

# Calcul Intégral IV


STEP, MINES ParisTech\*

9 décembre 2020 (#a46c5a3)

## Table des matières

<b>Objectifs d'apprentissage</b>	<b>3</b>
Tribu . . . . .	3
Mesure . . . . .	3
Intégrale de fonctions positives . . . . .	4
Intégrale de fonction signées . . . . .	4
<b>Mesure</b>	<b>5</b>
Tribu et espace mesurable . . . . .	5
Ensemble des parties . . . . .	5
Tribu de Lebesgue . . . . .	5
Mesure et espace mesuré . . . . .	6
Mesure de Lebesgue . . . . .	7
Mesure de Dirac . . . . .	9
Mesure de comptage . . . . .	9
Ensemble négligeable . . . . .	9
Presque partout . . . . .	10
<b>Fonctions mesurables</b>	<b>10</b>
Fonction mesurable . . . . .	10
Limite simple de fonctions mesurables . . . . .	11
Fonction étagée . . . . .	11
Fonction étagées mesurables . . . . .	11
Approximation par des fonctions étagées positives . . . . .	12
Composition par une fonction continue . . . . .	14
Approximation par des fonctions étagées . . . . .	14

---

\*Ce document est un des produits du projet  **boisgera/CDIS**, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS). Il est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “attribution – pas d’utilisation commerciale – partage dans les mêmes conditions” 4.0 internationale.

<b>Intégrale</b>	<b>15</b>
Intégrale d'une fonction positive – Propriétés caractéristiques . . .	15
Intégrale d'une fonction signée . . . . .	16
Intégrales finies, infinies et indéfinies . . . . .	16
Intégrale par rapport à une mesure et intégrale de jauge . . . . .	17
Intégrale d'une fonction étagée positive . . . . .	18
Intégrale d'une fonction positive . . . . .	18
<b>Propriétés de l'intégrale</b>	<b>19</b>
Lemme de croissance . . . . .	19
Intégrale et mesure . . . . .	19
Théorème de convergence monotone . . . . .	20
Linéarité . . . . .	21
Positivité et nullité . . . . .	21
Théorème de convergence dominée . . . . .	22
<b>Annexe</b>	<b>23</b>
Continuité Monotone . . . . .	23
Théorème de continuité monotone . . . . .	23
Lemme de Fatou . . . . .	25
Lemme de Fatou . . . . .	25
Mesure de Lebesgue – Approche directe . . . . .	25
Mesure extérieure de Lebesgue . . . . .	26
Paradoxe de Banach-Tarski . . . . .	27
Mesure extérieure . . . . .	28
Ensemble mesurable . . . . .	28
Mesure associée à une mesure extérieure . . . . .	28
Mesure de Lebesgue . . . . .	29
Tribus engendrées . . . . .	29
Tribu engendrée par une collection . . . . .	29
Tribu de Borel . . . . .	30
Fonction $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ -mesurable . . . . .	31
$\mathcal{A}$ -mesurable équivaut à $\mathcal{A}/\mathcal{B}(Y)$ -mesurable. . . . .	31
Image réciproque et tribus engendrées . . . . .	31
Composition de fonctions mesurables . . . . .	32
Fonction boréliennes . . . . .	33
Les fonctions continues sont boréliennes . . . . .	33
<b>Exercices complémentaires</b>	<b>33</b>
Intégrales et séries . . . . .	33
Mesure définie par une intégrale . . . . .	34
Mesure image . . . . .	34
Complétion d'une mesure . . . . .	36
Approximation par des ensembles mesurables (hors-programme) . . .	36
Mesure intérieure (hors-programme) . . . . .	36

<b>Solutions</b>	<b>37</b>
Intégrales et séries . . . . .	43
Mesure définie par une intégrale . . . . .	45
Mesure image . . . . .	46
Complétion d'une mesure . . . . .	48
Approximation par des ensembles mesurables (hors-programme) . . .	49
Mesure intérieure (hors-programme) . . . . .	50
<b>Références</b>	<b>51</b>

## Objectifs d'apprentissage

Cette section s'efforce d'expliciter et de hiérarchiser les acquis d'apprentissages associés au chapitre. Ces objectifs sont organisés en paliers :

(o) Prérequis (●) Fondamental (●●) Standard (●●●) Avancé (●●●●) Expert

Sauf mention particulière, la connaissance des démonstrations du document n'est pas exigible<sup>1</sup> ; les notions développées en annexe sont toutes hors-programme.

### Tribu

- terminologie : tribu  $\mathcal{A}$ , ensemble mesurable, espace mesurable. (●).
- connaître : tribu  $\mathcal{P}(X)$  des parties de  $X$ , tribu de Lebesgue  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  (●).
- savoir exploiter que si  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $A \cup B \in \mathcal{A}$ ,  $A \cap B \in \mathcal{A}$  et  $A \setminus B \in \mathcal{A}$  (●).
- savoir exploiter que si  $A_k \in \mathcal{A}$ , alors  $\cup_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}$  et  $\cap_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}$  (●●).
- plus généralement, savoir déterminer quand un ensemble, produit par des opérations ensemblistes à partir d'ensembles de  $\mathcal{A}$ , appartient à  $\mathcal{A}$  (●●/●●●).
- savoir caractériser si une collection d'ensembles est une tribu (●●●).
- savoir que la raison d'être d'une tribu est d'être le domaine de définition d'une mesure (●).

### Mesure

- terminologie : mesure  $\mu$ , espace mesuré (●).
- connaître : mesures de Dirac, de comptage, de Lebesgue (●).
- savoir déterminer si une fonction est une mesure (●●/●●●).
- savoir exploiter que les mesures sont nulles en zéro, additives et croissantes (●).
- savoir exploiter la  $\sigma$ -additivité des mesures (●●).

---

1. l'étude des démonstrations du cours peut toutefois contribuer à votre apprentissage, au même titre que la résolution d'exercices.

- savoir calculer des mesures d'ensembles (●/●●●).
- terminologie : ensemble  $\mu$ -négligeable, propriété vraie  $\mu$ -presque partout (●).
- savoir déterminer si un ensemble est  $\mu$ -négligeable (●●).

## Intégrale de fonctions positives

- savoir : chaque mesure détermine une intégrale (●).
- terminologie : intégrale par rapport à  $\mu$  ( $\mu$ -intégrale) (●).
- savoir : si  $f \geq 0$ , la  $\mu$ -intégrale de  $f$  est définie  $\leftrightarrow f$  est  $\mu$ -mesurable (●).
- terminologie : fonction mesurable (ou  $\mathcal{A}$ -mesurable ou  $\mu$ -mesurable) (●●)
- connaître les trois propriétés caractéristiques de la  $\mu$ -intégrale (●).
- terminologie : fonction étagée (●)
- savoir exploiter la forme  $\sum_{k=1}^n y_k 1_{A_k}$  des fonctions étagées (●)
- savoir caractériser les fonctions étagées mesurables (●).
- savoir calculer la  $\mu$ -intégrale d'une fonction étagée  $\mu$ -mesurable (●).
- savoir que la limite simple de fonctions mesurables est mesurable (●●)
- savoir exploiter le résultat d'approximation des fonctions mesurables par des fonctions étagées mesurables (en particulier pour montrer la mesurabilité d'une fonction) (●●); connaître la suite de fonctions étagées utilisée dans sa démonstration (●●●).
- savoir exploiter la propriété de convergence monotone pour calculer l'intégrale de fonctions mesurables (●●).
- connaître la définition formelle de la  $\mu$ -intégrale (avec le sup des intégrales des fonctions étagées) (●●●); savoir démontrer qu'avec cette définition les trois propriétés caractéristiques de l'intégrale sont bien vérifiées (●●●●).
- savoir à quelle condition l'intégrale d'une fonction est nulle (cf. positivité et nullité) (●●).

## Intégrale de fonction signées

- terminologie :  $\mu$ -intégrale,  $\mu$ -intégrabilité (●).
- savoir : seule l'intégrale des fonctions signées qui sont mesurables est susceptible d'être définie; mais cette intégrale peut être finie, infinie ou indéfinie (●).
- savoir : une fonction est intégrable si son intégrale est définie et réelle (●).
- calcul de l'intégrale d'une fonction  $f$  à partir de celle de  $f_+$  et  $f_-$  (●).
- compétence : savoir transposer les résultats du calcul intégral des fonctions positives au contexte des fonctions signées (●●).
- savoir utiliser le théorème de convergence dominée (●●).
- connaître le lien entre intégrale associée à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$  et l'intégrale au sens de Lebesgue issue de la théorie de l'intégrale de jauge (définie au moyen de l'intégrale de Henstock-Kurzweil) (●●).

# Mesure

## Définition – Tribu et espace mesurable

Une *tribu* (ou  $\sigma$ -*algèbre*)  $\mathcal{A}$  sur un ensemble  $X$  est une collection d'ensembles de  $X$  contenant l'ensemble vide et fermée par passage au complémentaire et à l'union dénombrable<sup>2</sup> :

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .
2. Si  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$ .
3. Si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A_k \in \mathcal{A}$ , alors  $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}$ .

Un ensemble  $A \in \mathcal{A}$  est dit *mesurable* (relativement à la tribu  $\mathcal{A}$ ) ou  $\mathcal{A}$ -*mesurable* si le contexte demande d'être explicite. L'ensemble  $X$  muni de  $\mathcal{A}$  – c'est-à-dire formellement la paire  $(X, \mathcal{A})$  – est un *espace mesurable*.

## Définition – Ensemble des parties

On appelle *ensemble des parties* d'un ensemble  $X$  la tribu

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}.$$

**Exercice – Ensemble des parties (o)** Montrer que pour tout ensemble  $X$ , la collection  $\mathcal{P}(X)$  est bien une tribu sur  $X$ . (Solution p. 37.)

## Définition – Tribu de Lebesgue

On appelle *tribu de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$*  et on note  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  la collection des ensembles  $A \subset \mathbb{R}^n$  tels que pour tout pavé fermé borné de  $\mathbb{R}^n$ , la fonction caractéristique de  $A \cap P$  soit intégrable au sens de Lebesgue, c'est-à-dire telle que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} 1_{A \cap P}(x) dx$$

soit bien définie.

Autrement dit, un ensemble de  $\mathbb{R}^n$  est “ $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ -mesurable” si et seulement si il est “mesurable” au sens du chapitre “Calcul Intégral III”. Nous avons montré dans ce chapitre que la collection de ces ensembles forme effectivement une tribu ; la notion originale d'ensemble mesurable apparaît désormais comme un cas particulier de la notion d'ensemble mesurable relativement à une tribu.

---

2. c'est-à-dire que ces opérations, appliquées à des ensembles de  $\mathcal{A}$ , produisent des ensembles qui sont également dans  $\mathcal{A}$ .

**Exercice – Ensembles fermés (•)** La collection des ensembles fermés de  $\mathbb{R}^n$  est-elle une tribu sur  $\mathbb{R}^n$ ? (Solution p. 37.)

**Exercice – Tribu née sous  $X$  (•)** Supposons que la collection  $\mathcal{A}$  soit une tribu sur l'ensemble  $X$  mais que  $X$  soit inconnu. Comment peut-on déduire  $X$  de la collection  $\mathcal{A}$ ? (Solution p. 37.)

**Exercice – Opérations ensemblistes (•)** Montrer que si  $A$  et  $B$  appartiennent à une tribu  $\mathcal{A}$  sur  $X$ , alors  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  et  $A \setminus B$  appartiennent également à  $\mathcal{A}$ . (Solution p. 37.)

**Exercice – Intersection dénombrable (••)** Montrer que si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A_k \in \mathcal{A}$ , alors  $\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}$ . (Solution p. 37.)

**Exercice – Intersection de tribus I (••)** Montrer que pour tout ensemble  $X$ , l'intersection de deux tribus  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sur  $X$ , c'est-à-dire la collection  $\mathcal{A}$  définie par

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{A \subset X \mid A \in \mathcal{A}_1 \text{ et } A \in \mathcal{A}_2\}$$

est une tribu sur  $X$ . (Solution p. 38.)

**Exercice – Intersection de tribus II (•••)** Soit  $X$  un ensemble et  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ , une collection de tribus de  $X$ . Est-ce que l'intersection

$$\mathcal{A} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \{A \subset X \mid \text{pour tout } i \in I, A \in \mathcal{A}_i\}$$

est une tribu quand  $I$  est fini? Quand  $I$  est dénombrable? Pour un ensemble  $I$  arbitraire? (Solution p. 38.)

## Définition – Mesure et espace mesuré

Une *mesure*  $\mu$  sur un espace mesurable  $(X, \mathcal{A})$  est une fonction

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$$

telle que  $\mu(\emptyset) = 0$  (*nullité en 0*) et telle que pour toute suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'ensembles de  $\mathcal{A}$  disjoints deux à deux, on ait

$$\mu \left( \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k) ;$$

on dit que  $\mu$  est  $\sigma$ -additive (on dit aussi *dénombrablement additive*). L'ensemble  $X$  muni de  $\mathcal{A}$  et  $\mu$  – c'est-à-dire formellement le triplet  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  – est un *espace mesuré*.

**Exercice – Les mesures sont (finiment) additives (•)** Vérifier que toute mesure  $\mu$  sur  $(X, \mathcal{A})$  est additive, c'est-à-dire que si les ensembles  $A_0, A_1, \dots, A_n$  de  $\mathcal{A}$  sont deux à deux disjoints, alors

$$\mu(A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_0) + \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n).$$

(Solution p. 38.)

**Exercice – Monotonie (•)** Vérifier que toute mesure est *croissante* (on dit aussi *monotone*), c'est-à-dire que si  $A, B \in \mathcal{A}$  et  $A \subset B$ , alors  $\mu(A) \leq \mu(B)$ . (Solution p. 38.)

**Exercice – Cas dégénéré (••)** Existe-t'il une fonction  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  qui soit  $\sigma$ -additive mais pas nulle en 0 ? Si oui, quelle est alors la valeur de  $\mu(\emptyset)$  ? (Solution p. 38.)

**Exercice – Ça commence par un  $\mathbb{P}$  (•)** Comment appelle-t'on une mesure  $\mu$  sur  $(X, \mathcal{A})$  telle que  $\mu(X) = 1$  ? Une fois que vous avez deviné, justifier la réponse. (Solution p. 39.)

**Exercice – Trace d'une mesure (•)** Soit  $\mu$  une mesure sur  $(X, \mathcal{A})$ . Montrer que pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , la *trace*  $\mu|_A$  de  $\mu$  sur  $A$ , définie comme

$$\mu|_A : B \in \mathcal{A} \mapsto \mu(A \cap B)$$

est également une mesure sur  $(X, \mathcal{A})$ . (Solution p. 39.)

**Exercice – Somme de mesures (•)** Montrer que la somme de deux mesures  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sur un espace mesurable  $(X, \mathcal{A})$  est une mesure sur  $(X, \mathcal{A})$ . (Solution p. 39.)

