

EE400 – Métodos da Engenharia Elétrica

Docente: Matheus Souza

Solução para problemas selecionados

– Lista de Exercícios 11 –

Plínio S. Dester

(pliniodester@hotmail.com)

18 de Janeiro de 2022

Em caso de dúvidas, sugestões ou correções, não hesite em mandar um e-mail.

11 Exercícios

- 11.4. Determine a imagem do retângulo $a \leq \operatorname{Re} z \leq b$ e $c \leq \operatorname{Im} z \leq d$ sob a transformação $f(z) = e^z$.

Solução: Vamos supor que $c, d \in (-\pi, \pi]$. Seja $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Temos que a transformação é dada por $w = e^x e^{iy}$, onde a componente x está relacionada ao módulo ($|w| = e^x$) e a componente y ao ângulo ($\operatorname{Arg}(w) = y$) no plano complexo. Dessa forma, o retângulo se transforma em um setor de anel, ou seja, na região

$$\{w \in \mathbb{C} \mid e^a \leq |w| \leq e^b, c \leq \operatorname{Arg}(w) \leq d\}.$$

- 11.6. Determine os pontos fixos da aplicação dada por $f(z) = \frac{2z - 5}{z + 4}$.

Solução: As soluções da equação $f(z) = z$ são $-1 \pm 2i$.

- 11.8. Construa uma aplicação conforme que leve o semiplano $\operatorname{Re} z \leq 0$ no disco $|z| \leq 1$.

Solução: Usando o método ensinado em aula para construir aplicações bilineares, podemos escolher $z_0 = -1$ e $z'_0 = 1$. Dessa forma, a aplicação desejada é dada por

$$w = \frac{z - z_0}{z - z'_0} = \frac{z + 1}{z - 1}.$$

11.9. Construa uma bijeção analítica entre o semi-plano $x + y \geq 0$ e o disco $|z - i| \leq 1$.

Solução: Usando o método ensinado em aula para construir aplicações bilineares, podemos escolher $z_0 = 1 + i$ e $z'_0 = -1 - i$. Dessa forma, a aplicação que leva no círculo unitário centrado na origem é dada por

$$w' = \frac{z - z_0}{z - z'_0} = \frac{z - (1 + i)}{z + (1 + i)}.$$

Como queremos um círculo unitário centrado em i , basta fazer $w = w' + i$, ou seja,

$$w = \frac{z - (1 + i)}{z + (1 + i)} + i = \frac{(1 + i)z - 2}{z + (1 + i)}.$$