ME210 - Probabilidade I - 2S 2017

Docente: Marina Vachkovskaia

Soluções para problemas selecionados do livro
Probabilidade: Um curso moderno com aplicações 8.ed. de Sheldon Ross

Plínio Santini Dester (`p103806@dac.unicamp.br`)

2 de novembro de 2017

Em caso de dúvidas, sugestões ou correções (inclusive erros de digitação), não hesite em mandar um e-mail.

7 Problemas

7.7. Suponha que A e B escolham aleatória e independentemente 3 objetos em um conjunto de 10. Determine o número esperado de objetos:

(a) escolhidos simultaneamente por A e B;

(b) não escolhidos nem por A, nem por B;

(c) escolhidos por exatamente um de A e B.

Solução:

(a) Seja X_i a v.a. que vale 1 se o i-ésimo objeto foi escolhido por ambos e 0 caso contrário. O valor esperado do número de objetos escolhidos por ambos é

$$E\left[\sum_{i=1}^{10} X_i\right] = \sum_{i=1}^{10} E[X_i] = 10\,E[X_1] = 10\left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{10}.$$

(b) Seja Y_i a v.a. que vale 1 se o i-ésimo objeto não foi escolhido por ninguém e 0 caso contrário. O valor esperado do número de objetos não escolhidos é

$$E\left[\sum_{i=1}^{10} Y_i\right] = \sum_{i=1}^{10} E[Y_i] = 10\,E[Y_1] = 10\left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{49}{10}.$$

(c) Seja Z_i a v.a. que vale 1 se o i-ésimo objeto foi escolhido por apenas uma pessoa e 0 caso contrário. O valor esperado do número de objetos escolhidos por apenas uma pessoa é

$$E\left[\sum_{i=1}^{10} Z_i\right] = \sum_{i=1}^{10} E[Z_i] = 10\,E[Z_1] = 10\left(\frac{7}{10}\frac{3}{10} + \frac{3}{10}\frac{7}{10}\right) = \frac{42}{10}.$$

Observação: Note que cada objeto sempre se encaixa em uma única categoria, isto é, $X_i + Y_i + Z_i = 1$ e, portanto, a soma das esperanças pedidas deve dar o número total de objetos: 10. Verifique!

7.21. Para um grupo de 100 pessoas, compute

(a) o número esperado de dias do ano que são aniversários de pelo menos 3 pessoas;

(b) o número esperado de datas de aniversário distintas.

Solução:

(a) Seja X_i a v.a. que vale 1 se o i-ésimo dia do ano é aniversário de 3 ou mais pessoas e vale 0 caso contrário; e $p = 1/365$. O valor esperado que estamos interessados é dado por

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{365} X_i\right] &= \sum_{i=1}^{365} E[X_i] \\ &= 365\,E[X_1] \\ &= 365\left(1 - \sum_{k=0}^{2}\binom{100}{k}p^k(1-p)^{100-k}\right) \\ &\approx 0{,}9955. \end{aligned}$$

Observação: Na versão americana do livro são **exatamente** 3 pessoas, ao invés de "pelo menos 3 pessoas". O que leva à resposta 0,9301.

(b) Isso é equivalente à calcular o número esperado de dias que possuem pelo menos uma data de aniversário. Então, seja Y_i a v.a. que vale 1 se o i-ésimo dia do ano é aniversário de 1 ou mais pessoas e vale 0 caso contrário; e $p = 1/365$. O valor esperado que estamos interessados é dado por

$$
\begin{aligned}
E\left[\sum_{i=1}^{365} Y_i\right] &= \sum_{i=1}^{365} E[Y_i] \\
&= 365\, E[Y_1] \\
&= 365\left(1 - (\tfrac{364}{365})^{100}\right) \\
&\approx 87{,}58.
\end{aligned}
$$

7.22. Quantas vezes você espera rolar um dado honesto até que todos os 6 lados tenham aparecido pelo menos uma vez?

Solução: Seja N_k a variável aleatória que representa o número de dados rolados até que apareça um número diferente dos k números que já supostamente apareceram. Note que N_k segue uma distribuição geométrica de parâmetro $p = (6-k)/6$. Então, o número esperado de dados rolados até que apareçam todos os números é dado por

$$
E\left[\sum_{k=0}^{5} N_k\right] = \sum_{k=0}^{5} E[N_k] = \sum_{k=0}^{5} \frac{6}{6-k} = 14{,}7.
$$

7.75. A função geratriz de momentos de X é dada por $M_X(t) = \exp[2\mathrm{e}^t - 2]$, e a de Y por $M_Y(t) = (\frac{3}{4}\mathrm{e}^t + \frac{1}{4})^{10}$. Se X e Y são independentes, determine

(a) $P(X + Y = 2)$;

(b) $P(XY = 0)$;

(c) $E[XY]$.

Solução: Da Tabela 7.1, temos que Y é uma v.a. que segue uma distribuição binomial de parâmetros $n = 10$ e $p = 3/4$; e X segue uma distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = 2$.

(a)

$$\begin{aligned}
P(X+Y=2) &= P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=0)\\
&= P(X=0)P(Y=2)+P(X=1)P(Y=1)+P(X=2)P(Y=0)\\
&= \sum_{k=0}^{2} P(X=k)P(Y=2-k)\\
&= \sum_{k=0}^{2} \frac{2^k}{k!}\mathrm{e}^{-2}\binom{10}{2-k}(\tfrac{3}{4})^{2-k}(\tfrac{1}{4})^{10-(2-k)}\\
&\approx 0{,}0042.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
P(XY=0) &= P(\{X=0\}\cup\{Y=0\})\\
&= P(X=0)+P(Y=0)-P(X=0,Y=0)\\
&= \mathrm{e}^{-2}+(\tfrac{1}{4})^{10}-\mathrm{e}^{-2}(\tfrac{1}{4})^{10}\\
&\approx 0{,}1353.
\end{aligned}$$

(c) Como X e Y são independentes, $E[XY]=E[X]E[Y]=2\cdot(10\cdot 3/4)=15$.