \phi_R(h^*) \quad (4.95)$$

a určíme tak h^* . Potom $u^* = u_L + \phi_L(h^*)$.

Řešení Riemannova problému pak sestavíme dle následujícího předpisu

- pro $x/t \leq u^*$ (řešení v okolí vlny 1)
 - pro $h_L > h^*$ je řešení ve tvaru nespojitosti s rychlostí $\hat{\lambda}_1$, tedy

$$W(x, t) = \begin{cases} W_L & \text{pro } x/t \leq \hat{\lambda}_1, \\ W^* & \text{pro } \hat{\lambda}_1 < x/t \leq u^*, \end{cases} \quad (4.96)$$

- pro $h_L \leq h^*$ je řešení ve tvaru zřed'ující vlny

$$W(x, t) = \begin{cases} W_L & \text{pro } x/t \leq u_L - c_L, \\ \begin{bmatrix} h_1(x/t) \\ h_1(x/t)u_1(x/t) \end{bmatrix} & \text{pro } u_L - c_L < x/t \leq u^* - c^*, \\ W^* & \text{pro } u^* - c^* < x/t \leq u^*, \end{cases} \quad (4.97)$$

Zde

$$u_1(\xi) = \frac{1}{3}(2\xi + u_L + 2c_L), \quad (4.98)$$

$$h_1(\xi) = \frac{1}{9g}(u_L + 2c_L - \xi)^2. \quad (4.99)$$

- pro $u^* < x/t$ (řešení v okolí vlny 2)
 - pro $h_R > h^*$ je řešení ve tvaru nespojitosti s rychlostí $\hat{\lambda}_2$, tedy

$$W(x, t) = \begin{cases} W^* & \text{pro } u^* < x/t \leq \hat{\lambda}_2, \\ W_R & \text{pro } \hat{\lambda}_2 < x/t \end{cases} \quad (4.100)$$

- pro $h_R \leq h^*$ je řešení ve tvaru zřed'ující vlny

$$W(x, t) = \begin{cases} W^* & \text{pro } u^* < x/t \leq u_R - c_R, \\ \begin{bmatrix} h_2(x/t) \\ h_2(x/t)u_2(x/t) \end{bmatrix} & \text{pro } u^* - c^* < x/t \leq u_R - c_R, \\ W_R & \text{pro } u_R - c_R < x/t \end{cases} \quad (4.101)$$

Zde

$$u_2(\xi) = \frac{1}{3}(u_R - 2c_R - 2\xi), \quad (4.102)$$

$$h_2(\xi) = \frac{1}{9g}(-u_R + 2c_R + \xi)^2. \quad (4.103)$$

□

Příklad 4.5 Protržení hráze

Jednou z úloh popsanou rovnicemi mělké vody je případ protržení hráze.

Počáteční podmínku zvolíme $h_L = 1 \text{ m}$ a $h_R = 0,1 \text{ m}$ a $u_L = u_R = 0$.

Tíhové zrychlení uvažujeme $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

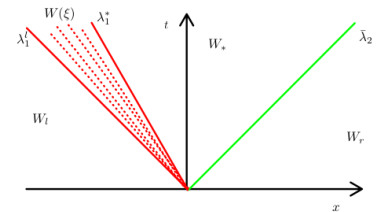
Výšku hladiny h^* v mezistavu získáme řešením nelineární rovnice (viz předchozí příklad)

$$u_L + \phi_L(h^*) = u_R - \phi_R(h^*). \quad (4.104)$$

Vypočtená výška h^* je $h^* \approx 0,396 175 \text{ m}$ a rychlost $u^* = u_L + \phi_L(h^*) \approx 2,343 727 \text{ m s}^{-1}$.

Vlna odpovídající vlastnímu číslu λ_1 je tedy zřed'ující vlna ($h_L > h^*$) a vlna odpovídající vlastnímu číslu λ_2 je nespojitost. Rychlost pohybu této nespojitosti je

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{h^*u^* - h_Ru_R}{h^* - h_R} = \frac{h^*u^*}{h^* - h_R} \approx 3,135 060 \text{ m s}^{-1}. \quad (4.105)$$

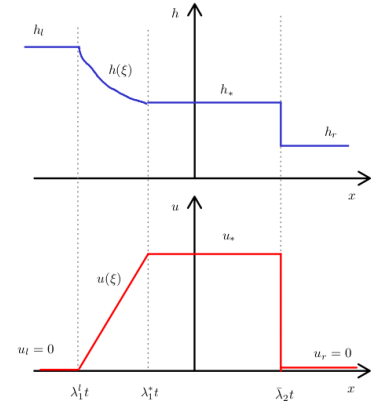


Obrázek 4.1: Struktura řešení Riemannova problému pro rovnice mělké vody.

Řešení počáteční úlohy pak je (pozn. $u_L = u_R = 0$)

$$U(x, t) = \begin{bmatrix} h(x, t) \\ u(x, t) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} h_L \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{pro } x/t < -c_L, \\ \begin{bmatrix} \frac{(2c_L - x/t)^2}{98} \\ \frac{2x/t + 2c_L}{3} \end{bmatrix} & \text{pro } -c_L \leq x/t < u^* - c^*, \\ \begin{bmatrix} h^* \\ u^* \end{bmatrix} & \text{pro } u^* - c^* \leq x/t < \hat{\lambda}_2, \\ \begin{bmatrix} h_R \\ u_R \end{bmatrix} & \text{pro } \hat{\lambda}_2 \leq x/t. \end{cases} \quad (4.106)$$

□



Obrázek 4.2: Řešení Riemannova problému pro rovnice mělké vody pro $t > 0$.

5

Metoda konečných objemů pro jednorozměrný skalární problém

Při odvození metody konečných objemů lze postupovat dvěma způsoby. U první z nich, tzv. metody přímek (*method of lines*), provedeme diskretizaci v prostoru a převedeme tak parciální diferenciální rovnici na systém obyčejných diferenciálních rovnic. Ten pak řešíme pomocí známých numerických metod (explicitní Eulerova metoda, ...). Druhou možností je provést diskretizaci v prostoru i čase zároveň. Zde hovoříme o tzv. časoprostorové metodě (*space-time method*).

5.1 Odvození metody konečných objemů

Odvození metody konečných objemů (MKO) provedeme pomocí metody přímek. Mějme rovnici

$$u_t + f(u)_x = 0. \quad (5.1)$$

Proveďme diskretizaci prostoru (tj. osy x) pomocí rovnoměrné sítě s konstantním krokem $\Delta x > 0$. Označme

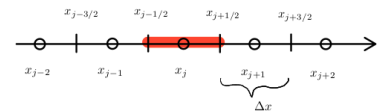
$$x_j = \left(j + \frac{1}{2}\right) \Delta x \text{ pro } j = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \dots \quad (5.2)$$

Konečným objemem (někdy též kontrolním objemem) pak budeme rozumět interval $\Omega_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ pro celočíselná j . Celočíselná j tak označují kontrolní objemy a neceločíselná j , tj. $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$, jsou hranicemi příslušných kontrolních objemů.

Integrujme nyní danou rovnici přes kontrolní objem Ω_j , tedy

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j} (u_t + f(u)_x) dx &= \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u_t dx + \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(u)_x dx = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u dx + [f(u)]_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

MKO lze samozřejmě odvodit pro i pro nerovnoměrnou síť.



V prvním výrazu jsme přitom zaměnili pořadí integrálu a derivace. Máme tedy

$$\frac{d}{dt} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t) dx = - [f(u(x, t))]_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}. \quad (5.4)$$

Pro další postup je třeba rozlišit, zda budeme diskrétní hodnoty numerického řešení uvažovat ve středech (těžištích) kontrolních objemů či v jeho vrcholech. V prvním případě mluvíme o tzv. *cell centered* formulaci, ve druhém o tzv. *cell vertex* formulaci. Pro další postup budeme volit *cell centered* formulaci.

Označme střední hodnotu řešení v j -tém konečném objemu jako

$$u_j(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t) dx. \quad (5.5)$$

Potom

$$\frac{du_j(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} \left(f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) \right). \quad (5.6)$$

Předchozí má však smysl pouze pro spojitě u a pro ně platí přesně. Pro případ nespojitě funkce u nemusí být hodnota $u(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t)$ definována! Navíc nám předchozí vztah nedává dostatečný návod na výpočet neznámých u_j . Na pravé straně se totiž vyskytují hodnoty neznámé funkce u .

Nahradíme tedy v posledním vztahu hodnoty funkce $f(u)$ pomocí tzv. **numerického toku** f závisejícího na středních hodnotách $u_j(t)$ v sousedních kontrolních objemech

$$f(u(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) \approx f(u_{j-1}(t), u_j(t)), \quad (5.7)$$

$$f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) \approx f(u_j(t), u_{j+1}(t)). \quad (5.8)$$

Dostaneme tedy

$$\frac{du_j(t)}{dt} \approx -\frac{1}{\Delta x} (f(u_j(t), u_{j+1}(t)) - f(u_{j-1}(t), u_j(t))). \quad (5.9)$$

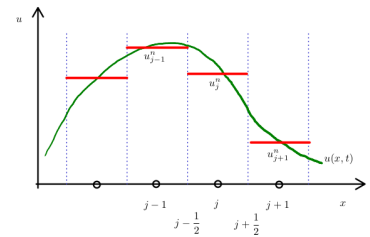
Definice 20 Mějme danou funkci (numerický tok) $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R})$. Potom systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{du_j(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (f(u_j(t), u_{j+1}(t)) - f(u_{j-1}(t), u_j(t))) \quad (5.10)$$

pro neznámé funkce u_j nazveme **schématem metody konečných objemů v semidiskrétním tvaru**.

Proveďme nyní diskretizaci v čase. Pro jednoduchost budeme uvažovat explicitní Eulerovu metodu prvního řádu s konstantním krokem Δt . Označme

To můžeme provést pouze tehdy, když u_t má integrabilní majorantu (viz věta o záměně derivace a integrálu). Ta ale pro nespojitě funkce u nemusí existovat. Rovnice mechaniky tekutin však vycházejí primárně z integrálního tvaru. Při jejich odvození jsme derivaci podle času "vtáhli" pod integrál (viz kapitola 1.1).



Numerický tok může záviset i na více hodnotách u . Pro jednoduchost však budeme nejprve uvažovat pouze závislost na hodnotách ve dvou nejbližších konečných objemech.

Časový krok obecně nemusí být konstantní.

$$u_j^n = u_j(t^n), \quad (5.11)$$

kde $t^n = n\Delta t$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$. Potom diskretizace explicitní Eulerovou metodou vede na

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \approx -\frac{1}{\Delta x} \left(f(u_j^n, u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n, u_j^n) \right). \quad (5.12)$$

Definice 21 Mějme dánu funkci (numerický tok) $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R})$. Potom schéma

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f(u_j^n, u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n, u_j^n) \right) \quad (5.13)$$

pro neznámé funkce u_j nazveme explicitním **schématem metody konečných objemů** v diskrétním tvaru.

V zápisu schématu budeme někdy vynechávat argumenty numerického toku a budeme psát pouze

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n \right). \quad (5.14)$$

K podobnému výsledku bychom se dostali i při odvození pomocí časoprostorové metody. Při ní rovnici $u_t + f(u)_x = 0$ integrujeme přes časoprostorový "objem" $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \times [t^n, t^{n+1}]$, střední prostorové hodnoty řešení v čase n a $n+1$ označíme jako u_j^n a u_j^{n+1} a střední časové hodnoty toků f označíme jako $f_{j\pm\frac{1}{2}}^n$. Pak dostaneme naprosto stejný tvar schématu, jako u výše provedeného odvození metodou přímek.

Časoprostorová formulace přináší určité výhody při výpočtech na deformujících se sítích. Dále má názornější souvislost s definicí slabého řešení, viz definice 13. Za testovací funkci ϕ je možné brát hladkou aproximaci charakteristické funkce časoprostorového kontrolního objemu.

5.2 Konzistentnce numerického toku

Při analýze metod pro lineární rovnici jsme ukázali, že konzistence metody je jedním z důležitých prvků pro důkaz konvergence numerické aproximace k analytickému řešení. Rozbor přitom vycházel z aplikace Taylorova polynomu. Ten však vyžaduje hladkost řešení. Pro případ nehladkého řešení potřeba definici konzistence vhodným způsobem modifikovat. My budeme definovat konzistenci na základě vlastností numerického toku.

Numerický tok $f_{j+\frac{1}{2}}^n$ jsme volili tak, aby pro hladkou funkci u aproximoval hodnotu $f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t^n))$. Budeme tedy požadovat, aby pro libovolné $\bar{u} \in \mathbb{R}$ bylo

Nebo $\bar{u} \in \mathcal{D}$.

$$f(\bar{u}, \bar{u}) = f(\bar{u}). \quad (5.15)$$

Dále budeme požadovat určitou hladkost f . Konkrétně budeme požadovat Lipschitzovskou spojitost funkce f ve smyslu následující definice.

Definice 22 Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je Lipschitzovsky spojitá v $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když $\exists K > 0$ takové, že $\forall u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{D}$

$$|f(u, v) - f(\bar{u}, \bar{v})| \leq K \max(|u - \bar{u}|, |v - \bar{v}|). \quad (5.16)$$

Potom

Definice 23 Řekneme, že numerický tok $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ **konzistentní s tokem** f právě tehdy, když je f Lipschitzovsky spojitá a $f(\bar{u}, \bar{u}) = f(\bar{u})$. Tedy když $\exists K > 0$ takové, že $\forall u, v, \bar{u} \in \mathcal{D}$

$$|f(u, v) - f(\bar{u})| \leq K \max(|u - \bar{u}|, |v - \bar{u}|). \quad (5.17)$$

Pro případ hladkého řešení a diferencovatelného numerického toku definice konzistence odpovídá definici platné pro lineární problému. Je totiž

$$f_{j-\frac{1}{2}}^n = f(u_{j-1}^n, u_j^n) = f(u_j^n, u_j^n) + \frac{\partial f}{\partial u}(u_{j-1}^n - u_j^n) + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (5.18)$$

$$f_{j+\frac{1}{2}}^n = f(u_j^n, u_{j+1}^n) = f(u_j^n, u_j^n) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_j^n - u_{j+1}^n) + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (5.19)$$

kde u a v značí první a druhý parametr funkce f a derivace je uvažována v bodě $[u_j^n, u_j^n]$. Rozdíl $\Delta f = f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n$ je tedy

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial v}(u_j^n - u_{j+1}^n) - \frac{\partial f}{\partial u}(u_{j-1}^n - u_j^n) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (5.20)$$

Použijeme vzorec $ab - cd = \frac{1}{2}(a+c)(b-d) + \frac{1}{2}(a-c)(b+d)$ a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) = \\ &= f'(\bar{u})\bar{u}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} \right) \bar{u}_{xx} \frac{\Delta x}{2} + \mathcal{O}(\Delta x) = \\ &= f'(\bar{u})\bar{u}_x + \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Využili jsme přitom $f(\bar{u}) = f(\bar{u}, \bar{u})$ a tedy $f'(\bar{u}) = \partial f / \partial u + \partial f / \partial v$ a omezenosti derivací f vyplývající z podmínky na Lipschitzovskou spojitost. Konzistence časové derivace se vyšetří stejným způsobem jako u lineárního problému.

Příklad 5.1 Konzistence protiproudového schématu

Mějme rovnici $u_t + f(u)_x = 0$ takovou, že $f'(u) > 0$. Protiproudové schéma má pak standardní tvar

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n \right), \quad (5.22)$$

kde

$$f_{j+1/2}^n = f(u_j^n, u_{j+1}^n) = f(u_j^n). \quad (5.23)$$

Je přímo vidět, že $f(\bar{u}, \bar{u}) = f(\bar{u})$. Dále potřebujeme ověřit Lipschitzovskost. Pokud je samotná f Lipschitzovská, potom

$$|f(u, v) - f(\bar{u})| = |f(u) - f(\bar{u})| \leq K|u - \bar{u}| \quad (5.24)$$

a numerický tok je tedy konzistentní. \square

5.3 Konzervativita

Jak je vidět z výše uvedeného textu, konzistence ukazuje pouze souvislost mezi numerickým schématem a danou rovnicí a to ještě pouze pro hladké řešení. Pro případ nespojitostí je třeba doplnit další požadavek a tím je konzervativita. Vezměme si nejprve zadanou rovnici a integrujme ji v libovolném intervalu $[a, b]$. Dostaneme

$$\int_a^b (u_t + f(u)_x) dx = \frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx + f(u(b, t)) - f(u(a, t)) = 0, \quad (5.25)$$

tedy

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = f(u(a, t)) - f(u(b, t)). \quad (5.26)$$

Slovně lze tento vztah vyjádřit jako „celkové množství veličiny u v intervalu $[a, b]$ se mění pouze v důsledku toků přes hranice a a b “.

Vezměme si teď explicitní schéma metody konečných objemů a pokusme se vyjádřit celkové množství veličiny u a jeho změnu na nějakém intervalu $[x_{k-\frac{1}{2}}, x_{l+\frac{1}{2}}]$. Máme tedy

$$I^n = \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{l+\frac{1}{2}}} u(x, t^n) dx = \Delta x \sum_{j=k}^l u_j^n. \quad (5.27)$$

V čase t^{n+1} je to

$$\begin{aligned} I^{n+1} &= \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{l+\frac{1}{2}}} u(x, t^{n+1}) dx = \Delta x \sum_{j=k}^l u_j^{n+1} = \\ &= \Delta x \sum_{j=k}^l \left(u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n) \right) = \\ &= I^n - \Delta t \left((f_{k+\frac{1}{2}}^n - f_{k-\frac{1}{2}}^n) + (f_{k+1+\frac{1}{2}}^n - f_{k+1-\frac{1}{2}}^n) + \dots + (f_{l+\frac{1}{2}}^n - f_{l-\frac{1}{2}}^n) \right) = \\ &= I^n + \Delta t (f_{k-\frac{1}{2}}^n - f_{l+\frac{1}{2}}^n). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Pro rychlost změny máme tedy

$$\frac{I^{n+1} - I^n}{\Delta t} = f_{k-\frac{1}{2}}^n - f_{l+\frac{1}{2}}^n \quad (5.29)$$

a tedy i numerická aproximace má stejnou vlastnost, tj. změna celkového množství u se mění pouze v důsledku (numerických) toků přes hranici.

Tato vlastnost je přímým důsledkem tvaru numerického schématu a proto o schématu

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (5.30)$$

budeme říkat, že je v **konzervativním tvaru**.

Konzervativní tvar (resp. konzervativita) schématu zajišťuje mimo jiné správné rychlosti šíření nespojitostí v řešení.

Poznamenejme, že při práci s nelineárními rovnicemi obsahujícími nespojitosti v řešení je třeba postupovat velmi opatrně. Nelze je například rozderivovat nebo používat úpravy platné pro případ hladkých řešení. Jako příklad si uvedme „ekvivalentní“ úpravu Burgersovy rovnice. Uvažujme počáteční úlohu pro Burgersovu rovnici

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \quad (5.31)$$

$$u(x, 0) = 1 \text{ pro } x < 0 \text{ a } 0 \text{ pro } x \geq 0. \quad (5.32)$$

Slabé řešení splňující entropickou podmínku je ve tvaru nespojitosti pohybující se rychlostí

$$s = \frac{\frac{1}{2}1^2 - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}. \quad (5.33)$$

Rovnici nyní rozderivujeme, vynásobme u a zavedeme $v = \frac{1}{2}u^2$.
Potom

$$\begin{aligned} u(u_t + uu_x) &= uu_t + u^2u_x = \left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \left(\frac{1}{3}u^3\right)_x = \\ &= v_t + \frac{2}{3}(v^{3/2})_x = 0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Slabým řešením splňujícím entropickou podmínku je však v tomto případě nespojitost pohybující se rychlostí

$$s_v = \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} - 0}{\frac{1}{2} - 0} \approx 0.471 \neq \frac{1}{2}. \quad (5.35)$$

Je tedy vidět, že tato úprava platná pro hladká řešení nesmí být použita v úlohách s nespojitým řešením.

Příklad 5.2 Konzervativní tvar Rusanovova schématu

Mějme Rusanovovo schéma ve tvaru ($q = \text{const.} > 0$)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n) \right) + \frac{q}{2} \left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n \right). \quad (5.36)$$

Převědeme jej nyní do konzervativního tvaru. Je tedy

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{f(u_{j+1}^n) + f(u_j^n)}{2} - \frac{f(u_j^n) + f(u_{j-1}^n)}{2} \right) + \\ &\quad + \frac{q}{2} \left((u_{j+1}^n - u_j^n) - (u_j^n - u_{j-1}^n) \right) = \\ &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n \right), \end{aligned} \quad (5.37)$$

kde

$$f_{j+\frac{1}{2}}^n = f(u_j^n, u_{j+1}^n) = \frac{f(u_{j+1}^n) + f(u_j^n)}{2} - \frac{q\Delta x}{2\Delta t} (u_{j+1}^n - u_j^n). \quad (5.38)$$

□

Cvičení 5.1 Rusanovovo schéma s nekonzervativní umělou vazkostí

Mějme Rusanovovo schéma ve tvaru ($q_j > 0$). Naivní volba vycházející z podmínky pro lineární stabilitu (neplatné pro nelineární schéma) by mohla být např. $q_j = |f'(u_j^n)|$.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n) \right) + \frac{q_j}{2} \left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n \right). \quad (5.39)$$

Ukažte, že schéma nelze převést do konzervativního tvaru.

