Soluções para problemas selecionados da apostila
Otimização Matemática e Pesquisa Operacional
de André R. Fioravanti e Matheus Souza

– Capítulo 5 –

Plínio Santini Dester (`p103806@dac.unicamp.br`)

18 de janeiro de 2022

*Em caso de dúvidas, sugestões ou correções, não hesite em mandar um e-mail.

5 Problemas

5.2. **Normas ℓ_1 e ℓ_∞ e Problemas de Programação Linear.** As normas vetoriais ℓ_1 e ℓ_∞ surgem em uma grande variedade de aplicações. Para um vetor $x \in \mathbb{R}^n$, essas normas são definidas como

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_\infty := \max\Big\{|x_i| \ : \ i = 1, \cdots, n\Big\}.$$

Neste exercício, veremos como modelar estas normas em termos de problemas de programação linear.

(a) Seja $y \in \mathbb{R}$ um escalar dado. Qual é a solução ótima do problema abaixo?

$$\begin{array}{rl} \min & t \\ \text{sujeito a:} & t \geq y, \\ & t \geq -y. \end{array}$$

(b) Com base na sua observação acima, mostre que, para um vetor $y \in \mathbb{R}^m$ dado, a sua norma ℓ_∞ é dada pela solução $t^\star$ do problema

$$\begin{array}{rl} \min & t \\ \text{sujeito a:} & -\mathbf{1}t \leq y \leq \mathbf{1}t. \end{array}$$

(c) Ainda usando a observação do item (a), mostre que, para um vetor $y \in \mathbb{R}^m$ dado, a sua norma ℓ_1 é dada por $\mathbf{1}^\top t^\star$, sendo $t^\star \in \mathbb{R}^m$ a solução ótima do problema

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{1}^\top t \\ \text{sujeito a:} & -t \leq y \leq t. \end{array}$$

Solução:

(a) Note que se $t \geq y$ e $t \geq -y$, então $t \geq |y|$. Logo, o menor valor que t pode assumir é $|y|$. Portanto, a solução do problema é $t^* = |y|$.

(b) Se $-\mathbf{1}t \leq y \leq \mathbf{1}t$, então $t \geq y_i$ e $t \geq -y_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Como vimos anteriormente, isso é equivalente à $t \geq |y_i|$ para todo i.Dessa forma, t ser maior ou igual ao maior dos $|y_i|$ é condição necessária e suficiente para satisfazer a restrição. Portanto, a restrição equivalente à todas essas é $t \geq \max_i |y_i|$. Dessa forma o menor valor que t pode assumir é o ótimo

$$t^* = \max_{i \in \{1,\ldots,m\}} |y_i| = ||y||_\infty.$$

(c) Note que agora $t \in \mathbb{R}^m$ é um vetor. A restrição, analogamente aos itens anteriores, é equivalente à $t_i \geq |y_i|$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Dessa forma, o menor valor que $\mathbf{1}^\top t$ pode assumir é quando $t_i^* = |y_i|$. Assim,

$$\mathbf{1}^\top t^* = \sum_{i=1}^{n} |y_i| = ||x||_1.$$

5.3. Converta os seguintes problemas para a forma padrão:

(a)
$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeito a:} \quad & 2 \leq x_1 + x_2 \leq 3, \\ & 4 \leq x_1 + x_3 \leq 5, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeito a:} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ & x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 2, \quad x_3 \geq 3. \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeito a:} \quad & x_1 + x_2 \leq 6, \\ & x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ & x_1 - x_2 \geq 2, \\ & x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Solução:

(a)
$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeito a:} \quad & -x_1 - x_2 + x_4 = -2, \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 3, \\ & -x_1 - x_3 + x_6 = -4, \\ & x_1 + x_3 + x_7 = 5, \\ & x_i \geq 0, \ i \in \{1, \ldots, 7\}. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeito a:} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ & -x_1 + x_4 = -1, \\ & -x_2 + x_5 = -2, \\ & -x_3 + x_6 = -3, \\ & x_i \geq 0, \ i \in \{1, \ldots, 6\}. \end{aligned}$$

