ME210 - Probabilidade I - 2S 2017

Docente: Marina Vachkovskaia

Soluções para problemas selecionados do livro
Probabilidade: Um curso moderno com aplicações 8.ed. de Sheldon Ross

Plínio Santini Dester (p103806@dac.unicamp.br)

11 de setembro de 2017

Em caso de dúvidas, sugestões ou correções (inclusive erros de digitação), não hesite em mandar um e-mail.

2 Problemas

2.1. Uma caixa contém 3 bolas de gude: 1 vermelha, 1 verde e uma azul. Considere um experimento que consiste em retirar uma bola de gude da caixa, colocar outra em seu lugar e então retirar uma segunda bola da caixa. Descreva o espaço amostral. Repita considerando que a segunda bola seja retirada sem que a primeira seja substituída

Solução: Para o primeiro experimento o espaço amostral é

$$\Omega_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\},$$

onde 1, 2 e 3 representam as cores vermelha, verde e azul, respectivamente. Para o segundo experimento, o espaço amostral é

$$\Omega_2 = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}.$$

2.2. Em um experimento, um dado é rolado continuamente até que um 6 apareça, momento em que o experimento é interrompido. Qual é o espaço amostral do experimento? Chame de E_n o evento em que o dado é rolado n vezes para que o experimento seja finalizado. Que pontos do espaço amostral estão contidos em E_n? O que é $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c$?

Solução: O espaço amostral do experimento é

$$\Omega = \{(i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}, 6) \mid i_k \in \{1, 2, \cdots, 5\}, k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$\{(i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}, 6) \mid i_k \in \{1, 2, \cdots, 5\}, k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}\} = E_n.$$

Assim, E_n representa não tirar 6 nas $n-1$ primeiras rolagens e tirar 6 na n-ésima rolagem. O evento $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c$ representa nunca rolar um 6.

2.3. Dois dados são lançados. Seja E o evento em que a soma dos dados é ímpar, F o evento em que o número 1 sai em pelo menos um dos dados, e G o evento em que a soma dos dados é igual a 5. Descreva os eventos $E\,F$, $E \cup F$, $F\,G$, $E\,F^c$ e $E\,F\,G$.

Solução:

$$\begin{aligned}
E\,F &= \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(4,1),(6,1)\},\\
E \cup F &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,1),(3,2),\\
&\quad (3,4),(3,6),(4,1),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,4),(5,6),(6,1),(6,3),(6,5)\},\\
F\,G &= \{(1,4),(4,1)\},\\
E\,F^c &= \{(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6),(4,3),(4,5),(5,2),(5,4),(5,6),(6,3),(6,5)\},\\
E\,F\,G &= F\,G.
\end{aligned}$$

2.8. Suponha que A e B sejam eventos mutuamente exclusivos para os quais $P(A) = 0{,}3$ e $P(B) = 0{,}5$. Qual é a probabilidade de que:

(a) A ou B ocorra?

(b) A ocorra, mas B não ocorra?

(c) A e B ocorram?

Solução:

(a) Como são eventos mutuamente exclusivos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}8$.

(b) $P(A \backslash B) = P(A) = 0{,}3$.

(c) $P(A\,B) = P(\emptyset) = 0$.

2.15. Se é assumido que todas as $\binom{52}{5}$ mãos de pôquer são igualmente prováveis, qual é a probabilidade de alguém sair com

(a) um *flush* (uma mão é chamada de *flush* se todas as 5 cartas são do mesmo naipe)?

(b) um par (que ocorre quando as cartas são do tipo a, a, b, c, d, onde a, b, c e d são cartas distintas)?

(c) dois pares (que ocorre quando as cartas são do tipo a, a, b, b, c,onde a, b e c são cartas distintas)?

(d) trinca (que ocorre quando as cartas são do tipo a, a, a, b, c, onde a, b e c são cartas distintas)?

(e) quadra (que ocorre quando as cartas são do tipo a, a, a, a, b, onde a e b são cartas distintas)?