□

Cvičení 5.2 Rusanovovo schéma s konzervativní umělou vazkostí

Mějme Rusanovovo schéma ve tvaru ($q_{j+\frac{1}{2}} > 0$)

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n) \right) + \\ &\quad + \frac{q_{j+\frac{1}{2}}}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) - \frac{q_{j-\frac{1}{2}}}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Ukažte, že schéma lze převést do konzervativního tvaru.

□

Cvičení 5.3 Nekonzervativní protiproudové schéma

Mějme protiproudové schéma

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \begin{cases} \left(f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n) \right), & \text{pro } f'(u_j^n) > 0, \\ \left(f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n) \right), & \text{pro } f'(u_j^n) \leq 0. \end{cases} \quad (5.41)$$

Ukažte, že toto schéma není konzervativní.

□

5.4 Konvergence (Laxova-Wendroffova věta)

Otázkou konvergence numerické aproximace ke slabému řešení se zabývá Laxova-Wendroffova věta. Při její formulaci budeme využívat pojem totální variace funkce.

Definice 24 Necht' $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je reálná funkce a $S = \{\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} : \forall i : x_i < x_{i+1}\}$ je množina všech rostoucích posloupností. Potom **totální variací** funkce jedné proměnné budeme rozumět

$$TV(y) = \sup_S \sum_{i=-\infty}^{\infty} |y(x_{i+1}) - y(x_i)|. \quad (5.42)$$

Pro případ funkcí s integrabilní derivací je výše uvedená definice ekvivalentní vztahu

$$TV(y) = \int_{-\infty}^{\infty} |y'(x)| dx \quad (5.43)$$

a pro po částech konstantní funkci s hodnotami y_i vztahu

$$TV(y) = \sum |y_{i+1} - y_i|. \quad (5.44)$$

Budeme nyní uvažovat posloupnost sítí s kroky Δx_l a Δt_l takové, že při $l \rightarrow \infty$ je $\Delta t_l, \Delta x_l \rightarrow 0$. Označme numerické řešení u_j^n získané na l -té síti a definujme po částech konstantní funkci

$$U_l(x, t) = u_j^n \text{ pro } x \in (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}], t \in [t^n, t^{n+1}). \quad (5.45)$$

Počáteční podmínka $U_l(x, 0)$ je přitom dána jako $U_l(x, 0) = u_j^0$.

Symbolem $TV(U_l(., t))$ budeme rozumět totální variaci v pevně zvoleném čase t , tedy ($t \in [t^n, t^{n+1})$).

$$TV(U_l(., t)) = \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n|. \quad (5.46)$$

Věta 7 Laxova-Wendroffova věta Necht' U_l je numerické řešení počáteční úlohy pro rovnici $u_t + f(u)_x = 0$ získané na l -té síti pomocí konzervativního schématu s konzistentním numerickým tokem

Pokud existuje funkce $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R})$ taková, že

1. $\forall a, b, T > 0$ je

$$\int_0^T \int_a^b |U_l(x, t) - u(x, t)| dx dt \rightarrow 0 \text{ při } l \rightarrow \infty \quad (5.47)$$

2. $\forall T > 0 \exists R > 0 \forall t \in [0, T] \forall l$

$$TV(U_l(., t)) \leq R, \quad (5.48)$$

tak u je slabým řešením dané počáteční úlohy.

Důkaz viz (Randall J LeVeque, 1992).

Laxova-Wendroffova věta tedy říká, že pokud numerické řešení konverguje v jistém smyslu k nějaké funkci, pak je tato funkce slabým řešením. Nijak ale nezaručuje konvergenci či jednoznačnost a ani neposkytuje odhad chyby.

TVD a monotónní schémata pro jednorozměrný problém

V kapitole 2 byl prezentován postup pro vyšetření stability lineárních schémat založený na tzv. spektrálním kritériu. Pro případ nelineárních úloh je nutno postupovat jinak. Ze znění Laxovy-Wendroffovy věty z konce kapitoly 5.2 vidíme, že důležitou roli při vyšetřování konvergence numerického řešení ke slabému řešení hraje omezenost totální variace. V této kapitole se tedy budeme zabývat otázkou zda existují schémata, která produkují numerické řešení s omezenou totální variací.

6.1 TVD schéma pro skalární konvekci

V (Randall J LeVeque, 1992) je proveden rozbor numerických metod produkujících řešení s omezenou variací a je ukázáno, že pro takovéto metody lze dokázat konvergenci numerického řešení k množině slabých řešení. Omezenost totální variace ale sama o sobě nezaručuje konvergenci k entropickému řešení. K tomu je potřeba dodat ještě další dodatečné podmínky.

Jednou z významných skupin nelineárně stabilních schémat jsou tzv. TVD (neboli *total variation diminishing*) schémata. Ta jsou definována následovně.

Lepší název by asi byl TVNI, neboli *total variation non-increasing* schéma. V literatuře se však vžil pojem TVD.

Definice 25 O konzistentním numerickém schématu v konzervativním tvaru řekneme, že má **TVD** vlastnost (nebo že je TVD) právě tehdy, když pro numerické řešení s libovolnou počáteční podmínkou platí $\forall n \geq 0$

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n), \quad (6.1)$$

neboli

$$\sum_j |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n|. \quad (6.2)$$

Pro konstrukci TVD schémat či pro ověření TVD vlastnosti je možné využít následující větu.

Věta 8 (Hartenovo lemma, (Harten, 1983)) *Mějme numerické schéma ve tvaru*

$$u_j^{n+1} = u_j^n - C_{j-\frac{1}{2}}^n (u_j^n - u_{j-1}^n) + D_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n), \quad (6.3)$$

kde C a D jsou koeficienty, které mohou záviset na u . Pokud $\forall j, n$ platí, že

$$C_{j-\frac{1}{2}}^n \geq 0, \quad (6.4)$$

$$D_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0, \quad (6.5)$$

$$C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1, \quad (6.6)$$

pak má schéma TVD vlastnost.

Povšimněte si indexů u koeficientů v poslední z podmínek!

Dokažme si tuto větu. Vyjdeme z definice totální variace, dosadíme za nové hodnoty řešení dostáváme tak

$$\begin{aligned} TV(u^{n+1}) &= \sum_j |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| = \\ &= \sum_j |u_{j+1}^n - C_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) + D_{j+\frac{3}{2}}^n (u_{j+2}^n - u_{j+1}^n) - \\ &\quad u_j^n + C_{j-\frac{1}{2}}^n (u_j^n - u_{j-1}^n) - D_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n)| \leq \\ &\leq \sum_j |1 - C_{j+\frac{1}{2}}^n - D_{j+\frac{1}{2}}^n| |u_{j+1}^n - u_j^n| + \\ &+ \sum_j |D_{j+\frac{3}{2}}^n| |u_{j+2}^n - u_{j+1}^n| + \sum_j |C_{j-\frac{1}{2}}^n| |u_j^n - u_{j-1}^n| = \\ &= \sum_j (1 - C_{j+\frac{1}{2}}^n - D_{j+\frac{1}{2}}^n) |u_{j+1}^n - u_j^n| + \\ &+ \sum_j D_{j+\frac{1}{2}}^n |u_{j+1}^n - u_j^n| + \sum_j C_{j+\frac{1}{2}}^n |u_{j+1}^n - u_j^n| = \\ &= \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n| = TV(u^n). \quad (6.7) \end{aligned}$$

Příklad 6.1 TVD vlastnost Rusanovova schématu

Mějme Rusanovovo schéma v konzervativním tvaru s nekonstantní hodnotou koeficientu q

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n), \quad (6.8)$$

kde

$$f_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)) - \frac{1}{2} q_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n). \quad (6.9)$$

Pokusíme se určit postačující podmínku pro q tak, aby schéma mělo TVD vlastnost.

Po dosazení f do schématu dostáváme

$$\begin{aligned}
 u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n) - \right. \\
 &\quad \left. - q_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) + q_{j-\frac{1}{2}}^n (u_j^n - u_{j-1}^n) \right) = \\
 &= u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n) + f(u_j^n) - \right. \\
 &\quad \left. - q_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) + q_{j-\frac{1}{2}}^n (u_j^n - u_{j-1}^n) \right) = \\
 &= u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(a_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) + a_{j-\frac{1}{2}}^n (u_j^n - u_{j-1}^n) - \right. \\
 &\quad \left. - q_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) + q_{j-\frac{1}{2}}^n (u_j^n - u_{j-1}^n) \right), \quad (6.10)
 \end{aligned}$$

kde pro $u_{j+1}^n \neq u_j^n$ je

$$a_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)}{u_{j+1}^n - u_j^n} \quad (6.11)$$

a $a_{j+\frac{1}{2}}^n = f'(u_j^n)$ jinak. Podobně je definované i $a_{j-\frac{1}{2}}^n$. Schéma lze proto přepsat do tvaru (6.3) s

$$C_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{\Delta t}{2\Delta x} (q_{j-\frac{1}{2}}^n + a_{j-\frac{1}{2}}^n), \quad (6.12)$$

$$D_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{\Delta t}{2\Delta x} (q_{j+\frac{1}{2}}^n - a_{j+\frac{1}{2}}^n). \quad (6.13)$$

Podmínka $C \geq 0$ a $D \geq 0$ je tedy splněna pokud $\forall j, n$ je

$$q_{j+\frac{1}{2}}^n \geq |a_{j+\frac{1}{2}}^n|. \quad (6.14)$$

Podmínku $C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1$ můžeme splnit vždy volbou dostatečně malého Δt . Je totiž

$$C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} q_{j+\frac{1}{2}}^n \quad (6.15)$$

a tedy stačí volit časový krok

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{q_{j+\frac{1}{2}}^n}. \quad (6.16)$$

□

Cvičení 6.1 TVD vlastnost Laxova-Wendroffova schématu

Uvažujte Laxovo-Wendroffovo schéma pro případ lineární rovnice. Ukažte, že toto schéma nemá TVD vlastnost. □

Jednou z nevýhod Hartenova lemmatu je to, že jej nelze jednoduše aplikovat pro vícerozměrné úlohy. Pro ně totiž platí, že z TVD vlastnosti přímo vyplývá nízký (první) řád přesnosti. Přesto se pojem TVD schéma používá i ve vícerozměrném případě. Většinou se tím však rozumí aplikace TVD schématu ve směrech x a y (resp. z). V tom případě však již není omezená totální variace a nejsou tedy splněny předpoklady Laxovy-Wendroffovy věty.

6.2 Monotónní schémata

Jednou z podmnožin TVD schémat jsou tzv. monotónní schémata.

Definice 26 Mějme konzervativní konzistentní schéma ve tvaru

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f(u_j^n, u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n, u_j^n) \right) = \mathcal{H}(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n). \quad (6.17)$$

Řekneme, že schéma je **monotónní** právě tehdy, když je funkce \mathcal{H} neklesající v každém ze svých parametrů.

Nutnou podmínkou pro monotonii schématu v konzervativním tvaru je, že numerický tok f je neklesající funkcí prvního z parametrů a nerostoucí funkcí druhého z parametrů. Pro diferencovatelný numerický tok je tedy

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \geq 0, \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \leq 0. \quad (6.19)$$

Upravíme nyní konzervativní tvar schématu s použitím věty o střední hodnotě

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f(u_j^n, u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n, u_j^n) \right) = \\ &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f(u_j^n, u_j^n) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_{j+1}^n - u_j^n) - f(u_j^n, u_j^n) - \frac{\partial f}{\partial u}(u_{j-1}^n - u_j^n) \right) = \\ &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial f}{\partial u}(u_j^n - u_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial f}{\partial v}(u_{j+1}^n - u_j^n). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Parciální derivace $\partial f / \partial u$ a $\partial f / \partial v$ jsou přitom vyčísleny v bodech $[\zeta, u_j^n]$ a $[u_j^n, \eta]$, kde ζ je mezi u_j^n a u_{j+1}^n a η mezi u_j^n a u_{j-1}^n . Porovnáním s tvarem TVD schématu dostáváme

$$C_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial f}{\partial u}(\zeta, u_j^n), \quad (6.21)$$

$$D_{j+\frac{1}{2}}^n = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial f}{\partial v}(u_j^n, \eta). \quad (6.22)$$

Při volbě dostatečně malého časového kroku jsou tedy splněny podmínky Hartenova lemmatu.

Pro obecný numerický tok (tedy i nediferencovatelný) bylo dokázáno, že **monotónní schéma má vždy TVD vlastnost a numerické řešení konverguje k entropickému řešení** a to dokonce i ve vícerozměrném případě, viz např. (Crandall a kol. 1980). Bohužel však bylo také dokázáno, že monotónní schémata jsou pouze prvního řádu přesnosti.

Jednou z užitečných vlastností monotónního schématu je tzv. princip maxima.

Věta 9 Mějme monotónní schéma $u_j^{n+1} = \mathcal{H}(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$ v konzervativním tvaru. Potom pro libovolné j a n platí

$$\min(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \leq u_j^{n+1} \leq \max(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n). \quad (6.23)$$

Výše uvedené tvrzení lze snadno dokázat. Na tomto místě si ukážeme pouze část důkazu první nerovnosti. Předpokládejme, že $u_{j-1}^n \leq u_j^n$ a $u_{j-1}^n \leq u_{j+1}^n$ tj. $u_{j-1}^n = \min(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$. Potom

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \mathcal{H}(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \geq \\ &\geq \mathcal{H}(u_{j-1}^n, u_{j-1}^n, u_{j+1}^n) \geq \mathcal{H}(u_{j-1}^n, u_{j-1}^n, u_{j-1}^n) = \\ &= u_{j-1}^n = \min(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Ostatní kombinace parametrů se vyšetří stejně.

Příklad 6.2 Monotonie Rusanovova schématu

Mějme Rusanovovo schéma v konzervativním tvaru s konstantní hodnotou koeficientu q

$$u_j^{n+1} = \mathcal{H}(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n \right), \quad (6.25)$$

kde

$$f_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left(f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n) \right) - \frac{1}{2} q (u_{j+1}^n - u_j^n). \quad (6.26)$$

Numerický tok je diferencovatelný (protože $f \in C^1$) a tedy stačí ověřit, zda

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_{j-1}^n} = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(q + f'(u_{j-1}^n) \right) \geq 0, \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_j^n} = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} q \geq 0, \quad (6.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_{j+1}^n} = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(q - f'(u_{j+1}^n) \right) \geq 0. \quad (6.29)$$

Je vidět, že stačí volit $q \geq |f'(u)|$ a časový krok $\Delta t \leq \Delta x / q$. □

Cvičení 6.2 Monotonie protiproudového schématu

Určete postačující podmínky pro monotonii protiproudového schématu. □

6.3 Konstrukce TVD schémat vyššího řádu přesnosti

Cvičení 6.3 Určení chyby numerického řešení

Sestavte program pro řešení počáteční úlohy pro rovnici lineární konvekce

$$u_t + au_x = 0 \quad (6.30)$$

s $a = 1$ a s počáteční podmínkou $u_0(x) = 1 - \cos(4\pi(x - 1))$ pro $x \in (0.25, 0.5)$ a 0 jinde. Určete numerické řešení v čase $t = 0.25$ pomocí protiproudového schématu a Laxova-Wendroffova schématu na síti s krokem 10^{-2} , 0.5×10^{-2} a 0.25×10^{-2} . Určete velikost chyby a z velikosti chyby odhadněte řád přesnosti schématu. \square

Z výše uvedeného příkladu bude zřejmé, že protiproudové schéma má nízkou přesnost, poskytuje však řešení bez oscilací (má totiž TVD vlastnost). Naproti tomu Laxovo-Wendroffovo schéma je mnohem přesnější avšak nemá TVD vlastnost. Oscilace narušující TVD vlastnost se přitom vyskytují pouze v “problematických” místech, kde je buď řešení či jeho derivace nespojitá a nebo v okolí lokálních extrémů.

Pokusíme se tedy sestavit schéma, které bude kombinací stabilního a méně přesného protiproudového schématu v “problematických” bodech a přesnějšího Laxova-Wendroffova schématu jinde. Uvažujme lineární konvekci s $a > 0$. Pro ní máme tedy protiproudové schéma (pro usnadnění zápisu budeme vynechávat horní index n)

$$u_j^{n+1} = u_j - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{j+\frac{1}{2}}^{lo} - f_{j-\frac{1}{2}}^{lo} \right), \quad (6.31)$$

kde $f_{j+\frac{1}{2}}^{lo} = au_j$ (horní index lo znamená schéma nízkého řádu *low order*). Laxovo-Wendroffovo schéma je pak ve stejném tvaru s numerickým tokem (hi je vyšší řád - *high order*)

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{hi} = \frac{a}{2}(u_j + u_{j+1}) - \frac{\Delta t a^2}{2\Delta x}(u_{j+1} - u_j). \quad (6.32)$$

Numerický tok pro TVD schéma budeme sestavovat jako

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{TVD} = f_{j+\frac{1}{2}}^{lo} + \phi_{j+\frac{1}{2}} \left(f_{j+\frac{1}{2}}^{hi} - f_{j+\frac{1}{2}}^{lo} \right), \quad (6.33)$$

kde $\phi_{j+\frac{1}{2}}$ je tzv. *limiter*. Je zřejmé, že $\phi = 0$ vede na schéma nízkého řádu a $\phi = 1$ na přesnější Laxovo-Wendroffovo schéma.

Je tedy (při $\Delta t \leq \Delta x/a$)

$$\begin{aligned} f_{j+\frac{1}{2}}^{TVD} &= au_j + \phi_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{2}(u_{j+1} + u_j) - \frac{\Delta t a^2}{2\Delta x}(u_{j+1} - u_j) - au_j \right) = \\ &= au_j + \phi_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{2} - \frac{\Delta t a^2}{2\Delta x} \right) (u_{j+1} - u_j) = \\ &= au_j + \phi_{j+\frac{1}{2}} a \beta (u_{j+1} - u_j), \end{aligned} \quad (6.34)$$

kde $\beta = \frac{1}{2} - \frac{\Delta t a}{2\Delta x}$ a tedy $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$.

Celé TVD schéma je tedy

$$u_j^{n+1} = u_j - \frac{\Delta t a}{\Delta x} \left[(u_j - u_{j-1}) + \beta \left(\phi_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1} - u_j) - \phi_{j-\frac{1}{2}}(u_j - u_{j-1}) \right) \right]. \quad (6.35)$$

Označme $r_{j+\frac{1}{2}} = (u_j - u_{j-1}) / (u_{j+1} - u_j)$ a předpokládejme, že ϕ je funkcí r . Potom

$$u_j^{n+1} = u_j - \frac{\Delta t a}{\Delta x} \left[1 + \beta \left(\phi(r_{j+\frac{1}{2}}) / r_{j+\frac{1}{2}} - \phi(r_{j-\frac{1}{2}}) \right) \right] (u_j - u_{j-1}). \quad (6.36)$$

Porovnáním s Hartenovým lemmatem dostaneme $D_{j+\frac{1}{2}} = 0$ a

$$C_{j-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t a}{\Delta x} \left[1 + \beta \left(\phi(r_{j+\frac{1}{2}}) / r_{j+\frac{1}{2}} - \phi(r_{j-\frac{1}{2}}) \right) \right] \quad (6.37)$$

a chceme tedy, aby $0 \leq C_{j-\frac{1}{2}} \leq 1$.

Postačující podmínkou je tedy např. současné splnění nerovností

- $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2a}$,
- $\phi(r) = 0$ pro $r \leq 0$,
- $0 \leq \phi(r) \leq 2$, a
- $0 \leq \phi(r) / r \leq 2$.

Zároveň si povšimněme několika speciálních voleb funkce ϕ :

- $\phi = 0$ vede na protiproudové schéma (upwind)TVD typu nízkého řádu přesnosti,
- $\phi = 1$ vede na ne-TVD Laxovo-Wendroffovo schéma druhého řádu přesnosti,
- $\phi = r$ vede na schéma

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t a}{\Delta x} (1 + \beta)(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t a}{\Delta x} \beta(u_{j-1} - u_{j-2}), \quad (6.38)$$

což je tzv. Beamovo-Warmingovo schéma druhého řádu přesnosti.

Výše uvedené podmínky lze znázornit v tzv. Swebyho diagramu, viz (Sweby, 1984).

Obrázek 6.2 ukazuje tři různé limity ve Swebyho diagramu. Jmenovitě je to

- **minmod** limiter

$$\phi(r) = \text{minmod}(1, r) = \min(1, \max(r, 0)), \quad (6.39)$$

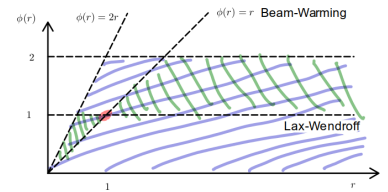
- **vanLeerův** limiter

$$\phi(r) = \frac{r + |r|}{1 + |r|}, \quad (6.40)$$

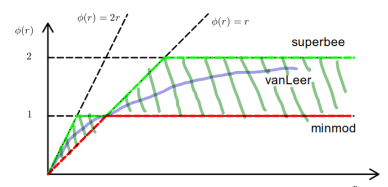
- **superbee** limiter

$$\phi(r) = \max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2)). \quad (6.41)$$

Odvození tohot schématu je podobné jako pro Laxovo-Wendroffovo schéma. Rozdíl je pouze v náhradě první derivace pomocí zpětné namísto centrální difference.



