EE400 – *Métodos da Engenharia Elétrica*

Docente: Matheus Souza

Solução para problemas selecionados

– Lista de Exercícios 2 –

Plínio S. Dester
(`pliniodester@hotmail.com`)

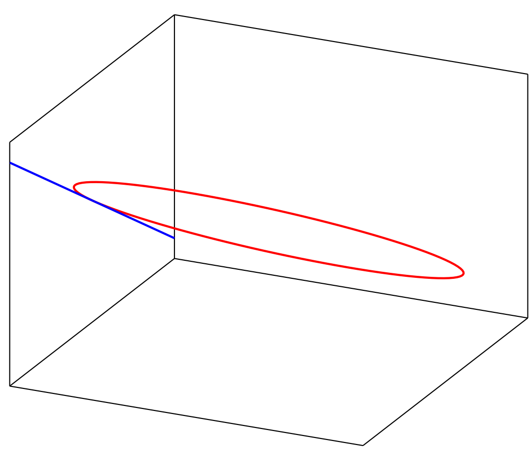
18 de Janeiro de 2022

Em caso de dúvidas, sugestões ou correções, não hesite em mandar um e-mail.

2 Exercícios

2.1. Esboce e encontre uma parametrização para a curva $\mathcal{C}$ dada pela interseção entre o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e o plano $y + z = 2$. Determine a reta tangente a esta curva no ponto $(-1, 0, 2)$.

Solução:



Uma possível parametrização em $t \in [0, 2\pi)$ é

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 2 - \sin t. \end{cases}$$

Sabemos que $\vec{r}(t = \pi) = (-1, 0, 2)$. Assim, um possível vetor diretor da reta tangente é dado por $\dot{\vec{r}}(t = \pi) = (-\sin(\pi), \cos(\pi), -\cos(\pi)) = (0, -1, 1)$. Logo, a reta tangente

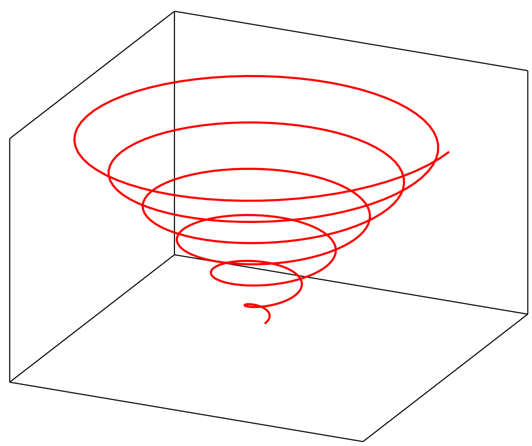
$$\vec{s} = (-1, 0, 2) + [(0, -1, 1)].$$

2.2. Mostre que a curva dada por

$$\vec{r}(t) = \Big(t\cos t, t\sin t, t\Big), \quad t \in \mathbb{R},$$

está contida no cone $z^2 = x^2 + y^2$. Use esta informação para esboçar o traço de $\vec{r}$.

Solução: Para mostrar que a curva está contida no cone, basta verificar que a curva satisfaz a equação do cone para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $t^2 = (t\cos t)^2 + (t\sin t)^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.



2.3. Uma partícula em movimento circular uniforme com equações $x(t) = \cos(2t)$ e $y(t) = \sin(2t)$ escapa pela tangente do círculo no instante $t = \pi/8\,\mathrm{s}$. Encontre o ponto de escape da partícula e a sua posição $(x(t), y(t))$ após este instante.

Solução: Em $t = \pi/8$ temos que o ponto de escape é $\vec{r}(\pi/8) = \Big(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\Big)$. A velocidade nesse momento é $\dot{\vec{r}}(\pi/8) = \Big(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\Big)$. Dessa forma, a posição após este instante é dado por $\vec{r}(t + \pi/8) = \vec{r}(\pi/8) + \dot{\vec{r}}(\pi/8)\,t = \sqrt{2}\,(-t + 1/2, t + 1/2)$.

