EE400 – *Métodos da Engenharia Elétrica*

Docente: Matheus Souza

Solução para problemas selecionados

– Lista de Exercícios 10 –

Plínio S. Dester
(`pliniodester@hotmail.com`)

18 de Janeiro de 2022

Em caso de dúvidas, sugestões ou correções, não hesite em mandar um e-mail.

10 Exercícios

10.1. Encontre o resíduo de f em $z = 0$ para os seguintes casos:

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z + z^2}$;

(b) $f(z) = z \cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$;

(c) $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z}$;

(d) $f(z) = \dfrac{\sinh z}{z^4(1 - z^2)}$.

Solução:

(a) Como o polo é simples, então $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{1}{z^2 + z} = \left.\dfrac{1}{2z + 1}\right|_{z=0} = 1$.

(b) Sabemos que $f(z) = z - \dfrac{1/z}{2!} + \cdots$. Logo, $\operatorname*{Res}_{z=0} z \cos\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{2}$.

(c) Como $f(z) = \dfrac{z - z + z^3/3! - \cdots}{z} = \dfrac{z^2}{6} + \cdots$. Portanto, $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{z - \sin z}{z} = 0$.

(d) Como

$$f(z) = \frac{z + z^3/3! + \cdots}{z^4(1 - z^2)} = \left(\frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!z} + \cdots\right)(1 + z^2 + \cdots) = \frac{1}{z^3} + \left(1 + \frac{1}{3!}\right)\frac{1}{z} + \cdots.$$

Então, $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{\sinh z}{z^4(1 - z^2)} = \dfrac{7}{6}$.

10.2. Em cada um dos itens abaixo, escreva a parte principal da função em seu ponto singular isolado e classifique esta singularidade.

(a) $f(z) = z \exp\left(\frac{1}{z}\right)$;

(b) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$;

(c) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$;

(d) $f(z) = \frac{1}{(2-z)^3}$.

Solução:

(a) $f(z) = z \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n+1}}{n!} = z + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!\, z^n}$. Dessa forma, o ponto $z = 0$ é uma singularidade essencial.

(b) $f(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 + \frac{z^2}{3!} + \cdots$. Portanto, $z = 0$ é uma singularidade removível.

(c) $f(z) = \frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z} + \frac{z}{2} + \cdots$. Portanto, $z = 0$ é um polo simples.

(d) $f(z) = \frac{1}{(2-z)^3}$. O ponto $z = 2$ é um polo de ordem 3.

10.3. Mostre que qualquer ponto singular de cada uma das funções abaixo é um polo. Determine a sua ordem e o resíduo correspondente.

(a) $f(z) = \frac{1 - \cosh z}{z^3}$;

(b) $f(z) = \frac{1 - e^{2z}}{z^4}$;

(c) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$;

(d) $f(z) = \frac{z^2 + 2}{z - 1}$;

(e) $f(z) = \left(\frac{z}{2z+1}\right)^3$;

(f) $f(z) = \frac{e^z}{z^2 + \pi^2}$.

Solução:

(a) $f(z) = \frac{-z^2/2! - z^4/4! - \cdots}{z^3} = -\frac{1}{2z} - \frac{z}{24} - \cdots$. Logo, $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -1/2$.

(b) $f(z) = -\frac{2z + 4z^2/2! + 8z^3/3! + \cdots}{z^4} = -\frac{2}{z^3} - \frac{2}{z^2} - \frac{4}{3z} + \cdots$. Logo, $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -4/3$.

(c) Como $\phi(z) = e^{2z}$ é analítica, temos que $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \phi'(1) = 2e^2$.

(d) $\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z^2+2}{z-1} = (z^2+2)\big|_{z+1} = 3$.

(e) $f(z) = \dfrac{(z/2)^3}{(z+1/2)^3}$. Como $\phi(z) = z^3/8$ é analítica e o ponto $z = -1/2$ é polo triplo.

Então, $\underset{z=-1/2}{\operatorname{Res}} f(z) = \dfrac{\phi''(-1/2)}{2!} = \dfrac{6(-1/2)}{16} = -\dfrac{3}{16}$.

(f) $\underset{z=i\pi}{\operatorname{Res}} \dfrac{e^z}{z^2+\pi^2} = \left.\dfrac{e^z}{2z}\right|_{z=i\pi} = \dfrac{-1}{2i\pi} = \dfrac{i}{2\pi}$,

$\underset{z=-i\pi}{\operatorname{Res}} \dfrac{e^z}{z^2+\pi^2} = \left.\dfrac{e^z}{2z}\right|_{z=-i\pi} = \dfrac{-1}{-2i\pi} = \dfrac{-i}{2\pi}$.