Solução:

(a) Temos 4 naipes para escolher e para cada naipe 13 cartas. Logo, a probabilidade de um *flush* é dada por

$$\frac{4\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{33}{16660} \approx 0{,}002.$$

(b) Temos 13 opções de pares, para cada opção de par temos $\binom{4}{2}$ maneiras de escolher os naipes. Restam 3 cartas para escolhermos entre as 12 que sobraram e para cada carta 4 naipes. Logo, a probabilidade de um par é

$$\frac{\left(13\binom{4}{2}\right)\left(4^3\binom{12}{3}\right)}{\binom{52}{5}} = \frac{352}{833} \approx 0{,}423.$$

(c) Temos 13 cartas para escolher as duas opções de pares. Para cada opção de par temos $\binom{4}{2}$ maneiras de escolher os naipes. Sobra apenas uma opção de carta e seu naipe para escolher entre as 11 que restaram. Logo, a probabilidade de dois pares é

$$\frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2 11 \cdot 4}{\binom{52}{5}} = \frac{198}{4165} \approx 0{,}048.$$

(d) Temos 13 opções de trinca e $\binom{4}{3}$ maneiras de escolher os naipes. Restam 2 cartas para escolhermos entre as 12 que sobraram e para cada carta 4 naipes. Logo, a probabilidade da trinca é

$$\frac{\left(13\binom{4}{3}\right)\left(4^2\binom{12}{2}\right)}{\binom{52}{5}} = \frac{88}{4165} \approx 0{,}021.$$

(e) Temos 13 opções de quadra e apenas uma maneira de escolher os naipes. Resta apenas 1 opção de carta para escolher entre as 12 que sobraram e seu naipe. Logo, a probabilidade da quadra é

$$\frac{13 \cdot 12 \cdot 4}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{4165} \approx 0{,}00024.$$

2.16. Pôquer com dados é jogado com o lançamento simultâneo de 5 dados. Mostre que:

(a) $P[\text{nenhum dado de mesmo valor}] = 0{,}0926$.

(b) $P[\text{um par}] = 0{,}4630$.

(c) $P[\text{dois pares}] = 0{,}2315$.

(d) $P[\text{trinca}] = 0{,}1543$.

(e) $P[\text{uma trinca e um par}] = 0{,}0386$.

(f) $P[\text{quatro dados iguais}] = 0{,}0193$.

(g) $P[\text{cinco dados iguais}] = 0{,}0008$.

Solução:

(a) Nenhum dado de mesmo valor só tem uma configuração possível e $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ escolhas para os valores dos dados. Logo, $P[\text{nenhum dado de mesmo valor}] = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6^5} \approx 0{,}0926$.

(b) O número de configurações de um par de dados de mesmo valor entre 5 dados é $\binom{5}{2}$ e as escolhas de valores para os dados são $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. Dessa forma, $P[\text{um par}] = \dbinom{5}{2} \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^5} \approx 0{,}4630$.

(c) O número de configurações de dois pares de dados de mesmo valor entre 5 dados é $\frac{1}{2!}\binom{5}{2,2,1}$, onde a divisão por 2! vem do fato que não adianta trocar de lugar os grupos de pares, e as escolhas de valores para os dados são $6 \cdot 5 \cdot 4$. Dessa forma, $P[\text{dois pares}] = \dfrac{1}{2!}\dbinom{5}{2, 2, 1} \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} \approx 0{,}2315$.

(d) O número de configurações de 3 dados de mesmo valor entre 5 dados é $\binom{5}{3}$ e as escolhas de valores para os dados são $6 \cdot 5 \cdot 4$. Dessa forma, $P[\text{trinca}] = \dbinom{5}{3} \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} \approx 0{,}1543$.

(e) O número de configurações de 3 dados de mesmo valor e 2 dados de mesmo valor é $\binom{5}{2}$ e as escolhas de valores para os dados são $6 \cdot 5$. Dessa forma, $P[\text{uma trinca e um par}] = \dbinom{5}{3} \dfrac{6 \cdot 5}{6^5} \approx 0{,}0386$.

(f) O número de configurações de 4 dados de mesmo valor entre 5 dados é $\binom{5}{4}$ e as escolhas de valores para os dados são $6{\cdot}5$. Dessa forma, $P[\text{quatro dados iguais}] = \binom{5}{4}\frac{6\cdot 5}{6^5} \approx 0{,}0193$.

(g) Cinco dados de mesmo valor só tem uma configuração possível e 6 escolhas para o valor dos dados. Assim, $P[\text{cinco dados iguais}] = \frac{6}{6^5} \approx 0{,}0008$.

