Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

EA044 – Turma U – Prova I **26/09/2018**

Nome

RA

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Extra	Total
Nota							

Instruções

- Esta prova tem **05 questões** distribuídas em **08 páginas**. A **nota máxima** da prova é de **10,0 pontos**.
- Cada questão deve ser resolvida, de forma **organizada**, **clara** e **formal** no espaço indicado. Estes critérios fazem parte da avaliação.
- Utilize a folha de almaço fornecida para rascunhos.
- Não destaque as folhas deste caderno.
- Não é permitida a consulta a qualquer material.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Qualquer tentativa de fraude, se detectada durante ou após a realização da prova, implicará em nota **zero** para todos os envolvidos, além das penalidades disciplinares previstas no Regimento Geral da Unicamp (Arts. 226 – 237).
- A duração total da prova é de **120 minutos**.

► **Questão 1: (2.0pt)** Uma pequena alfaiataria está planejando a sua produção de uniformes escolares para o próximo início de ano escolar. A empresa estima que exista uma demanda de 300 uniformes para janeiro e de 600 para fevereiro. A empresa consegue produzir até 400 uniformes por mês com sua estrutura regular, a um custo de R\$10,00 por uniforme; uma carga adicional de uniformes pode ser acomodada com o uso de horas extras a um custo de R\$15,00 por uniforme. Uniformes produzidos e não vendidos em um mês podem ser armazenados para o mês seguinte, a um custo médio de R\$2,00 por uniforme. Uniformes extras para os outros meses são feitos sob encomenda e, portanto, não entram neste planejamento. Deseja-se determinar a quantidade de uniformes produzidas nos meses de janeiro e fevereiro que minimiza o custo total de produção e de estocagem. Modele esse problema de decisão como um problema de **otimização linear**. Justifique as suas escolhas.

Resolução: Seja x_i a quantidade de uniformes produzidos no mês i utilizando a estrutura regular e y_i a quantidade de uniformes produzidos com horas extras no mês i, com $i \in \{1, 2\}$. Note que o número de uniformes armazenados para o próximo mês é $x_1 + y_1 - 300$. Dessa forma, o problema se torna

$$\begin{array}{rl} \min & 10\,(x_1 + x_2) + 15\,(y_1 + y_2) + 2\,(x_1 + y_1 - 300) \\ \text{s.a} & x_1 + y_1 \geqslant 300, \\ & x_2 + y_2 + (x_1 + y_1 - 300) \geqslant 600, \\ & x_1, x_2 \leqslant 400, \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \geqslant 0. \end{array}$$

Podemos simplificar as expressões e chegar no seguinte problema equivalente

$$\begin{array}{rl} \min & 12x_1 + 10x_2 + 17y_1 + 15y_2 \\ \text{s.a} & x_1 + y_1 \geqslant 300, \\ & x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \geqslant 900, \\ & x_1, x_2 \leqslant 400, \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \geqslant 0. \end{array}$$

► **Questão 2:** Considere o problema de quadrados mínimos lineares com ponderação dado por

$$\min_{x\in\mathbb{R}^3} f_0(x) = \alpha^2(x_1 + x_2 - 2)^2 + (2x_1 - x_2 - 1)^2 + \alpha^2(x_1 - x_2)^2.$$

(a) **(0.5pt)** Determine A e b que colocam este problema na forma padronizada:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f_0(x) = \|Ax - b\|_2^2.$$

Resolução: Re-escrevemos a função objetivo como $f_0(x) = (\alpha x_1 + \alpha x_2 - 2\alpha)^2 + (2x_1 - x_2 - 1)^2 + (\alpha x_1 - \alpha x_2)^2$. Dessa forma, podemos ver que

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ 2 & -1 \\ \alpha & -\alpha \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b) **(0.5pt)** Para que valores de α este problema admite solução única?

Resolução: A solução $x^\star$ deve satisfazer o sistema normal $A^TAx^\star = A^Tb$. Logo, se $\det(A^TA) \neq 0$ o problema tem solução única. Assim,

$$A^TA = \begin{bmatrix} 2\alpha^2 + 4 & -2 \\ -2 & 2\alpha^2 + 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A^TA) = \alpha^2(4\alpha^2 + 10).$$

Logo, o problema tem solução única se $\alpha \neq 0$.

