Prissättning av optioner och den diskreta Black-Scholes modellen

Kandidatavhandling

Robert Sirviö, 013767589
Handledare: Hans-Olav Tylli

5 mars 2014

Innehåll

Kapitel 1

Inledning: Optioner

En option är ett kontrakt mellan två parter; optionsutställare och optionsinnehavare. En *köpoption* (eng. *call option*) ger innehavaren rättigheten att köpa en underliggande tillgång (t.ex. aktier) för ett överenskommet pris inom en viss tid. En *säljoption* (eng. *put option*) ger däremot innehavaren rättigheten att sälja en underliggande tillgång för ett överenskommet pris inom en viss tid. För att ingå kontraktet bör innehavaren betala en av utställaren på förhand definierad avgift; priset av optionen eller optionspremiet. Speciellt för aktieoptioner är avgiften förknippad med mängden aktier som ingår i optionen. Utställaren däremot har en skyldighet att köpa/sälja tillgången till det överenskomna priset om innehavaren besluter att utföra sin rättighet (lösa in optionen). Det överenskomna priset kallas *lösenpriset* (eng. *excercise price, strike price*) och datumet för den sista dagen då optionen kan lösas in kallas *lösendagen* (eng. *expiration date, maturity date*). En *europeisk option* kan lösas in endast vid lösendagen, medan en *amerikansk option* går att lösas in vid vilket tillfälle som helst före lösendagen. I detta examensarbete behandlas enbart europeiska köpoptioner av aktier. Mera om optioner och ovanstående definitioner finns i [1].

Innehavaren av en europeisk köpoption befinner sig i en situation där det är möjligt att göra vinst genom att utnyttja skillnaden mellan aktiepriset på lösendagen och lösenpriset. Vi betecknar

$$
\begin{aligned}
S_T &= \text{aktiepriset vid lösendagen} \\
S &= \text{aktiepriset idag} \\
K &= \text{lösenpriset} \\
X &= \text{antalet aktier som ingår i optionen} \\
P &= \text{priset på optionen}
\end{aligned}
$$

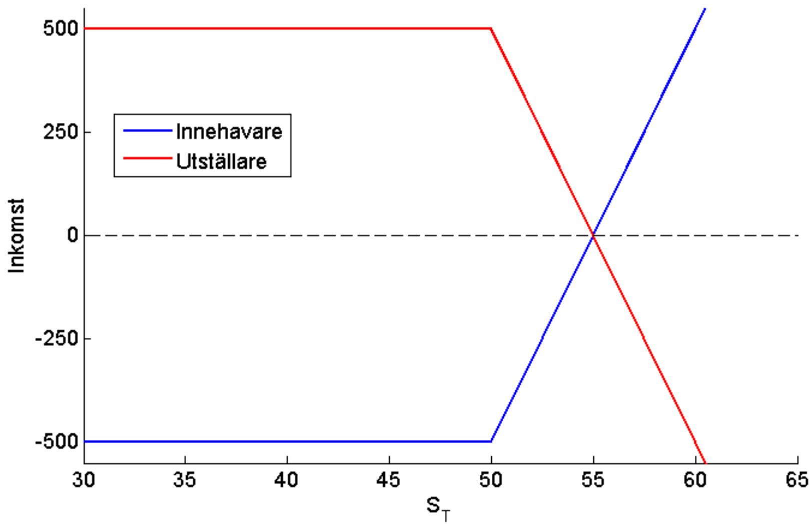
Nu är det klart att om $S_T < K$, så kommer optionen att utgå som värdelös (att köpa aktier för ett pris högre än marknadspriset är en säker förlust). Däremot om $S_T > K$, så är det lönsamt att lösa in optionen och omedelbart sälja aktierna för marknadspriset.Vi förhåller oss likgiltiga till fallet $S_T = K$; båda ageranden leder till samma slutresultat. Innehavarens inkomst är alltså

$$\max\{X(S_T - K - P), -XP)\}.$$

Utställaren har däremot en möjlighet att göra vinst på optionspremiet; då optionen utgår som värdelös undviker utställaren skyldigheten att sälja aktierna åt innehavaren och därmed gör vinst på priset av optionen. Om däremot $S_T > K$, så kommer innehavaren att lösa in optionen och utställaren måste sälja aktierna på ett pris lägre än marknadspriset och därmed utsätter sig för en förlust. Utställarens inkomst är alltså

$$\min\{XP,\ X(P - (S_T - K))\} = \min\{XP,\ X(P + K - S_T)\}.$$

Exempel 1.1. Låt $K = 50$€ , $P = 5$€ och $X = 100$ st. (med S_T, K, P, X definierade som ovan).
Nu om $S_T < 50$€ , så kommer optionen att utgå som värdelös, och om $S_T > 50$€ , så kommer optionen att lösas in. Inkomsten för både innehavaren och utställaren med avseende på aktiepriset vid lösendagen illustreras av figur 1.1



Figur 1.1: Inkomsten med avseende på aktiepriset vid lösendagen

Det råder alltså inget tvivel om optionens värde vid lösendagen. Optionens värdesättning *före* lösendagen är emellertid inte helt trivialt. Målet med prissättningen är att hitta det "rättvisa priset", med andra ord ett pris som är i balanstillstånd. Om till exempel $P + K < S$, så är det möjligt att, genom att sälja kort mängden aktier som ingår i optionen och också köpa optionen, göra säker vinst utan inital investering. Denna möjlighet att, riskfritt och utan initial investering, utnyttja obalansen mellan två marknader kallas *arbitrage*. Anta följande definition av arbitrage i *diskret tid*:

Definition 1.2. Anta en marknadsmodell med $n \in \mathbb{N}$ stycken finansiella instrument. Vi betecknar $\chi_j^t \in \mathbb{R}$ det j:te finansiella instrumentets värde vid tidpunkten $t \in \{0, \ldots, T\}$, $j \in \{0, \ldots, n\}$. Låt $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in \mathbb{R}^n$ vara en investeringsstrategi i modellen. Nu är alltså

$$V_\pi^t = \pi_1 \chi_1^t + \pi_2 \chi_2^t + \ldots + \pi_n \chi_n^t$$

värdet av investeringen vid tidpunkten t. Modellen *möjliggör arbitrage* om det existerar en strategi $\pi \in \mathbb{R}^n$ så att

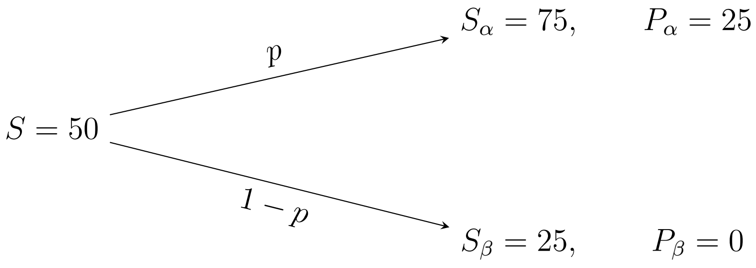
I. $V_\pi^0 = 0$

II. $P(V_\pi^t \geq 0) = 1$ för åtminstone ett $t \in \{0, \ldots, T\}$

III. $P(V_\pi^t > 0) > 0$ för något t för vilket villkor II. gäller.

Ovan beskriver $P(\cdot)$ sannolikheten för en händelse. Om ingen sådan strategi existerar är modellen *arbitragefri*.

