ME210 - Probabilidade I - 2S 2017

Docente: Marina Vachkovskaia

Soluções para problemas selecionados do livro
Probabilidade: Um curso moderno com aplicações 8.ed. de Sheldon Ross

Plínio Santini Dester (`p103806@dac.unicamp.br`)

24 de outubro de 2017

Em caso de dúvidas, sugestões ou correções (inclusive erros de digitação), não hesite em mandar um e-mail.

5 Problemas

5.1. Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} c\,(1-x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Qual é o valor de c?

(b) Qual é a função distribuição cumulativa de X?

Solução:

(a) Sabemos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, logo

$$\int_{-1}^{1} c\,(1-x^2)\,\mathrm{d}x = 1$$
$$\Rightarrow c\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 1$$
$$\Rightarrow c = \tfrac{3}{4}.$$

(b) Por definição, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$. Assim, se $x \in [-1, 1]$, então

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^{x} \tfrac{3}{4}(1 - x'^2)\,\mathrm{d}x' \\ &= \frac{3}{4}\left(x' - \frac{x'^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{x} \\ &= \frac{2 + 3x - x^3}{4}. \end{aligned}$$

Logo,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{2+3x-x^3}{4}, & -1 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

5.2. Um sistema formado por uma peça original mais uma sobressalente pode funcionar por uma quantidade de tempo aleatória X. Se a densidade de X é dada, em unidades de meses, por

$$f(x) = \begin{cases} C\,x\mathrm{e}^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

qual é a probabilidade de que o sistema funcione por pelo menos 5 meses?

Solução: Note que X segue uma distribuição Gamma de parâmetros $\alpha = 2$ e $\lambda = 1/2$. Sabemos que $C = \lambda^\alpha/\Gamma(\alpha) = (1/2)^2/1! = 1/4$.
A probabilidade que o sistema funcione por pelo menos 5 meses é dada por

$$\int_{5}^{\infty} \tfrac{1}{4}\,x\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x = \left(-\tfrac{1}{2}(x+2)\,\mathrm{e}^{-x/2}\right)\Big|_{5}^{\infty} = \tfrac{7}{2}\,\mathrm{e}^{-5/2} \approx 0{,}287.$$

5.3. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} C\,(2x - x^3) & 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Poderia f ser uma função densidade de probabilidade? Caso positivo, determine C.Repita considerando que a função $f(x)$ seja dada por

$$f(x) = \begin{cases} C\,(2x - x^2) & 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Solução: Em ambos casos f não pode ser uma função densidade de probabilidade, pois a integral de f em qualquer intervalo deve ser não-negativa, uma vez que representa uma probabilidade. Note que os pontos que estão em uma vizinhança de $x = 1$ tem sinal oposto aqueles que estão em uma vizinhança de $x = 5/2$. Logo, independente do sinal escolhido para C, em algum dos dois casos a integral será negativa e, portanto, f não pode ser uma função densidade de probabilidade.

5.5. Um posto de gasolina é abastecido com gasolina uma vez por semana. Se o volume semanal de vendas em milhares de litros é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 5\,(1-x)^4 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

qual deve ser a capacidade do tanque para que a probabilidade do fornecimento não ser suficiente em uma dada semana seja de 0,01?

Solução: Queremos descobrir x_0 para o qual as vendas serem superiores à x_0 tenha probabilidade 0,01, ou seja,

$$\int_{x_0}^{1} 5\,(1-x)^4 \,\mathrm{d}x = 0{,}01 \;\Rightarrow\; (1-x_0)^5 = 0{,}01 \;\Rightarrow\; x_0 = 0{,}602.$$

Logo, a capacidade do tanque deve ser de 602 litros.

5.7. A função densidade de X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Se $E[X] = 3/5$,determine a e b.

Solução:

$$\int_0^1 (a + bx^2)\,\mathrm{d}x = 1 \;\Rightarrow\; a + b/3 = 1.$$

$$E[X] = \int_0^1 x(a + bx^2)\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; a/2 + b/4 = 3/5.$$

Resolvendo essas duas equações para a e b obtemos $a = 3/5$ e $b = 6/5$.

5.10. Trens em direção ao destino A chegam na estação em intervalos de 15 minutos a partir das 7:00 da manhã, enquanto trens em direção ao destino B chegam à estação em intervalos de 15 minutos começando as 7:05 da manhã.