Obrázek 6.1: Swebyho diagram znázorňující oblast pro TVD limity (modře) a pro TVD limity vyššího řádu (zeleně).



Obrázek 6.2: Diagram znázorňující ve Swebyho diagramu tři různé limity.

Poznamenejme, že pro všechny TVD limity konstruované tímto postupem je $\phi(r) = 0$ pro $r \leq 0$ a tedy v oblasti lokálních extrémů takovéto schéma automaticky přechází na méně přesné schéma nízkého řádu přesnosti. Proto nejsou tato schémata vhodná například pro simulace turbulentního proudění pomocí metody velkých vírů (tzv. LES) či pro přímou numerickou simulaci turbulence (tzv. DNS). Jejich výhodou je však stabilita a to i pro případ nespojitostí v řešení. Proto jsou vhodnou volbou pro simulace proudění stlačitelné tekutiny o vyšších rychlostech a to včetně transsonických či hypersonických režimů.

6.4 Zobecnění pro libovolné a

V předcházející části jsme demonstrovali konstrukci TVD schématu sestaveného jako kombinaci Laxova-Wendroffova a protiproudového schématu pro případ $a > 0$. Výsledné schéma mělo tvar

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{j+\frac{1}{2}}^{TVD} - f_{j-\frac{1}{2}}^{TVD} \right), \quad (6.42)$$

kde

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{TVD} = f_{j+\frac{1}{2}}^{lo,+} + \phi_{j+\frac{1}{2}}^+(r_{j+\frac{1}{2}}^+) \left(f_{j+\frac{1}{2}}^{hi} - f_{j+\frac{1}{2}}^{lo,+} \right). \quad (6.43)$$

Horní index $+$ u f^{lo} , ϕ a r zde přitom značí, že se jedná o omezovač odvozený pro $a > 0$, tedy např. pro tzv. minmod limiter je

$$\phi_{j+\frac{1}{2}}^+(r_{j+\frac{1}{2}}^+) = \minmod(1, r_{j+\frac{1}{2}}^+), \quad (6.44)$$

$$r_{j+\frac{1}{2}}^+ = \frac{u_j - u_{j-1}}{u_{j+1} - u_j}. \quad (6.45)$$

Pro $a < 0$ lze odvodit TVD schéma analogicky. Zde v tomto případě bude

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{TVD} = f_{j+\frac{1}{2}}^{lo,-} + \phi_{j+\frac{1}{2}}^-(r_{j+\frac{1}{2}}^-) \left(f_{j+\frac{1}{2}}^{hi} - f_{j+\frac{1}{2}}^{lo,-} \right) \quad (6.46)$$

a

$$\phi_{j+\frac{1}{2}}^-(r_{j+\frac{1}{2}}^-) = \minmod(1, r_{j+\frac{1}{2}}^-), \quad (6.47)$$

$$r_{j+\frac{1}{2}}^- = \frac{u_{j+2} - u_{j+1}}{u_{j+1} - u_j}. \quad (6.48)$$

Z těchto dvou variant je možné poskládat schéma vhodné pro libovolné a .

Často se však při konstrukci schématu vychází z upraveného předpisu pro f^{TVD} . Numerický tok přepíšeme do ekvivalentního tvaru

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{TVD} = f_{j+\frac{1}{2}}^{hi} + (1 - \phi_{j+\frac{1}{2}}) \left(f_{j+\frac{1}{2}}^{lo} - f_{j+\frac{1}{2}}^{hi} \right). \quad (6.49)$$

V původním tvaru (6.43) je tok vyjádřen jako tok nízkého řádu plus ϕ -krát korekce pro vyšší řád. Tvar (6.49) vujadřuje TVD jako tok vyššího řádu přesnosti plus $1 - \phi$ krát numerická stabilizace (tzv. numerická vazkost).

Pro $a > 0$ je rozdíl $f^{lo} - f^{hi}$ roven

$$\begin{aligned} f_{j+\frac{1}{2}}^{lo,+} - f_{j+\frac{1}{2}}^{hi} &= au_j - \frac{a}{2}(u_{j+1} + u_j) + \frac{\Delta ta^2}{2\Delta x}(u_{j+1} - u_j) = \\ &= \left(\frac{\Delta ta^2}{2\Delta x} - \frac{a}{2} \right) (u_{j+1} - u_j). \end{aligned} \quad (6.50)$$

Pro $a < 0$ je

$$\begin{aligned} f_{j+\frac{1}{2}}^{lo,-} - f_{j+\frac{1}{2}}^{hi} &= au_{j+1} - \frac{a}{2}(u_{j+1} + u_j) + \frac{\Delta ta^2}{2\Delta x}(u_{j+1} - u_j) = \\ &= \left(\frac{\Delta ta^2}{2\Delta x} + \frac{a}{2} \right) (u_{j+1} - u_j), \end{aligned} \quad (6.51)$$

a konečně pro libovolné a je tedy

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{lo} - f_{j+\frac{1}{2}}^{hi} = \left(\frac{\Delta ta^2}{2\Delta x} - \frac{|a|}{2} \right) (u_{j+1} - u_j), \quad (6.52)$$

Činitel $1 - \phi$ je určen v závislosti na znaménku a buď jako funkce r^+ nebo r^- . Zobecněme jej jako $\phi(r^+, r^-)$. Potom je numerický tok pro TVD schéma ve tvaru

$$\begin{aligned} f_{j+\frac{1}{2}}^{TVD} &= f_{j+\frac{1}{2}}^{hi} + \left(1 - \phi(r_{j+\frac{1}{2}}^+, r_{j+\frac{1}{2}}^-) \right) (f_{j+\frac{1}{2}}^{lo} - f_{j+\frac{1}{2}}^{hi}) = \\ &= \frac{a}{2}(u_j + u_{j+1}) - \frac{\Delta ta^2}{2\Delta x}(u_{j+1} - u_j) + \\ &+ \left(1 - \phi(r_{j+\frac{1}{2}}^+, r_{j+\frac{1}{2}}^-) \right) \left(\frac{\Delta ta^2}{2\Delta x} - \frac{|a|}{2} \right) (u_{j+1} - u_j). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Limiter $\phi(r^+, r^-)$ přitom můžeme volit např. jako

$$\phi(r^+, r^-) = \begin{cases} \minmod(1, r^+) & \text{pro } a > 0, \\ \minmod(1, r^-) & \text{pro } a < 0. \end{cases} \quad (6.54)$$

TVD schéma však dostaneme i v případě, že zvýšíme hodnotu $1 - \phi$. Můžeme tedy například volit jako

$$\begin{aligned} \phi(r^+, r^-) &= \minmod(1, r^+, r^-) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{pro } r^+ r^- \leq 0, \\ \text{sgn}(r^+) \min(|r^+|, |r^-|, 1) & \text{pro } r^+ r^- > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.55)$$

Výše uvedený postup vycházel ze schémat pro metodu konečných diferencí přeformulovaných do tvaru vhodného pro MKO. Limiter

Tím zvýšíme C a D v Hartenově větě a pokud adekvátně snížíme časový krok, dokážeme splnit i podmínku pro součet C a D .

byl přitom odvozen tak, že omezoval rozdíly mezi toku nízkého vyššího řádu. Proto se tomuto postupu někdy také říká *flux limiting*. Výhodou tohoto přístupu je, že v oblastech hladkého řešení dostáváme známe schéma vyššího řádu přesnosti (např. Laxovo-Wendroffovo schéma). Na druhou stranu je však tento postup obtížně použitelný při řešení vícerozměrných úloh na nepravidelných či nestrukturovaných sítích.

6.5 TVD schéma pro hyperbolické systémy

Výše uvedený postup pro konstrukci TVD schémat byl vhodný pouze pro skalární problém. To souvisí s tím, že jsme totální variaci (a TVD vlastnost) definovali pouze pro skalární problém. Pro případ hyperbolických systémů je třeba postupovat opatrně. Naivní definice totální variace jako $TV(W) = \sum_k \sum_j |W_{j+1}^k - W_j^k|$, kde W^k je k -tá složka vektoru W je bohužel nevhodná. Z následujícího příkladu je zřejmé, že takto naivně definovaná totální variace může i pro analytické řešení růst.

Příklad 6.3 Počáteční úloha pro linearizované Eulerovy rovnice

Uvažujme linearizovaný systém Eulerových rovnic formulovaný pro primitivní proměnné $U = [\rho, u, p]^T$

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{p} & 0 \\ 0 & \bar{u} & 1/\bar{p} \\ 0 & \gamma \bar{p} & \bar{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}_x = 0, \quad (6.56)$$

kde referenční stav je $\bar{p} = 1,2 \text{ kg/m}^3$, $\bar{u} = 100 \text{ m/s}$ a $\bar{a} = 340 \text{ m/s}$. K tomuto systému budeme mít počáteční podmínku ($\bar{p} = \bar{\rho} \bar{a}^2 / \gamma$)

$$\rho(x, 0) = \bar{\rho}, \quad (6.57)$$

$$u(x, 0) = \bar{u}, \quad (6.58)$$

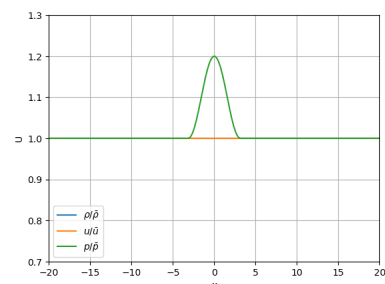
$$p(x, 0) = \bar{p} (1 + 0.1(1 + \cos(x))) \text{ pro } x \in (-\pi, \pi) \text{ a } \bar{p} \text{ jinde.} \quad (6.59)$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o lineární hyperbolický systém, lze snadno nalézt analytické řešení. Přejdeme k charakteristickým proměnným. Pro každou charakteristickou proměnnou pak řeší rovnici lineární konvekce, tj. provedeme posun příslušnou rychlostí. Nakonec provedeme přechod zpět k primitivním proměnným. Řešení v čase $t = 0,025 \text{ s}$ je pak znázorněno na

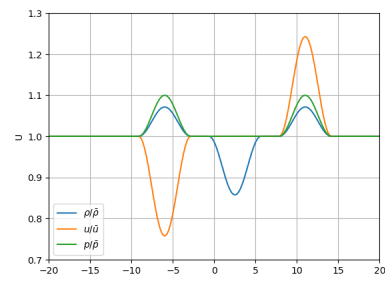
Pokud bychom definovali totální variaci pro systémy pomocí výše uvedené naivního vztahu, dostali bychom pro počáteční podmínku U^0

$$\begin{aligned} TV(U^0) &= \sum_j |\rho_{j+1} - \rho_j| + \sum_j |u_{j+1} - u_j| + \sum_j |p_{j+1} - p_j| = \\ &= 0 + 0 + 0.4\bar{p} \approx 39634. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Např. pro Eulerovy rovnice popisující proudění stlačitelné tekutiny bychom měli počítat veličiny různých jednotek!



Obrázek 6.3: Počáteční podmínka pro linearizovaný systém Eulerových rovnic. Veličiny jsou normalizované referenčním stavem.



Obrázek 6.4: Řešení počáteční úlohy pro čas $t = 0,025 \text{ s}$.

Pro řešení v čase $t = 0,025$ s by byla totální variace

$$\begin{aligned} TV(U^n) &= \sum_j |\rho_{j+1} - \rho_j| + \sum_j |u_{j+1} - u_j| + \sum_j |p_{j+1} - p_j| \approx \\ &\approx 0.69 + 97.1 + 0.4\bar{p} + 39634 > TV(U^0). \end{aligned} \quad (6.61)$$

□

Jaké jsou zde jednotky?

Vhodná definice totální variace pro hyperbolický systém je založena na variaci **charakteristických proměnných**, tj. místo $TV(W)$ budeme používat

$$TV(R^{-1}W) = TV(V) = \sum_k \sum_j |v_{j+1}^k - v_j^k| = \sum_j \|R^{-1}(W_{j+1} - W_j)\|_1, \quad (6.62)$$

kde R je matice sestavená z vlastních vektorů matice A .

TVD schéma má tedy také smysl konstruovat pro charakteristické proměnné a poté jej případně transformovat zpět do konzervativních proměnných.

Mají složky V vždy stejné jednotky?
Umíme toho vždy dosáhnout?

Uvažujme lineární hyperbolický systém $W_t + AW_x = 0$, kde $A = R\Lambda R^{-1}$ a $V = R^{-1}W$. Systém lze tedy zapsat pro charakteristické proměnné jako $V_t + \Lambda V_x = 0$. Pro k -tou složku charakteristických proměnných lze zapsat TVD schéma ve tvaru

$$v_j^{k,n+1} = v_j^{k,n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[g_{j+\frac{1}{2}}^{k,n} - g_{j-\frac{1}{2}}^{k,n} \right] \quad (6.63)$$

s numerickým tokem (viz 6.53, pro přehlednost vynecháváme n)

$$\begin{aligned} g_{j+\frac{1}{2}}^k &= \frac{\lambda_k}{2} (v_j^k + v_{j+1}^k) - \frac{\Delta t \lambda_k^2}{2\Delta x} (v_{j+1}^k - v_j^k) + \\ &+ \left(1 - \phi(r_{j+\frac{1}{2}}^{k,+}, r_{j+\frac{1}{2}}^{k,-}) \right) \left(\frac{\Delta t \lambda_k^2}{2\Delta x} - \frac{|\lambda_k|}{2} \right) (v_{j+1}^k - v_j^k). \end{aligned} \quad (6.64)$$

Zde

$$r_{j+\frac{1}{2}}^{k,+} = \frac{v_j^k - v_{j-1}^k}{v_{j+1}^k - v_j^k}, \quad (6.65)$$

$$r_{j+\frac{1}{2}}^{k,-} = \frac{v_{j+2}^k - v_{j+1}^k}{v_{j+1}^k - v_j^k}. \quad (6.66)$$

Vektorově lze toto schéma zapsat jako

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[G_{j+\frac{1}{2}}^n - G_{j-\frac{1}{2}}^n \right], \quad (6.67)$$

kde (opět vynecháváme n)

$$\begin{aligned} G_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{\Lambda}{2} (V_j + V_{j+1}) - \frac{\Delta t \Lambda^2}{2\Delta x} (V_{j+1} - V_j) + \\ &+ \left(I - \Phi(r_{j+\frac{1}{2}}^+, r_{j+\frac{1}{2}}^-) \right) \left(\frac{\Delta t \Lambda^2}{2\Delta x} - \frac{|\Lambda|}{2} \right) (V_{j+1} - V_j). \end{aligned} \quad (6.68)$$

Transformací do konzervativních proměnných $W = RV$ pak dostáváme TVD schéma

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n \right], \quad (6.69)$$

kde

$$F_{j+\frac{1}{2}} = \frac{A}{2}(W_j + W_{j+1}) - \frac{\Delta t A^2}{2\Delta x}(W_{j+1} - W_j) - R \left(I - \Phi(r_{j+\frac{1}{2}}^+, r_{j+\frac{1}{2}}^-) \right) \left(\frac{|\Lambda|}{2} - \frac{\Delta t \Lambda^2}{2\Delta x} \right) R^{-1}(W_{j+1} - W_j). \quad (6.70)$$

Schéma se tedy skládá z “klasického” Laxova-Wendroffova schématu pro systémy (první řádek) a stabilizačního členu (druhý řádek). Stabilizační člen je přitom ve tvaru součinu matice s rozdílem $W_{j+1} - W_j$. Pro výpočet této matice je zapotřebí provést diagonalizaci A , vypočítat charakteristické proměnné pro určení r^\pm a vlastní čísla Λ .

Výrazného zjednodušení na úkor přesnosti lze dosáhnout zvětšením stabilizačního členu neboli zvýšením numerické vazkosti tak, ze matici Λ nahradíme $\rho_A I$, kde ρ_A je spektrální poloměr matice A . Dalšího zjednodušení pak lze dosáhnout aproximací vektorů r^\pm (Causon, 1989) (symbolem \odot zde značíme dělení po složkách a $\Delta W_{j+\frac{1}{2}} = W_{j+1} - W_j$)

$$r_{j+\frac{1}{2}}^+ = \Delta V_{j-\frac{1}{2}} \odot \Delta V_{j+\frac{1}{2}} = (R^{-1} \Delta W_{j-\frac{1}{2}}) \odot (R^{-1} \Delta W_{j+\frac{1}{2}}) \approx \frac{(R^T \Delta W_{j+\frac{1}{2}}) \cdot (R^{-1} \Delta W_{j-\frac{1}{2}})}{(R^T \Delta W_{j+\frac{1}{2}}) \cdot (R^{-1} \Delta W_{j+\frac{1}{2}})} \vec{1} = \frac{(\Delta W_{j+\frac{1}{2}}) \cdot (\Delta W_{j-\frac{1}{2}})}{\|\Delta W_{j+\frac{1}{2}}\|_2^2} \vec{1}. \quad (6.71)$$

Podobně i pro r^- .

Zjednodušené TVD schéma má pak numerický tok

$$F_{j+\frac{1}{2}} = \frac{A}{2}(W_j + W_{j+1}) - \frac{\Delta t A^2}{2\Delta x}(W_{j+1} - W_j) - d_{j+\frac{1}{2}}(W_{j+1} - W_j), \quad (6.72)$$

kde

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\rho_A}{2} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \rho_A \right) \left(1 - \phi(\tilde{r}_{j+\frac{1}{2}}^+, \tilde{r}_{j+\frac{1}{2}}^-) \right), \quad (6.73)$$

kde

$$\tilde{r}_{j+\frac{1}{2}}^+ = \frac{(\Delta W_{j+\frac{1}{2}}) \cdot (\Delta W_{j-\frac{1}{2}})}{\|\Delta W_{j+\frac{1}{2}}\|_2^2}, \quad (6.74)$$

$$\tilde{r}_{j+\frac{1}{2}}^- = \frac{(\Delta W_{j+\frac{1}{2}}) \cdot (\Delta W_{j+\frac{3}{2}})}{\|\Delta W_{j+\frac{1}{2}}\|_2^2}, \quad (6.75)$$

ρ_A tak jako tak potřebujeme pro určení časového kroku z podmínky stability.

Zde je třeba pro simulace reálných dějů dávat pozor na jednotky! Bud' musíme rovnice řešit v bezrozměrném tvaru, nebo musíme pro výpočet r do bezrozměrného tvaru převést alespoň ΔW . Tj. např. pro Eulerovy rovnice je možné vzít $\Delta W = [\Delta \rho / \bar{\rho}, \Delta(\rho u) / (\bar{\rho} \bar{c}), \Delta(\rho E) / (\bar{\rho} \bar{c}^2)]^T$, kde veličiny s pruhem jsou referenční hodnoty řešení.

a ϕ je např. $\phi(\tilde{r}^+, \tilde{r}^-) = \min\text{mod}(1, \tilde{r}^+, \tilde{r}^-)$.

Pro nelineární systémy je třeba při výpočtu numerického toku na rozhraní $j + \frac{1}{2}$ provést lokální linearizaci systému a nalézt vhodnou matici $A_{j+\frac{1}{2}} \approx A(W)$. Jednou z možností je $A_{j+\frac{1}{2}} = A((W_j + W_{j+1})/2)$. Matice R a R^{-1} je pak potřeba nahradit příslušnými maticemi $R_{j+\frac{1}{2}}$ a $R_{j+\frac{1}{2}}^{-1}$. Laxovo-Wendroffovo schéma v první části numerického toku lze nahradit nelineární variantou

$$F_{j+\frac{1}{2}}^{LW} = \frac{1}{2} (F(W_j) + F(W_{j+1})) - \frac{\Delta t A_{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} (F(W_{j+1}) - F(W_j)) \quad (6.76)$$

případně MacCormackovou variantou Laxova-Wendroffova schématu. Korekční člen je pak u plné varianty TVD schématu dán vztahem (6.70) ve kterém jsou matice R a R^{-1} nahrazeny maticemi z lokální linearizace. Naproti tomu zjednodušený korekční člen (6.73) lze snadno rozšířit i pro nelineární schéma náhradou ρ_A za $\rho_{A_{j+\frac{1}{2}}}$.

Godunovova metoda pro jednorozměrný problém

Jednou z metod pro konstrukci numerického toku pro metodu konečných objemů je tzv. Godunovova metoda. Při ní se uvažuje po částech konstantní aproximace řešení

$$U^n(x) = u_j^n \text{ pro } x \in (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]. \quad (7.1)$$

Na každém rozhraní mezi sousedními kontrolními objemy tak funkce U^n definuje (lokální) Riemannův problém. Tento Riemannův problém vyřešíme, a sestavíme funkci $\tilde{U}^{n+1}(x)$ z řešení těchto jednotlivých Riemannových problémů v čase $t^n + \Delta t$. Funkce \tilde{U} však již není po částech konstantní a tak následuje poslední krok, kdy provedeme průměrování v každém kontrolním objemu, tj.

