ME210 - Probabilidade I - 2S 2017

Docente: Marina Vachkovskaia

Soluções para problemas selecionados do livro
Probabilidade: Um curso moderno com aplicações 8.ed. de Sheldon Ross

Plínio Santini Dester (p103806@dac.unicamp.br)

11 de setembro de 2017

Em caso de dúvidas, sugestões ou correções (inclusive erros de digitação), não hesite em mandar um e-mail.

1 Problemas

1.1. (a) Quantas placas de carro diferentes com 7 caracteres podem ser formadas se os dois primeiros campos da placa forem reservados para as letras e os outros cinco para os números?

(b) Repita a letra (a) supondo que nenhuma letra ou número possa ser repetido em uma mesma placa.

Solução:

(a) Pelo princípio básico da contagem, temos $26^2 \cdot 10^5 = 67\,600\,000$ placas diferentes.

(b) Quando não podemos repetir letras ou números, a cada nova letra/número escolhido, temos uma possibilidade a menos. Nesse caso, o número total de placas é $(26 \cdot 25) \cdot (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6) = 19\,656\,000$.

1.2. Quantas sequências de resultados são possíveis quando um dado é rolado quatro vezes, supondo, por exemplo, que 3, 4, 3, 1 é o resultado obtido se o primeiro dado lançado cair no 3, o segundo no 4, o terceiro no 3 e o quarto no 1?

Solução: Pelo princípio básico da contagem temos $6^4 = 1296$ sequências possíveis.

1.3. Vinte trabalhadores serão alocados em vinte tarefas diferentes, um em cada tarefa. Quantas alocações diferentes são possíveis?

> **Solução:** Para a primeira tarefa temos 20 possibilidades de trabalhadores, em seguida para a segunda temos 19, e assim sucessivamente até a vigésima tarefa, ou seja, temos 20! alocações possíveis.

1.4. João, Júlio, Jonas e Jacques formaram uma banda com quatro instrumentos. Se cada um dos garotos é capaz de tocar todos os instrumentos, quantas diferentes combinações são possíveis? E se João e Júlio souberem tocar todos os quatro instrumentos, mas Jonas e Jacques souberem tocar cada um deles apenas o piano e a bateria?

> **Solução:** Se todos podem tocar todos os instrumentos, então analogamente ao Problema 1.3, temos $4! = 24$ possibilidades. Por outro lado, se Jonas e Jacques estão restritos a dois instrumentos, então João e Júlio também estão e, dessa forma, temos $2 \cdot 2 = 4$ possibilidades.

1.5. Por muitos anos, os códigos telefônicos de área nos EUA e no Canadá eram formados por uma sequência de três algarismos. O primeiro algarismo era um inteiro entre 2 e 9, o segundo algarismo era 0 ou 1, e o terceiro digito era um inteiro entre 1 e 9. Quantos códigos de área eram possíveis? Quantos códigos de área começando com um 4 eram possíveis?

> **Solução:** Para o primeiro dígito temos 8 possibilidades, para o segundo temos 2 e para o terceiro temos 9. Logo, eram possíveis $8 \cdot 2 \cdot 9 = 144$ códigos de área. Ao restringirmos o primeiro algarismo, sobram apenas $2 \cdot 9 = 18$ possibilidades.

1.6. Uma famosa canção de ninar começa com os versos "Quando ia para São Ives, Encontrei um homem com 7 mulheres. Cada mulher tinha 7 sacos. Cada saco tinha 7 gatos. Cada gato tinha 7 gatinhos..." Quantos gatinhos o viajante encontrou?

> **Solução:** Pelo princípio básico de contagem, temos $7^4 = 2401$ gatinhos.

1.7. (a) De quantas maneiras diferentes 3 garotos e 3 garotas podem sentar-se em fila?

(b) De quantas maneiras diferentes 3 garotos e 3 garotas podem sentar-se em fila se os garotos e as garotas sentarem-se juntos?

