EE400 – *Métodos da Engenharia Elétrica*

Docente: Matheus Souza

Solução para problemas selecionados

– Lista de Exercícios 7 –

Plínio S. Dester
(pliniodester@hotmail.com)

18 de Janeiro de 2022

Em caso de dúvidas, sugestões ou correções, não hesite em mandar um e-mail.

7 Exercícios

7.2. Encontre todos os valores de z que verificam as seguintes igualdades.

(a) $e^z = -2$; (b) $e^z = 1 + \sqrt{3}i$; (c) $e^{2z-1} = 1$.

Solução: Seja $z = x + iy$.

(a) Sabemos que $e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Assim, $e^x \cos y = -2$ e $e^x \sin y = 0$. Portanto, $x = \ln 2$ e $y = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo, $z = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $e^z = 1 + \sqrt{3}i = 2\, e^{i(\pi/3+2k\pi)}$, ou seja, $z = \ln 2 + i(\pi/3 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $e^{2z-1} = 1 = e^{i2k\pi}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, $z = 1/2 + ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.3. A função f dada por $f(z) = e^{z^2}$ é inteira? Calcule a sua derivada.

Solução: A função f é inteira, pois trata-se de uma composição de duas funções inteiras: e^z e z^2. Usando a regra da cadeia, temos que

$$\frac{d}{dz} e^{z^2} = 2z\, e^{z^2}.$$

7.4. Quais as restrições sobre z para que e^z seja real? E quais as restrições sobre z para que e^z seja um número imaginário puro?

Solução: Seja $z = x + iy$. Usando a fórmula de Euler $e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Portanto, e^z será real se $\sin y = 0$, isto é, se $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, e^z será imaginário puro se $\cos y = 0$, isto é, se $y = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.7. Calcule os valores principais das seguintes potências.

(a) i^i; (b) $\left[\frac{e}{2}(-1-\sqrt{3}i)\right]^{3\pi i}$; (c) $(1-i)^{4i}$.

Solução:

(a) $i^i = e^{i\,\mathrm{Log}\,i} = e^{i(\ln 1 + i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$;

(b) $\left[\frac{e}{2}(-1-\sqrt{3}i)\right]^{3\pi i} = e^{3\pi i\,\mathrm{Log}\left(e/2(-1-\sqrt{3}i)\right)} = e^{3\pi i(\ln(e) - i2\pi/3)} = e^{3\pi i + 2\pi^2} = -e^{2\pi^2}$;

(c) $(1-i)^{4i} = e^{4i\,\mathrm{Log}(1-i)} = e^{4i(\ln\sqrt{2} - i\pi/4)} = e^{\pi + i2\ln 2} = e^{\pi}(\cos(2\ln 2) + i\sin(2\ln 2))$.

7.8. Encontre todas as raízes das seguintes equações em $\mathbb{C}$.

(a) $\log z = i\pi/2$;

(b) $\sin z = \cosh 4$;

(c) $\cos z = 2$;

(d) $\sinh z = i$;

(e) $\cosh z = -2$.

Solução: Seja $z = x + iy$.

(a) $\log z = \ln|z| + i\arg(z) = i\pi/2$. Logo, $|z| = 1$ e $\arg(z) = \pi/2$. Assim, $z = i$.

(b) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = \cosh 4$.
Logo, $x = \pi/2 + 2k\pi$ e $y = 4$, ou seja, $z = \pi/2 + 2k\pi + 4i$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\cos z = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y = 2$.
Logo, $x = 2k\pi$ e $\cosh y = 2$, ou seja, $y = \ln(2 \pm \sqrt{3})$.
Dessa forma, $z = 2k\pi + i\ln(2 \pm \sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$.

(d) $\sinh z = (e^z - e^{-z})/2 = i$, ou seja, $e^z - e^{-z} = 2i$. Logo, $z = i(\pi/2 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(e) $\cosh z = -2$, ou seja, $e^z + e^{-z} = 4$. Logo, $z = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + i(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

7 Problemas

7.8. **(Fórmulas de Adição e Identidades Trigonométricas)** Use a definição das funções sin e cos para números complexos para mostrar que valem as fórmulas

$$\sin(z_1+z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2)+\sin(z_2)\cos(z_1) \quad \text{e} \quad \cos(z_1+z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2)-\sin(z_1)\sin(z_2)$$

para quaisquer dois números complexos z_1 e z_2. A partir destas identidades, conclua que as fórmulas de arco duplo

$$\sin(2z) = 2\sin z\cos z \quad \text{e} \quad \cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z$$

são verificadas para todo $z \in \mathbb{C}$. Use as fórmulas de adição, também, para mostrar que

$$\sin(z+2\pi) = \sin(z) \quad \text{e} \quad \cos(z+2\pi) = \cos(z)$$

também valem para todo $z \in \mathbb{C}$. Isto é, as funções trigonométricas complexas continuam periódicas. Finalmente, use a fórmula de adição do cosseno (ou a definição) para mostrar que

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

permanece válida para todo $z \in \mathbb{C}$.

