EE400 – *Métodos da Engenharia Elétrica*

Docente: Matheus Souza

Solução para problemas selecionados

– Lista de Exercícios 5 –

Plínio S. Dester
(pliniodester@hotmail.com)

18 de Janeiro de 2022

Em caso de dúvidas, sugestões ou correções, não hesite em mandar um e-mail.

5 Exercícios

5.1. Reduza os seguintes números complexos à forma $x + iy$.

(a) $z_1 = (2 - 3i)(1 + 5i)$;

(b) $z_2 = (1 + 2i)(2 + i)$;

(c) $z_3 = (4 - 3i)(5 - i)(1 + i)$;

(d) $z_4 = (3 + 2i)^2$;

(e) $z_5 = (1 + i)^3$;

(f) $z_6 = \dfrac{1 + 2i}{3 - i}$;

(g) $z_7 = \dfrac{1 + i}{(1 - i)^2}$.

Solução:

(a) $z_1 = 17 + 7i$;

(b) $z_2 = 5i$;

(c) $z_3 = 36 - 2i$;

(d) $z_4 = 5 + 12i$;

(e) $z_5 = -2 + 2i$;

(f) $z_6 = \dfrac{(1 + 2i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \dfrac{1}{10}(1 + 7i)$;

(g) $z_7 = \dfrac{(1 + i)^3}{(1 + 1)^2} = \dfrac{1}{2}(-1 + i)$.

5.2. Determine o valor de i^n para n inteiro. Use este resultado para reduzir os seguintes números à forma algébrica $z = x + iy$.

(a) $z_1 = \dfrac{(1 + i)^{80} - (1 + i)^{82}}{i^{96}}$;

(b) $z_2 = (1 + i)^{12} - (1 - i)^{12}$;

(c) $z_3 = \dfrac{i^3 - i^2 + i^{17} - i^{35}}{i^{16} - i^{13} + i^{30}}$;

(d) $z_4 = \dfrac{i^{11} + 2i^{13}}{i^{18} - i^{37}}$.

Solução: Como $i^4 = 1$, então $i^n = i^{4q+r} = i^r$, onde q é o quociente e r é o resto da divisão de n por 4. Dessa forma,

(a) $z_1 = (1+i)^{2\cdot 40}(1-(1+i)^2) = (2i)^{40}(1-2i) = 2^{40}(1-2i)$;

(b) $z_2 = (1+i)^{12} - (1-i)^{12} = (2i)^6 - (-2i)^6 = 0$;

(c) $z_3 = \dfrac{-i+1+i+i}{1-i-1} = -1+i$;

(d) $z_4 = \dfrac{-i+2i}{-1-i} = \dfrac{-i}{1+i}\dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{1}{2}(-1-i)$.

5.3. Determine números complexos z_1 e z_2 tais que $z_1 + iz_2 = i$ e $iz_1 + z_2 = 2i - 1$.

Solução: Multiplicando a segunda equação por i e somando ambas equacões, temos que

$$2iz_2 = -2 \;\Rightarrow\; \boxed{z_2 = i}.$$

Em seguida, usando a primeira equação temos que $\boxed{z_1 = 1+i}$.

5.4. Quais as condições sobre os números complexos z_1 e z_2 para que $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$? Quais as condições sobre z_1 e z_2, com $z_2 \neq 0$, para que z_1/z_2 seja real?

Solução: Seja $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$. Sabemos que

$$z_1 z_2 \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Im}[z_1 z_2] = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0,$$

$$z_1/z_2 \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; z_1 \bar{z}_2/|z_2|^2 \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; -x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0.$$

5.5. Quais são as condições sobre $a, b \in \mathbb{R}$ para que o número $(a+bi)^4$ seja estritamente negativo?

Solução: Se $(a+bi)^4 < 0$, então é fácil ver que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Expandindo

$$(a+bi)^4 = \left[(a^2-b^2) + 2abi\right]^2 = \left[(a^2-b^2)^2 - 4a^2b^2\right] + \left[4(a^2-b^2)ab\right] i.$$

Note que a parte imaginária se anula somente se $a = \pm b$. Quando isso ocorre

$$(a+bi)^4 = -4a^2b^2 < 0.$$

5.6. Sejam $u, v \in \mathbb{C}$ dois números tais que $u^2 - v^2 = 6$ e $\bar{u} + \bar{v} = 1 - i$. Calcule $u - v$.

Solução: Sabemos que $(u+v)(u-v) = u^2 - v^2 = 6$ e que $u + v = \overline{\bar{u} + \bar{v}} = 1 + i$. Assim,

$$u - v = \frac{6}{1+i} = 3(1-i).$$

5.7. Variando o número inteiro n, quais são os possíveis valores para o quociente $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$?