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \tilde{U}^{n+1}(x) dx. \quad (7.2)$$

V j -tém kontrolním objemu tak hodnotu u_j^{n+1} dostaneme jako

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f\left(\tilde{u}_{j+\frac{1}{2}}(0)\right) - f\left(\tilde{u}_{j-\frac{1}{2}}(0)\right) \right). \quad (7.3)$$

Symbolem f přitom rozumíme přímo funkci toku z rovnice, $\tilde{u}_{j+\frac{1}{2}}(\xi)$ je řešení Riemannova problému na rozhraní $x_{j+\frac{1}{2}}$ a $\xi = x/t$.

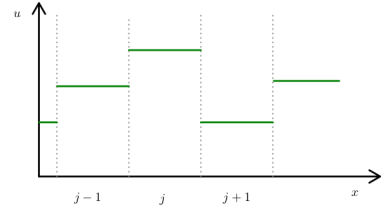
Příklad 7.1 Godunovova metoda pro rovnici lineární konvekce

Mějme rovnici lineární konvekce $u_t + au_x = 0$ s $a > 0$. Řešení Riemannova problému se staví u_l a u_r je

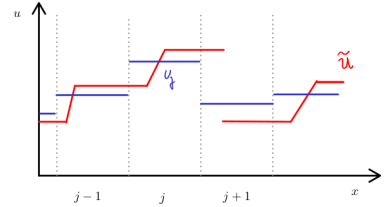
$$\tilde{u}(\xi) = \begin{cases} u_l & \text{pro } \xi < at, \\ u_r & \text{pro } \xi \geq at. \end{cases} \quad (7.4)$$

Tedy $\tilde{u}_{j+\frac{1}{2}}(0) = u_j^n$ a

$$f\left(\tilde{u}_{j+\frac{1}{2}}(0)\right) = a\tilde{u}_{j+\frac{1}{2}}(0) = au_j^n. \quad (7.5)$$



Při $\Delta t < 0.5\Delta x / \max(|f'(u)|)$ nedojde k vzájemné interakci mezi jednotlivými Riemannovými problémy!



Po dosazení tak získáme známe protiproudové schéma. \square

Příklad 7.2 Godunovova metoda pro Burgersovu rovnici

Mějme Burgersovu rovnici $u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0$. Řešení Riemannova problému se stavy u_l a u_r je v tomto případě složitější (viz kapitola 3.5). Řešení je buď ve tvaru nespojitosti, nebo ve tvaru zřetřující vlny. Pro $\xi = 0$ je

$$\tilde{u}(0) = \begin{cases} u_l & \text{pro } u_l \geq u_r \wedge u_l + u_r \geq 0, \\ u_r & \text{pro } u_l \geq u_r \wedge u_l + u_r < 0, \\ u_l & \text{pro } u_l < u_r \wedge u_l > 0, \\ u_r & \text{pro } u_l < u_r \wedge u_r < 0, \\ 0 & \text{pro } u_l < u_r \wedge u_l \leq 0 \leq u_r \end{cases} \quad (7.6)$$

První dva vztahy přitom odpovídají řešení ve tvaru nespojitosti, další tři pak řešení ve tvaru zřetřující vlny. Potom

$$f\left(\tilde{u}_{j+\frac{1}{2}}(0)\right) = \frac{1}{2} \left(\tilde{u}_{j+\frac{1}{2}}(0)\right)^2, \quad (7.7)$$

kde $u_l = u_j^n$ a $u_r = u_{j+1}^n$. \square

Poznamenejme, že Godunovova metoda automaticky splňuje entropickou podmínku (pokud jí splňuje řešení Riemannova problému). Je totiž složena ze dvou postupných kroků splňujících entropickou podmínku. Podobně lze zdůvodnit i splnění TVD vlastnosti Godunovovy metody.

Velikou výhodou této metody je její poměrně snadné rozšíření pro hyperbolické systémy a to i pro nelineární případ. Nevýhodou však je její nízká přesnost. Na příkladě lineární konvekce bylo vidět, že Godunovova metoda vede na protiproudové schéma, tedy na schéma 1. řádu přesnosti.

Pro důkaz splnění entropické podmínky při průměrování řešení by bylo vhodné využít entropii definovanou jako konvexní funkci u , viz např. (Randall J LeVeque, 1992). Splnění entropické podmínky je pak přímým důsledkem konvexnosti entropie.

7.1 TVD rozšíření Godunovovy metody na vyšší řád přesnosti.

Nízká přesnost Godunovovy metody je důsledkem po částech konstantní reprezentace řešení. Vyšší přesnosti schématu lze dosáhnout například tak, že budeme uvažovat po částech lineární aproximaci řešení, tj. funkci $U^n(x)$ budeme uvažovat jako

$$U^n(x) = u_j^n + \sigma_j^n(x - x_j) \text{ pro } x \in (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}], \quad (7.8)$$

kde σ_j^n je aproximací $\partial u / \partial x$ v bodě x_j a čase t^n . Tento krok nazýváme **rekonstrukcí** řešení. Sestavuje při něm totiž z bodových hodnot u_j^n po částech lineární aproximaci $u(., t^n)$. Tu použijeme při řešení Riemannova problému. Výsledná metoda je tedy ve tvaru

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[f(u_{j+\frac{1}{2}}^L, u_{j+\frac{1}{2}}^R) - f(u_{j-\frac{1}{2}}^L, u_{j-\frac{1}{2}}^R) \right], \quad (7.9)$$

Přesněji řečeno bychom na každém rozhraní měli řešit zobecněný Riemannův problém s lineárním průběhem na každé straně nespojitosti.

kde numerický tok získáme z řešení Riemannova problému jako

$$f(u^l, u^r) = f(\tilde{u}(0)) \quad (7.10)$$

a

$$u_{j+\frac{1}{2}}^L = \lim_{x \rightarrow x_{j+\frac{1}{2}}^-} U^n(x) = u_j^n + \frac{\Delta x}{2} \sigma_j^n, \quad (7.11)$$

$$u_{j+\frac{1}{2}}^R = \lim_{x \rightarrow x_{j+\frac{1}{2}}^+} U^n(x) = u_{j+1}^n - \frac{\Delta x}{2} \sigma_{j+1}^n. \quad (7.12)$$

Hodnota σ by měla aproximovat $\partial u / \partial x$. Lze jí tedy volit například jako

$$\sigma_j^n = \begin{cases} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \\ \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, \\ \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}. \end{cases} \quad (7.13)$$

Cvičení 7.1 Řád přesnosti rozšířené Godunovovy metody

Dokažte, že každý z těchto vztahů vede pro případ lineární konvekce na schéma 2. řádu přesnosti v prostoru. \square

Výsledné schéma však není stabilní a nesplňuje TVD podmínku. Budeme proto σ volit tak, aby pro rekonstruovanou funkci U bylo

$$TV(U^n) = \sum_j \left(\Delta x |\sigma_j^n| + |u_{j+\frac{1}{2}}^R - u_{j+\frac{1}{2}}^L| \right) \leq TV(u^n). \quad (7.14)$$

Řešení Riemannových problémů a průměrování řešení nezvyšuje totální variaci a celá schéma skládající se z rekonstrukce, řešení Riemannových problémů a průměrování má TVD vlastnost.

Proveďme nyní rozbor jednotlivých případů, které mohou nastat, a pokusme se nalézt podmínky pro σ . Budeme přitom vycházet z předpokladu, že σ_j je pouze funkcí u_{j-1} , u_j a u_{j+1} . Potom

- je-li u_j lokální extrém, tj. $(u_{j+1} - u_j)(u_j - u_{j-1}) \leq 0$, pak nutně musí být $\sigma_j = 0$,
- jinak je trojice u_{j-1} , u_j a u_{j+1} buď ostře rostoucí, nebo ostře klesající. Stejnou vlastnost musí mít i U na intervalu (x_{j-1}, x_{j+1}) , tedy pro rostoucí trojici musí být

$$\sigma_j \geq 0, \quad (7.15)$$

$$u_{j-\frac{1}{2}}^L = u_{j-1} + \frac{\Delta x}{2} \sigma_{j-1} \leq u_{j-\frac{1}{2}}^R = u_j - \frac{\Delta x}{2} \sigma_j, \quad (7.16)$$

$$u_{j+\frac{1}{2}}^L = u_j + \frac{\Delta x}{2} \sigma_j \leq u_{j+\frac{1}{2}}^R = u_{j+1} - \frac{\Delta x}{2} \sigma_{j+1}. \quad (7.17)$$

Pro klesající trojici musí platit podobná sada podmínek s opačnými znaménky.

Někdy je tento postup označován zkratkou RSA, tj. *reconstruction, solution, averaging*.

Jednou z možných voleb σ je například

$$\sigma_j = \begin{cases} 0 & \text{pro } (u_{j+1} - u_j)(u_j - u_{j-1}) \leq 0, \\ \text{sign}(u_{j+1} - u_j) \min\left(\frac{|u_{j+1} - u_j|}{\Delta x}, \frac{|u_j - u_{j-1}|}{\Delta x}\right) & \text{jinak.} \end{cases} \quad (7.18)$$

Výše uvedený vztah lze zapsat pomocí $r_{j+\frac{1}{2}} = (u_j - u_{j-1}) / (u_{j+1} - u_j)$ také jako

$$\sigma_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \min\text{mod}(1, r_{j+\frac{1}{2}}). \quad (7.19)$$

Pro dosažení vyššího řádu přesnosti i v čase je potřeba toto schéma kombinovat například s Rungeho-Kuttovou metodou. Vhodnou volbou je přitom Heunova metoda (Rungeho-Kuttova metoda 2. řádu)

$$u_j^{n+\frac{1}{2}} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n \right], \quad (7.20)$$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} u_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(u_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] \right). \quad (7.21)$$

První krok této metody má TVD vlastnost (pokud jí má základní schéma). Druhý krok je konvexní kombinací výsledku prvního kroku a aplikace základního TVD schématu na $u^{n+\frac{1}{2}}$ a má tedy také TVD vlastnost.

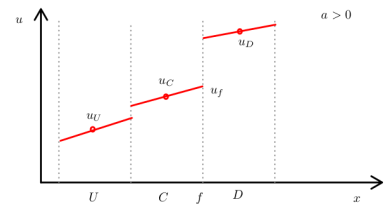
7.2 Rozšíření pomocí NVD interpolace

Alternativním postupem pro odvození stabilního schématu pro Godunovovu metodu je použití tzv. diagramu normalizované proměnné neboli *normalized variable diagram* navrženého v (Leonard, 1988). Na rekonstrukci zde klademe pouze jediný požadavek a to aby negenerovala nové lokální extrémy.

Uvažujme rovnici lineární konvekce. Základní Godunovova metoda zde odpovídá protiproudovému schématu. Pro $a > 0$ je tedy třeba určit hodnoty $u_{j+\frac{1}{2}}^L$ a pro $a < 0$ hodnoty $u_{j+\frac{1}{2}}^R$. Abychom sjednotili odvození pro oba případy, zavedeme následující značení:

- u_c označuje hodnotu v kontrolním objemu j (*Central*) tj. u_j ,
- u_u označuje hodnotu v sousedním objemu proti směru proudu (*Upwind*), tj. u_{j-1} pro $a > 0$ a u_{j+1} pro $a < 0$,
- u_d označuje hodnotu v sousedním objemu po směru proudu (*Downwind*), tj. u_{j+1} pro $a > 0$ a u_{j-1} pro $a < 0$,
- u_f označuje hodnotu na rozhraní (*Face*) mezi objemy C a D ze strany C , $u_{j+\frac{1}{2}}^L$ pro $a > 0$ a $u_{j-\frac{1}{2}}^R$ pro $a < 0$.

Podobné značení budeme používat později u vícerozměrných případů.



Rekonstrukce nám tedy slouží k výpočtu $u_f = \phi(u_u, u_c, u_d)$. Funkce ϕ by měla být invariantní vzhledem k posunu o konstantu, tedy

$$u_f = \phi(0, u_c - u_u, u_d - u_u) + u_u. \quad (7.22)$$

Dále by měla být invariantní vzhledem k násobení konstantou, tj.

$$u_f = \phi(0, \frac{u_c - u_u}{u_d - u_u}, 1)(u_d - u_u) + u_u. \quad (7.23)$$

Zavedeme tzv. normalizovanou proměnnou

$$\hat{u} = \frac{u - u_u}{u_d - u_u}. \quad (7.24)$$

Potom vypustíme-li ve funkci ϕ konstantní argumenty 0 a 1, máme

$$\hat{u}_f = \phi(\hat{u}_c). \quad (7.25)$$

Zapišme pomocí ϕ některá známá schémata.

- pro protiproudové schéma (*upwind*) je $u_f = u_c$ a tedy

$$\phi^{up}(\hat{u}) = \hat{u}, \quad (7.26)$$

- pro centrální schéma (*central differencing*) je $u_f = (u_c + u_d)/2$ a tedy

$$\phi^{cd}(\hat{u}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\hat{u}, \quad (7.27)$$

- pro protiproudové schéma 2. řádu (*linear upwind*) je $u_f = u_c + (u_c - u_u)/2$ a tedy

$$\phi^{lu}(\hat{u}) = \frac{3}{2}\hat{u}, \quad (7.28)$$

Je-li u_c lokální extrém, pak je buď $\hat{u}_c < 0$ nebo $\hat{u}_c > 1$. V takovém případě budeme požadovat, aby $u_f = u_c$ (protiproudové schéma 1. řádu) a tedy $\phi(\hat{u}) = \hat{u}$ pro $\hat{u} < 0$ nebo $\hat{u} > 1$. Je-li trojice u_u, u_c a u_d monotónní, pak budeme požadovat aby u_f bylo mezi u_c a u_d , tj. $\hat{u} \leq \phi(\hat{u}) \leq 1$. Tyto podmínky lze znázornit v tzv. NVD diagramu, viz obr. 7.1.

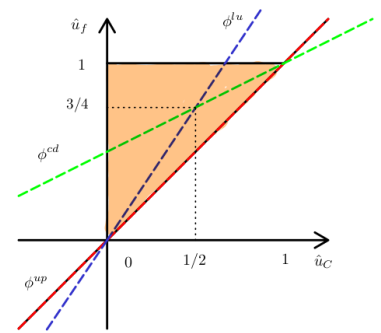
V normalizovaných proměnných tedy budeme požadovat, aby

- pro $\hat{u}_c < 0$ nebo $1 < \hat{u}_c$ bylo

$$\phi(\hat{u}_c) = \hat{u}_c, \quad (7.29)$$

- pro $0 \leq \hat{u}_c \leq 1$ bylo

$$\hat{u}_c \leq \phi(\hat{u}_c) \leq 1. \quad (7.30)$$



Obrázek 7.1: NVD diagram s oranžově vyznačenou přípustnou oblastí pro ϕ . Červeně je vyznačené protiproudové schéma, zeleně centrální a modře protiproudové schéma 2. řádu.

Z obrázku 7.1 je zřejmé, že z výše uvedených schémat tyto počadavky splňuje pouze protiproudové schéma prvního řádu přesnosti. Pro ostatní schémata je nutno vhodným způsobem modifikovat. Jako příklad uvedeme protiproudové schéma 2. řádu s jednoduchým limitem ve tvaru

$$\hat{u}_f = \phi(\hat{u}_c) = \begin{cases} \hat{u}_c & \text{pro } \hat{u}_c \notin (0, 1), \\ \min(1, \hat{u}_c) & \text{pro } \hat{u}_c \in (0, 1). \end{cases} \quad (7.31)$$

Významnou roli v NVD diagramu hraje také bod $[1/2, 3/2]$. Reprezentuje-li u hladkou funkci, pak $\hat{u}_c \approx 1/2$ a $\hat{u}_f \approx 3/2$. Často se proto funkce ϕ konstruuje tak, aby tímto bodem procházela.

Poznamenejme, že existuje souvislost mezi TVD a NVD schématy. U TVD schémat byl limiter určován jako funkce parametru r , který je v aktuálním značení pro $a > 0$ roven

$$r = \frac{u_j - u_{j-1}}{u_{j+1} - u_j} = \frac{u_c - u_u}{u_d - u_c} = \frac{\hat{u}_c}{1 - \hat{u}_c}. \quad (7.32)$$

TVD rekonstrukci 7.19 pak lze zapsat jako

$$u_f = u_c + \frac{1}{2}(u_d - u_c)\min\text{mod}(1, r) = u_c + \frac{1}{2}(u_c - u_u)\min\text{mod}(1, 1/r). \quad (7.33)$$

Přejdeme-li k normalizovaným proměnným, dostáváme

$$\hat{u}_f = \hat{u}_c \left(1 + \frac{1}{2} \min\text{mod} \left(1, \frac{1 - \hat{u}_c}{\hat{u}_c} \right) \right). \quad (7.34)$$

Pro $\hat{u}_c < \frac{1}{2}$ je

$$\hat{u}_f = \frac{3}{2} \hat{u}_c \quad (7.35)$$

a pro $\hat{u}_c \geq \frac{1}{2}$ je

$$\hat{u}_f = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \hat{u}_c. \quad (7.36)$$

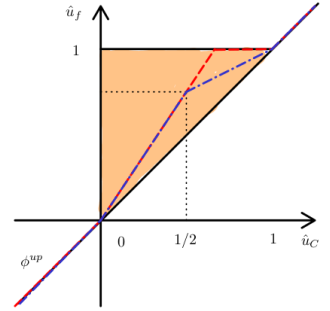
7.3 Godunovova metoda pro systémy rovnic

Aplikace godunovovy metody pro hyperbolické systémy je pro schéma nízkého řádu přímočará. Na každém rozhraní se řeší odpovídající Riemannův problém a poté se provede průměrování. Schéma pro systém $W_t + F(W) = 0$ je tedy

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F(\tilde{W}_{j+\frac{1}{2}}(0)) - F(\tilde{W}_{j-\frac{1}{2}}(0)) \right], \quad (7.37)$$

kde $\tilde{W}_{j+\frac{1}{2}}(\xi)$ je řešení Riemannova problému se stavy $W_l = W_j^n$ a $W_r = W_{j+1}^n$.

Schéma vyššího řádu jsme pro skalární případ získali pomocí rekonstrukce a řešením Riemannova problému s rekonstruovanými



Obrázek 7.2: NVD region a dvě vybraná schémata splňující NVD kritérium.

hodnotami W na levé a pravé straně rozhraní. Pro systémy bychom měli rekonstrukci provádět pro charakteristické proměnné. Často se však používá zjednodušený přístup, kdy se rekonstrukce provádí po složkách konzervativních nebo primitivních veličin. V tom případě však nemáme zaručenou TVD vlastnost.

Poznamenejme také, že pro systémy nelze smysluplně definovat monotónní schéma.

Numerický tok pro jednorozměrný hyperbolický systém

V předchozích kapitolách byly ukázány dva používané postupy pro sestavení numerického toku. První z nich využívající kombinaci Laxova-Wendroffova schématu a schématu nízkého řádu je sice výpočetně nenáročný. Jeho použití pro případ vícerozměrných úloh v komplikované geometrii je však dosti komplikované. Naproti tomu druhý postup založený na Godunovově metodě lze snadno aplikovat i pro vícerozměrné případy. Bohužel přesné řešení Riemannova problému může být pro složitější problémy velmi komplikované. Proto se pro řešení složitějších problémů často využívá přibližný numerický tok. Ten přitom může být založen na přibližném řešení Riemannova problému, na tzv. štěpení toku *flux vector splitting*, nebo na nějakém dalším postupu. Ve všech případech se jedná o způsob výpočtu numerického toku $F(W^l, W^r)$ z hodnot W^l a W^r na levé resp. pravé straně rozhraní mezi kontrolními objemy.

V této kapitole si ukážeme několik běžně používaných postupů pro konstrukci numerického toku pro hyperbolický systém.

8.1 Roeho schéma

Často používaným schématem je tzv. Roeho schéma navržené původně pro metodu konečných diferencí v (Roe a kol. 1984). Lze jej však chápat v kontextu metody konečných objemů také jako postup pro sestavení toku pomocí přibližného řešení Riemannova problému, viz (Toro, 2009).

Vyjdeme z numerického schéma v konzervativním tvaru

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(W_j^n, W_{j+1}^n) - F(W_{j-1}^n, W_j^n)] \quad (8.1)$$

s numerickým tokem odpovídajícím protiproudovému schématu

$$F(W_j^n, W_{j+1}^n) = \frac{1}{2} [F(W_j^n) + F(W_{j+1}^n)] - \frac{1}{2} |A_{j+\frac{1}{2}}| (W_{j+1}^n - W_j^n). \quad (8.2)$$

Matice $A_{j+\frac{1}{2}}$ je přitom aproximace $\partial F / \partial W$ v nějakém stavu mezi W_j^n a W_{j+1}^n . V následujícím textu se pokusíme sestavit nalézt vhodný postup pro určení matice A .