(a) Se certo passageiro chega à estação em um horário uniformemente distribuído entre 7:00 e 8:00 da manhã e pega o primeiro trem que chega, em que proporção de tempo ele vai para o destino A?

(b) E se o passageiro chegar em um horário uniformemente distribuído entre 7:10 e 8:10 da manhã?

Solução:

(a) Note que a pessoa pegará o trem A se ela chegar nos intervalos de tempo 7:05-7:15, 7:20-7:30, 7:35-7:45 ou 7:50-8:00. O que totaliza 40 minutos. Como o horário que a pessoa chega é distribuído uniformemente em 60 minutos, então a proporção de vezes que ela pega o trem A é $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$.

(b) Nesse novo cenário, os intervalos são 7:10-7:15, 7:20-7:30, 7:35-7:45, 7:50-8:00 ou 8:05-8:10. O que totaliza 40 minutos também. Logo, a proporção de vezes que ela pega o trem A continua sendo $\frac{2}{3}$.

5.11. Um ponto é escolhido aleatoriamente em um segmento de reta de comprimento L. Interprete este enunciado e determine a probabilidade de que a relação entre o segmento mais curto e o mais longo seja menor que 1/4.

Solução: Seja ℓ o tamanho do comprimento mais curto. Queremos saber quando $\ell/(L-\ell) \leq 1/4$, ou seja, quando $\ell \leq \frac{L}{5}$. Seja X uma variável aleatória uniformemente distribuída em $(0, L)$, então nosso problema é equivalente à

$$P(X \in (0, \tfrac{L}{5}) \cup (\tfrac{4L}{5}, L)) = \frac{(L/5 - 0) + (L - 4L/5)}{L} = \frac{2}{5}.$$

5.13. Você chega na parada de ônibus as 10:00, sabendo que o ônibus chegará em algum horário uniformemente distribuído entre 10:OO e 10:30.

(a) Qual é a probabilidade de que você tenha que esperar mais de 10 minutos?

(b) Se, as 10:15, o ônibus ainda não tiver chegado, qual é a probabilidade de que você tenha que esperar pelo menos mais 10 minutos?

Solução: Seja X uma variável aleatória uniformemente distribuída em $(0, 30)$

(a)

$$P(X > 10) = \frac{30 - 10}{30} = \frac{2}{3}.$$

(b)

$$P(X > 25 \mid X > 15) = \frac{P(X > 25, X > 15)}{P(X > 15)} = \frac{P(X > 25)}{P(X > 15)} = \frac{5/30}{15/30} = \frac{1}{3}.$$

5.14. Seja X uma variável aleatória uniforme no intervalo $(0, 1)$. Calcule $E[X^n]$ usando a Proposição 2.1 e depois verifique o resultado usando a definição de esperança.

Solução: Usando a Proposição 2.1, temos

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, f_X(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Usando a definição, primeiro é necessário encontrar a distribuição de $Y = X^n$.

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(X^n \le x) = P(X \le x^{1/n}) = F_X(x^{1/n}).$$

Derivando ambos lados da equação, encontramos a densidade,

$$f_Y(x) = \frac{x^{(1-n)/n}}{n} f_X(x^{1/n}) = \frac{x^{(1-n)/n}}{n} \quad 0 < x < 1.$$

Logo,

$$E[X^n] = E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_Y(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x \frac{x^{(1-n)/n}}{n} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{1/n}}{n} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

5.15. Se X é uma variável aleatória normal com parâmetros $\mu = 10$ e $\sigma^2 = 36$, calcule

(a) $P(X > 5)$;

(b) $P(4 < X < 16)$;

(c) $P(X < 8)$;

(d) $P(X < 20)$;

(e) $P(X > 16)$.

Solução: Primeiramente, devemos colocar X em função de uma variável aleatória normal padrão para podermos usar a Tabela 5.1.
Assim, $X = \mu + \sigma Z = 10 + 6Z$, onde $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

(a) $P(X > 5) = P(10 + 6Z > 5) = P(Z > -5/6) = 1 - \Phi(-5/6)$
$= \Phi(5/6) \approx 0{,}7967.$

(b) $P(4 < X < 16) = P(X < 16) - P(X < 4) = P(Z < 1) - P(Z < -1)$
$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0{,}6826.$

(c) $P(X < 8) = P(Z < -1/3) = \Phi(-1/3) = 1 - \Phi(1/3) \approx 0{,}3707.$

(d) $P(X < 20) = P(Z < 5/3) = \Phi(5/3) \approx 0{,}9515.$

(e) $P(X > 16) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - \Phi(1) \approx 0{,}1587.$

5.16. O volume anual de chuvas (em mm) em certa região é normalmente distribuído com $\mu = 40$ e $\sigma = 4$. Qual é a probabilidade de que, a contar deste ano, sejam necessários mais de 10 anos antes que o volume de chuva em um ano supere 50 mm? Que hipóteses você está adotando?