Solução:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = \left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^n = i^n \in \{\pm 1, \pm i\}, \quad \text{vide Exercício 5.2.}$$

5.8. Seja $z = x + iy \neq 0$. Determine a condição para que $z + z^{-1}$ seja real.

Solução: Sabemos que

$$z + z^{-1} = \frac{|z|^2 z + \bar{z}}{|z|^2} \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; |z|^2 z + \bar{z} \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Im}[|z|^2 z + \bar{z}] = 0 \;\Leftrightarrow\; y\left(|z|^2 - 1\right) = 0.$$

Dessa forma, $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $y = 0$ ou $|z| = 1$.

5.9. **(IME)** Sejam $z = a + bi$ e $w = 47 + ci$ numéros complexos tais que $z^3 + w = 0$. Determine os valores de a, b e c sabendo que estes números são inteiros positivos.

Solução: Expandindo $(a + bi)^3$ encontramos que

$$z^3 = -a(3b^2 - a^2) - b(b^2 - 3a^2)i.$$

Como $w = -z^3$, comparando as partes reais obtemos que $47 = a(3b^2 - a^2)$. Note que 47 é primo, ou seja, $\{a = 47 \text{ e } 3b^2 - a^2 = 1\}$ ou $\{a = 1 \text{ e } 3b^2 - a^2 = 47\}$. Excluímos a primeira solução, pois $1 + a^2$ não é divisível por 3. Usando a segunda solução temos que $a = 1$ e $b = 4$. Enfim, comparando as partes imaginárias chega-se em $c = b(b^2 - 3a^2) = 52$.

5.10. Se z_1 e z_2 forem dois números complexos tais que $z_1 + z_2$ e $z_1 z_2$ forem ambos reais, o que podemos afirmar sobre z_1 e z_2?

Solução: Como $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$, então $\operatorname{Im} z_1 = -\operatorname{Im} z_2$. Dessa forma, sejam $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$, então z_1, z_2 podem ser escritos como $z_1 = x_1 + yi$ e $z_2 = x_2 - yi$. Como $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ também, então

$$\operatorname{Im}[z_1 z_2] = 0 \iff x_1 y - x_2 y = 0 \iff y\,(x_1 - x_2) = 0.$$

Portanto, $y = 0$ ou $x_1 = x_2$, isto é, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ ou $z_1 = \overline{z_2}$.

5.11. Determine $x \in \mathbb{R}$ para que o número $z = \dfrac{2 - ix}{1 + i2x}$ seja imaginário puro.

Solução:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{2 - ix}{1 + i2x}\right] = 0 \iff \operatorname{Re}\left[\frac{(2 - ix)(1 - i2x)}{1 + 4x^2}\right] = 0 \iff 2(1 - x^2) = 0.$$

Assim, $x \in \{1, -1\}$ para que z seja imaginário puro.

5.14. Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$ para o qual $(\sqrt{3} + i)^n$ é:

(a) real e positivo; (b) real e negativo; (c) imaginário puro.

Solução: Vamos escrever a base em forma polar, ou seja, $\sqrt{3} + i = 2\,e^{i\pi/6}$.
Logo, $(\sqrt{3} + i)^n = 2^n\, e^{in\pi/6}$ e assim, $\arg(\sqrt{3} + i)^n = n\pi/6$.

(a) Um número complexo é real e positivo se o argumento for da forma $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, se $n = 12k$, $k \in \mathbb{N}$.

(b) Um número complexo é real e negativo se o argumento for da forma $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, se $n = 6 + 12k$, $k \in \mathbb{N}$.

(c) Um número complexo é imaginário puro se o argumento for da forma $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, se $n = 3 + 6k$, $k \in \mathbb{N}$.