(c) Seja $\tilde{x}_2 = -x_2$ e $x_1 = x_1^+ - x_1^-$, então

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^+ - x_1^- + 2\tilde{x}_2 \\ \text{sujeito a:} \quad & x_1^+ - x_1^- - \tilde{x}_2 + x_3 = 6, \\ & -x_1^+ + x_1^- + 2\tilde{x}_2 + x_4 = -12, \\ & -x_1^+ + x_1^- - \tilde{x}_2 + x_5 = -2, \\ & x_1^+, x_1^-, \tilde{x}_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

5.7. Converta o seguinte problema de otimização a um PL na forma padrão:

$$\begin{aligned} \min \quad & |x_1| + |x_2| + |x_3| \\ \text{sujeito a:} \quad & x_1 + x_2 \leq 1, \\ & 2x_1 + x_3 = 3. \end{aligned}$$

Solução: Para remover os módulos, vamos definir as variáveis $z_i \geq x_i$ e $z_i \geq -x_i$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$, assim como foi feito no problema 5.2. Como $x_i \in \mathbb{R}$, temos que definir também $x_i = x_i^+ - x_i^-$. Então o problema fica

$$\begin{aligned} \min \quad & z_1 + z_2 + z_3 \\ \text{sujeito a:} \quad & x_1^+ - x_1^- + x_2^+ - x_2^- + x_4 = 1, \\ & 2x_i^+ - 2x_i^- + x_3^+ - x_3^- = 3, \\ & -z_i + x_i^+ - x_i^- + x_{i+4} = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \\ & -z_i - x_i^+ + x_i^- + x_{i+7} = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \\ & z_i, x_i^+, x_i^-, x_4, x_{i+4}, x_{i+7} \geq 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

5.12. Encontre todas as soluções básicas do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 & = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 & = 3 \end{cases}$$

Solução: Basta selecionar as colunas de forma a montar matrizes quadradas de posto completo e resolver o sistema linear correspondente, de forma que $Bx_B = [4, 3]^\top$.

- Variáveis básicas: (x_1, x_2):

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} -11 \\ -7 \end{bmatrix};$$

- Variáveis básicas: (x_1, x_3):

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix};$$

- Variáveis básicas: (x_1, x_4):

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 7/2 \end{bmatrix};$$

- Variáveis básicas: (x_1, x_5):

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix};$$

- Variáveis básicas: (x_2, x_3):

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 11/2 \end{bmatrix};$$

- e assim sucessivamente até (x_4, x_5).

5.13. Encontre todos os pontos extremos do seguinte conjunto poliédrico:

$$\mathbb{X} = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \; : \; x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \quad -x_1 + 2x_2 \leq 4, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \right\}$$

Solução: Como nosso espaço é de dimensão 3, vamos ativar de 3 em 3 desigualdades e verificar se o ponto correspondente satisfaz as demais; se for o caso então trata-se de um ponto extremo. Temos 5 inequações, vamos numerá-las de I até V na ordem mostrada no enunciado.

- ativando a I, II e III, temos $x = [0, 2, -1]^\top$, que não satisfaz a inequação V;
- ativando a I, II e IV, temos $x = [-4, 0, 5]^\top$, que não satisfaz a inequação III;
- ativando a I, II e V, temos $x = [-2/3, 5/3, 0]^\top$, que não satisfaz a inequação III;
- ativando a I, III e IV, temos $x = [0, 0, 1]^\top$, que satisfaz as demais e, portanto, é um ponto extremo;

- ativando a I, III e V, temos $x = [0, 1, 0]^\top$, que satisfaz as demais e, portanto, é um ponto extremo;
- ativando a I, IV e V, temos $x = [1, 0, 0]^\top$, que satisfaz as demais e, portanto, é um ponto extremo;
- ativando a II, III e IV, temos um sistema sem solução;
- ativando a II, III e V, temos $x = [0, 2, 0]^\top$, que não satisfaz a inequação I;
- e assim sucessivamente...

