ME210 - Probabilidade I - 2S 2017

Docente: Marina Vachkovskaia

Soluções para problemas selecionados do livro
Probabilidade: Um curso moderno com aplicações 8.ed. de Sheldon Ross

Plínio Santini Dester (`p103806@dac.unicamp.br`)

16 de setembro de 2017

Em caso de dúvidas, sugestões ou correções (inclusive erros de digitação), não hesite em mandar um e-mail.

4 Problemas

4.4. Cinco homens e 5 mulheres são classificados de acordo com suas notas em uma prova. Suponha que não existam notas iguais e que todas as 10! classificações possíveis sejam igualmente prováveis. Faça X representar a melhor classificação obtida por uma mulher (por exemplo, $X = 1$ se a pessoa mais bem classificada for uma mulher). Determine $P\{X = i\}, i = 1, 2, 3, \ldots, 8, 9, 10$.

Solução: Se $i > 6$, então $P\{X = i\} = 0$, pois temos 5 homens participando. Se $i < 6$, então teremos 4 mulheres ocupando qualquer posição entre as posições abaixo a i-ésima, isto é, 4 mulheres entre $10 - i$ posições. Logo,

$$P\{X = i\} = \frac{\binom{10-i}{4}}{\binom{10}{5}}, \quad i \in \{1, 2 \ldots, 6\}.$$

4.5. Suponha que X represente a diferença entre o número de caras e coroas obtido quando uma moeda é jogada n vezes. Quais são os possíveis valores de X?

Solução: Se n for ímpar, $X \in \{-n, -n + 2, \ldots, -1, 1, \ldots, n - 2, n\}$. Se n for par, $X \in \{-n, -n + 2, \ldots, -2, 0, 2, \ldots, n - 2, n\}$.

4.13. Um vendedor agendou duas visitas para vender enciclopédias. Sua primeira visita resultará em venda com probabilidade 0,3, e sua segunda visita resultará em venda com probabilidade de 0,6, sendo ambas as probabilidades de venda independentes. Qualquer venda realizada tem a mesma probabilidade de ser do modelo luxo,que custa R$ 1000,00, ou do modelo padrão, que custa R$ 500,00. Determine a função de probabilidade de X, o valor total das vendas em reais.

Solução: Para encontrar a probabilidade de X ser igual a uma certa quantia, basta listar todas as formas de ganhar essa quantia e em seguida somar essas probabilidades.

$$
\begin{aligned}
p_X(0) &= (0{,}7)(0{,}4) = 0{,}28,\\
p_X(500) &= (0{,}7)(0{,}6 \cdot 0{,}5) + (0{,}3 \cdot 0{,}5)(0{,}4) = 0{,}27,\\
p_X(1000) &= (0{,}3 \cdot 0{,}5)(0{,}6 \cdot 0{,}5) + (0{,}7)(0{,}6 \cdot 0{,}5) + (0{,}3 \cdot 0{,}5)(0{,}4) = 0{,}315,\\
p_X(1500) &= 2(0{,}3 \cdot 0{,}5)(0{,}6 \cdot 0{,}5) = 0{,}09,\\
p_X(2000) &= (0{,}3 \cdot 0{,}5)(0{,}6 \cdot 0{,}5) = 0{,}045.
\end{aligned}
$$

4.17. Suponha que a função distribuição de X seja dada por $F(b)$ (vide livro).

(a) Determine $P\{X = i\}, i = 1, 2, 3$.

(b) Determine $P\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\}$.