Dosadíme numerický tok do obecného tvaru schématu a dostáváme

$$\begin{aligned} W_j^{n+1} &= W_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(W_j^n) + F(W_{j+1}^n) - |A_{j+\frac{1}{2}}|(W_{j+1}^n - W_j^n) - \\ &\quad - F(W_{j-1}^n) - F(W_j^n) + |A_{j-\frac{1}{2}}|(W_j^n - W_{j-1}^n)] = \\ &= W_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(W_{j+1}^n) - F(W_j^n) - |A_{j+\frac{1}{2}}|(W_{j+1}^n - W_j^n) + \\ &\quad + F(W_j^n) - F(W_{j-1}^n) + |A_{j-\frac{1}{2}}|(W_j^n - W_{j-1}^n)]. \quad (8.3) \end{aligned}$$

Uvažujme nyní takový problém, že všechna vlastní čísla matice A jsou kladná. Potom by pro protiproudové schéma mělo W_j^{n+1} záviset pouze na hodnotách W_j^n a W_{j-1}^n . Analogicky pro případ se zápornými vlastními čísly by mělo W_j^{n+1} záviset pouze na hodnotách W_{j+1}^n a W_j^n . Toho lze dosáhnout například tak, že se pokusíme pro každou dvojici W^l, W^r nalézt takovou matici $\tilde{A} = \tilde{A}(W^l, W^r)$, že

- $F(W^r) - F(W^l) = \tilde{A}(W^l, W^r) (W^r - W^l)$ a
- $\tilde{A}(W, W) = \frac{\partial F(W)}{\partial W}$.

Potom \tilde{A} nazveme **Roeho maticí** a matice $A_{j+\frac{1}{2}}$ pak bude

$$A_{j+\frac{1}{2}} = \tilde{A}(W_j, W_{j+1}). \quad (8.4)$$

8.1.1 Roeho schéma pro Eulerovy rovnice

Postup výpočtu numerického toku si předvedeme na případě Eulerových rovnic se stavovou rovnicí ideálního plynu. Tyto rovnice jsou v obecném tvaru $W_t + F(W)_x = 0$, kde

$$W = [\rho, \rho u, \rho E]^T, \quad (8.5)$$

$$F(W) = [\rho u, \rho u^2 + p, (\rho E + p)u]^T, \quad (8.6)$$

kde $p = (\gamma - 1)(\rho E - \frac{1}{2}\rho u^2)$.

Výpočet Roeho průměru se výrazně zjednoduší když zavedeme pomocné proměnné $Z = [\sqrt{\rho}, \sqrt{\rho}u, \sqrt{\rho}H]^T$, kde $H = E + p/\rho$. Jak W , tak $F(W)$ pak budou kvadratickou funkcí Z a usnadní se tak výpočty

$\Delta W = W^r - W^l$ a $\Delta F = F(W^r) - F(W^l)$. Máme totiž

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho H - p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^2 \\ z_1 z_2 \\ z_1 z_3 - p \end{bmatrix}, \quad (8.7)$$

$$F(W) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho H u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 z_2 \\ z_2^2 + p \\ z_2 z_3 \end{bmatrix}, \quad (8.8)$$

kde

$$p = (\gamma - 1)(\rho E - \frac{1}{2}\rho u^2) = \frac{\gamma - 1}{\gamma}(\rho H - \frac{1}{2}\rho u^2) \quad (8.9)$$

a tedy

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma}(z_1 z_3 - \frac{1}{2}z_2^2). \quad (8.10)$$

Je tedy

$$W = \begin{bmatrix} z_1^2, & z_1 z_2, & \frac{1}{\gamma}z_1 z_3 + \frac{\gamma-1}{2\gamma}z_2^2 \end{bmatrix}^T, \quad (8.11)$$

$$F(W) = \begin{bmatrix} z_1 z_2, & \frac{\gamma+1}{2\gamma}z_2^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma}z_1 z_3, & z_2 z_3 \end{bmatrix}^T. \quad (8.12)$$

Označme $\Delta z = z^r - z^l$ a $\bar{z} = (z^r + z^l)/2$. Potom pro difference kvadratických výrazů platí

$$\Delta z_k^2 = 2\bar{z}_k \Delta z_k, \quad (8.13)$$

$$\Delta z_k z_m = \bar{z}_k \Delta z_m + \bar{z}_m \Delta z_k. \quad (8.14)$$

Je tedy

$$\begin{aligned} \Delta W &= \begin{bmatrix} \Delta z_1^2 \\ \Delta z_1 z_2 \\ \frac{1}{\gamma}\Delta z_1 z_3 + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\Delta z_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\bar{z}_1 \Delta z_1 \\ \bar{z}_2 \Delta z_1 + \bar{z}_1 \Delta z_2 \\ \frac{1}{\gamma}\bar{z}_3 \Delta z_1 + \frac{1}{\gamma}\bar{z}_1 \Delta z_3 + \frac{\gamma-1}{\gamma}\bar{z}_2 \Delta z_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2\bar{z}_1 & 0 & 0 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 & 0 \\ \frac{1}{\gamma}\bar{z}_3 & \frac{\gamma-1}{\gamma}\bar{z}_2 & \frac{1}{\gamma}\bar{z}_1 \end{bmatrix} \Delta Z = M \Delta Z. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Podobně pro tok F je

$$\begin{aligned} \Delta F(W) &= \begin{bmatrix} \Delta z_1 z_2 \\ \frac{\gamma+1}{2\gamma}\Delta z_2^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Delta z_1 z_3 \\ \Delta z_2 z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \Delta z_2 + \bar{z}_2 \Delta z_1 \\ \frac{\gamma+1}{\gamma}\bar{z}_2 \Delta z_2 + \frac{\gamma-1}{\gamma}\bar{z}_3 \Delta z_1 + \frac{\gamma-1}{\gamma}\bar{z}_1 \Delta z_3 \\ \bar{z}_1 \Delta z_3 + \bar{z}_3 \Delta z_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \bar{z}_2 & \bar{z}_1 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma}\bar{z}_3 & \frac{\gamma+1}{\gamma}\bar{z}_2 & \frac{\gamma-1}{\gamma}\bar{z}_1 \\ 0 & \bar{z}_3 & \bar{z}_2 \end{bmatrix} \Delta Z = N \Delta Z. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Z podmínky $\Delta F(W) = \tilde{A}\Delta W$ máme $N\Delta Z = \tilde{A}M\Delta Z$ a Roeho matice je tedy

$$\begin{aligned}\tilde{A} = NM^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2} \frac{\bar{z}_2^2}{\bar{z}_1^2} & (3-\gamma) \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} & \gamma-1 \\ \frac{\gamma-1}{2} \frac{\bar{z}_2^3}{\bar{z}_1^3} - \frac{\bar{z}_2\bar{z}_3}{\bar{z}_1^2} & \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} - (\gamma-1) \frac{\bar{z}_2^2}{\bar{z}_1^2} & \gamma \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2} \tilde{u}^2 & (3-\gamma)\tilde{u} & \gamma-1 \\ \frac{\gamma-1}{2} \tilde{u}^3 - \tilde{u}\tilde{H} & \tilde{H} - (\gamma-1)\tilde{u}^2 & \gamma\tilde{u} \end{bmatrix}. \quad (8.17)\end{aligned}$$

Roeho matice A závisí pouze na hodnotách \tilde{u} a \tilde{H} definovaných jako

$$\tilde{u} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{\sqrt{\rho^r}u^r + \sqrt{\rho^l}u^l}{\sqrt{\rho^r} + \sqrt{\rho^l}}, \quad (8.18)$$

$$\tilde{H} = \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} = \frac{\sqrt{\rho^r}H^r + \sqrt{\rho^l}H^l}{\sqrt{\rho^r} + \sqrt{\rho^l}}. \quad (8.19)$$

Podmínky pro A nedávají návod pro výpočet $\tilde{\rho}$. Z podmínky $\Delta\rho u = \tilde{\rho}\Delta u + \tilde{u}\Delta\rho$ lze určit

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho^r\rho^l}. \quad (8.20)$$

Označme Roeho rychlost zvuku (resp. kvadrát rychlosti)

$$\tilde{c}^2 = (\gamma-1)(\tilde{H} - \frac{1}{2}\tilde{u}^2). \quad (8.21)$$

Potom bude

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\tilde{u}^2(\gamma-3)}{2} & \tilde{u}(3-\gamma) & \gamma-1 \\ -\frac{\tilde{c}^2\tilde{u}}{\gamma-1} + \tilde{u}^3(\frac{\gamma}{2}-1) & \frac{\tilde{c}^2}{\gamma-1} + \tilde{u}^2(\frac{3}{2}-\gamma) & \tilde{u}\gamma \end{bmatrix}. \quad (8.22)$$

Vlastní čísla této matice jsou $\tilde{u} - \tilde{c}$, \tilde{u} a $\tilde{u} + \tilde{c}$. Vlastní vektory seřazené po sloupcích do matice R jsou

$$R = [r_1|r_2|r_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c} & \tilde{u} & \tilde{u} + \tilde{c} \\ \frac{\tilde{c}^2}{\gamma-1} - \tilde{c}\tilde{u} + \frac{1}{2}\tilde{u}^2 & \frac{\tilde{u}^2}{2} & \frac{\tilde{c}^2}{\gamma-1} + \tilde{c}\tilde{u} + \frac{1}{2}\tilde{u}^2 \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

a konečně charakteristické proměnné (resp. jejich difference) jsou

$$\Delta V = R^{-1}\Delta W = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\tilde{c}^2} (\Delta p - \tilde{\rho}\tilde{c}\Delta u) \\ \Delta p - \frac{\Delta p}{\tilde{c}^2} \\ \frac{1}{2\tilde{c}^2} (\Delta p + \tilde{\rho}\tilde{c}\Delta u) \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

Výpočet numerického toku pak lze provést dle následujícího postupu:

- pro $\tilde{u} - \tilde{c} \geq 0$ je

$$F_{j+\frac{1}{2}} = F(W_j), \quad (8.25)$$

- pro $\tilde{u} - \tilde{c} < 0$ a $\tilde{u} \geq 0$ je

$$F_{j+\frac{1}{2}} = F(W_j) + r_1(\tilde{u} - \tilde{c})\Delta v_1, \quad (8.26)$$

- pro $\tilde{u} < 0$ a $\tilde{u} + \tilde{c} \geq 0$ je

$$F_{j+\frac{1}{2}} = F(W_j) + r_1(\tilde{u} - \tilde{c})\Delta v_1 + r_2\tilde{u}\Delta v_2, \quad (8.27)$$

- pro $\tilde{u} + \tilde{c} < 0$ je

$$\begin{aligned} F_{j+\frac{1}{2}} &= F(W_{j+1}) = \\ &= F(W_j) + r_1(\tilde{u} - \tilde{c})\Delta v_1 + r_2\tilde{u}\Delta v_2 + r_3(\tilde{u} + \tilde{c})\Delta v_3 = F(W_{j+1}). \end{aligned} \quad (8.28)$$

8.1.2 Roeho schéma pro rovnice mělké vody

Podobným postupem lze odvodit i Roeho schéma pro problém proudění mělké vody. Konzervativní proměnné jsou v tomto případě $W = [h, hu]^T$ a tok je $F(W) = [hu, hu^2 + gh^2/2]^T$. Při konstrukci Roeho matice zavedeme opět pomocné proměnné

$$Z = \begin{bmatrix} \sqrt{h} \\ \sqrt{hu} \end{bmatrix}. \quad (8.29)$$

Konzervativní proměnné tok vyjádřený pomocí Z jsou potom

$$W = \begin{bmatrix} z_1^2 \\ z_1 z_2 \end{bmatrix}, \quad (8.30)$$

$$F(W) = \begin{bmatrix} z_1 z_2 \\ z_2^2 + \frac{g}{2} z_1^4 \end{bmatrix}. \quad (8.31)$$

Diferenci z_1^4 upravíme jako

$$\begin{aligned} \Delta z_1^4 &= (z_1^r)^4 - (z_1^l)^4 = \left((z_1^r)^2 + (z_1^l)^2 \right) \left((z_1^r)^2 - (z_1^l)^2 \right) = \\ &= (h^r + h^l) (z_1^r + z_1^l) (z_1^r - z_1^l) = 4\bar{h}\bar{z}_1\Delta z_1. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Pro difference konzervativních proměnných a toků máme tedy

$$\Delta W = \begin{bmatrix} 2\bar{z}_1\Delta z_1 \\ \bar{z}_2\Delta z_1 + \bar{z}_1\Delta z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\bar{z}_1 & 0 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix} \Delta Z, \quad (8.33)$$

$$\Delta F(W) = \begin{bmatrix} \bar{z}_2\Delta z_1 + \bar{z}_1\Delta z_2 \\ 2\bar{z}_2\Delta z_2 + 2g\bar{h}\bar{z}_1\Delta z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \\ 2g\bar{h}\bar{z}_1 & 2\bar{z}_2 \end{bmatrix} \Delta Z. \quad (8.34)$$

Na rozdíl od Eulerových rovnic tok už není pouze kvadratickou funkcí Z !

Roeho matice je potom

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{z}_2 & \tilde{z}_1 \\ 2g\tilde{h}\tilde{z}_1 & 2\tilde{z}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\tilde{z}_1 & 0 \\ \tilde{z}_2 & \tilde{z}_1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\tilde{h} - \tilde{u}^2 & 2\tilde{u} \end{bmatrix}, \quad (8.35)$$

kde

$$\tilde{h} = \frac{h^r + h^l}{2}, \quad (8.36)$$

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{z}_2}{\tilde{z}_1} = \frac{\sqrt{h^r}u^r + \sqrt{h^l}u^l}{\sqrt{h^r} + \sqrt{h^l}}. \quad (8.37)$$

Vlastní čísla této matice jsou $\tilde{u} \pm \sqrt{g\tilde{h}}$ a vlastní vektory sestavené po sloupcích do matice jsou při označení $\tilde{c} = \sqrt{g\tilde{h}}$

$$R = [r_1, r_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c} & \tilde{u} + \tilde{c} \end{bmatrix} \quad (8.38)$$

a difference charakteristických proměnných jsou

$$\Delta V = R^{-1}\Delta W = \frac{1}{2\tilde{c}} \begin{bmatrix} (\tilde{c} + \tilde{u})\Delta w_1 - \Delta w_2 \\ (\tilde{c} - \tilde{u})\Delta w_1 + \Delta w_2 \end{bmatrix}. \quad (8.39)$$

Numerický tok pro Roeho schéma tedy vypočteme podle následujícího postupu:

- pro $\tilde{u} - \tilde{c} \geq 0$ je

$$F_{j+\frac{1}{2}} = F(W_j), \quad (8.40)$$

- pro $\tilde{u} - \tilde{c} < 0$ a $\tilde{u} + \tilde{c} \geq 0$ je

$$F_{j+\frac{1}{2}} = F(W_j) + (\tilde{u} - \tilde{c})\Delta v_1 r_1 \quad (8.41)$$

- a pro $\tilde{u} + \tilde{c} < 0$ je

$$F_{j+\frac{1}{2}} = F(W_{j+1}). \quad (8.42)$$

Roeho schéma je jak pro případ Eulerových rovnic pro ideální plyn, tak pro rovnice mělké vody výpočetně nenáročné. Je však založeno na lokální linearizaci a řešení lineárního systému. To v sobě skrývá nebezpečí v tom, že Roeho schéma může v řešení vytvořit nespojitost nevyhovující entropické podmínce. V literatuře lze proto nalézt různé postupy pro modifikaci Roeho schématu tak, aby splňovalo entropickou podmínku.

8.2 HLL schéma

Dalším typem schématu původně navrženého pro řešení rovnic mělké vody je tzv. HLL schéma (Toro, 2009). Jedná se o velmi jednoduché schéma, které vychází z aproximace řešení Riemannova problému jediným mezistavem W^* . Ten je od stavů W_L a W_R oddělen dvěma polopřímkami se směrnici s_L a s_R , viz obr. 8.1.

Prvním krokem při výpočtu numerického toku HLL je určení s_L a s_R . V literatuře lze nalézt několik možných voleb. Nejjednodušší z nich je zřejmě

$$s_L = \min(\lambda_1^L, \lambda_1^R), \quad (8.43)$$

$$s_R = \max(\lambda_l^L, \lambda_l^R), \quad (8.44)$$

kde λ_1 a λ_l jsou nejmenší a největší vlastní čísla Jakobiány toku, tj. pro případ rovnic mělké vody je

$$s_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R), \quad (8.45)$$

$$s_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R). \quad (8.46)$$

Uvažujme nyní případ s $s_L < 0$ a $s_R > 0$, viz obr. 8.2.

Provedeme integraci zadané rovnice na oblasti $[s_L \Delta t, 0] \times [0, \Delta t]$ (červeně vyznačená oblast) a dostáváme

$$0 = \int_0^{\Delta t} \int_{s_L \Delta t}^0 (W_t + F(W)_x) dx dt = (W^* - W_L)(-s_L \Delta t) + (F^* - F_L) \Delta t. \quad (8.47)$$

Vyžili jsme přitom toho, že na každé části hranice je řešení konstantní. Je tedy

$$F^* = F_L + s_L W^* - s_L W_L. \quad (8.48)$$

Integraci přes $[0, s_R \Delta t] \times [0, \Delta t]$ (zeleně vyznačená oblast) dostáváme

$$F^* = F_R + s_R W^* - s_R W_R. \quad (8.49)$$

Cílem je získat tok F^* . Eliminujeme proto z rovnic W^* a dostáváme

$$(s_R - s_L)F^* = s_R F_L - s_L F_R - s_R s_L (W_L - W_R), \quad (8.50)$$

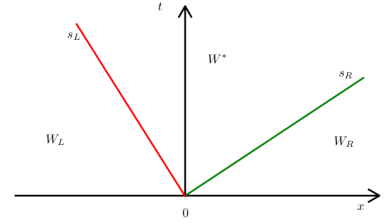
neboli

$$F^* = \frac{s_R F_L - s_L F_R + s_R s_L (W_R - W_L)}{s_R - s_L}. \quad (8.51)$$

HLL tok pak tedy vypočteme pomocí následujícího postupu

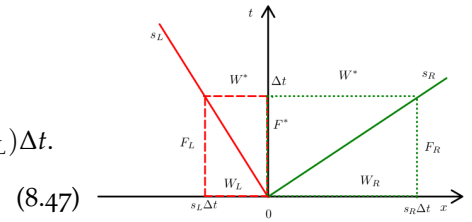
- pro $s_L \geq 0$ je

$$F_{j+\frac{1}{2}} = F(W_j), \quad (8.52)$$



Obrázek 8.1: Struktura přibližného řešení Riemannova problému pro HLL schéma.

Stejná volba je vhodná i pro Eulerovy rovnice.



Obrázek 8.2: Výpočet HLL toku.

- pro $s_L < 0$ a $s_R \geq 0$ je

$$F_{j+\frac{1}{2}} = F^* = \frac{s_R F(W_j) - s_L F(W_{j+1}) + s_R s_L (W_{j+1} - W_j)}{s_R - s_L}, \quad (8.53)$$

- pro $s_R < 0$ je

$$F_{j+\frac{1}{2}} = F(W_{j+1}), \quad (8.54)$$

HLL schéma lze použít i pro případ Eulerových rovnic. Aproximace řešení Riemannova problému pomocí jediného stavu W^* je však velmi hrubé a naprosto ignoruje změny řešení na charakteristice dané vlastním číslem $\lambda_2 = u$. V (Toro, 2009) lze nalézt tzv. HLLC schéma pro Eulerovy rovnice. To je odvozeno na podobném principu, uvažuje však dva mezistavy.

8.3 AUSM schéma

Dalším typem schématu je tzv. AUSM schéma (*Advection Splitting Upstream Method*) navržené původně v (Liou a kol. 1993). Tok $F(W)$ je nejprve rozdělen na tzv. konvektivní a tlakovou část F_C a F_p

$$F(W) = F_C(W) + F_p(W) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho H u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.55)$$

Pro každou z částí toku se pak sestavuje numerický tok zvlášť. V literatuře lze nalézt mnoho variant AUSM schématu lišících se rozdělením na F_C a F_p a způsobem výpočtu konvektivní rychlosti. V tomto skriptu si budeme demonstrovat jednu z možných variant, kdy je aproximace počítána na základě společného Machova čísla.

Vezměme si nejprve konvektivní část F_C . Odvození Jakobiho matice se $\partial F_C / \partial W$ provedeme s využitím pomocných proměnných $Z = [\sqrt{\rho}, \sqrt{\rho}u, \sqrt{\rho}H]^T$ (viz Roeho schéma). Vektor konzervativních proměnných je totiž

$$W = \begin{bmatrix} z_1^2 \\ z_1 z_2 \\ \frac{1}{\gamma} z_1 z_3 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} z_2^2 \end{bmatrix} \quad (8.56)$$

a tedy

$$\frac{\partial W}{\partial Z} = \begin{bmatrix} 2z_1 & 0 & 0 \\ z_2 & z_1 & 0 \\ \frac{1}{\gamma} z_3 & \frac{\gamma-1}{\gamma} z_2 & \frac{1}{\gamma} z_1 \end{bmatrix}. \quad (8.57)$$

Konvektivní tok je

$$F_C(W) = \begin{bmatrix} z_1 z_2 \\ z_2^2 \\ z_2 z_3 \end{bmatrix} \quad (8.58)$$

a tedy

$$\frac{\partial F_C(W)}{\partial Z} = \begin{bmatrix} z_2 & z_1 & 0 \\ 0 & 2z_2 & 0 \\ 0 & z_3 & z_2 \end{bmatrix}. \quad (8.59)$$

Potom tedy

$$\frac{\partial F_C(W)}{\partial W} = \frac{\partial F_C}{\partial Z} \left(\frac{\partial W}{\partial Z} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 & 2u & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2}u^3 - uH & H + (1-\gamma)u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \quad (8.60)$$

a vlastní čísla A_C jsou u , u a γu . Je tedy vidět, že všechna vlastní čísla mají shodná znaménka a numerický tok pro konvektivní část by tedy měl být počítán buď ze stavu vlevo (j) pro $u > 0$ a nebo se stavu vpravo ($j+1$) pro $u < 0$.