Solução: Seja p a probabilidade que o volume de chuva não supere 50 mm em um ano e Z uma variável aleatória normal padrão. Então,

$$p = P(Z < \tfrac{50-40}{4}) = P(Z < 5/2) = \Phi(5/2) \approx 0{,}9938.$$

Se o volume de chuva de cada ano forem independentes, então a probabilidade que demore mais de 10 anos para superar os 50 mm em um ano é dado por $p^{10} \approx 0{,}9397$.

5.17. Um homem praticando tiro ao alvo recebe 10 pontos se o tiro estiver a 1 cm do alvo, 5 pontos se estiver entre 1 e 3 cm do alvo, e 3 pontos se estiver entre 3 e 5 cm do alvo. Determine o número esperado de pontos que ele receberá se a distância do ponto de tiro até o alvo for uniformemente distribuída entre 0 e 10.

Solução: Seja g a função que associa a distância ao alvo à pontuação recebida e X

a distância ao alvo, então queremos saber

$$
\begin{aligned}
E[g(X)] &= \int_0^{10} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 10\tfrac{1}{10}\,\mathrm{d}x + \int_1^3 5\tfrac{1}{10}\,\mathrm{d}x + \int_3^5 3\tfrac{1}{10}\,\mathrm{d}x \\
&= (1-0)1 + (3-1)\tfrac{1}{2} + (5-3)\tfrac{3}{10} \\
&= \frac{13}{5} = 2{,}6.
\end{aligned}
$$

5.18. Suponha que X seja uma variável aleatória normal com média 0,5. Se $P(X > 9) = 0{,}2$, qual é o valor de $\mathrm{Var}(X)$, aproximadamente?

Solução: Seja Z uma variável aleatória normal padrão, então

$$0{,}2 = P(X > 9) = P(Z > 8{,}5/\sigma) = 1 - \Phi(8{,}5/\sigma),$$

Logo, $\Phi(8{,}5/\sigma) = 0{,}8$. Da Tabela 5.1, obtemos que $8{,}5/\sigma \approx 0{,}84$ e, portanto, $\sigma \approx 10{,}12$ e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \approx 102{,}4$.

5.19. Seja X uma variável aleatória normal com média 12 e variância 4. Determine o valor de c tal que $P(X > c) = 0,1$.

Solução: Seja Z uma variável aleatória normal padrão, então

$$0{,}1 = P(X > c) = P(Z > (c-12)/2) = 1 - \Phi((c-12)/2),$$

Logo, $\Phi((c-12)/2) = 0{,}9$. Da Tabela 5.1, obtemos que $(c-12)/2 \approx 1{,}28$ e, portanto, $c \approx 14{,}56$.

5.20. Se 65% da população de uma grande comunidade são a favor de um aumento proposto para as taxas escolares, obtenha uma aproximação para a probabilidade de que uma amostra aleatória de 100 pessoas contenha

(a) pelo menos 50 pessoas a favor da proposta;

(b) entre 60 e 70 pessoas (inclusive) a favor;

(c) menos de 75 pessoas a favor.

Solução: A variável aleatória N que representa o número de pessoas à favor é uma binomial de parâmetros $p = 0{,}65$ e $n = 100$. Porém, como n é grande, podemos aproximar por uma normal X de média $\mu = np = 65$ e $\sigma^2 = np(1-p) = 22{,}75$ (Teorema limite de DeMoivre e Laplace). Seja Z uma normal padrão.