(c) E se apenas os garotos sentarem-se juntos?

(d) E se duas pessoas do mesmo sexo não puderem se sentar juntas?

Solução:

(a) Se conseguirmos discernir cada pessoa, então teremos $6! = 720$ maneiras diferentes.

(b) Dentro de cada grupo temos $3!$ combinações diferentes e entre os grupos temos $2!$ combinações. Logo, no total temos $2! \cdot 3! \cdot 3! = 72$ maneiras diferentes.

(c) Dentro do grupo de meninos temos $3!$ combinações. O número de combinações entre o grupo de meninos e as meninas é $4!$. Logo, no total temos $3! \cdot 4! = 144$.

(d) Nesse caso, a fila deve ser alternada entre meninos e meninas, podendo começar com qualquer um dos dois. Dessa forma, temos $2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$ maneiras diferentes de arranjar a fila.

1.8. Quantos arranjos de letras diferentes podem ser feitos a partir de

(a) Sorte?

(b) Propose?

(c) Mississippi?

(d) Arranjo?

Solução:

(a) $5! = 120$.

(b) $\dfrac{7!}{2!\,2!} = 1\,260$.

(c) $\dfrac{11!}{4!\,4!\,2!} = 34\,650$.

(d) $\dfrac{7!}{2!\,2!} = 1\,260$.

1.9. Uma criança tem 12 blocos, dos quais 6 são pretos, 4 são vermelhos, 1 é branco e 1 é azul. Se a criança colocar os blocos em linha, quantos arranjos são possíveis?

Solução: $\dfrac{12!}{6!\,4!} = 27\,720$

1.10. De quantas maneiras 8 pessoas podem se sentar em fila se

(a) não houver restrições com relação à ordem dos assentos?

(b) as pessoas A e B tiverem que se sentar uma ao lado da outra?

(c) houver 4 homens e 4 mulheres e não for permitido que dois homens ou duas mulheres se sentem em posições adjacentes?

(d) houver 5 homens e for necessário que eles se sentem lado a lado?

(e) houver 4 casais e cada casal precisar sentar-se junto?

Solução:

(a) $8! = 40\,320$.

(b) $2!\,7! = 10\,080$ (semelhante ao Problema 1.7(c)).

(c) $2\,4!\,4! = 34\,650$ (semelhante ao Problema 1.7(d)).

(d) $5!\,4! = 2\,880$ (semelhante ao Problema 1.7(c)).

(e) $(2!)^4\,4! = 384$.

1.11. De quantas maneiras três romances, dois livros de matemática e um livro de química podem ser arranjados em uma prateleira se

(a) eles puderem ser colocados em qualquer ordem?

(b) for necessário que os livros de matemática fiquem juntos e os romances também?

(c) for necessário que os romances fiquem juntos, podendo os demais livros ser organizados de qualquer maneira?

Solução:

(a) $6! = 720$.

(b) Entre os grupos de livro temos 3! combinações e contando com as combinações dentro de cada grupo ficamos com $3!\,2!\,3! = 72$.

(c) $4!\,3! = 144$ (semelhante ao Problema 1.7(c)).

1.12. Cinco prêmios diferentes (melhor desempenho escolar, melhores qualidades de liderança, e assim por diante) serão dados a estudantes selecionados de uma classe de trinta alunos. Quantos resultados diferentes são possíveis se

(a) um estudante puder receber qualquer número de prêmios?

(b) cada estudante puder receber no máximo um prêmio?

Solução:

(a) $30^5 = 24\,300\,000$.

(b) $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = 17\,100\,720$.

1.13. Considere um grupo de vinte pessoas. Se todos cumprimentarem uns aos outros com um aperto de mãos, quantos apertos de mão serão dados?

Solução: $\binom{20}{2} = 190$.