10.4. Suponha que uma função f seja analítica em z_0 e defina

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

Mostre que

(a) se $f(z_0) \neq 0$, então z_0 é um polo simples de g, com resíduo $f(z_0)$;

(b) se $f(z_0) = 0$, então z_0 é uma singularidade removível de g.

Solução: Se f é analítica em z_0, então existe $R > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R.$$

Dessa forma,

(a) se $f(z_0) \neq 0$, então

$$g(z) = \frac{f(z_0)}{z - z_0} + \underbrace{f'(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0) + \cdots}_{\text{função analítica em } z_0}, \quad |z - z_0| < R,$$

e, portanto, z_0 é um polo simples e $\underset{z=z_0}{\operatorname{Res}}\, g(z) = f(z_0)$.

(b) se $f(z_0) = 0$, então

$$g(z) = f'(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0) + \cdots, \quad |z - z_0| < R,$$

pode ser extendida analiticamente em z_0 por $g(z_0) = f'(z_0)$ e, portanto, z_0 é uma singularidade removível de g.

10.5. Use o Teorema dos Resíduos para calcular as seguintes integrais, sendo C o círculo positivamente orientado $|z| = 3$.

(a) $\oint_C \frac{e^{-z}}{z^2}dz$; (b) $\oint_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}dz$; (c) $\oint_C z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz$; (d) $\oint_C \frac{z+1}{z^2-2z}dz$.

Solução:

(a) $\oint_C \frac{e^{-z}}{z^2}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{-z}}{z^2} = -2\pi i$;

(b) $\oint_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} = -\frac{2\pi}{e} i$;

(c) $\oint_C z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \left(z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \cdots\right) = \frac{\pi}{3} i$;

(d) $\oint_C \frac{z+1}{z^2-2z}dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z+1}{z^2-2z} + \operatorname*{Res}_{z=2} \frac{z+1}{z^2-2z}\right) = 2\pi i \left(\left.\frac{z+1}{2z-2}\right|_0 + \left.\frac{z+1}{2z-2}\right|_2\right) = 2\pi i$.

10.6. Calcule o valor da integral

$$\oint_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz,$$

tomado no sentido anti-horário em torno dos círculos (a) $|z-2| = 2$ e (b) $|z| = 4$.

Solução: Os polos são 1, $3i$ e $-3i$ e todos são simples.

(a) O interior do círculo centrado em 2 e raio 2 contém apenas o polo em 1. Dessa forma, pelo Teorema dos Resíduos temos que

$$\oint_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)} = 2\pi i \left.\frac{3z^3+2}{z^2+9}\right|_{z=1} = \pi i.$$

(b) O interior do círculo centrado na origem e raio 4 contém todos os polos. Dessa forma, pelo Teorema dos Resíduos temos que

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz &= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=3i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-3i} f(z)\right) \\ &= 2\pi i \left(\left.\frac{3z^3+2}{z^2+9}\right|_1 + \left.\frac{3z^3+2}{(z-1)(z+3i)}\right|_{3i} + \left.\frac{3z^3+2}{(z-1)(z-3i)}\right|_{-3i}\right) \\ &= 6\pi i.\end{aligned}$$

10.7. Calcule o valor da integral

$$\oint_C \frac{1}{z^3(z+4)}dz,$$

tomado no sentido anti-horário em torno dos círculos (a) $|z| = 2$ e (b) $|z+2| = 3$.

Solução: Temos um polo de ordem 3 na origem e um polo simples em -4.

(a) O interior do círculo centrado na origem e raio 2 contém apenas o polo em 0. Dessa forma, pelo Teorema dos Resíduos temos que

$$\oint_C \frac{1}{z^3(z+4)}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{16z^2} + \frac{1}{64z} + \cdots\right) = \frac{\pi i}{32}.$$

(b) O interior do círculo centrado em -2 e raio 3 contém todos os polos. Dessa forma, usando o princípio da deformação de caminho podemos pegar um círculo suficientemente grande e pelo Lema de Jordan segue que

$$\oint_C \frac{1}{z^3(z+4)}dz = 0.$$

10.8. Calcule o valor da integral

$$\oint_C \frac{\cosh \pi z}{z(z^2+1)}dz,$$

sendo C o círculo $|z| = 2$ orientado positivamente.