5.14. Determine se o seguinte politopo possui alguma direção factível ilimitada, ou seja, se o conjunto contém alguma semirreta.

$$\mathbb{X} = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad : \quad -x_1 + x_2 = 4, \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \quad x_3 \geq 1, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \right\}$$

Solução: O politopo não contém semirretas, pois ele é limitado. Para verificar isso, basta tomar as inequações

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

Daí temos que $0 \leq x_1 \leq 6 - x_2 - x_3 \leq 6$. Por simetria, o mesmo vale para x_2 e x_3. Logo, $\mathbb{X} \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_i \leq 6, \forall i \in \{1, 2, 3\}\}$, que é um conjunto limitado.

5.26. Uma fábrica têxtil produz três itens, x_1, x_2 e x_3. Seu planejamento produtivo para o próximo mês deve verificar as restrições

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 12 \qquad \text{e} \qquad 2x_2 + 4x_2 + x_3 \leq s,$$

sendo $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. A primeira restrição modela a capacidade produtiva da fábrica e a segunda modela a quantidade de algodão disponível, s. A receita líquida obtida com cada tipo de produto é proporcional a 2, 3 e 3, respectivamente. Determine a variável dual ótima $\lambda_2^\star(s)$ e a receita ótima $f^\top x^\star(s)$ em função de s. Interprete.

Solução: Vamos enunciar o problema no formato padrão,

$$\begin{array}{rl} \min & -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 \\ \text{sujeito a:} & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 12, \\ & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = s, \\ & x_i \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, 5\}. \end{array}$$

Assim reconhecemos as matrizes

$$f = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ s \end{bmatrix},$$

e podemos escrever o problema dual:

$$\begin{aligned} \max \quad & 12\lambda_1 + s\lambda_2 \\ \text{sujeito a:} \quad & \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq -2, \\ & 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \leq -3, \\ & 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq -3, \\ & \lambda_1, \lambda_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Podemos verificar que os pontos extremos do conjunto factível são $[-4/3, -1/3]^\top$, $[0, -3]^\top$, $[-2, 0]^\top$, que resultam nos seguintes valores para a função objetivo $b^\top\lambda$: $-16 - s/3$, $-3s$, -24, respectivamente. Agora é só comparar qual dos três pontos maximiza a função objetivo em função de s. É importante verificar, também, que a região factível é limitada na direção do gradiente (maximização).

Podemos verificar que se $6 \leq s \leq 24$, o maximizador é $\lambda^* = [-4/3, -1/3]^\top$ e, portanto, a função objetivo do problema original é $-f^\top x^* = -b^\top\lambda^* = 16 + s/3$.
Por outro lado, se $s \leq 6$, o maximizador é $\lambda^* = [0, -3]^\top$ e, portanto, a função objetivo do problema original é $-b^\top\lambda^* = 3s$.
Por fim, se $s \geq 24$, o maximizador é $\lambda^* = [-2, 0]^\top$ e, portanto, a função objetivo do problema original é $-b^\top\lambda^* = 24$.

5.27. Uma pequena empresa de consultoria tem três consultores sêniores disponíveis para trabalhar em quatro projetos nas próximas duas semanas. Cada consultor tem 80 horas para distribuir entre os projetos e a Tabela 1 mostra a avaliação (de 0 a 100) da capacidade que cada um dos consultores tem de contribuir ao projeto, além das horas que cada projeto requer. O diretor da empresa deseja atribuir os consultores de forma a maximizar a capacidade total de contribuição associada a esta atribuição. Formule este problema como um PL e resolva-o.