2.18. Duas cartas são selecionadas aleatoriamente de um baralho comum. Qual é a probabilidade de que elas formem um vinte e um? Isto é, qual é a probabilidade de que uma das cartas seja um ás e a outra seja ou um dez, um valete, uma dama ou um rei?

Solução: Temos $\binom{52}{2}$ resultados possíveis, dos quais apenas nos interessa tirar um dos 4 ás do baralho e uma das $4{\cdot}4$ figuras ou dez. Logo, a probabilidade que buscamos é dada por $\frac{4\cdot(4\cdot 4)}{\binom{52}{2}} \approx 0{,}0483$.

2.19. Dois dados simétricos têm dois de seus lados pintados de vermelho, dois de preto, um de amarelo e o outro de branco. Quando esse par de dados é rolado, qual é a probabilidade de que ambos os dados saiam com uma face de mesma cor para cima?

Solução: Basta somar as probabilidade de cada evento desejado, ou seja, $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{18} \approx 0{,}2778$.

2.21. Uma pequena organização comunitária é formada por 20 famílias, das quais 4 têm uma criança, 8 têm duas crianças, 5 têm três crianças, 2 têm quatro crianças e 1 tem 5 crianças.

(a) Se uma dessas famílias é escolhida aleatoriamente, qual é a probabilidade de que ela tenha i crianças, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

(b) Se uma das crianças é escolhida aleatoriamente, qual é a probabilidade de que a criança venha de uma família com i crianças, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

Solução:

(a) $P_1 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$,
$P_2 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$,
$P_3 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$,
$P_4 = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$,
$P_5 = \frac{1}{20}$.

(b) O total de crianças é $4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 48$. Logo,
$P_1 = \frac{4 \cdot 1}{48} = \frac{1}{12}$,
$P_2 = \frac{8 \cdot 2}{48} = \frac{1}{3}$,
$P_3 = \frac{5 \cdot 3}{48} = \frac{5}{16}$,
$P_4 = \frac{2 \cdot 4}{48} = \frac{1}{6}$,
$P_5 = \frac{1 \cdot 5}{48} = \frac{5}{48}$.

2.23. Rola-se um par de dados honestos. Qual é a probabilidade de o segundo dado sair com um valor maior do que o primeiro?

Solução: Temos 6^2 resultados possíveis, dos quais nos interessam os seguintes resultados: se sair 6 no segundo dado, temos 5 possibilidades para o primeiro, se sair 5 no segundo dado, temos 4 possibilidades para o primeiro, e assim sucessivamente, ou seja, temos $5+4+3+2+1 = 15$ resultados desejados. Logo, a probabilidade do segundo dado ser maior que o primeiro é $\frac{15}{36} = \frac{5}{12} \approx 0{,}41667$.

2.24. Se dois dados são rolados, qual é a probabilidade de que a soma das faces para cima seja igual a i? Determine essa probabilidade para $i = 2, 3, ..., 11, 12$.

Solução: O total de resultados ordenados possíveis é $1/6^2$. Para resolver esse problema, basta contar quantos resultados ordenados possíveis levam à soma igual à i. Por exemplo, $i = 7$ pode ser obtido através dos resultados $(1,6), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5)$ e $(1,6)$. Logo, a probabilidade da soma ser 7 é $6/6^2 = 1/6$. Enfim, podemos verificar que a fórmula geral é dada por

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{i-1}{6^2}, & 2 \leq i \leq 7 \\ \dfrac{13-i}{6^2}, & 7 \leq i \leq 12 \end{cases}$$

2.27. Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 7 bolas pretas. Os jogadores A e B retiram bolas da urna alternadamente até que uma bola vermelha seja selecionada. Determine a probabilidade de A selecionar uma bola vermelha. (A tira a primeira bola, depois B,e assim por diante. Não há devolução das bolas retiradas.)

Solução: A probabilidade de A selecionar uma bola vermelha é dada por

$$\begin{aligned} P(V) + P(2P, V) + P(4P, V) + P(6P, V) &= \frac{3}{10} + \frac{7}{10}\frac{6}{9}\frac{3}{8} + \frac{7}{10}\frac{6}{9}\frac{5}{8}\frac{4}{7}\frac{3}{6} + \frac{7}{10}\frac{6}{9}\frac{5}{8}\frac{4}{7}\frac{3}{6}\frac{2}{5}\frac{3}{4} \\ &= \frac{7}{12} \approx 0{,}5833, \end{aligned}$$

onde nP, V significa tirar n bolas pretas antes de tirar uma vermelha.