Přepíšme F_C do tvaru

$$F_C = Mc \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho H \end{bmatrix}, \quad (8.61)$$

kde $M = u/c$ je (zobecněné) Machovo číslo.

Aproximaci konvektivního toku tedy sestavíme na základě znaménka Machova čísla definovaného na rozhraní kontrolních objemů j a $j+1$ jako

$$F_C = \begin{cases} M_{j+\frac{1}{2}} c_j [\rho, \rho u, \rho H]_j^T & \text{pro } M_{j+\frac{1}{2}} > 0, \\ M_{j+\frac{1}{2}} c_{j+1} [\rho, \rho u, \rho H]_{j+1}^T & \text{pro } M_{j+\frac{1}{2}} \leq 0 \end{cases} \quad (8.62)$$

Společné Machovo číslo $M_{j+\frac{1}{2}}$ budeme uvažovat jako funkci $M_{j+\frac{1}{2}}(M_j, M_{j+1})$ ve tvaru

$$M_{j+\frac{1}{2}} = \mathcal{M}^+(M_j) + \mathcal{M}^-(M_{j+1}) \quad (8.63)$$

a od funkcí \mathcal{M}^\pm budeme splnění následujících požadavků

- $\mathcal{M}^+(M_j) = 0$ pro $M_j < -1$,
- $\mathcal{M}^+(M_j) = M_j$ pro $M_j > 1$,
- $\mathcal{M}^-(M_{j+1}) = M_{j+1}$ pro $M_{j+1} < -1$,
- $\mathcal{M}^-(M_{j+1}) = 0$ pro $M_{j+1} > 1$,
- $\mathcal{M}^+(M) + \mathcal{M}^-(M) = M$,
- hladkost \mathcal{M}^+ a \mathcal{M}^- .

U běžné definice Machova čísla je v čitateli velikost rychlosti, tj. Machovo číslo je vždy nezáporné. U AUSM schématu však uvažujeme i znaménko!

Nejjednodušší analytické funkce splňující výše uvedené předpoklady jsou

$$\mathcal{M}^+(M) = \begin{cases} 0 & \text{pro } M < -1 \\ \frac{1}{4}(M+1)^2 & \text{pro } M \in [-1, 1] \\ M & \text{pro } M > 1 \end{cases} \quad (8.64)$$

$$\mathcal{M}^-(M) = \begin{cases} M & \text{pro } M < -1 \\ -\frac{1}{4}(M-1)^2 & \text{pro } M \in [-1, 1] \\ 0 & \text{pro } M > 1 \end{cases} \quad (8.65)$$

Pro tlakovou část budeme postupovat podobně. Tlak na rozhraní $j + \frac{1}{2}$ budeme volit jako

$$p_{j+\frac{1}{2}} = \mathcal{P}^+(M_j)p_j + \mathcal{P}^-(M_{j+1})p_{j+1} \quad (8.66)$$

kde

- $\mathcal{P}^+(M_j) = 0$ pro $M_j < -1$,
- $\mathcal{P}^+(M_j) = 1$ pro $M_j > 1$,
- $\mathcal{P}^-(M_{j+1}) = 1$ pro $M_{j+1} < -1$,
- $\mathcal{P}^-(M_{j+1}) = 0$ pro $M_{j+1} > 1$,
- $\mathcal{P}^+(M) + \mathcal{P}^-(M) = 1$,
- hladkost \mathcal{P}^+ a \mathcal{P}^- .

Vhodné funkce jsou např.

$$\mathcal{P}^+(M) = \begin{cases} 0 & \text{pro } M < -1 \\ \frac{1}{4}(M+1)^2(2-M) & \text{pro } M \in [-1, 1] \\ 1 & \text{pro } M > 1 \end{cases} \quad (8.67)$$

$$\mathcal{P}^-(M) = \begin{cases} 1 & \text{pro } M < -1 \\ \frac{1}{4}(M-1)^2(2+M) & \text{pro } M \in [-1, 1] \\ 0 & \text{pro } M > 1 \end{cases} \quad (8.68)$$

9

Jednorozměrné proudění trubicí s nekonstantním průřezem

V této kapitole se budeme věnovat modelování proudění stlačitelné nevazké tekutiny trubicí s nekonstantním průřezem. Jedná se o poměrně jednoduchý problém, má však řady technických uplatnění. Lze jej využít při návrhu trysek, ke zjednodušeným simulacím průtoku štěrbinami či netěsnostmi nebo při zjednodušených simulacích při návrhu turbín či kompresorů.

9.1 Matematický model

Budeme uvažovat trubicí délky L s tuhou stěnou, tj. průřez S bude pouze funkcí souřadnice x . Dále budeme uvažovat, že délka trubice je výrazně větší než její průměr, tj. $L \ll \sqrt{S}$ a tedy že lze proudění v trubici popsat jednorozměrným modelem. Při odvození však pro názornost vyjdeme z dvourozměrného modelu kde S bude reprezentovat výšku (průřez) štěrbinu jednotkové šířky.

Odvození jednorozměrného matematického modelu lze provést buď přímo z bilancí hmoty, hybnosti a energie, nebo vyjdeme z modelu Eulerových rovnic, které jsou matematickým vyjádřením těchto bilancí. Pro jednoduchost využijeme druhou z možností a vyjdeme tedy ze systému rovnice

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = 0, \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} = 0, \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Hv)}{\partial y} = 0, \quad (9.4)$$

kde $H = E + p/\rho$ a $p = (\gamma - 1)\rho(E - \frac{1}{2}||\vec{u}||^2)$.

Ověřte, že rovnice vzešlé z dvourozměrného modelu s obdélníkovou štěrbinou jsou shodné s rovnicemi pro trubicí s kruhovým průřezem!

Rovnice budeme integrovat přes úsek x_1 až $x_2 = x_1 + dx$, viz. obr. 9.1 a budeme přitom uvažovat podmínku neprostupnosti na stěně trubice ($\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$).

Dále budeme uvažovat závislost hustoty, rychlosti u , tlaku, energie či enthalpie pouze na čase a souřadnici x . Pro rychlost v budeme uvažovat osovou symetrii vzhledem k ose x .

Integrací rovnice za výše uvedených předpokladů dostáváme (Ω je 2D útvar mezi x_1 a x_2 , dolní indexy 1 a 2 označují veličiny v bodech x_1 a x_2)

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{-S(x)/2}^{S(x)/2} (\rho_t + \nabla \cdot (\rho \vec{u})) \, dy \, dx = \\
 &= \iint_{\Omega} \rho_t \, dA + \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dl = \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \rho_t S \, dx + \int_{-S_2/2}^{S_2/2} \rho_2 u_2 \, dy + 0 - \int_{-S_1/2}^{S_1/2} \rho_1 u_1 \, dy + 0 = \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} (\rho S)_t \, dx + \rho_2 u_2 S_2 - \rho_1 u_1 S_1 = \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} [(\rho S)_t + (\rho u S)_x] \, dx. \quad (9.5)
 \end{aligned}$$

Integrály po stěnách dýzy jsou nulové protože $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

Rovnice kontinuity pro jednorozměrný model tedy bude

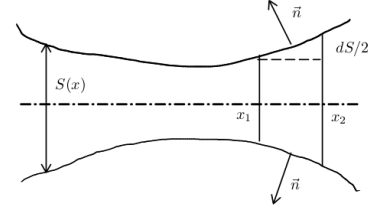
$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S)}{\partial x} = 0. \quad (9.6)$$

Podobně upravíme i rovnici pro hybnost ve směru x (n_x je složka \vec{n} ve směru x , nikoliv derivace)

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{-S(x)/2}^{S(x)/2} ((\rho u)_t + \nabla \cdot (\rho u \vec{u}) + p_x) \, dy \, dx = \\
 &= \iint_{\Omega} (\rho u)_t \, dA + \oint_{\partial\Omega} \rho u \vec{u} \cdot \vec{n} \, dl + \oint_{\partial\Omega} p n_x \, dl = \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} (\rho u S)_t \, dx + \int_{-S_2/2}^{S_2/2} \rho_2 u_2^2 \, dy - \int_{-S_1/2}^{S_1/2} \rho_1 u_1^2 \, dy + \\
 &\quad + \int_{-S_2/2}^{S_2/2} p \, dy - \int_{-S_1/2}^{S_1/2} p \, dy - 2 \int_{x_1}^{x_2} p \frac{S'(x)}{2} \, dx = \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} (\rho S)_t \, dx + (\rho u^2 + p) S_2 - (\rho u^2 + p) S_1 - \int_{x_1}^{x_2} p S'(x) \, dx = \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} [(\rho u S)_t + ((\rho u^2 + p) S)_x - p S'(x)] \, dx. \quad (9.7)
 \end{aligned}$$

Rovnice pro hybnost ve směru osy x tedy bude

$$\frac{\partial(\rho u S)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho u^2 + p) S)}{\partial x} = p S'. \quad (9.8)$$



Obrázek 9.1: K odvození modelu jednorozměrného proudění trubcí.

V modelu uvažujeme $|v| \ll |u|$ a tak složku rychlosti v zanedbáme. Navíc z podmínky symetrie je střední hodnota v v každém pevně zvoleném průřezu rovna 0. Proto nepotřebujeme rovnici pro v .

Pro celkovou energii budeme postupovat stejně jako při odvození rovnice kontinuity a dostaneme

$$\frac{\partial(\rho ES)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u HS)}{\partial x} = 0. \quad (9.9)$$

Pro jednorozměrné proudění stlačitelné nevazké tekutiny popsané stavovou rovnicí ideálního plynu trubici o průřezu $S(x)$ tak máme model daný následující sadou diferenciálních rovnic

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S)}{\partial x} = 0, \quad (9.10)$$

$$\frac{\partial(\rho u S)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho u^2 + p)S)}{\partial x} = pS', \quad (9.11)$$

$$\frac{\partial(\rho ES)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho H u S)}{\partial x} = 0, \quad (9.12)$$

doplňenou algebraickým vztahem pro tlak $p = (\gamma - 1)\rho(E - \frac{1}{2}u^2)$.

Konzervativní proměnné jsou $W = [\rho S, \rho u S, \rho ES]^T$ a tok je $F(W) = [\rho u S, (\rho u^2 + p)S, \rho H u S]^T$.

Cvičení 9.1 Hyperbolicita homogenního systému Eulerových rovnic pro proudění trubici

Ukažte, že homogenní systém $W_t + F(W)_x = 0$ s výše definovanými konzervativními proměnnými W a tokem F je hyperbolický. Určete vlastní čísla Jakobiho matice $\partial F / \partial W$. □

9.2 Formulace smíšené úlohy

Omezíme se pouze na případ s $u > 0$. Levý okraj intervalu $x = 0$ budeme nazývat vstup, pravý okraj $x = L$ výstup. Vlastní čísla Jakobiho matice $\partial F / \partial W$ jsou $u - c$, u a $u + c$. Podle znamének těchto vlastních čísel (resp. podle velikosti Machova čísla) budeme rozlišovat různé varianty smíšené úlohy dané kombinací režimů na vstupu a na výstupu. V případě podzvukového vstupu bychom měli zadávat v $x = 0$ dvě veličiny, v případě nadzvukového vstupu tři veličiny. Na výstupu bychom měli pro případ podzvukového režimu zadávat jednu veličinu a pro případ nadzvukového režimu nic.

Formulujeme si tedy smíšenou úlohu pro dvě vybrané kombinace vstupních a výstupních režimů.

9.2.1 Proudění trubicí s podzvukovým vstupem a podzvukovým výstupem

Jako první příklad si rozebereme variantu s podzvukovým vstupem i výstupem. Uvnitř trubky přitom může ale nemusí dojít k urychlení do nadzvukového režimu. Pro tuto kombinaci režimů je potřeba na vstupu předepsat okrajovou podmínku pro dvě veličiny a na výstupu pro jednu. Z analýzy lineárních systémů víme, že vhodnou volbou by bylo zadání odpovídajících složek charakteristických veličin. To však není příliš praktické a proto často používají jiné kombinace zadávaných veličin. Obvykle používané kombinace jsou

- celkový tlak a celková teplota na vstupu doplněné statickým tlakem na výstupu. Celkový tlak a teplota jsou přitom pro stlačitelnou tekutinu

$$p_{tot} = p(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (9.13)$$

$$T_{tot} = T(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2). \quad (9.14)$$

- rychlost a hustota na vstupu doplněné statickým tlakem na výstupu.

Okrajové podmínky lze volit samozřejmě volit i jinak. Pro některé volby okrajových podmínek však nemusí existovat řešení (např. zadání Machova čísla na vstupu v transsonickém režimu).

V dalším se omezíme na první typ okrajových podmínek se zadanými celkovými veličinami na vstupu a statickým tlakem na výstupu. V tomto případě lze smíšenou úlohu v klasickém smyslu formulovat následovně.

Mějme dán průřez trubice $S \in C^1([0, L] \rightarrow \mathbb{R}_+)$, počáteční podmínku $W_0(x) = S[\rho_0(x), \rho_0(x)u_0(x), \rho_0(x)E_0(x)]^T$ a okrajové podmínky $p_{tot}(t) > 0$, $T_{tot}(t) > 0$ a $p_2(t) > 0$. Úkolem je nalézt funkci $W(x, t) \in C^1([0, L] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3)$ takovou, že

$$1. \quad \forall x \in (0, L), \forall t > 0 \text{ je } W_t + F(W)_x = [0, pS', 0]^T \text{ ve sla,}$$

$$2. \quad \forall x \in (0, L) \text{ je } W(x, 0) = W_0(x),$$

$$3. \quad \forall t > 0 \text{ je}$$

$$p_{tot}(t) = p(0, t)(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (9.15)$$

$$T_{tot}(t) = T(0, t)(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2), \quad (9.16)$$

$$p_2(t) = p(L, t). \quad (9.17)$$

9.2.2 Proudění trubicí s podzvukovým vstupem a nadzvukovým výstupem

Pro případ podzvukového vstupu a nadzvukového výstupu je třeba na vstupu předepsat dvě veličiny a na výstupu žádnou. Podobně jako v předchozím případě je možné předepsat na vstupu například celkový tlak a celkovou teplotu či nějaké jiné veličiny. Problémem však může být vhodná volba počáteční podmínky. Ta by totiž měla odpovídat zvolenému režimu, tj. nadzvukovému výstupu.

Klasická formulace smíšené úlohy je v tomto případě následující. Mějme dán průřez trubice $S \in C^1([0, L] \rightarrow \mathbb{R}_+)$, počáteční podmínku $W_0(x) = S[\rho_0(x), \rho_0(x)u_0(x), \rho_0(x)E_0(x)]^T$ a okrajové podmínky $p_{tot}(t) > 0$, $T_{tot}(t) > 0$. Úkolem je nalézt funkci $W(x, t) \in C^1([0, L] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3)$ takovou, že

1. $\forall x \in (0, L), \forall t > 0$ je $W_t + F(W)_x = [0, pS', 0]^T$ ve sla,
2. $\forall x \in (0, L)$ je $W(x, 0) = W_0(x)$,
3. $\forall t > 0$ je

$$p_{tot}(t) = p(0, t)\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (9.18)$$

$$T_{tot}(t) = T(0, t)\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right). \quad (9.19)$$

Poznamenejme, že tento typ úlohy se často řeší tak, že v počáteční fázi výpočtu předepíšeme na výstupu statický tlak odpovídající nadzvukovému proudu a v okamžiku „nastartování“ nadzvukového režimu tuto podmínku přestaneme uvažovat.

9.3 Diskretizace pomocí MKO

Pro homogenní systém jsme v předchozích kapitolách odvodili několik různých typů schématu. Zde nám přibývá problém se zdrojovým členem a okrajové podmínky. Nejprve se budeme věnovat diskretizaci zdrojového členu.

9.3.1 Diskretizace zdrojového členu

Uvažujme systém ve tvaru

$$W_t + F(W)_x = Q(W). \quad (9.20)$$

Standardní postup odvození MKO pak je

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (W_t + F(W)_x - Q(W)) \, dx = \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} W(x, t) \, dx + F\left(W(x_{j+\frac{1}{2}}, t)\right) - F\left(W(x_{j-\frac{1}{2}}, t)\right) - \\
 &\quad - \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} Q(W(x, t)) \, dx \approx \\
 &\approx \Delta x \frac{dW_j(t)}{dt} + F_{j+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}} - \Delta x Q(W_j), \quad (9.21)
 \end{aligned}$$

a tedy po diskretizaci v čase Eulerovou explicitní metodou máme

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n \right] + \Delta t Q(W_j^n). \quad (9.22)$$

Numerický tok je přitom vyčíslen některou z dříve uvedených metod (Roeho schéma, HLL, AUSM, ...).

Poznamenejme, že diskretizace problémů se zdrojovým členem může být v některých případech komplikovaná. Uvažujme jednoduchý modelový problém

$$u_t + au_x = Ku, \quad (9.23)$$

kde K a a jsou konstanty, $a > 0$ a u má smysl nějaké nezáporné veličiny (teplota, tlak, ...). Diskretizace konvekce protiproudovým schématem a explicitní diskretizace zdrojového členu pak vede na

$$\begin{aligned}
 u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \Delta t K u_j^n = \\
 &= (1 - \nu + \Delta t K) u_j^n + \nu u_{j-1}^n, \quad (9.24)
 \end{aligned}$$

kde $\nu = a\Delta t / \Delta x$. Nezápornost koeficientů u u_j a u_{j-1} zaručuje nezápornost u a máme tedy omezení na časový krok

$$\Delta t \leq \frac{1}{a/\Delta x - K} \quad (9.25)$$

Pro velké záporné K tak můžeme dostat drastické snížení přípustného časového kroku a výpočet explicitní metodou může být neefektivní. Pro kladné K tento problém nenastane.

Pokud provedeme diskretizaci zdrojového členu v tomto modelovém případě pomocí implicitní metody, dostaneme

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \Delta t K u_j^{n+1} \quad (9.26)$$

a tedy

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{1 - \Delta t K} \left[(1 - \nu) u_j^n + \nu u_{j-1}^n \right]. \quad (9.27)$$

Pro záporné K budou koeficienty u u_j a u_{j+1} nezáporné (pokud $\nu < 1$) a u tedy zůstane kladné. Problém zde však způsobí případ s kladným K .

Při diskretizaci zdrojových členů je tedy vždy nutno postupovat obezřetně a to především pro případy s tzv. stiff členy (tj. případy s $|K| \gg 0$).

Zdrojový člen v naší úloze naštěstí není příliš problematický (z předpokladů je totiž $|S'|$ malé) a proto si vystačíme s výše uvedenou explicitní metodou.

Mimo výše uvedený způsob diskretizace lze v literatuře najít i mnohem sofistikovanější postupy vycházející z konzistentní diskretizace zdrojových členů a toků konstruované tak, aby byly pro případ stacionárního řešení zachovány vybrané invarianty (např. entropie u podzvukového případu).

9.3.2 Diskretizace okrajové podmínky na vstupu

Na vstupu ($x = 0$) budeme uvažovat okrajovou podmínku s danými celkovými hodnotami tlaku a teploty. Pro MKO potřebujeme umět vyčíslit numerický tok $F_{\frac{1}{2}}$. To lze provést několika způsoby.

Před vstup je možno připojit jednu nebo více „fiktivních“ buněk, tzv. *ghost cells*, z proudového pole pak extrapolujeme tlak či Machovo číslo a ze vztahů pro celkový tlak a celkovou teplotu dopočítáme řešení v těchto dodatečných buňkách. Numerický tok $F_{\frac{1}{2}}$ pak počítáme stejným způsobem jako u vnitřních bodů. Tento postup je velmi jednoduchý a lze jej v principu použít i pro složitější model proudění. Jeho nedostatkem je však to, že okrajovou podmínku předepisujeme vlastně v bodě $-\Delta x/2$ a ne přímo na hranici.