### Définition – Mesure de Lebesgue

La fonction  $\lambda$  qui à un ensemble  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  associe

$$\lambda(A) = \begin{cases} \int 1_A(x) dx & \text{si } 1_A \text{ est intégrable au sens de Lebesgue,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

est une mesure nommé *mesure de Lebesgue* sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Démonstration** La fonction  $\lambda$  est bien à valeurs dans  $[0, +\infty]$  ; quand  $A = \emptyset$ ,

$$\lambda(\emptyset) = \int 1_{\emptyset}(x) dx = \int 0 dx = 0.$$

Soit  $A_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , une suite d'ensemble disjoints deux à deux de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Posons

$$A := \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \text{ et } f_j = 1_{\bigcup_{k=0}^j A_k} = \sum_{k=0}^j 1_{A_k}.$$

La suite des  $f_j$  est croissante, composée de fonctions mesurables et converge simplement vers  $1_A$ . Par le théorème de convergence monotone, soit la suite des intégrales des  $f_j$  est bornée et

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \int 1_A(x) dx \\ &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \int \sum_{k=0}^j 1_{A_k}(x) dx \\ &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^j \int 1_{A_k}(x) dx \\ &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^j \lambda(A_k) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda(A_k) < +\infty, \end{aligned}$$

soit cette suite est non-bornée, c'est-à-dire  $\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda(A_k) = +\infty$  et alors  $1_A$  est non-intégrable, ce qui fournit  $\lambda(A) = +\infty$ .

La  $\sigma$ -additivité de  $\lambda$  est donc établie dans tous les cas. ■

**Exercice – Mesure de Lebesgue d'un pavé (o)** Déterminer la mesure de Lebesgue  $\lambda(P)$  du pavé fermé borné  $P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ . (Solution p. 8.)



**Mesure de Lebesgue d'un pavé** La fonction caractéristique du pavé fermé borné  $P$  est intégrable et par le théorème de Fubini on a donc

$$\begin{aligned}\lambda(P) &= \int 1_{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]}(x) dx \\ &= \int (1_{[a_1, b_1]}(x_1) \times \dots \times 1_{[a_n, b_n]}(x_n)) dx_1 \dots dx_n \\ &= \left( \int 1_{[a_1, b_1]}(x_1) dx_1 \right) \times \dots \times \left( \int 1_{[a_n, b_n]}(x_n) dx_n \right) \\ &= (b_1 - a_1) \times \dots \times (b_n - a_n).\end{aligned}$$

### Définition – Mesure de Dirac

Soit  $X$  un ensemble et  $x \in X$  ; on appelle *mesure de Dirac* en  $x$  la mesure  $\delta_x : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$  définie par

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice – Démonstration (•)** Montrer que les mesures de Dirac sont bien des mesures. (Solution p. 40.)

**Exercice – Et en changeant de point de vue ? (o)** Quand on considère  $\delta_x(A)$  comme une fonction de  $x$  à  $A$  fixé, qu'obtient-on ? (Solution p. 40.)

### Définition – Mesure de comptage

Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  l'ensemble des parties de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle *mesure de comptage* sur  $X$  la fonction  $c : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$  définie par

$$c(A) = \begin{cases} n & \text{si } A \text{ contient } n \in \mathbb{N} \text{ éléments distincts,} \\ +\infty & \text{si } A \text{ contient une infinité d'éléments distincts.} \end{cases}$$

**Exercice – Démonstration (•)** Montrer que les mesures de comptage sont bien des mesures. (Solution p. 40.)

### Définition – Ensemble négligeable

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. Un ensemble  $N \subset X$  est *négligeable* (ou  $\mu$ -*négligeable*) s'il existe un ensemble mesurable  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $N \subset A$  et  $\mu(A) = 0$ .

### Définition – Presque partout

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. Une propriété  $P$  dépendant d'un  $x \in X$  est vraie *presque partout* (ou  $\mu$ -*presque partout*) si l'ensemble des éléments  $x$  où elle est fausse est un ensemble  $\mu$ -négligeable.

**Exercice – Négligeable pour la mesure de comptage (•)** Caractériser les ensembles négligeables pour la mesure de comptage  $c$ . (Solution p. 40.)

**Exercice – Négligeable pour la mesure de Dirac (•)** Caractériser les ensembles négligeables pour la mesure de Dirac  $\delta_x$ . (Solution p. 41.)

**Exercice – Négligeable et mesurable (•)** Montrer qu'un ensemble mesurable est négligeable si et seulement si il est de mesure nulle. (Solution p. 41.)

## Fonctions mesurables

### Définition – Fonction mesurable

Soit  $(X, \mathcal{A})$  un espace mesurable. Une fonction  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  est *mesurable* (ou  $\mathcal{A}$ -*mesurable* pour lever toute ambiguïté) si l'image réciproque de tout fermé (ou de tout ouvert) de  $[-\infty, +\infty]$  par  $f$  est un ensemble mesurable (qui appartient à  $\mathcal{A}$ ).

Quand la tribu  $\mathcal{A}$  est le domaine de définition d'une mesure  $\mu$ , on trouvera également le terme  $\mu$ -*mesurable* utilisé pour désigner une fonction  $\mathcal{A}$ -mesurable.

Cette définition est directement applicable si  $f$  est à valeurs positives ( $f(X) \subset [0, +\infty]$ ) ou finies ( $f(X) \subset \mathbb{R}$ ), voire les deux simultanément ( $f(X) \subset [0, +\infty]$ ).

**Exercice – Mesurabilité et ensemble des parties de  $X$  (•)** Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ . A quelle condition une fonction  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  est-elle  $\mathcal{A}$ -mesurable? (Solution p. 41.)

**Exercice – Fonction caractéristique (••)** Soit  $(X, \mathcal{A})$  un espace mesurable et  $A$  un sous-ensemble de  $X$ . A quelle condition portant sur  $A$  la fonction  $1_A : X \rightarrow \mathbb{R}$  est-elle mesurable? (Solution p. 41.)

### Théorème – Limite simple de fonctions mesurables

Soit  $(X, \mathcal{A})$  un espace mesurable. Si les fonctions  $f_k : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , sont mesurables et convergent simplement vers  $f$ , alors  $f$  est mesurable.

**Démonstration** Il suffit de prouver que l'image réciproque par  $f$  de tout ouvert  $U$  de  $[-\infty, +\infty]$  appartient à  $\mathcal{A}$ . Considérons la suite d'ensembles  $K_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) définis par :

$$K_n = \{x \in U \mid d(x, U^c) \leq 2^{-n} \text{ et } d(0, x) \leq 2^n\}.$$

Alors  $f(x) \in U$  si et seulement s'il existe un  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f_k(x) \in K_n$  pour  $k$  assez grand, ce qui se traduit par la formule

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{j=0}^{+\infty} \bigcap_{k=j}^{+\infty} f_k^{-1}(K_n)$$

qui établit que  $f^{-1}(U)$  est un ensemble mesurable en exploitant le fait qu'unions dénombrables et intersections dénombrables d'ensembles mesurables sont des ensembles mesurables. ■

### Définition – Fonction étagée

Une fonction  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  est *étagée* si et seulement l'image de  $X$  par  $f$  ne comporte qu'un nombre fini de valeurs distinctes.

### Proposition – Fonction étagées mesurables

Soit  $(X, \mathcal{A})$  un espace mesurable. Une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est étagée et mesurable si et seulement s'il existe une collection finie d'ensembles mesurables  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  et de valeurs  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$  telles que

$$f = \sum_{k=1}^n y_k 1_{A_k}.$$

La démonstration de ce résultat montre qu'il est possible d'être plus prescriptif si nécessaire sur les ensembles  $A_k$  et les valeurs  $y_k$  : une fonction est en effet étagée et mesurable si et seulement s'il existe une collection finie d'ensembles mesurable **disjoints** et **non vides**  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  et de valeurs **distinctes et non nulles**  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$  telles que

$$f = \sum_{k=1}^n y_k 1_{A_k}.$$

**Démonstration** Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction étagée ; il existe donc des réels  $y_1, \dots, y_n$  distincts non nuls tels que  $f(X) \setminus \{0\} = \{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ . On a alors

$$f = \sum_{k=1}^n y_k 1_{A_k} \text{ avec } A_k = f^{-1}(\{y_k\}).$$

Si de plus  $f$  est mesurable, les singletons de  $\mathbb{R}$  étant fermés, les ensembles  $A_k$  sont nécessairement ( $\mathcal{A}$ -)mesurables.

Réciproquement, si  $f$  est de la forme  $f = \sum_{k=1}^n y_k 1_{A_k}$  où les ensembles  $A_k$  sont mesurables, il est clair que la fonction  $f$  est étagée car  $f$  ne peut prendre comme valeurs que les sommes partielles des  $y_k$ , sommes qui sont en nombre fini. En considérant les ensembles – mesurables –  $B_k$  définis par  $B_1 = A_1$  et  $B_{k+1} = A_{k+1} \setminus A_k$  on obtient une somme  $\sum_k w_k 1_{B_k}$  du même type mais basée sur des ensembles mesurables disjoints  $B_k$ . En faisant l'union  $C_j$  des  $B_k$  qui correspondent à des valeurs  $z_j = w_k$  identiques, on peut de plus s'assurer d'avoir une somme de la forme  $f = \sum_j z_j 1_{C_j}$  où les valeurs  $z_j$  sont distinctes et les  $C_j$  sont mesurables et non vides. Le cas échéant, si l'un des  $z_j$  est nul, on peut même omettre le terme correspondant de la somme. Il devient maintenant clair que  $f$  est également mesurable : si  $U$  est un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}$  (l'argument vaut en fait pour n'importe quel ensemble), l'image réciproque de  $U$  par  $f$  est l'union d'une sous-collection des  $C_j$  ( $C_j$  étant inclus dans la collection si et seulement si  $z_j \in U$ ) et si  $0 \in U$ , de  $X \setminus \cup_j C_j$ . ■

### **Théorème – Approximation par des fonctions étagées positives**

Soit  $(X, \mathcal{A})$  un espace mesurable. Soit  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  une fonction mesurable positive. Il existe une suite croissante de fonctions étagées mesurables positives  $f_k : X \rightarrow [0, +\infty[$  (à valeurs finies) convergeant simplement vers  $f$ .

$$0 \leq f_0(x) \leq f_1(x) \leq \dots \leq f_k(x) \rightarrow f(x) \text{ quand } k \rightarrow +\infty.$$

**Démonstration** Soit  $\varepsilon_k \geq 0$  une suite de valeurs réelles positives. La suite des fonctions  $f_k$  définies par  $f_0 = 0$ , puis

$$f_{k+1} = f_k + \varepsilon_k 1_{E_k} \text{ où } E_k = \{x \in X \mid f(x) \geq f_k(x) + \varepsilon_k\}$$

est croissante et composée de fonctions étagées positives finies.

De plus, on peut prouver par récurrence que ces fonctions  $f_k$  sont mesurables. En effet,  $f_0$  est évidemment mesurable (et étagée) ; supposons que  $f_k$  soit mesurable (et étagée), et donc de la forme  $f_k = \sum_{j=1}^n y_j 1_{A_j}$  où les  $A_j$  sont mesurables, non vides, disjoints et  $0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n < +\infty$ . Si l'on pose  $y_0 = 0$  et

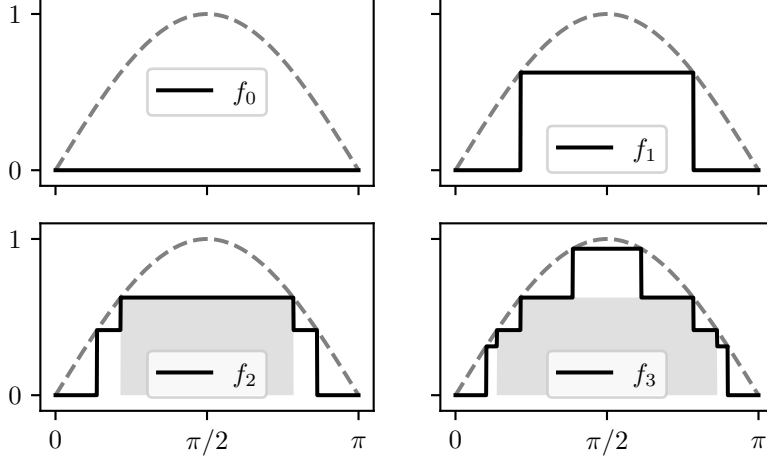


FIGURE 1 – Approximation de la fonction  $f : x \in [0, \pi] \mapsto \sin x$  au moyen des fonctions étagées  $f_k$  associées à la suite  $\varepsilon_k = 1.25/(k+1)$ .

$A_0 = X \setminus \cup_{j=1}^n A_j$ , on a donc

$$\begin{aligned}
 E_k &= \{x \in X \mid f(x) \geq f_k(x) + \varepsilon_k\} \\
 &= \bigcup_{j=0}^n \{x \in A_j \mid f(x) \geq f_k(x) + \varepsilon_k\} \\
 &= \bigcup_{j=0}^n \{x \in A_j \mid f(x) \geq y_j + \varepsilon_k\} \\
 &= \bigcup_{j=0}^n f^{-1}([y_j + \varepsilon_k, +\infty]) \cap A_j.
 \end{aligned}$$

La fonction  $f$  étant mesurable, chaque ensemble  $f^{-1}([y_j + \varepsilon_k, +\infty])$  est mesurable ; l'ensemble  $E_k$  est donc mesurable comme union finie d'intersections finies d'ensembles mesurables. La fonction  $f_{k+1} = f_k + \varepsilon_k 1_{E_k}$  est donc mesurable (et étagée).

Si la suite  $\varepsilon_k$  est choisie telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k = +\infty,$$

alors nécessairement la suite des  $f_k(x)$  converge vers  $f(x)$  pour tout  $x \in X$ . ■

**Exercice – Trace de fonction (••)** Soient  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  une fonction mesurable positive (à valeurs finies ou infinies) et soit  $A \in \mathcal{A}$ . Montrer que  $1_A f$  est mesurable. (Solution p. 41.)

**Exercice – Somme de fonctions (••)** Soient  $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$  deux fonctions mesurables positives (à valeurs finies ou infinies). Montrer que  $f + g$  est mesurable. (Solution p. 41.)

### Proposition – Composition par une fonction continue

Soit  $(X, \mathcal{A})$  un espace mesurable. Si les fonctions  $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  sont mesurables et que la fonction  $h : [-\infty, +\infty]^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$  est continue, la fonction composée  $h \circ (f_1, \dots, f_n)$  est mesurable.

**Démonstration (limitée au cas  $n = 1$ )** Pour tout ouvert  $U$  de  $[-\infty, +\infty]$ , l'image réciproque de  $U$  par  $h$  est un ouvert de  $[-\infty, +\infty]$  et comme  $f$  est mesurable, l'image réciproque de cet ensemble par  $f$  est un ensemble mesurable. La fonction composée  $h \circ f$  est donc mesurable. ■

### Théorème – Approximation par des fonctions étagées

Soit  $(X, \mathcal{A})$  un espace mesurable. Soit  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  une fonction mesurable. Il existe une suite de fonctions étagées mesurables  $f_k : X \rightarrow ]-\infty, +\infty[$  (à valeurs finies) dont la suite des valeurs absolues  $|f_k|$  est croissante

$$0 \leq |f_0| \leq \dots \leq |f_k| \leq |f_{k+1}| \leq \dots$$

et qui convergent simplement vers  $f$ .