2.28. Uma urna contém 5 bolas vermelhas, 6 bolas azuis e 8 bolas verdes. Se um conjunto de 3 bolas é selecionado aleatoriamente, qual é a probabilidade de que cada uma das bolas seja (a) da mesma cor? (b) de cores diferentes? Repita esse problema considerando que, sempre que uma bola seja selecionada, sua cor seja anotada e ela seja recolocada na urna antes da próxima seleção. Esse experimento é conhecido como *amostragem com devolução.*

Solução:

(a) Sem reposição: $\frac{5}{19}\frac{4}{18}\frac{3}{17} + \frac{6}{19}\frac{5}{18}\frac{4}{17} + \frac{8}{19}\frac{7}{18}\frac{6}{17} = \frac{86}{969} \approx 0{,}08875.$

Com reposição: $\left(\frac{5}{19}\right)^3 + \left(\frac{6}{19}\right)^3 + \left(\frac{8}{19}\right)^3 = \frac{853}{6859} \approx 0{,}12436.$

(b) Sem reposição: $3!\,\frac{5 \cdot 6 \cdot 8}{19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{80}{323} \approx 0{,}24768.$

Com reposição: $3!\,\frac{5}{19}\frac{6}{19}\frac{8}{19} = \frac{1440}{6859} \approx 0{,}20994.$

2.29. Uma urna contém n bolas brancas e m bolas pretas, onde n e m são números positivos.

(a) Se duas bolas são retiradas da urna aleatoriamente, qual é a probabilidade de que elas sejam da mesma cor?

(b) Se uma bola é retirada da urna aleatoriamente e então recolocada antes que a segunda bola seja retirada, qual é a probabilidade de que as bolas sacadas sejam da mesma cor?

(c) Mostre que a probabilidade calculada na letra (b) é sempre maior do que aquela calculada na letra (a)?

Solução:

(a) Podemos tirar duas bolas brancas ou duas pretas e a probabilidade disso acontecer é dada por $\dfrac{n\,(n-1)+m\,(m-1)}{(n+m)(n+m-1)}$.

(b) Analogamente, $\dfrac{n^2+m^2}{(n+m)^2}$

(c) Manipulando a expressão $\frac{n^2+m^2}{(n+m)^2} \geq \frac{n\,(n-1)+m\,(m-1)}{(n+m)(n+m-1)}$ chega-se em

$$\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)(n+m-1) \geq \left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)(n+m)-(n+m)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right),$$

da qual é fácil chegar em $2 \geq 0$, o que mostra a validade da primeira inequação.

2.30. Os clubes de xadrez de duas escolas são formados por 8 e 9 jogadores, respectivamente. Quatro membros de cada um dos clubes são selecionados aleatoriamente para participar de uma competição entre as duas escolas. Os jogadores escolhidos de um time então formam pares com aqueles do outro time, e cada um dos pares jogam uma partida de xadrez entre si. Suponha que Rebeca e sua irmã Elisa pertençam aos clubes de xadrez, mas joguem por escolas diferentes. Qual é a probabilidade de que

(a) Rebeca e Elisa joguem uma partida?

(b) Rebeca e Elisa sejam escolhidas para representar as suas escolas mas não joguem uma contra a outra?

(c) Rebeca ou Elisa sejam escolhidas para representar suas escolas?

Solução:

(a) A probabilidade de Rebeca ser selecionada é 4/8, enquanto que a probabilidade de Elisa ser selecionada é 4/9. Se ambos eventos aconteceram, então a probabilidade de uma jogar contra a outra é 1/4. Logo, a probabilidade de uma jogar contra a outra é $\frac{4}{8}\frac{4}{9}\frac{1}{4}=\frac{1}{18}\approx 0{,}056$.

(b) $\frac{4}{8}\frac{4}{9}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}\approx 0{,}167$.

(c) $\frac{4}{8}\left(1-\frac{4}{9}\right)+\frac{4}{9}\left(1-\frac{4}{8}\right)=\frac{1}{2}$.

