EE400 – *Métodos da Engenharia Elétrica*

Docente: Matheus Souza

Solução para problemas selecionados

– Lista de Exercícios 8 –

Plínio S. Dester
(`pliniodester@hotmail.com`)

18 de Janeiro de 2022

Em caso de dúvidas, sugestões ou correções, não hesite em mandar um e-mail.

8 Exercícios

8.1. Calcule a integral

$$\int_C \frac{z+2}{z} dz,$$

sendo C

(a) o semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, com $\theta \in [0, \pi]$;

(b) o semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, com $\theta \in [\pi, 2\pi]$;

(c) o círculo $z = 2e^{i\theta}$, com $\theta \in [0, 2\pi]$;

(d) o quadrado com orientação positiva e com vértices $\pm 1 \pm i$.

Solução: Usando o Teorema Fundamental do Cálculo para variáveis complexas, temos que

$$\int_C \frac{z+2}{z} dz = \int_C \left(1 + \frac{2}{z}\right) dz = \left(z + 2\,\mathrm{Log}\, z\right)\Big|_{z_0}^{z_1},$$

desde que C não passe pelo corte de ramos. Os pontos z_0 e z_1 são o inicial e final, respectivamente.

(a)

$$\int_C \frac{z+2}{z} dz = \left(z + 2\,\mathrm{Log}\, z\right)\Big|_{2}^{-2} = -4 + 2\pi i.$$

(b) Vamos fazer $\theta \in (-\pi, 0]$ para C não passar pelo corte de ramos. Assim,

$$\int_C \frac{z+2}{z} dz = \left(z + 2\,\mathrm{Log}\, z\right)\Big|_{2e^{-i\pi^+}}^{2} = 4 + 2\pi i.$$

(c) A soma dos dois itens anteriores resulta na integral do círculo proposto, ou seja,

$$\int_C \frac{z+2}{z} dz = (-4+2\pi i) + (4+2\pi i) = 4\pi i.$$

(d) Pelo princípio da deformação do caminho esse item é igual ao anterior, ou seja, $4\pi i$.

8.2. Calcule a integral

$$\oint_C \pi \exp(\pi \bar{z}) dz,$$

sendo C o quadrado com vértices nos pontos 0, 1, $1+i$ e i e com orientação positiva.

Solução: Nesse caso não podemos usar o Teorema Fundamental, pois a função não é analítica. Assim,

$$\begin{aligned}\oint_C \pi \exp(\pi \bar{z}) dz &= \int_0^1 \pi e^{\pi x} dx + \int_0^1 \pi e^{\pi(1-iy)} i dy + \int_0^1 \pi e^{\pi(x-i)}(-dx) + \int_0^1 \pi e^{-i\pi y}(-i dy) \\ &= (e^{\pi}-1) + (-e^{\pi}e^{-i\pi} + e^{\pi}) + (-e^{\pi}e^{-i\pi} + e^{i\pi}) + (e^{-i\pi}-1) \\ &= 4(e^{\pi}-1).\end{aligned}$$

8.3. Use o Teorema Fundamental para calcular as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_i^{i/2} e^{\pi z} dz$; (b) $\displaystyle\int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz$; (c) $\displaystyle\int_1^3 (z-2)^3 dz$.

Solução:

(a)

$$\int_i^{i/2} e^{\pi z} dz = \left.\frac{e^{\pi z}}{\pi}\right|_i^{i/2} = \frac{1+i}{\pi};$$

(b)

$$\int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz = 2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\Big|_0^{\pi+2i} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right) = 2\cosh(1);$$

(c)

$$\int_1^3 (z-2)^3 dz = \left.\frac{(z-2)^4}{4}\right|_1^3 = 0.$$

8.4. Escolha adequadamente o corte de ramos da função z^i e use o Teorema Fundamental para mostrar que

$$\int_{-1}^1 z^i dz = \frac{1+e^{-\pi}}{2}(1-i).$$

Solução: Escolhendo o corte de ramos tradicional em $-\pi$ temos

$$\int_{-1}^{1} z^{i}dz = \left.\frac{z^{i+1}}{i+1}\right|_{-1}^{1} = \left.\frac{e^{(i+1)\,\mathrm{Log}\,z}}{i+1}\right|_{-1}^{1} = \frac{1-e^{(i+1)i\pi}}{i+1} = \frac{1-i}{2}(1+e^{-\pi}).$$

8.5. Use o princípio da deformação do caminho para calcular a integral

$$\oint_C \frac{3z+5}{z^2+z}dz,$$

sendo C qualquer curva fechada que contenha a origem e o ponto $z = -1$.