**Démonstration** Les fonctions  $f_+ = \max(f, 0)$  et  $f_- = -\min(f, 0)$  sont mesurables comme composées de fonctions mesurables et de fonctions continues (p. 14). Elles sont également positives, telles que  $f = f_+ - f_-$  et  $|f| = f_+ + f_-$ . Il existe donc deux suites croissantes de fonctions  $f_{k+}$  et  $f_{k-}$  de fonctions étagées mesurables positives telles  $f_{k+} \rightarrow f_+$  et  $f_{k-} \rightarrow f_-$  et donc  $f_k := f_{k+} - f_{k-} \rightarrow f$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Par construction,  $|f_k| = f_{k+} + f_{k-}$  est également croissante comme somme de deux suites croissantes. ■

**Exercice – Calculs et infinis (o)** Quand  $f, g$  sont deux fonctions  $X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , les fonctions  $f + g$ ,  $f g$  et  $\max(f, g)$  sont-elles bien définies ? (Solution p. 42.)

**Exercice – Combinaison linéaire (●)** Soit  $\lambda > 0$  et soient  $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$  deux fonctions mesurables. Montrer que les fonctions  $\lambda f$  et  $f + g$  sont mesurables. (Solution p. 42.)

## Intégrale

### Intégrale d'une fonction positive – Propriétés caractéristiques

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. L'intégrale (de Lebesgue) par rapport à la mesure  $\mu$  (ou  $\mu$ -intégrale) est l'unique application qui à toute fonction mesurable positive  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  associe la grandeur notée

$$\int f \mu = \int_X f(x) \mu(dx) \in [0, +\infty]$$

et qui est caractérisée par

1. *Intégrale et mesure* : pour tout ensemble  $A \in \mathcal{A}$ ,

$$\int 1_A \mu = \mu(A).$$

2. *Linéarité* : si  $\lambda \in ]0, +\infty[$  et  $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$  sont mesurables, alors

$$\int (\lambda f) \mu = \lambda \int f \mu \quad \text{et} \quad \int (f + g) \mu = \int f \mu + \int g \mu.$$

3. *Convergence monotone* : si la suite de fonctions mesurables  $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$  est croissante et converge simplement vers  $f$ , alors

$$\int f \mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \mu.$$

La construction explicite de l'intégrale de Lebesgue associée à la mesure  $\mu$  – construction qui complète l'approche descriptive ci-dessus – sera donnée dans le reste de cette section. La preuve que l'intégrale ainsi construite satisfait bien les trois propriétés caractéristiques ci-dessus sera donnée dans la section suivante.

**Exercice – Intégrale et mesures de Dirac (●●)** Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  une fonction mesurable. Sachant que  $f$  est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées  $\delta_x$ -mesurables  $f_j : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ , en déduire, en exploitant les propriétés caractéristiques de l'intégrale, la valeur de

$$\int f \delta_x = \int_{\mathbb{R}} f(y) \delta_x(dy).$$

(Solution p. 42.)

## Intégrale d'une fonction signée

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  une fonction mesurable. L'intégrale (de Lebesgue) de  $f$  par rapport à la mesure  $\mu$  (où  $\mu$ -intégrale) est définie si au moins l'une des intégrales des fonctions positives

$$f_+ := \max(f, 0) \text{ et } f_- := -\min(f, 0)$$

est finie. On définit alors l'intégrale de  $f$  par rapport à  $\mu$  comme

$$\int f \mu = \int_X f(x) \mu(dx) := \int f_+ \mu - \int f_- \mu \in [-\infty, +\infty].$$

On dit que  $f$  est *intégrable* (par rapport à  $\mu$ ) ou  $\mu$ -*intégrable* si les intégrales de  $f_+$  et de  $f_-$  sont toutes les deux finies ou, ce qui revient au même, si l'intégrale de  $f$  est définie et réelle :

$$\int f \mu = \int_X f(x) \mu(dx) \in \mathbb{R}.$$

**Exercice – Absolue intégrabilité (•)** Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. Montrer que si  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  est intégrable alors  $|f|$  est également intégrable. (Solution p. 43.)

**Exercice – Intégrabilité de fonctions étagées (••)** Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et soient  $A_1, \dots, A_n$  des ensemble mesurables disjoints non vides et  $y_1, \dots, y_{n-1} \in [-\infty, +\infty] \setminus \{0\}$ . A quelle condition la fonction

$$f = \sum_{k=1}^n y_k 1_{A_k}$$

est-elle intégrable ? Quelle est alors la valeur de son intégrale ? (Solution p. 43.)

## Remarque – Intégrales finies, infinies et indéfinies

Une fonction positive peut avoir une intégrale bien définie (finie ou infinie) – il faut et il suffit qu'elle soit mesurable – sans être pour autant intégrable. Elle est intégrable si et seulement si elle est mesurable et que son intégrale est finie.

Par contre, dans le cadre des fonctions signées, une fonction mesurable peut avoir une intégrale indéfinie. En effet, même si l'on peut définir

$$\int f_+ \mu \text{ et } \int f_- \mu$$

dès que  $f$  est mesurable, il est possible que ces deux intégrales soient égales à  $+\infty$  ; il n'y a alors pas de façon “raisonnable” de définir la différence des deux grandeurs<sup>3</sup>.

---

3. sauf à introduire un nouveau nombre “indéfini”  $\perp$ , absorbant pour l'addition, tel que



**Exercice – Vers l’indéfini et au-delà (••)** Construire une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable par rapport à la tribu de Lebesgue  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  mais dont l’intégrale n’est pas définie par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda$  (ni finie ni infinie). (Solution p. 43.)

### Théorème – Intégrale par rapport à une mesure et intégrale de jauge

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda$  si et seulement si  $f$  est intégrable au sens de Lebesgue (par l’approche des intégrales de jauges). Dans ce cas, les deux intégrales sont égales :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

**Démonstration** Par construction, la fonction  $f$  est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda$  si et seulement si les fonctions  $f_+ = \max(f, 0)$  et  $f_- = -\min(f, 0)$  sont intégrables par rapport à  $\lambda$ . Comme

$$f_+ = \frac{f + |f|}{2}, f_- = \frac{f - |f|}{2} \text{ et } f = f_+ - f_-, |f| = f_+ + f_-,$$

les fonctions  $f_+$  et  $f_-$  sont Lebesgue-intégrables si et seulement si  $f$  et  $|f|$  sont Lebesgue-intégrables, soit – comme cette intégrale est absolue – si et seulement si  $f$  est Lebesgue-intégrable. Il nous suffit donc de démontrer le résultat pour les fonctions positives.

Remarquons qu’une fonction étagée positive

$$g = \sum_{k=1}^n y_k 1_{A_k}$$

où les ensembles  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  sont disjoints, et  $y_1, \dots, y_n \in ]0, +\infty[$  est  $\lambda$ -intégrable si et seulement si  $\lambda(A_k) < +\infty$  pour tout  $k$ . Par définition de la mesure de Lebesgue  $\lambda$ , c’est équivalent à la Lebesgue-intégrabilité de chaque  $1_{A_k}$  et donc de  $g$ ; l’intégrale de  $g$  par rapport à  $\lambda$  vaut alors

$$\int g \lambda = \sum_{k=1}^n y_k \lambda(A_k) = \sum_{k=1}^n y_k \int 1_{A_k}(x) dx = \int \sum_{k=1}^n y_k 1_{A_k}(x) dx = \int g(x) dx.$$

Si une fonction  $f$  positive est  $\lambda$ -intégrable, elle est la limite simple d’une suite croissante telles fonctions étagées positives et  $\lambda$ -intégrables à valeurs finies et son intégrale par rapport à  $\lambda$  est la limite des intégrales par rapport à  $\lambda$  des fonctions étagées. D’après le résultat précédent, elle est donc la limite des

---

$\perp = +\infty - \infty$  (le NaN ou *not-a-number* des numériciens est un concept très proche). Mais nous n’allons pas explorer cette piste ici.

intégrales au sens de Lebesgue de ces fonctions, qui, d'après le résultat des convergence monotone de l'intégrale de Lebesgue, converge vers l'intégrale de Lebesgue de  $f$ . Réciproquement, si  $f$  est Lebesgue-intégrable, elle est mesurable – mesurable au sens de Lebesgue et donc par le critère de l'image réciproque, également  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ -mesurable – et le même procédé d'approximation par une suite croissante de fonctions étagées positives est donc applicable. Les théorèmes de convergence monotone, pour l'intégrale de Lebesgue et pour l'intégrale associée à  $\lambda$ , permettent alors de conclure. ■

Les propriétés caractéristiques (p. 15) que nous souhaitons obtenir pour l'intégrale par rapport à la mesure  $\mu$  ne nous laissent pas le choix sur la façon de procéder. Le lien entre intégrale et mesure d'une part et la linéarité de l'intégrale imposent la façon de calculer l'intégrale de fonctions étagées mesurables positives (à valeurs finies), puis la propriété de convergence monotone détermine de façon unique l'intégrale des fonctions mesurables positives (à valeurs finies ou infinies).

### Définition – Intégrale d'une fonction étagée positive

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : X \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction étagée positive et mesurable, de la forme

$$f = \sum_{k=1}^n y_k 1_{A_k}$$

où les ensembles  $A_1, \dots, A_n$  sont mesurables ( $\in \mathcal{A}$ ) et  $y_1, \dots, y_n \in ]0, +\infty[$ . Alors on définit l'intégrale de  $f$  par rapport à  $\mu$  comme

$$\int f \mu := \sum_{k=1}^n y_k \mu(A_k).$$

### Définition – Intégrale d'une fonction positive

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  une fonction mesurable. Soit  $\mathcal{F}(f)$  la collection des fonctions étagées mesurables positives (à valeurs finies) qui soient inférieures à  $f$ . On appelle *intégrale de Lebesgue de  $f$  relativement à la mesure  $\mu$*  la grandeur positive (finie ou infinie)

$$\int f \mu := \int_X f(x) \mu(dx) := \sup_{g \in \mathcal{F}(f)} \int g \mu.$$

On pourra se convaincre que cette définition de l'intégrale est bien la seule possible si l'on souhaite se doter d'une intégrale ayant la propriété de convergence monotone<sup>4</sup>.

---

4. En effet, dans ce cas, comme pour toute fonction mesurable  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ , il existe une suite croissante de fonctions étagées mesurables positives  $f_k : X \rightarrow [0, +\infty[$  convergeant

## Propriétés de l'intégrale

On mettra l'accent dans cette section sur les propriétés de l'intégrale de fonctions positives ; les propriétés correspondantes de l'intégrale de fonctions signées s'en déduisent simplement.

Nous démontrons tout d'abord que l'intégrale que nous avons construite satisfait bien les propriétés caractéristiques souhaitées (p. 15), en commençant – après l'énoncé du lemme de croissance – par le lien entre mesure d'un ensemble et intégrale de sa fonction caractéristique.

### Lemme – Lemme de croissance

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $g, h : X \rightarrow [0, +\infty[$  deux fonction mesurables telles que  $g \leq h$ . Alors

$$\int g \mu \leq \int h \mu.$$

**Démonstration** L'inclusion  $\mathcal{F}(g) \subset \mathcal{F}(h)$  découle des hypothèses, en conséquence,

$$\sup_{k \in \mathcal{F}(g)} \int k \mu \leq \sup_{k \in \mathcal{F}(h)} \int k \mu,$$

ce qui est l'égalité entre intégrales souhaitée. ■

### Intégrale et mesure

Pour tout ensemble  $A \in \mathcal{A}$ ,

$$\int_X 1_A(x) \mu(dx) = \mu(A).$$

\_\_\_\_\_ simplement vers  $f$ , notre définition de l'intégrale doit nécessairement vérifier

$$\int f \mu \leq \sup_{g \in \mathcal{F}(f)} \int g \mu.$$

Réciproquement, si  $g_k : X \rightarrow [0, +\infty[$  est une suite de fonctions étagées mesurables positives (à valeurs finies) inférieures à  $f$  telles que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int g_k \mu = \sup_{g \in \mathcal{F}(f)} \int g \mu,$$

alors la suite  $h_k = \max(g_0, \dots, g_k, f_k)$  est une suite croissante de fonctions étagées mesurables positives (à valeurs finies) convergeant vers  $f$  mais supérieures à  $g_k$  et vérifiant donc nécessairement

$$\int f \mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int h_k \mu \geq \sup_{g \in \mathcal{F}(f)} \int g \mu.$$

**Démonstration** La fonction caractéristique  $1_A$  est mesurable, positive et inférieure à  $1_A$ . C'est de toute évidence la plus grande fonction ayant toute ces propriétés, donc par le lemme de croissance (p. 19),

$$\sup_{g \in \mathcal{F}(1_A)} \int g \mu = \mu(A).$$

■

### **Théorème – Théorème de convergence monotone**

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f_k : X \rightarrow [0, +\infty]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , une suite croissante de fonctions mesurables et positives; pour tout  $x \in X$ ,

$$0 \leq f_0(x) \leq \dots \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq \dots$$

La limite simple  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  des  $f_k$ , telle que pour tout  $x \in X$ ,

$$f_k(x) \rightarrow f(x) \text{ quand } k \rightarrow +\infty,$$

est mesurable et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k \mu = \int f \mu.$$

**Démonstration** La fonction  $f$  est mesurable comme limite simple de fonctions mesurables. Par le lemme de croissance (p. 19),

$$\int f_0 \mu \leq \dots \leq \int f_k \mu \leq \int f_{k+1} \mu \leq \dots \leq \int f \mu$$

et donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k \mu \leq \int f \mu.$$

Soit  $g : X \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction inférieure à  $f$  qui soit étagée et mesurable, c'est-à-dire de la forme

$$g = \sum_{j=0}^{n-1} y_j 1_{A_j}$$

avec  $y_j \in [0, +\infty[$  et  $A_j$  mesurable. Soit  $t \in [0, 1[$ ; comme la suite des  $f_k$  est croissante et converge simplement vers  $f$ , les ensembles  $E_k = \{x \in X \mid f_k(x) \geq tg(x)\}$  vérifient

$$E_0 \subset \dots \subset E_k \subset \dots \text{ et } \bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k = X.$$

Les  $f_k$  et  $g$  étant mesurables, les ensembles  $E_k$  sont mesurables. On a

$$\int f_k \mu \geq \int tg 1_{E_k} \mu = \int t \sum_{j=0}^{n-1} y_j 1_{A_j} 1_{E_k} \mu = t \sum_{j=0}^{n-1} y_j \mu(A_j \cap E_k).$$

Comme  $\cup_{k=0}^{+\infty} A_j \cap E_k = A_j$ , par le théorème de continuité monotone (cf annexe) (p. 23),

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k \mu \geq t \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \mu(A_j \cap E_k) = t \left( \sum_{j=0}^{n-1} y_j \mu(A_j) \right) = t \int g \mu.$$

Cette inégalité étant valable pour tout  $t \in [0, 1[$  et pour toute fonction positive étagée et mesurable  $g$  inférieure à  $f$ , on en déduit

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k \mu \geq \sup_{g \in \mathcal{F}(f)} \int g \mu = \int f \mu.$$

■

### Théorème – Linéarité

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. L'intégrale par rapport à  $\mu$  de fonctions mesurables positives (à valeurs finies ou infinies) est homogène et additive : si  $\lambda \in [0, +\infty[$  et  $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$  sont deux applications  $\mu$ -mesurables,

$$\int (\lambda f) \mu = \lambda \int f \mu \quad \text{et} \quad \int (f + g) \mu = \int f \mu + \int g \mu.$$

**Démonstration** Soit  $f_k, g_k : X \rightarrow [0, +\infty[$  une paire de suites croissantes de fonctions étagées, mesurables et convergeant simplement vers  $f$  et  $g$  respectivement. On peut se convaincre sans difficultés que l'intégrale des fonctions étagées et mesurables est additive et homogène et donc que

$$\int (\lambda f_k) \mu = \lambda \int f_k \mu \quad \text{et} \quad \int (f_k + g_k) \mu = \int f_k \mu + \int g_k \mu.$$

Comme les suites  $\lambda f_k$  et  $f_k + g_k$  sont croissantes et convergent simplement vers  $\lambda f$  et  $f + g$  respectivement, par le théorème de convergence monotone (p. 20) on en déduit les égalités cherchées. ■

### Théorème – Positivité et nullité

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  une fonction mesurable. L'intégrale de  $f$  par rapport à  $\mu$  est positive ; elle est nulle si et seulement si  $f$  est nulle  $\mu$ -presque partout :

$$\int f \mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) = 0.$$

Notons que comme l'ensemble  $\{x \in X \mid f(x) > 0\}$  – c'est-à-dire  $f^{-1}([0, +\infty])$  – est mesurable par construction, “négligeable” est bien équivalent à “de mesure nulle” ici.

