

# Topologie

STEP, MINES ParisTech

9 décembre 2020 (#a46c5a3)

**Question 1** Soit  $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  le cercle unité de  $\mathbb{R}^2$  et  $d$  la distance sur  $C$  dérivée de la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ . Dans ce contexte, la distance entre les points  $(-1, 0)$  et  $(1, 0)$  de  $C$  vaut

- ☐ A : 2.
- ☐ B :  $\pi$ .
- ☐ C :  $2\pi$ .

**Question 2** L'ensemble  $\mathbb{R}^2$  étant muni de la norme euclidienne, la norme d'opérateur  $\|A\|$  de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

est égale à

- ☐ A : 0.
- ☐ B : 1.
- ☐ C :  $\sqrt{2}$ .

**Question 3 (réponse multiple)** Dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme  $\|\cdot\| = |\cdot|$ ,

- ☐ A : l'ensemble  $[0, 1]$  est fermé.
- ☐ B : l'ensemble  $\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  est fermé.
- ☐ C : l'ensemble  $[0, +\infty[$  est fermé.

**Question 4 (réponse multiple)** Dans un espace métrique  $X$ , un ensemble  $A$  est ouvert si et seulement si

- ☐ A : le complémentaire  $A^c$  de  $A$  dans  $X$  est fermé.
- ☐ B : sa frontière  $\partial A$  est vide.
- ☐ C : l'ensemble  $A$  n'est pas fermé.

**Question 5 (réponse multiple)** Dans le plan euclidien, identifiez les ensembles qui sont des voisinages de l'origine

- ☐ A:  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 1 \text{ et } x_2 \geq 1\}$
- ☐ B:  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0\}$
- ☐ C:  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq -1 \text{ et } x_2 \geq -1\}$

**Question 6 (réponse multiple)** Dans un espace métrique, si  $A \subset B$ , alors :

- ☐ A :  $\overline{A} \subset \overline{B}$
- ☐ B :  $\partial A \subset \partial B$
- ☐ C :  $A^\circ \subset B^\circ$

**Question 7** Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et  $a \in \mathbb{R}$ , que peut-on dire de l'ensemble de niveau  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = a\}$  ?

Réponse : l'ensemble  $A$  est .....

**Question 8** Si une suite de vecteurs  $x_k$  de  $\mathbb{R}^n$  vérifie

$$\|x_{k+2} - x_{k+1}\| \leq 0.5 \times \|x_{k+1} - x_k\|,$$

est-ce qu'elle converge nécessairement ?

- ☐ A : oui.
- ☐ B : non.

**Question 9** Dans le plan euclidien, l'ensemble  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0\}$  est-il complet ?

- ☐ A : oui.
- ☐ B : non.