2.5. Mostre que as curvas

$$\vec{\alpha}(t) = (e^t, e^{2t}, 1 - e^t) \quad \text{e} \quad \vec{\beta}(t) = (\sin t, 1 + \cos t, 2\cos t)$$

se cruzam no ponto $(1, 1, 0)$.n Calcule, também, o ângulo entre as suas tangentes nesse ponto.

Solução: De fato, $\vec{\alpha}(0) = \vec{\beta}(\pi/2) = (1, 1, 0)$. Ainda, os vetores tangentes

$$\begin{aligned} \vec{v}_\alpha &= \dot{\vec{\alpha}}(0) = (1, 2, -1), \\ \vec{v}_\beta &= \dot{\vec{\beta}}(\pi/2) = (0, -1, -2). \end{aligned}$$

Sabemos que o ângulo θ entre eles satisfaz

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\beta}{|\vec{v}_\alpha||\vec{v}_\beta|} = 0.$$

Logo, os vetores tangentes são ortogonais, *i.e.*, $\theta = \pi/2$.

2.6. Determine os pontos em que a curva parametrizada $\vec{r}(t) = (2t^2, 1-t, 3+t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, intercepta o plano dado por $3x - 14y + z = 10$.

Solução: Vamos substituir as coordenadas da curva parametrizada na equação do plano para descobrir para quais valores de $t \in \mathbb{R}$ a curva intercepta o plano.

$$\begin{aligned} & 3(2t^2) - 14(1-t) + (3+t^2) = 10 \\ \Rightarrow\ & 7t^2 + 14t - 21 = 0 \\ \Rightarrow\ & 7(t+3)(t-1) = 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, os pontos de interseção são $\vec{r}(-3) = (18, 4, 12)$ e $\vec{r}(1) = (2, 0, 4)$.

2.7. Seja $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\vec{r}(t) = (\sin 2t, 2\sin^2 t, 2\cos t)$.

(a) Mostre que o traço de $\vec{r}$ está contida em uma esfera centrada na origem.

(b) Represente graficamente as projeções do traço de $\vec{r}$ sobre os planos coordenados. Conclua que este é a interseção de um cilindro circular e de um cilindro parabólico.

(c) Mostre que $\vec{r}$ é uma curva regular.

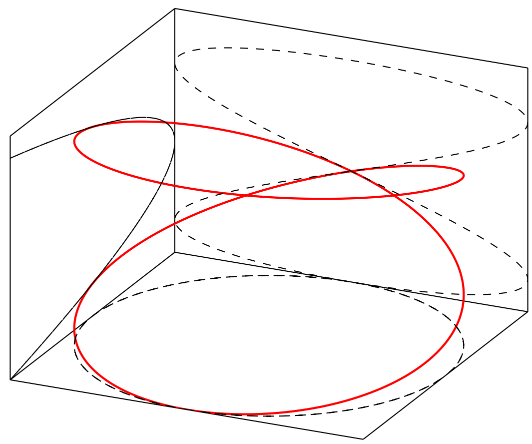
(d) Verifique que a projeção de $\dot{\vec{r}}(t)$ sobre o plano $z = 0$ possui norma constante.

Solução:

(a) A curva $\vec{r}$ está centrada em uma esfera de raio 2, pois

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (\sin 2t)^2 + (2\sin^2 t)^2 + (2\cos t)^2 \\ &= (2\sin t\cos t)^2 + 2^2\sin^2 t(1-\cos^2 t) + 2^2\cos^2 t \\ &= 2^2. \end{aligned}$$

(b) Note que se projetarmos sobre $x = 0$, temos uma curva do tipo $(0, 2 - 2\alpha^2, 2\alpha)$, $\alpha \in [-1, 1]$, que é uma parábola e se projetarmos sobre $z = 0$, temos uma curva do tipo $(\sin 2t, 2\sin^2 t, 0) = (\sin 2t, 1 - \cos 2t, 0), t \in [0, 2\pi]$, que é uma circunferência centrada em $(0, 1)$.