**Démonstration** La positivité est évidente par construction. Si  $f$  est nulle presque partout, comme pour toute fonction  $g$  positive, mesurable et étagée inférieure à  $f$  et tout  $y \in [0, +\infty[$ , soit  $y = 0$ , soit

$$g^{-1}(y) \subset f^{-1}([0, +\infty]),$$

et donc

$$\mu(g^{-1}(y)) \leq \mu(f^{-1}([0, +\infty])) = 0,$$

l'intégrale de  $g$  par rapport à  $\mu$  vérifie

$$\int g\mu = \sum_{y \in [0, +\infty[} y \times \mu(g^{-1}(y)) = 0.$$

Par conséquent,

$$\int f\mu = \sup_{g \in \mathcal{F}(f)} \int g\mu = 0.$$

Réciproquement, si la fonction  $f$  n'est pas nulle  $\mu$ -presque partout, c'est-à-dire si  $\mu(f^{-1}([0, +\infty])) \neq 0$ , alors il existe nécessairement un  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$\mu(f^{-1}([2^{-n}, +\infty])) > 0.$$

En effet, les ensembles  $f^{-1}([2^{-n}, +\infty])$  forment une suite croissante d'ensembles mesurables dont l'union est  $f^{-1}([0, +\infty])$  donc par le théorème de continuité monotone (cf. annexe) (p. 23)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(f^{-1}([2^{-n}, +\infty])) = \mu(f^{-1}([0, +\infty]))$ .

Notons  $A_n = f^{-1}([2^{-n}, +\infty])$ ; c'est un ensemble mesurable de mesure positive. La fonction  $2^{-n}1_{A_n}$  est positive, étagée, mesurable et inférieure à  $f$ . On a donc

$$0 < 2^{-n}\mu(A_n) = \int 2^{-n}1_{A_n}\mu \leq \int f\mu.$$

L'intégrale de  $f$  par rapport  $\mu$  est donc strictement positive. ■

La théorie générale de l'intégration possède aussi son théorème de convergence dominée. Pour le démontrer, un corollaire du théorème de convergence monotone, appelée lemme de Fatou, est utile; ce lemme technique (p. 25) est présenté en annexe.

### **Théorème – Théorème de convergence dominée**

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f_k : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) une suite de fonctions mesurables, dominées par la fonction intégrable  $g : X \rightarrow [0, +\infty]$  c'est-à-dire telles que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in X$ ,

$$0 \leq |f_k(x)| \leq g(x) \text{ et } \int g\mu < +\infty.$$

Si la suite des  $f_k$  a une limite simple  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , c'est-à-dire si pour tout  $x \in X$ ,  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  quand  $k \rightarrow +\infty$ , alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k\mu = \int f\mu.$$

**Démonstration** Comme  $f_k + g$  est positif pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , le lemme de Fatou (p. 25) fournit

$$\begin{aligned} \int f \mu + \int g \mu &= \int (f + g) \mu \\ &= \int (\liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k + g) \mu \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int f_k + g \mu \\ &= \left( \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int f_k \mu \right) + \int g \mu \end{aligned}$$

et donc

$$\int f \mu \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int f_k \mu.$$

Comme les fonctions  $-f_k + g$  sont également positives pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , un raisonnement analogue fournit

$$-\int f \mu \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int -f_k \mu = -\limsup_{k \rightarrow +\infty} \int f_k \mu.$$

On a finalement la double inégalité

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \int f_k \mu \leq \int f \mu \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int f_k \mu,$$

dont on déduit le résultat cherché. ■

## Annexe

### Continuité Monotone

#### Théorème – Théorème de continuité monotone

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'ensembles de  $\mathcal{A}$ . Si la suite  $A_n$  est croissante, c'est-à-dire si  $A_n \subset A_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu \left( \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right).$$

Si  $\mu(A_0) < +\infty$  et que  $A_n$  est décroissante, c'est-à-dire si  $A_{n+1} \subset A_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu \left( \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right).$$

Il est assez facile de se convaincre que sans une hypothèse de type  $\mu(A_0) < +\infty$ , le volet décroissant du théorème est faux. Ainsi pour la mesure  $\mu = \ell$  de longueur dans  $\mathbb{R}$  (mesure de Lebesgue), pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $\ell([n, +\infty[) = +\infty$  et pourtant

$$\ell\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} [n, +\infty[ \right) = \ell(\emptyset) = 0.$$

Toutefois, dans le cas particulier des mesures finies (vérifiant  $\mu(A) < +\infty$  pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ) et en particulier des mesures de probabilité, la condition  $\mu(A_0) < +\infty$  est automatiquement vérifiée.

**Démonstration** Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante d'ensembles de  $\mathcal{A}$ , alors les ensembles  $B_n$  définis par  $B_0 = A_0$  puis  $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$  appartiennent à  $\mathcal{A}$  et sont disjoints. Comme par construction on a  $\bigcup_{k=0}^n B_k = A_n$  par (additivité et)  $\sigma$ -additivité de  $\mu$  on a d'une part

$$\sum_{k=0}^n \mu(B_k) = \mu(A_n)$$

et d'autre part

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Si désormais  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante d'ensembles de  $\mathcal{A}$  vérifiant  $\mu(A_0) < +\infty$ , les ensembles  $B_n$  définis par  $B_n = A_0 \setminus A_n$  forment une suite croissante d'ensembles, par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_0 \setminus A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_0 \setminus A_n)\right) = \mu\left(A_0 \setminus \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Tous les ensembles  $A_n$  étant inclus dans  $A_0$ , on a également  $\mu(A_0 \setminus A_n) + \mu(A_n) = \mu(A_0)$  et

$$\mu\left(A_0 \setminus \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) + \mu\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mu(A_0)$$

et par conséquent

$$\mu(A_0) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu(A_0) - \mu\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$



Comme  $\mu(A_0)$  est fini, on peut le simplifier de part et d'autre de l'égalité et en déduire finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu \left( \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right).$$

■

## Lemme de Fatou

On rappelle que  $\liminf_{k \rightarrow +\infty} x_k$  désigne l'infimum des limites possibles, parmi toutes les suites extraites de  $x_k$  ayant une limite (finie ou infinie).

### Lemme – Lemme de Fatou

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f_k : X \rightarrow [0, +\infty]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , une suite de fonctions mesurables. Alors

$$\int (\liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k) \mu \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int f_k \mu.$$

**Démonstration** La suite des fonctions  $\inf_{j \geq k} f_j$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , est croissante, composée de fonctions mesurables, et converge simplement vers la limite inférieure de la suite des  $f_k$  :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \inf_{j \geq k} f_j \right) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k.$$

Par le théorème de convergence monotone (p. 20) on a donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int \inf_{j \geq k} f_j \mu = \int (\liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k) \mu.$$

De plus pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $\ell \geq k$ , on a  $\inf_{j \geq k} f_j \leq f_\ell$ , donc par le lemme de croissance (p. 19),

$$\int \inf_{j \geq k} f_j \mu \leq \liminf_{\ell \rightarrow +\infty} \int f_\ell \mu.$$

Puisque le second membre est indépendant de  $k$ , on en déduit le résultat cherché en faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$ . ■

## Mesure de Lebesgue – Approche directe

Dans les volets précédents du “Calcul Intégral”, il nous a semblé naturel de définir le volume d'un pavé compact de  $\mathbb{R}^n$

$$P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

au moyen de la formule

$$\lambda(P) := (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_n - a_n).$$

L'intégrable de Henstock-Kurzweil nous permet de prolonger cette fonction  $\lambda$  en une fonction définie pour tous les ensembles mesurables  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ , par la relation

$$\lambda(A) = \begin{cases} \int 1_A(x) dx & \text{si } 1_A \text{ est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mais cette approche n'est pas totalement satisfaisante intellectuellement. D'une part on peut considérer l'usage de l'intégrale comme un chemin tortueux pour étendre  $\lambda$ . D'autre part on peut avoir l'impression que cette approche – qui ne permet pas de mesurer le volume de tout ensemble de  $\mathbb{R}^n$  – n'atteint pas totalement son objectif ; cette limitation pourrait être un artefact de la méthode choisie plutôt qu'une limitation intrinsèque. Dans cette section, nous allons donner une autre méthode de définition, plus directe et géométrique, due à Lebesgue et Carathéodory<sup>5</sup>, de définition de la mesure (extérieure) du volume de tout ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . Elle nous donnera également la raison pour laquelle notre construction initiale du volume se limite à la collection des ensembles qualifiés de “mesurables”.

Pour calculer le volume d'un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , nous généralisons la méthode déjà utilisée pour définir les ensembles négligeables (de volume nul) : nous considérons l'ensemble des collections dénombrables de pavés recouvrant ce sous-ensemble et nous utilisons chacun des ces recouvrements pour produire une estimation (supérieure) du volume de l'ensemble. Formellement :

### Définition – Mesure extérieure de Lebesgue

On appelle *mesure extérieure de Lebesgue* sur  $\mathbb{R}^n$  la fonction

$$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty],$$

qui à tout ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  associe le nombre réel étendu positif défini par

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda(P_k) \mid P_k \text{ pavé compact de } \mathbb{R}^n, A \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} P_k \right\},$$

Cette définition “raisonnable” ne satisfait toutefois pas les propriétés que nous attendons (implicitement) d'un volume. Ce décalage est mis en évidence par un résultat paradoxal de la théorie des ensembles dans  $\mathbb{R}^3$  :

---

5. Henri Lebesgue (1875-1941) était un mathématicien français et Constantin Carathéodory (1873-1950) un mathématicien grec entretenant des liens étroits avec l'Allemagne. Ils font partie des fondateurs de la théorie abstraite de la mesure qui conduit à un renouveau de la théorie de l'intégration au début du XXème siècle.

### Théorème – Paradoxe de Banach-Tarski

Il est possible de partitionner une sphère de rayon un de  $\mathbb{R}^3$  en un nombre fini d'ensembles, qui, après rotations et translations, forment une partition de deux sphères disjointes de rayon un.

Si le résultat est qualifié de paradoxe, c'est qu'il nous semble intuitivement que le volume devrait être préservé par les opérations subies par la sphère initiale. Or, le volume d'une sphère de rayon un et de deux sphères disjointes de même rayon diffère d'un facteur 2. Pour dépasser ce paradoxe, nous allons devoir examiner un par un les résultats qui nous semblent "évidents" dans ce raisonnement pour débusquer notre erreur.

Soient  $A_1, \dots, A_p$  des ensembles disjoints et non vides de  $\mathbb{R}^3$  dont la réunion forme la sphère initiale  $S_0 = A_1 \cup \dots \cup A_p$ , et tels que des ensembles disjoints  $B_1, \dots, B_p$  qui s'en déduisent par rotation et translation, vérifient  $S_1 \cup S_2 = B_1 \cup \dots \cup B_p$  où  $S_1$  et  $S_2$  sont les deux sphères finales.

Tout d'abord, on a bien

$$\lambda^*(S) = \frac{4\pi}{3} \text{ et } \lambda^*(S_1 \cup S_2) = 2 \times \frac{4\pi}{3},$$

car les ensembles  $S_0, S_1$  et  $S_2$  considérés sont intégrables (au sens de l'intégrale de Henstock-Kurzweil) et nous verrons ultérieurement que dans ce cas, la mesure extérieure  $\lambda^*$  coïncide avec  $\lambda$ . Un simple calcul intégral fournit alors le résultat.

On peut croire que le point faible de notre raisonnement est la préservation de la valeur de  $\lambda^*(A)$  par translation et rotation ; s'il est facile d'établir que lorsque  $B$  se déduit de  $A$  par une translation alors  $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$ , on peut douter du résultat pour les rotations. Après tout, la définition de  $\lambda^*(A)$  fait appel à des rectangles qui sont parallèles aux axes, une propriété qui n'est pas conservée par rotation. Mais si le résultat n'est pas évident, il s'avère pourtant que la mesure extérieure  $\lambda^*$  est bien invariante par rotation (cf. (Hunter 2011, sec. 2.8)).

La propriété qui nous fait défaut est plus fondamentale : la fonction  $\lambda^*$  n'est tout simplement pas additive ! Même si les ensembles  $A_1, \dots, A_p$  sont disjoints, il est possible que

$$\lambda^*(A_1 \cup \dots \cup A_p) \neq \lambda^*(A_1) + \dots + \lambda^*(A_p).$$

On peut par contre établir avec la définition de  $\lambda^*$  qu'elle est sous-additive : pour tous les ensembles  $A_1, \dots, A_p$  (disjoints ou non), on a

$$\lambda^*(A_1 \cup \dots \cup A_p) \leq \lambda^*(A_1) + \dots + \lambda^*(A_p).$$

Elle est même  $\sigma$ -sous-additive : si  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\lambda^*\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^*(A_k).$$

Cette propriété est la caractéristique centrale des *mesures extérieures* :

### Définition – Mesure extérieure

On appelle *mesure extérieure* sur l'ensemble  $X$  toute application

$$\nu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$$

telle que :

1.  $\mu^*(\emptyset) = 0$  (*nullité en  $\emptyset$* ).
2.  $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$  (*croissance*).
3.  $\mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^*(A_k)$  ( *$\sigma$ -subadditivité*).