Exempel 1.3. Anta att det rådande marknadspriset för en aktie är $S = 50$. Anta ännu att vi med säkerhet vet att priset för aktien vid lösendagen är antingen $S_\alpha = 75$ med sannolikheten p eller $S_\beta = 25$ med sannolikheten $1 - p$, och att det är möjligt att köpa en option för en aktie till priset P med lösenpriset $K = 50$. Därmed kan vi med säkerhet även prissätta optionen vid lösendagen; P_α med sannolikheten p respektive P_β med sannolikheten $1 - p$. Prisutvecklingen ser alltså ut som följer:



Denhär typen av värdeutveckling kallas *binomial* med två tidpunkter. Anta ännu att det är möjligt att låna och utlåna pengar för en ränta $r = 5/4$.

Härnäst anta en investering i aktier och inlåning av pengar enligt strategin (A, B) där $A =$ antalet aktier och $B =$ mängden pengar som är inlånad. Värdeutvecklingen för strategin är alltså

$$\begin{tikzcd} & 75A + \frac{5}{4}B \\ 50A + B \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\ & 25A + \frac{5}{4}B \end{tikzcd}$$

Vi ser att modellen är arbitragefri; om $V^0_{(A,B)} = 0 \Longleftrightarrow B = -50A$ så är

$$V^T_{(A,B)} = \begin{cases} \frac{50A}{2} & \text{med sannolikheten } p \\ \frac{-75A}{2} & \text{med sannolikheten } 1-p \end{cases}$$

alltså är $P(V^T_{(A,B)} < 0) > 0$ då $A \neq 0$. Om $A = 0$ så är $P(V^T_{(A,B)} > 0) = 0$.

Nu väljer vi A och B så att

$$\begin{cases} 75A + \frac{5}{4}B = 25 \\ 25A + \frac{5}{4}B = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}B = 25 - 75A \\ 25A + 25 - 75A = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = -10 \\ A = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Negativa värden för A och B är inte en motstridighet; situationen där $B < 0$ betyder endast inlåning av pengar medan fallet $A < 0$ motsvarar kortsäljning av aktier. Nu har vi alltså att

$$\begin{cases} \frac{1}{2}S_\alpha + r(-10) - P_\alpha = 0 \\ \frac{1}{2}S_\beta + r(-10) - P_\beta = 0. \end{cases}$$

Därmed har vi byggt en strategi i en *arbitragefri* modell som *upprepar* (eng. *replicate*) optionens värde vid lösendagen, alltså är värdet av portföljen lika med värdet av optionen vid tidpunkten $t = T$. Nu har optionsutskrivaren en möjlighet att skydda sig för eventuella förluster om han har råd att investera i portföljen vid $t = 0$, alltså bör $P \geq V^0_{(1/2,-10)}$.

Å andra sidan hindrar inget den motstående aktören från att agera på ett liknande sätt, vilket leder till att det enda möjliga arbitragefria priset för optionen måste tillfredställa investeringens nuvarande värde med strategin $(1/2, -10)$, alltså $P = (1/2) \cdot 50 - 10 = 15$ måste gälla. Detta kan vi även konstatera genom att betrakta strategier som inkluderar optioner som investeringsmöjligheter.
Vi definierar (A, B, C) som en investeringsstrategi, där A och B är definierade på det tidigare beskrivna sättet och C = antalet optioner. Vi visar nu att det inte existerar arbitragestrategier då man köper en option för priset $P = 15$. Vi antar att

$$V^0_{(A,B,1)} = 0 \Longleftrightarrow 50A + B + 15 = 0 \Longleftrightarrow B = -15 - 50A.$$

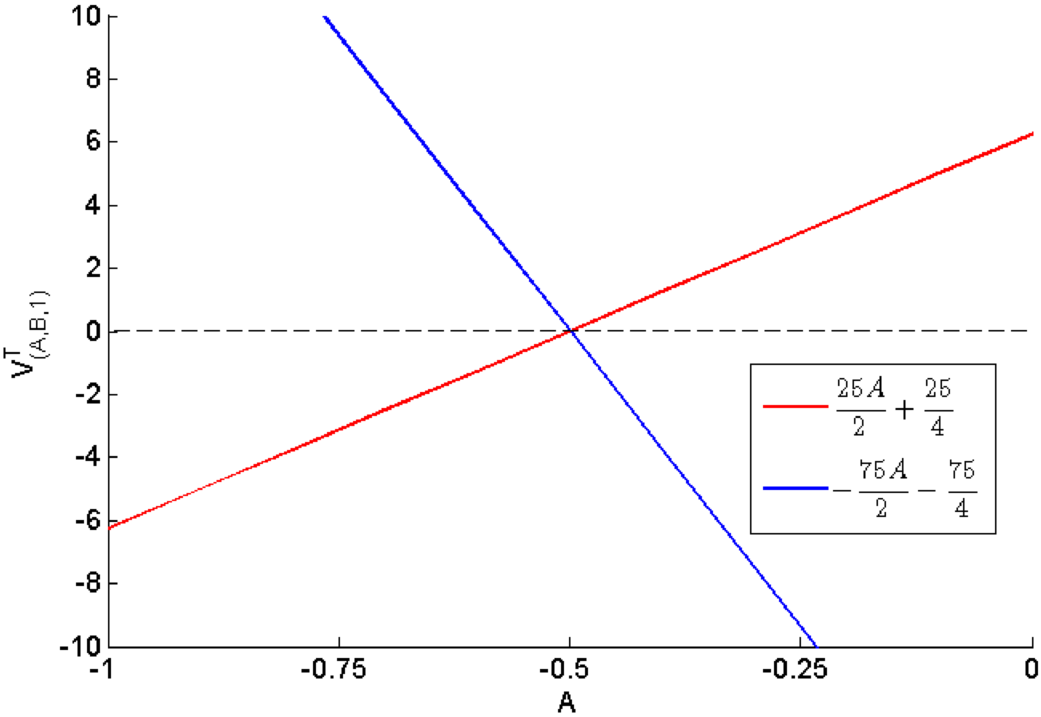
Nu är

$$\begin{aligned} V^T_{(A,B,1)} &= \begin{cases} 75A + \frac{5}{4}B + 25 \quad \text{med sannolikheten } p \\ 25A + \frac{5}{4}B \quad \text{med sannolikheten } 1-p \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{25A}{2} + \frac{25}{4} \quad \text{med sannolikheten } p \\ -\frac{75A}{2} - \frac{75}{4} \quad \text{med sannolikheten } 1-p \end{cases} . \end{aligned}$$

Härnäst undersöker vi rötterna för dessa två möjliga värden för vår portfölj.

$$\begin{cases} \frac{25A}{2} + \frac{25}{4} = 0 \\ -\frac{75A}{2} - \frac{75}{4} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{2 \cdot 25}{25 \cdot 4} = -\frac{1}{2} \\ A = -\frac{2 \cdot 75}{75 \cdot 4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Figur 1.2 illustrerar $V^T_{(A,B,1)}$ med avseende på A.