Poněkud lepší způsob vychází z linearizovaných Eulerových rovnic. Linearizujeme rovnice kolem stavu $\bar{W} = W_1^n$. Charakteristické proměnné odpovídající vlastním číslům $\bar{u} - \bar{c}$, \bar{u} a $\bar{u} + \bar{c}$ jsou potom

$$v_{u-c} = \frac{1}{2\bar{c}^2} (p - \bar{\rho}\bar{c}u), \quad (9.28)$$

$$v_u = \rho - \frac{p}{\bar{c}^2}, \quad (9.29)$$

$$v_{u+c} = \frac{1}{2\bar{c}^2} (p + \bar{\rho}\bar{c}u). \quad (9.30)$$

V souladu s linearizací bychom měli na vstupu zadávat hodnoty v_u a v_{u+c} a pro hodnotu v_{u-c} bychom měli řešit charakteristickou rovnici

$$\frac{\partial v_{u-c}}{\partial t} + (\bar{u} - \bar{c}) \frac{\partial v_{u-c}}{\partial x} = 0. \quad (9.31)$$

Pro metodu Godunovova typu nám však stačí znát řešení Riemannova problému pro $\xi = x/t = 0$. Označme toto řešení Riemannova problému jako W_b (b jako *boundary*). Pro lineární (resp. linearizovaný)

případ je W_b dáno charakteristickými proměnnými v_{u-c}^r a v_{u+c}^l . Je tedy

$$p_b - \bar{\rho} \bar{c} u_b = p_1 - \bar{\rho} \bar{c} u_1. \quad (9.32)$$

To spolu s podmínkami $p_{tot,b} = p_{tot}$ a $T_{tot,b} = T_{tot}$ vede na systém tří nelineárních rovnic pro u_b , ρ_b a p_b . Tyto hodnoty pak definují W_b a numerický tok je $F_{\frac{1}{2}} = F(W_b)$.

Pro případ zadané hustoty ρ_b a rychlosti u_b je výpočet jednodušší. Potom totiž

$$p_b = p_1 - \bar{\rho} \bar{c} (u_1 - u_b) \quad (9.33)$$

a numerický tok pak opět získáme jako $F_{\frac{1}{2}} = F(W_b)$.

Je však možné se vyhnout linearizaci a při diskretizaci okrajových podmínek lze využít výsledky analýzy nelineárních systémů. V kapitole 4 jsme odvodili Riemannovy invarianty pro nelineární systém Eulerových rovnic v 1D. Riemannův invariant odpovídající vlastnímu číslu $u - c$ je

$$\mathcal{R}^- = u - \frac{2c}{\gamma - 1}. \quad (9.34)$$

Na vstupu tedy bude hodnota tohoto Riemannova invariantu stejná jako v prvním bodě sítě, tj.

$$u_b - \frac{2c_b}{\gamma - 1} = \mathcal{R}^- = u_1 - \frac{2c_1}{\gamma - 1}. \quad (9.35)$$

Spolu se vztahem pro celkovou rychlost zvuku $c^2 = \gamma r T$

$$c_{tot}^2 = c_b^2 + \frac{\gamma - 1}{2} u_b^2 \quad (9.36)$$

dostáváme kvadratickou rovnici pro c_b

$$\frac{2}{\gamma - 1} c_{tot}^2 = \frac{2}{\gamma - 1} c_b^2 + \left(\mathcal{R}^- + \frac{2c_b}{\gamma - 1} \right)^2. \quad (9.37)$$

Řešením této rovnice je

$$c_b = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(-\mathcal{R}^- \pm \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} (\mathcal{R}^-)^2} \right). \quad (9.38)$$

Relevantní je přitom první kořen, tj.

$$c_b = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(-\mathcal{R}^- + \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} (\mathcal{R}^-)^2} \right). \quad (9.39)$$

Z vypočtené hodnoty c_b pak určíme velikost rychlosti u_b jako

$$u_b = \mathcal{R}^- + \frac{2c_b}{\gamma - 1}. \quad (9.40)$$

Tato rychlost pak spolu s c_b určuje $M_b = u_b / c_b$ a ze vztahu pro celkový tlak pak dopočteme p_b .

9.3.3 Diskretizace okrajové podmínky na výstupu

Na výstupu budeme uvažovat zadaný tlak. Realizace okrajové podmínky může být opět různá. Nejjednodušší variantou je použití fiktivní buňky do které přeneseme veličiny z poslední buňky sítě a upravíme energii tak, aby byl tlak ve fiktivní buňce roven předepsanému tlaku p_b .

Pokročilejší způsob vychází opět z linearizace. Rovnice linearizujeme kolem stavu $\bar{W} = W_N$. Charakteristické proměnné v_u a v_{u+c} pak určíme z poslední buňky sítě a hodnotu v_{u-c} dopočteme tak, aby tlak na hranici byl roven předepsanému tlaku p_b . Tedy

$$\rho_b = \rho_N - (p_N - p_b)/\bar{c}^2, \quad (9.41)$$

$$u_b = u_N + (p_N - p_b)/(\bar{\rho}\bar{c}). \quad (9.42)$$

Podobně jako pro případ vstupní podmínky je možné odvodit i výstupní podmínku z Riemannových invariantů. V tomto případě se zachovávají hodnoty invariantů

$$\mathcal{R}^s = \ln(p/\rho^\gamma), \quad (9.43)$$

$$\mathcal{R}^+ = u + \frac{2c}{\gamma - 1}. \quad (9.44)$$

Z prvního invariantu a zadaného tlaku p_b je

$$\rho_b = \rho_N \left(\frac{p_b}{p_N} \right)^{1/\gamma}. \quad (9.45)$$

Z druhého invariantu pak je

$$u_b = u_N + 2 \frac{c_N - c_b}{\gamma - 1}, \quad (9.46)$$

kde $c_b = \sqrt{\gamma p_b / \rho_b}$.

Jednorozměrné proudění mělké vody přes nerovné dno

V předcházejících kapitolách jsme provedli rozbor rovnic popisujících proudění mělké vody pro případ úlohy s rovným dnem bez uvažování tření. V této kapitole úlohu doplníme o případ nerovného dna a o model třecích sil vznikajících mezi tekutinou a dnem. I v tomto složitějším případě budeme uvažovat závislost rychlosti pouze na souřadnici x a na čase (tj. konstantní rychlost v celém vodním sloupci). Zanedbáváme tak mimo jiné mezní vrstvu v blízkosti dna a hladiny a třecí sílu lze modelovat pomocí empirických vztahů.

10.1 Matematický model

Budeme uvažovat jednorozměrné proudění mělké vody přes nerovné dno jehož tvar je dán funkcí $b(x)$. Výšku hladiny nade dnem označíme h , viz obr. 10.1.

Z bilance hmoty ve vyznačeném úseku lze odvodit rovnici kontinuity ve tvaru

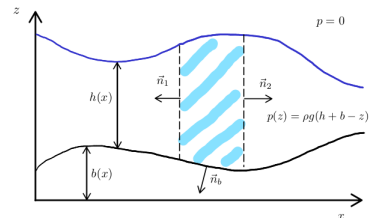
$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0. \quad (10.1)$$

Podobně lze z bilance hybnosti ve směru osy x odvodit rovnice

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) = -ghb_x - \frac{1}{2}K|u|u. \quad (10.2)$$

První člen na pravé straně vyjadřuje příspěvek vzniklý působením dna (hydrostatický tlak na dně je $p_b = h\rho g$ a normála $\vec{n}_b = [b_x, -1] / \sqrt{1 + b_x^2}$). Druhý člen je aproximace třecích sil závisléjící na bezrozměrném empirickém koeficientu K .

Matematický model je tedy velmi podobný modelu pro případ proudění mělké vody s rovným dnem. Proto budeme při konstrukci numerické metody využívat dříve uvedené postupy.



Obrázek 10.1: Proudění mělké vody přes nerovné dno

10.2 Okrajové podmínky a jejich implementace

V následujícím textu sestavíme numerickou metodu vhodnou pro simulace proudění mělké vody přes překážku. Úlohu budeme řešit na intervalu $x \in [0, L]$ a budeme uvažovat, že rychlost u bude jak v $x = 0$, tak v $x = L$ nezáporná. Bodu $x = 0$ tak budeme říkat vstup, bodu $x = L$ výstup. Dále budeme předpokládat, že jak na vstupu, tak na výstupu bude proudění v tzv. podkritickém režimu, tj. $u < c = \sqrt{gh}$.

Jak na vstupu, tak na výstupu tedy máme zadávat jednu veličinu. Jedna z možných voleb okrajových podmínek je

vstup - zadáváme objemový průtok, tj. $hu(0, t) = q_{in}$.

výstup - zadáváme výšku hladiny, tj. $h(L, t) = h_{out}$.

Naivní implementace okrajové podmínky na vstupu je pak (dolním indexem b značíme hodnotu na hranici, 1 je hodnota v první buňce sítě)

$$h_b = h_1, \quad (10.3)$$

$$hu_b = q_{in}. \quad (10.4)$$

Na výstupu pak

$$h_b = h_{out}, \quad (10.5)$$

$$hu_b = hb_N. \quad (10.6)$$

Výše uvedená naivní implementace je velmi snadná a v mnoha případech funguje spolehlivě. Bohužel však způsobuje na vstupu i výstupu odrazy vln. Analyzujme si blíže okrajovou podmínku na výstupu. Z rozboru problému s rovným dnem víme, že Riemannovy invarianty jsou

$$v_1 = u - 2c, \quad (10.7)$$

$$v_2 = u + 2c. \quad (10.8)$$

Ty odpovídají vlastním číslům $u - c$ a $u + c$. Při řešení Riemannova problému na výstupu je $u - c < 0$ a $u + c > 0$ a tedy mezi stavem v poslední buňce a stavem na hranici přecházíme přes charakteristiku danou vlastním číslem $\lambda_1 = u - c$. Dojde tedy ke změně prvního invariantu v_1 a všechny ostatní invarianty (tj. v našem případě pouze v_2) zůstávají zachované. Hodnota v_2 na hranici je tedy stejná jako v poslední buňce sítě

$$v_{2,b} = v_{2,N}. \quad (10.9)$$

Invariant v_1 pak vypočteme tak, aby byla na hranici splněna předepsaná okrajová podmínka. Za vztahu $v_2 - v_1 = 4c$ máme

$$v_{1,b} = v_{2,b} - 4c = v_{2,b} - 4\sqrt{gh_{out}}. \quad (10.10)$$

Vlastní čísla Jakobiho matice toku jsou $u \pm c$, kde $c = \sqrt{gh}$.

Vlna pohybující se směrem doprava je charakterizována změnou invariantu v_2 . Jakmile tato vlna dorazí k výstupní hranici, způsobí změnu invariantu v_1 a tato odražená vlna se šíří rychlostí $u - c < 0$ zpět.

Pokud bychom potřebovali na výstupu zamezit odrazu vln, museli bychom okrajovou podmínku na výstupu formulovat jinak. Jednou z možností je tzv. bezodrazová podmínka vycházející ze zadané hodnoty $v_{1,out}$. Tuto bezodrazovou podmínku by pak bylo možné implementovat následujícím způsobem:

$$u_b = \frac{v_{1,out} + v_{2,N}}{2}, \quad (10.11)$$

$$c_b = \frac{v_{2,N} - v_{1,out}}{4}, \quad (10.12)$$

$$h_b = b_b^2/g. \quad (10.13)$$

Tato okrajová podmínka však neumožňuje předepsat výšku hladiny, velikost rychlosti či průtok na výstupu. Do jisté míry jí lze interpretovat tak, že někde v nekonečnu je $u_\infty = 0$ a $h_\infty = v_1^2/4g$.

10.3 Aproximace zdrojového členu

Soustavu rovnic lze zapsat v konzervativním tvaru jako

$$W_t + F(W)_x = Q(W), \quad (10.14)$$

kde $W = [h, hu]^T$, $F(W) = [hu, hu^2 + gh^2/2]^T$ a $Q(W) = [0, -ghb_x]^T$. Aplikace metody konečných objemů s numerickým tokem F pak vede na základní schéma 1. řádu přesnosti ve tvaru

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F(W_j^n, W_{j+1}^n) - F(W_{j-1}^n, W_j^n) \right] + \Delta t Q_j^n. \quad (10.15)$$

Při volbě $Q_j^n = Q(W_j^n)$ tak dostáváme jednoduché schéma pro výpočet numerického řešení. Pro některé případy je však chyba vzniklá rozdílou aproximací toků a zdrojového členu příliš významná a je třeba k diskretizaci přistoupit pozorněji.

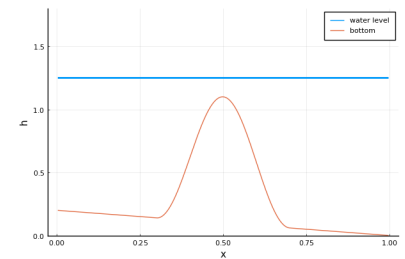
Jako příklad si vezměme stacionární řešení s nulovou rychlostí. Potom pro stacionární řešení platí

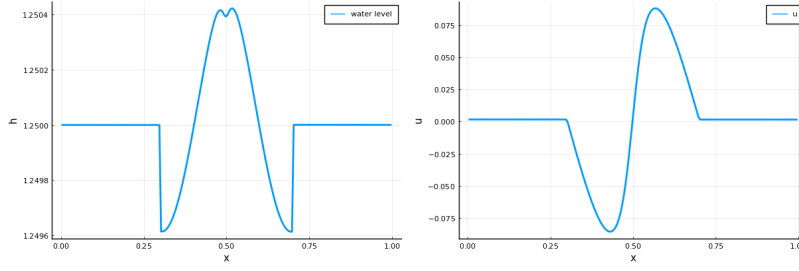
$$0 = (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x + ghb_x = gh(h + b)_x \quad (10.16)$$

a tedy $h(x) + b(x) = \text{const.}$

Detailní analýza výsledku numerické simulace však ukazuje, že numerické řešení problému tuto vlastnost nespĺňuje! Numerické řešení na síti se 100 kontrolními objemy a HLL tokem dává nekonzistentní úroveň hladiny a chyba aproximace způsobuje nenulové rychlosti, viz obr. 10.2.

Tomuto případu se někdy též říká klid v jezeře.





Obrázek 10.2: Detail hladiny a rychlosti pro případ základní aproximace problému klidu v jezeře.

Vhodnější aproximace je tzv. vyvážené neboli *well balanced* schéma. Jedním z možných postupů je přitom odvození schématu s tzv. hydrostatickou rekonstrukcí (Audusse a kol. 2004). Při odvození standardní metody Godunovova typu jsme předpokládali po částech konstantní řešení. Budeme-li však uvažovat konstantní h , tak nebude v buňce konstantní úroveň hladiny $h + b$. Proto je vhodnější v uvažovat v každé buňce konstantní $h + b$.

Tedy

$$h_{j+\frac{1}{2}}^L = h_j + b_j - b_{j+\frac{1}{2}}, \quad (10.17)$$

$$h_{j+\frac{1}{2}}^R = h_{j+1} + b_{j+1} - b_{j+\frac{1}{2}}. \quad (10.18)$$

Dalším krokem je odvození vhodné aproximace zdrojového členu. Za předpokladu nulové rychlosti je

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} -ghb_x dx = \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{1}{2}(gh^2)_x dx = \frac{1}{2}g \left((h_{j+\frac{1}{2}}^L)^2 - (h_{j-\frac{1}{2}}^R)^2 \right). \quad (10.19)$$

Druhá složka zdrojového členu je tedy

$$\begin{aligned} Q_{j,2} &= \frac{g}{\Delta x} \frac{h_{j+\frac{1}{2}}^L + h_{j-\frac{1}{2}}^R}{2} (h_{j+\frac{1}{2}}^L - h_{j-\frac{1}{2}}^R) = \\ &= -g \left(h_j + b_j - (b_{j+\frac{1}{2}} + b_{j-\frac{1}{2}})/2 \right) \frac{b_{j+\frac{1}{2}} - b_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \\ &= -gh_j \bar{b}_x \end{aligned} \quad (10.20)$$

pokud $b_j = (b_{j+\frac{1}{2}} + b_{j-\frac{1}{2}})/2$ a $\bar{b}_x = (b_{j+\frac{1}{2}} - b_{j-\frac{1}{2}})/\Delta x$.

Vyvážené schéma je tedy ve tvaru

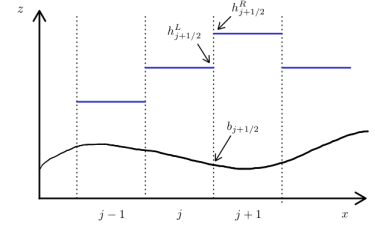
$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F(W_{j+\frac{1}{2}}^L, W_{j+\frac{1}{2}}^R) - F(W_{j-\frac{1}{2}}^L, W_{j-\frac{1}{2}}^R) \right] + \Delta t Q_j^n, \quad (10.21)$$

kde

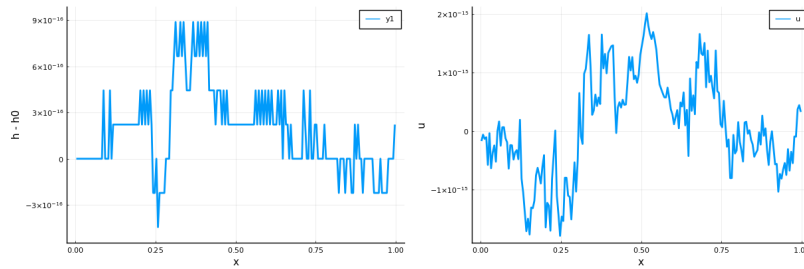
$$W_{j+\frac{1}{2}}^L = [h_{j+\frac{1}{2}}^L, h_{j+\frac{1}{2}}^L u_j^n]^T, \quad (10.22)$$

$$W_{j+\frac{1}{2}}^R = [h_{j+\frac{1}{2}}^R, h_{j+\frac{1}{2}}^R u_{j+1}^n]^T, \quad (10.23)$$

$$Q_j^n = \left[0, \frac{g}{2} \left((h_{j+\frac{1}{2}}^L)^2 - (h_{j-\frac{1}{2}}^R)^2 \right) \right]^T. \quad (10.24)$$



Obrázek 10.3 ukazuje detail výšky hladiny a rychlosti pro stejný případ. Výpočet je tentokrát proveden pomocí vyváženého schématu. Je zde vidět, že při vhodné aproximaci je možné dodržet nulovou rychlost a konstantní výšku hladiny.



Obrázek 10.3: Detail hladiny a rychlosti pro případ vyvážené aproximace problému klidu v jezeře.

Metoda konečných objemů pro vícerozměrné problémy

Metodu konečných objemů lze aplikovat snadno i na řešení vícerozměrných úloh. Na omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ budeme řešit rovnici

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F}(W) = 0. \quad (11.1)$$

Uvažujeme přitom systém m rovnic, tj. $W \in L_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m)$ a $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m,d})$.

Oblast Ω rozdělíme na N navzájem disjunktních jednoduše souvislých podoblastí Ω_i a budeme rovnici integrovat přes Ω_i . Zavedeme-li podobně jako v 1D střední hodnotu řešení v kontrolním objemu Ω_i jako

$$W_i(t) := \frac{1}{|\Omega_i|} \iiint_{\Omega_i} W(\vec{x}, t) dV, \quad (11.2)$$

dostaneme

$$|\Omega_i| \frac{dW_i}{dt} + \iint_{\partial\Omega_i} \vec{F}(W(\vec{x}, t)) \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (11.3)$$

Označme symbolem \mathcal{N}_i množinu indexů kontrolních objemů sousedících s Ω_i stěnou (tj. taková j , že $\dim(\overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j}) = d - 1$). Dále označme $\Gamma_{ij} = \overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j}$.

Pro jednoduchost uvažujme kontrolní objem nedotýkající se hranice oblasti Ω . Pak lze integrál po hranici Ω_i rozdělit a dostáváme

$$|\Omega_i| \frac{dW_i}{dt} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \iint_{\Gamma_{ij}} \vec{F}(W(\vec{x}, t)) \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (11.4)$$

Aproximujeme-li pro každou část hranice Γ_{ij} integrand pomocí numerického toku F , tedy

$$\iint_{\Gamma_{ij}} \vec{F}(W(\vec{x}, t)) \cdot \vec{n} dS \approx F(W_i, W_j, \vec{n}_{ij}) |\Gamma_{ij}|, \quad (11.5)$$

dostáváme semidiskrétní tvar metody konečných objemů

$$\frac{dW_i}{dt} = - \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} F(W_i, W_j, \vec{n}_{ij}) |\Gamma_{ij}|. \quad (11.6)$$

Ω_i jsou kontrolní objemy.

Diskretizací pomocí explicitní Eulerovy metody pak dostáváme diskrétní tvar metody konečných objemů

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} F(W_i^n, W_j^n, \vec{n}_{ij}) |\Gamma_{ij}|. \quad (11.7)$$

Pro kontrolní objemy sousedící přímo s hranicí by ve výše uvedeném vztahu ještě přibyl člen aproximující integrál po $\bar{\Omega} \cap \bar{\Omega}_i$.

Vezměme si nejprve lineární systém m rovnic s konstantními koeficienty.

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{k=1}^d A_k \frac{\partial W}{\partial x_k} = 0. \quad (11.8)$$

k -tá složka toku \vec{F} tedy bude

$$F_k(W) = A_k W, \quad (11.9)$$

kde $A_k \in \mathbb{R}^{m,m}$ a numerický tok pak sestavujeme jako aproximaci

$$\vec{F}(W(\vec{x}, t)) \cdot \vec{n} = \left(\sum_{k=1}^d A_k n_k \right) W = A_{\vec{n}} W. \quad (11.10)$$

Abychom mohli využít poznatků získaných při řešení jednorozměrného problému, potřebujeme, aby matice $A_{\vec{n}}$ byla diagonalizovatelná nad \mathbb{R} . To vede k následující definici hyperbolického systému pro vícerozměrné hyperbolické systémy.