---

Il existe un procédé général permettant de déduire d'une mesure extérieure une application qui soit additive – à condition d'accepter de réduire son domaine de définition ; la fonction qui en résulte est additive – et même  $\sigma$ -additive.

### Ensemble mesurable

Soit  $\mu^*$  une mesure extérieure sur l'ensemble  $X$ . Un ensemble  $A \subset X$  est dit  $\mu^*$ -*mesurable* (au sens de Carathéodory) si pour tout  $B \subset X$ , on a

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

Une façon alternative de voir les choses : si l'on note  $\mu^*|_A$  la *trace* de  $\mu^*$  sur un ensemble  $A$  de  $X$ , définie pour tout sous-ensemble  $B$  de  $X$  par

$$\mu^*|_A(B) = \mu^*(A \cap B),$$

alors l'ensemble  $A$  est  $\mu^*$ -mesurable si et seulement si

$$\mu^* = \mu^*|_A + \mu^*|_{A^c}.$$

### Théorème – Mesure associée à une mesure extérieure

Soit  $X$  un ensemble et  $\mu^*$  une mesure extérieure sur  $X$ . La collection  $\mathcal{A}$  des ensembles  $\mu^*$ -mesurables de  $X$  est une tribu sur  $X$  et la restriction  $\mu$  de  $\mu^*$  à  $\mathcal{A}$  est une mesure sur  $X$ .

**Démonstration** Cf. (Hunter 2011, théorème 2.9, pp. 15-17). ■

La spécialisation de ce procédé au cas de la mesure extérieure de Lebesgue produit la mesure de Lebesgue.

## Théorème – Mesure de Lebesgue

La “mesure extérieure de Lebesgue (p. 26)”  $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$  est bien une mesure extérieure sur  $\mathbb{R}^n$ . La collection des ensembles  $\lambda^*$ -mesurables (au sens de Caratheodory) est identique à la tribu de Lebesgue  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ; la mesure  $\lambda$  associée à  $\lambda^*$  coïncide avec la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Démonstration (partielle :  $\lambda^*$  est une mesure extérieure.)** Il est clair que  $\lambda^*$  satisfait  $\lambda^*(\emptyset) = 0$  (car le pavé  $[0, 0]^n$  recouvre  $\emptyset$  par exemple). Si  $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ , alors tout recouvrement de  $B$  par des pavés compacts recouvre également  $A$ ; par conséquent  $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ . Finalement, pour tout  $A_k \subset \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe des pavés compacts  $P_{jk}$  tels que

$$A_k \subset \bigcup_{j=0}^{+\infty} P_{jk} \text{ et } \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda(P_{jk}) - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \leq \lambda^*(A_k) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda(P_{jk}).$$

Comme la famille des  $\{P_{jk}\}_{jk}$  recouvre  $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$ , on a donc

$$v^*(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda(P_{jk}) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \lambda^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right) = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^*(A_k) \right) + \varepsilon.$$

Le réel positif  $\varepsilon$  étant arbitrairement petit, on en déduit que  $\lambda^*$  est bien  $\sigma$ -subadditive. ■

## Tribus engendrées

### Définition – Tribu engendrée par une collection

Dans un ensemble  $X$ , on appelle *tribu engendrée* par une collection  $\mathcal{B}$  d'ensembles de  $X$  la plus petite tribu (au sens de l'inclusion)  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B})$  de  $X$  contenant  $\mathcal{C}$ . Autrement dit :

- $\sigma(\mathcal{B})$  est une tribu.
- si  $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}$  est une tribu de  $X$ , alors  $\sigma(\mathcal{B}) \subset \mathcal{C}$ .

Quand il y a une ambiguïté sur l'ensemble  $X$  hébergeant la collection  $\mathcal{B}$ , on pourra noter la tribu engendrée  $\sigma_X(\mathcal{B})$ .

**Démonstration (existence de la tribu engendrée)** Désignons par  $\mathfrak{S}$  la collection des tribus de contenant  $\mathcal{B}$  comme sous-ensemble.

$$\mathfrak{S} = \{\mathcal{C} \text{ tribu de } X \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{C}\}$$

Elle n'est pas vide : elle contient la collection  $\mathcal{P}(X)$  des ensembles de  $X$  (qui de toute évidence est un sur-ensemble de  $\mathcal{B}$  et une tribu de  $X$ ). Montrons que la

plus petite tribu  $\sigma(\mathcal{B})$  de  $X$  contenant  $\mathcal{B}$  est l'intersection de toutes les tribus de  $\mathfrak{S}$ , c'est-à-dire que

$$\sigma(\mathcal{B}) = \bigcap_{\mathcal{C} \in \mathfrak{S}} \mathcal{C} = \{A \subset X \mid A \in \mathcal{C} \text{ pour tout } \mathcal{C} \in \mathfrak{S}\}.$$

Il est clair que si  $\mathcal{A}$  est une tribu de  $X$  contenant  $\mathcal{B}$ , alors  $\bigcap_{\mathcal{C} \in \mathfrak{S}} \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ , car  $\mathcal{A} \in \mathfrak{S}$ . Il nous suffit donc de montrer que  $\bigcap \mathfrak{S}$  est une tribu de  $X$  pour pouvoir conclure. Or

- pour tout  $\mathcal{C} \in \mathfrak{S}$ ,  $\emptyset \in \mathcal{C}$ , donc  $\emptyset \in \bigcap_{\mathcal{C} \in \mathfrak{S}} \mathcal{C}$  ;
- si  $A \in \bigcap_{\mathcal{C} \in \mathfrak{S}} \mathcal{C}$ , alors pour tout  $\mathcal{C} \in \mathfrak{S}$ ,  $A \in \mathcal{C}$ , donc  $X \setminus A \in \mathcal{C}$  et par conséquent  $X \setminus A \in \bigcap_{\mathcal{C} \in \mathfrak{S}} \mathcal{C}$  ;
- si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A_k \in \bigcap_{\mathcal{C} \in \mathfrak{S}} \mathcal{C}$ , alors pour tout  $\mathcal{C} \in \mathfrak{S}$ ,  $A_k \in \mathcal{C}$ , donc  $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathcal{C}$  et par conséquent  $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \in \bigcap_{\mathcal{C} \in \mathfrak{S}} \mathcal{C}$ .

■

**Exercice – Singletons de  $\mathbb{N}$**  Montrer que la collection des singletons de  $\mathbb{N}$   $\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$  engendre dans  $\mathbb{N}$  la tribu des parties  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

**Exercice – Tribu engendrée par une collection finie** Montrer que si  $\mathcal{B} = \{A_1, A_2\}$  où  $A_1$  et  $A_2$  sont des ensembles de  $X$ , alors la tribu engendrée par  $\mathcal{B}$  dans  $X$  contient au plus 16 ensembles. Que devient le résultat quand  $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3\}$  ?

**Exercice – Tribu engendrée par les ensembles dénombrables** Montrer que la tribu engendrée par les ensembles dénombrables de  $\mathbb{R}$  est la collection des ensembles de  $\mathbb{R}$  qui sont dénombrables ou dont le complémentaire est dénombrable.

**Exercice – Calculs avec les tribus engendrées** Soit  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux collections d'ensembles de  $X$ . Montrer que  $\sigma(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(\mathcal{A})$  et que si  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ , alors  $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$ . En déduire que si  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{A})$ , alors  $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B})$ .

### Définition – Tribu de Borel

On appelle *tribu de Borel* d'un espace topologique  $X$  la tribu notée  $\mathcal{B}(X)$  engendrée par les ensembles fermés (ou les ensembles ouverts) de  $X$ . Les ensembles qu'elle contient sont appelés les *boréliens*.

**Exercice – Ouverts ou fermés** Montrer que la tribu engendrée par les ensembles ouverts de  $X$  est bien identique à la tribu engendrée par les ensembles fermés de  $X$ .

**Exercice – Tribu engendrée par les pavés compacts** Montrer que la tribu engendrée par la collection des pavés compacts  $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  de  $\mathbb{R}^n$  est la tribu de Borel de  $\mathbb{R}^n$ . (indication <sup>6</sup>)

Nous généralisons désormais la notion de fonction  $\mathcal{A}$ -mesurable du chapitre précédent en tenant désormais explicitement compte d'une tribu dans l'ensemble d'arrivée de la fonction :

### Fonction $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ -mesurable

Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  associée aux espaces mesurables  $(X, \mathcal{A})$  et  $(Y, \mathcal{B})$  est *mesurable* (ou  *$\mathcal{A}/\mathcal{B}$ -mesurable*) si l'image réciproque  $A = f^{-1}(B)$  de tout ensemble  $B$  de  $\mathcal{B}$  par  $f$  appartient à  $\mathcal{A}$ .

La notions de  $\mathcal{A}$ -mesurabilité du chapitre précédent correspond implicitement à la notion plus générale de mesurabilité quand la tribu de Borel est sélectionnée sur l'espace d'arrivée :

**$\mathcal{A}$ -mesurable équivaut à  $\mathcal{A}/\mathcal{B}(Y)$ -mesurable.**

Soit  $(X, \mathcal{A})$  un espace mesurable et  $Y$  un espace topologique. Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  est  $\mathcal{A}$ -mesurable – au sens où l'image réciproque par  $f$  de tout ouvert (ou fermé) de  $Y$  appartient à  $\mathcal{A}$  – si et seulement si elle est  $\mathcal{A}/\mathcal{B}(Y)$ -mesurable.

La démonstration de ce résultat repose sur le lemme suivant :

### Lemme – Image réciproque et tribus engendrées

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $\mathcal{B}$  une collection d'ensembles de  $Y$ . Alors

$$\mathcal{F} := \sigma_X(\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \sigma_Y(\mathcal{B})\}.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xleftarrow{f^{-1}} & \\ \sigma_X \uparrow & & \sigma_Y \uparrow \\ & \xleftarrow{f^{-1}} & \mathcal{B} \end{array}$$

FIGURE 2 – Ce diagramme est *commutatif*.

---

6. Commencer par montrer que tout ouvert de  $\mathbb{R}^n$  s'écrit comme une union dénombrable de pavés compacts de la forme  $[k_1/2^m, (k_1 + 1)/2^m] \times \cdots \times [k_n/2^m, (k_n + 1)/2^m]$  où  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ .

**Démonstration** Notons  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B})$ . Comme  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ , on a

$$\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\} \subset \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

Si nous montrons que  $\mathcal{C} := \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$  est une tribu nous pouvons en déduire que

$$\sigma(\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}) \subset \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

L'ensemble vide appartient à  $\mathcal{C}$  car  $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ . Si  $A \in \mathcal{A}$ ,  $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$  et  $Y \setminus A \in \mathcal{A}$ , donc  $X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{C}$ . Finalement, si  $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{A}$ ,  $\cup_k f^{-1}(A_k) = f^{-1}(\cup_k A_k) \in \mathcal{C}$ . La collection  $\mathcal{C}$  est donc une tribu.

Réciproquement, posons  $\mathcal{E} = \sigma(\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\})$  et considérons

$$\mathcal{D} = \{A \in Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{E}\}.$$

La collection  $\mathcal{D}$  est également une tribu. En effet,  $f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{E}$ , si  $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$  alors  $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$  et si  $f^{-1}(A_0), f^{-1}(A_1), \dots \in \mathcal{E}$ , alors  $f^{-1}(\cup_k A_k) = \cup_k f^{-1}(A_k) \in \mathcal{E}$ . Par conséquent, comme  $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B}) \subset \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ . Donc pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , on a  $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ , soit

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{E} = \sigma(\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}).$$

■

**Démonstration “ $\mathcal{A}$ -mesurable  $\leftrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{B}(Y)$ -mesurable”** De toute évidence, si  $f$  est  $\mathcal{A}/\mathcal{B}(Y)$ -mesurable, comme tout ouvert appartient à la tribu de Borel, l'image réciproque par  $f$  de tout ouvert de  $Y$  appartient bien à  $\mathcal{A}$  donc  $f$  est  $\mathcal{A}$ -mesurable.

Réciproquement, si l'image réciproque de tout ouvert de  $Y$  est  $\mathcal{A}$ -mesurable, alors la tribu engendrée par les images réciproques des ouverts de  $Y$  est incluse dans  $\mathcal{A}$ . Comme cette tribu est d'après le lemme précédent (p. 31) l'ensemble des images réciproques par  $f$  de la tribu engendrée par les ouverts dans  $Y$ , c'est-à-dire la tribu de Borel dans  $Y$ , l'image réciproque de tout borélien est un ensemble de  $\mathcal{A}$  : la fonction  $f$  est  $\mathcal{A}/\mathcal{B}(Y)$ -mesurable. ■

### Proposition – Composition de fonctions mesurables

Soient  $(X, \mathcal{A})$ ,  $(Y, \mathcal{B})$  et  $(Z, \mathcal{C})$  des espaces mesurables. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une fonction  $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ -mesurable et  $g : Y \rightarrow Z$  une fonction  $\mathcal{B}/\mathcal{C}$ -mesurable. Alors la composition  $g \circ f$  de  $f$  et  $g$  est  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ -mesurable.

**Démonstration** Pour tout ensemble  $C \in \mathcal{C}$ , on a  $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$  et donc  $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$ . ■



## Fonction boréliennes

Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques. Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  est *borélienne* si elle est  $\mathcal{B}(X)/\mathcal{B}(Y)$ -mesurable.

## Les fonctions continues sont boréliennes

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques. Toute fonction continue  $f : X \rightarrow Y$  est borélienne.

**Démonstration** Notons  $\mathcal{F}_X$  et  $\mathcal{F}_Y$  les collections de tous les ensembles fermés de  $X$  et  $Y$  respectivement. Comme les boréliens de  $Y$  sont engendrés par les fermés de  $\mathcal{F}_Y$ , on a

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(Y)\} = \{f^{-1}(A) \mid A \in \sigma_Y(\mathcal{F}_Y)\}$$

et par conséquent, par commutativité (p. 31),

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(Y)\} = \sigma_X(\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}_Y\}).$$

Or la fonction  $f$  étant continue,  $\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}_Y\} \subset \mathcal{F}_X$  et par conséquent

$$\sigma_X(\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}_Y\}) \subset \sigma_X(\mathcal{F}_X) = \mathcal{B}(X).$$

Au final,  $\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(Y)\} \subset \mathcal{B}(X)$  et la fonction  $f$  est bien  $\mathcal{B}(X)/\mathcal{B}(Y)$ -mesurable, c'est-à-dire borélienne. ■

**Exercice – Fonctions croissantes** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ; montrer que si l'image réciproque par  $f$  de tout intervalle compact est un intervalle compact alors  $f$  est borélienne. En déduire que si  $f$  est croissante alors  $f$  est borélienne.