Solução: Podemos deformar os caminhos de forma que fiquem tão próximos quanto se queira de dois círculos cada um envolvendo uma única singularidade. Dessa forma, ao expandirmos em frações parciais, cada termo é analítico dentro de apenas um dos círculos e assim

$$\oint_C \frac{3z+5}{z^2+z}dz = \oint_C \left(\frac{5}{z} + \frac{-2}{z+1}\right) dz = \oint_{C_0} \frac{5}{z}dz + \oint_{C_{-1}} \frac{-2}{z+1}dz = 10\pi i - 4\pi i = 6\pi i,$$

onde C_0 e C_{-1} são os círculos centrados em 0 e -1, respectivamente.

8.6. Calcule $\int_C z^{-1/2}dz$ de 1 até -1 ao longo da semicircunferência (a) superior e (b) inferior de $|z| = 1$, considerando o valor principal da raiz quadrada.

Solução:

(a) Seja $z(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$. Então,

$$\int_{C_a} z^{-1/2}dz = \int_0^{\pi} e^{-i\theta/2}\, ie^{i\theta}d\theta = i\int_0^{\pi} e^{i\theta/2}d\theta = 2(e^{i\pi/2}-1) = -2(1-i).$$

(b) Seja $z(\theta) = e^{-i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$. Então,

$$\int_{C_b} z^{-1/2}dz = \int_0^{\pi} e^{i\theta/2}\,(-i)e^{-i\theta}d\theta = -i\int_0^{\pi} e^{-i\theta/2}d\theta = 2(e^{-i\pi/2}-1) = -2(1+i).$$

8.8. Calcule a integral $\oint_C \frac{1}{z^2+4}dz$, sendo C a elipse $x^2 + 4(y-2)^2 = 4$ orientada positivamente.

Solução: Note que a curva fechada C engloba apenas o pólo em 2i. Vamos usar a mesma estratégia do Exercício 8.5. Assim,

$$\oint_C \frac{1}{z^2+4}dz = \oint_C \left(\frac{1/4i}{z-2i} - \frac{1/4i}{z+2i}\right) dz = \frac{2\pi i}{4i} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

8.9. Calcule a integral $\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz$, sendo C a elipse $(x-1)^2 + 4y^2 = 4$.

Solução: Note que a curva fechada C engloba ambos pólos. Vamos usar a mesma estratégia do Exercício 8.5. Assim,

$$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz = \oint_C \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right) dz = 4\pi i.$$

8.10. Calcule a integral $\oint_C \frac{\cos z}{z}dz$, sendo C o círculo $|z| = 1$ percorrido no sentido horário.

Solução: Note que a curva fechada C engloba o pólo na origem e está no sentido **horário**. Logo,

$$\oint_C \frac{\cos z}{z}dz = -\oint_{-C} \frac{\cos z}{z}dz = -2\pi i \cos 0 = -2\pi i.$$

8.16. Calcule a integral $\oint \frac{e^z}{z^n}dz$, para $n = 0, 1, 2, \cdots$, sendo C o círculo unitário percorrido no sentido positivo.

Solução: Uma aplicação direta da fórmula de Cauchy nos fornece que para $n \in \{1, 2, \dots\}$

$$\oint \frac{e^z}{z^n}dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^z \bigg|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}.$$

Quando $n = 0$ a função é analítica no interior do círculo e, portanto, a integral é zero.

8 Problemas

8.1. **(Limitantes Superiores para o Módulo de Integrais)** Seja C um caminho de comprimento L e assuma que a função f seja contínua por partes em C. Se M for uma constante não-negativa tal que $f(z) \leqslant M$ para todo $z \in C$ em que f esteja definida, então

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leqslant ML.$$

Use este resultado para resolver os problemas a seguir.

(a) Se C for o quarto do círculo $|z| = 2$ de $z = 2$ até $z = 2i$, mostre que

$$\left|\int_C \frac{z+4}{z^3-1}dz\right| \leqslant \frac{6\pi}{7}.$$

(b) Se C for o segmento de $z = i$ até $z = 1$, mostre que

$$\left|\int_C \frac{1}{z^4}dz\right| \leqslant 4\sqrt{2}.$$

(c) Se C for o triângulo com vértices 0, $3i$ e -4, percorridos nesta ordem, mostre que

$$\left|\int_C (e^z - \bar{z})dz\right| \leqslant 60.$$

Solução:

(a)

$$\left|\int_C \frac{z+4}{z^3-1}dz\right| \leqslant \sup_{z\in C}\left|\frac{z+4}{z^3-1}\right|\pi = \frac{6}{7}\pi,$$

onde o valor absoluto da função alcança o máximo em $z = 2$.

(b)

$$\left|\int_C \frac{1}{z^4}dz\right| \leqslant \sup_{z\in C}\left|\frac{1}{z^4}\right|\sqrt{2} = 4\sqrt{2},$$

onde o valor absoluto da função alcança o máximo em $z = (1+i)/\sqrt{2}$.