5.15. Para os itens a seguir, considere o número complexo $z = \sigma + i\omega$.

(a) Para $\sigma = 1$, determine $\omega > 0$ para que $\arg\left(z^{-3}\right) = -\pi$.

(b) Para $\omega = 1$, determine $\sigma < 0$ para que $\left|z^{-3}\right| = 1/8$.

Solução: Vamos usar a forma polar de $z = re^{i\theta}$. Assim,

(a) $\arg\left(z^{-3}\right) = \arg\left(r^{-3}e^{-3i\theta}\right) = -3\theta$. Logo, $\theta = \pi/3$.
Para $\sigma = 1, \omega > 0$, temos que $\omega = \sqrt{3}$, de forma que $\tan\theta = \omega/\sigma$.

(b) $\left|z^{-3}\right| = \left|r^{-3}e^{-3i\theta}\right| = r^{-3}$. Logo, $r = 2$.
Para $\omega = 1, \sigma < 0$, temos que $\sigma = -\sqrt{3}$ para que $r = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$.

5.16. **(IME - modificada)** Considere o número complexo $z = \dfrac{a}{ib(1+ib)^2}$, com a, b reais positivos. Sabendo que o módulo e o argumento de z valem, respectivamente, 1 e $-\pi$, determine a.

Solução: Sabemos que

$$\arg z = \arg a - \arg ib - \arg(1+ib)^3 = 0 - \frac{\pi}{2} - 3\arctan b.$$

Como $\arg z = -\pi$, então $b = \tan \pi/6 = \sqrt{3}/3$.
Ademais,

$$|z| = \frac{|a|}{|ib|\,|1+ib|^2} = \frac{a}{b(1+b^2)^{3/2}}.$$

Como $|z| = 1$, então

$$a = b(1+b^2)^{3/2} = \frac{4^{3/2}}{\sqrt{3}\,3^{3/2}} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9}.$$

5.21. Um hexágono regular, inscrito em uma circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o ponto $(0, 2)$. Determine os outros cinco vértices do hexágono.

Solução: No plano complexo as coordenadas dos vértices do hexágono regular são justamente as soluções da equação $z^6 = (2i)^6$. Igualando os módulos e os argumentos tiramos que $|z| = 2$ e $6\arg z = 6\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\arg z = \pi/2 + k\pi/3$, $k \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$$z_0 = 2e^{i\pi/2} = (0, 2), \qquad z_3 = 2e^{i(\pi/2+3\pi/3)} = (0, -2),$$
$$z_1 = 2e^{i(\pi/2+\pi/3)} = (-\sqrt{3}, 1), \qquad z_4 = 2e^{i(\pi/2+4\pi/3)} = (\sqrt{3}, -1),$$
$$z_2 = 2e^{i(\pi/2+2\pi/3)} = (-\sqrt{3}, -1), \qquad z_5 = 2e^{i(\pi/2+5\pi/3)} = (\sqrt{3}, 1).$$

5.22. **(IME - modificada)** Seja z um número complexo tal que $\frac{2z}{\bar{z}i}$ tenha argumento $\frac{3\pi}{2}$ e $\log_3(2z + 2\bar{z} + 1) = 2$. Determine o número complexo z.

Solução: Sabemos que $3\pi/2 = \arg(2z/\bar{z}i) = \arg(z) - \arg(\bar{z}) - \pi/2$, ou seja, $\arg(z) = \arg(\bar{z})$. Portanto, z é real. Assim, $z = 7/4$ para que $\log_3(4z + 1) = 2$.

5.23. Resolva as seguintes equações, para $z \in \mathbb{C}$:

(a) $\dfrac{z}{1-i} + \dfrac{z-1}{1+i} = \dfrac{5}{2} + i\dfrac{5}{2}$;

(b) $\bar{z} = -2zi$;

(c) $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 13 + i6$;

(d) $z^3 = \bar{z}$;

(e) $z^2 = i$;

(f) $z^2 + |z| = 0$;

(g) $z^6 + 8 = 0$;

(h) $z^4 + i = 0$;

(i) $z^3 - 27 = 0$;

(j) $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$;

(k) $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$.