1.14. Quantas mãos de pôquer de cinco cartas existem?

Solução: $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

1.15. Uma turma de dança é formada por 22 estudantes, dos quais 10 são mulheres e 12 são homens. Se 5 homens e 5 mulheres forem escolhidos para formar pares, quantas combinações diferentes serão possíveis?

Solução: Podemos selecionar o grupo de mulheres e homens de $\binom{10}{5}$ e $\binom{12}{5}$ maneiras diferentes, respectivamente. Uma vez escolhidos os dançarinos, podemos formar os pares de 5! formas diferentes. Logo, no total teremos $\binom{10}{5}\binom{12}{5}5! = 23\,950\,080$ combinações diferentes.

1.16. Um estudante tem que vender 2 livros de uma coleção formada por 6 livros de matemática, 7 de ciências e 4 de economia. Quantas escolhas serão possíveis se

(a) ambos os livros devem tratar do mesmo assunto?

(b) os livros devem tratar de assuntos diferentes?

Solução:

(a) $\binom{6}{2} + \binom{7}{2} + \binom{4}{2} = 42$.

(b) Isso é o complemento do item anterior em relação à possibilidade de vender dois livros. Assim, temos $\binom{17}{2} - 42 = 94$ escolhas possíveis.

1.17. Sete presentes diferentes devem ser distribuídos entre 10 crianças. Quantos resultados diferentes são possíveis se nenhuma criança puder receber mais de um presente?

> **Solução:** "O presente escolhe a criança": $10 \cdot 9 \cdots 4 = 604\,800$.

1.18. Um comitê de 7 pessoas, formado por 2 petistas, 2 democratas e 3 peemedebistas deve ser escolhido de um grupo de 5 petistas, 6 democratas e 4 peemedebistas. Quantos comitês são possíveis?

> **Solução:** $\binom{5}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{3} = 600$.

1.19. De um grupo de 8 mulheres e 6 homens, pretende-se formar um comitê formado por 3 homens e 3 mulheres. Quantos comitês diferentes são possíveis se

(a) 2 dos homens se recusarem a trabalhar juntos?

(b) 2 das mulheres se recusarem a trabalhar juntas?

(c) 1 homem e 1 mulher se recusarem a trabalhar juntos?

> **Solução:**
>
> (a) Consideramos os casos nos quais não selecionamos os 2 homens e selecionamos apenas um deles, temos $\binom{8}{3} \cdot \left(\binom{4}{3} + 2\binom{4}{2}\right) = 896$.
>
> (b) Análogo ao item anterior, $\binom{6}{3} \cdot \left(\binom{6}{3} + 2\binom{6}{2}\right) = 1\,000$
>
> (c) Consideramos os casos nos quais não selecionamos nem o homem, nem a mulher; os casos nos quais selecionamos a mulher e enfim os casos nos quais selecionamos o homem, temos $\binom{7}{3}\binom{5}{3} + \binom{7}{2}\binom{5}{3} + \binom{7}{3}\binom{5}{2} = 910$.

1.20. Uma pessoa tem 8 amigos, dos quais 5 serão convidados para uma festa.

(a) Quantas escolhas existem se dois dos amigos estiverem brigados e por esse motivo não puderem comparecer?

(b) Quantas escolhas existem se dois dos amigos puderem ir apenas se forem juntos?

> **Solução:**
>
> (a) Considerando os casos sem os amigos e com apenas um dos amigos, temos $\binom{6}{5} + 2\binom{6}{4} = 36$
>
> (b) Considerando os casos sem os amigos e com os dois amigos, temos $\binom{6}{5} + \binom{6}{3} = 26$.

1.21. Considere a malha de pontos mostrada no livro. Suponha que, começando do ponto A, você possa ir um passo para cima ou para direita em cada movimento. Esse procedimento continua até que o ponto B seja atingido. Quantos caminhos possíveis existem entre A e B?
Dica:Note que, para atingir B a partir de A, você deve dar quatro passos à direita e três passos para cima.