Solução: Para todo $i \in \mathcal{I} = \{A, B, C\}$ e $j \in \mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$, seja a variável de decisão $x_{i,j}$ o tempo alocado do consultor i no projeto j. Sabe-se a demanda d_j do projeto j, as avaliações $a_{i,j}$ que o consultor i recebe relativo ao projeto j e sabemos que o consultor i trabalha no máximo m_i horas. Logo, o problema pode ser escrito

	Projeto			
Consultor	1	2	3	4
A	90	80	10	50
B	60	70	50	65
C	70	40	80	85
Horas	70	50	85	35

Tabela 1: Dados do Problema 5.27.

como

$$\begin{array}{rl} \max & \displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{J}} a_{i,j}\, x_{i,j} \\ \text{sujeito a:} & \sum_{j\in\mathcal{J}} x_{i,j} \le m_i, \quad i \in \mathcal{I}, \\ & \sum_{i\in\mathcal{I}} x_{i,j} = d_j, \quad j \in \mathcal{J}, \\ & x_{i,j} \ge 0, \quad (i,j) \in \mathcal{I}\times\mathcal{J}. \end{array}$$

Resolvendo o problema, encontramos a seguinte solução,

$$x = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 40 & 0 \\ 30 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45 & 35 \end{bmatrix}.$$

5.28. Diversas composições de gasolina são produzidas durante o processo de refino de petróleo. Um importante passo final na produção de combustíveis combina estas composições de forma a gerar um produto de mercado que satisfaça métricas de qualidade especificadas. Suponha que uma empresa tenha 4 variedades de gasolina disponíveis e que serão considerados dois índices de qualidade, A e B. Suponha ainda que estas variedades disponíveis tenham os seguintes valores para os dois índices: 99 e 210, 70 e 335, 78 e 280, 91 e 265, respectivamente. Sabendo-se que os respectivos custos por barril de cada variedade são \$48, \$43, \$58 e \$46, o nosso objetivo é determinar a mistura de menor custo com índice A entre 85 e 90 e índice B entre 270 e 280. Formule este problema como um PL e resolva-o.

Solução: Seja a variável de decisão x_i a porcentagem da i-ésima variedade utilizada na mistura, com $i \in \{1,2,3,4\}$. O problema pode ser formulado como

$$\begin{array}{rl} \min & 48\,x_1 + 43\,x_2 + 58\,x_3 + 46\,x_4 \\ \text{sujeito a:} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & 85 \le 99\,x_1 + 70\,x_2 + 78\,x_3 + 91\,x_4 \le 90, \\ & 270 \le 210\,x_1 + 335\,x_2 + 280\,x_3 + 265\,x_4 \le 280, \\ & x_i \ge 0, \quad i \in \{1,2,3,4\}. \end{array}$$

Resolvendo o problema obtemos que $x = [0.1765, 0.3529, 0, 0.4706]^\top$.

5.29. Uma metalúrgica deve fornecer ao menos 37 discos grandes e 211 discos pequenos. Para produzí-los, a empresa corta placas de metal de tamanho padrão, em três padrões de corte: um fornece 2 discos grandes, com 34% de desperdício; o segundo fornece 5 discos pequenos, com 22% de sobras e o terceiro fornece 1 disco grande e 3 discos pequenos, com 27% de desperdício. A empresa busca satisfazer a demanda com o menor desperdício possível. Formule este problema como um PL e resolva-o. As variáveis ótimas são inteiras?

Solução: Seja x_i o número de cortes do tipo $i \in \{1, 2, 3\}$. Dessa forma, podemos formular o problema como

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & 34\,x_1 + 22\,x_2 + 27\,x_3 \\ \text{sujeito a:} \quad & 2\,x_1 + x_3 \geq 37, \\ & 5\,x_2 + 3x_3 \geq 211, \\ & x_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Resolvendo o problema obtemos que $x = [0, 20, 37]^\top$.
Felizmente, a solução ótima é inteira.

5.30. Uma pequena oficina de artesanato produz enfeites e outros adereços natalinos. Os adereços de papai-noel requerem 0.1 dia de moldagem, 0.35 dia de decoração e 0.08 dia de embalagem e produzem um lucro de \$16 por unidade. Os valores correspondentes para pequenas árvores de natal são 0.1, 0.15, 0.03 e \$9, enquanto que os valores para bonecos de gengibre são 0.25, 0.4, 0.05 e \$27. A oficina deseja maximizar o lucro gerado pela produção dos próximos 20 dias úteis com uma equipe composta de 1 modelador, 3 decoradores e 1 embalador. Assuma que tudo o que for produzido será vendido. Formule este problema como um PL e resolva-o.