Solução:

(a) Sabemos que

$$P\{X = i\} = F(i) - \lim_{b \to i^-} F(b).$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
P\{X = 1\} &= \frac{1}{2} - \lim_{b \to 1^-} \frac{b}{4} = \frac{1}{4},\\
P\{X = 2\} &= \frac{11}{12} - \lim_{b \to 2^-} \left(\frac{1}{2} + \frac{b-1}{4}\right) = \frac{1}{6},\\
P\{X = 3\} &= 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P\{\tfrac{1}{2} < X < \tfrac{3}{2}\} &= P\{X < \tfrac{3}{2}\} - P\{X \leq \tfrac{1}{2}\} \\
&= \lim_{b \to \frac{3}{2}^-} F(b) - F(\tfrac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2} - 1}{4} - \frac{\frac{1}{2}}{4} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

4.21. Quatro ônibus levando 148 estudantes da mesma escola chegam a um estádio de futebol. Os ônibus levam, respectivamente, 40, 33, 25 e 50 estudantes. Um dos estudantes é selecionado aleatoriamente. Suponha que X represente o número de estudantes que estavam no ônibus que levava o estudante selecionado. Um dos 4 motoristas dos ônibus também é selecionado aleatoriamente. Seja Y o número de estudantes no ônibus do motorista selecionado

(a) Qual valor esperado você pensa ser maior, $E[X]$ ou $E[Y]$?

(b) Calcule $E[X]$ e $E[Y]$.

Solução:

(a) $E[X]$ é maior que $E[Y]$, pois a probabilidade que o estudante selecionado venha de um ônibus com mais estudantes é maior, enquanto que para os motoristas é equiprovável.

(b)

$$
\begin{aligned}
E[Y] &= \frac{1}{4} \cdot 40 + \frac{1}{4} \cdot 33 + \frac{1}{4} \cdot 25 + \frac{1}{4} \cdot 50 = 37, \\
E[X] &= \frac{40}{148} \cdot 40 + \frac{33}{148} \cdot 33 + \frac{25}{148} \cdot 25 + \frac{50}{148} \cdot 50 \approx 39.
\end{aligned}
$$

4.22. Suponha que dois times joguem uma série de partidas que termina quando um deles tiver ganhado i partidas. Suponha que cada partida jogada seja, independentemente, vencida pelo time A com probabilidade p. Determine o número esperado de partidas jogadas quando (a) $i = 2$ e (b) $i = 3$. Também, mostre em ambos os casos que este número é maximizado quando $p = \frac{1}{2}$.

Solução: Seja N a variável aleatória que representa o número de jogos. Quando $N = n$ e A venceu a partida, então temos $n - 1$ jogos nos quais A venceu $i - 1$

vezes e A vence o último jogo, ou então se o outro time vencer a partida, então temos $i-1$ vitórias desse time nos $n-1$ jogos e ele vence o n-ésimo jogo. Logo, se $n \in \{i, i+1, \ldots, 2i-1\}$,

$$\begin{aligned}
P\{N = n\} &= \binom{n-1}{i-1} p^{i-1}(1-p)^{n-i} \cdot p + \binom{n-1}{i-1} p^{n-i}(1-p)^{i-1} \cdot (1-p) \\
&= \binom{n-1}{i-1} \left(p^i(1-p)^{n-i} + p^{n-i}(1-p)^i\right).
\end{aligned}$$

(a) Se $i = 2$,

$$\begin{aligned}
E[N] &= \sum_{n=2}^{3} n \binom{n-1}{1} \left(p(1-p)^{n-1} + p^{n-1}(1-p)\right) \\
&= 2\,(1 + p - p^2).
\end{aligned}$$

(b) Se $i = 3$,

$$\begin{aligned}
E[N] &= \sum_{n=3}^{5} n \binom{n-1}{2} \left(p^2(1-p)^{n-2} + p^{n-2}(1-p)^2\right) \\
&= 3\,(1 + p + p^2 - 4p^3 + 2p^4).
\end{aligned}$$

Em ambos casos, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}E[N]$ é maior que 0 se $p \in (0, \frac{1}{2})$ e é menor que 0 se $p \in (\frac{1}{2}, 1)$. Logo, $p = \frac{1}{2}$ é o ponto de máximo global.

4.23. Você tem R$1000,00, e certa mercadoria é vendida atualmente por R$2,00 o quilo. Suponha que uma semana depois a mercadoria passe a ser vendida por R$1,00 ou R$4,00 o quilo, com essas duas possibilidades sendo igualmente prováveis.

(a) Se o seu objetivo é maximizar a quantidade esperada de dinheiro que você possuirá no final da semana, que estratégia você deve empregar?

