EE400 – *Métodos da Engenharia Elétrica*

Docente: Matheus Souza

Solução para problemas selecionados

– Lista de Exercícios 9 –

Plínio S. Dester
(pliniodester@hotmail.com)

18 de Janeiro de 2022

Em caso de dúvidas, sugestões ou correções, não hesite em mandar um e-mail.

9 Exercícios

9.4. Mostre que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ni}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+i}$ divergem.

Solução: Para o primeiro somatório

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ni}\right| = \frac{1}{|i|}\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right|,$$

que diverge, pois sabemos que a soma harmônica $\sum_n 1/n$ diverge.

Para o segundo somatório, vamos usar o fato que se a parte real da soma diverge, então a soma diverge. Assim,

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+i}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que diverge. Como a parte real do somatório é maior do que algo que diverge, então o somatório original diverge.

9.5. Determine o raio de convergência e a soma das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2z^n$.

Solução: Sabemos que o raio de convergência R de uma série de potências $\sum_n a_n z^n$ é dado pelo seguinte limite, se ele existir,

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Ademais, sabemos que se $|z| < 1$ podemos derivar a soma geométrica em relação à z,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} n\, z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2} \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, z^{n-2} = \frac{2}{(1-z)^3}.$$

Assim,

(a) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1,$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1;$$

(b) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nz^n = z\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1;$$

(c) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} + z\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}, \; |z| < 1.$$

9.6. Calcule a soma S da série

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n.$$

Solução: Note que $|(1+i)/3| = \sqrt{2}/3 < 1$. Portanto, podemos usar a fórmula da soma da progressão geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1+i}{3}} = \frac{3}{2-i} = \frac{3}{5}(2+i).$$

9.7. Considere $z = re^{i\theta}$, com $r \in (0,1)$. Use a soma da série $\sum z^n$ provada no item anterior para mostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(n\theta) = \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Solução: Como $|re^{i\theta}| = |r| < 1$, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} = \frac{1}{1 - re^{i\theta}} = \frac{1 - re^{-i\theta}}{1 - r(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + r^2}.$$

Usando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = \frac{1 - r\cos\theta + i\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Comparando as partes reais e imaginárias da identidade acima termina a prova.

9.9. Obtenha a representação em série de Maclaurin para as funções cosh e sinh. Use este resultado para mostrar que

$$z\cosh(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+1}}{(2n)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Solução:

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Logo,

$$z\cosh z^2 = z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+1}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

9.10. Mostre que a série de Taylor da exponencial centrada em $z = 1$ é dada por

$$e^z = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Solução: Sabemos da expansão de Maclaurin da exponencial que

$$e^{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Multiplicando por e em ambos lados da equação, temos

$$e^z = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

9.11. Encontre uma representação em série de Maclaurin para a função f dada por

$$f(z) = \frac{z}{z^4 + 9}$$

Solução:

$$f(z) = \frac{z}{z^4+9} = \frac{z}{9} \frac{1}{1-(-z^4/3^2)} = \frac{z}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n}}{3^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{3^{2(n+1)}}, \quad |z| < \sqrt{3}.$$

Para encontrar a região de convergência, basta lembrar que antes de expandir usando a série geométrica, devemos lembrar que $|-z^4/3^2| < 1$.

9.12. Demonstre a representação em série de Taylor

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}, \quad \forall z \,:\, |z-i| < \sqrt{2}.$$

Solução: Seja $\omega = z - i$,

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i-\omega} = \frac{1}{1-i} \frac{1}{1-\frac{\omega}{1-i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{(1-i)^{n+1}}, \quad \left|\frac{\omega}{1-i}\right| < 1 \Leftrightarrow |\omega| < \sqrt{2}.$$

Dessa forma,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}, \quad |z-i| < \sqrt{2}.$$

9.14. Expanda a função f dada por

$$f(z) = \frac{1}{(2z-1)(z-2)^2}$$

em série de Laurent em torno dos pontos $z = 1/2$ e $z = 2$.

