The Power of Two Choices in Bike-sharing Systems

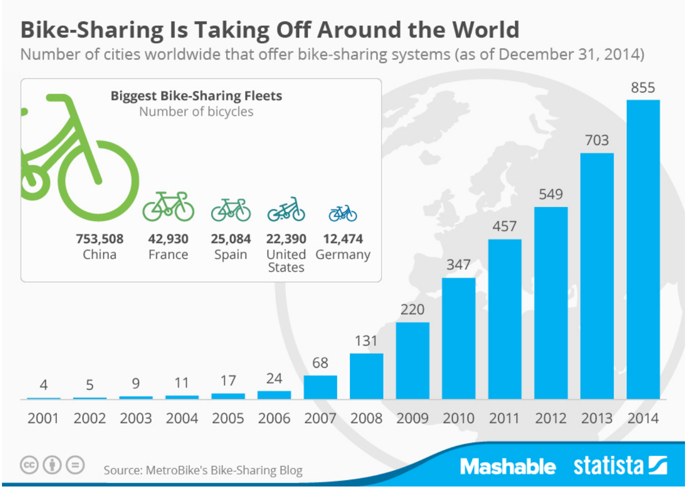
Ch. Fricker, P. Santini Dester

July 11, 2016

Panorama

- Motivation
- Études théoriques
- Simulations avec les données Vélib'
- Conclusion

Motivation



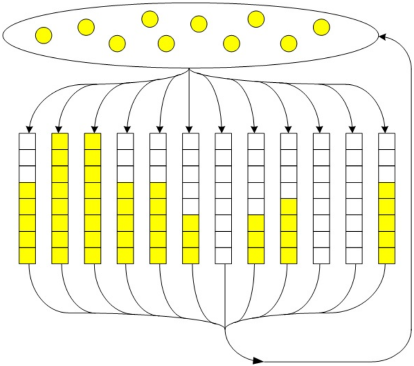
Bike-Sharing Is Taking Off Around the World
Number of cities worldwide that offer bike-sharing systems (as of December 31, 2014)
Biggest Bike-Sharing Fleets
Number of bicycles
753,508 China
42,930 France
25,084 Spain
22,390 United States
12,474 Germany
4 5 9 11 17 24 68 131 220 347 457 549 703 855
2001 2002 2003 2004 2005 2006 2007 2008 2009 2010 2011 2012 2013 2014
Source: MetroBike's Bike-Sharing Blog
Mashable statista

Stations Problématiques

Le besoin de modéliser et comprendre le comportement de ces systèmes

Les politiques de Choix

- Sans choix
  [Fricker, Gast, 2014]
- Choix parmi deux stations aléatoires
  [Fricker, Gast, 2014]
- Choix parmi deux stations voisines
- Choix local dans groupes de deux stations

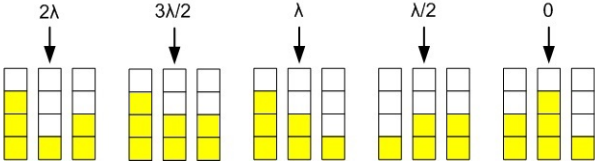


Files d'attente avec une fonction de choix quelconque

Soit,

- N le nombre de files d'attente dans le système
- $n \in \mathbb{N}^N$ l'état du système
- $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^N \longrightarrow [0, N]$ la fonction de choix
- $\lambda c_i(n)$ le taux d'arrivée de clients dans la file i
- μ le taux de service
- $\rho = \lambda/\mu$

Exemple : $c_i(n) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{n_i = n_{i-1}\}} + \mathbb{1}_{\{n_i < n_{i-1}\}} + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{n_i = n_{i+1}\}} + \mathbb{1}_{\{n_i < n_{i+1}\}}$

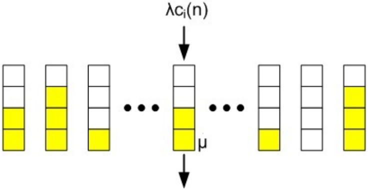


Files d'attente avec une fonction de choix quelconque

On a un processus de Markov dans $\mathbb{N}^N$, irréductible et défini par

Matrice de saut

$$Q(n, n + e_i) = \lambda c_i(n)$$
$$Q(n, n - e_i) = \mu \mathbb{1}_{\{n_i > 0\}}$$



Files d'attente avec une fonction de choix quelconque

Pour la mesure invariante du sytème $(y_n(\rho))_{n\in\mathbb{N}^N}$,
(conditions d'ergodicité)
supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour N fixé,

$$y_n(\rho) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k(n)\rho^k, \qquad \forall \rho \in [0, \varepsilon[, \forall n \in \mathbb{N}^N.$$

Lemma 2

$\alpha_k(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^N \mid |n| > k.$

Ce lemme permet de développer un algorithme pour trouver les coefficients $\alpha_k(n)$ de l'expansion.