(b) Se o seu objetivo é maximizar a quantidade esperada de mercadoria que você possuirá no final da semana, que estratégia você deve empregar?

Solução:

(a) Suponha que compremos $b \in (0, 500)$ quilos da mercadoria. Seja a variável aleatória X o dinheiro que teremos ao final da semana se vendermos toda mercadoria comprada. Então,

$$\begin{aligned} E[X] &= (1000 - 2b) + b\frac{1}{2} + 4b\frac{1}{2} \\ &= 1000 + \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Logo, devemos comprar o máximo possível da mercadoria, isto é, para maximizar o valor esperado do dinheiro ao final da semana devemos comprar $b = 500$ quilos da mercadoria.

(b) Seja a variável aleatória Y os quilos de mercadoria que teremos ao final da semana se comprarmos toda mercadoria com o dinheiro que sobrar. Então,

$$\begin{aligned} E[Y] &= b + \frac{1000 - 2b}{1}\frac{1}{2} + \frac{1000 - 2b}{4}\frac{1}{2} \\ &= 625 - \frac{b}{4}. \end{aligned}$$

Logo, devemos comprar o mínimo possível da mercadoria no início da semana, isto é, para maximizar a quantidade de mercadoria ao final da semana devemos comprar $b = 0$ quilos da mercadoria.

4.27. Uma companhia de seguros vende uma apólice dizendo que uma quantidade A de dinheiro deve ser paga se algum evento E ocorrer em um ano. Se a companhia estima que E tem probabilidade p de ocorrer em um ano, que preço deve o cliente pagar pela apólice se o lucro esperado pela companhia é de 10% de A?

Solução: Seja X a variável aleatória que representa o lucro da empresa para uma dada apólice e D o preço da apólice, então

$$E[X] = (D - A) \cdot p + D \cdot (1 - p).$$

Como queremos $E[X] = \frac{A}{10}$, então isolando D obtemos que $D = \frac{A}{10} + A\,p$.

4.28. Uma amostra de 3 itens é selecionada aleatoriamente de uma caixa contendo 20 itens, dos quais 4 são defeituosos. Determine o número esperado de itens defeituosos na amostra.

Solução: Seja X_i a variável aleatória que vale 1 se o i-ésimo item retirado for defeituoso e vale 0 caso contrário. Queremos saber o valor de

$$\begin{aligned} E[X_1 + X_2 + X_3] &= E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] \\ &= 3\,E[X_1] = 3\frac{4}{20} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

4.29. Existem duas causas possíveis para a quebra de certa máquina. Verificar a primeira possibilidade custa C_1 reais, e, se aquela tiver sido de fato a causa da quebra, o problema pode ser reparado ao custo de R_1 reais. Similarmente, existem os custos C_2 e R_2 associados a segunda possibilidade. suponha que p e $1-p$ representem, respectivamente, as probabilidades de que a quebra seja causada pela primeira e pela segunda possibilidades. Em quais condições de p, C_i e R_i, $i = 1, 2$, devemos verificar inicialmente a primeira causa possível de defeito e depois a segunda, em vez de inverter a ordem de verificação, de forma a minimizarmos o custo envolvido na manutenção da máquina?
Nota: Se a primeira verificação for negativa, devemos ainda assim verificar a segunda possibilidade.

Solução: Sejam as variáveis aleatórias X e Y os custo de manutenção da máquina não invertendo e invertendo a ordem das verificações, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} E[X] &= (C_1 + R_1)\,p + (C_1 + C_2 + R_2)\,(1-p), \\ E[Y] &= (C_2 + R_2)\,(1-p) + (C_1 + C_2 + R_1)\,p. \end{aligned}$$

Vale a pena não inverter quando $E[Y] > E[X]$, ou seja,

$$\begin{aligned} E[Y] - E[X] > 0 &\Leftrightarrow C_2\,p - C_1\,(1-p) > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{C_1}{C_2} < \frac{p}{1-p}. \end{aligned}$$