Solução: Seja $\omega = z - 1/2$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2z-1)(z-2)^2} &= \frac{2}{\omega(3-2\omega)^2} = \frac{2}{9\omega}\frac{1}{(1-\frac{2}{3}\omega)^2} \\
&= \frac{2}{9\omega}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\omega\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{2^n}{3^{n+1}}\omega^{n-2}, \quad |\tfrac{2}{3}\omega| < 1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}(z-1/2)^{n-2}, \quad |z-1/2| < 3/2.
\end{aligned}$$

Seja $\omega = z - 2$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2z-1)(z-2)^2} &= \frac{1}{\omega^2(3+2\omega)} = \frac{1}{3\omega^2}\frac{1}{1-(-\frac{2}{3}\omega)} \\
&= \frac{1}{3\omega^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\omega\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}\omega^{n-2}, \quad |\tfrac{2}{3}\omega| < 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}(z-2)^{n-2}, \quad |z-2| < 3/2.
\end{aligned}$$

9.15. Expanda a função f dada por

$$f(z) = \frac{1}{4z - z^2}$$

em série de Laurent centrada na origem. Indique a região de convergência da série.

Solução:

$$f(z) = \frac{1}{4z-z^2} = \frac{1}{4z}\frac{1}{1-z/4} = \frac{1}{4z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}, \quad |z| < 4.$$

Alternativamente,

$$f(z) = \frac{1}{4z-z^2} = \frac{-1}{z^2}\frac{1}{1-4/z} = \frac{-1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4^n}{z^{n+2}}, \quad |z| > 4.$$

9.16. Encontre uma expansão da função real f dada por

$$f(x) = \frac{\cosh x}{\sinh x} - \frac{1}{x}$$

para x pequeno.

Solução:

$$\begin{aligned} f(x) + \frac{1}{x} &= \frac{1 + x^2/2! + \cdots}{x + x^3/3! + \cdots} \\ &= \frac{1}{x}\frac{1 + x^2/2 + \cdots}{1 + x^2/6 + \cdots} \\ &= \frac{1}{x}\left((1 + x^2/2 + \cdots)(1 - x^2/6 + \cdots)\right) \\ &= \frac{1}{x}(1 + x^2/3 + \cdots). \end{aligned}$$

Portanto, para $x \approx 0$ temos que

$$f(x) \approx \frac{x}{3}.$$

A expansão completa é difícil de provar e é igual a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1},$$

onde B_n é o n-ésimo número de Bernoulli.

9.18. Encontre uma representação em série de Laurent, centrada em $z_0 = 0$, para a função f dada por

$$f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Indique a região de convergência da série.

Solução: Usando que

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

temos que

$$z^2 \sin(1/z^2) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1/z^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{4n}(2n+1)!}, \quad |z| > 0.$$

9.19. Encontre uma expansão em série de potências para a função f dada por

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2}$$

em torno do ponto singular $z_0 = -1$. Indique a região de convergência da série.

Solução: Usando a expansão da função exponencial, temos que

$$e^{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Portanto,

$$f(z) = \frac{e^{z+1}}{e(z+1)^2} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{n-2}}{n!}, \quad |z+1| > 0.$$

9.20. Determine uma representação em série de potências para a função f dada por

$$f(z) = \frac{1}{1+z}$$

em potências negativas de z e que seja válida quando $1 < |z| < \infty$.

Solução:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \frac{1}{1+1/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n}, \quad |1/z| < 1, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 1. \end{aligned}$$

9.21. Expanda a função f dada por

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

em duas séries de potências de z e especifique as respectivas regiões de convergência.

Solução: Uma possível expansão é

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2}, \quad 0 < |z| < 1.$$

A outra é

$$f(z) = \frac{-1}{z^3} \frac{1}{1-1/z} = \frac{-1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{z^{n+3}}, \quad |z| > 1.$$

9.23. Mostre que, se $0 < |z-1| < 2$, então

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)} = -3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}.$$

Solução: Seja $\omega = z-1$, então

$$\begin{aligned}
\frac{z}{(z-1)(z-3)} &= \frac{1+\omega}{\omega(\omega-2)} = \left(1+\frac{1}{\omega}\right)\frac{-1/2}{1-\omega/2} = \frac{-1}{2}\left(1+\frac{1}{\omega}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\omega}{2}\right)^n, \quad 0<|\omega|<2,\\
&= \frac{-1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\omega}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^{n-1}}{2^n}\right) = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{\omega} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\omega^n\right)\\
&= \frac{-1}{2\omega} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}3\frac{\omega^n}{2^{n+1}} = \frac{-1}{2(z-1)} - 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}, \quad 0<|z-1|<2.
\end{aligned}$$

9.24. Mostre que a expansão

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2}z - \frac{5}{6}z^2 + \cdots$$

é válida para todo z tal que $0 < |z| < 1$.