2.32. Um grupo de indivíduos contendo m meninos e g garotas é alinhado de forma aleatória; isto é, supõe-se que cada uma das $(m+g)!$ permutações seja igualmente provável. Qual é a probabilidade de que a pessoa na i-ésima posição, $1 \leq i \leq m+g$, seja uma garota?

Solução: Fixa-se uma garota na i-ésima posição, para a qual temos g opções possíveis. Restam $(m+g-1)!$ formas de escolher as outras posições, do total de $(m+g)!$ permutações possíveis. Logo, a probabilidade desejada é dada por $\frac{g(m+g-1)!}{(m+g)!} = \frac{g}{m+g}$.

2.33. Em uma floresta vivem 20 renas, das quais 5 são capturadas, marcadas e então soltas. Certo tempo depois, 4 das renas são capturadas. Qual é a probabilidade de que 2 dessas 4 renas tenham sido marcadas? Que suposições você está fazendo?

Solução: Supomos que a probabilidade de capturar uma rena seja independente e igual para todas as renas. Existem $\binom{20}{4}$ grupos de 4 renas possíveis de serem capturadas, porém queremos duas renas marcadas, ou seja, $\binom{5}{2}$ possibilidades e 2 renas não marcadas, ou seja, $\binom{15}{2}$ possibilidades. No total, temos $\binom{5}{2}\binom{15}{2}$ formas de escolher 2 renas marcadas e 2 não marcadas. Enfim, a probabilidade disso acontecer é dada por

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{15}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{70}{323} \approx 0{,}2167$$

2.35. Sete bolas são retiradas aleatoriamente de uma urna que contém 12 bolas vermelhas, 16 bolas azuis e 18 bolas verdes. Determine a probabilidade de que

(a) 3 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 2 bolas verdes sejam sacadas;

(b) pelo menos duas bolas vermelhas sejam sacadas;

(c) todas as bolas sacadas sejam de mesma cor;

(d) exatamente 3 bolas vermelhas ou exatamente 3 bolas azuis sejam sacadas.

Solução:

(a) Temos $\binom{12}{3}$ formas de escolher as bolas vermelhas, $\binom{16}{2}$ formas de escolher as bolas azuis e $\binom{18}{2}$ as verdes. Logo, a probabilidade é dada por

$$\frac{\binom{12}{3}\binom{16}{2}\binom{18}{2}}{\binom{46}{7}} = \frac{3060}{40549} \approx 0{,}0755.$$

(b) O evento complementar seria não tirar nenhuma bola vermelha ou tirar uma bola vermelha. Logo, a probabilidade desejada é

$$1 - \frac{\binom{34}{7} + \binom{12}{1}\binom{34}{6}}{\binom{46}{7}} = \frac{363707}{608235} \approx 0{,}598.$$

(c) Calculemos a probabilidade de tirar todas vermelhas ou todas azuis ou todas verdes, ou seja,

$$\frac{\binom{12}{7}+\binom{16}{7}+\binom{18}{7}}{\binom{46}{7}} = \frac{5507}{6690585} \approx 0{,}0008.$$

(d) Note que os eventos exatamente 'tirar 3 bolas vermelhas' e 'tirar exatamente 3 bolas azuis' não são disjuntos. Logo, é necessário descontar a probabilidade da intersecção desses eventos, isto é, tirar exatamente 3 bolas azuis e 3 bolas vermelhas. Dessa forma, a probabilidade desejada é dada por

$$\frac{\binom{12}{3}\binom{34}{4}+\binom{16}{3}\binom{30}{4}-\binom{12}{3}\binom{16}{3}\binom{18}{1}}{\binom{46}{7}} = \frac{583298}{1338117} \approx 0{,}4359.$$

2.36. Duas cartas são escolhidas aleatoriamente de um baralho de 52 cartas. Qual é a probabilidade de

(a) ambas serem ases?

(b) ambas terem o mesmo valor?

Solução:

(a) $\dfrac{1\cdot\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \dfrac{1}{221}.$

(b) $\dfrac{13\cdot\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \dfrac{1}{17}.$

2.37. Um instrutor propõe para a classe um conjunto de 10 problemas com a informação de que o exame final será formado por uma seleção aleatória de 5 deles. Se um estudante tiver descoberto como resolver 7 dos problemas, qual é a probabilidade de que ele ou ela venha a-responder corretamente:

(a) todos os 5 problemas?