Definice 27 Lineární systém m parciálních diferenciálních rovnic ve tvaru (11.8) nazveme **hyperbolickým** právě tehdy, když je pro každý nenulový vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^d$ matice $A_{\vec{n}} = \sum_{k=1}^m A_k n_k$ diagonalizovatelná v oboru reálných čísel, tj. když existuje regulární matice $R \in \mathbb{R}^{m,m}$ a diagonální matice $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m,m}$ takové, že

$$A = R \Lambda R^{-1}. \quad (11.11)$$

Tuto definici lze rozšířit i pro nelineární systémy.

Definice 28 Necht' $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ je omezená souvislá množina. Řekneme, že nelineární systém je **hyperbolický** právě tehdy, když je pro každý nenulový vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^d$ matice

$$A_{\vec{n}}(W) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_k(W)}{\partial W} n_k. \quad (11.12)$$

diagonalizovatelná v \mathbb{R} pro libovolné $W \in \mathcal{D}$.

Příklad 11.1 Hyperbolicita Eulerových rovnic ve 2D

Eulerovy rovnice mají ve 2D tvar

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0, \quad (11.13)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x + (\rho uv)_y = 0, \quad (11.14)$$

$$(\rho v)_t + (\rho uv)_x + (\rho v^2 + p)_y = 0, \quad (11.15)$$

$$(\rho E)_t + (\rho Hu)_x + (\rho Hv)_y = 0. \quad (11.16)$$

kde $p = (\gamma - 1)\rho(E - \frac{1}{2}||\vec{u}||^2)$ a $H = E + p/\rho$.

Pro vyšetření hyperbolicity je třeba zvolit libovolný nenulový vektor \vec{n} .

Bez újmy na obecnosti budeme brát $||\vec{n}|| = 1$. Potom $F_{\vec{n}} = \vec{F} \cdot \vec{n}$ je

$$F_{\vec{n}} = \begin{bmatrix} \rho u n_1 + \rho v n_2 \\ \rho u^2 n_1 + p n_1 + \rho u v n_2 \\ \rho u v n_1 + \rho v^2 n_2 + p n_2 \\ \rho H u n_1 + \rho H v n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \\ \rho u \vec{u} \cdot \vec{n} + p n_1 \\ \rho v \vec{u} \cdot \vec{n} + p n_2 \\ \rho H \vec{u} \cdot \vec{n} \end{bmatrix}. \quad (11.17)$$

Zavedeme-li transformační matici T (otočení souřadného systému do směru \vec{n}) jako

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & -n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (11.18)$$

a označíme-li $\vec{\tau} = [-n_2, n_1]$ bude

$$F_{\vec{n}} = T^{-1} \begin{bmatrix} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \\ \rho (\vec{u} \cdot \vec{n})^2 + p \\ \rho (\vec{u} \cdot \vec{n})(\vec{u} \cdot \vec{\tau}) \\ \rho H \vec{u} \cdot \vec{n} \end{bmatrix} = T^{-1} F_1(TW). \quad (11.19)$$

Potom

$$A_{\vec{n}} = \frac{\partial F_{\vec{n}}(W)}{\partial W} = T^{-1} \frac{\partial F_1(TW)}{\partial TW} T. \quad (11.20)$$

Výše uvedený vztah dává mimo jiné návod na konstrukci numerického toku pro obecný směr. Stačí vstupní data otočit do lokálního souřadného systému, vyčíslit 1D tok v tomto lokálním systému a otočit tok zpět do původního systému.

Dalším důsledkem vztahu je, že analýzu hyperbolicity můžeme provést v lokálním otočeném souřadném systému a v něm řešíme pak jednorozměrný problém.

Přejdeme tedy k 1D systému (u je rychlost ve směru \vec{n} a v ve směru $\vec{\tau}$)

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (11.21)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0, \quad (11.22)$$

$$(\rho v)_t + (\rho uv)_x = 0, \quad (11.23)$$

$$(\rho E)_t + (\rho Hu)_x = 0. \quad (11.24)$$

Podobně jako v 1D případě se výpočet výrazně zjednoduší přechodem k primitivním proměnným $U = [\rho, u, v, p]$. Potom je systém Eulerových rovnic ve tvaru

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \quad (11.25)$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}p_x = 0, \quad (11.26)$$

$$v_t + uv_x = 0, \quad (11.27)$$

$$p_t + \gamma pu_x + up_x = 0, \quad (11.28)$$

tedy

$$U_t + \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u \end{bmatrix} U_x = U_t + BU_x = 0. \quad (11.29)$$

Vlastní čísla matice B jsou $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_{2,3} = u$, $\lambda_4 = u + c$, kde $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$. Vlastní vektory matice B zapsané po sloupcích do matice S jsou

$$S = [s_1 | s_2 | s_3 | s_4] = \begin{bmatrix} -\frac{\rho}{2c} & 1 & 0 & \frac{\rho}{2c} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\rho c}{2} & 0 & 0 & \frac{\rho c}{2} \end{bmatrix}. \quad (11.30)$$

Matice S je regulární a její inverze je

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\rho c} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\rho c} \end{bmatrix}. \quad (11.31)$$

Systém Eulerových rovnic ve 2D je tedy hyperbolický. \square

Příklad 11.2 Linearizovaný systém Eulerových rovnic ve 2D, charakteristické proměnné a okrajové podmínky

Linearizovaný systém Eulerových rovnic lze zapsat ve tvaru

$$U_t + B_1 U_x + B_2 U_y = 0, \quad (11.32)$$

kde

$$B_1 = \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & \gamma \bar{p} & 0 & \bar{u} \end{bmatrix} \quad (11.33)$$

a

$$B_2 = \begin{bmatrix} \bar{v} & 0 & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v} & \frac{1}{\bar{\rho}} \\ 0 & 0 & \gamma \bar{p} & \bar{v} \end{bmatrix}. \quad (11.34)$$

Ze stejného důvodu jako v minulém příkladě stačí vyšetřit matici B_1 (a to už jsme v minulém příkladě udělali). Systém je tedy hyperbolický a pro případ toku ve směru $\vec{n} = [1, 0]$ jsou charakteristické proměnné

$$V_{\vec{n}} = S^{-1}U = \begin{bmatrix} u - \frac{p}{\rho\bar{c}} \\ \rho - \frac{p}{\bar{c}^2} \\ v \\ u + \frac{p}{\rho\bar{c}} \end{bmatrix}. \quad (11.35)$$

Budeme-li uvažovat obecný směr, bude

$$V_{\vec{n}} = \begin{bmatrix} \vec{u} \cdot \vec{n} - \frac{p}{\rho\bar{c}} \\ \rho - \frac{p}{\bar{c}^2} \\ \vec{u} \cdot \vec{\tau} \\ \vec{u} \cdot \vec{n} + \frac{p}{\rho\bar{c}} \end{bmatrix}. \quad (11.36)$$

Budeme-li uvažovat podzvukový vstup $|\vec{u} \cdot \vec{n}| < \bar{c}$ a \vec{n} ve směru vnější normály, pak jsou vlastní čísla $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < 0 < \lambda_4$ (normála je vnější, tj. $\lambda < 0$ znamená charakteristiku vstupující do oblasti) a máme tedy předepsat 3 charakteristické proměnné

$$v_1 = \vec{u} \cdot \vec{n} - \frac{p}{\rho\bar{c}}, \quad (11.37)$$

$$v_2 = \rho - \frac{p}{\bar{c}^2}, \quad (11.38)$$

$$v_3 = \vec{u} \cdot \vec{\tau}. \quad (11.39)$$

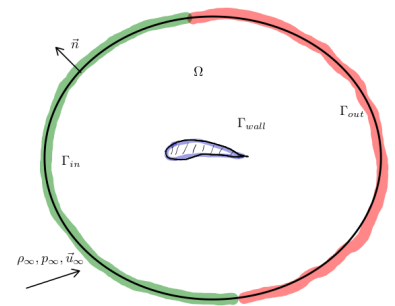
Na podzvukovém výstupu je $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4$. Máme tedy předepsat hodnotu jediné charakteristické proměnné a to

$$v_1 = \vec{u} \cdot \vec{n} - \frac{p}{\rho\bar{c}}. \quad (11.40)$$

Okrajové podmínky založené na linearizaci se často využívají při řešení problémů vnější aerodynamiky jako je např. problém obtékání profilu křídla.

Okrajovou podmínku předepisujeme na hranici dostatečně vzdálené od obtékaného profilu. Zde lze proudové pole považovat prakticky za nerozrušené s hustotou ρ_∞ , tlakem p_∞ a rychlostí \vec{u}_∞ . Linearizaci lze tedy provést kolem stavu $\bar{\rho} = \rho_\infty$, $\bar{p} = p_\infty$ a $\vec{u} = \vec{u}_\infty$.

Vnější hranice oblasti se rozpadá na dvě části. Vstupní část Γ_{in} je charakterizovaná $\vec{u}_{infty} \cdot \vec{n} < 0$, výstupní část Γ_{out} pak $\vec{u}_{infty} \cdot \vec{n} > 0$. Označme indexem b hodnotu řešení na hranici a indexem i hodnotu řešení v kontrolním objemu těsně u hranice. Charakteristické proměnné na vstupní



části hranice Γ_{in} pak jsou

$$v_1 = \vec{u}_\infty \cdot \vec{n} - \frac{p_\infty}{\bar{\rho}\bar{c}}, \quad (11.41)$$

$$v_2 = \rho_\infty - \frac{p_\infty}{\bar{c}^2}, \quad (11.42)$$

$$v_3 = \vec{u}_\infty \cdot \vec{\tau}, \quad (11.43)$$

$$v_4 = \vec{u}_i \cdot \vec{n} + \frac{p_i}{\bar{\rho}\bar{c}}. \quad (11.44)$$

Z nich lze vyjádřit primitivní proměnné na Γ_{in} jako

$$p_b = \frac{\bar{\rho}\bar{c}}{2}(v_4 - v_1) = \frac{1}{2}(p_i + p_\infty) + \frac{\bar{\rho}\bar{c}}{2}(\vec{u}_i - \vec{u}_\infty) \cdot \vec{n}, \quad (11.45)$$

$$\rho_b = v_2 + \frac{p_b}{\bar{c}^2} = \rho_\infty + \frac{p_b - p_\infty}{\bar{c}^2}, \quad (11.46)$$

$$\vec{u}_b = \left(\vec{u}_\infty \cdot \vec{n} - \frac{p_\infty - p_b}{\bar{\rho}\bar{c}} \right) \vec{n} + (\vec{u}_\infty \cdot \vec{\tau}) \vec{\tau}. \quad (11.47)$$

Na výstupní části hranice Γ_{out} je možné postupovat podobně. Často se však používá podmínka se zadaným tlakem, tedy $p_b = p_\infty$. Potom

$$\rho_b = \rho_i + \frac{p_b - p_i}{\bar{c}^2}, \quad (11.48)$$

$$\vec{u}_b = \left(\vec{u}_i \cdot \vec{n} + \frac{p_i - p_b}{\bar{\rho}\bar{c}} \right) \vec{n} + (\vec{u}_i \cdot \vec{\tau}) \vec{\tau}. \quad (11.49)$$

□

11.1 Numerický tok pro vícerozměrný problém

Pro většinu úloh z mechaniky tekutin je matematický model nezávislý na volbě resp. natočení souřadného systému a tok tedy lze vyčíslovat v lokálním souřadném systému otočeném do směru normály na rozhraní mezi buňkami, viz vzorec $F_{\vec{n}} = T^{-1}F_1(TW)$. Toho využijeme při konstrukci numerického toku.

11.1.1 HLL tok pro dvourozměrné Eulerovy rovnice

Uvažujme Eulerovy rovnice v konzervativním tvaru s $W = [\rho, \rho u, \rho v, \rho E]^T$. Pro výpočty metodou konečných objemů je potřeba vyčíslovat numerický tok $F(W^L, W^R, \vec{n}) \approx F_{\vec{n}}(W)$. Díky nezávislosti na otočení souřadného systému je

$$F(W^L, W^R, \vec{n}) = T^{-1}F_1(TW^L, TW^R), \quad (11.50)$$

kde T je daná vzorcem (11.18) a F_1 je (jednorozměrný) numerický tok ve směru x . Tok F_1 vyčíslíme dle dříve odvozeného postupu. Nejprve určíme s_L a s_R (ty závisí na TW a tedy na $\vec{u} \cdot \vec{n}$) jako

$$s_L = \min(\vec{u}_L \cdot \vec{n} - c_L, \vec{u}_R \cdot \vec{n} - c_R), \quad (11.51)$$

$$s_R = \min(\vec{u}_R \cdot \vec{n} + c_L, \vec{u}_L \cdot \vec{n} + c_R). \quad (11.52)$$

Numerický tok HLL je potom

- pro $s_L \geq 0$

$$F(W^L, W^R, \vec{n}) = T^{-1}F_1(TW_L) = F_{\vec{n}}(W_L) = (\vec{u}_L \cdot \vec{n})W_L + p_L \begin{bmatrix} 0 \\ n_1 \\ n_2 \\ \vec{u}_L \cdot \vec{n} \end{bmatrix}. \quad (11.53)$$

- pro $s_L < 0$ a $s_R > 0$

$$\begin{aligned} F(W^L, W^R, \vec{n}) &= T^{-1}F_1(TW_L, TW_R) = \\ &= \frac{s_R TF_1(T^{-1}W_L) - s_L TF_1(T^{-1}W_R) + s_R s_L T T^{-1}(W_R - W_L)}{s_R - s_L} = \\ &= \frac{s_R F_{\vec{n}}(W_L) - s_L F_{\vec{n}}(W_R) + s_R s_L (W_R - W_L)}{s_R - s_L}. \end{aligned} \quad (11.54)$$

- pro $s_R \leq 0$

$$F(W^L, W^R, \vec{n}) = T^{-1}F_1(TW_R) = F_{\vec{n}}(W_R) = (\vec{u}_R \cdot \vec{n})W_R + p_R \begin{bmatrix} 0 \\ n_1 \\ n_2 \\ \vec{u}_R \cdot \vec{n} \end{bmatrix}. \quad (11.55)$$

Oproti jednorozměrné verzi je tedy rozdíl pouze ve vyčíslení s_L a s_R pro jejichž výpočet se používá rychlost ve směru normály a samozřejmě v nahrazení $F(W)$ tokem $F_{\vec{n}}$.

11.1.2 AUSM schéma pro dvourozměrný případ

Podobným postupem jako při sestavení HLL toku lze získat i další typy numerických toků pro vícerozměrné případy. Jako příklad si uvedeme základní variantu AUSM schématu zmíněného v kapitole 8.3. Stejně jako u jednorozměrné varianty rozdělíme tok na konvek-
tivní a tlakovou část, tedy

$$F_{\vec{n}}(W) = F_C(W) + F_p(W) = \vec{u} \cdot \vec{n} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p n_1 \\ p n_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11.56)$$

Jediný rozdíl oproti jednorozměrnému případu je pak v definici zobecněného Machova čísla M . To je ve vícerozměrném případě definováno jako $M = (\vec{u} \cdot \vec{n})/c$. Pomocí takto definovaného M pak výpočet probíhá stejně jako pro jedorozměrný případ.

11.2 Podmínka stability pro vícerozměrný problém

Pro korektní odvození podmínky stability schémat pro nelineární hyperbolické systémy ve vícerozměrném případě nemáme k dispozici žádnou vhodnou metodu. Podmínku stability proto sestavíme pouze pro případ skalární rovnice a schématu prvního řádu. Pro hyperbolické systémy pak budeme používat analogickou podmínku, kde rychlost konvekce nahradíme spektrálním poloměrem Jakobiho matice $A_{\vec{n}}$.

Uvažujme skalární nelineární rovnici konvekce

$$u_t + \nabla \cdot \vec{f}(u) = 0. \quad (11.57)$$

Schéma pro metodu konečných objemů je pak (zapsáno pro kontrolní objem nesousedící s hranicí)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} f(u_i^n, u_j^n, \vec{n}_{ij}) |\Gamma_{ij}| = \mathcal{H}(u_i^n, \{u_j^n\}_{j \in \mathcal{N}_i}). \quad (11.58)$$

Stabilitu schématu pak lze vyšetřovat pomocí podmínky monotónie, tj. budeme požadovat, aby

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i^n} = 1 - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\partial f(u_i^n, u_j^n, \vec{n}_{ij})}{\partial u_i^n} |\Gamma_{ij}| \geq 0, \quad (11.59)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_j^n} = - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \frac{\partial f(u_i^n, u_j^n, \vec{n}_{ij})}{\partial u_j^n} |\Gamma_{ij}| \geq 0. \quad (11.60)$$

Časový krok pak určíme z první z podmínek jako (předpokládáme-li nezápornost jmenovatele)

$$\Delta t \leq \frac{|\Omega_i|}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\partial f(u_i^n, u_j^n, \vec{n}_{ij})}{\partial u_i^n} |\Gamma_{ij}|}. \quad (11.61)$$

Druhá z podmínek je pak podmínkou pro konstrukci vhodného numerického toku

$$\frac{\partial f(u_i^n, u_j^n, \vec{n}_{ij})}{\partial u_j^n} \leq 0. \quad (11.62)$$

Jako příklad si vezmeme Rusanovovo schéma s tokem

$$f(u_i, u_j, \vec{n}) = \frac{1}{2} \left(\vec{n} \cdot \vec{f}(u_i) + \vec{n} \cdot \vec{f}(u_j) \right) - \frac{q_{ij}}{2} (u_j - u_i), \quad (11.63)$$

kde $q_{ij} > 0$ je koeficient numerické vazkosti. Z podmínky $\partial f / \partial u_j \geq 0$ dostáváme

$$q_{ij} \geq \vec{n} \cdot \vec{f}'(u_j). \quad (11.64)$$

Pro Rusanovovo schéma tedy zvolíme

$$q_{ij} = \max \left(\left| \vec{n} \cdot \vec{f}'(u_j) \right|, \left| \vec{n} \cdot \vec{f}'(u_i) \right| \right). \quad (11.65)$$

Podmínka pro časový krok pak bude

$$\Delta t \leq \frac{|\Omega_i|}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\partial f(u_i^n, u_j^n, \vec{n}_{ij})}{\partial u_i^n} |\Gamma_{ij}|} \leq \frac{|\Omega_i|}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} q_{ij} |\Gamma_{ij}|}. \quad (11.66)$$

Pro nelineární hyperbolické systémy pak používáme podobnou podmínku stability s tím, že koeficient q_{ij} je nahrazen spektrálním poloměrem matice $A_{\vec{n}}$. Tedy např. pro Eulerovy rovnice

$$\Delta t \leq \frac{|\Omega_i|}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} (|\vec{n}_{ij} \cdot \vec{u}_{ij}| + c_{ij}) |\Gamma_{ij}|}, \quad (11.67)$$

kde \vec{u}_{ij} a c_{ij} jsou rychlost a rychlost zvuku na rozhraní mezi buňkami získané například pomocí Roeho průměrování.

Bibliografie

- AUDUSSE, Emmanuel; BOUCHUT, François; BRISTEAU, Marie Odile; KLEIN, Rupert; PERTHAME, Benoît, 2004. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM Journal of Scientific Computing*. ISSN 10648275. Dostupné z DOI: 10.1137/S1064827503431090.
- CAUSON, D. M., 1989. High Resolution Finite Volume Schemes and Computational Aerodynamics. In: *High Resolution Finite Volume Schemes and Computational Aerodynamics. Nonlinear Hyperbolic Equations — Theory, Computation Methods, and Applications*. Dostupné z DOI: 10.1007/978-3-322-87869-4_7.
- CRANDALL, Michael G.; MAJDA, Andrew, 1980. Monotone Difference Approximations for Scalar Conservation Laws. *Mathematics of Computation*. Roč. 34, č. 149, s. 1. ISSN 00255718. Dostupné z DOI: 10.2307/2006218.
- HARTEN, Ami, 1983. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*. Roč. 49, č. 3, s. 357–393. ISSN 00219991. Dostupné z DOI: 10.1016/0021-9991(83)90136-5.
- LEONARD, B. P., 1988. Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. Roč. 8, č. 10, s. 1291–1318. ISSN 0271-2091. Dostupné z DOI: 10.1002/fluid.1650081013.
- LEVEQUE, R J, 2008. *Book*. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. ISBN 9780898716290. Dostupné z DOI: 10.1137/1.9780898717839.
- LEVEQUE, Randall J, 1992. *Mathematics of Computation*. Sv. 57, Numerical Methods for Conservation Laws. ISBN 3764327235. ISSN 00255718. Dostupné z DOI: 10.2307/2938728.
- LIU, Meng Sing; STEFFEN, Christopher J., 1993. A new flux splitting scheme. *Journal of Computational Physics*. ISSN 00219991. Dostupné z DOI: 10.1006/jcph.1993.1122.

- ROE, P L; PIKE, J, 1984. *Computing methods in applied sciences and engineering, VI*. Efficient construction and utilisation of approximate Riemann solutions. ISBN 0-444-87597-2.
- SWEBY, P. K., 1984. High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. Roč. 21, č. 5, s. 995–1011. ISSN 0036-1429. Dostupné z DOI: 10.1137/0721062.
- TORO, Eleuterio F., 2009. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-25202-3. Dostupné z DOI: 10.1007/b79761.