Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

EA044 – Turma U – Prova II **28/11/2018**

Nome

RA

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Total
Nota							

Instruções

- Esta prova tem **06 questões** distribuídas em **10 páginas**. A **nota máxima** da prova é de **10,0 pontos**.
- Cada questão deve ser resolvida, de forma **organizada**, **clara** e **formal** no espaço indicado. Estes critérios fazem parte da avaliação.
- Utilize a folha de almaço fornecida para rascunhos.
- Não destaque as folhas deste caderno.
- É permitida a consulta a uma folha manuscrita em papel A4, que deve ser entregue juntamente com a prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Qualquer tentativa de fraude, se detectada durante ou após a realização da prova, implicará em nota **zero** para todos os envolvidos, além das penalidades disciplinares previstas no Regimento Geral da Unicamp (Arts. 226 – 237).
- A duração total da prova é de **120 minutos**.

► **Questão 1: (1.0pt)** Recentemente, a Internet parou para discutir a tabela de preços de um (agora famoso) restaurante em Hong Kong. Este restaurante, que serve apenas asas de frango em seu menu, pratica os preços de diversos *combos* conforme a figura a seguir:

Figura 1: Tabela de preços

Você, um astuto estudante de otimização, desejando economizar, observa que o dono do restaurante não tem uma política de preços (HK\$/asa de frango) muito clara. Por exemplo, se você deseja comprar 60 asas de frango, é mais barato comprar dois *combos*, um de 50 e um de 10, em vez do *combo* de 60 asas. Desenvolva um problema de otimização que, dada a quantidade inteira m de asas de frango desejada, faça a escolha ótima de quais *combos* devem ser adquiridos para que o custo total seja minimizado.

Resolução: Sejam x_i o número de combos da posição i, n_i o número de asas de frango que o i-ésimo combo contém e c_i o custo do i-ésimo combo, então podemos formular o problema como

$$\begin{array}{rl} \min & \sum_i c_i x_i \\ \text{sujeito a} & \sum_i n_i x_i \geqslant m, \\ & x_i \in \mathbb{N} \quad \forall i. \end{array}$$

► **Questão 2:** Considere o seguinte problema da mochila

$$\begin{aligned} \max \quad & 50x_1 + 60x_2 + 140x_3 + 40x_4 \\ \text{sujeito a} \quad & 5x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 20x_4 \leqslant 30, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{B} \triangleq \{0, 1\}. \end{aligned}$$

(a) **(1.0pt)** Formule a relaxação deste problema removendo-se a restrição de integralidade, ou seja, o *problema da mochila fracionário* associado a este. Mostre como obter a solução ótima deste problema e determine esta solução. Dica: a estratégia gulosa clássica funciona para o problema da mochila fracionário.