(b) pelo menos 4 dos problemas?

Solução:

(a) $\dfrac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{1}{12}.$

(b) $\dfrac{\binom{7}{5}+3\cdot\binom{7}{4}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{1}{2}.$

2.38. Existem n meias em uma gaveta, 3 das quais são vermelhas. Qual é o valor de n se a probabilidade de que duas meias vermelhas sejam retiradas aleatoriamente da gaveta é igual a $1/2$?

> **Solução:** Existem $\binom{3}{2}$ conjuntos de duas meias vermelhas dos $\binom{n}{2}$ conjuntos possíveis. Logo,
> $$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (n+3)(n-4) = 0.$$
> Assim, $n = -3$ ou $n = 4$. Como não podemos ter um número negativo de meias, então a resposta é $n = 4$ meias no total.

2.41. Se um dado é rolado 4 vezes, qual é a probabilidade de que o 6 saia pelo menos uma vez?

> **Solução:** A probabilidade do 6 não sair nenhuma vez é dada por $(5/6)^4$. O complemento desse evento é a probabilidade do 6 sair pelo menos uma vez, ou seja, $1 - (5/6)^4 \approx 0{,}518$.

2.43. (a) Se N pessoas, incluindo A e B, são dispostas aleatoriamente em linha, qual é a probabilidade de que A e B estejam uma ao lado da outra?

(b) E se as pessoas tivessem sido dispostas aleatoriamente em círculo?

> **Solução:** Seja $N \geq 3$.
>
> (a) As configurações nas quais A e B estão uma ao lado da outra são $2 \cdot (N-1)!$ do total de configurações possíveis $N!$. Logo, a probabilidade desejada é $2/N$.
>
> (b) Numa mesa circular não tem início, então as configurações possíveis se reduzem à $(N-1)!$. Fixando a posição do A, temos que as configurações desejadas são o B sentar-se à esquerda ou à direita de A, e para o restante das pessoas, temos $(N-2)!$ configurações possíveis. Portanto, a probabilidade desejada é
> $$\frac{2 \cdot (N-2)!}{(N-1)!} = \frac{2}{N-1},$$
> que é maior do que $2/N$.

2.44. Cinco pessoas, designadas como A, B, C, D, E, são arranjadas em uma sequência linear. Supondo que cada uma das ordenações possíveis seja igualmente provável, qual é a probabilidade de que:

(a) exista exatamente uma pessoa entre A e B?

(b) existam exatamente duas pessoas entre A e B?

(c) existam três pessoas entre A e B?

Solução:

(a) Temos duas opções em relação à A ou B vir primeiro; temos 3 opções em relação à pessoa que está no meio; temos 3! arranjos possíveis entre o grupo e o restante das pessoas. O total de arranjos possíveis é 5!. Portanto, a probabilidade desejada é $(2 \cdot 3 \cdot 3!)/5! = 3/10$.

(b) Aplicando raciocínio análogo ao item anterior temos $(2 \cdot (3 \cdot 2) \cdot 2!)/5! = 1/5$.

(c) Analogamente, temos $(2 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 1!)/5! = 1/10$.

2.45. Uma mulher tem n chaves,das quais uma abre a sua porta

(a) Se ela tentar usar as chaves aleatoriamente, descartando aquelas que não funcionam, qual é a probabilidade de ela abrir a porta em sua k-ésima tentativa?

(b) E se ela não descartar as chaves já utilizadas?

Solução:

(a) Para abrir a porta exatamente na k-ésima tentativa, ela deve falhar $k-1$ vezes e obter sucesso na k-ésima vez. A probabilidade desse evento é

$$\frac{N-1}{N}\frac{N-2}{N-1}\cdots\frac{N-(k-1)}{N-(k-2)}\frac{1}{N-(k-1)} = \frac{1}{N}.$$

(b) Quando não se descarta chaves utilizadas, a probabilidade se torna

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N}.$$

2.48. Dadas 20 pessoas, qual é a probabilidade de que, entre os 12 meses do ano, existam 4 meses contendo exatamente 2 aniversários e 4 contendo exatamente 3 aniversários?