## Exercices complémentaires

### Intégrales et séries

Dans cet exercice, on montre que la théorie générale de l'intégration fournit un cadre permettant d'étudier les séries et leur somme.

Soit  $c$  la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}$ .

**Question 1 (•)** A quelle condition (nécessaire et suffisante) une fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow [-\infty, +\infty]$  est-elle mesurable (vis-à-vis de la tribu associée à la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}$ ) ? (Solution p. 43.)

**Question 2 (••)** Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$  une fonction mesurable. Montrer que l'intégrale de  $f$  par rapport à la mesure de comptage vérifie

$$\int f \, c = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n).$$

(Solution p. 43.)

**Question 3 (••)** Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow [-\infty, +\infty]$  une fonction mesurable. A quelle condition (nécessaire et suffisante) la fonction  $f$  est-elle  $c$ -intégrable ? Calculer alors son intégrale. (Solution p. 44.)

**Question 4 (••)** Formuler le théorème de convergence dominée associé à la mesure de comptage  $c$  sur  $\mathbb{N}$  comme un résultat portant sur les séries. (Solution p. 45.)

## Mesure définie par une intégrale

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $f : X \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction mesurable positive à valeurs finies.

**Question 1 (••)** Montrer que pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , la fonction  $1_A f$  est mesurable. (Solution p. 45.)

**Question 2 (••)** Montrer que la fonction notée  $f\mu$  définie par

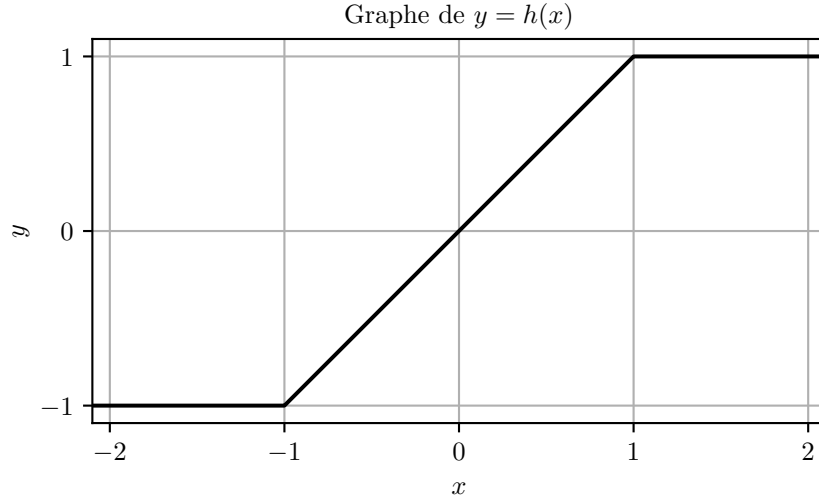
$$f\mu : A \in \mathcal{A} \mapsto \int_A f \, \mu := \int 1_A f \, \mu \in [0, +\infty].$$

est une mesure sur  $(X, \mathcal{A})$ . (Solution p. 45.)

## Mesure image

**Question 0 (••)** Soit  $\mu$  une mesure sur  $\mathbb{R}$  muni de la tribu de Lebesgue  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ . Soit  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -1, \\ x & \text{si } -1 < x < +1, \\ +1 & \text{si } +1 \leq x. \end{cases}$$



Montrer que la fonction

$$\nu : A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \rightarrow \mu(h^{-1}(A))$$

est bien définie et est une mesure sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$ . Indication : on essaiera d'exprimer  $\nu$  comme la somme de trois mesures. (Solution p. 46.)

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $h : X \rightarrow Y$  une application. On définit la collection

$$\mathcal{B} = \{B \subset Y \mid h^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

et la fonction  $\mu \circ h^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$  par

$$\mu \circ h^{-1}(B) = \mu(h^{-1}(B)).$$

**Question 1 (•)** Montrer que  $\mathcal{B}$  est une tribu. (Solution p. 46.)

**Question 2 (•)** Montrer que  $\mu \circ h^{-1}$  est une mesure sur  $\mathcal{B}$ ; on l'appelle la *mesure image de  $\mu$  par  $h$* . (Solution p. 46.)

**Question 3 (•••)** Montrer que la fonction  $f : Y \rightarrow [-\infty, \infty]$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable si et seulement si  $f \circ h$  est  $\mathcal{A}$ -mesurable. Montrer ensuite que  $f : Y \rightarrow [-\infty, +\infty]$  est  $\mu \circ h^{-1}$ -intégrable si et seulement si  $f \circ h$  est  $\mu$ -intégrable et qu'alors,

$$\int_Y f(y) (\mu \circ h^{-1})(dy) = \int_X (f \circ h)(x) \mu(dx).$$

(Solution p. 47.)

## Complétion d'une mesure

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. On note  $A \Delta B$  la différence symétrique de deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  de  $X$ , c'est-à-dire l'ensemble défini par

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

On note  $\mathcal{N}$  la collection des ensembles négligeables pour  $\mu$  :

$$\mathcal{N} = \{N \subset X \mid \text{il existe } A \in \mathcal{A} \text{ tel que } N \subset A \text{ et } \mu(A) = 0.\}.$$

**Question 1 (••)** Montrer que la collection  $\overline{\mathcal{A}}$  définie par

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \Delta N \mid A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$$

est une tribu. (Solution p. 48.)

**Question 2 (•••)** Montrer que la mesure  $\mu$  peut être étendue d'une façon unique en une mesure  $\overline{\mu}$  définie sur  $\overline{\mathcal{A}}$ . (Solution p. 48.)

## Approximation par des ensembles mesurables (hors-programme)

Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ .

**Question 1 (••••)** Montrer qu'il existe un ensemble  $\lambda^*$ -mesurable  $B$  contenant  $A$  et tel que  $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$ . (Solution p. 49.)

**Question 2 (••••)** A quelle condition portant sur  $\lambda^*(B \setminus A)$  l'ensemble  $A$  est-il  $\lambda^*$ -mesurable ? (Solution p. 50.)

## Mesure intérieure (hors-programme)

Soit  $A$  un ensemble borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $P$  un pavé compact de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $A$ . On appelle *mesure intérieure de  $A$*  la grandeur

$$\lambda_*(A) = \lambda^*(P) - \lambda^*(P \setminus A)$$

où  $\lambda^*$  désigne la mesure extérieure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Question 1 (••••)** Montrer que la définition de  $\lambda_*(A)$  ne dépend pas du choix du pavé  $P$ . (Solution p. 50.)

**Question 2 (••••)** Montrer que  $\lambda_*(A) \leq \lambda^*(A)$ , avec égalité si  $A$  est  $\lambda^*$ -mesurable. (Solution p. 50.)

**Question 3 (••••)** Montrer la réciproque de la question précédente : si  $A \subset \mathbb{R}^n$  est borné et  $\lambda_*(A) = \lambda^*(A)$ , alors  $A$  est  $\lambda^*$ -mesurable. (Solution p. 51.)

## Solutions

**Ensemble des parties** Comme  $A \in \mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$  si et seulement si  $A \subset X$ , prouver que  $\mathcal{A}$  est une tribu de  $X$  équivaut à établir

1.  $\emptyset \subset X$ .
2. Si  $A \subset X$ ,  $A^c = X \setminus A \subset X$ .
3. Si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A_k \subset X$ , alors  $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \subset X$ .

et ces trois propriétés sont clairement satisfaites.

**Ensembles fermés** Non. Par exemple, le singleton  $\{0\}$  est un ensemble fermé de  $\mathbb{R}^n$ , mais son complémentaire  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  n'est pas fermé.

**Tribu née sous  $X$**  Il suffit de chercher “le plus grand” ensemble (avec comme relation d'ordre l'inclusion) dans la collection  $\mathcal{A}$ . En effet, tous les ensembles  $A$  de  $\mathcal{A}$  sont inclus dans  $X$ ; de plus  $\emptyset \in \mathcal{A}$  et comme la tribu  $\mathcal{A}$  est fermée par passage au complémentaire,  $X \setminus \emptyset = X \in \mathcal{A}$ .

**Opérations ensemblistes** Soient  $A$  et  $B$  des ensembles de  $\mathcal{A}$ . La suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par  $A_0 = A$ ,  $A_1 = B$  et  $A_k = \emptyset$  si  $k \geq 2$  est composée d'ensembles de  $\mathcal{A}$ . Or,  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = A \cup B$  donc  $A \cup B \in \mathcal{A}$ . L'ensemble  $A \cap B$  vérifie  $A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B))$ , il appartient donc également à  $\mathcal{A}$ . Finalement, on a  $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ , donc  $A \setminus B$  appartient également à  $\mathcal{A}$ .

**Intersection dénombrable** Si pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a  $A_k \in \mathcal{A}$ , alors comme la tribu  $\mathcal{A}$  est fermée par complémentation,  $X \setminus A_k \in \mathcal{A}$ . Comme  $\mathcal{A}$  est fermée par union dénombrable,  $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}$ ; son complémentaire dans  $X$  appartient donc également à  $\mathcal{A}$ . Or,

$$X \setminus \left( \bigcup_{k=0}^{+\infty} (X \setminus A_k) \right) = \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k,$$

donc l'intersection des  $A_k$  appartient à  $\mathcal{A}$ .

### Intersection de tribus I

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}_1$  et  $\emptyset \in \mathcal{A}_2$  donc  $\emptyset \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ .
2. Si  $A \in \mathcal{A}_1$  et  $A \in \mathcal{A}_2$ , alors  $A^c \in \mathcal{A}_1$  et  $A^c \in \mathcal{A}_2$ , donc  $A^c \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ .
3. Si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A_k \in \mathcal{A}_1$  et  $A_k \in \mathcal{A}_2$  alors  $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}_1$  et  $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}_2$ , donc  $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ .

**Intersection de tribus II** La collection  $\mathcal{A} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$  est une tribu quel que soit l'ensemble d'indexation  $I$  et sa cardinalité. En effet :

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}_i$  pour tout  $i \in I$  donc  $\emptyset \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ .
2. Si  $A \in \mathcal{A}_i$  pour tout  $i \in I$ , alors  $A^c \in \mathcal{A}_i$  pour tout  $i \in I$ , donc  $A^c \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ .
3. Si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A_k \in \mathcal{A}_i$  pour tout  $i \in I$ , alors  $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}_i$  pour tout  $i \in I$ , donc  $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ .

**Les mesures sont (finiment) additives** Etendons la suite finie des  $A_k$  en posant  $A_k = \emptyset$  quand  $k \geq n+1$ . En combinant la  $\sigma$ -additivité de  $\mu$  et sa nullité en 0, on obtient

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=0}^n \mu(A_k).$$

**Monotonie** L'ensemble  $B \setminus A = B \cap A^c$  appartient à  $\mathcal{A}$ , est disjoint de  $A$  et son union avec  $A$  est  $B$ . Donc comme  $\mu$  est finiment additive (p. 7), on a

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

Comme  $\mu(B \setminus A) \geq 0$ , on en déduit que  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

**Cas dégénéré** Oui, il y a par exemple la fonction qui associe à tout ensemble  $A \in \mathcal{A}$  la valeur  $\mu(A) = +\infty$ . Si  $\mu$  n'est pas nulle en 0, par  $\sigma$ -additivité

$$\mu(\emptyset) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \emptyset\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(\emptyset)$$

donc on a nécessairement  $\mu(\emptyset) = +\infty$ .

**Ca commence par un  $\mathbb{P}$**  La mesure  $\mu$  est une probabilité. En effet, comme  $\mu(X) = 1$ , par monotonie de la mesure (p. 7), pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , comme  $A \subset X$ ,  $\mu(A) \leq 1$ . Donc, comme toute mesure est positive,  $\mu(A) \in [0, 1]$ . La mesure  $\mu$  est également  $\sigma$ -additive ; c'est donc une (mesure de) probabilité. Réciproquement, toute probabilité est une mesure : elle est positive,  $\sigma$ -additive, et comme elle est finie,

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \emptyset\right) = \sum_{k=0} \mathbb{P}(\emptyset),$$

donc nécessairement  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$  ; elle est donc nulle en 0 et c'est bien une mesure.

**Trace d'une mesure** La fonction  $\mu|_A$ , définie sur  $\mathcal{A}$ , est bien à valeurs dans  $[0, +\infty]$ . De plus,

$$\mu|_A(\emptyset) = \mu(A \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$$

donc  $\mu|_A$  est nulle en 0. Finalement, si les ensembles  $A_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  de  $\mathcal{A}$  sont disjoints deux à deux, alors les ensembles  $A \cap A_k$  sont également disjoints deux à deux donc

$$\begin{aligned} \mu|_A\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) &= \mu\left(A \cap \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A \cap A_k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A \cap A_k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mu|_A(A_k). \end{aligned}$$

La fonction  $\mu|_A$  est donc une mesure sur  $(X, \mathcal{A})$ .

**Somme de mesures** On a bien  $\mu_1 + \mu_2 : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ . De plus,

$$(\mu_1 + \mu_2)(\emptyset) = \mu_1(\emptyset) + \mu_2(\emptyset) = 0 + 0 = 0.$$

Finalement, si la suite  $A_k \in \mathcal{A}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  est formée d'ensembles deux à deux disjoints, alors

$$\begin{aligned}
 (\mu_1 + \mu_2) \left( \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right) &= \mu_1 \left( \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right) + \mu_2 \left( \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mu_1(A_k) + \sum_{k=0}^{+\infty} \mu_2(A_k) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} (\mu_1(A_k) + \mu_2(A_k)) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} (\mu_1 + \mu_2)(A_k)
 \end{aligned}$$

**Mesure de Dirac** Comme pour tout  $x \in X$ , on  $x \notin \emptyset$ , il s'ensuit que  $\delta_x(\emptyset) = 0$ . De plus, si les  $A_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) sont des sous-ensembles de  $X$  disjoints deux à deux, soit aucun d'entre eux ne contient  $x$ , auquel cas

$$\delta_x \left( \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right) = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k) = 0$$

soit exactement l'un d'entre eux contient  $x$ , auquel cas

$$\delta_x \left( \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right) = 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k) = 1.$$

**Et en changeant de point de vue ?** Comme  $\delta_x(A) = 1$  si  $x \in A$  et 0 sinon, on a  $\delta_x(A) = 1_A(x)$ .

**Mesure de comptage** Comme l'ensemble vide ne contient aucun élément, on a  $c(\emptyset) = 0$ . De plus, si les ensembles  $A_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) sont disjoints deux à deux, alors le nombre – fini ou infini – d'éléments distincts de  $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$  est la somme des éléments des  $A_k$ , c'est-à-dire

$$c \left( \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} c(A_k).$$

La mesure de comptage est bien une mesure.

**Négligeable pour la mesure de comptage** Un ensemble  $A \subset \mathcal{P}(X)$  est de mesure de comptage nulle si et seulement s'il est vide. Donc il existe un unique ensemble contenu dans un ensemble de mesure nulle : l'ensemble vide.



