EE400 – *Métodos da Engenharia Elétrica*

Docente: Matheus Souza

Solução para problemas selecionados

– Lista de Exercícios 3 –

Plínio S. Dester
(pliniodester@hotmail.com)

18 de Janeiro de 2022

Em caso de dúvidas, sugestões ou correções, não hesite em mandar um e-mail.

3 Exercícios

3.2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

Solução: Tome o caminho $x = y^2$, então

$$\lim_{y\to 0} f(y^2,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}.$$

Porém, com o caminho $x = y$, temos que

$$\lim_{y\to 0} f(y,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{1+y^2} = 0.$$

Portanto, o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe, pois resulta em diferentes valores para diferentes caminhos.

3.3. Calcule o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2},$$

se este existir. Se a existência for confirmada, que valor devemos arbitrar para a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ para que f seja contínua?

Solução: Vamos re-escrever o limite em coordenadas polares, ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2(\theta)\, r\sin(\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} r\cos^2\theta\sin\theta.$$

Sabemos que $-|r| \leqslant r\cos^2\theta\sin\theta \leqslant |r|$. Portanto, podemos concluir através do Teorema do Confronto que o limite que desejamos calcular existe e é nulo.

Dessa forma, f é contínua em $\mathbb{R}^2$ se definida da seguinte forma

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3.7. Encontre os pontos do elipsóide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ em que o plano tangente é paralelo ao plano $3x - y + 3z = 1$.

Solução: Sejam duas superfícies de nível $\mathcal{S}_1 = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : f_1(\vec{r}) = c_1\}$, $\mathcal{S}_2 = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : f_2(\vec{r}) = c_2\}$, $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Sabemos que planos tangentes às superfícies nos pontos $\vec{r}_1 \in \mathcal{S}_1$ e $\vec{r}_2 \in \mathcal{S}_2$ são paralelos sempre que $\nabla f_1(\vec{r}_1) = \alpha\nabla f_2(\vec{r}_2)$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Para o nosso problema, temos que

$$(2x, 4y, 6z) = \alpha\,(3, -1, 3) \;\Rightarrow (x, y, z) = \alpha\,(3/2, -1/4, 1/2).$$

Substituindo na equação do elipsoide temos que

$$\left(\frac{3}{2}\alpha\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\alpha\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2 = 1 \;\Rightarrow \alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

Portanto, os pontos do elipsoide são $\pm\frac{\sqrt{2}}{10}\,(6, -1, 2)$.

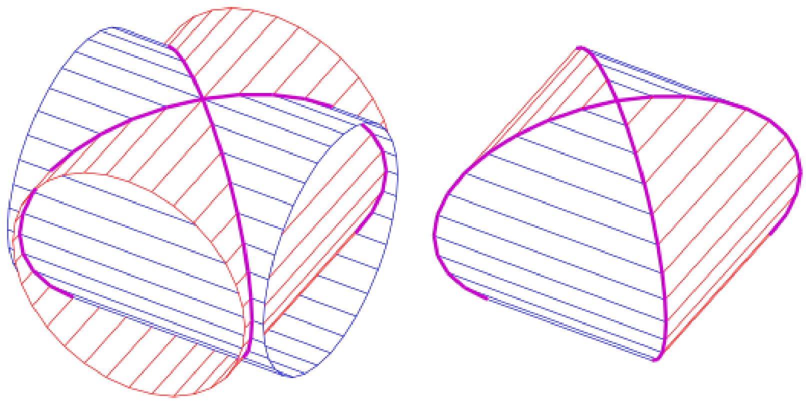
3.9. Calcule o volume do sólido definido pelo parabolóide $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ e pelo quadrado $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$ no plano $z = 0$.

Solução:

$$\int_1^2 \int_{-2}^{-1} \int_0^{1-x^2/4-y^2/9} dz\, dx\, dy = \frac{17}{108}.$$

3.10. Encontre o volume do sólido delimitado pelos cilindros $x^2 + z^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$.

Solução:



Note que a a região a ser integrada é formada por chapas quadradas de lado $2\sqrt{r^2 - z^2}$.

$$V = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} \int_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} dx\, dy\, dz = \int_{-r}^{r} 4\,(r^2 - z^2)\, dz = \frac{16}{3} r^3.$$

3.11. Calcule o volume do sólido delimitado inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solução: Em coordenadas cilíndricas temos que o volume

$$V = \int_{0}^{\sqrt{2}/2} \int_{r}^{\sqrt{1-r^2}} \int_{0}^{2\pi} r\, d\theta\, dz\, dr = 2\pi \int_{0}^{\sqrt{2}/2} \left(r\sqrt{1 - r^2} - r^2 \right) dr = \left(2 - \sqrt{2}\right) \frac{\pi}{3}.$$

Note que o limite de integração $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}/2$ se deve ao fato que a esfera intersecta o cilindro em $r^2 + r^2 = 1$, ou seja, em $r = \sqrt{2}/2$.

