Calcul Intégral I

STEP, MINES ParisTech

9 décembre 2020 (`#a46c5a3`)

Question 1 La somme de Riemann $S(f, \mathcal{D})$ associée à la fonction $f : x \in [0,1] \mapsto x^2$ et la subdivision pointée $\mathcal{D} = \{(0, [0, 1/4]), (1/2, [1/4, 3/4]), (1, [3/4, 1])\}$ de $[0,1]$ vaut :

- ☐ A: 3 / 8,
- ☐ B: 7 / 32,
- ☐ C: 1 / 3.

Question 2 Est-ce que presque tous les nombres réels x vérifient $|x| \geq 1$?

- ☐ A: oui,
- ☐ B: non.

Question 3 La fonction $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} n & \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ et } x = 2^{-n}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

- ☐ A : est intégrable au sens de Riemann,
- ☐ B : est intégrable au sens de Lebesgue,
- ☐ C : ni l'un ni l'autre.

Question 4 Calculer

$$\int_1^e \ln x \, \frac{dx}{x}.$$

Question 5 (réponse multiple) Si $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est intégrable,

- ☐ A : le prolongement $\bar{f}$ de f à $[0, +\infty]$ tel que $\bar{f}(+\infty) = 0$ est intégrable,
- ☐ B : f est bornée et $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$,
- ☐ C : f est intégrable sur tout intervalle $[r, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ et

$$\int_r^{+\infty} f(x) \, dx \to 0 \quad \text{quand} \quad r \to +\infty.$$