Capstone Python Exam: Risk Modelling and Prediction

Plesz Boldizsár

Budapesti Corvinus Egyetem

Gazdaság- és pénzügy-matematikai elemzés

Gazdaság-matematika specializáció

2023

Tartalomjegyzék

I. 1. Feladat

I.1. Adatok

Az elemzéshez két árupiaci eszközt választottam, és az ezekhez tartozó határidős kontraktusokkal számoltam. Az egyik az arany[1], a másik pedig a nyersolaj[2], mivel arra számítok, hogy ezeket különböző faktorok mozgatják, kevésbé mozognak együtt, és így jól használhatók egy diverzifikált portfolió építésére. A mintaidőszak 2018.05.30.-tól 2023.05.26.-ig tart és 1260 megfigyelést tartalmaz mindkét eszközre.

Napi loghozamokkal számoltam, amelyeket a következőképpen állítottam elő i eszközre, t napon:

$$r_{i,t} = log(\frac{P_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}} + 1). \tag{1}$$

I.2. Dinamikusan változó portfolió

Az egyedi, dinamikusan változó portfolió képzésének alap gondolatát Moskowitz et al. (2012) Time series momentum kereskedési stratégiája adta. Ez egy momentum alapú kereskedési stragéia, ami abban különbözik az eredeti Jegadeesh & Titman (1993) féle Cross-sectional momentumtól, hogy itt az eszközök nincsenek egymáshoz hasonlítva, csak saját múltbeli hozamaikat tekintik. Moskowitz et al. (2012) 55 határidős eszközön mutatta meg, hogy magas hozamot generál az a stratégia amely megveszi (eladja) azokat az

[1] Az arany árfolyam forrása a Yahoo Finance.
[2] Az arany árfolyam forrása a Yahoo Finance.

eszközöket, amelyeknek az elmúlt 12 hónapos hozama pozitív (negatív) volt. Lim et al. (2018) azt találta, hogy a stratégia magas hozamot generált az elmúlt közel 100 évben számos ország részvénypiacán szerte a világon.

Így a következő súlyozási szabályt alkalmazom. A portfolióban mindig két eszköz van w_t^A és w_t^A súlyokkal, amelyekre $|w_t^A| + |w_t^A| = 1$ minden időszakban. Legyen R_t^i és σ_t^i rendre az elmúlt n nap hozama és annak szórása:

$$R_t^i = \sum_{T=t-n}^{t} r_T^i \tag{2}$$

Legyen $S_{i,t} = \frac{R_t^i}{\sigma_t^i}$, és legyenek a súlyok az alábbiak:

$$w_t^A = \frac{|S_{A,t}^p|}{|S_{A,t}^p| + |S_{B,t}^2|} * sign(R_t^A) \tag{3}$$

$$w_t^B = \frac{|S_{B,t}^p|}{|S_{A,t}^p| + |S_{B,t}^2|} * sign(R_t^B). \tag{4}$$

Ezekkel a portfolió hozama t időszakban a következőképpen áll elő:

$$r_t^P = w_t^A * r_t^A + w_t^B * r_t^B \tag{5}$$

Tehát annál nagyobb lesz a súlya egy eszköznek, minél nagyobb volt az elmúlt n napos hozam abszolútértékben, és ez utóbbinak minél kisebb volt a szórása.

I.3. VaR alapú modell összehasonlítás

Az egyenlet (5)-ben megadott portfolió hozama függ a napokat jelölő n visszatekintési, és a p kitevő paramétertől. Ezek változtatása különbözőféle diverzifikációhoz vezet, és ez hatással van a kockázati mutatókra is. A következőkben megnézem, hogy különböző (n, p) paraméter kombinációk hogyan hatnak a portfolió mintaidőszakból számított VaR mutatójára. Az eredményt az 1. táblázat mutatja. A VaR azt a maximum százalékot mutatja, amit veszíthet a portfolió adott konfidencia intervallum mellett a következő időszakban az elmúlt időszak alapján. Tehát a legnagyobb lehetséges veszteséget jelzi előre. 1. táblázat szerint minél nagyobb a p kitevő, annál negatívabbak az értékek, ami azt jelenti, hogy nem lesz jobb a diverzifikáció, ha erősebb múltbeli napokon alapuló szignálok nagyobb súllyal érvényesülnek. Így a legjobb diverzifikáció az, ha a Sharpe ráta szerű szignál nincs is hatványra emelve. Az n paraméterek között nem lineáris kapcsolat van minden rögzített p kitevő esetében. Kicsivel kisebb kockázatot eredményez az 5, 10 és 40 nap, mint a 20. A legrosszabb eredményeket a 3 és 6 hónap adja.