(c) **(1.0pt)** Encontre a solução ótima $x^\star(\alpha)$ do problema de quadrados mínimos acima, em função de α, e interprete o resultado.

Resolução: Se $\alpha \neq 0$ o sistema linear associado $Ax = b$ tem solução única e anula o resíduo. Resolvendo o sistema linear, encontramos $x^\star(\alpha) = [1, 1]^T$.

Alternativamente, podemos resolver o sistema normal, ou seja,

$$x^\star(\alpha) = (A^TA)^{-1}A^Tb = \frac{1}{\det(A^TA)} \begin{bmatrix} 2\alpha^2 + 1 & 2 \\ 2 & 2\alpha^2 + 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\alpha^2 + 2 \\ 2\alpha^2 - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4\alpha^4 + 10\alpha^2} \begin{bmatrix} 4\alpha^4 + 10\alpha^2 \\ 4\alpha^4 + 10\alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, se $\alpha = 0$, então a solução existe, anula o resíduo, mas tem um grau de liberdade, ou seja, para $z \in \mathbb{R}$ a solução é da forma

$$x^\star(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} z.$$

Finalmente, tirando o caso degenerado, podemos concluir que a solução não depende de α, pois o mesmo atribui um peso para o resíduo associado à primeira e terceira equação no sistema $Ax = b$. Porém, como é possível resolver a equação, ou seja, anular os resíduos, o peso atribuído às equações não tem influência na solução.

► **Questão 3:** Considere o problema de otimização não-linear

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f_0(x) = \tfrac{1}{2} x^T Q x - b^T x, \\ \text{s.a} \quad & c^T x = 0, \end{aligned}$$

em que $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica e definida positiva e $c \neq 0$ e b são vetores em $\mathbb{R}^n$.

(a) **(1.0pt)** Mostre que este problema de otimização é convexo, ou seja, mostre que tanto a função objetivo quanto o conjunto factível são convexos.

Resolução: Primeiramente, calculamos o gradiente e a Hessiana de f_0,

$$\nabla f_0(x) = Qx - b, \qquad \nabla^2 f_0(x) = Q.$$

Como Q é definida positiva, então $\nabla^2 f_0(x) \succ 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, o que implica que f_0 é uma função convexa. No caso do conjunto factível $\mathbb{X}$, sabemos que se $c^T x = 0$, então $x \in \mathbb{X}$. Sejam $x, y \in \mathbb{X}$, a combinação linear convexa de x e y dada por $\alpha x + (1-\alpha) y, \alpha \in [0,1]$, satisfaz a condição de pertencer ao conjunto factível, pois

$$c^T(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha c^T x + (1-\alpha) c^T y = 0.$$

Assim, provamos que a combinação linear convexa de quaisquer dois pontos em $\mathbb{X}$ também pertence a $\mathbb{X}$. Portanto, o conjunto factível é convexo.

(b) **(1.0pt)** Use as condições de otimalidade para encontrar um ponto estacionário deste problema. Este ponto estacionário é minimizador?

Resolução: Usando uma das condições KKT, temos que

$$\begin{aligned} & \nabla f_0(x^\star) + A^T \lambda^\star = 0, \quad \lambda^\star \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow\ & Qx^\star - b + c\lambda^\star = 0 \\ \Rightarrow\ & \boxed{x^\star = Q^{-1}(b - c\lambda^\star)}. \end{aligned}$$

Sabemos que $c^T x^* = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} & c^T Q^{-1}(b - c\lambda^\star) = 0 \\ \Rightarrow\ & c^T Q^{-1} b = c^T Q^{-1} c \lambda^\star \\ \Rightarrow\ & \boxed{\lambda^\star = \frac{c^T Q^{-1} b}{c^T Q^{-1} c}}. \end{aligned}$$

Enfim, usando os dois resultados destacados acima, temos que

$$x^\star = Q^{-1}\left(b - \frac{c^T Q^{-1} b}{c^T Q^{-1} c} c\right).$$

O ponto encontrado é minimizador global, pois o problema é convexo e as restrições são lineares.