(a) Usando *correção de continuidade*, temos que

$$\begin{aligned} P(N \geq 50) &\approx P(X \geq 49{,}5) = 1 - P(Z < \tfrac{49{,}5-65}{\sqrt{22{,}75}}) \\ &= 1 - \Phi(-3{,}25) = \Phi(3{,}25) \approx 0{,}9994. \end{aligned}$$

(b) Usando *correção de continuidade*, temos que

$$\begin{aligned} P(60 \leq N \leq 70) &\approx P(59{,}5 \leq X \leq 70{,}5) \\ &= P(Z < \tfrac{70{,}5-65}{\sqrt{22{,}75}}) - P(Z < \tfrac{59{,}5-65}{\sqrt{22{,}75}}) \\ &= \Phi(1{,}15) - \Phi(-1{,}15) = 2\Phi(1{,}15) - 1 \\ &\approx 0{,}7498. \end{aligned}$$

(c) Usando *correção de continuidade*, temos que

$$P(N < 75) \approx P(X < 74{,}5) = P(Z < \tfrac{74{,}5-65}{\sqrt{22{,}75}}) = \Phi(1{,}99) \approx 0{,}9767.$$

5.23. Realizam-se mil jogadas independentes de um dado honesto. Calcule a probabilidade aproximada de que o número 6 apareça entre 150 e 200 vezes, inclusive. Se o número 6 aparecer exatamente 200 vezes, determine a probabilidade de que o número 5 apareça menos de 150 vezes.

Solução: Seja N uma variável aleatória com distribuição binomial n e p. Quando n é grande, podemos aproximar por uma variável aleatória X distribuída como normal de parâmetros $\mu = np$ e $\sigma^2 = np(1-p)$. Seja Z a normal padrão.
Para o número 6 aparecer entre 150 e 200 vezes em mil jogadas, temos que $n = 1000$, $p = 1/6$ e queremos saber

$$\begin{aligned} P(150 \leq N \leq 200) &\approx P(149{,}5 \leq X \leq 200{,}5) = P(\tfrac{200{,}5-166{,}7}{11{,}785} \leq Z \leq \tfrac{149{,}5-166{,}7}{11{,}785}) \\ &= \Phi(2{,}87) - \Phi(-1{,}5) = \Phi(2{,}87) + \Phi(1{,}5) - 1 \approx 0{,}9311. \end{aligned}$$

Por outro lado, se sabemos que já saíram exatamente 200 dados marcando 6, sobram 800 dados para saírem números 5, agora com $1/5$ de chance. Fazendo exatamente o mesmo procedimento feito acima, mas com $n = 800$ e $p = 1/5$, chegamos em $P(N < 150) \approx P(X < 149{,}5) \approx 0{,}1762$.

5.28. Em 10.000 jogadas independentes de uma moeda, observou-se que deu cara 5800 vezes. É razoável supor que essa moeda não seja honesta? Explique.

Solução: Seja N uma variável aleatória com distribuição binomial n e p. Quando n é grande, podemos aproximar por uma variável aleatória X distribuída como normal de parâmetros $\mu = np$ e $\sigma^2 = np(1-p)$. Seja Z a normal padrão.
Se a moeda for honesta, então $n = 10\,000$, $p = 1/2$. Nesse caso, não é necessário correção de continuidade, pois n é realmente grande. É interessante saber a seguinte probabilidade

$$\begin{aligned} P(N \geq 5\,800) \approx P(X \geq 5800) &= P(Z \geq \tfrac{5800-5000}{\sqrt{2500}}) \\ &= 1 - \Phi(16) \approx 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, como a chance de pelo menos 5 800 caras em 10 000 lançamentos é praticamente nula, então é bem razoável supor que a moeda não seja honesta.

5.31. (a) Uma estação de bombeiros deve ser instalada ao longo de uma estrada com comprimento A, $A < \infty$. Se incêndios ocorrem em pontos uniformemente distribuídos no intervalo $(0, A)$, qual deveria ser a localização da estação de forma a minimizar-se a distância esperada para o incêndio? Isto é, escolha a de forma que $E[|X - a|]$ seja minimizado quando X for uniformemente distribuído ao longo de $(0, A)$.

(b) Agora suponha que a estrada tenha comprimento infinito – indo do ponto 0 até ∞. Se a distância de um incêndio até o ponto 0 é exponencialmente distribuída com taxa λ, onde deveria estar localizada a estação? Isto é, queremos minimizar $E[|X - a|]$, onde X é agora exponencial com taxa λ.