1. táblázat

VaR értékek különböző paraméter kombinációkkal

	1	2	3	4	5
5	-2.35	-2.43	-2.60	-2.62	-2.62
10	-2.39	-2.51	-2.63	-2.78	-2.77
20	-2.43	-2.71	-2.74	-2.81	-2.86
40	-2.38	-2.45	-2.57	-2.57	-2.58
60	-2.55	-2.79	-2.88	-2.97	-3.00
120	-2.69	-2.73	-2.84	-2.93	-2.98

A táblázat az egyenlet (5)-ben definiált portfolióhoz tartozó VaR értékeket mutatja különböző (n, p) paraméter kombinációkban. Az n visszatekintési időszakokat a sorok, a p kitevőket az oszlopok jelölik.

II. 2. Feladat

A korrelált szimulált hozam idősorokat a következőképpen állítom elő. Létrehozok Z_1 és Z_2 véletlen számokból álló vektorokat inverz standard normális eloszlásból, amelynek az inputjai 0 és 1 közötti egyenletes eloszlású változók. Jelölje Z Nx2-es mátrix a két korrelálatlan oszlopvektort. Legyen A egy paraméter segítségvel meghatározott 2x2-es korrelációs mátrix, és D ennek Cholesky felbontásával kapott mátrix, azaz $A = D * D^T$. A D mátrix értelmezhető úgy, mintha A mátris "négyzetgyöke" lenne. Legyen Z^c a korrelált idősoroknak az Nx2-es mátrix, amely a következőképpen áll elő:

$$Z^c = (D * Z^T)^T. \tag{6}$$

A szimulált hozamok Nx2-es mátrixa pedig a következő lesz:

$$R_i^S = \mu_i * \mathbf{1} + Z_i^c * \sigma_i, \tag{7}$$

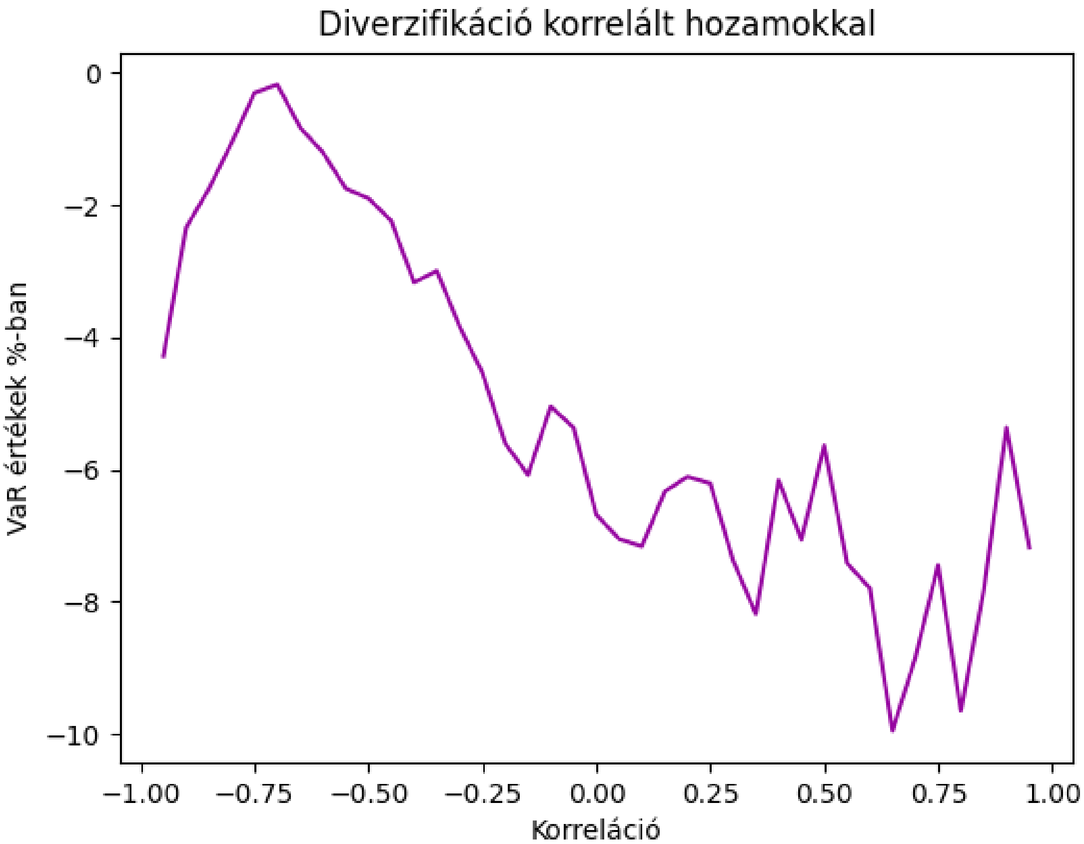
Z_i^c az i-edik oszlop μ_i és σ_i pedig az i-edik eszköz mintából számolt átlag hozama és szórása.