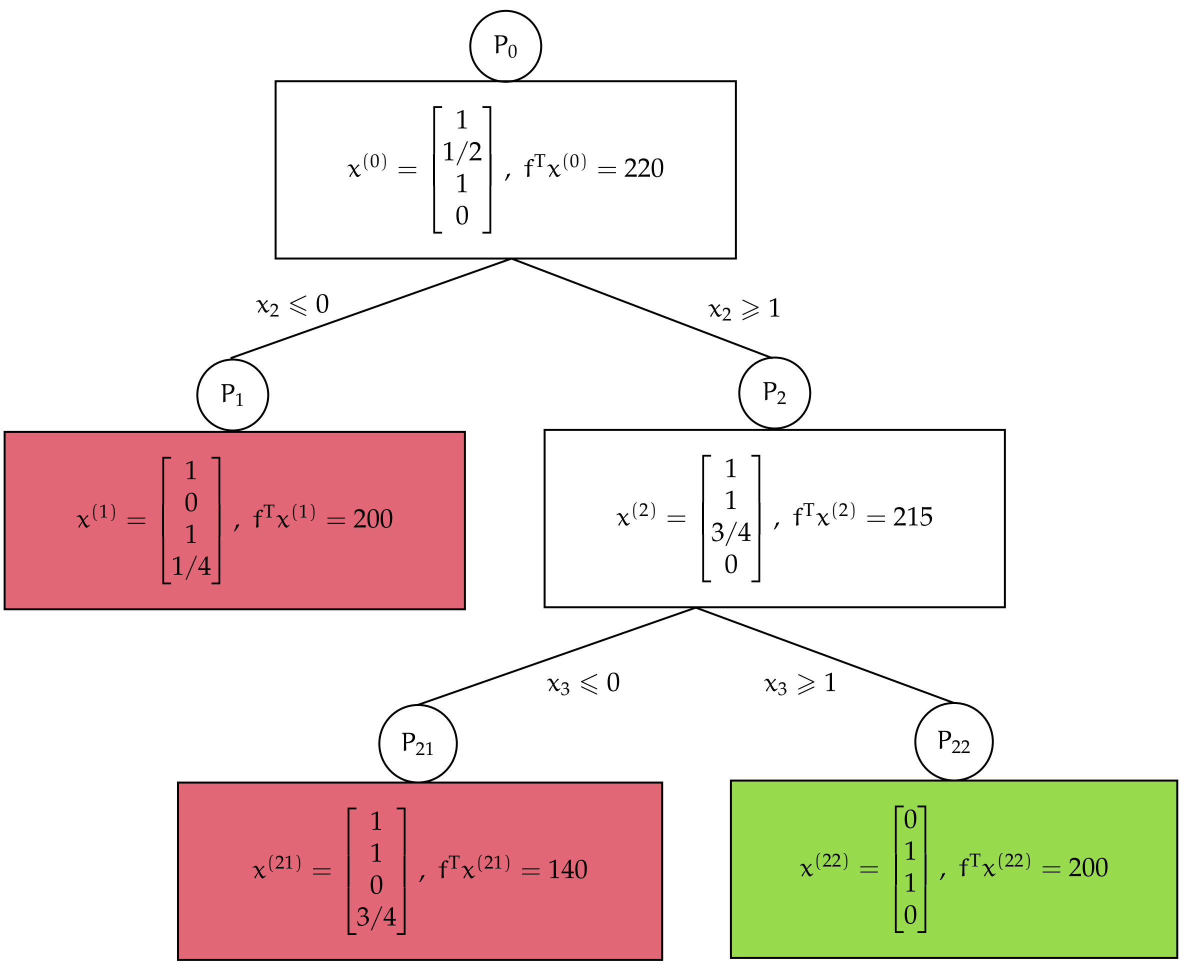
Resolução:

$$\begin{aligned} \max \quad & 50x_1 + 60x_2 + 140x_3 + 40x_4 \\ \text{sujeito a} \quad & 5x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 20x_4 \leqslant 30, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

A utilidade por peso dos itens é dada por $50/5 = 10$, $60/10 = 6$, $140/20 = 7$ e $40/20 = 2$ para o primeiro, segundo, terceiro e quarto item, respectivamente. Logo, devemos colocar o máximo possível dos itens na ordem 1, 3, 2, 4 até atingir o peso máximo. Dessa forma, obtemos a solução $x^\star = [1, 1/2, 1, 0]^\mathsf{T}$.

(b) **(1.5pt)** Resolva o problema acima usando *branch & bound*. Construa a árvore de B&B e explique quais nós fornecem candidatas a solução ótima e quais nós podem ser eliminados por estas candidatas. Resolva cada subproblema usando a estratégia gulosa usada acima.

Resolução:



Obtemos solução inteira com o nó P_{22}. Como os nós P_1 e P_{21} fornecem valores ótimos iguais ou piores, podemos eliminá-los.