Solução: Supomos que a probabilidade de uma pessoa fazer em um determinado mês seja igual à qualquer outro mês e independente das demais pessoas. Os meses são divididos em 3 grupos de 4 meses, os com nenhum aniversariante, com 2 aniversariantes e 3 aniversariantes. Assim, temos $\binom{12}{4,4,4}$ possibilidades de meses. Em relação à distribuição dos aniversariantes, contamos quantas possibilidades existem quando dividimos os mesmos em 4 grupos de 2 e 4 grupos de 3, ou seja, $\binom{20}{2,2,2,2,3,3,3,3}$ possibilidades. O total de possibilidades de aniversário é dada por 12^{20}. Portanto, a probabilidade desejada é dada por

$$\frac{1}{12^{20}}\binom{12}{4,4,4}\binom{20}{2,2,2,2,3,3,3,3} \approx 0{,}00106.$$

2.49. Um grupo de 6 homens e 6 mulheres é dividido aleatoriamente em 2 grupos de 6 pessoas cada. Qual é a probabilidade de que ambos os grupos possuam o mesmo número de homens?

Solução: A única forma de terem o mesmo número de homens nos dois grupos é se tiverem 3 homens em cada grupo. O número de possibilidade de fazer isso é escolher os 3 homens e escolher as 3 mulheres para o primeiro grupo, ou seja, $\binom{6}{3}^2$ possibilidades. O total de divisões possíveis de 12 pessoas em 2 grupos é $\binom{12}{6}$. Logo, a probabilidade que buscamos é

$$\frac{\binom{6}{3}^2}{\binom{12}{6}} = \frac{100}{231} \approx 0{,}433$$

2.52. Um armário contém 10 pares de sapatos. Se 8 sapatos são selecionados aleatoriamente, qual é a probabilidade de

(a) nenhum par completo ser formado?

(b) ser formado exatamente 1 par completo?

Solução:

(a) Para nenhum par completo, escolhemos 8 dos 10 pares disponíveis, ou seja, $\binom{10}{8}$ e para cada par escolhido temos 2 possibilidades de sapato. O total de combinações possíveis de serem escolhidas é $\binom{20}{8}$. Logo, supondo probabilidades iguais para escolha de cada sapato, temos que a probabilidade de não tirar nenhum par completo é

$$\frac{2^8\binom{10}{8}}{\binom{20}{8}} \approx 0{,}091.$$

(b) Para formar exatamente um par completo, escolhemos um dos 10 pares para ser o par completo e 6 dos 9 pares restantes para ser os incompletos, lembrando que para cada par incompleto temos 2 possibilidades. Assim, temos que a probabilidade de exatamente um par completo é

$$\frac{10 \cdot 2^6 \binom{9}{6}}{\binom{20}{8}} \approx 0{,}427.$$

2 Exercícios Teóricos

2.1. Prove que $E\,F \subset E \subset E \cup F$.

Solução:

Demonstração.
Seja $\omega \in E\,F$. Por definição de intersecção, $\omega \in E$ e $\omega \in F$. Em particular, $\omega \in E$. Logo, $E\,F \subset E$.
Seja $\omega' \in E$. Então, $\omega' \in E$ ou $\omega' \in F$. Por definição de união, $\omega' \in E \cup F$. Logo, $E \subset E \cup F$. ■

2.2. Prove que se $E \subset F$, então $F^c \subset E^c$.

Solução:

Demonstração.

$$\begin{aligned} E \subset F &\Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega, (\omega \in E \Rightarrow \omega \in F) \\ &\Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega, (\omega \notin F \Rightarrow \omega \notin E) \\ &\Leftrightarrow F^c \subset E^c. \end{aligned}$$

■

2.3. Prove que $F = F\,E \cup F\,E^c$ e $E \cup F = E \cup E^c\,F$.

Solução:

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que $F \subset F\,E \cup F\,E^c$. Seja $\omega \in F$. Se $\omega \in E$, então $\omega \in F\,E$, por outro lado, se $\omega \notin E$, então $\omega \in F\,E^c$. Logo, $\omega \in F\,E$

ou $\omega \in F\,E^c$. Por definição de união. $\omega \in F\,E \cup F\,E^c$.
Por outro lado, do exercício 2.1, temos que $F\,E \cup F\,E^c \subset F \cup F = F$. Logo, como temos inclusão nos dois sentidos $F = F\,E \cup F\,E^c$.