Ezzel a módszerrel szimulálok hozam idősorokat, amelyeken olyan portfoliót értelmezek, amelyben i-edik eszközhöz tartozó fix súly a következő:

$$w_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}. \tag{8}$$

Az így kapott szimulált portfolió függ a korreláció paramétertől, ami előálltja A korrelációs mátrixot. Ezért megnézem, hogy a portfolióra számolt VaR értéke hogyan függ a szimuláció során alkalmazott korrelációtól. -0.95-től 0.95-ig 0.05-ösével növelem a korrelációt, és kirajzolom az ehhez tartozó VaR értékeket. Az eredményt az 1. ábra mutatja.

1. ábra



Az 1. ábra szerint nem lineáris a kapcsolat a szimulált hozamok korreláltsága, és a megfelelő VaR értékek között. Azonban az látható, hogy negatív korrelációnál sokkal kisebb a kockázat, ami várható volt, hiszen ilyenkor ellentétesen kell mozogni a két eszköz árfolyamának. Érdekes viszont, hogy nem a legkisebb, -0.95-ös értéknél legkisebb a VaR (-0.18), hanem -0.7-nél. -0.7-től pedig kis ingadozásokkal, de nagyjából lineárisan alakul a kapcsolat. A legnagyobb és legkisebb VaR érték között több, mint 50-szeres különbség van. Az eredmény mutatja, hogy a diverzifikációnak jelentős hatása lehet negatívan korrelált hozamú eszközök esetén.