Files d'attente avec une fonction de choix quelconque

On s'intéresse à la probabilité dans le régime stationnaire, d'une file avoir m clients.

Cela est donnée par la loi marginale

$$\pi_m(\rho) = \sum_{n \in \mathbb{N}^N | n_1 = m} y_n(\rho).$$

Pour la politique de *choix local*, quel est le comportement de la marginal?

Proposition 4

Pour N fixé, c la fonction de choix local et $m \geq 2$, la probabilité d'avoir m clients à une file est donnée par

$$\pi_m(\rho) = 12 \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m-1} + \mathcal{O}(\rho^{2m}),$$

pour ρ qui tend vers zéro.

Idée de la preuve :

- Équations de récurrence pour $\alpha_k(n)$
- Lemme 2 ($\alpha_k(n) = 0, |n| > k$)
- Trouver toutes les dépendances qui sont nulles (en séparant k pair, k impair)
- Résoudre les équations de récurrence

Choix local : $c_i(n) = a(n_i, n_{i-1}) + a(n_i, n_{i+1})$

Pour N fixé, la probabilité (stationnaire) d'avoir m clients dans une file

Politique de choix	π_m
Sans choix	$\sim \rho^m$
Choix parmi deux files voisines	$\sim (\rho/2)^{2m-1}$
Choix parmi deux files au hasard	$\sim \rho^{2^m-1}$

pour ρ qui tend vers zéro.

Choix local : $c_i(n) = a(n_i, n_{i-1}) + a(n_i, n_{i+1})$

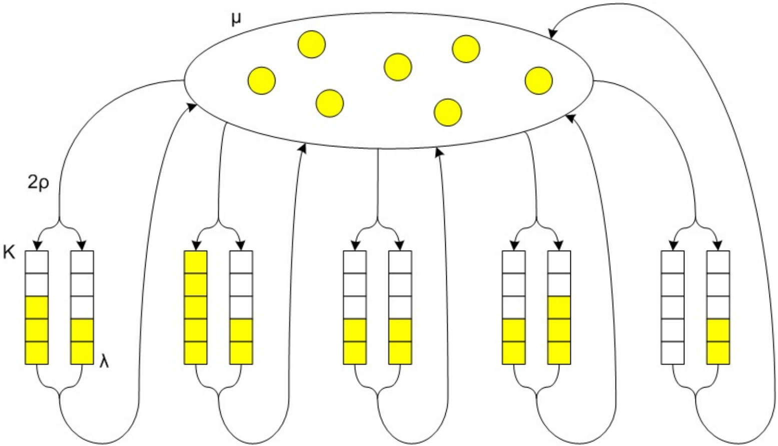
Les principales problèmes de cette analyse à faible trafic :

- Le point optimal des réseaux de partage de vélo est autour de $\rho = 1$
- L'effet de la capacité est masqué

$\Rightarrow$ **Un autre modèle** pour étudier l'effet du choix dans un réseau de partage de vélos.

- Techniques de champ moyen, $N \to \infty$.

Système de partage de vélos avec choix local en groupes de deux stations

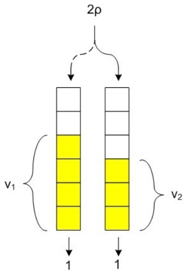


Étude JSQ dans le système à deux files de capacité finie

Le système typique : deux files de capacité finie (JSQ).

Soit

- K la capacité de chaque file d'attente
- $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq v_2 \leq v_1 \leq K$, l'état du système
- 2ρ le taux d'arrivée de clients dans la file moins chargée
- 1 le taux de service

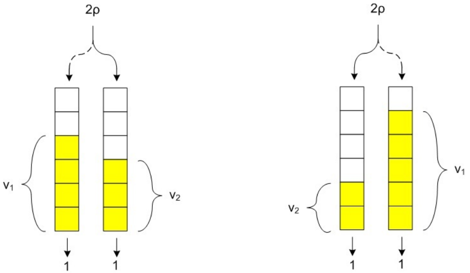


Étude JSQ dans le système à deux files de capacité finie

On a un processus de Markov dans $\mathbb{N}^2 \cap [0, K]^2$, irréductible et défini par