(c) Se C for o triângulo com vértices 0, $3i$ e -4, percorridos nesta ordem, mostre que

$$\left|\int_C (e^z - \bar{z})dz\right| \leqslant \sup_{z\in C}|e^z - \bar{z}|12 \leqslant 12\left(\sup_{z\in C}|e^z| + \sup_{z\in C}|\bar{z}|\right) = 60.$$

8.2. **(Uma Consequência da Fórmula de Cauchy)** Suponha que uma função f seja analítica sobre e no interior de um círculo positivamente orientado, C_R, centrado em z_0 e de raio R. Se M_R denota o valor máximo de $|f(z)|$ em C_R, mostre que

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!M_R}{R^n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Solução: Usando a fórmula de Cauchy e o problema anterior temos que

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_{C_R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\sup_{z\in C_R}\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right|2\pi R \leqslant n!\sup_{z\in C_R}\frac{|f(z)|}{R^{n+1}}R \leqslant n!\frac{M_R}{R^n}.$$

8.3. **(Teorema de Liouville)** Mostre que, se uma função f for inteira e limitada no plano complexo, então f é constante. Dica: Use o problema anterior.

Solução: A partir do problema anterior, temos que a seguinte expressão vale para todo $z_0 \in \mathbb{C}$ e $R > 0$, pois f é inteira. Ainda, como f é limitada, então M_R é limitado. Logo,

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{M_R}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Portanto, $f'(z_0) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, ou seja, f é constante.

8.4. **(Teorema Fundamental da Álgebra I)** Use o Teorema de Liouville para mostrar que qualquer polinômio de grau n, $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ ($a_n \neq 0$) tem ao menos um zero (ou raiz). Dica: mostre que, se p não tiver um zero, então a função f dada por $f(z) = 1/p(z)$ é inteira e limitada e, portanto, constante, o que é uma contradição.

Solução: Vamos supor que o polinômio p não possui zeros. Sabemos que

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} = \frac{1}{|a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n|} = \frac{1}{|z^n| \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right|} \xrightarrow{z\to\infty} 0.$$

Disso, temos que existe um $R > 0$ tal que $|f(z)| < 1$ sempre que $|z| > R$. Por outro lado, a região $|z| \leqslant R$ é fechada e limitada e assim $|f(z)|$ é limitada, pois não possui singularidades, pela hipótese de que p não se anula. Logo f é limitada e analítica em todo plano complexo. Pelo Teorema de Liouville, f é constante. Isso é uma contradição, portanto, o polinômio p possui ao menos um zero em $\mathbb{C}$.

8.5. **(Teorema Fundamental da Álgebra II)** Vamos agora concluir que um polinômio de grau n tem exatamente n raízes, contando as multiplicidades. Para tanto, basta mostrar que, se z_0 for um zero de p, então p pode ser escrito como $p(z) = (z - z_0)q(z)$, sendo q um polinômio de grau $n - 1$; repetindo-se o raciocínio, tem-se o resultado. A fim de demonstrar este fato, mostre que a identidade

$$z^k - z_0^k = (z - z_0)(z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \cdots + z z_0^{k-2} + z_0^{k-1})$$

é válida para $k = 2, 3, \cdots$. Use esse resultado para finalmente mostrar que

$$p(z) - p(z_0) = (z - z_0)q(z)$$

sendo q um polinômio de grau $n - 1$.

Solução: Seja $z_0 \neq z \neq 0$, então

$$
\begin{aligned}
(z - z_0) \sum_{\ell=0}^{k-1} z^{k-1-\ell} z_0^{\ell} &= z^k (1 - z_0/z) \sum_{\ell=0}^{k-1} \left(\frac{z_0}{z} \right)^{\ell} \\
&= z^k (1 - z_0/z) \frac{1 - (z_0/z)^k}{1 - z_0/z} \\
&= z^k - z_0^k.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, é imediato que a identidade se verifica quando $z = 0$ ou $z = z_0$.

Seja $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_n \neq 0$, então

$$
\begin{aligned}
p(z) - p(z_0) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (z^k - z_0^k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0) \sum_{\ell=0}^{k-1} z^{k-1-\ell} z_0^{\ell} \\
&= (z - z_0) \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{k-1} a_k z^{k-1-\ell} z_0^{\ell} \\
&= (z - z_0) \sum_{m=0}^{n-1} \underbrace{\left(\sum_{\ell=0}^{n-m-1} a_{m+\ell+1} z_0^{\ell} \right)}_{b_m} z^m \\
&= (z - z_0)\, q(z).
\end{aligned}
$$

De fato, $b_{n-1} = a_n \neq 0$, logo $q(z) = \sum_{m=0}^{n-1} b_m z^m$ é um polinômio de grau $n - 1$.

Sabemos do problema anterior que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$, o que permite escrever que $p(z) = (z - z_0)\, q(z)$. Repetindo o raciocínio $n - 1$ vezes obtemos o resultado.