> **Solução:** Podemos pensar nesse problema como o número de arranjos entre as letras DDDDCCC, ou seja, $\frac{7!}{4!\,3!} = \binom{7}{3} = 35$ caminhos possíveis.

1.22. No Problema 21, quantos caminhos diferentes existem entre A e B que passam pelo ponto circulado mostrado na figura do livro?

> **Solução:** Basta calcular o número de caminhos até o ponto circulado e multiplicar pelo número de caminhos até o ponto B, ou seja, $\binom{4}{2}\binom{3}{1} = 18$ caminhos possíveis.

1.23. Um laboratório de psicologia dedicado a pesquisar os sonhos possui 3 quartos com 2 camas cada. Se 3 conjuntos de gêmeos idênticos forem colocados nessas 6 camas de forma que cada par de gêmeos durma em camas diferentes em um mesmo quarto, quantas diferentes combinações são possíveis?

> **Solução:** $(2!)^3 \cdot 3! = 48$.

1.24. Expanda $(3x^2 + y)^5$.

> **Solução:** Utilizando o teorema binomial, temos que
>
> $$(3x^2+y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (3x^2)^{5-k} y^k = 243x^{10} + 405x^8y + 270x^6y^2 + 90x^4y^3 + 15x^2y^4 + y^5$$

1.25. O jogo de bridge é jogado por 4 jogadores, cada um deles com 13 cartas. Quantas jogadas de bridge são possíveis?

> **Solução:** Como a ordem das cartas nas mãos dos jogadores não importa, então temos $\binom{52}{13,13,13,13} \approx 5{,}36 \cdot 10^{28}$ condições iniciais possíveis para o jogo.

1.26. Expanda $(x_1 + 2x_2 + 3x_3)^4$.

Solução: Utilizando o teorema multinomial, temos que

$$
\begin{aligned}
(x_1 + 2x_2 + 3x_3)^4 &= \sum_{n_1+n_2+n_3=4} \binom{4}{n_1, n_2, n_3} x_1^{n_1} (2x_2)^{n_2} (3x_3)^{n_3} \\
&= x_1^4 + 16x_2^4 + 81x_3^4 + 8x_1^3x_2 + 12x_1^3x_3 + 32x_1x_2^3 + 108x_1x_3^3 + \\
&\quad 216x_2x_3^3 + 96x_2^3x_3 + 24x_1^2x_2^2 + 54x_1^2x_3^2 + 216x_2^2x_3^2 + 72x_1^2x_2x_3 + \\
&\quad 216x_1x_2x_3^2 + 144x_1x_2^2x_3.
\end{aligned}
$$

1.27. Se 12 pessoas vão ser divididas em 3 comitês de 3, 4 e 5 pessoas. Quantas divisões são possíveis?

Solução: $\binom{12}{3,4,5} = 27\,720$.

1.29. Dez halterofilistas disputam uma competição de levantamento de peso por equipes. Destes, 3 são dos EUA, 4 da Rússia, 2 da China e 1 do Canadá. Se a soma de pontos considerar os países que os atletas representam, mas não as identidades desses atletas, quantos diferentes resultados são possíveis? Quantos resultados diferentes correspondem à situação em que os EUA possuem um atleta entre os três primeiros e 2 entre os três últimos?

Solução: Como apenas a nacionalidade importa na ordenação, então temos $\binom{10}{3,4,2,1} = 12\,600$ resultados possíveis. Entretanto, com as restrições sobre os EUA, temos apenas $\binom{7}{4,2,1}\binom{3}{1}\binom{3}{2} = 945$ resultados, onde o primeiro coeficiente refere-se à ordem das nacionalidades (exceto os EUA) e os demais coeficientes referem-se às combinações que podem ser feitas com os EUA nas três primeiras e nas três últimas posições.

1.30. Delegados de 10 países, incluindo Rússia, França, Inglaterra e os EUA, devem sentar-se lado a lado. Quantos arranjos de assentos diferentes são possíveis se os delegados franceses e ingleses tiverem que sentar-se lado a lado e os delegados da Rússia e dos EUA não puderem sentar-se lado a lado.