Solução:

(a) Comecemos calculando a esperança em função de $a \in [0, A]$,

$$\begin{aligned} E[|X-a|] &= \int_{-\infty}^{\infty} |x-a| f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^A |x-a| \frac{1}{A}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a \frac{(a-x)}{A}\mathrm{d}x + \int_a^A \frac{(x-a)}{A}\mathrm{d}x \\ &= \frac{a^2}{A} - a + \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Para encontrar o ponto de mínimo, derivamos a expressão acima em relação à a e igualamos à zero, encontrando $a = A/2$. É um ponto de mínimo global, pois a segunda derivada é positiva em toda região de interesse (função é convexa).

(b) Analogamente,

$$\begin{aligned}
E[|X-a|] &= \int_{-\infty}^{\infty} |x-a| f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\infty} |x-a| \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{a} (a-x)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x + \int_{a}^{\infty} (x-a)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= a + \frac{2\,\mathrm{e}^{-\lambda a}-1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Novamente, derivamos em relação à a e igualamos à zero,

$$1 - 2\mathrm{e}^{-\lambda a} = 0 \Rightarrow a = \frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

É um ponto de mínimo global, pois a segunda derivada da função é positiva em toda região de interesse (é convexa).

5.32. O tempo (em horas) necessário para a manutenção de uma máquina é uma variável aleatória exponencialmente distribuída com $\lambda = 1/2$. Qual é

(a) a probabilidade de que um reparo dure mais que 2 horas?

(b) a probabilidade condicional de que o tempo de reparo dure pelo menos 10 horas, dado que a sua duração seja superior a 9 horas?

Solução: Seja X o tempo para manutenção da máquina, então $f_X(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}$.

(a)

$$P(X > 2) = \int_{2}^{\infty} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368.$$

(b)

$$P(X > 10 \mid X > 9) = \frac{P(X > 10)}{P(X > 9)} = \frac{\mathrm{e}^{-10/2}}{\mathrm{e}^{-9/2}} = \mathrm{e}^{-1/2} \approx 0{,}607.$$

A exponencial não tem memória, o problema é equivalente à $P(X > 1)$.

5.37. Se a variável aleatória X é uniformemente distribuída ao longo do intervalo $(-1, 1)$, determine:

(a) $P(|X| > 1/2)$;

(b) a função densidade da variável aleatória $|X|$.

Solução:

(a)

$$P(|X| > 1/2) = P(X > 1/2) + P(X < -1/2) = 1/4 + 1/4 = 1/8.$$

(b) A função distribuição acumulada de $|X|$ é dada por

$$F_{|X|}(x) = P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) = F_X(x) - F_X(-x),$$

quando $x > 0$. Por outro lado, $F_{|X|}(x) = 0$, se $x < 0$.
Derivando dos dois lados de cada equação, obtemos a densidade de $|X|$,

$$f_{|X|}(x) = f_X(x) + f_X(-x) = 1, \quad 0 < x < 1,$$

e $f_{|X|}(x) = 0$, caso contrário.

5.38. Se a variável aleatória Y é uniformemente distribuída ao longo do intervalo $(0, 5)$, qual é a probabilidade de que as raízes da equação $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ sejam ambas reais?

Solução: Para uma equação do segundo grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ ter raízes reais é necessário e suficiente que $b^2 - 4ac \geq 0$. Logo, queremos saber

$$\begin{aligned}
P((4Y)^2 - 4 \cdot 4\,(Y + 2) \geq 0) &= P(Y^2 - Y - 2 \geq 0) \\
&= P((Y - 2)(Y + 1) \geq 0) \\
&= P(Y \leq -1) + P(Y \geq 2) \\
&= 0 + \frac{5 - 2}{5} = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

5.39. Se X é uma variável aleatória exponencial com parâmetro $\lambda = 1$, calcule a função densidade de probabilidade da variável aleatória Y definida como $Y = \log X$.

Solução: Comecemos pela função distribuição acumulada

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\log X \leq x) = P(X \leq \mathrm{e}^x) = F_X(\mathrm{e}^x).$$

Derivando ambos lados da equação em relação à x, obtemos que

$$f_Y(x) = \mathrm{e}^x f_x(\mathrm{e}^x) = \lambda \exp(x - \lambda \mathrm{e}^x) = \exp(x - \mathrm{e}^x).$$

5.40. Se X é uniformemente distribuída ao longo do intervalo $(0, 1)$, determine a função densidade de $Y = \mathrm{e}^X$.