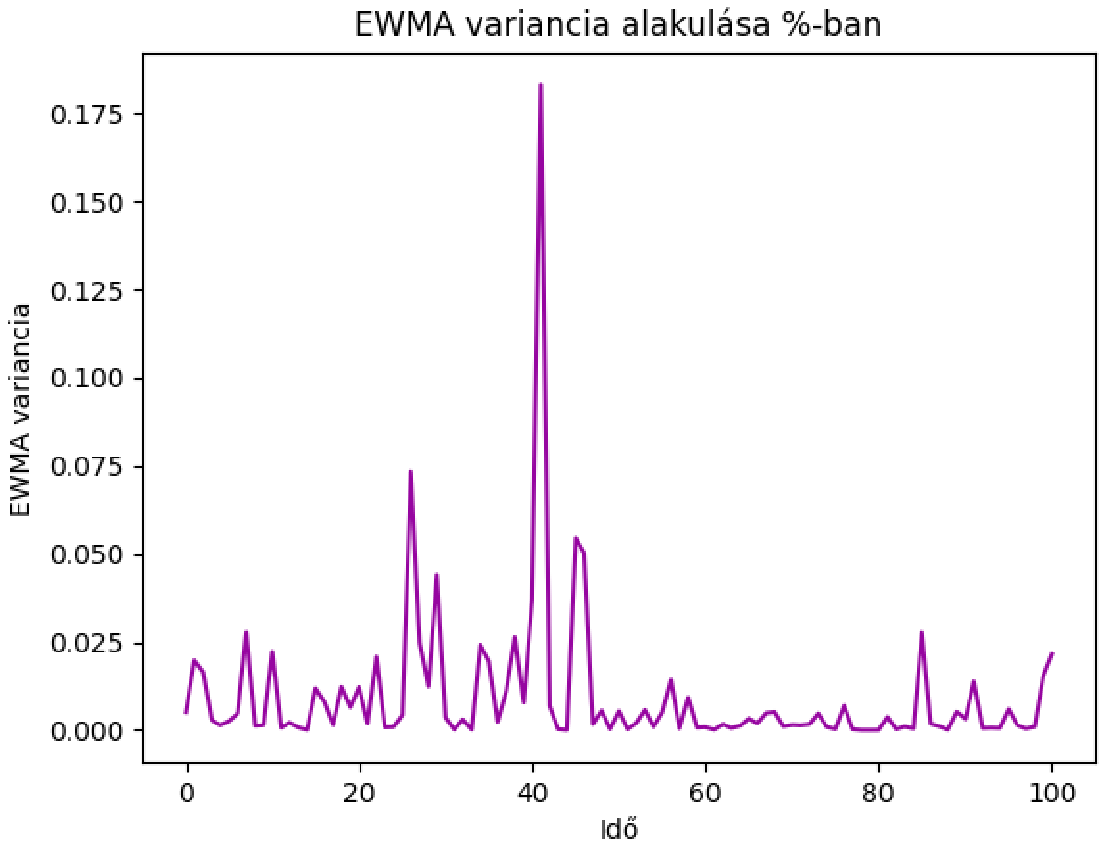
III. 3. Feladat

Ehhez a feladathoz az MSCI World Index-et követő ETF-et [3] használom. Az exponenciálisan súlyozott mozgó átlag a következőképpen számolható:

$$EWMA_t = \alpha * x_t + (1 - \alpha) * EWMA_{t-1}. \quad (9)$$

Ezt alkalmazom az ETF varianciájára, és kirajzolom a 2018 októberétől 2019 márciusáig tartó időszakot. Az eredményt a 2. ábra mutatja.

2. ábra



A 2. ábrán egy nagy kiugrás látszik a varianciában 2018 december végén. Ez nem meglepő hiszen a 2018-as év végén 9%-ot esett az S&P500 részvény index a monetáris politikai szigorítástól való félelem, a lassuló gazdaság, és az élesedő kereskedelmi háború okozta bizonytalanság miatt.

[3] Az MSCI World Index-et követő ETF árfolyam forrása a Yahoo Finance.

IV. 4. Feladat

A variancia becsléshez először 3 részre osztom a mintát. Az első részen megbecsülök egy előrejelző modellt sokféle paraméterrel. A második mintán megnézem, hogy ezek hogyan teljesítenek, majd kiválasztom a legjobbat, és tesztelem egy harmadik mintán is.

Az előrejelző modell a következő. A a négyzetes hozam idősorra illesztek egy AR(q) modellt:

$$x_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i * x_{t-i} + \epsilon_t. \tag{10}$$

Ezután az ϵ_t maradéktagokra illesztek szintén egy AR(q) modellt.