Solução: Sabemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+z^2} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}, \quad |z|<1,\\
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{e^z}{z(z^2+1)} &= \frac{1}{z}\left(1 - z^2 + z^4 - \cdots\right)\left(1 + z + z^2/2 + z^3/6 + \cdots\right)\\
&= \frac{1}{z} + 1 - \frac{z}{2} - \frac{5}{6}z^2 + \cdots, \quad 0<|z|<1.
\end{aligned}$$

9 Problemas

9.3. **(Números de Euler)** Os *números de Euler* são os números E_n, $n = 0, 1, 2, \cdots$, na série de Maclaurin

$$\frac{1}{\cosh z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{n!}z^n, \quad \forall z : |z| < \pi/2.$$

Verifique o raio de convergência desta série. Verifique também que $E_{2n+1} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, determine os quatro primeiros números de Euler não-nulos.

Solução: O raio de convergência é dado pela distância entre a origem e o pólo mais próximo, que é em $\pm i\pi/2$, pois $\cosh i\pi/2 = 0$.

Como a função é par, então todos os coeficientes ímpares são nulos, ou seja, $E_{2n+1} = 0$.

Vamos expandir a série do cosh no denominador e em seguida expandir usando a série geométrica.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cosh z} &= \frac{1}{1 + (z^2/2! + z^4/4! + z^6/6! + \cdots)} \\ &= 1 - (z^2/2! + z^4/4! + z^6/6!) + (z^2/2! + z^4/4! + z^6/6!)^2 - (z^2/2! + z^4/4! + z^6/6!)^3 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{5}{4!}z^4 - \frac{61}{6!}z^6 + \cdots, \quad |z| < \pi/2.\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes temos que $E_0 = 1$, $E_2 = -1$, $E_4 = 5$ e $E_6 = -61$.

9.4. **(Transformada $\mathcal{Z}$)** Suponha que a série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

converge para uma função analítica X em um anel $r_1 < |z| < r_2$. Esta soma, $X(z)$, é chamada de transformada $\mathcal{Z}$ do sinal x. Use a expressão do termo geral da série de Laurent para mostrar que, se a região de convergência da série contiver o círculo unitário $|z| = 1$, então a *transformada $\mathcal{Z}$ inversa* pode ser escrita como

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Solução: Seja C o círculo unitário ao redor da origem. Sabemos que

$$\oint_C z^{k-1} X(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \oint_C z^{k-n-1} dz = 2\pi i\, x[k],$$

pois a função é analítica em $|z| = 1$. Logo, seja $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$, temos que

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta}) e^{(n-1)i\theta} i e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta}) e^{ni\theta} d\theta.$$

9.5. **(Um Sapo Preguiçoso e Assimétrico)** Um sapo pula um metro de $z = 0$ para $z = 1$ em seu primeiro pulo, 1/2 metro no seu segundo pulo, 1/4 de metro em seu terceiro pulo e assim sucessivamente; a cada salto, dada a sua condição, o sapo ainda gira de um ângulo α para a esquerda com relação ao salto precedente. Mostre que o sapo sempre irá parar, depois de muito tempo, sobre o círculo $|z - 4/3| = 2/3$, independentemente da escolha de α.

Solução: A posição do sapo é dada pelo somatório

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{i\alpha}}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{i\alpha}/2}, \tag{1}$$

pois $|e^{i\alpha}/2| = 1/2 < 1$.

Agora vamos calcular o valor de

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{1 - e^{i\alpha}/2} - \frac{4}{3}\right|^2 &= 4\left|\frac{1}{2 - e^{i\alpha}}\frac{2 - e^{-i\alpha}}{2 - e^{-i\alpha}} - \frac{2}{3}\right|^2 \\
&= 4\left|\frac{2 - e^{-i\alpha}}{4 - 4\cos\alpha + 1} - \frac{2}{3}\right|^2 \\
&= 4\left|\frac{3(2 - \cos\alpha + i\sin\alpha) - 2(5 - 4\cos\alpha)}{3(5 - 4\cos\alpha)}\right|^2 \\
&= \frac{4}{9}\left|\frac{5\cos\alpha - 4 + 3i\sin\alpha}{5 - 4\cos\alpha}\right|^2 \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{(5\cos\alpha - 4)^2 + 9\sin^2\alpha}{(5 - 4\cos\alpha)^2} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{(16 + 9)\cos^2\alpha - 40\cos\alpha + 16 + 9\sin^2\alpha}{25 - 40\cos\alpha + 16\cos^2\alpha} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{i\alpha}}{2}\right)^n - \frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$