EE400 – *Métodos da Engenharia Elétrica*

Docente: Matheus Souza

Solução para problemas selecionados

– Lista de Exercícios 6 –

Plínio S. Dester
(pliniodester@hotmail.com)

18 de Janeiro de 2022

Em caso de dúvidas, sugestões ou correções, não hesite em mandar um e-mail.

6 Exercícios

6.1. Determine as partes real $u = \operatorname{Re} f$ e imaginária $v = \operatorname{Im} f$ das seguintes funções complexas.

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z+i}$;

(b) $f(z) = 5z^2 - 12z + 3 + 2i$;

(c) $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)^2}$;

(d) $f(z) = z^3$;

(e) $f(z) = \dfrac{z}{z+\bar{z}}$;

(f) $f(z) = \dfrac{1}{1-|z|^2}$.

Determine, também, o seu domínio de definição.

Solução: Seja $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+(1+y)^2}, \quad v(x,y) = \dfrac{-(1+y)}{x^2+(1+y)^2}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$;

(b) $u(x,y) = 5x^2 - 12x - 5y^2 + 3, \quad v(x,y) = 10xy - 12y + 2, \quad z \in \mathbb{C}$;

(c) $u(x,y) = \dfrac{(x-3)y^2 + (x+1)(x-1)^2}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}, v(x,y) = -\dfrac{y\left(x(x+2)+y^2-3\right)}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}, z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$;

(d) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x,y) = 3x^2y - y^3, \quad z \in \mathbb{C}$;

(e) $u(x,y) = 1/2, \quad v(x,y) = y/2x, \quad z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}[z] \neq 0$;

(f) $u(x,y) = \dfrac{1}{1-(x^2+y^2)}, \quad v(x,y) = 0, \quad z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$.

6.2. Suponha que $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$, sendo $z = x + iy$. Use identidades como

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

para escrever $f(z)$ explicitamente em termos de z, simplificando o resultado.

Solução:

$$f(z) = \bar{z}^2 + 2iz, \quad z \in \mathbb{C}.$$

6.3. Escreva a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = z + z^{-1}$$

na forma $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$.

Solução:

$$\begin{aligned} f(z) &= r\,e^{i\theta} + (1/r)\,e^{-i\theta} \\ &= \underbrace{\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta}_{u(r,\theta)} + i\,\underbrace{\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta}_{v(r,\theta)}, \quad r \neq 0. \end{aligned}$$

6.4. Mostre que o limite

$$\lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$$

não existe. Para tanto, avalie como pontos da forma $(x, 0)$ e (x, x) se aproximam da origem. Observe que, neste caso, não basta avaliar as direções usuais dadas por pontos $(x, 0)$ e $(0, y)$.

Solução: Seja $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x + iy}{x - iy}\right)^2 \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x + imx}{x - imx}\right)^2 \quad \text{quando } y = mx \\ &= \left(\frac{1 + im}{1 - im}\right)^2. \end{aligned}$$

A última expressão deveria ser igual para qualquer inclinação angular m que nos aproximássemos da origem. Porém, se $m = 0$ o limite é igual à 1 e, se $m = 1$ o limite é igual à -1. Portanto, o limite não existe.

6.6. Mostre que as seguintes funções não admitem derivada em qualquer ponto do plano complexo, sendo $z = x + iy$.

(a) $f_1(z) = \bar{z}$;

(b) $f_2(z) = z - \bar{z}$;

(c) $f_3(z) = 2x + ixy^2$;

(d) $f_4(z) = e^x e^{-iy}$;

(e) $f_5(z) = e^y e^{ix}$.

Solução: Vamos mostrar que as equações não satisfazem as condições de Cauchy-Riemann

(a) $u(x,y) = x, \quad v(x,y) = -y$.
Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad x, y \in \mathbb{C}.$$

(b) $u(x,y) = 0, \quad v(x,y) = 2y$.
Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \neq 2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad x, y \in \mathbb{C}.$$

(c) $u(x,y) = 2x, \quad v(x,y) = xy^2$.
Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \neq 2xy = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{se } xy \neq 1,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \neq y^2 = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{se } y \neq 0.$$

Note que não é possível não satisfazer as duas condições simultaneamente.

(d) $u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = -e^x \sin y$.
Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \neq -e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{se } y \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \neq e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{se } y \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Note que não é possível não satisfazer as duas condições simultaneamente.

(e) $u(x,y) = e^y \cos x, \quad v(x,y) = e^y \sin x$.
Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^y \sin x \neq e^y \sin x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{se } x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^y \cos x \neq -e^y \cos x = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{se } x \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Note que não é possível não satisfazer as duas condições simultaneamente.

6.7. Mostre que f' e f'' existem em todos os pontos do plano e calcule-as para os seguintes casos.

(a) $f(z) = iz + 2$;

(b) $f(z) = e^{-x} e^{-iy}$;

(c) $f(z) = z^3$;

(d) $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

Solução: Vamos usar que se f' existe e é contínua em uma vizinhança de cada ponto do domínio da função, então $f^{(n)}$ também existe para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) $u(x,y) = 2 - y, \quad v(x,y) = x.$
Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -1 = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Como f satisfaz as condições de Cauchy-Riemann, então f' existe e

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = i, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Como f' é uma constante, $f'' = 0$.