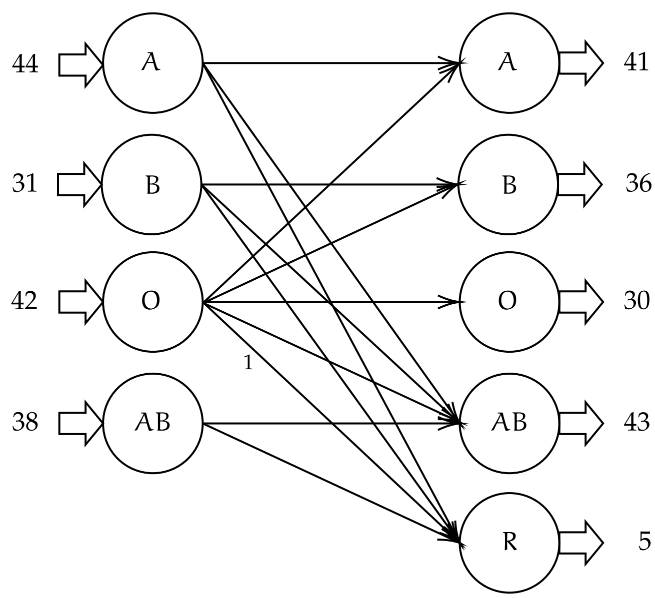
► **Questão 3: (1.5pt)** Após uma (complicada) festa universitária, muitos estudantes tiveram que ir para a emergência de um hospital. No total, 150 alunos têm que receber, via transfusão, uma bolsa de sangue cada. O hospital tem 155 bolsas disponíveis. A tabela a seguir ilustra a distribuição de tipo sanguíneo dos estudantes e das bolsas disponíveis.

Tipo	A	B	O	AB
Bolsas	44	31	42	38
Alunos	41	36	30	43

Lembre que pacientes do tipo A podem receber sangue de tipo A ou tipo O; pacientes do tipo B podem receber apenas sangue de tipo B ou O; pacientes do tipo O apenas recebem sangue de tipo O; pacientes de tipo AB podem receber qualquer um dos tipos de sangue.

Você, como gerente do hospital, deve analisar se o estoque do hospital é suficiente para atender a esta demanda; além disso, seu objetivo é atender a todos os alunos usando o menor número possível de bolsas de sangue do doador universal (tipo O). Modele este problema como um problema de transporte **balanceado** (ou seja, esboce a rede de fluxo das fontes – bolsas – para os destinos – alunos); formule, também, o PLI que deve ser resolvido neste caso. Você não precisa resolver o problema.

Resolução: Note que o número de bolsas de sangue supera em 5 o número de alunos, logo é necessário criar um nó com demanda 5 para o problema ficar balanceado. Esse novo nó representa o número de bolsas que não serão utilizadas. Todas as arestas tem peso 0, exceto a aresta $O \to R$.



Sejam $x_{i,j}$ o número de bolsas transferidas de $i \in \{A, B, O, AB\}$ para $j \in \{A, B, O, AB, R\}$, então o PLI é

$$
\begin{array}{rl}
\max & x_{O,R} \\
\text{sujeito a} & x_{A,A} + x_{A,AB} + x_{A,R} = 44, \\
& x_{B,B} + x_{B,AB} + x_{B,R} = 31, \\
& x_{O,A} + x_{O,B} + x_{O,O} + x_{O,AB} + x_{O,R} = 42, \\
& x_{AB,AB} + x_{AB,R} = 38, \\
& x_{A,A} + x_{O,A} = 41, \\
& x_{B,B} + x_{O,B} = 36, \\
& x_{O,O} = 30, \\
& x_{A,AB} + x_{B,AB} + x_{O,AB} + x_{AB,AB} = 43, \\
& x_{A,R} + x_{B,R} + x_{O,R} + x_{AB,R} = 5, \\
& x_{i,j} \in \mathbb{N}, \quad i, j \in \{A, B, O, AB\} \times \{A, B, O, AB, R\}.
\end{array}
$$

► **Questão 4:** Considere um grafo $G = (V, E)$ com $n+1$ nós $V = \{v_0, \cdots, v_n\}$ tal que, para qualquer $i \in \{1, \cdots, n\}$, existe uma aresta com peso (custo) n de v_0 a v_i e que, para qualquer $i \in \{1, \cdots, n\}$, existe uma aresta com peso i entre v_i e v_{i+1}. Um grafo desta forma está mostrado na figura abaixo.