Matrice de saut

$$Q(v, v + e_1) = 2\rho \mathbb{1}_{\{v_1 = v_2\}} \mathbb{1}_{\{v_1 < K\}}$$
$$Q(v, v + e_2) = 2\rho \mathbb{1}_{\{v_2 < v_1\}}$$
$$Q(v, v - e_1) = \mathbb{1}_{\{v_1 > 0\}} (1 - \mathbb{1}_{\{v_1 = v_2\}})$$
$$Q(v, v - e_2) = \mathbb{1}_{\{v_2 > 0\}} (1 + \mathbb{1}_{\{v_2 = v_1\}})$$



Étude JSQ dans le système à deux files de capacité finie

Cas connu : capacité infinie [Flatto, Mac Kean, 1977]

Lemma 3

La probabilité invariante de blocage est

$$\pi(K,K) = \frac{(1-\rho)(2-\rho)}{(1-\rho)(2\rho)^{-K} + \rho^{-2K} - \rho(2-\rho)}$$

Idée de la preuve : La fonction génératrice associée à la mesure invariante est donnée par $G(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, où P et Q sont polynômes à deux variables.

On utilise le fait que $P(x,y)$ est nulle quand $Q(x,y)$ est nulle pour trouver une relation du type $P(\gamma(y),y) = 0$. En évaluant cette équation pour diverses valeurs de y, on peut trouver un système d'équations et le résoudre pour $\pi(K,K)$.

Étude JSQ dans le système à deux files de capacité finie

Proposition 6

Le nombre moyen de clients $\bar{n}$ dans une file d'attente peut être borné par les inégalités suivantes.

$$\bar{n} \leq \frac{\rho}{2(1-\rho)} \left(1 - \left(2K + 1 - \frac{(1+\rho^2)(\rho^{-2K} - (1+\rho^2)^{-K})}{1+\rho}\right) \pi(K,K)\right),$$

pour $\rho \in \mathbb{R}_+$.

$$\bar{n} = \frac{4K^2 + 2K + 1 - 2^{-K}}{8K + 2^{-K+2}}, \quad \textit{pour } \rho = 1.$$

$$\bar{n} \geq \frac{\rho}{1-\rho^2} \left(1 - \frac{1}{2}(2K(1+\rho)+1)\pi(K,K)\right), \quad \textit{pour } \rho < 1.$$

$$\bar{n} \geq \frac{\rho}{2(\rho-1)} \left(2K + 1 - \frac{\rho(1+\rho^2)}{(1+\rho)(1+2\rho)}\right) \pi(K,K) - \frac{\rho(\rho^2+2\rho+2)}{2(\rho-1)(1+2\rho)},$$

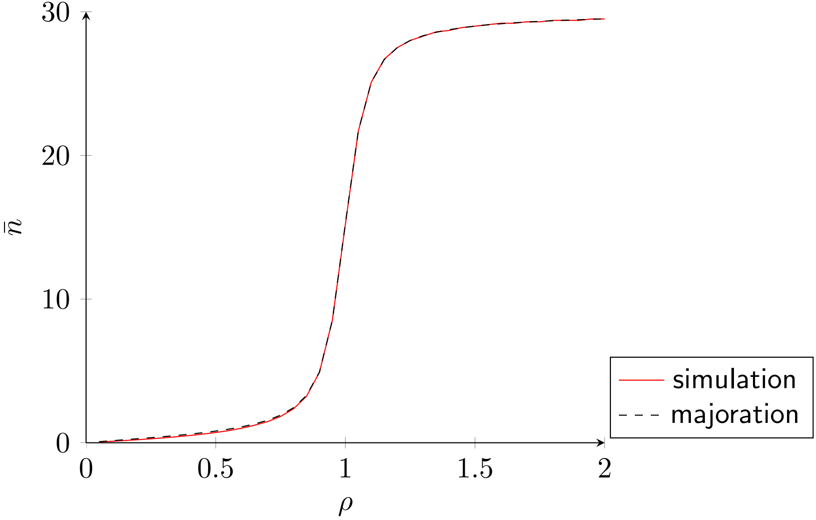
pour $\rho > 1$.