(b) $u(x,y) = e^{-x}\cos y, \quad v(x,y) = -e^{-x}\sin y.$
Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}\cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-x}\sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Como f satisfaz as condições de Cauchy-Riemann, então f' existe e

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-x}\cos y + ie^{-x}\sin y = -e^{-x-iy} = -e^{z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Analogamente, $f''(z) = e^{z}, \quad z \in \mathbb{C}.$

(c) Sabemos que um produto de funções analíticas, também é analítica, logo $f(z) = z^3 = (z\,z\,z)$ possui derivadas de todas as ordens. Usando as propriedades temos que $f'(z) = 3z^2$ e $f''(z) = 6z$, $z \in \mathbb{C}$.

(d) $u(x,y) = \cos x \cosh y, \quad v(x,y) = -\sin x \sinh y.$
Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \cosh y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \sinh y = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Como f satisfaz as condições de Cauchy-Riemann, então f' existe e

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \cosh y - i\cos x \sinh y, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Analogamente, $f''(z) = -\cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$, $z \in \mathbb{C}$.

6.8. Calcule $f'(z)$ para os seguintes casos, indicando onde esta derivada existe. Considere

$z = x + iy = re^{i\theta}$, sendo $\theta \in (-\pi, \pi]$. Quais destas funções são inteiras?

(a) $f(z) = z^{-1}$;

(b) $f(z) = x^2 + iy^2$;

(c) $f(z) = z\mathrm{Im}(z)$;

(d) $f(z) = z^{-4}$;

(e) $f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$;

(f) $f(z) = \frac{z-1}{2z+1}$;

(g) $f(z) = (1 - 4z^2)^3$;

(h) $f(z) = e^{-\theta}\cos(\ln r) + ie^{-\theta}\sin(\ln r)$.

Solução:

(a) Usando as propriedades $f'(z) = -z^{-2}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Essa função não é inteira, pois não é analítica em $z = 0$.

(b) Essa função apenas satisfaz as condições de Cauchy-Riemann quando $x = y$. Quando isso acontece $f'(z) = 2x + i2y$. Essa função não é analítica em nenhum ponto, pois a derivada não existe em nenhuma vizinhança. Logo, f não é inteira.

(c) $f(z) = z\,\mathrm{Im}(z) = xy + iy^2$ apenas satisfaz as condições de Cauchy-Riemman em $z = 0$ e $f'(0) = 0$. Logo, f não é inteira.

(d) Usando as propriedades $f'(z) = -4z^{-5}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Essa função não é inteira, pois não é analítica em 0.

(e) f satisfaz as condições de Cauchy-Riemann em polares para $u(r,\theta) = \sqrt{r}\cos\theta/2$ e $v(r,\theta) = \sqrt{r}\sin\theta/2$ se $r \neq 0$. Nesse caso,

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \frac{e^{-i\theta/2}}{2\sqrt{r}}.$$

A função não é inteira, pois não é analítica em $z = 0$.

(f) Usando as propriedades, temos que

$$f'(z) = \frac{3}{(2z+1)^2}, \quad z \neq -1/2.$$

Essa função não é inteira, pois não é analítica em $z = -1/2$.

(g) Usando as propriedades, temos que

$$f'(z) = -24z(1-4z^2)^2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Essa função é inteira, pois é analítica em $\mathbb{C}$.

(h) f satisfaz as condições de Cauchy-Riemann em polares para $u(r,\theta) = e^{-\theta}\cos(\ln r)$ e $v(r,\theta) = e^{-\theta}\sin(\ln r)$ se $r \neq 0$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-i\theta}(u_r + iv_r) \\ &= \frac{e^{-2i\theta}}{r}(-\sin(\ln r) + i\cos(\ln r)). \end{aligned}$$

A função não é inteira, pois não é analítica em $z = 0$.

6 Problemas

6.1. **(Funções Harmônicas Conjugadas)** Considere uma função analítica $f = u + iv$ definida em algum domínio do plano complexo e suponha que as derivadas parciais de segunda ordem de u e v existam e sejam contínuas. Mostre que as componentes real e imaginária de f

verificam a Equação de Laplace, isto é, mostre que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}v + \frac{\partial^2}{\partial y^2}v = 0.$$

Já vimos que funções que são soluções da Equação de Laplace são chamadas de *funções harmônicas*. Ademais, pares de funções harmônicas que verificam as Condições de Cauchy-Riemann são chamadas de *funções harmônicas conjugadas*.

Solução: Pelo Teorema de Cauchy-Riemann, temos que se f é analítica, então

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Derivando a primeira equação em relação à x, derivando a segunda equação em relação à y e somando os resultados obtemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0,$$

pelo Teorema de Clairaut. Logo, u satisfaz a Equação de Laplace.