Figur 1.2: $V^T_{(A,B,1)}$ med avseende på A.

Härmed är det klart att

$$\begin{cases} P\left(V^T_{(A,B,1)} < 0\right) > 0, & A \neq -\frac{1}{2} \\ P\left(V^T_{(A,B,1)} = 0\right) = 1, & A = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

alltså existerar det inga arbitragestrategier då man köper en option för priset $P = 15$.

Vi kan kontrollera ännu vad som händer om priset avviker från ovannämnda: om $P = 15 + a$, $a > 0$, så är en risklös vinst möjlig genom att skriva ut en option och investera enligt strategin $(1/2, -10)$. Totala inkomsten vid $t = 0$ är då $P - (1/2)S - B = 15 + a - 25 + 10 = a > 0$. Strategin $(1/2, -10)$ upprepar optionsvärdet vid lösendagen, alltså har vi vid lösendagen en risklös vinst a. Om $P = 15 - a$ uppnås samma resultat med att köpa en option och investera enligt strategin $(-(1/2), 10)$.

Även om exemplet förefaller något orealistisk kan vi observera åtminstone en intressant egenskap i exemplet. Vi noterar att priset för optionen i modellen är oberoende av sannolikheten p. Två aktörer kan förhålla sig olika till risktagandet, men om dessa är överens om optionspriserna vid lösendagen, så kan bägge även vara överens om nuvarande priset. Detta exempel kan även betraktas som en inledning till den s.k. Cox-Ross-Rubinstein modellen; en evalueringsmodell för optionspriser i diskret tid. Målet med detta examensarbete är att presentera en härledning av denna modell, och slutligen beskriva sambandet mellan denna modell och Black-Scholes modellen; en evalueringsmodell för optionspriser i kontinuerlig tid. Härledningen som presenteras i detta arbete kommer huvudsakligen att följa [2].

Det är värt att notera att vi, för enkelhetens skull, har exkluderat bland annat dividender, skatter och transaktionskostnader. Dessa antaganden kommer att vara i kraft genom hela examensarbetet.

Kapitel 2

Diskreta Black-Scholes formeln

2.1 Black-Scholes formeln

I början av 1970-talet tog prissättningen av aktieoptioner stora framsteg tack vare det forskningsarbete som Fischer Black och Myron Scholes utförde. År 1973 publicerades artikeln där Black och Scholes härledde en formel för prissättning av aktieoptioner, vilket har senare blivit känd som Black-Scholes modellen. De antaganden som bör uppfyllas av modellen är

I. Aktiepriset är log-normalt fördelad med konstanta parametrar μ och σ.

II. Alla transaktionskostnader och skatter är exkluderade från marknadsmodellen.

III. Inga dividender utdelas (då optionen är i kraft).

IV. Marknadsmodellen saknar arbitrage-strategier

V. Aktörerna i modellen kan inlåna och utlåna egendom med samma riskfria konstanta ränta.

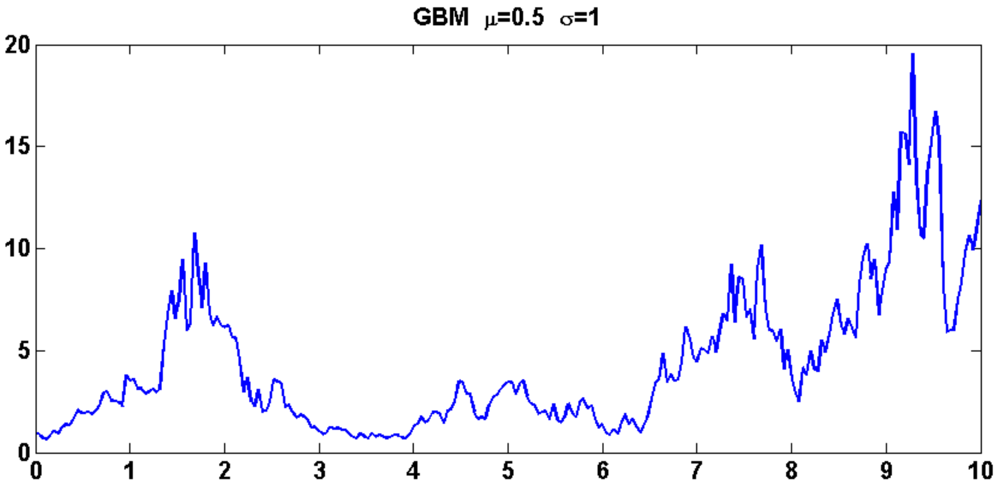
Då dessa antaganden uppfylls kommer priset P av optionen att bestämmas av formeln

$$P = S\Phi(x) - Ke^{-r\tau}\Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}), \text{ där} \tag{2.1}$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

(2.1) Ovan är Black-Scholes formeln.
Ovan är funktionen Φ den kumulativa normalfördelningsfunktionen och τ beskriver tiden

till lösendagen. Antagendet att aktiepriset är log-normalt fördelad med konstanta parametrar kan ekvivalent formuleras som att aktiepriset följer en stokastisk process kallad geometrisk Brownian motion med samma konstanta parametrar. Ett exempel av geometrisk Brownian motion illustreras i figur 2.1. Man kan observera klara likheter mellan



Figur 2.1: geometrisk Brownian motion med parametrarna $\mu = 0.5$ och $\sigma = 1$

figuren och en typisk prisutveckling för en aktie.

Definitionen och mera information kan hittas från [3] och [1]. Märkväl att antaganden om modellen är väldigt lika de antaganden med vilka vi har begränsat vår marknadsmodell. I nästa kapitel presenteras en diskretisering av prissättningsproblemet som visar sig generera en formel liknande den av Black-Scholes.

2.2 Diskreta motsvarigheten av Black-Scholes formeln

I detta kapitel härleds Cox-Ross-Rubinstein modellen och sambandet mellan Cox-Ross-Rubinstein modellen och Black-Scholes modellen förklaras.