(c) $\vec{r}(t) = (\sin 2t, 2\sin^2 t, 2\cos t) = (\sin 2t, 1 - \cos 2t, 2\cos t)$. Dessa forma,

$$\dot{\vec{r}}(t) = (2\cos 2t, 2\sin 2t, -2\sin t).$$

Sabemos que as funções seno e cosseno nunca se anulam simultaneamente, logo $\dot{\vec{r}}(t) \neq (0, 0, 0)\ \forall t \in [0, 2\pi]$, o que mostra que a curva é regular.

(d) A projeção de $\dot{\vec{r}}(t)$ sobre o plano $z = 0$ é dada por $(2\cos 2t, 2\sin 2t, 0)$ e cuja norma euclidiana é 2.

2.8. Seja $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\vec{r}(t) = \left(\frac{4}{5}\cos 5t, -\sin 5t, -\frac{3}{5}\cos 5t\right)$. Mostre que o traço de $\vec{r}$ é uma circunferência. Determine seu centro, seu raio e o plano que o contém.

Solução: O versor tangente, normal e binormal da trajetória são, respectivamente,

$$\hat{T}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = \left\{-\tfrac{4}{5}\sin(5t), -\cos(5t), \tfrac{3}{5}\sin(5t)\right\},$$

$$\hat{N}(t) = \frac{\dot{\hat{T}}(t)}{|\dot{\hat{T}}(t)|} = \left\{-\tfrac{4}{5}\cos(5t), \sin(5t), \tfrac{3}{5}\cos(5t)\right\},$$

$$\hat{B}(t) = \hat{T} \times \hat{N} = \left\{-\frac{3}{5},\ 0,\ -\frac{4}{5}\right\}.$$

Para mostrar que é uma circunferência, temos que constatar que a curvatura é constante não-nula (raio constante) e a torção é nula (permance em um plano). De fato,

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\hat{T}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = 1,$$

$$\tau(t) = -\hat{N}(t) \cdot \dot{\hat{B}}(t) = 0.$$

Sabemos que o raio é o inverso da curvatura, ou seja, o raio é 1.

O plano que contém a circunferência tem como vetor normal o versor binormal $\hat{B}$. Assim, a equação do plano deve satisfazer

$$\hat{B} \cdot \big((x, y, z) - (0, -1, 0)\big) = 0 \iff 3x + 4z = 0,$$

onde $(0, -1, 0) = \vec{r}(\pi/10)$ é um ponto da circunferência.

O centro da circunferência está na origem.

2.9. Seja $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \sin t)$.

(a) Mostre que o traço de $\vec{r}$ está contida no cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

(b) Obtenha o Triedro de Frenet, a curvatura e a torção de $\vec{r}$.

(c) Mostre que $\vec{r}$ é uma curva plana e determine o plano que a contém. Por que isto implica que $\vec{r}$ é uma elipse?

(d) Em que pontos de $\vec{r}$ a curvatura é máxima? Em que pontos ela é mínima? Interperte geometricamente.

Solução:

(a) De fato, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, portanto, $\vec{r}$ está contida nesse cilindro.

(b)

$$\begin{aligned}
\hat{T}(t) &= \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = \frac{\{-\sin(t), \cos(t), -\cos(t)\}}{\sqrt{1+\cos^2(t)}}, \\
\hat{N}(t) &= \frac{\dot{\hat{T}}(t)}{|\dot{\hat{T}}(t)|} = \frac{\{-2\cos(t), -\sin(t), \sin(t)\}}{\sqrt{2(1+\cos^2(t))}}, \\
\hat{B}(t) &= \hat{T} \times \hat{N} = \frac{\{0, 1, 1\}}{\sqrt{2}}, \\
\kappa(t) &= \frac{|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|^3} = \frac{\sqrt{2}}{(1+\cos^2(t))^{3/2}}, \\
\tau(t) &= -\hat{N}(t) \cdot \dot{\hat{B}}(t) = 0.
\end{aligned}$$