**Négligeable pour la mesure de Dirac** Un ensemble  $A \subset \mathcal{P}(X)$  est de mesure de Dirac en  $x$  nulle si et seulement s'il ne contient pas  $x$ . Un ensemble  $N$  peut être inclus dans un tel ensemble  $A$  si et seulement s'il ne contient pas lui-même le point  $x$ . Donc un ensemble est  $\delta_x$ -négligeable si et seulement s'il ne contient pas  $x$ .

**Négligeable et mesurable** Si  $N$  est mesurable et de mesure nulle, alors  $N \subset N$  et  $\mu(N) = 0$ ;  $N$  est donc négligeable. Réciproquement, si un ensemble  $N$  est négligeable et mesurable alors  $N \in \mathcal{A}$  et il existe  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $N \subset A$  et  $\mu(A) = 0$ . Comme  $\mu$  est monotone (p. 7), on a également  $\mu(N) = 0$ ;  $N$  est donc de mesure nulle.

**Mesurabilité et ensemble des parties de  $X$**  Toutes les fonctions  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  sont  $\mathcal{A}$ -mesurables. En effet, l'image réciproque de tout fermé par  $f$  appartient bien à  $\mathcal{A}$  puisque  $\mathcal{A}$  contient tous les sous-ensembles de  $X$ .

**Fonction caractéristique** A la condition que  $A \in \mathcal{A}$ , c'est-à-dire que  $A$  soit mesurable. En effet, si  $f$  est mesurable, alors comme  $A = f^{-1}(\{1\})$ , il est nécessaire que  $A$  soit mesurable. Réciproquement, si  $A$  est mesurable, quel que soit  $F$  fermé de  $[-\infty, +\infty]$ , en énumérant les cas, et selon que 0 et 1 appartiennent ou non à  $F$ , on réalise que  $f^{-1}(F)$  est l'un des 4 ensembles suivants :  $\emptyset$ ,  $A$ ,  $A^c$ , ou  $X$ . Dans tous les cas,  $f^{-1}(F)$  est mesurable.

**Trace de fonction** La fonction  $f$  peut être approximée par des fonctions étagées positives (p. 12) : elle est la limite simple d'une suite de fonctions  $f_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) de la forme

$$f_j = \sum_{k=1}^{n_j} y_k^j 1_{A_k^j},$$

où les ensembles  $A_k^j$  sont mesurables et les réels  $y_k^j$  positifs. Comme  $A$  est mesurable, pour tout  $j$  et  $k$ , l'ensemble  $A \cap A_k^j$  est mesurable et donc les fonctions

$$1_A f_j = \sum_{k=1}^{n_j} y_k^j 1_{A \cap A_k^j}$$

sont également mesurables. Elles convergent simplement vers  $1_A f$  quand  $j$  tend vers  $+\infty$ ; par conséquent (p. 11), la fonction  $1_A f$  est mesurable.

**Somme de fonctions** Les fonctions  $f$  et  $g$  peuvent être approximées par des fonctions étagées positives (p. 12) : elle sont les limites simples de suites de

fonctions  $f_j$  et  $g_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) de la forme

$$f_j = \sum_{k=1}^{n_j} y_k^j 1_{A_k^j} \quad \text{et} \quad g_j = \sum_{l=1}^{m_j} z_l^j 1_{B_l^j}$$

où les ensembles  $A_k^j$  et  $B_l^j$  sont mesurables et les réels  $y_k^j$  et  $z_l^j$  sont positifs. La somme

$$f_j + g_j = \sum_{k=1}^{n_j} y_k^j 1_{A_k^j} + \sum_{l=1}^{m_j} z_l^j 1_{B_l^j}$$

est (étagée positive et) mesurable (elle s'écrit comme une somme pondérée par des coefficients réels positifs des fonctions caractéristiques des ensembles  $A_k^j \cap B_l^j$ ). De plus la suite  $f_j + g_j$  converge simplement vers  $f + g$  quand  $j$  tend vers  $+\infty$ ; par conséquent (p. 11), la fonction  $f + g$  est mesurable.

**Calculs et infinis** La somme pose un problème quand  $f(x) = +\infty$  et  $g(x) = -\infty$  (ou la situation inverse). Le produit n'est pas non plus défini quand l'un des termes est nul et l'autre est infini. Par contre, le maximum de  $f(x)$  et de  $g(x)$  est toujours bien défini, même si  $f$  et  $g$  prennent leur valeurs dans  $[-\infty, +\infty]$ .

**Combinaison linéaire** La fonction  $x \in [-\infty, +\infty] \rightarrow \lambda x \in [-\infty, +\infty]$  est bien définie et continue, donc  $\lambda f$  est mesurable par composition par une fonction continue (p. 14).

Quand à  $f + g$ , on peut remarquer que comme  $f$  et  $g$  sont positives,  $f(x) + g(x) = \max(f(x), 0) + \max(g(x), 0)$ . Or la fonction  $(x, y) \in [-\infty, +\infty]^2 \rightarrow \max(x, 0) + \max(y, 0) \in [-\infty, +\infty]$  est bien définie et continue donc  $f + g$  est continue par composition par une fonction continue (p. 14).

**Intégrale et mesures de Dirac** Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $f_j$  peut s'écrire comme  $f_j = \sum_{k=1}^n y_k 1_{A_k}$ , où  $y_k > 0$  et  $A_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Donc, en utilisant successivement la linéarité de l'intégrale et le lien entre intégrale et mesure, on obtient

$$\int f_j \delta_x = \int \left( \sum_{k=1}^n y_k 1_{A_k} \right) \delta_x = \sum_{k=1}^n y_k \left( \int 1_{A_k} \delta_x \right) = \sum_{k=1}^n y_k \delta_x(A_k)$$

et comme  $\delta_x(A_k) = 1_{A_k}(x)$ ,

$$\int f_j \delta_x = \sum_{k=1}^n y_k 1_{A_k}(x) = f_j(x).$$

Par conséquent, comme  $f_j(x) \rightarrow f(x)$  quand  $j \rightarrow +\infty$ , la propriété de convergence monotone garantit que

$$\int f \delta_x = f(x).$$

**Absolue intégrabilité** Si la fonction  $f$  est intégrable alors  $f_+$  et  $f_-$  sont intégrables, donc  $f_+ + f_-$ , c'est-à-dire  $|f|$ , est également intégrable.

**Intégrabilité de fonctions étagées** Notons  $(y_k)_+ = \max(y_k, 0)$  et  $(y_k)_- = -\min(y_k, 0)$ ; les parties positives et négatives de  $f$  se mettent sous la forme

$$f_+ = \sum_{k=1}^n (y_k)_+ 1_{A_k} \quad \text{et} \quad f_- = \sum_{k=1}^n (y_k)_- 1_{A_k}.$$

La fonction  $f$  est donc intégrable si et seulement si

$$\int f_+ \mu = \sum_k (y_k)_+ \mu(A_k) < +\infty \quad \text{et} \quad \int f_- \mu = \sum_k (y_k)_- \mu(A_k) < +\infty$$

ou de façon équivalente si leur somme est finie, ce qui se réécrit comme

$$\sum_k (y_k)_+ \mu(A_k) + \sum_k (y_k)_- \mu(A_k) = \sum_k |y_k| \mu(A_k) < +\infty.$$

La valeur de son intégrale est alors

$$\int f \mu = \int f_+ \mu - \int f_- \mu = \sum_k (y_k)_+ \mu(A_k) - \sum_k (y_k)_- \mu(A_k) = \sum_k y_k \mu(A_k).$$

**Vers l'indéfini et au-delà** On peut considérer (une des définitions de) la fonction signe  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , caractérisée par  $f(x) = -1$  si  $x < 0$ ,  $f(0) = 0$  et  $f(x) = 1$  si  $x > 0$ . La fonction  $f$  est continue par morceaux, donc “classiquement” mesurable, c'est-à-dire mesurable pour la tribu de Lebesgue. En examinant successivement  $f_+$  et  $f_-$  on peut se convaincre que ces fonctions (qui sont étagées) ont pour intégrales (par rapport à la mesure de Lebesgue)  $+\infty$ ; la fonction  $f$  n'est donc pas intégrable.

## Intégrales et séries

**Question 1** La tribu associée à la mesure de comptage  $c$  sur  $\mathbb{N}$  est l'ensemble des parties de  $\mathbb{N}$  notée  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Or toute fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow [-\infty, +\infty]$  est  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ -mesurable. En effet, quel que soit l'ouvert  $U \subset [-\infty, +\infty]$ ,  $f^{-1}(U)$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$ , c'est-à-dire un élément de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

**Question 2** Toute fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$  est  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ -mesurable. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_k : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$  définie par

$$f_k(n) = \begin{cases} f(n) & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est également mesurable, positive et étagée (elle prend au plus  $k + 1$  valeurs différentes). De plus, il est clair que la suite des  $f_k$  est croissante et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(n) = f(n)$ . La propriété de convergence monotone de l'intégrale nous assure alors que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k c = \int f c.$$

Or, comme la fonction étagée  $f_k$  prend la forme

$$f_k = \sum_{n=0}^k f(n) 1_{\{n\}}$$

et que le lien entre intégrale et mesure nous fournit

$$\int 1_{\{n\}} c = c(\{n\}) = 1,$$

la linéarité de l'intégrale nous permet de conclure que

$$\int f_k c = \sum_{n=0}^k f(n).$$

Par conséquent,

$$\int f c = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

**Question 3** Toute fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow [-\infty, +\infty]$  est  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ -mesurable. Elle est  $c$ -intégrable si  $f_+$  et  $f_-$  ont des intégrales finies, c'est-à-dire si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_+(n) < +\infty \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} f_-(n) < +\infty,$$

ce qui est le cas si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_+(n) + f_-(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} |f|(n) < +\infty,$$

autrement dit si et seulement si la suite des  $f(n)$  est absolument convergente. Dans ce cas, on a

$$\int f c = \int f_+ c - \int f_- c = \sum_{n=0}^{+\infty} f_+(n) - \sum_{n=0}^{+\infty} f_-(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

**Question 4** Le théorème de convergence dominée dans le cas de la mesure de comptage  $c$  sur  $\mathbb{N}$  devient le résultat suivant sur les (suites de) séries :

Soit  $f_k : \mathbb{N} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , une suite de fonctions dominées par la fonction intégrable  $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$  c'est-à-dire telles que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq |f_k(n)| \leq g(n) \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} g(n) < +\infty.$$

Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_k(n) \rightarrow f(n)$  quand  $k \rightarrow +\infty$ , alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

## Mesure définie par une intégrale

**Question 1** Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , la fonction  $1_A$  est mesurable, car l'image réciproque par  $1_A$  d'un ouvert de  $[0, +\infty]$  est soit  $A$  soit  $\emptyset$ . Si  $f : X \rightarrow [0, +\infty[$  est mesurable, on peut l'écrire comme une limite simple et croissante de fonctions  $f_k : X \rightarrow [0, +\infty[$  mesurables et étagées. La suite  $1_A f_k$  est de même nature et converge simplement vers  $1_A f$ ; la fonction  $1_A f$  est donc mesurable.

**Question 2** La fonction notée  $f\mu$  définie par

$$f\mu : A \in \mathcal{A} \mapsto \int_A f \mu := \int 1_A f \mu \in [0, +\infty]$$

est de tout évidence à valeurs dans  $[0, +\infty]$  et nulle en zéro.

Si les ensembles de la suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont mesurables et disjoints, les fonctions

$$g_k = 1_{\cup_{j=0}^k A_k} = \sum_{j=0}^k 1_{A_k}$$

forment une suite croissante de fonctions mesurables et  $g_k f$  converge simplement vers  $1_{\cup_{k=0}^{+\infty} A_k} f$ . Par le théorème de croissance monotone, on a donc

$$f\mu \left( \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right) = \int 1_{\cup_{k=0}^{+\infty} A_k} f \mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \int 1_{A_k} f \mu = \sum_{k=0}^{+\infty} f\mu(A_k).$$

La fonction  $f\mu$  est donc  $\sigma$ -additive. C'est donc une mesure sur  $(X, \mathcal{A})$ .

## Mesure image

**Question 0** Pour tout  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $h^{-1}(A) \cap ]-1, 1[ = A \cap ]-1, 1[$ ,  $h^{-1}(A) \cap ]-\infty, -1] = ]-\infty, -1]$  ou  $\emptyset$  selon que  $-1$  appartienne ou non à  $A$  et  $h^{-1}(A) \cap [+1, +\infty[ = [+1, +\infty[$  ou  $\emptyset$  selon que  $+1$  appartienne ou non à  $A$ .

Par conséquent, si  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ , l'ensemble

$$h^{-1}(A) = (h^{-1}(A) \cap ]-\infty, -1]) \cup (h^{-1}(A) \cap ]-1, 1[) \cup (h^{-1}(A) \cap [+1, +\infty[)$$

est l'union de trois ensembles de  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ ; il appartient donc à  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  et la fonction  $\nu$  est bien définie.

En utilisant l'additivité de  $\mu$ , on constate alors que

$$\nu(A) = \mu(h^{-1}(A)) = \alpha\delta_{-1}(A) + \mu|_{]-1, 1[}(A) + \beta\delta_1(A)$$

où  $\alpha = \mu(]-\infty, -1])$ ,  $\beta = \mu([+1, +\infty[)$  et  $\mu|_{]-1, 1[}$  est la mesure trace de  $\mu$  sur  $]-1, 1[$ , définie par  $\mu|_{]-1, 1[}(A) = \mu(]-1, 1[ \cap A)$ . La fonction  $\nu(A)$  est donc une mesure sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$  comme somme de trois mesures sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$ .

**Question 1** L'ensemble  $\mathcal{B}$  est une tribu; en effet :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$  et  $\emptyset = h^{-1}(\emptyset)$ , donc  $\emptyset \in \mathcal{B}$ .
- Si  $B \in \mathcal{B}$ , l'ensemble  $A = h^{-1}(B)$  appartient à  $\mathcal{A}$ . Le complémentaire  $Y \setminus B$  de  $B$  dans  $Y$  vérifie  $h^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus h^{-1}(B) = X \setminus A$  et appartient donc à  $\mathcal{A}$ . L'ensemble  $Y \setminus B$  appartient donc à  $\mathcal{B}$ .
- Si les ensembles  $B_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  appartiennent à  $\mathcal{B}$ , comme  $h^{-1}(\cup_k B_k) = \cup_k h^{-1}(B_k)$ , cet ensemble appartient à  $\mathcal{A}$ . L'union dénombrable  $\cup_k B_k$  appartient donc à  $\mathcal{B}$ .