Anta att det existerar T+1 på varandra följande tidspunkter $t \in \{0, \ldots, T\} \subset \mathbb{N}$ där $t = T$ beskriver lösendagen och $t = 0$ nuet. Låt S_t = aktiepriset vid tidpunkten t. Anta nu att *annuitetskvoten* (eng. *rate of return*) på aktiepriset är antingen $\alpha - 1$ med sannolikheten p eller $\beta - 1$ med sannolikheten $1-p$ för alla $t \in \{0, \dots, T-1\}$, alltså

$$\frac{\Delta S_{t+1}}{S_t} = \frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} = \begin{cases} \alpha - 1 & \text{med sannolikheten } p \\ \beta - 1 & \text{med sannolikheten } 1-p \end{cases}$$

Vi betraktar som nästa steg en allmännare situation av exempel 1.3. Anta att vår modell består av två tidspunkter, alltså $t \in \{0, T\}$, och att $S_0 = S \in \mathbb{R}$. Vi antar även att pengar kan inlånas för en risklös ränta $r > 1$. Nu kommer värdeutvecklingen för portföljen med strategin (A, B) att vara

$$\begin{tikzcd}
 & A\alpha S + rB \\
AS + B \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\
 & A\beta S + rB
\end{tikzcd}$$

Vi ser att om $V^0_{(A,B)} = 0$ så bör $B = -AS$ av vilket följer att

$$P(V^T_{(A,B)} = AS(\alpha - r)) = p \text{ och } P(V^T_{(A,B)} = AS(\beta - r)) = 1 - p.$$

Alltså är $P(V^T_{(A,B)} < 0) > 0$ om och endast om $\alpha - r > 0 > \beta - r$, alltså $\beta < r < \alpha$ (Om $r \geq \alpha$ så är $(A, B) = (-1, S)$ en arbitragestrategi och om $r \leq \beta$ är $(A, B) = (1, -S)$ en arbitragestrategi)[1].

Vi undersöker värdeutvecklingen för en option på en aktie. Nu när prisutvecklingen för aktiepriset är känt är värdesättningen för optionen klar då $t = T$, alltså

$$\begin{tikzcd}
 & P_\alpha = \max\{0, \alpha S - K\} \\
P \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\
 & P_\beta = \max\{0, \beta S - K\}
\end{tikzcd}$$

[1]Vi vill försäkra oss om att oberoende av värdet AS så kommer värdet $V^T_{(A,B)} < 0$ vid antingen händelsen α eller β

Vi vill igen bygga en portfölj som upprepar optionens värde, och därmed får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} A\alpha S + rB = P_\alpha \\ A\beta S + rB = P_\beta \end{cases} \implies \begin{cases} AS(\alpha-\beta) + P_\beta = P_\alpha \\ rB = P_\beta - A\beta S \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{P_\alpha - P_\beta}{(\alpha-\beta)S} \\ B = \frac{\alpha P_\beta - \beta P_\alpha}{(\alpha-\beta)r}. \end{cases}$$

Detta leder till strategin $(A, B) = \left(\frac{P_\beta - P_\alpha}{(\alpha-\beta)S}, \frac{\alpha P_\beta - \beta P_\alpha}{(\alpha-\beta)r}\right)$. Med liknande argumentering som användes i exempel 1.3, får vi att

$$\begin{aligned} P = AS + B = \frac{P_\alpha - P_\beta}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha P_\beta - \beta P_\alpha}{(\alpha-\beta)r} &= \frac{rP_\alpha - rP_\beta + \alpha P_\beta - \beta P_\alpha}{(\alpha-\beta)r} \\ &= \frac{1}{r}\left[\left(\frac{\alpha - r}{\alpha-\beta}\right)P_\beta + \left(\frac{r-\beta}{\alpha-\beta}\right)P_\alpha\right] \\ &= \frac{1}{r}\big(qP_\beta + (1-q)P_\alpha\big), \quad \text{där } q = \frac{\alpha - r}{\alpha-\beta}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Märkväl att då $\beta < r < \alpha$ är priset för optionen väldefinierat, alltså $P \geq 0$, och också entydigt. Dessutom kan man även konstatera att q har "egenskapen av en sannolikhet" då $\beta < r < \alpha$:

$$\beta < r < \alpha \iff 0 < \alpha - r < \alpha - \beta \iff 0 < \frac{\alpha - r}{\alpha - \beta} < 1$$

Vi kan igen observera att sannolikheten för de olika tillstånden kan ignoreras i vår modell.

Anta nu en modell med ytterligare ett tidssteg, alltså $t \in \{0, 1, T\}$. Nu är värdeutvecklingen för en portfölj med strategin (A, B)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=small]
 & & A\alpha^2 S + r^2 B \\
 & A\alpha S + rB \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
AS + B \arrow[ur] \arrow[dr] & & A\alpha\beta S + r^2 B \\
 & A\beta S + rB \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & A\beta^2 S + r^2 B
\end{tikzcd}
$$

Modellen är fortfarande arbitragefri om $\beta < r < \alpha$, nämligen från föregående steg får vi att $P(V^1_{A,B} < 0) > 0$ då $\beta < r < \alpha$. Då är också $\alpha^2 - r^2 > 0$ och $\beta^2 - r^2 < 0$, alltså är $P(V^T_{A,B} < 0) > 0$. Nu är även värdet på optionen klart vid $t = T$, alltså

$$
\begin{cases}
P_{\alpha^2} = \max\{0, \alpha^2 S - K\} \\
P_{\alpha\beta} = \max\{0, \alpha\beta S - K\} \\
P_{\beta^2} = \max\{0, \beta^2 S - K\}
\end{cases}
$$

och motsvarande värdeutveckling

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=small]
 & & P_{\alpha^2} \\
 & P_\alpha \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
P \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_{\alpha\beta} \\
 & P_\beta \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & P_{\beta^2}
\end{tikzcd}
$$

Nu får vi, enligt föregående fall, att

$$\begin{cases} P_\alpha = \frac{1}{r}\big(qP_{\alpha\beta} + (1-q)P_{\alpha^2}\big) \\ P_\beta = \frac{1}{r}\big(qP_{\beta^2} + (1-q)P_{\alpha\beta}\big) \end{cases}$$

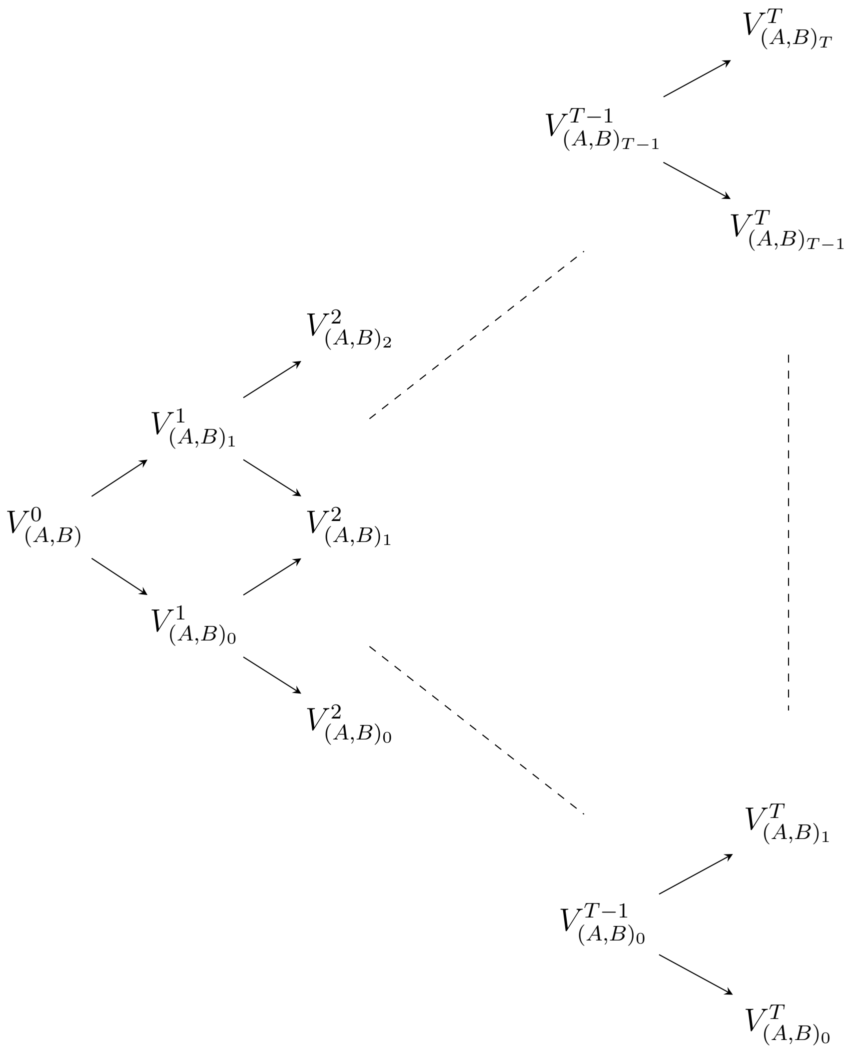
där q är definierat som förut. Nu kan vi igen argumentera att om vi bygger en strategi som upprepar värdet vid $t = 1$, så kommer det enda arbitragefria priset vara lika med nuvarande värdet av portföljen, alltså