Solução:

(a) A equação é satisfeita para $z = 3 + 2i$;

(b) A equação é satisfeita para $z = 0$;

(c) A equação é satisfeita para $z = 2 + 3i$;

(d) A equação é satisfeita para todo $z \in \{0, \pm 1, \pm i\}$;

(e) A equação é satisfeita para todo $z \in \{\pm(1+i)/\sqrt{2}\}$;

(f) A equação é satisfeita para todo $z \in \{0, \pm i\}$;

(g) A equação é satisfeita para todo $z \in \{\pm i\sqrt{2}, (\sqrt{3} \pm i)/\sqrt{2}, (-\sqrt{3} \pm i)/\sqrt{2}\}$;

(h) A equação é satisfeita para $z = e^{i(\pi/8 + k\pi/2)}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$;

(i) A equação é satisfeita para todo $z \in \{3, (-3 \pm 3\sqrt{3}i)/2\}$;

(j) A equação é satisfeita para todo $z \in \{\pm 1, \pm 2, \pm i, \pm 2i\}$;

(k) A equação é satisfeita para $z = \sqrt[4]{2}\, e^{i(\pi/8 + k\pi/2)}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

5 Problemas

5.1. Determine os valores de $n \in \mathbb{N}$ para os quais a igualdade $(1+i)^n = (1-i)^n$ se verifica.

Solução: Seja $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Sabemos que $z_1 = z_2$ sempre que $|z_1| = |z_2|$ e $\arg(z_1) = \arg(z_2)$. Nesse problema, é fácil ver que os módulos são iguais para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, basta verificarmos para quais valores de n os argumentos são iguais, ou seja,

$$\begin{aligned} \arg(1+i)^n = \arg(1-i)^n &\Leftrightarrow n\frac{\pi}{4} = -n\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow n = 4k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dessa forma, para que a igualdade se verifique basta que $n \in \{0, 4, 8, 12, \dots\}$.

5.2. Use as Fórmulas de De Moivre para deduzir as seguintes identidades trigonométricas:

(a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$;

(b) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$;

(c) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$;

(d) $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$.

Solução: A partir da fórmula de De Moivre, temos que

$$\begin{aligned}\cos 2\theta + i\sin 2\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2\\ &= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i\sin\theta\cos\theta.\end{aligned}$$

Comparando a parte real e imaginária, encontramos as identidades (a) e (b).

Novamente, a partir da fórmula de De Moivre, temos que

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i\sin 3\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3\\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta).\end{aligned}$$

Comparando a parte real e imaginária, encontramos as identidades (c) e (d).

De forma geral, para $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}\theta\sin^{2k}\theta,\\ \sin n\theta &= \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}\theta\sin^{2k+1}\theta.\end{aligned}$$

5.3. **(Soma de uma Progressão Geométrica)** Mostre que

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

é válida para todo $z \neq 1$.

Solução: Seja $S(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$. Então,

$$(1 - z)\,S(z) = S(z) - z\,S(z) = 1 - z^{n+1}.$$

Como $z \neq 1$, então

$$S(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

5.4. **(Soma das raízes da unidade)** Mostre que, se $\omega \neq 1$ satisfaz a equação $\omega^n = 1$, então

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0.$$

Solução: Aplicando o resultado do Problema 3, temos que

$$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1} = \frac{1-\cancelto{1}{\omega^{n}}}{1-\omega} = 0, \quad \text{pois } \omega \neq 1.$$

5.5. **(Identidade de Lagrange)** Use a fórmula da soma de uma progressão geométrica para demonstrar a *identidade trigonométrica de Lagrange*

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta = \frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin(\theta/2)},$$

que é satisfeita para todo $\theta \in (0, 2\pi)$.

Solução: Tome $z = e^{i\theta}$ na progressão geométrica do Problema 3 e use a fórmula de Euler para concluir que

$$(1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta)+i(\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta) = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}.$$

Extraindo a parte real de ambos lados da equação, obteremos a identidade desejada. Mas, antes disso vamos trabalhar no lado direito da equação.

$$\begin{aligned}\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\frac{e^{-i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} &= \frac{e^{-i\theta/2}-e^{i(n+1/2)\theta}}{-2i\sin(\theta/2)} \\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin(\theta/2)}\right)+i\left(\frac{\cos(\theta/2)-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin(\theta/2)}\right).\end{aligned}$$

De fato, a parte real é justamente a fórmula que procurávamos. Ainda, podemos obter também a fórmula da soma dos senos ao tomarmos a parte imaginária.