Étude JSQ dans le système à deux files de capacité finie

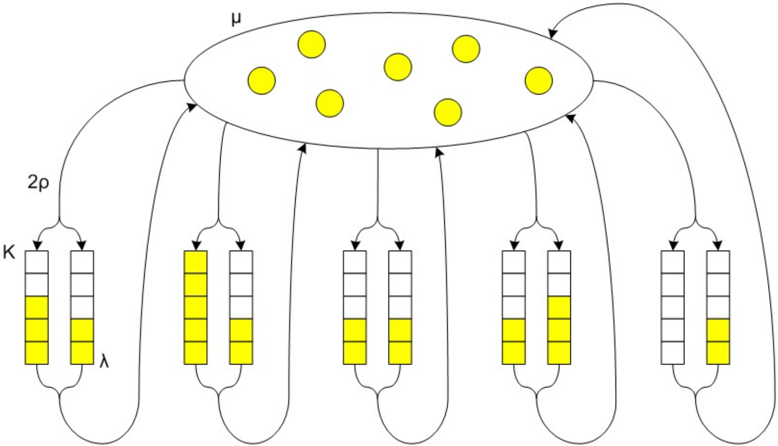
Idée de la preuve : Comme la dernière preuve, on utilise $P(\gamma(y), y) = 0$ en quelques points et on utilise des majorations et minorations du type $1 \leq \dfrac{1+\rho}{1+\rho^2} \leq \dfrac{1}{\rho}$.

Étude JSQ dans le système à deux files de capacité finie

$\bar{n}$: simulation versus la majoration for $K = 30$.



Système de partage de vélos avec choix local en groupes de deux stations



Système de partage de vélos avec choix local en groupes de deux stations

Soit (dans le régime permanent)

- $\bar{n}$ le nombre moyen de vélos dans une station
- $\dfrac{M}{N} = s$, nombre total de vélos par station
- $\rho = \dfrac{\mu}{\lambda}(s - \bar{n})$ la relation entre le taux d'arrivée (par station) et de trajets des vélos

Système de partage de vélos avec choix local en groupes de deux stations

En faisant $N \to \infty$, on peut utiliser la technique de champ moyen, qui est bien développée dans [Fricker, Gast, 2014].

Dans le régime permanent, on arrive aux mêmes equations de récurrence que le système JSQ à deux files de capacité finie.

Sauf que maintenant, on a une relation de plus

$$s = \bar{n}(\rho) + \frac{\lambda}{\mu}\rho.$$

Proportion de stations problématiques?

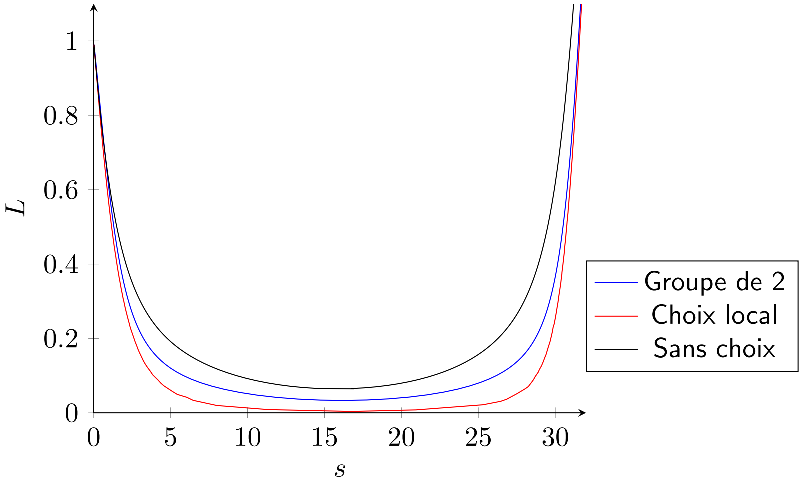
La métrique proposée est le taux d'insatisfaction des utilisateurs

$$\begin{aligned} L &= p_0 + (1-p_0)(1-p_K)\sum_{m\geq 1} m p_K^m \\ &= p_0 + \frac{p_K(1-p_0)}{1-p_K} \\ &= p_0 + \rho p_K \\ &= 1 - \rho(1-2p_K). \end{aligned}$$

Dans notre cas, on a $p_K = \pi(K,K)$, donnée par le Lemme 3.

La métrique de performance sur les systèmes de partage de vélos

Courbe paramétrée de $\rho \mapsto (s(\rho), L(\rho))$, pour $K = 30$ et $\lambda/\mu = 1$.



