EE400 – *Métodos da Engenharia Elétrica*

Docente: Matheus Souza

Solução para problemas selecionados

– Lista de Exercícios 4 –

Plínio S. Dester
(pliniodester@hotmail.com)

18 de Janeiro de 2022

Em caso de dúvidas, sugestões ou correções, não hesite em mandar um e-mail.

4 Exercícios

4.1. Seja $\vec{F}$ um campo de força dado por $\vec{F}(x,y) = (x-y)\hat{\imath} + xy\hat{\jmath}$. Calcule o trabalho exercido por $\vec{F}$ ao longo da curva C, que é um arco do círculo $x^2+y^2=4$ percorrido em sentido anti-horário de $(2,0)$ para $(0,-2)$.

Solução: Primeiramente, vamos parametrizar a curva tal que ela seja percorrida por

$$\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t), \quad t \in [0, 3\pi/2].$$

Assim, o trabalho exercido por $\vec{F}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_0^{3\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt \\
&= \int_0^{3\pi/2} (2\cos t - 2\sin t, 4\cos t \sin t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t)\, dt \\
&= \int_0^{3\pi/2} 2(-2\sin t\cos t + 2\sin^2 t + 4\cos^2 t \sin t)\, dt \\
&= \int_0^{3\pi/2} 2(-\sin(2t) + 1 - \cos(2t) + 4\cos^2 t\sin t)\, dt \\
&= \left(\cos(2t) + 2t - \sin(2t) - \tfrac{8}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^{3\pi/2} \\
&= \frac{2}{3} + 3\pi.
\end{aligned}$$

4.2. Seja $\vec{F}$ um campo de força dado por $\vec{F}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\imath} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\jmath}$. Calcule o trabalho exercido por $\vec{F}$ ao longo da curva C, que é um arco da parábola $y = 1 + x^2$ percorrido de $(0,0)$ para $(1,2)$.

Solução: Em coordenadas cilíndricas é fácil ver que $\nabla \times \vec{F} = 0$, pois $\vec{F} = \hat{e}_r$. Assim, $\vec{F}$ é um campo conservativo e podemos mostrar que o campo potencial $f(r) = r$ satisfaz $\nabla f = \vec{F}$.

Portanto, o trabalho exercido depende apenas dos pontos inicial $(0,0)$ e final $(1,2)$ e ainda

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f\left(\sqrt{1^2+2^2}\right) - f(0) = \sqrt{5}.$$

4.3. Determine se cada um dos campos a seguir é conservativo. Em caso afirmativo, encontre uma função f tal que $\vec{F} = \nabla f$.

(a) $\vec{F}(x,y) = (6x+5y)\hat{\imath} + (5x+4y)\hat{\jmath}$;

(b) $\vec{F}(x,y) = xe^y\hat{\imath} + ye^x\hat{\jmath}$;

(c) $\vec{F}(x,y) = e^y\hat{\imath} + xe^y\hat{\jmath}$;

(d) $\vec{F}(x,y) = (1 + 2xy + \ln x)\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath}$;

Solução: Seja $\vec{F} = (P,Q)$. O campo $\vec{F}$ é conservativo *sse* $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

(a) Como $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, então podemos encontrar f tal que $\nabla f = \vec{F}$. No caso, uma solução possível é $f(x,y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2$.

(b) Como $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$, então não existe f tal que $\nabla f = \vec{F}$.

(c) Como $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, então podemos encontrar f tal que $\nabla f = \vec{F}$. No caso, uma solução possível é $f(x,y) = xe^y$.

(d) Como $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, então podemos encontrar f tal que $\nabla f = \vec{F}$. No caso, uma solução possível é $f(x,y) = x^2y + x\ln x$.;

4.4. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo de uma curva positivamente orientada:

(a) $\int_C e^y dx + 2xe^y dy$, sendo C o quadrado com lados $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$;

(b) $\int_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy$, sendo C a região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$;

(c) $\int_C \sin y dx + x\cos y dy$, sendo C a elipse $x^2 + xy + y^2 = 1$;

(d) $\int_C (x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$, sendo C a curva que delimita a região entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$.

Solução: Seja $\vec{F} = (P, Q)$ um campo vetorial, então satisfeitas as hipóteses do Teorema de Green temos que

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Vamos aplicar isso nos itens do exercício.

