Calcul Intégral I

STEP, MINES ParisTech

9 décembre 2020 (#a46c5a3)

Question 1 La somme de Riemann $S(f, \mathcal{D})$ associée à la fonction $f: x \in [0, 1] \mapsto x^2$ et la subdivision pointée $\mathcal{D} = \{(0, [0, 1/4]), (1/2, [1/4, 3/4]), (1, [3/4, 1])\}$ de $[0, 1]$ vaut :
□ A: 3 / 8, □ B: 7 / 32, □ C: 1 / 3.
Question 2 Est-ce que presque tous les nombres réels x vérifient $ x \ge 1$?
□ A: oui,□ B: non.
Question 3 La fonction $f:[0,1] \mapsto \mathbb{R}$ définie par
$f(x) = \begin{vmatrix} n & \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ et } x = 2^{-n}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{vmatrix}$
\square A : est intégrable au sens de Riemann, \square B : est intégrable au sens de Lebesgue, \square C : ni l'un ni l'autre.
Question 4 Calculer $\int_{1}^{e} \ln x \frac{dx}{x}.$
Question 5 (réponse multiple) Si $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R} \text{ est intégrable},$
\square A : le prolongement \bar{f} de f à $[0, +\infty]$ tel que $\bar{f}(+\infty) = 0$ est intégrable, \square B : f est bornée et $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, \square C : f est intégrable sur tout intervalle $[r, +\infty[$ de $\mathbb R$ et
$\int_{r}^{+\infty} f(x) dx \to 0 \text{ quand } r \to +\infty.$