5.6. **(O corpo $\mathbb{C}$ não admite ordem)** Uma ordem em um corpo $\mathbb{K}$ consiste em definir um subconjunto $\mathbb{K}^+$ de $\mathbb{K}$, formado pelos *números positivos* em $\mathbb{K}$, tal que:

- se $x, y \in \mathbb{K}^+$, então $x+y \in \mathbb{K}^+$ e $xy \in \mathbb{K}^+$ e
- dado $x \in \mathbb{K}$, então apenas uma das três possibilidades se verifica: ou $x \in \mathbb{K}^+$, ou $x = 0$ ou $-x \in \mathbb{K}^+$.

Segue dessas duas propriedades que, em um corpo ordenado, o quadrado de qualquer elemento não-nulo deve ser positivo. Use as propriedades acima para provar este fato. Use essa observação para concluir que $\mathbb{C}$ não pode admitir uma ordem. Dica: analise os elementos $\{\pm 1, \pm i\}$ e seus quadrados.

Solução: Seja $x \in \mathbb{K}$ não-nulo, $\mathbb{K}$ ordenável e $\mathbb{K}^+$ o subconjunto dos *números positivos* de $\mathbb{K}$, então ou $x \in \mathbb{K}^+$, ou $-x \in \mathbb{K}^+$. Se $x \in \mathbb{K}^+$, segue diretamente da primeira propriedade que $x^2 \in \mathbb{K}^+$. Por outro lado, se $-x \in \mathbb{K}^+$, então $(-x)(-x) \in \mathbb{K}^+$, isto é, $x^2 \in \mathbb{K}^+$. Dessa forma, provamos que se $\mathbb{K}$ for ordenado e $x \in \mathbb{K}$ não-nulo, então $x^2 \in \mathbb{K}^+$.

Se o corpo $\mathbb{C}$ admitir uma ordem, então sabemos que $1 \in \mathbb{C}^+$, pois $0 \neq 1 = 1^2 \in \mathbb{C}^+$ e, assim, $-(-1) \in \mathbb{C}^+$. Porém, $0 \neq i \in \mathbb{C}$ e $i^2 = -1 \notin \mathbb{C}^+$. Chegamos à uma contradição, pois encontramos um elemento não-nulo de $\mathbb{C}$, cujo quadrado não pertence à $\mathbb{C}^+$. Portanto, $\mathbb{C}$ não admite uma ordem.

5.9. Seja z um número complexo tal que $|z - 2i| \leqslant 1$. Sejam θ_M e θ_m o maior e o menor argumento principal dos números complexos que estão neste lugar geométrico, respectivamente. Calcule $\theta_M - \theta_m$.

Solução: O lugar geométrico é um círculo. O maior e o menor argumento estarão nas fronteiras desse círculo, ou seja, em $|z - 2i| = 1$. Seja $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \in \mathbb{R}_+, \theta \in (-\pi, \pi]$ queremos achar os pontos em que a derivada do argumento se anula, pois estes serão os pontos críticos (mínimo, máximo ou inflexão). Assim, vamos re-escrever a equação em termos de (r, θ).

$$\begin{aligned} 1 &= |r\cos\theta + i(r\sin\theta - 2i)| = r^2 - 4r\sin\theta + 4 \\ \Leftrightarrow r^2 &- 4r\sin\theta + 3 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Vamos calcular a derivada implícita de θ em relação à r, ou seja, deriva-se ambos lados da equação em relação à r, obtemos assim

$$\begin{aligned} 2r - 4\sin\theta - 4r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial r} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial r} &= \frac{r - 2\sin\theta}{2r\cos\theta}. \end{aligned}$$

Dessa forma, a derivada se anula quando $\sin\theta = r/2$. Substituindo na Equação (1), temos que $r = \sqrt{3}$ e, portanto, $\sin\theta = \sqrt{3}/2$, que possui duas soluções, $\theta_m = \pi/3$ e $\theta_M = 2\pi/3$. Logo, $\theta_M - \theta_m = \pi/3$.