Solução: Temos polos simples em $0, i$ e $-i$. O interior do círculo centrado na origem e raio 2 contém todos os polos. Usando o Teorema do Resíduo, temos que

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{\cosh \pi z}{z(z^2+1)}dz &= 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\cosh \pi z}{z(z^2+1)} + \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{\cosh \pi z}{z(z^2+1)} + \operatorname*{Res}_{z=-i}\frac{\cosh \pi z}{z(z^2+1)}\right)\\ &= 2\pi i\left(\left.\frac{\cosh \pi z}{z^2+1}\right|_{z=0} + \left.\frac{\cosh \pi z}{z(z+i)}\right|_{z=i} + \left.\frac{\cosh \pi z}{z(z-i)}\right|_{z=-i}\right)\\ &= 4\pi i.\end{aligned}$$

10.9. Mostre que o ponto $z = 0$ é um polo simples de $f(z) = \csc z = \frac{1}{\sin z}$ e que $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1$.

Solução: Sabemos que

$$f(z) = \frac{1}{z + z^3/3! + \cdots} = \frac{1}{z(1 + z^2/6 + \cdots)}, \quad |z| > 0.$$

Logo,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \left.\frac{1}{1 + z^2/6 + \cdots}\right|_{z=0} = 1.$$

10.10. Seja C o círculo positivamente orientado $|z| = 2$. Calcule o valor das integrais

(a) $\oint_C \tan z dz$;

(b) $\oint_C \frac{1}{\sinh 2z} dz$.

Solução:

(a) Os polos de tan estão em $(1+2k)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, e são simples. Portanto, o interior de C contém apenas os polos em $\pm\pi/2$. Logo, pelo Teorema dos Resíduos, temos que

$$\begin{aligned}\oint_C \tan z\, dz &= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=\pi/2} \tan z + \operatorname*{Res}_{z=-\pi/2} \tan z \right) \\ &= 2\pi i \left(\left.\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=\pi/2} + \left.\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=-\pi/2} \right) \\ &= -4\pi i.\end{aligned}$$

(b) Os polos de $\sinh(2z)$ estão em $k\pi i/2$, $k \in \mathbb{Z}$, e são simples. Portanto, o interior de C contém apenas os polos em $\pm i\pi/2$. Logo, pelo Teorema dos Resíduos, temos que

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{\sinh 2z}\, dz &= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=\pi/2} \frac{1}{\sinh 2z} + \operatorname*{Res}_{z=-\pi/2} \frac{1}{\sinh 2z} \right) \\ &= 2\pi i \left(\left.\frac{1}{(\sinh 2z)'}\right|_{z=i\pi/2} + \left.\frac{1}{(\sinh 2z)'}\right|_{z=-i\pi/2} \right) \\ &= -2\pi i.\end{aligned}$$

10.11. Mostre que

$$\oint_C \frac{1}{(z^2-1)^2+3} dz = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

sendo C o contorno positivamente orientado do retângulo com fronteiras dadas por $x = \pm 2$, $y = 0$ e $y = 2$.

Solução: O contorno C engloba apenas os polos simples $(\pm\sqrt{3}+i)/\sqrt{2}$. Assim, pelo Teorema dos Resíduos, temos que

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{(z^2-1)^2+3} dz &= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=(\sqrt{3}+i)/\sqrt{2}} \frac{1}{(z^2-1)^2+3} + \operatorname*{Res}_{z=(-\sqrt{3}+i)/\sqrt{2}} \frac{1}{(z^2-1)^2+3} \right) \\ &= 2\pi i \left(\left.\frac{1}{4z(z^2-1)}\right|_{(\sqrt{3}+i)/\sqrt{2}} + \left.\frac{1}{4z(z^2-1)}\right|_{(-\sqrt{3}+i)/\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

10.12. Seja $-1 < a < 1$. Use o método dos resíduos para mostrar que

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$;

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$;

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^4+1)}dx = \frac{\pi}{2}$;

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}dx = \frac{3\pi}{8}$;

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \frac{\pi}{2}$;

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3e^x+e^{-x}}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$;

(g) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin\theta}d\theta = \frac{2\pi}{3}$;

(h) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2\theta}d\theta = \sqrt{2}\pi$;

(i) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos\theta}d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$;

(j) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta = \frac{a^2\pi}{1-a^2}$.