**Question 2** Montrons que  $\mu \circ h^{-1}$  est une mesure sur  $\mathcal{B}$ .

- On a  $\mu \circ h^{-1}(\emptyset) = \mu(h^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ .
- Si les ensembles  $B_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , appartiennent à  $\mathcal{B}$  et sont disjoints, alors les ensembles  $h^{-1}(B_k)$  appartiennent à  $\mathcal{A}$ , et sont disjoints. Comme  $h^{-1}(\cup_k B_k) = \cup_k h^{-1}(B_k)$ , on a

$$\begin{aligned} \mu \circ h^{-1} \left( \bigcup_k B_k \right) &= \mu \left( h^{-1} \left( \bigcup_k B_k \right) \right) \\ &= \mu \left( \bigcup_k h^{-1}(B_k) \right) \\ &= \sum_k \mu(h^{-1}(B_k)) \\ &= \sum_k \mu \circ h^{-1}(B_k) \end{aligned}$$

**Question 3** Montrons tout d'abord que la fonction  $f : Y \rightarrow [-\infty, +\infty]$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable si et seulement si  $f \circ h$  est  $\mathcal{A}$ -mesurable. Par définition,  $f$  est mesurable si pour tout ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}$ , l'ensemble  $f^{-1}(U)$  appartient  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire si et seulement si

$$h^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ h)^{-1}(U) \in \mathcal{A},$$

c'est-à-dire si et seulement si  $f \circ h$  est mesurable.

Comme  $(f \circ h)_+ = f_+ \circ h$  et  $(f \circ h)_- = f_- \circ h$ , il nous suffit de montrer que pour toute fonction mesurable  $f : Y \rightarrow [0, +\infty]$ , on a

$$\int (f \circ h) \mu = \int f(\mu \circ h^{-1})$$

pour pouvoir conclure que  $f : Y \rightarrow [-\infty, +\infty]$  est  $\mu \circ h^{-1}$ -intégrable si et seulement si  $f \circ h$  est  $\mu$ -intégrable et que l'égalité ci-dessus est valable également dans le cas des fonctions signées.

Or pour une telle fonction positive  $f$ , il existe une suite croissante de fonctions  $f_k$  étagées, positives et mesurables convergeant simplement vers  $f$ , et l'on a

$$\int f(\mu \circ h^{-1}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k(\mu \circ h^{-1}).$$

Si à  $k$  fixé, on explicite  $f_k$  comme

$$f_k = \sum_{j=1}^n y_j 1_{B_j}$$

où les  $B_j$  sont des ensembles mesurables et  $y_j > 0$ , alors

$$\begin{aligned} \int f_k(\mu \circ h^{-1}) &= \sum_{j=1}^n y_j (\mu \circ h^{-1})(B_j) \\ &= \sum_{j=1}^n y_j \mu(h^{-1}(B_j)) \\ &= \int \sum_{j=1}^n y_j 1_{h^{-1}(B_j)} \mu \\ &= \int f \circ h^{-1} \mu \end{aligned}$$

Les fonctions  $f_k \circ h$  sont étagées, positives et mesurables, leur suite est croissante et converge simplement vers  $f \circ h$ . Par le théorème de convergence monotone (p. 20), on a donc comme souhaité

$$\int f(\mu \circ h^{-1}) = \int (f \circ h) \mu.$$

## Complétion d'une mesure

**Question 1** Il est clair que  $\emptyset$  appartient à  $\overline{\mathcal{A}}$ , comme différence symétrique entre  $\emptyset$  et  $\emptyset$ . Si  $B = A \Delta N$  appartient à  $\overline{\mathcal{A}}$ , alors

$$B^c = ((A \cap N^c) \cup (A^c \cap N))^c = (A^c \cup N) \cap (A \cup N^c).$$

Comme  $B^c = X \cap B^c = (A \cup A^c) \cap B^c$ , par distributivité on a

$$\begin{aligned} B^c &= (A^c \cap A) \cup (A^c \cap N^c) \cup (N \cap A) \cup (N \cap N^c) \\ &= (A^c \cap N^c) \cup (A \cap N) \\ &= ((A^c) \cap N^c) \cup ((A^c)^c \cap N) \\ &= A^c \Delta N \end{aligned}$$

et par conséquent  $B^c \in \overline{\mathcal{A}}$ .

Si les  $A_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , appartiennent à  $\mathcal{A}$  et les  $N_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , appartiennent à  $\mathcal{N}$ , alors on pourra se convaincre que

$$(\cup_k A_k) \setminus (\cup_k N_k) \subset \cup_k (A_k \Delta N_k) \subset (\cup_k A_k) \cup (\cup_k N_k),$$

ce qui prouve que

$$\cup_k (A_k \Delta N_k) = (\cup_k A_k) \Delta M \text{ avec } M \subset N := \cup_k N_k.$$

Comme  $N_k \subset B_k \in \mathcal{A}$  avec  $\mu(B_k) = 0$ ,

$$N = \cup_k N_k \subset \cup_k B_k \in \mathcal{A},$$

avec  $\mu(\cup_k B_k) = 0$  par  $\sigma$ -additivité de  $\mu$ . L'ensemble  $N$  (et donc l'ensemble  $M$ ) appartient donc à  $\mathcal{N}$ . Comme  $\cup_k A_k \in \mathcal{A}$ , on en déduit que  $\overline{\mathcal{A}}$  est stable par union dénombrable. Cette collection contient l'ensemble vide, est fermée par passage au complémentaire et par union dénombrable; c'est donc une tribu.

**Question 2** Supposons que  $\bar{\mu}$  soit une mesure sur  $\overline{\mathcal{A}}$  qui prolonge  $\mu$ . Alors, nécessairement, pour tout ensemble  $N \in \mathcal{N}$ , on a  $\bar{\mu}(N) = 0$ . En effet, il existe un  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $N \subset A$  et  $\mu(A) = 0$ , donc par croissance de  $\bar{\mu}$ ,

$$\bar{\mu}(N) \subset \bar{\mu}(A) = \mu(A) = 0.$$

Soit alors  $A \in \mathcal{A}$  et  $N \in \mathcal{N}$ . Les ensembles  $N_1 := A \cap N$  et  $N_2 = A^c \cap N$  sont inclus dans  $N$  et donc appartiennent à  $\mathcal{N}$ , par conséquent

$$\bar{\mu}(A \Delta N) = \bar{\mu}((A \setminus N_1) \cup N_2) = \bar{\mu}(A) - \bar{\mu}(N_1) + \bar{\mu}(N_2) = \bar{\mu}(A).$$

Cette équation définit uniquement  $\bar{\mu}$ ; il faut toutefois s'assurer que cette définition est cohérente, c'est-à-dire que si  $A \Delta N = B \Delta M$  où  $A, B \in \mathcal{A}$  et  $N, M \in \mathcal{N}$ , alors  $\mu(A) = \mu(B)$ . En utilisant l'associativité de  $\Delta$ , on montre que

$$A \Delta (N \Delta M) = (A \Delta N) \Delta M = (B \Delta M) \Delta M = B \Delta (M \Delta M) = B.$$



Par conséquent,  $N \Delta M \in \mathcal{A}$ , et comme  $N \Delta M \subset N \cup M$ , on en déduit que  $\mu(N \Delta M) = 0$ , et donc

$$\mu(B) = \mu(A) - \mu(A \cap (N \Delta M)) + \mu(A^c \cap (N \Delta M)) = \mu(A).$$

Il est ensuite nécessaire de prouver que  $\bar{\mu}$  est bien une mesure. Soit  $A_k \in \mathcal{A}$  et  $N_k \in \mathcal{N}$  deux suites d'ensembles tels que les  $A_k \Delta N_k$  soient deux à deux disjoints. Soit  $M_k$  un ensemble de  $\mathcal{A}$  contenant  $N_k$  et tel que  $\mu(M_k) = 0$ . L'ensemble  $B_k := A_k \setminus M_k$  appartient  $\mathcal{A}$  et  $\mu(B_k) = \mu(A_k)$ ; de plus, comme  $B_k \subset A_k \Delta N_k$ , les  $B_k$  sont disjoints deux à deux. On a déjà vu à la question précédente que

$$\bar{\mu}(\cup_k A_k \Delta N_k) = \bar{\mu}((\cup_k A_k) \Delta N) \quad \text{où } N \in \mathcal{N},$$

donc

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\cup_k A_k \Delta N_k) &= \mu(\cup_k A_k) = \mu(\cup_k B_k) \\ &= \sum_k \mu(B_k) = \sum_k \mu(A_k) = \sum_k \bar{\mu}(A_k \Delta N_k). \end{aligned}$$

La fonction  $\bar{\mu}$  est donc  $\sigma$ -additive.

## Approximation par des ensembles mesurables (hors-programme)

**Question 1** Par définition de  $\lambda^*(A)$ , pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , il existe une collection dénombrable de pavés  $P_k^j$  tels que

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda(P_k^j) \leq \lambda^*(A) + 2^{-j}.$$

Les ensembles  $B_j = \cup_k P_k^j$  sont  $\lambda^*$ -mesurables comme unions dénombrables d'ensembles mesurables. De plus, comme  $A \subset B_j$ , et par  $\sigma$ -subadditivité de  $\lambda^*$

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B_j) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^*(P_k^j) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda(P_k^j) \leq \lambda^*(A) + 2^{-j}.$$

L'intersection  $B = \cap_j B_j$  est un ensemble mesurable qui recouvre  $A$  et est contenu dans chaque  $B_j$ ; par conséquent pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\lambda^*(A) \leq \lambda(B) \leq \lambda(B_j) \leq \lambda^*(A) + 2^{-j}.$$

On en déduit donc que  $A \subset B$  et  $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$  avec  $B$  mesurable.

**Question 2** Notons au préalable que si  $\lambda^*(A) = +\infty$ , alors  $A$  est automatiquement mesurable. Dans le cas contraire ( $\lambda^*(A) < +\infty$ ) l'ensemble  $A$  est  $\lambda^*$ -mesurable si et seulement si  $\lambda^*(B \setminus A) = 0$ . En effet, si  $A$  est  $\lambda^*$ -mesurable et de mesure finie, comme  $A \subset B$ , on a

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A^c \cap B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B \setminus A) = \lambda^*(B) + \lambda^*(B \setminus A).$$

Comme la mesure  $\lambda^*(A)$  est finie,  $\lambda^*(B \setminus A) = 0$ . Réciproquement, si  $\lambda^*(B \setminus A) = 0$ , alors  $B \setminus A$  (et donc  $A$ ) est mesurable. En effet, pour tout ensemble  $C$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a d'une part

$$\lambda^*(C) \leq \lambda^*((B \setminus A) \cap C) + \lambda^*((B \setminus A)^c \cap C)$$

par subadditivité de  $\lambda^*$ . D'autre part, comme  $(B \setminus A) \cap C \subset B \setminus A$ ,  $\lambda^*((B \setminus A) \cap C) \leq \lambda^*(B \setminus A) = 0$ . Par ailleurs,  $C \supset (B \setminus A)^c \cap C$ , donc

$$\lambda^*(C) \geq \lambda^*((B \setminus A)^c \cap C) = \lambda^*((B \setminus A) \cap C) + \lambda^*((B \setminus A)^c \cap C).$$

On a donc l'égalité  $\lambda^*(C) = \lambda^*((B \setminus A) \cap C) + \lambda^*((B \setminus A)^c \cap C)$ ; l'ensemble  $B \setminus A$  est donc mesurable, ainsi que  $A = B \setminus (B \setminus A)$ .

## Mesure intérieure (hors-programme)

**Question 1** Pour montrer que la définition de  $\lambda_*(A)$  ne dépend pas du choix du pavé  $P$  contenant  $A$ , il suffit de prouver qu'on peut remplacer  $P$  par un pavé compact  $P'$  contenant  $P$  sans changer la valeur de  $\lambda_*(A)$  (pour toute paire de pavés compacts on peut en effet trouver un pavé compact les contenant).

Comme les pavés compacts  $P$  et  $P'$  sont mesurables (au sens de Carathéodory, pour la mesure extérieure  $\lambda^*$ ), l'ensemble  $P' \setminus P$  l'est également ; on a donc

$$\lambda^*(P') = \lambda^*(P' \setminus P) + \lambda^*(P)$$

et

$$\lambda^*(P' \setminus A) = \lambda^*(P' \setminus P) + \lambda^*(P \setminus A),$$

ce qui établit

$$\lambda^*(P') - \lambda^*(P' \setminus A) = \lambda^*(P) - \lambda^*(P \setminus A).$$

**Question 2** La fonction  $\lambda^*$  étant subadditive, on a

$$\lambda^*(P) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(P \setminus A)$$

et donc  $\lambda_*(A) \leq \lambda^*(A)$ . Si  $A$  est mesurable, l'inégalité initiale devient une égalité et donc  $\lambda_*(A) = \lambda^*(A)$ .

**Question 3** Montrons que la réciproque est également vraie. Soit  $A$  un ensemble borné de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\lambda_*(A) = \lambda^*(A)$ , et soit  $B$  un ensemble quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . Nous cherchons à établir que  $\lambda^*(B) = \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A^c \cap B)$ . Remarquons tout d'abord que si le pavé compact  $P$  – qui est mesurable – contient  $A$ , on a

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(P \cap B) + \lambda^*(P^c \cap B) ;$$

si nous réussissons à établir que

$$\lambda^*(P \cap B) = \lambda^*(A \cap (P \cap B)) + \lambda^*(A^c \cap (P \cap B)),$$

on pourra alors conclure que

$$\begin{aligned} \lambda^*(B) &= \lambda^*(P \cap B) + \lambda^*(P^c \cap B) \\ &= \lambda^*(A \cap (P \cap B)) + \lambda^*(A^c \cap (P \cap B)) + \lambda^*(P^c \cap B) \\ &= \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(P \cap (A^c \cap B)) + \lambda^*(P^c \cap (A^c \cap B)) \\ &= \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A^c \cap B). \end{aligned}$$

Autrement dit, il nous suffit d'établir le résultat cherché quand  $B$  est un ensemble de  $\mathbb{R}^n$  contenu dans le pavé compact  $P$ .

Pour cela, nous exploitons les résultats de l'exercice "Approximation par des ensembles mesurables (p. 49)". A l'ensemble  $A$  on peut associer un sur-ensemble  $\lambda^*$ -mesurable  $B$  tel que  $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$ ; quitte à remplacer  $B$  par  $P \cap B$ , on peut également supposer que  $B \subset P$ . On a

$$\lambda^*(P) = \lambda^*(A) + \lambda^*(P \setminus A) = \lambda^*(B) + \lambda^*(P \setminus B)$$

et donc  $\lambda^*(P \setminus A) = \lambda^*(P \setminus B)$ . D'autre part

$$\begin{aligned} \lambda^*(P) &= \lambda^*(B) + \lambda^*(P \setminus B) \\ &= \lambda^*(A) + \lambda^*(B \setminus A) + \lambda^*(P \setminus B) \\ &= \lambda^*(A) + \lambda^*(B \setminus A) + \lambda^*(P \setminus A) \end{aligned}$$

et donc  $\lambda^*(B \setminus A) = 0$ . Par les résultats de l'exercice "Approximation par des ensembles mesurables (p. 49)", on en déduit que  $A$  est mesurable.

## Références

Hunter, John K. 2011. *Measure Theory*. Department of Mathematics, University of California at Davis. [https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/measure\\_theory/measure\\_theory.html](https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/measure_theory/measure_theory.html).