Solução: Seja x_i o número de produtos produzidos do tipo $i \in \{1, 2, 3\}$. Dessa forma, podemos formular o problema como

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 16\,x_1 + 9\,x_2 + 27\,x_3 \\ \text{sujeito a:} \quad & 0.10\,x_1 + 0.10\,x_2 + 0.25\,x_3 \leq 20, \\ & 0.35\,x_1 + 0.15\,x_2 + 0.40\,x_3 \leq 60, \\ & 0.08\,x_1 + 0.03\,x_2 + 0.05\,x_3 \leq 20, \\ & x_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Resolvendo o problema obtemos que $x = [147, 0, 21]^\top$.

5.31. Uma delegacia de polícia distribui os seus policiais em turnos: em cada semana, cada policial trabalha 5 dias seguidos e tira 2 dias consecutivos de folga. Para garantir um serviço de qualidade, a chefia da delegacia determinou que são necessários ao menos 6 policiais nas segundas, terças, quartas e quintas-feiras, ao menos 10 policiais nas sextas-feiras e nos sábados e ao menos 8 policiais nos domingos. A delegacia deseja determinar o menor número de policiais necessários para atingir estas exigências. Formule e resolva este problema de otimização. As variáveis ótimas são inteiras?

Solução: Seja x_i o número de policiais que começam a trabalhar no i-ésimo dia da semana começando com segunda-feira, $i \in \{1, 2, \ldots, 7\}$. Assim, podemos formular o problema como

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{7} x_i \\
\text{sujeito a:} \quad & x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 6, \\
& x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 6, \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 6, \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 6, \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 10, \\
& x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 10, \\
& x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 8, \\
& x_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \ldots, 7\}.
\end{aligned}$$

Resolvendo o problema obtemos que $x = [2/3, 2, 8/3, 2/3, 4, 2/3, 0]^\top$.
Infelizmente, a solução ótima não é inteira. Dessa forma, é necessário adicionar a restrição de que $x \in \mathbb{N}^7$ e, assim, obtemos a solução inteira $x = [0, 3, 2, 0, 5, 0, 1]^\top$.

5.32. Uma fábrica produz uniformes escolares. A demanda de produtos para esta empresa é altamente sazonal, sendo de 2800, 500, 100 e 850 kits de uniformes para os próximos trimestres. A empresa consegue produzir 1200 kits de uniformes por trimestre e deve se planejar para usar estoques eficientemente a fim de satisfazer a demanda. O custo de estocagem é de $15 por kit de uniformes por trimestre. O objetivo da empresa é satisfazer a demanda, minimizando o custo total de estoque. Neste problema, resolveremos o **problema de horizonte infinito**, em que assumimos que essa demanda se repete indefinidamente. Neste caso, a modelagem considera que o primeiro trimestre é o período imediatamente após o quarto trimestre. Formule este problema como um PL e resolva-o, determinando a estratégia ótima de produção.

Solução: Sejam as variáveis de decisão x_i o número de kits de uniformes produzidos no i-ésimo trimestre e e_i o estoque de kits guardados no i-ésimo trimestre, com

$i \in \{1,2,3,4\}$. Então, podemos formular o problema como

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{4} 15\, e_i \\
\text{sujeito a:} \quad & e_1 = e_4 + x_4 - 850 \geq 0, \\
& e_2 = e_1 + x_1 - 2800 \geq 0, \\
& e_3 = e_2 + x_2 - 500 \geq 0, \\
& e_4 = e_3 + x_3 - 100 \geq 0, \\
& 0 \leq x_i \leq 1200, \quad i \in \{1,2,3,4\}.
\end{aligned}
$$

Obtemos como solução $x = [1200, 650, 1200, 1200]^\top$, $e = [1600, 0, 150, 1250]^\top$.