3.12. Calcule o volume do sólido delimitado superiormente pelo plano $z = 4$, inferiormente pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: Em coordenadas cilíndricas temos que o volume

$$V = \int_{0}^{1} \int_{1-r^2}^{4} \int_{0}^{2\pi} r\, d\theta\, dz\, dr = 2\pi \int_{0}^{1} \left(3r + r^3\right) dr = \frac{7\pi}{2}.$$

3 Problemas

3.1. Considere o circuito dado abaixo, em que E é a tensão constante fornecida por uma fonte, v_o é a tensão de saída do amplificador e R_x e R_y são resistências de projeto.

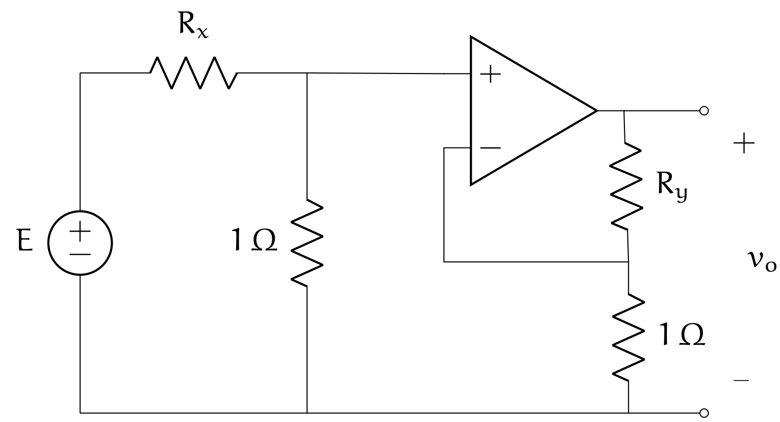


Figura 1: Amplificador não-inversor

Determine o ganho de tensão $G(R_x, R_y) := v_0/E$ e linearize esta função em torno de $R_x = R_y = 1\Omega$. Analise a influência de cada resistência neste ganho em torno deste ponto de operação.

Solução: A tensão v_+ do amplificador é dada por $v_+ = \frac{1}{1+R_x}E$.
A tensão v_0 é dada por $v_0 = \frac{1+R_y}{1}v_-$.
Num amplificador operacional ideal $v_+ = v_-$. Logo,

$$G(R_x, R_y) = \frac{v_0}{E} = \frac{1+R_y}{1+R_x}.$$

Linearizando G em torno do ponto $(1, 1)$, temos

$$\begin{aligned} G(R_x, R_y) &\approx G(1,1) + \frac{\partial G}{\partial x}(1,1)\,(R_x - 1) + \frac{\partial G}{\partial y}(1,1)\,(R_y - 1) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(R_x - 1) + \frac{1}{2}(R_y - 1) \\ &= 1 + \frac{R_y - R_x}{2}. \end{aligned}$$

3.5. Um aquário de volume V dado é construído a partir de uma base de pedra e de faces laterais de vidro. Se o metro quadrado de pedra custar cinco vezes o custo do metro quadrado de vidro, encontre as dimensões do aquário que minimizam o custo total de materiais necessários.

Solução: Sejam as dimensões do aquário x de comprimento, y de largura e z de altura, sabemos que $z = V/(xy)$. Queremos minimizar o custo para produzir o aquário, que é dado por

$$f(x, y) = 5xy + 2xz + 2yz = 5xy + 2V/y + 2V/x,$$

O ponto estacionário é tal que $\nabla f(x,y) = (0,0)$, ou seja, queremos x e y tais que

$$(5y - 2V/x^2, 5x - 2V/y^2) = (0,0).$$

Portanto, como $x > 0$, $y > 0$,

$$\begin{cases} x^2 y = 2V/5, \\ xy^2 = 2V/5. \end{cases}$$

Subtraindo uma equação da outra concluímos que $x = y$. Logo,

$$x = y = \left(\frac{2}{5}V\right)^{1/3}, \quad z = \left(\frac{25}{4}V\right)^{1/3}.$$

3.7. **(Integral Gaussiana)** Um resultado fundamental na área de estatística e probabilidade é dado pela igualdade

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1.$$

Neste exercício, provaremos esta igualdade.

(a) Considere a integral imprópria

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dA.$$

Use que $\mathbb{R}^2$ pode ser visto como um disco com raio infinito para mostrar que $I = \pi$.

(b) Redefina a região da integral agora para o quadrado $R = [-a, a] \times [-a, a]$, com $a \to \infty$ e mostre que

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dA = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \pi.$$

(c) Use o item anterior para provar a igualdade no início do exercício.

Solução:

(a) Em coordenadas polares temos

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r \, d\theta \, dr = 2\pi \left. \frac{-e^{-r^2}}{2} \right|_0^{\infty} = \pi.$$

(b)

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dA \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \\
&= \pi.
\end{aligned}
$$

(c) Do item anterior, temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Fazendo a mudança de variável $x = u/\sqrt{2}$ mostramos o resultado desejado.

3.9. **(Área de uma Superfície)** Se uma superfície suave S for definida por $z = f(x, y)$, sendo $(x, y) \in D$, a sua área é dada por

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA.$$

Calcule a área do parabolóide $z = x^2 + y^2$ delimitado pelo plano $z = 9$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
A(S) &= \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2}\, r \, d\theta \, dr \\
&= \frac{\pi}{6} \left(37\sqrt{37} - 1 \right).
\end{aligned}
$$