

Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα

2020-2021

Χρωματισμός γράφων

Πάυλος Αλέξανδρος Λιάφος

15342

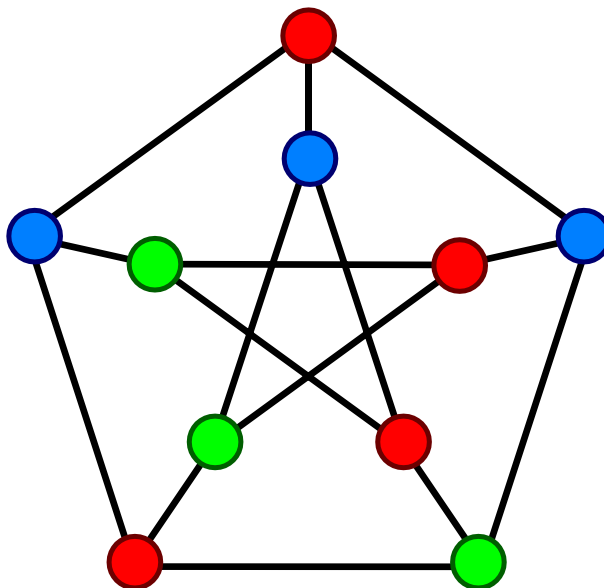
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Πανεπιστήμιο Ιωάννινων

Περιεχόμενο

1. Περίληψη
2. Εισαγωγή και περιγραφή προβλήματος
3. Προσέγγιση και επίλυση προβλήματος
4. Αποτελέσματα
5. Βιβλιογραφία

1. Περίληψη

Στην εργασία θα προσπαθήσουμε να επιλύσουμε ένα πρόβλημα χρωματισμού γραφήματος το οποίο είναι NP-Hard πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Στο πρόβλημα αυτό πρέπει να αναθέσουμε ένα χρώμα σε κάθε κορυφή ενός γραφήματος έτσι ώστε γειτονικές κορυφές να χρωματίζονται με διαφορετικό χρώμα παράλληλα θα πρέπει να χρησιμοποιείται ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων. Στην εργασία αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τέσσερις αλγορίθμους για την επίλυση του προβλήματος.



2. Εισαγωγή και περιγραφή του προβλήματος

Τα υπολογιστικά προβλήματα χωρίζονται σε υποκατηγορίες (κλάση P, NP, NP-Complete, NP-Hard). Τα προβλήματα κλάσης P περιλαμβάνουν όλα τα προβλήματα που μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο, συχνά συνδέουμε την κλάση P με αποδοτικότητα αυτό βασίζεται στο ότι ένας πολυωνυμικός αλγόριθμος για ένα πρόβλημα βασίζεται σε κάποια βαθύτερη ιδιότητα του προβλήματος και επιτρέπει την γρήγορη λύση του. Η κλάση πολυπλοκότητας NP αντιστοιχεί στα προβλήματα για τα οποία υπάρχει πολυωνυμικός μη ντετερμινιστικός αλγόριθμος, επίσης ένα πρόβλημα P ανήκει στην κλάση NP αν έχει την ιδιότητα της πολυωνυμικής επαληθευσιμότητας. Η κλάση NP-Complete είναι ένα υποσύνολο της κλάσης NP. Για να δείξουμε ότι ένα πρόβλημα είναι NP-Complete πρέπει να δείξουμε ότι ανήκει στην κλάση NP κατασκευάζοντας έναν πολυωνυμικό επαληθευτή και μετά να δείξουμε ότι κάθε πρόβλημα στην κλάση NP ανάγεται σε ένα πρόβλημα P. Τα NP-Hard προβλήματα θα πρέπει να είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολα όσο το πιο δύσκολο πρόβλημα NP. Ένα πρόβλημα είναι NP-Hard όταν για κάθε πρόβλημα A στην κλάση NP μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

Το πρόβλημα του χρωματισμού γραφήματος είναι ένα NP-hard πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Ο χρωματισμός γράφων είναι η διαδικασία αναθέσεις ενός χρώματος σε κάθε κορυφή ενός γραφήματος G έτσι ώστε καμία γειτονική κορυφή να έχει το ίδιο χρώμα. Ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί ο αριθμός χρωμάτων που θα χρησιμοποιήσουμε. Το πρόβλημα συναντάται σε μεγάλο αριθμό πρακτικών εφαρμογών όπως ο χρονοπρογραμματισμός εκπαιδευτικών ιδρυμάτων (educational timetabling), ο χρονοπρογραμματισμός αθλητικών γεγονότων (sports scheduling), η ανάθεση συχνотήτων (frequency assignment), η ανάθεση καταχωρητών στους μεταγλωττιστές (compiler register allocation) και άλλα.