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{r}\big(qP_\beta + (1-q)P_\alpha\big) = \frac{1}{r^2}\Big(q\big[qP_{\beta^2} + (1-q)P_{\alpha\beta}\big] + (1-q)\big[qP_{\alpha\beta} + (1-q)P_{\alpha^2}\big]\Big) \\ &= \frac{1}{r^2}\big(q^2P_{\beta^2} + 2q(1-q)P_{\alpha\beta} + (1-q)^2P_{\alpha^2}\big). \end{aligned}$$

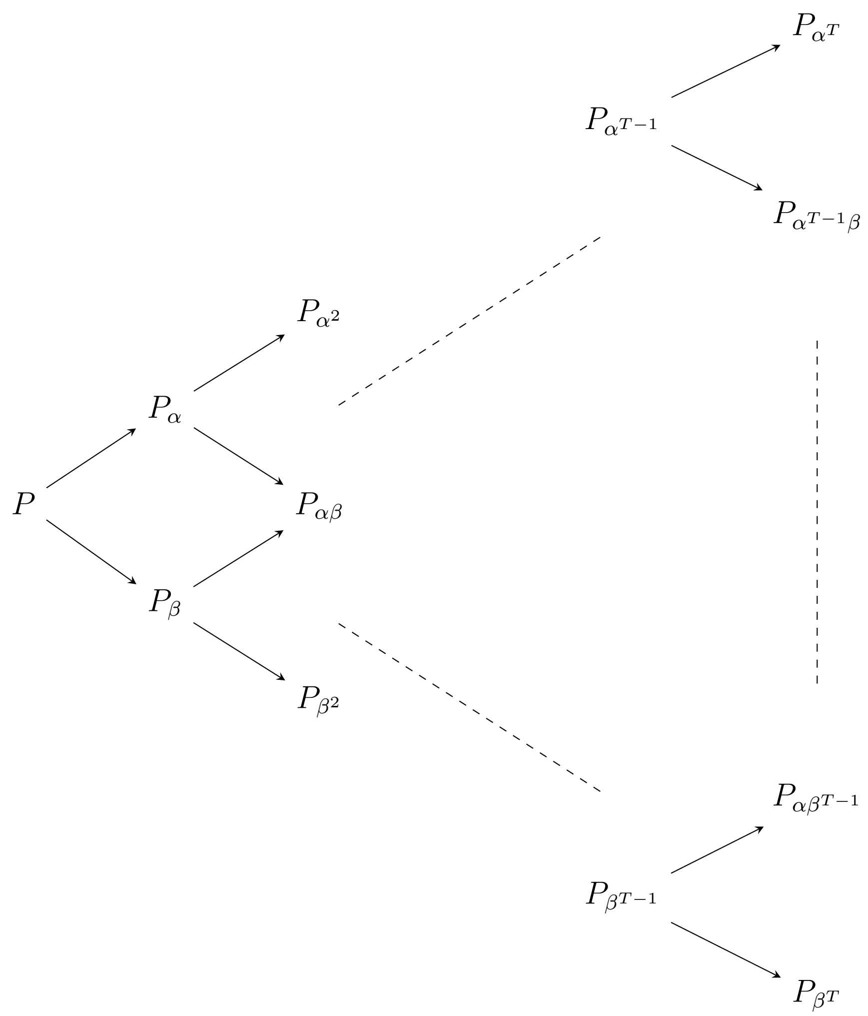
Som följande steg betraktar vi en allmänn modell med $T+1$ tidssteg, alltså $t \in \{0, \ldots, T\}$. Då vi betecknar

$$V^t_{(A,B)_i} = A\alpha^i\beta^{(t-i)}S + r^tB,\ V^0_{(A,B)} = AS + B$$

så är värdeutvecklingen för en portfölj med strategin (A, B)



Modellen är arbitragefri om och endast om $\beta < r < \alpha$. Från modellen med två stadier får vi att $P(V^1_{(A,B)} < 0) > 0$ då $\beta < r < \alpha$. Då är också $\alpha^t - r^t > 0$ och $\beta^t - r^t < 0$ för alla $t \in \{2, \dots, T\}$, alltså är $P(V^t_{(A,B)} < 0) > 0$ för alla $t \in \{2, \dots, T\}$. Vi betecknar $P_{\alpha^{T-i}\beta^i} = \max\{0, \alpha^{T-i}\beta^i S - K\}$ (alltså värden för optionen vid lösendagen). Nu är värdeutvecklingen för optionen



Vi visar med induktion att

$$P = \frac{1}{r^T}\left(\sum_{k=0}^{T}\binom{T}{k}q^k(1-q)^{T-k}P_{\beta^k\alpha^{T-k}}\right).$$

Observera att i ovanstående formel anger binomialkoefficienten

$$\binom{T}{k}q^k\left(1-q^{T-k}\right)$$

antalet stigar som slutar i $P_{\beta^k\alpha^{T-k}}$, dvs. på hur många sätt vi kan komma till slutpriset $P_{\beta^k\alpha^{T-k}}$.