Solução:

(a) Para esse item vamos integrar sobre a curva fechada e positivamente orientada $C_R = [-R,R] \cup \Gamma_R$, $R > 0$. Onde, $\Gamma_R = \{z \in \mathbb{C} \mid z = Re^{i\theta}, \theta \in (0,\pi)\}$. Dessa forma,

$$\int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1} = \int_{[-R,R]} \frac{dz}{z^4+1} + \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^4+1}.$$

Pelo Lema de Jordan $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^4+1} = 0$. Como a integral a ser calculada é absolutamente convergente, então $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} \frac{dz}{z^4+1} = \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$. Portanto, pelo Teorema dos Resíduos e sabendo que o interior de C_R contém os polos em $e^{i\pi/4}$ e $e^{i3\pi/4}$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} &= \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1} \\
&= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=e^{i\pi/4}} \frac{1}{z^4+1} + \operatorname*{Res}_{z=e^{i3\pi/4}} \frac{1}{z^4+1} \right) \\
&= 2\pi i \left(\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i\pi/4}} + \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i3\pi/4}} \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{-1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$;

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^4+1)}dx = \frac{\pi}{2}$;

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}dx = \frac{3\pi}{8}$;

(e) Para esse item vamos integrar sobre a curva fechada e positivamente orientada $C_L = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, $L > 0$. Onde, $\Gamma_1 = [-L, L]$, $\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = L + iy, y \in (0, \pi)\}$, $\Gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -x + i\pi, x \in (-L, L)\}$ e $\Gamma_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -L - iy, y \in (-\pi, 0)\}$. Dessa forma, temos que

$$\int_{C_L} \frac{e^z}{e^{2z}+1}dz = \int_{\Gamma_1} \frac{e^z}{e^{2z}+1}dz + \int_{\Gamma_2} \frac{e^z}{e^{2z}+1}dz + \int_{\Gamma_3} \frac{e^z}{e^{2z}+1}dz + \int_{\Gamma_4} \frac{e^z}{e^{2z}+1}dz.$$

Na aula vimos que $\lim\limits_{L\to\infty} \int_{\Gamma_2} \frac{e^z}{e^{2z}+1}dz = \lim\limits_{L\to\infty} \int_{\Gamma_4} \frac{e^z}{e^{2z}+1}dz = 0$. Ademais, como a integral real é absolutamente convergente, temos também que

$$\lim_{L\to\infty} \int_{\Gamma_1} \frac{e^z}{e^{2z}+1}dz = \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{C_L} \frac{e^z}{e^{2z}+1}dz &= \int_{\Gamma_1} \frac{e^z}{e^{2z}+1}dz + \int_{\Gamma_3} \frac{e^z}{e^{2z}+1}dz \\ &= \int_{-L}^{L} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx + \int_{-L}^{L} \frac{e^{-x+i\pi}}{e^{2(-x+i\pi)}+1}dx \\ &= 2\int_{-L}^{L} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx.\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema dos Resíduos e sabendo que o interior de C_L contém o polo em $i\pi/2$ para todo $L > 0$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1} &= \frac{1}{2}\lim_{L\to\infty} \int_{C_L} \frac{e^z}{e^{2z}+1}dz \\ &= \pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=i\pi/2} \frac{e^z}{e^{2z}+1} \right) \\ &= \pi i \left(\left.\frac{e^z}{2e^{2z}}\right|_{z=i\pi/2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3e^x + e^{-x}}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$;

(g) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{5 + 4\sin\theta}d\theta = \frac{2\pi}{3}$;

(h) Para esse item, vamos fazer a substituição de variável $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ e, assim, $dz = ie^{i\theta}d\theta$, ou seja, $d\theta = dz/(iz)$. Assim,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2\theta}d\theta = \oint_C \frac{1}{1+\left(\frac{z+z^{-1}}{2i}\right)^2}\frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{4iz}{1-6z^2+z^4}dz,$$

onde C é o círculo unitário centrado na origem e, portanto, seu interior contém os polos em $\pm(\sqrt{2}-1)$. Podemos aplicar o Teorema dos Resíduos para calcular a integral.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2\theta} d\theta &= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}-1} \frac{4iz}{1-6z^2+z^4} + \operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{2}+1} \frac{4iz}{1-6z^2+z^4} \right) \\
&= 2\pi i \left(-i\frac{\sqrt{2}-1}{2(2-\sqrt{2})} + -i\frac{\sqrt{2}-1}{2(2-\sqrt{2})} \right) \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos\theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}};$

(j) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} d\theta = \frac{a^2\pi}{1-a^2}.$