▶ **Questão 4:** (a) **(1.0pt)** Você e um colega estão resolvendo um exercício de otimização, em que uma função f_0 deve ser minimizada respeitando-se a restrição $2x_1+x_2+3x_3 = 5$. Seu colega diz para você que o ponto $\bar{x} = [1\ 0\ 1]^T$ é um bom candidato a minimizador, uma vez que o vetor gradiente de f_0 em $\bar{x}$ vale $\nabla f_0(\bar{x}) = [1\ \ 1\ \ 1]^T$ e, portanto, aponta para fora do plano. Seu colega está certo? Se ele estiver certo, justifique geometricamente. Caso contrário, construa uma direção de descida factível a partir de $\bar{x}$ para provar que ele está errado.

Resolução: Se $\bar{x}$ é um bom candidato a minimizador, então ele deve satisfazer as condições KKT, ou seja,

$$\nabla f_0(\bar{x}) + A^T\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}\lambda = 0.$$

Porém, essa equação não pode ser satisfeita por nenhum $\lambda \in \mathbb{R}$, logo $\bar{x}$ não é um ponto KKT e tampouco um bom candidato a minimizador.
Uma direção de descida factível $d \in \mathbb{R}^3$ deve satisfazer $d^T(-\nabla f_0(\bar{x})) > 0$ e $Ad = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} d_1 + d_2 + d_3 < 0 \\ 2d_1 + d_2 + 3d_3 = 0 \end{cases}$$

Podemos tomar, por exemplo, $d = [-1, -1,\ 1]^T$.

(b) **(1.0pt)** Em outro problema, você e o seu colega se deparam com um conjunto factível definido pelas seguintes restrições:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 6, \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 8, \qquad x_1 \geqslant 1, \qquad x_2 \geqslant 1, \qquad x_3 \geqslant 0.$$

Para o ponto inicial $\bar{x} = [1\ \ 1\ \ 0]^T$, o seu colega constrói uma direção de descida $d = [1\ \ 1\ \ 1]^T$. Seu colega afirma que a direção construída é factível e que o tamanho máximo de passo α permitido para a factibilidade de $\hat{x} = \bar{x} + \alpha d$ é $\bar{\alpha} = 3/2$. Seu colega está certo? Justifique em ambos os casos.

Resolução: A direção é factível, pois ela claramente satisfaz as restrições que estão ativas no ponto $\bar{x}$, ou seja, $[-1, 0, 0]^T d < 0$ e $[0, -1, 0]^T d < 0$. Porém, o passo máximo sugerido pelo colega não é factível, pois

$$\hat{x} = \bar{x} + \bar{\alpha} d = \begin{bmatrix}5/2\\5/2\\3/2\end{bmatrix}$$

e $5/2 + 5/2 + 3/2 > 6$, ou seja, não satisfaz a primeira restrição.

► **Questão 5: (2.0pt)** Uma fábrica têxtil produz três itens, x_1, x_2 e x_3. Seu planejamento produtivo para o próximo mês deve verificar as restrições

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 12 \qquad \text{e} \qquad 2x_2 + 4x_2 + x_3 \leqslant s,$$

sendo $x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$. A primeira restrição modela a capacidade produtiva da fábrica e a segunda modela a quantidade de algodão disponível, s. A receita líquida obtida com cada tipo de produto é proporcional a 2, 3 e 3, respectivamente. Determine e represente graficamente a receita ótima $f^\mathsf{T} x^\star(s)$ em função de s. Interprete.

Resolução: Primeiramente, vamos enunciar o problema no formato padrão,

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 \\ \text{sujeito a:} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 12, \\ & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = s, \\ & x_i \geqslant 0, \quad i \in \{1, \ldots, 5\}. \end{aligned}$$