I första fallet, där $T = 1$, är

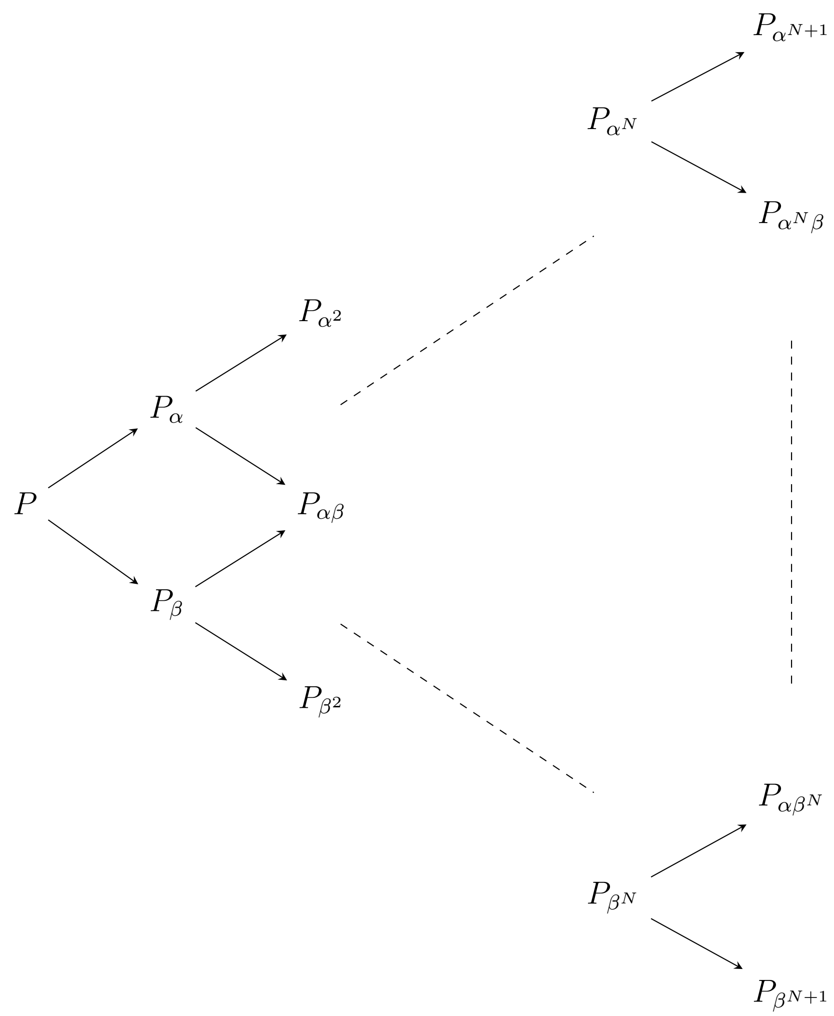
$$P = \frac{1}{r}\left(\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}q^k(1-q)^{1-k}P_{\beta^k\alpha^{1-k}}\right) = \frac{1}{r}\big(qP_\beta + (1-q)P_\alpha\big)$$

vilket överensstämmer med (2.2).

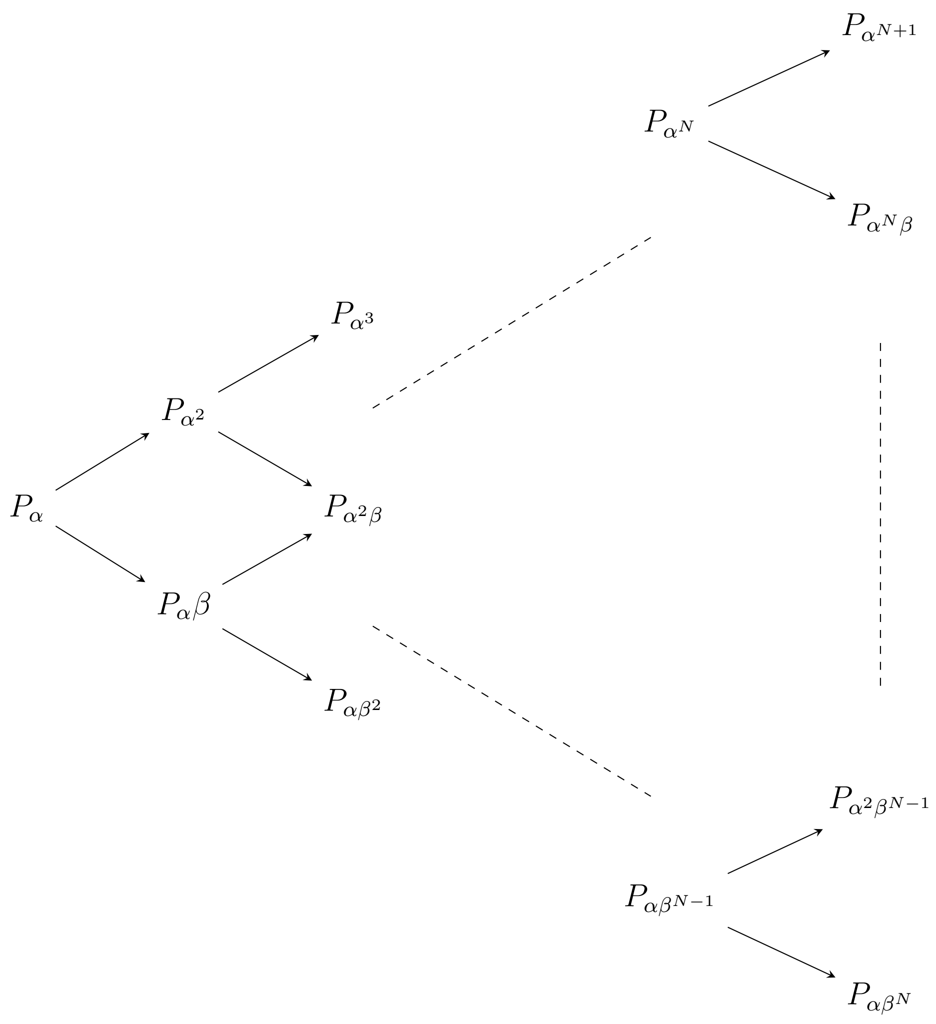
Induktionsantagandet: Anta att det existerar ett sådant $N \in \mathbb{N}$ så att för alla binomiala modeller med $N+1$ tidssteg, som uppfyller de tidigare beskrivna kraven, kan priset P för optionen bestämmas från formeln

$$P = \frac{1}{r^N}\left(\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}q^k(1-q)^{N-k}P_{\beta^k\alpha^{N-k}}\right).$$