Solução: Primeiramente, consideremos a situação que delegados franceses e ingleses sentem-se lado a lado, o que nos dá $2!\,9!$ combinações.
Agora, vamos considerar a situação que delegados franceses e ingleses; e delegados dos EUA e Rússia sentam-se lado a lado, o que nos dá $2!\,2!\,8!$ combinações.
Finalmente, basta notar que o que queremos é exatamente a primeira situação tirando as combinações da segunda situação, ou seja, $2!\,9! - 2!\,2!\,8! = 564\,480$.

1.31. Se 8 quadros-negros idênticos forem divididos entre quatro escolas, quantas divisões são possíveis? E se cada escola tiver que receber pelo menos um quadro-negro?

Solução: Trata-se de uma aplicação direta da Proposição 6.2, isto é, temos $\binom{11}{3} = 165$ divisões possíveis. Por outro lado, quando exigimos que cada escola receba pelo menos um quadro-negro, então usamos a Proposição 6.1, isto é, temos $\binom{7}{3} = 35$ divisões possíveis.

1 Exercícios Teóricos

1.3. De quantas maneiras podem r objetos ser selecionados de um conjunto de n objetos se a ordem de seleção for considerada relevante?

Solução: Seja $r \leq n$, note que o primeiro objeto a ser escolhido pode ser qualquer um dos n objetos, em seguida temos $n-1$ objetos disponíveis para escolha, e assim sucessivamente até selecionarmos r objetos, ou seja, temos

$$n\,(n-1)\cdots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

maneiras para selecionar os objetos.
Outra forma de resolver, é multiplicar o número de grupos de r objetos pelo número de formas de arranjá-los, *i.e.*, $\binom{n}{r}\,r!$.

1.8. Demonstre que

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}.$$

Dica: Considere um grupo de n homens e m mulheres. Quantos grupos de tamanho r são possíveis?

Solução: Vamos supor que n e m são maiores ou iguais à r. Fica como exercício para o aluno mostrar para os demais casos. Lembre-se da convenção $\binom{n}{k} = 0$, quando $k < 0$ ou $k > n$.

Demonstração. Imagine que tenhamos um grupo de $n + m$ indivíduos. Sabemos que é possível selecionar $\binom{n+m}{r}$ grupos diferentes de tamanho r. Por outro lado, se pensarmos que temos n homens e m mulheres, esses grupos podem conter 0 homens e r mulheres, ou 1 homem e $r - 1$ mulheres, e assim sucessivamente até r homens e 0 mulheres. Cada uma dessas configurações tem $\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$ possibilidades de escolha, onde $0 \leq k \leq r$ é o número de homens no grupo. Logo, podemos encontrar o número total de escolhas de grupos de tamanho r ao somarmos para todo k inteiro entre 0 e r, o que completa a demonstração. ∎

1.9. Use o Exercício Teórico 1.8 para demonstrar que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Solução:

Demonstração. Fazendo $r = m = n$ no 1.8, temos que

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.\end{aligned}$$

∎

1.13. Mostre que, para $n > 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0.$$

Dica: Use o teorema binomial.

Solução:

Demonstração. Pelo teorema binomial,

$$0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \, 1^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}.$$

■

Desafio!

1. Se n_1 objetos indistinguíveis do tipo 1, n_2 objetos indistinguíveis do tipo 2, e assim sucessivamente até n_M objetos indistinguíveis do tipo M são colocados em r caixas numeradas, qual é o número de arranjos distinguíveis?

2. Em uma escola, existem $2n$ estudantes, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$. Cada semana n estudantes vão à uma viagem. Após algumas viagens a seguinte condição é satisfeita: cada par de estudantes já esteve junto em pelo menos uma viagem. Mostre que o número mínimo de viagens para isso acontecer é 6.
   Dica: comece pelo caso em que n é par.