Assim reconhecemos as matrizes

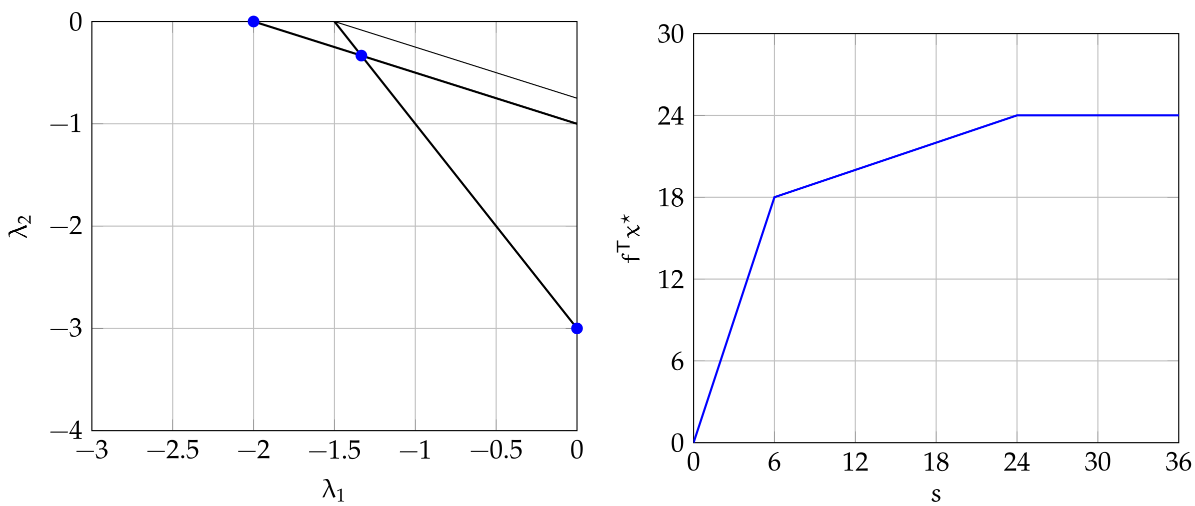
$$\tilde{f} = -f = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ s \end{bmatrix},$$

e podemos escrever o problema dual:

$$\begin{aligned} \max \quad & 12\lambda_1 + s\lambda_2 \\ \text{sujeito a:} \quad & \lambda_1 + 2\lambda_2 \leqslant -2, \\ & 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \leqslant -3, \\ & 2\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant -3, \\ & \lambda_1, \lambda_2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Podemos verificar que os pontos extremos do conjunto factível são $[-4/3, -1/3]^\mathsf{T}$, $[0, -3]^\mathsf{T}$, $[-2, 0]^\mathsf{T}$, que resultam nos seguintes valores para a função objetivo $b^\mathsf{T}\lambda$: $-16 - s/3$, $-3s$, -24, respectivamente. Agora é só comparar qual dos três pontos maximiza a função objetivo em função de s. É importante verificar, também, que a região factível é limitada na direção do gradiente (maximização).

Podemos verificar que se $6 \leqslant s \leqslant 24$, o maximizador é $\lambda^* = [-4/3, -1/3]^\mathsf{T}$ e, portanto, a função objetivo do problema original é $f^\mathsf{T} x^* = -b^\mathsf{T}\lambda^* = 16 + s/3$. Por outro lado, se $s \leqslant 6$, o maximizador é $\lambda^* = [0, -3]^\mathsf{T}$ e, portanto, a função objetivo do problema original é $-b^\mathsf{T}\lambda^* = 3s$. Por fim, se $s \geqslant 24$, o maximizador é $\lambda^* = [-2, 0]^\mathsf{T}$ e, portanto, a função objetivo do problema original é $-b^\mathsf{T}\lambda^* = 24$.



Questão Extra: Esta questão é totalmente opcional. Dependendo da sua resposta e da sua justificativa, a sua nota nesta questão pode variar entre -1.0pt e 2.0pt.

► **Questão 6: (Extra)** Você está resolvendo exercícios de programação linear e se depara com o seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \min & f^T x \\ \text{s. a} & Ax = b, \\ & x \geqslant 0. \end{array}$$

Ao resolver este exercício, você encontra uma solução ótima finita. O exercício seguinte envolve exatamente o mesmo problema, mas com o vetor b substituído por $\hat{b}$:

$$\begin{array}{ll} \min & f^T x \\ \text{s. a} & Ax = \hat{b}, \\ & x \geqslant 0. \end{array}$$

Neste problema, você encontra uma solução ótima ilimitada. Isto é possível? **Justifique**.

Resolução:
Sabemos que se um problema tem solução factível finita no primal, então o dual também possui solução finita e factível. Sabemos também que uma solução ilimitada no primal implica em infactibilidade no dual. Porém, os problemas duais de ambos exercícios possuem o mesmo espaço factível, que precisa ser factível e infactível simultaneamente para atender as condições propostas. Chegamos a uma contradição, logo isto não é possível.