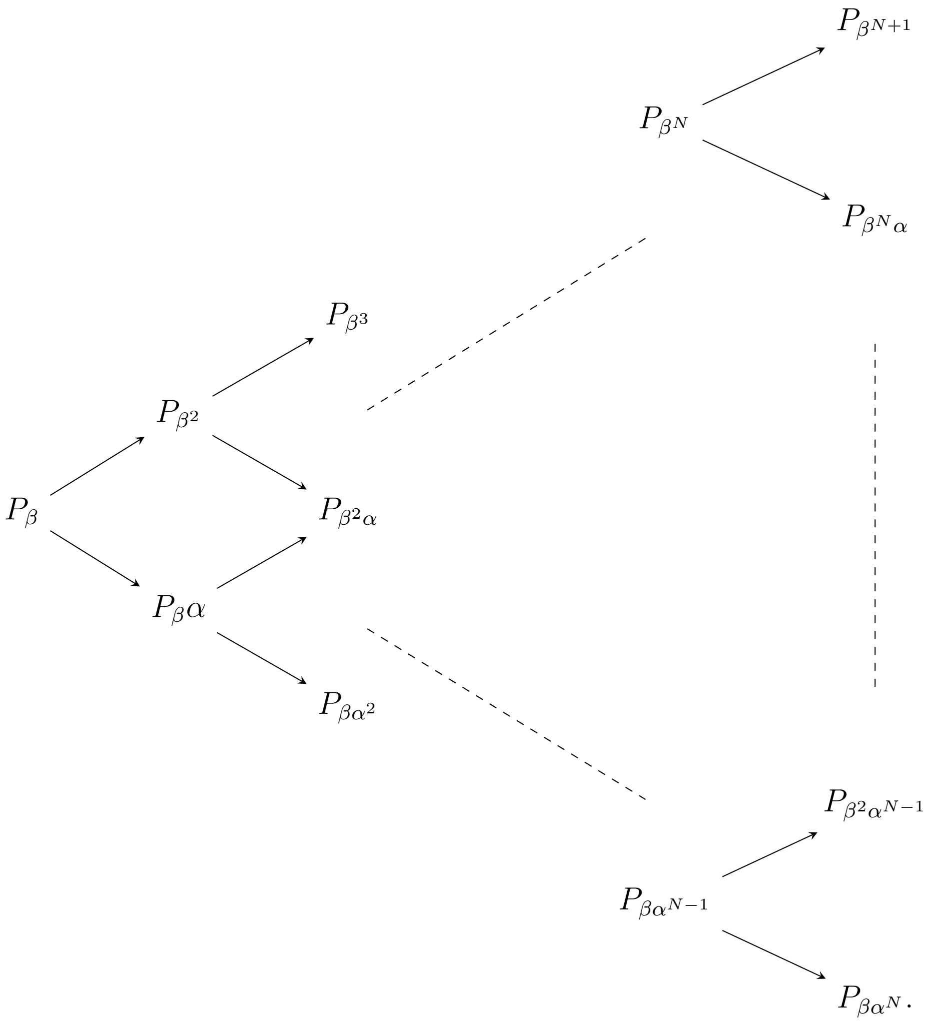
Vi betraktar fallet där vi har $N+2$ tidssteg.



Detta kan reduceras till två processer med $N+1$ steg, alltså


$P_{\alpha^{N+1}}$
P_{α^N}
$P_{\alpha^N\beta}$
P_{α^3}
P_{α^2}
P_α
$P_{\alpha^2\beta}$
$P_\alpha\beta$
$P_{\alpha\beta^2}$
$P_{\alpha^2\beta^{N-1}}$
$P_{\alpha\beta^{N-1}}$
$P_{\alpha\beta^N}$

och



Nu får vi från induktionsantagandet att

$$\begin{cases} P_\alpha = \frac{1}{r^N}\left(\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} q^k (1-q)^{N-k} P_{\beta^k\alpha^{N+1-k}} \right) \\ P_\beta = \frac{1}{r^N}\left(\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} q^k (1-q)^{N-k} P_{\beta^{k+1}\alpha^{N-k}} \right) \end{cases}$$

Dessutom vet vi från fallet $T = 1$ att

$$P = \frac{1}{r}\big(qP_\beta + (1-q)P_\alpha\big).$$

Genom att kombinera dessa erhåller vi att

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{r^{N+1}}\left(q\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}q^k(1-q)^{N-k}P_{\beta^{k+1}\alpha^{N-k}} + (1-q)\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}q^k(1-q)^{N-k}P_{\beta^k\alpha^{N+1-k}}\right)\\
&= \frac{1}{r^{N+1}}\left(\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}q^{k+1}(1-q)^{N-k}P_{\beta^{k+1}\alpha^{N-k}} + \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}q^k(1-q)^{N+1-k}P_{\beta^k\alpha^{N+1-k}}\right)\\
&= \frac{1}{r^{N+1}}\left(q^{N+1}P_{\beta^{N+1}} + \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k-1}q^k(1-q)^{N+1-k}P_{\beta^k\alpha^{N+1-k}} + \right.\\
&\qquad\qquad \left.(1-q)^{N+1}P_{\alpha^{N+1}} + \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}q^k(1-q)^{N+1-k}P_{\beta^k\alpha^{N+1-k}}\right)\\
&= \frac{1}{r^{N+1}}\left(q^{N+1}P_{\beta^{N+1}} + (1-q)^{N+1}P_{\alpha^{N+1}} + \sum_{k=1}^{N}\left(q^k(1-q)^{N+1-k}P_{\beta^k\alpha^{N+1-k}}\right)\overbrace{\left[\binom{N}{k-1}+\binom{N}{k}\right]}^{=\binom{N+1}{k}}\right)\\
&= \frac{1}{r^{N+1}}\left(\sum_{k=0}^{N+1}\binom{N+1}{k}q^k(1-q)^{N+1-k}P_{\beta^k\alpha^{N+1-k}}\right).
\end{aligned}
$$

Alltså har vi enligt induktionsprincipen visat att

$$
P = \frac{1}{r^T}\left(\sum_{k=0}^{T}\binom{T}{k}q^k(1-q)^{T-k}P_{\beta^k\alpha^{T-k}}\right), \quad T \in \mathbb{N}.
$$

Vi vet att $P_{\alpha^{T-i}\beta^i} = 0$ för alla i för vilka $\alpha^{T-i}\beta^i S \leq K$. Nu är

$$
\begin{aligned}
&\alpha^{T-i}\beta^i S > K \iff \log\left(\alpha^{T-i}\beta^i S\right) > \log(K)\\
&\iff \log\left(\alpha^T\right) + \log\left(\alpha^{-i}\right) + \log\left(\beta^i\right) + \log(S) > \log(K)\\
&\iff i\left(\log(\beta) - \log(\alpha)\right) > \log\left(\frac{K}{S\alpha^T}\right)\\
&\iff i > \frac{\log\left(\frac{K}{S\alpha^T}\right)}{\log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}.
\end{aligned}
$$

Vi betecknar

$$
\gamma = \min\left\{ i \in \mathbb{N} : i > \frac{\log\left(\frac{K}{S\alpha^T}\right)}{\log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \right\}
$$

och därmed är γ det minsta indexvärdet för vilket $P_{\alpha^{T-i}\beta^i} > 0$. Speciellt är $P_{\alpha^{T-i}\beta^i} = 0$ för alla $i < \gamma$. Därmed är

$$P = \frac{1}{r^T}\left(\sum_{k=0}^{T}\binom{T}{k}q^k(1-q)^{T-k}P_{\beta^k\alpha^{T-k}}\right) = \frac{1}{r^T}\left(\sum_{k=\gamma}^{T}\binom{T}{k}q^k(1-q)^{T-k}\left[\alpha^{T-k}\beta^k S - K\right]\right)$$

En direkt följd av detta är att då $\gamma > T$ är $P = 0$. Vi spjälker P till två termer

$$P = S\left[\sum_{k=\gamma}^{T}\binom{T}{k}q^k(1-q)^{T-k}\left(\frac{\alpha^{T-k}\beta^k}{r^T}\right)\right] - Kr^{-T}\left[\sum_{k=\gamma}^{T}\binom{T}{k}q^k(1-q)^{T-k}\right]$$