3. Προσέγγιση και επίλυση προβλήματος

Τα δεδομένα που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτό το πρόβλημα είναι τα δεδομένα χρονοπρογραμματισμού εξετάσεων [Toronto](#). Οι αλγόριθμοι που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ο first fit, DSATUR, RLF, backtracking DSATUR. Οι αλγόριθμοι έχουν υλοποιηθεί σε C# στο Visual Studio Code.

Ο first fit είναι greedy αλγόριθμος ο οποίος ελέγχει τις κορυφές μια μια και αναθέτει σε κάθε μια το μικρότερο νούμερο(χρώμα) που δεν χρησιμοποιείται από κάποια γειτονική κορυφή.

Ο DSATUR επίσης χρωματίζει τις κορυφές με την σειρά και στην συνέχεια ελέγχει ποιες από τις υπολειπόμενες κορυφές έχει τον μεγαλύτερο αριθμό χρωμάτων και δεν έχει χρωματιστεί και χρωματίζει αυτήν την κορυφή.

Ο RLF βάζει χρώμα αρχικά στην κορυφή με το μέγιστο βαθμό και στην συνέχεια στις κορυφές με μικρότερο βαθμό.

Ο backtracking DSATUR έχει έναν επιπλέον τελεστή για να βάζει δυναμικά στην σωστή θέση τις κορυφές τις οποίες ξανά επισκεπτόμαστε.

4. Αποτελέσματα

Τα στατιστικά στοιχεία αναγράφονται στο παρακάτω πίνακα :

Πρόβλημα	Εξετάσεις	Φοιτητές	Εγγραφές	Κορυφές	Πυκνότητα	Min	Median	Max	Mean	CV
Car-f-92	543	18419	55522	543	0.137	0	64	381	74.788	75.345
Car-s-91	682	16926	56877	682	0.128	0	77	472	87.431	70.910
Ear-f-83	190	1125	8109	190	0.265	4	45	134	50.452	56.113
Hec-s-92	81	2823	10632	81	0.415	9	33	62	33.654	36.326
Kfu-s-93	461	5349	25113	461	0.055	0	18	247	25.566	119.986
Lse-f-91	381	2726	10918	381	0.062	0	16	134	23.784	93.155
Pur-s-93	2419	30032	120681	2419	0.029	0	47	857	71.319	129.479
Rye-s-93	486	11483	45051	486	0.075	0	24	274	36.510	111.760
Sta-f-83	139	611	5751	139	0.142	7	16	61	19.870	67.364
Tre-s-92	261	4362	14901	261	0.180	0	45	145	46.980	59.618
Uta-s-92	622	21266	58979	622	0.125	1	65	303	77.971	73.671
Ute-s-92	184	2750	11793	184	0.084	2	13	58	15.543	69.135
Yor-f-83	181	941	6034	181	0.287	7	51	117	52	35.226

Τα αποτελέσματα του First-Fit είναι :

Πρόβλημα	FF
Car-f-92	44
Car-s-91	48
Ear-f-83	29
Hec-s-92	22
Kfu-s-93	25
Lse-f-91	22
Pur-s-93	54
Rye-s-93	28
Sta-f-83	13
Tre-s-92	29
Uta-s-92	43
Ute-s-92	13
Yor-f-83	27

5. Βιβλιογραφία

https://en.wikipedia.org/wiki/Greedy_coloring

<https://en.wikipedia.org/wiki/DSatur>

https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/84/jresv84n6p489_A1b.pdf

<http://orca.cf.ac.uk/11330/1/LewisWide-RangingComputational2012.pdf>

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01867956/document>

<https://www.tutorialspoint.com/the-graph-coloring>