Solução: Para a primeira identidade temos que

$$\begin{aligned}
\sin(z_1)\cos(z_2)+\sin(z_2)\cos(z_1) &= \frac{1}{4i}\left((e^{iz_1}-e^{-iz_1})(e^{iz_2}+e^{-iz_2})+(e^{iz_2}-e^{-iz_2})(e^{iz_1}+e^{-iz_1})\right)\\
&= \frac{1}{4i}\left(e^{i(z_1+z_2)}+e^{i(z_1-z_2)}-e^{i(-z_1+z_2)}-e^{i(-z_1-z_2)}\right.\\
&\quad \left.+e^{i(z_1+z_2)}+e^{i(-z_1+z_2)}-e^{i(z_1-z_2)}-e^{i(-z_1-z_2)}\right)\\
&= \frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}\\
&= \sin(z_1+z_2).
\end{aligned}$$

Analogamente, podemos chegar na segunda identidade. Ainda,

$$\sin(z+2\pi) = \sin(z)\cos(2\pi)+\sin(2\pi)\cos(z) = \sin(z).$$

Analogamente, podemos fazer o mesmo para a função cos. Por fim,

$$\begin{aligned}
\sin^2 z+\cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\left(-e^{2iz}+2-e^{-2iz}+e^{2iz}+2+e^{-2iz}\right)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

7.9. **(Funções Trigonométricas e Funções Hiperbólicas I)** Mostre que, se $z = x+iy$, então

$$\sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y \quad \text{e} \quad \cos z = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y.$$

Use ambas as expressões para mostrar que $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$ e que $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} &= \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}}{2i} \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{-y}\cos x + ie^{-y}\sin x - e^{y}\cos x + ie^{y}\sin x\right) \\
&= i\cos x\,\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} + \sin x\,\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \\
&= \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y.
\end{aligned}$$

Analogamente, podemos mostrar a identidade envolvendo $\cos z$.

$$\begin{aligned}
|\sin z|^2 &= \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \\
&= \sin^2 x \cosh^2 y + (1 - \sin^2 x)\sinh^2 y \\
&= \sin^2 x(\cosh^2 y - \sinh^2 y) + \sinh^2 y \\
&= \sin^2 x + \sinh^2 y.
\end{aligned}$$

Analogamente, podemos mostrar a identidade envolvendo $|\cos z|^2$.

7.11. Use os resultados do Problema 8 para mostrar que, se $z = x + iy$, valem as desigualdades $|\sin z| \geqslant |\sin x|$ e $|\cos z| \geqslant |\cos x|$. Ademais, mostre também que $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = 1$ se, e apenas se, $z \in \mathbb{R}$.

Solução: Vamos usar os resultados do Problema 9, pois é mais direto.

$$\begin{aligned}
|\sin z|^2 &= \sin^2 x + \sinh^2 y \geqslant \sin^2 x, \\
|\cos z|^2 &= \cos^2 x + \sinh^2 y \geqslant \cos^2 x.
\end{aligned}$$

Logo, $|\sin z| \geqslant |\sin x|$ e $|\cos z| \geqslant |\cos x|$. Além disso,

$$|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y + \cos^2 x + \sinh^2 y = 1 + 2\sinh^2 y.$$

Porém, $1 + 2\sinh^2 y = 1$ se, e somente se, $y = 0$, o que é equivalente à $z \in \mathbb{R}$.

7.12. **(Paradoxo I)** Observe a série de igualdades:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{2\pi i \frac{1}{4}} = \left(e^{2\pi i}\right)^{\frac{1}{4}} = 1^{\frac{1}{4}} = 1.$$

Aponte o erro.

Solução: O erro está no passo $e^{2\pi i \frac{1}{4}} = \left(e^{2\pi i}\right)^{\frac{1}{4}}$, pois em $\mathbb{C}$ a igualdade $(z^a)^b = z^{ab}$ nem sempre é satisfeita quando tomamos o valor principal. Um exemplo disso é para o caso $z = -1, a = 1/3, b = 3$.

7.13. **(Paradoxo II)** Observe a seguinte sequência de implicações:

$$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow 2\log(-z) = 2\log z \Rightarrow \log(-z) = \log(z).$$

Aponte o erro.

Solução: O erro está na última implicação, pois seja $z = \rho e^{i\theta}$, então

$$\begin{aligned} 2\log(-z) = 2\log(z) &\Rightarrow 2\ln\rho + 2i(\theta+\pi) = 2\ln\rho + 2\theta i + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}, \\ &\Rightarrow 2\pi = 2k\pi, \end{aligned}$$

o que é verdade para $k = 1$. Porém,

$$\begin{aligned} \log(-z) = \log(z) &\Rightarrow \ln\rho + i(\theta+\pi) = \ln\rho + \theta i + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}, \\ &\Rightarrow \pi = 2k\pi, \end{aligned}$$

o que não é satisfeito para nenhum $k \in \mathbb{Z}$.