Solução: Comecemos pela função distribuição acumulada ($x > 0$)

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\mathrm{e}^X \leq x) = P(X \leq \log(x)) = F_X(\log(x)).$$

Derivando ambos lados da equação em relação à x, obtemos que

$$f_Y(x) = \frac{f_x(\log(x))}{x} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 1 < x < \mathrm{e}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

5.41. Determine a distribuição de $R = A \sin \theta$, onde A é uma constante fixa, e θ é uma variável aleatória uniformemente distribuída em $(-\pi/2, \pi/2)$. A variável aleatória R surge da teoria da balística. Se um projétil é disparado de sua origem com um ângulo α em relação à superfície da terra com uma velocidade v, então o ponto R no qual ele retorna à terra pode ser escrito como $R = (v^2/g) \sin 2\alpha$, onde g é a aceleração da gravidade,que é igual a 9,8 m/s^2.

Solução: Comecemos pela função distribuição acumulada

$$F_R(r) = P(R \leq r) = P(A \sin \theta \leq r) = P(\theta \leq \arcsin(r/A)) = F_\theta(\arcsin(r/A)).$$

Derivando ambos lados da equação em relação à r, obtemos que

$$f_R(r) = \frac{f_\theta(\arcsin(r/A))}{\sqrt{A^2 - r^2}} = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - r^2}}, & -A < r < A; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

5 Exercícios Teóricos

5.27. Se X é uniformemente distribuída em (a, b), qual variável aleatória que varia linearmente com X é uniformemente distribuída em $(0, 1)$?

Solução: Seja $Y = (X - a)/(b - a)$, então

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P((X - a)/(b - a) \leq y) \\ &= P(X \leq (b - a)\, y + a) = F_X((b - a)\, y + a). \end{aligned}$$

Derivando os dois lados da equação em relação à y obtemos que

$$f_Y(y) = (b - a) f_X((b - a)\, y + a) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \in (0, 1); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, Y é uniformemente distribuída em $(0, 1)$.
Observação: outra opção é fazer $Y = (b - X)/(b - a)$.

5.29. Seja X uma variável aleatória contínua com função distribuição cumulativa F. Defina a variável aleatória Y como $Y = F(X)$. Mostre que Y é uniformemente distribuída em $(0, 1)$.

Solução: Por simplicidade, vamos supor que $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ seja estritamente crescente. Logo, F é inversível e para $y \in (0, 1)$,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y) = P(X \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y.$$

Dessa forma, quando $y \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \leq 0; \\ y, & \text{se } 0 < y < 1; \\ 1, & \text{se } y \geq 1; \end{cases}$$

o que caracteriza uma distribuição uniforme em $(0, 1)$.
Observação: Isso também acontece quando F não é inversível.

5.30. Suponha que X tenha função densidade de probabilidade f_X. Determine a função densidade de probabilidade da variável aleatória Y definida como $Y = aX + b$.

Solução: Seja $a > 0$,

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(aX + b \le y) = P(X \le (y-b)/a) = F_X((y-b)/a).$$

Derivando ambos lados da equação em relação à y leva à

$$f_Y(y) = \frac{f_X((y-b)/a)}{a}.$$

Por outro lado, se $a < 0$, então

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(X \ge (y-b)/a) = 1 - P(X < (y-b)/a) = 1 - F_X([(y-b)/a]^-) \\ &= 1 - F_X((y-b)/a) \quad \text{(a variável aleatória é contínua).} \end{aligned}$$

Novamente, derivando ambos lados da equação em relação à y leva à

$$f_Y(y) = \frac{f_X((y-b)/a)}{-a}.$$

Portanto, quando $a \neq 0$,

$$f_Y(y) = \frac{f_X((y-b)/a)}{|a|}.$$

Desafio!

1. Um investidor comprou uma ação muito instável. A cada mês, o valor dessa ação segue uma distribuição uniforme no intervalo $(0, 1000)$ e é independente dos meses anteriores. O investidor pode vender a ação quando quiser, porém a cada mês que passa o dinheiro, para o investidor, vale d vezes o mês anterior $(0 < d < 1)$. Qual estratégia ele deve seguir para maximizar o retorno esperado na venda dessa ação? Se $d = 4/5$, qual deve ter sido o valor máximo pago na compra da ação para que o investidor tenha um valor esperado de lucro positivo?