4.32. Cem pessoas terão seu sangue examinado para determinar se possuem ou não determinada doença. Entretanto, em vez de testar cada indivíduo separadamente, decidiu-se primeiro colocar as pessoas em grupos de 10. As amostras de sangue das 10 pessoas de cada grupo serão analisadas em conjunto. Se o teste der negativo, apenas um teste será suficiente para as 10 pessoas. Por outro lado, se o teste der positivo, cada uma das demais pessoas também será examinada e, no total, 11 testes serão feitos no grupo em questão. Suponha que a probabilidade de se ter a doença seja de 0,1 para qualquer pessoa, de forma independente, e calcule o número esperado de testes necessários para cada grupo (observe que supomos que o teste conjunto dará positivo se pelo menos uma pessoa no conjunto tiver a doença).

Solução: Seja $p = 0{,}1$ de uma pessoa ter a doença e X_i a variável aleatória que representa o número de testes feitos no i-ésimo grupo. Então, o número esperado de testes em cada grupo é dado por

$$\begin{aligned} E[X_i] &= 1\,(1-p)^{10} + 11\,(1-(1-p)^{10}) \\ &\approx 7{,}513 < 10. \end{aligned}$$

De fato, essa estratégia vale a pena quando $p < 1 - 10^{-\frac{1}{10}} \approx 0{,}2$. Por outro lado, para $p = 0{,}1$ valeria mais a pena dividir as pessoas em grupos de 4, ao invés de 10. Dessa forma, $E[X_i] \approx 2{,}376$ e $\frac{2{,}376}{4} < \frac{7{,}513}{10}$.

4.40. Em um teste de múltipla escolha com 3 respostas possíveis para cada uma das 5 questões, qual é a probabilidade de que um estudante acerte 4 questões ou mais apenas chutando?

Solução: Seja X a variável aleatória correspondente ao número de acertos. Sabemos que X segue uma distribuição binomial de parâmetros $p = \frac{1}{3}$ e $n = 5$. Queremos saber

$$\begin{aligned} P\{X \geq 4\} &= P\{X = 4\} + P\{X = 5\} \\ &= \binom{5}{4}(\tfrac{1}{3})^4(\tfrac{2}{3}) + \binom{5}{5}(\tfrac{1}{3})^5 \\ &\approx 0{,}045. \end{aligned}$$

4.43. Um canal de comunicações transmite os algarismos 0 e 1. Entretanto, devido a interferência estática, um algarismo transmitido tem probabilidade 0,2 de ser incorretamente recebido. Suponha que queiramos transmitir uma mensagem importante formada por um único algarismo binário. Para reduzir as chances de erro, transmitimos 00000 em vez de 0 e 11111 em vez de 1. Se o receptor da mensagem usa um decodificador de "maioria" qual é a probabilidade de que a mensagem não esteja correta quando decodificada?

Solução: Seja X a variável aleatória correspondente ao número de algarismos transmitidos errados. Note que X segue uma distribuição binomial de parâmetros $p = 0{,}2$ e $n = 5$. A mensagem é decodificada incorretamente quando $X \geq 3$. Assim,

$$\begin{aligned} P\{X \geq 3\} &= P\{X = 3\} + P\{X = 4\} + P\{X = 5\} \\ &= \binom{5}{3}(\tfrac{1}{5})^3(\tfrac{4}{5})^2 + \binom{5}{4}(\tfrac{1}{5})^4(\tfrac{4}{5}) + \binom{5}{5}(\tfrac{1}{5})^5 \\ &\approx 0{,}058. \end{aligned}$$

4.45. Um estudante se prepara para fazer uma importante prova oral e está preocupado com a possibilidade de estar em um dia "bom" ou em um dia "ruim". Ele pensa que se estiver em um dia bom, então cada um de seus examinadores irá aprová-lo, independentemente uns dos outros, com probabilidade 0,8. Por outro lado, se estiver em um dia ruim, essa probabilidade cairá para 0,4. Suponha que o estudante seja aprovado caso a maioria dos examinadores o aprove. Se o estudante pensa que tem duas vezes mais chance de estar em um dia ruim do que em um dia bom, é melhor que ele faça a prova com 3 ou 5 examinadores?