(a)
$$\oint_C e^y dx + 2xe^y dy = \int_0^1 \int_0^1 (2e^y - e^y)\,dx\,dy = e - 1.$$

(b)
$$\oint_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (2-1)\,dx\,dy = \frac{1}{3}.$$

(c)
$$\oint_C \sin y dx + x \cos y dy = \iint_D (\cos y - \cos y)\,dA = 0.$$

(d)
$$\oint_C (x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy = \iint_D (3x^2 + 3y^2)dA = \int_1^3 \int_0^{2\pi} 3r^2 r d\theta dr = 120\,\pi.$$

4.5. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (2xz + y^2)\hat{\imath} + 2xy\hat{\jmath} + (x^2 + 3z^2)\hat{k}$ e a curva C dada por $\vec{r}(t) = (t^2, t+1, 2t-1)$, com $t \in [0, 1]$.

Solução: Note que o campo $\vec{F}$ é conservativo, pois $\nabla \times \vec{F} = 0$. Portanto, podemos achar uma função potencial f tal que $\nabla f = \vec{F}$. De fato, $f(x, y, z) = x^2 z + xy^2 + z^3$ satisfaz essa condição para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{r} = f(\vec{r}(1)) - f(\vec{r}(0)) = 7.$$

4.6. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = -z\hat{\imath} + 3x\hat{\jmath} + 2y\hat{k}$ e o caminho C definido pelas arestas do triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, percorridos nesta ordem.

Solução: Vamos aplicar o Teorema de Stokes escolhendo a superfície $x+y+z = 1$ limitada pelos planos coordenados.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}\,dS.$$

Como $z = 1 - x - y$, então

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \sqrt{3}\, dA, \\ \nabla \times \vec{F} &= (2, -1, 3), \\ \hat{n} &= (1, 1, 1)/\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (2, -1, 3) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\sqrt{3}\, dA = 2,$$

onde D é um triângulo de área 1/2.

4.7. Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = -2z\hat{\imath} + x\hat{\jmath} - x\hat{k}$, sendo C a elipse definida pela interseção entre $x^2 + y^2 = 1$ e $z = y - 1$.

Solução: Vamos aplicar o Teorema de Stokes escolhendo a superfície $z = y - 1$ limitada pelo cilindro. Assim, como no exercício anterior

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}\, dS = \iint_D (0, -1, 1)\frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)\sqrt{2}\, dA = 2\pi,$$

onde D é uma circunferência de área π.

4.9. Considere o campo vetorial $\vec{F} = e^{-\rho}\cos\theta\hat{e}_\rho + \sin\theta\hat{e}_\phi + \cos\phi\hat{e}_\theta$, expresso em coordenadas esféricas. Calcule a integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ao longo da curva C situada sobre a esfera de raio 10 centrada na origem, descrita pelas equações paramétricas $\rho(t) = 10$, $\phi(t) = t$, $\theta(t) = 2t$, $t \in [\pi/4, \pi/2]$.

Solução: Sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\frac{d\phi}{dt} \\ &= 0\,\hat{e}_\rho + 2\rho(t)\sin\phi(t)\,\hat{e}_\theta + \rho(t)\,\hat{e}_\phi \\ &= 20\sin t\,\hat{e}_\theta + 10\,\hat{e}_\phi. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} (20\sin t\cos t + 10\sin 2t)\, dt \\ &= 20\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2t\, dt \\ &= 10. \end{aligned}$$

4.10. Calcule o fluxo do campo vetorial $\vec{F} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ através do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant b$.

Solução: Vamos usar o Teorema de Gauss,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_E \nabla \cdot \vec{F}\, dV = 3 \iiint_E dV = 3\pi b,$$

onde E é um cilindro de volume πb.

4.11. Calcule o fluxo do campo vetorial $\vec{F} = \hat{k}$ que passa pelo hemisfério superior de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Substitua o hemisfério por um disco de raio a no seu equador ($z = 0$). O fluxo é o mesmo? Justifique.

Solução: Podemos usar o Teorema de Stokes para justificar. Como existe um campo vetorial tal que seu rotacional seja igual à $\vec{F}$ (por exemplo o campo $x\hat{\jmath}$), então podemos escolher qualquer superfície com a mesma fronteira para fazer o cálculo do fluxo.

Nesse caso, o mais simples é sobre o disco de raio a, no qual é fácil ver que o fluxo é πa^2.

4.12. Calcule o fluxo do campo vetorial $\vec{F} = y^2\hat{\imath} + z^2(\hat{\jmath} + \hat{k})$ através da superfíce fechada que delimita o volume definido por $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $|z| \leqslant 1$.