Agora, mostremos que $E \cup F \subset E \cup E^c\,F$. Seja $\omega \in E \cup F$. Se $\omega \notin E$, então $\omega \in F$, isto é, $\omega \in F\,E^c$. Logo, $\omega \in E$ ou $\omega \in F\,E^c$. Por definição de união, $\omega \in E \cup E^c\,F$. Por outro lado, do exercício 2.1, $E \cup E^c\,F \subset E \cup F$. Assim, como temos inclusão nos dois sentidos, $E \cup F = E \cup E^c\,F$. ■

2.6. Sejam três eventos E, F e G. Determine expressões para esses eventos de forma que, de E, F e G,

(a) apenas E ocorra;
(b) E e G ocorram, mas não F;
(c) pelo menos um dos eventos ocorra;
(d) pelo menos dois dos eventos ocorram;
(e) todos os três eventos ocorram;
(f) nenhum dos eventos ocorra;
(g) no máximo um dos eventos ocorra;
(h) no máximo dois dos eventos ocorram;
(i) no máximo três dos eventos ocorram.

Solução:

(a) $E\,F^c\,G^c$;

(b) $E\,F^c\,G$;

(c) $(E^c\,F^c\,G^c)^c = E \cup F \cup G$;

(d) $E\,F\,G \cup E\,F\,G^c \cup E\,F^c\,G \cup E^c\,F\,G$;

(e) $E\,F\,G$;

(f) $E^c\,F^c\,G^c = (E \cup F \cup G)^c$;

(g) $E^c\,F^c\,G^c \cup E\,F^c\,G^c \cup E^c\,F\,G^c \cup E^c\,F^c\,G$;

(h) $(E\,F\,G)^c = E^c \cup F^c \cup G^c$;

(i) Ω.

2.7. Determine a expressão mais simples para os seguintes eventos:

(a) $(E \cup F)(E \cup F^c)$;

(b) $(E \cup F)(E^c \cup F)(E \cup F^c)$;

(c) $(E \cup F)(F \cup G)$;

Solução:

(a) Pela lei distributiva, $(E \cup F)(E \cup F^c) = E \cup F\,F^c = E$.

(b) Do item (a), temos que $(E \cup F)(E^c \cup F)(E \cup F^c) = E\,(E^c \cup F) = E\,F$.

(c) Pela lei distributiva, $(E \cup F)(F \cup G) = F \cup E\,G$.

2.10. Demonstre que $P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(E^c\,F\,G) - P(E\,F^c\,G) - P(E\,F\,G^c) - 2\,P(EFG)$.

Solução:

Demonstração. Aplicando a Proposição 4.3 sucessivas vezes, obtemos que

$$\begin{aligned} P(E \cup F \cup G) &= P((E \cup F) \cup G) \\ &= P(E \cup F) + P(G) - P((E \cup F)\,G) \\ &= P(E) + P(F) + P(G) - P(E\,F) - P(E\,G \cup F\,G) \\ &= P(E) + P(F) + P(G) - P(E\,F) - P(E\,G) - P(F\,G) + P(E\,F\,G), \end{aligned}$$

que é um caso particular da Proposição 4.4.
Sabemos que $P(E\,F) = P(E\,F\,G) + P(E\,F\,G^c)$, pois $E\,F\,G$ e $E\,F\,G^c$ são eventos disjuntos, cuja união resulta em $E\,F$. Podemos fazer o mesmo para $P(E\,G)$ e $P(F\,G)$. Substituindo essas probabilidades na expressão acima completa a demonstração. ■

2.11. Se $P(E) = 0{,}9$ e $P(F) = 0{,}8$, mostre que $P(E\,F) \geq 0{,}7$. De forma geral,demonstre a desigualdade de Bonferroni, isto é, $P(E\,F) \geq P(E) + P(F) - 1$.

Solução:

Demonstração. Da Proposição 4.3 e do Axioma 1, sabemos que

$$P(E) + P(F) - P(E\,F) = P(E \cup F) \leq 1.$$

Logo, $P(E\,F) \geq P(E) + P(F) - 1$. ■

Desafio!

1. Uma mesa redonda tem n assentos disponíveis. Suponha que em cada assento sente-se um homem ou uma mulher com igual probabilidade. Encontre a probabilidade de nenhuma mulher sentar-se ao lado de outra mulher. Mostre que essa probabilidade tende à 0 quando n tende à infinito.