Solução: Seja B o evento do estudante estar em um dia bom. Sabemos que $P(B^c) = 2\,P(B)$, mas como $P(B) + P(B^c) = 1$, então $P(B) = \frac{1}{3}$ e $P(B^c) = \frac{2}{3}$. Seja X_i a variável aleatória correspondente ao número de professores que aprovaram ele, onde i é o número de professores que o avaliam. As probabilidades do estudante ser aprovado com $i = 3$ ou $i = 5$ são

$$\begin{aligned} P\{X_3 \geq 2\} &= P\{X_3 \geq 2 \mid B\}P(B) + P\{X_3 \geq 2 \mid B^c\}P(B^c) \\ &= \left(\binom{3}{2}(0{,}8)^2(0{,}2) + \binom{3}{3}(0{,}8)^3\right)\cdot\frac{1}{3} + \left(\binom{3}{2}(0{,}4)^2(0{,}6) + \binom{3}{3}(0{,}4)^3\right)\cdot\frac{2}{3} \\ &\approx 0{,}533. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X_5 \geq 3\} &= P\{X_5 \geq 3 \mid B\}P(B) + P\{X_5 \geq 3 \mid B^c\}P(B^c) \\ &= \left(\binom{5}{3}(0{,}8)^3(0{,}2)^2 + \binom{5}{4}(0{,}8)^4(0{,}2) + \binom{5}{5}(0{,}8)^5\right)\cdot\frac{1}{3} \\ &\quad + \left(\binom{5}{3}(0{,}4)^3(0{,}6)^2 + \binom{5}{4}(0{,}4)^4(0{,}6) + \binom{5}{5}(0{,}4)^5\right)\cdot\frac{2}{3} \\ &\approx 0{,}526. \end{aligned}$$

4.48. Sabe-se que os disquetes produzidos por certa companhia têm probabilidade de defeito igual a 0,01, independentemente uns do outros. A companhia vende os disquetes em embalagens com 10 e oferece uma garantia de devolução se mais que 1 disquete em uma embalagem com 10 disquetes apresentar defeito. Se alguém compra 3 embalagens, qual é a probabilidade de que ele ou ela devolva exatamente 1 delas?

Solução: Seja X a variável aleatória correspondente ao número de disquetes defeituosos em uma embalagem, então X segue uma distribuição binomial de parâmetros $p = 0{,}01$ e $n = 10$. A empresa troca a embalagem se $X > 1$. Assim, a probabilidade da empresa trocar uma dada embalagem é

$$\begin{aligned} P\{X > 1\} &= 1 - P\{X \leq 1\} \\ &= 1 - \binom{10}{0}(0{,}99)^{10} - \binom{10}{1}(0{,}01)(0{,}99)^{9} \\ &\approx 0{,}0043. \end{aligned}$$

Dessa forma, a probabilidade que exatamente uma embalagem seja trocada é

$$\binom{3}{1}(P\{X > 1\})(1 - P\{X > 1\})^2 \approx 0{,}0127.$$

4.49. A moeda 1 dá cara com probabilidade 0,4; a moeda 2 tem probabilidade 0,7 de dar cara. Uma dessas moedas é escolhida aleatoriamente e jogada 10 vezes.

(a) Qual é a probabilidade de que a moeda dê cara em exatamente 7 das 10 jogadas?

(b) Dado que a primeira dessas 10 jogadas dê cara, qual é a probabilidade condicional de que exatamente 7 das 10 jogadas deem cara?

Solução: Seja A o evento de selecionar a moeda 1. Seja X_i a variável aleatória correspondente ao número de caras quando jogamos 10 vezes a moeda i, $i \in \{0, 1\}$. Note que X_i segue uma distribuição binomial de parâmetros $p = p_i$ ($p_1 = 0{,}4$ e $p_2 = 0{,}7$) e $n = 10$. Definimos também a v.a. X, que representa o número de caras de uma das duas moedas selecionadas ao acaso.