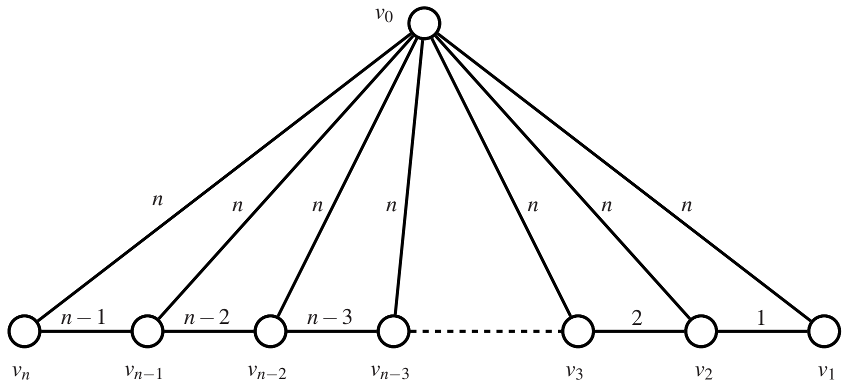
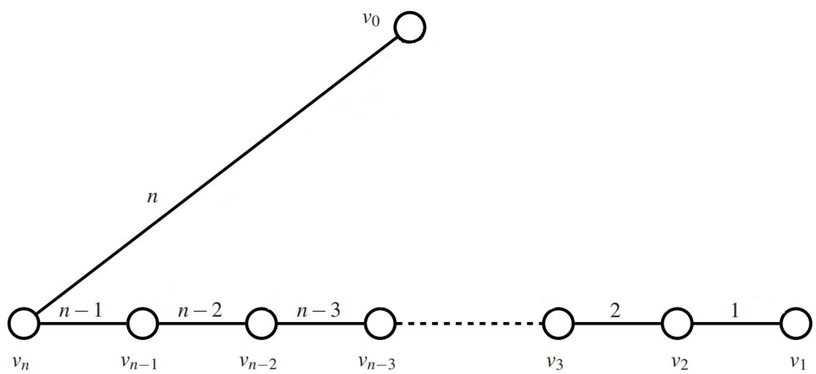


Figura 2: Grafo para a Questão 4.

(a) **(1.0pt)** Use o algoritmo de Kruskal para determinar uma árvore geradora mínima para este grafo.

Resolução:



(b) **(0.5pt)** Forneça n diferentes árvores geradoras mínimas para este grafo. Dica: pense nas escolhas que você tinha no item anterior.

Resolução: A aresta $v_0 \leftrightarrow v_n$ pode ser trocada pela aresta $v_0 \leftrightarrow v_i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ e a árvore continua sendo geradora mínima.

(c) **(1.0pt)** Considere a árvore geradora mínima que contém a aresta (ν_0, ν_1). Para que valores de n esta árvore é uma árvore de caminho mínimo a partir de ν_1?

Resolução: A árvore geradora mínima coincide com a de caminho mínimo enquanto for vantajoso percorrer o caminho $\nu_1 \to \nu_2 \to \cdots \to \nu_{n-1} \to \nu_n$ ao invés de $\nu_1 \to \nu_0 \to \nu_n$, ou seja, enquanto a seguinte inequação for satisfeita

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 \leqslant 2n \;\Leftrightarrow\; \frac{n(n-1)}{2} \leqslant 2n \;\Leftrightarrow\; n(n-5) \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{0 \leqslant n \leqslant 5}.$$

► **Questão 5:** Uma empresa deve comprar 300 computadores de três fornecedores. Usando as variáveis de decisão x_i para descrever o número de unidades fornecidas pela empresa i, o seguinte problema de programação linear inteira calcula a forma de menor custo para se comprar 300 computadures dentro de limites aplicáveis:

$$\begin{array}{rl} \min & 5x_1 + 7x_2 + 6.5x_3 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 = 300, \\ & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leqslant 1500, \\ & 0 \leqslant x_1 \leqslant 200, \\ & 0 \leqslant x_2 \leqslant 300, \\ & 0 \leqslant x_3 \leqslant 200, \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}. \end{array}$$

(a) **(0.5pt)** Sabendo-se que cada fornecedor cobra um custo fixo de entrega de R\$100, reformule este problema de otimização para incluir esta informação.

Resolução:

$$\begin{array}{rl} \min & 100(y_1 + y_2 + y_3) + 5x_1 + 7x_2 + 6.5x_3 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 = 300, \\ & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leqslant 1500, \\ & 0 \leqslant x_1 \leqslant 200y_1, \\ & 0 \leqslant x_2 \leqslant 300y_2, \\ & 0 \leqslant x_3 \leqslant 200y_3, \\ & y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{B}, \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}. \end{array}$$

(b) **(0.5pt)** Além do custo fixo de entrega, estes fornecedores apenas vendem lotes com um número mínimo de 125 máquinas. Reformule este problema de otimização para incluir esta informação.