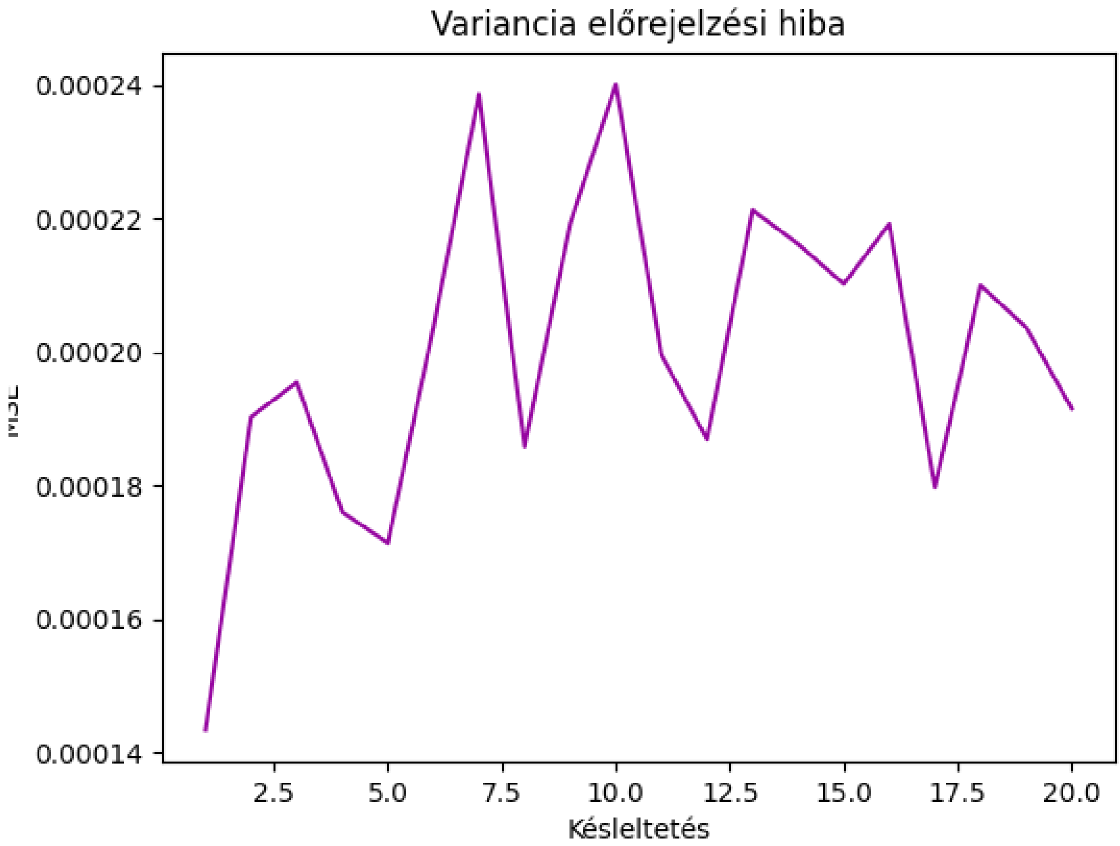
$$\epsilon_t = \hat{\alpha_0} + \sum_{i=1}^{q} \hat{\alpha_i} * \epsilon_{t-i} + \hat{\epsilon_t}. \tag{11}$$

A második mintán $t+1$ időszakra a variancia becslés a következő:

$$\sigma_{t+1}^2 = \hat{\alpha_0} + \sum_{i=1}^{q} \hat{\alpha_i} * \epsilon_{t-i}. \tag{12}$$

Ezt kiszámolom 20 féle q késleltetésre, és mindegyikre mérem az előrejelzési hibát átlagos négyzetes hibával. Az eredmény a 3. ábrán látszik.

3. ábra



A 3. ábrán az látszik, hogy messze a legegyszerűbb, 1 késleltetés jelez előre a legkisebb hibával. Ez alapján az elmúlt naphoz tartozó hibatagban van a legtöbb információ. A késleltetéstől való függés nem lineáris.

A $q = 1$ paraméterrel csinálok becslést az utolsó mintán is. Az utolsó mintán 0.000143-ról 0.000004-re javul a négyzetes hiba.

Hivatkozások

Jegadeesh, N., & Titman, S. (1993). Returns to buying winners and selling losers: Implications for stock market efficiency. *The Journal of finance*, *48*(1), 65–91.

Lim, B. Y., Wang, J. G., & Yao, Y. (2018). Time-series momentum in nearly 100 years of stock returns. *Journal of Banking & Finance*, *97*, 283–296.

Moskowitz, T. J., Ooi, Y. H., & Pedersen, L. H. (2012). Time series momentum. *Journal of financial economics*, *104*(2), 228–250.