(c) A curva $\vec{r}$ é plana, pois a torção $\tau(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

O plano que contém a curva tem como vetor normal o versor binormal $\hat{B}$. Assim, a equação do plano deve satisfazer

$$\hat{B} \cdot \big((x, y, z) - (1, 0, 1)\big) = 0 \iff y + z = 1,$$

onde $(1, 0, 1) = \vec{r}(0)$ é um ponto da curva.

Isso implica que $\vec{r}$ é uma elipse, pois é a interseção de um plano com um cilindro.

(d) A curvatura $\kappa(t)$ é máxima quando $\cos(t) = 0$, ou seja, em $\vec{r}(t = \pi/2) = (0, 1, 1)$ e $\vec{r}(t = 3\pi/2) = (0, -1, 2)$, que são os pontos que cruzam com o eixo maior da elipse.

A curvatura $\kappa(t)$ é mínima quando $\cos(t) = \pm 1$, ou seja, em $\vec{r}(t = 0) = (1, 0, 1)$ e $\vec{r}(t = \pi) = (-1, 0, 1)$, que são os pontos que cruzam com o eixo menor da elipse.

2 Problemas

2.3. **(Lançamento Oblíquo)** Um projétil é disparado com um ângulo de elevação α medido a partir da horizontal e velocidade inicial v_0. Assumindo que a resistência do ar seja desprezível e que a única força externa sobre o móvel seja a força peso, determine o vetor de posição do móvel $\vec{r}(t)$ para $t \in [0, t_f]$, sendo t_f o tempo que o móvel leva até atingir o solo novamente. Para que valor de α obtemos o maior alcance horizontal? Em que ponto da trajetória a curvatura é máxima? Interprete geometricamente.

Solução: Sabemos que a posição do móvel

$$\vec{r}(t) = \left(v_0 \cos(\alpha)\, t, v_0 \sin(\alpha)\, t - g\, t^2/2\right), \quad t \in [0, t_f].$$

Ademais, $t_f > 0$ deve satisfazer

$$v_0 \sin(\alpha)\, t_f - g\, t_f^2/2 = 0 \ \Rightarrow t_f(v_0 \sin(\alpha) - g\, t_f/2) = 0 \ \Rightarrow t_f = \frac{2v_0}{g} \sin(\alpha).$$

Dessa forma, o alcance horizontal máximo

$$D_H = v_0 \cos(\alpha)\, t_f = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha) \leqslant \frac{v_0^2}{g},$$

e satisfaz a igualdade para $\alpha = \pi/4$.

A curvatura é dada por

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|^3} = \frac{|(v_0 \cos(\alpha), v_0 \sin(\alpha) - g\, t) \times (0, -g)|}{|(v_0 \cos(\alpha), v_0 \sin(\alpha) - g\, t)|^3} = \frac{g v_0 \cos(\alpha)}{(v_0^2 - 2g v_0 \sin(\alpha)\, t + g^2 t^2)^{3/2}},$$

que atinge um máximo em $t^* = \frac{v_0}{g} \sin(\alpha)$. Nesse instante, $\kappa(t^*) = \frac{g}{v_0^2} \sec^2(\alpha)$.

O ponto de máxima curvatura $\vec{r}(t^*) = \frac{v_0^2}{2g} \left(\sin(2\alpha), \sin^2(\alpha)\right)$ corresponde ao máximo da trajetória, ou seja, é o ponto no qual toda força peso atua como normal, portanto faz sentido ser o ponto de máxima curvatura. Ademais, a trajetória é parabólica e esse ponto trata-se do vértice da parábola, que é o ponto de maior curvatura.