Resolução:

$$\begin{array}{rl} \min & 100(y_1 + y_2 + y_3) + 5x_1 + 7x_2 + 6.5x_3 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 = 300, \\ & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leqslant 1500, \\ & 125y_1 \leqslant x_1 \leqslant 200y_1, \\ & 125y_2 \leqslant x_2 \leqslant 300y_2, \\ & 125y_3 \leqslant x_3 \leqslant 200y_3, \\ & y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{B}, \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}. \end{array}$$

► **Questão 6:** Uma avó e seu neto brincam com o seguinte jogo matemático: dado um vetor de n números naturais não-nulos, introduza sinais de $+$ e de $\times$ entre eles de forma a maximizar o resultado final da operação, sem que duas multiplicações apareçam em sequência. Por exemplo, para o vetor

$$1 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 1,$$

a solução ótima seria

$$1 + 4 \times 5 + 3 \times 2 + 1 = 28.$$

O neto usa a seguinte estratégia gulosa no jogo: enquanto for possível e interessante, ele seleciona o melhor par de números disponíveis (o par de maior produto cujos números não são usados em nenhum produto) para realizar uma multiplicação. Quando estes pares terminam, o neto completa o restante com somas. Por exemplo, para o caso acima, a resposta do neto seria a própria solução ótima.

(a) **(0.5pt)** Encontre um contra-exemplo para mostrar que a estratégia do neto não é ótima.

Resolução:

$$3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 3,$$

pois a solução do neto seria $3 + 4 \times 5 + 3 = 26$ e a ótima é $3 \times 4 + 5 \times 3 = 27$.

(b) **(1.0pt)** A vovó, muito mais sábia que o neto, lembra do seu curso de otimização por correspondência e decide usar programação dinâmica para construir a solução ótima. Formule a recursão gerada pelo princípio da otimalidade, com os devidos casos-base, para este problema. Como podemos resolver a recursão de forma organizada – isto é, de forma iterativa –, para construir a solução ótima deste problema?

Resolução: Para a sequência de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, seja T_i o valor da solução ótima para a sequência $a_1, \ldots, a_i$, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, então

$$\begin{cases} T_0 = 0, \quad T_1 = a_1, \\ T_i = \max\left\{T_{i-1} + a_i, T_{i-2} + a_{i-1} \times a_i\right\}. \end{cases}$$

Dessa forma, o valor ótimo é dado por T_n.

(c) **(1.0pt)** Use o procedimento construído acima para determinar a solução ótima, juntamente com o respectivo valor ótimo, para o seguinte vetor:

1 2 3 4 2 1 6 5 7 4 1 2 3

Resolução:

$$
\begin{aligned}
T_0 &= 0, \\
T_1 &= 1, \\
T_2 &= \max\left\{\underline{1+2}, 0+1\times 2\right\} = 3, \\
T_3 &= \max\left\{3+3, \underline{1+2\times 3}\right\} = 7, \\
T_4 &= \max\left\{7+4, \underline{3+3\times 4}\right\} = 15, \\
T_5 &= \max\left\{\underline{15+2}, 7+4\times 2\right\} = 17, \\
T_6 &= \max\left\{\underline{17+1}, 15+2\times 1\right\} = 18, \\
T_7 &= \max\left\{\underline{18+6}, 17+1\times 6\right\} = 24, \\
T_8 &= \max\left\{24+5, \underline{18+6\times 5}\right\} = 48, \\
T_9 &= \max\left\{48+7, \underline{24+5\times 7}\right\} = 59, \\
T_{10} &= \max\left\{59+4, \underline{48+7\times 4}\right\} = 76, \\
T_{11} &= \max\left\{\underline{76+1}, 59+4\times 1\right\} = 77, \\
T_{12} &= \max\left\{\underline{77+2}, 76+1\times 2\right\} = 79, \\
T_{13} &= \max\left\{79+3, \underline{77+2\times 3}\right\} = 83.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$1+2+3\times 4+2+1+6\times 5+7\times 4+1+2\times 3 = 83.$$