(a) A probabilidade da moeda dar cara em 7 das 10 jogadas é dado por

$$\begin{aligned} P\{X = 7\} &= P\{X = 7 \mid A\}P(A) + P\{X = 7 \mid A^c\}P(A^c) \\ &= P\{X_1 = 7\}P(A) + P\{X_2 = 7\}P(A^c) \\ &= \binom{10}{7}(0{,}4)^7(0{,}6)^3 \cdot \frac{1}{2} + \binom{10}{7}(0{,}7)^7(0{,}3)^3 \cdot \frac{1}{2} \\ &\approx 0{,}155. \end{aligned}$$

(b) Seja o evento C a primeira jogada dar cara, então estamos interessados na probabilidade

$$
\begin{aligned}
P\{X = 7 \mid C\} &= \frac{P(\{X = 7\} \cap C)}{P(C)} \\
&= \frac{P(\{X = 7\} \cap C \mid A)P(A) + P(\{X = 7\} \cap C \mid A^c)P(A^c)}{P(C \mid A)P(A) + P(C \mid A^c)P(A^c)} \\
&= \frac{\binom{9}{6}(0{,}4)^6(0{,}6)^3 \cdot (0{,}4) \cdot \frac{1}{2} + \binom{9}{6}(0{,}7)^6(0{,}3)^3 \cdot (0{,}7) \cdot \frac{1}{2}}{(0{,}4) \cdot \frac{1}{2} + (0{,}7) \cdot \frac{1}{2}} \\
&\approx 0{,}197.
\end{aligned}
$$

Exercícios - Lebensztayn - Cap. 3

1. Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$p(x) = c\,x, \quad x = 1, 2, \ldots, 6.$$

Encontre

(a) o valor de c.

(b) a probabilidade de X ser um número ímpar.

> **Solução:**
>
> (a) Sabemos que
>
> $$\sum_{x=1}^{6} p(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^{6} c\,x = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sum_{x=1}^{6} x} = \frac{1}{21}.$$
>
> (b) A probabilidade de X ser ímpar é equivalente à probabilidade de $X \in \{1, 3, 5\}$, ou seja,
>
> $$p(1) + p(3) + p(5) = \frac{1+3+5}{21} = \frac{3}{7}.$$

2. Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$p(x) = \frac{c}{4^x}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

Obtenha:

(a) o valor de c.

(b) a probabilidade de X ser um número par.

> **Solução:**
>
> (a) Sabemos que
>
> $$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1 &\Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} \frac{c}{4^x} = 1 \\ &\Rightarrow c = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{4^x}} \\ &\Rightarrow c = \frac{1}{\frac{1}{1-1/4}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(b) A probabilidade de X ser par é equivalente à probabilidade de $X \in \{0, 2, 4, \dots\}$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\infty} p(2x) &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{3/4}{4^{2x}} \\
&= \frac{3}{4} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{16^x} \\
&= \frac{3/4}{1 - 1/16} \\
&= \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

3. Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 1/2, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 3/5, & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ 4/5, & \text{se } 2 \leq x < 3, \\ 9/10, & \text{se } 3 \leq x < 4, \\ 1, & \text{se } x \geq 4. \end{cases}$$

(a) Determine a função de probabilidade de X.

(b) Calcule $P(X = 0 \mid X \text{ é par})$.

Solução:

(a) Sabemos que

$$p(a) = P\{X = a\} = F(a) - \lim_{x \to a^-} F(a).$$

Usando a expressão acima obtemos que

$$\begin{aligned}
p(0) &= 1/2 - 0 = 1/2, \\
p(1) &= 3/5 - 1/2 = 1/10, \\
p(2) &= 4/5 - 3/5 = 1/5, \\
p(3) &= 9/10 - 4/5 = 1/10, \\
p(4) &= 1 - 9/10 = 1/10.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}P(X = 0 \mid X \text{ é par}) &= \frac{P(\{X = 0\}, \{X \text{ é par})\}}{P\{X \text{ é par}\}}\\ &= \frac{P\{X = 0\}}{P\{X \text{ é par}\}}\\ &= \frac{p(0)}{p(0) + p(2) + p(4)}\\ &= \frac{1/2}{1/2 + 1/5 + 1/10}\\ &= \frac{5}{8}.\end{aligned}$$