Système de partage de vélos avec choix local en groupes de deux stations

Proposition 8

Soit $\psi \in \mathbb{R}$ *et* $\rho = 1 + \dfrac{\psi}{K}$*, alors*

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{\psi}{K}\coth(\psi) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{K^2}\right) \\
s &= \frac{K}{2}(1 + \coth(\psi) - \psi^{-1}) + \frac{\psi^2}{4}\operatorname{csch}^2(\psi) + \frac{\mu}{\lambda} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{K}\right),
\end{aligned}
$$

pour K *qui tend vers l'infini.*

Implicit plot de L et s pour la politique choix dans groupe de deux, pour $K = 30$.

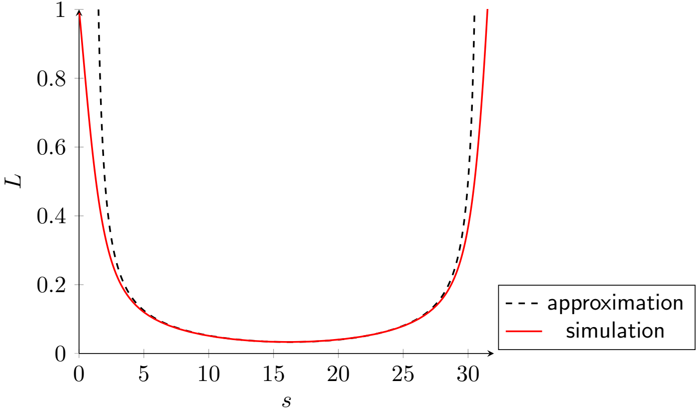


Figure : Dans cette courbe, ψ prend des valeurs entre $-K$ et K. L'approximation de la Proposition 8 est fiable dans la région intéressante, qui est la région optimale.

Système de partage de vélos avec choix local en groupes de deux stations

Pour K suffisamment grand, si

$$\frac{1}{3}K + \frac{1}{5} \leq s - \frac{\mu}{\lambda} \leq \frac{2}{3}K + \frac{1}{6},$$

alors,

$$\frac{1}{K} \leq L \leq \frac{7}{5K}.$$

Cela nous donne une bonne idée de la région dans laquelle s doit appartenir pour avoir L optimal.

Simulation de choix local avec les données Vélib'

À cause de problèmes de pertinence dans les données Vélib, on a changé de métrique pour mesurer la performance du système.

Alors, on propose la métrique suivante

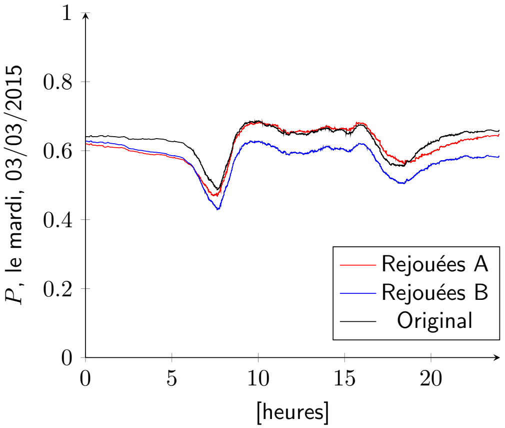
$$P = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{b_i - b_i^*}{K_i - b_i^*} \right)^2},$$

K_i la capacité de la station i
b_i le nombre de vélos dans la station i
$b_i^* = n_s K_i / \sum_{j=1}^{N} K_j$.

Simulation de choix local avec les données Vélib'

Politiques de choix, dans un rayon de 300m,

- A : choisir la station avec le plus de places libres
- B : choisir la station avec le plus de places libres par rapport à la capacité



Conclusion et perspectives

- Algorithme pour l'expansion avec une fonction de choix général
- N files avec choix parmi deux voisins
- Probabilité de blocage dans JSQ à deux files
- Système de partages de vélos avec choix dans groupes de deux voisins
- Donées Vélib' : choix de la moins chargée $=$ discutable

- Etude du *pair approximation*
- Modèles *in-between choix local* et *choix dans groupe de deux*
- JSQ entre deux files $M/M/K/K$, application au *cloud*

Bibliographie

http://www.statista.com/chart/3325/bike-sharing-systems-worldwide/
accessed 07/07/2015.

L. Flatto, H. P. McKean. (1977)
Two Queues in Parallel.
Communications on pure and applied mathematics, Vol. XXX, p.255-263.

C. Fricker, N. Gast. (2014)
Incentives and Redistribution in Homogeneous Bike-sharing Systems with Stations of Finite Capacity.
European Journal on Transportation and Logistics.