Analogamente, podemos provar que v também satisfaz a Equação de Laplace.

6.3. **(Forma Complexa das Condições de Cauchy-Riemann)** Lembre que, para qualquer $z = x + iy \in \mathbb{C}$, temos

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Use a regra da cadeia para mostrar que, para uma função F de duas variáveis dada por $F(x, y)$, temos

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}F = \frac{1}{2}\left(F_x + iF_y\right).$$

Seja $f = u + iv$ uma função complexa. Suponha que u e v tenham derivadas parciais de primeira ordem bem-definidas e que estas verifiquem as equações de Cauchy-Riemann em um ponto z_0. Mostre que, neste caso, vale também a equação de Cauchy-Riemann na forma complexa

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

Solução: Usando a regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(F_x + iF_y\right).$$

Usando o resultado acima, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)\right) = \frac{1}{2}\left((u_x - v_y) + i(u_y + v_x)\right) = 0.$$

A última igualdade vem do fato que f satisfaz as condições de Cauchy-Riemann.

6.4. Suponha que uma função f e sua conjugada $\bar{f}$ sejam ambas analíticas em um domínio $\mathbb{D}$ do plano. Mostre que f deve ser constante em $\mathbb{D}$.

Solução: Sabemos que $f = u + iv$ e $\bar{f} = u - iv$. Se ambas forem analíticas, ambas satisfazem as condições de Cauchy-Riemann, ou seja,

$$u_x = v_y,\ u_y = -v_x,\ u_x = -v_y,\ u_y = v_x.$$

Logo, $u_x = v_y = u_y = v_x = 0$. Sendo assim, u e v são constantes e, portanto, f é constante.

6.5. Use o exercício anterior para mostrar que, se f for analítica em um domínio $\mathbb{D}$ e tiver módulo constante, então f é constante.

Solução: Se $|f| = 0$, então $f = 0$ e, portanto, f é constante.
Por outro lado, seja $c > 0$ uma constante e $|f|^2 = c$, ou seja, $f\bar{f} = c$, temos que $\bar{f} = c/f$. Portanto, $\bar{f}$ é analítica, pois f é analítica e nunca se anula em $\mathbb{D}$, uma vez que $|f| > 0$. Então, pelo problema anterior, f é constante.

6.6. Seja f uma função inteira. Mostre que a função g dada por $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ também é inteira. Mostre, também, que a função h dada por $h(z) = \overline{f(z)}$ é diferenciável em $z = 0$ se, e apenas se, $f'(0) = 0$.

Solução: Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, então $g(z) = u(x,-y) - iv(x,-y)$. Dessa forma,

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathsf{Re}[g(z)] = u_x(x,-y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\mathsf{Im}[g(z)] = v_y(x,-y),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\mathsf{Re}[g(z)] = -u_y(x,-y), \quad \frac{\partial}{\partial x}\mathsf{Im}[g(z)] = -v_x(x,-y).$$

Como f satisfaz Cauchy-Riemman em $\mathbb{C}$, então $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Usando isso,

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathsf{Re}[g(z)] = \frac{\partial}{\partial y}\mathsf{Im}[g(z)], \quad \frac{\partial}{\partial y}\mathsf{Re}[g(z)] = -\frac{\partial}{\partial x}\mathsf{Im}[g(z)]$$

em $\mathbb{C}$. Portanto, g é inteira.
Seja $h(z) = \overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$, então

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathsf{Re}[h(z)] = u_x(x,y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\mathsf{Im}[h(z)] = -v_y(x,y), \tag{1}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\mathsf{Re}[h(z)] = u_y(x,y), \quad \frac{\partial}{\partial x}\mathsf{Im}[h(z)] = -v_x(x,y). \tag{2}$$

Novamente, usando que f satisfaz Cauchy-Riemann, podemos concluir que

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathsf{Re}[h(z)] = -\frac{\partial}{\partial y}\mathsf{Im}[h(z)], \quad \frac{\partial}{\partial y}\mathsf{Re}[h(z)] = \frac{\partial}{\partial x}\mathsf{Im}[h(z)]$$

em $\mathbb{C}$. Portanto, h satisfaz Cauchy-Riemann em algum ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ se

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathsf{Re}[h(z)] = \frac{\partial}{\partial y}\mathsf{Im}[h(z)] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\mathsf{Re}[h(z)] = \frac{\partial}{\partial x}\mathsf{Im}[h(z)] = 0,$$

para $z = z_0$, ou seja, se $u_x = v_y = u_y = v_x = 0$ em z_0. Se esse for o caso, então $f'(z_0) = 0$.

Por outro lado, se sabemos que $f'(z_0) = 0$ para algum $z_0 \in \mathbb{C}$, então $u_x = v_x = 0$ e usando isso em (1) e (2), podemos mostrar que h satisfaz Cauchy-Riemann em z_0 e, portanto, h é diferenciável em z_0.