4. Quinze pessoas portadoras de determinada doença são selecionadas para se submeter a um tratamento. Sabe-se que este tratamento é eficaz na cura da doença em 80% dos casos. Suponha que os indivíduos submetidos ao tratamento curam-se (ou não) independentemente uns dos outros e considere X o número de curados dentre os 15 pacientes submetidos ao tratamento.
   (a) Qual a distribuição de X?
   (b) Qual a probabilidade de que os 15 pacientes sejam curados?
   (c) Qual a probabilidade de que pelo menos dois não sejam curados?

Solução:

(a) A variável aleatória X segue uma distribuição binomial de parâmetros $p = 0{,}8$ e $n = 15$.

(b)

$$P\{X = 15\} = \binom{15}{15}(0{,}8)^{15} \approx 0{,}035.$$

(c) Isso é equivalente ao complemento de 14 ou 15 pessoas serem curadas, ou seja,

$$1 - (P\{X = 14\} + P\{X = 15\}) = 1 - \binom{15}{15}(0{,}8)^{15} - \binom{15}{14}(0{,}8)^{14}(0{,}2) \approx 0{,}833.$$

5. Um estudante preenche por adivinhação um exame de múltipla escolha com 5 respostas possíveis (das quais uma correta) para cada uma de 10 questões.
   (a) Qual a distribuição do número de respostas certas?
   (b) Qual a probabilidade de que o estudante obtenha 9 ou mais respostas certas?

(c) Qual a probabilidade de que acerte pelo menos duas questões?

Solução:

(a) Seja X a variável aleatória que corresponde ao número de respostas certas, então X segue uma distribuição binomial de parâmetros $p = \frac{1}{5}$ e $n = 10$.

(b)
$$P\{X = 9\} + P\{X = 10\} = \binom{10}{9}(\tfrac{1}{5})^9(\tfrac{4}{5}) + \binom{10}{10}(\tfrac{1}{5})^{10} \approx 0{,}0000042.$$

(c) Isso é equivalente ao complemento de acertar uma ou nenhuma questão, ou seja,
$$1 - (P\{X = 0\} + P\{X = 1\}) = 1 - \binom{10}{0}(\tfrac{4}{5})^{10} - \binom{10}{1}(\tfrac{1}{5})(\tfrac{4}{5})^9 \approx 0{,}624.$$

7. Em 1693, Samuel Pepys escreveu uma carta para Isaac Newton propondo-lhe um problema de probabilidade, relacionado a uma aposta que planejava fazer. Pepys perguntou o que é mais provável: obter pelo menos um 6 quando 6 dados são lançados, obter pelo menos dois 6 quando 12 dados são lançados, ou obter pelo menos três 6 quando 18 dados são lançados. Newton escreveu três cartas a Pepys e finalmente o convenceu de que o primeiro evento é mais provável. Calcule as três probabilidades.

Solução: A probabilidade de obter pelo menos um 6 em seis dados honestos é o complemento de não obter nenhum 6, ou seja,
$$1 - \binom{6}{0}(\tfrac{5}{6})^6 \approx 0{,}6651.$$
A probabilidade de obter pelo menos dois 6 em doze dados honestos é o complemento de obter no máximo um 6, ou seja,
$$1 - \left(\binom{12}{0}(\tfrac{5}{6})^{12} + \binom{12}{1}(\tfrac{1}{6})(\tfrac{5}{6})^{11}\right) \approx 0{,}6187.$$
A probabilidade de obter pelo menos três 6 em dezoito dados honestos é o complemento de obter no máximo dois 6, ou seja,
$$1 - \left(\binom{18}{0}(\tfrac{5}{6})^{18} + \binom{18}{1}(\tfrac{1}{6})(\tfrac{5}{6})^{17} + \binom{18}{2}(\tfrac{1}{6})^2(\tfrac{5}{6})^{16}\right) \approx 0{,}5973.$$