Vi definierar $z = (\beta/r)q$ och därmed är $1 - z = (\alpha/r)(1-q)$. Eftrersom

$$q = \frac{\alpha - r}{\alpha - \beta}$$

har även z egenskapen av en sannolikhet:

$$0 < q < 1 \Longleftrightarrow 0 < \frac{\beta}{r}q = z < \frac{\beta}{r} < 1$$

Vi erhåller att

$$q^k(1-q)^{T-k}\left(\frac{\alpha^{T-k}\beta^k}{r^T}\right) = q^k(1-q)^{T-k}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{T-k}\left(\frac{\beta}{r}\right)^k$$

$$= \left(\frac{\beta}{r}q\right)^k\left(\frac{\alpha}{r}(1-q)\right)^{T-k} = z^k(1-z)^{T-k},$$

varav

$$P = S\left[\sum_{k=\gamma}^{T}\binom{T}{k}z^k(1-z)^{T-k}\right] - Kr^{-T}\left[\sum_{k=\gamma}^{T}\binom{T}{k}q^k(1-q)^{T-k}\right].$$

Vi noterar att summorna innanför parenteserna är värden som en fördelningsfunktion till någon binomiellt fördelad slumpvariabel antar, eller mer formellt:
Det existerar sådana slumpvariabler $Q \in \{0,\ldots,T\}$ och $Z \in \{0,\ldots,T\}$ som är binomiellt fördelade med parametrarna (T,q) och (T,z), alltså $Q \sim Bin(T,q)$ och $Z \sim Bin(T,z)$, och som har fördelningsfunktionerna

$$F_Q : \mathbb{R} \to [0,1], \quad F_Q(x) = F_Q(x;T,q) = \sum_{k=0}^{x}\binom{T}{k}q^k(1-q)^{T-k} \quad \text{då } x \in \{0,\ldots,T\},$$

och annars $F_Q(x) = 0$, samt

$$F_Z : \mathbb{R} \to [0,1], \quad F_Z(x) = F_Z(x;T,z) = \sum_{k=0}^{x}\binom{T}{k}z^k(1-z)^{T-k} \quad \text{då } x \in \{0,\ldots,T\},$$

och annars $F_Z(x) = 0$.

Vi betecknar $\psi_Q(\gamma) = 1 - F_Q(\gamma - 1)$ och $\psi_Z(\gamma) = 1 - F_Z(\gamma - 1)$, varmed

$$P = S\psi_Z(\gamma) - Kr^{-T}\psi_Q(\gamma).$$

Det som ännu inte har behandlats är existensen av en strategi som upprepar optionens värde vid lösendagen. Men detta har vi redan implicit argumenterat för och använt. Nämligen på grund av att vi har för varje tidpunkt och möjliga tillstånd på dessa tidpunkter hittat en strategi som upprepar optionens värde vid följande tidpunkt, är det alltid möjligt att nå vilken som helst av tillstånden vid tiden T!

Notera att vi inte skulle vara lika lyckligt lottade om värdetutvecklingen av aktien skulle vara trinomial, till exempel

$$\begin{tikzcd} & \alpha S \\ S \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & S \\ & \beta S \end{tikzcd}$$

I detta fall är det inte längre möjligt att hitta en strategi som säkert upprepar optionens värde vid lösendagen som vi tidigare har gjort, och därmed bör andra evalueringskriterier introduceras.

Vi har nu i detta kapitel visat följande sats.

Sats 2.3. *Anta att aktieprisets utveckling är binomial och att annuitetskvoterna för varje tillstånd vid varje tidpunkt är konstanta och förhåller sig till räntan på det tidigare beskrivna sättet. Då är denna modell arbitragefri och det är möjligt att bygga en portfölj som upprepar optionens värde och priset P på optionen bestäms av formeln*

$$P = S\psi_Z(\gamma) - Kr^{-T}\psi_Q(\gamma), \quad \textit{där } \gamma = \min\left\{ i \in \mathbb{N} : i > \frac{\log\left(\frac{K}{S\alpha^T}\right)}{\log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \right\}. \tag{2.4}$$

Denna formel beskrevs första gången av John Cox, Stephen Ross och Mark Rubinstein, och har därmed blivit känd som Cox-Ross-Rubinstein formeln.

Det är värt att notera att även om vi har i denna modell lyckats generera ett entydigt pris på aktieoptionen är vinst och förlust något som förekommer i optionsprogram i verkligheten. Vi har i denna modell exkluderat många essentiella faktorer som både direkt och indirekt påverkar aktiepriset, bl.a. dividender. Detta kommer naturligtvis även att påverka optionspriset. Annuitetskvoterna bör bestämmas genom någon estimering, varmed även nogrannheten av estimeringen spelar en stor roll i modellens motsvarighet till verkligheten.

I det här skedet är det redan enkelt att observera likheterna mellan vår diskreta modell och Black-Scholes modellen. Orsaken till att explicit definiera summorna som binomialfördelade slumpvariablers kumulativa fördelningsfunktioner är att, då vi definierar τ som tiden till lösendagen och σ^2 variansen av annuitetskvoten vid varje tidsskede, och då vi låter $T \longrightarrow \infty$ och därmed $(\tau/T) \longrightarrow 0$ (vi låter med andra ord antalet tidssteg öka och därmed tidsintervallen mellan tidsstegen krympa), så kan man med hjälp av den centrala gränsvärdessatsen visa att

$$\begin{cases} \psi_Z(\gamma) \longrightarrow \Phi(x) \\ \psi_Q(\gamma) \longrightarrow \Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}) \end{cases} \qquad \text{där } x = \frac{\ln\left(\frac{S}{Kr^{-\tau}}\right) + \frac{\sigma^2\tau}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

och

$$P \longrightarrow S\Phi(x) - Kr^{-\tau}\Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}).$$

Formeln ovan är identisk med (2.1), och därmed kommer vår diskreta modell att konvergera mot Black-Scholes modellen då tidsstegen ökar gränslöst. Märkväl att då vi låter $e^r = s$ så är $Ke^{-r\tau} = Ks^{-\tau}$ och

$$\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \ln\left(s^\tau\right) + \frac{\sigma^2\tau}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln\left(\frac{S}{Ks^{-\tau}}\right) + \frac{\sigma^2\tau}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Detaljerade och formella bevis av konvergensen mot Black-Scholes formeln kan finnas i [2] och [4].

Referenser

[1] Hull, John C. *Fundamentals of futures and options markets.*
Upper Saddle River, N.J : Prentice Hall, 6:e upplagan, 2008

[2] Cox, John C, Ross, Stephen A. & Rubinstein, Mark
Option pricing: A simplified approach.
Journal of Financial Economics, volym 7 1979 , s.229-263

[3] Black, Fischer & Scholes, Myron *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*
The Journal of Political Economy, volym 81 1973, s.637-654

[4] Rendleman, Richard J. & Bratter, Brit J. *Two-State Option Pricing*
The Journal of Finance, volym 34 1979, s.1093-1110