Solução: Vamos usar o Teorema de Gauss,

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS &= \iiint_E \nabla \cdot \vec{F}\, dV \\
&= \iiint_E (2y + 2z)\, dV \\
&= \int_{-1}^{1} \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2r \sin\theta + 2z) r\, d\theta dr dz \\
&= \frac{32}{3}.
\end{aligned}$$

4.13. Seja $\vec{F}$ o campo vetorial dado por $\vec{F}(r, \theta, z) = 2r^2\hat{e}_r + rz\hat{e}_z$ e S a superfície fechada definida pelo cone $r = u$, $\theta = v$, $z = u$, com $u \in [0, 1]$ e $v \in [0, 2\pi]$, e pelo disco de raio unitário contido no plano $z = 1$ e centrado no eixo z. Calcule $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Solução: Vamos usar o Teorema de Gauss e o divergente em coordenadas cilíndricas,

$$
\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS &= \iiint_E \nabla \cdot \vec{F}\, dV \\
&= \iiint_E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\, 2r^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(rz \right) \right) dV \\
&= \int_0^1 \int_0^z \int_0^{2\pi} 7r\, r\, d\theta dr dz \\
&= \frac{7\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

4 Problemas

4.2. **(Cuidados com o Teorema de Green)** Considere as duas integrais de linha clássicas:

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{e} \quad \Phi = \oint_C \vec{F} \cdot \hat{N} ds,$$

que calculam, respectivamente, trabalho e fluxo definidos por um campo vetorial $\vec{F}$ e uma curva fechada C. Suponha, neste exercício, que C seja um círculo de raio $a > 0$ orientado positivamente.

(a) Considere o campo vetorial dado por

$$\vec{F}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \left(-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} \right).$$

Este campo é conservativo? Calcule a integral de linha usando o Teorema de Green e a definição. Comente os resultados.

(b) Considere o campo vetorial dado por

$$\vec{F}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \right).$$

Este campo é sem fontes? Calcule a integral de linha usando o Teorema de Green e a definição. Comente os resultados.

Solução:

(a) Este campo é conservativo onde $\vec{F}$ é definida, pois $\nabla \times \vec{F} = 0$. Dessa forma, se usarmos o Teorema de Green encontramos que o trabalho é nulo. Porém, ao fazermos a integral pela definição com a parametrização $\vec{r}(t) = (a\cos\theta, a\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Temos que

$$\begin{aligned} W &= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2}(-a\sin\theta, a\cos\theta) \cdot (-a\sin\theta, a\cos\theta)\, d\theta \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

O resultado foi diferente, pois neste caso uma das hipóteses do Teorema de Green não é satisfeita, que é a das derivadas parciais de primeira ordem serem contínuas em uma região aberta que contenha a região de integração. No ponto (0,0) o limite não existe.

(b) Este campo é sem fontes onde $\vec{F}$ é definida, pois $\nabla \cdot \vec{F} = 0$. Dessa forma, se usarmos o Teorema de Green (fluxo) encontramos que o fluxo é nulo. Porém, ao fazermos a integral pela definição

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_C \vec{F} \cdot \hat{N}\, ds \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2}(a\cos\theta, a\sin\theta) \cdot (\cos\theta, \sin\theta)\, a\, d\theta \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

O resultado foi diferente, pois neste caso uma das hipóteses do Teorema de Green (fluxo) não é satisfeita, que é a das derivadas parciais de primeira ordem serem contínuas em uma região aberta que contenha a região de integração. No ponto (0,0) o limite não existe.

4.5. Considere uma carga Q_0 distribuída em um volume esférico de raio ρ_0 centrado na origem. Esta distribuição de carga produz um campo elétrico $\vec{E}$ dado por

$$\vec{E}(\rho, \theta, \phi) = \begin{cases} \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\rho^2}\hat{e}_\rho & \text{se} \quad \rho \geqslant \rho_0, \\ \frac{Q_0\rho^2}{4\pi\epsilon_0\rho_0^4}\hat{e}_\rho & \text{se} \quad \rho < \rho_0. \end{cases}$$

Calcule o divergente $\nabla \cdot \vec{E}$ para os casos $0 < \rho < \rho_0$ e $\rho \geqslant \rho_0$ e determine a densidade de carga em cada caso.

Solução: Vamos usar o divergente em coordenadas esféricas, ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 E_\rho).$$

Dessa forma, obtemos que a densidade de carga é dada por

$$\epsilon_0(\nabla \cdot \vec{E}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \rho \geqslant \rho_0, \\ \frac{Q_0\rho}{\pi\rho_0^4}, & \text{se } \rho < \rho_0. \end{cases}$$