EE400 – *Métodos da Engenharia Elétrica*

Docente: Matheus Souza

Solução para problemas selecionados

– Lista de Exercícios 1 –

Plínio S. Dester

(pliniodester@hotmail.com)

18 de Janeiro de 2022

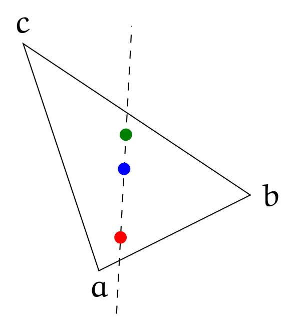
Em caso de dúvidas, sugestões ou correções, não hesite em mandar um e-mail.

1 Exercícios

1.1. Considere o triângulo no plano definido pelos vértices $a = (1, 1)$, $b = (3, 2)$ e $c = (0, 4)$. Determine o seu ortocentro h (encontro das alturas relativas a seus lados), o seu baricentro g (encontro de suas medianas) e o seu circuncentro k (encontro das mediatrizes relativas aos seus lados). Verifique que estes pontos pertencem a uma mesma reta: a *Reta de Euler*.

Solução:

$$h = (9/7, 10/7),$$
$$g = (4/3, 7/3),$$
$$k = (19/14, 39/14).$$



Para encontrar h, basta resolver o sistema

$$\begin{cases} h_y - c_y = -(1/m_{ab})(h_x - c_x), \\ h_y - b_y = -(1/m_{ac})(h_x - b_x), \end{cases}$$

onde $m_{ab} = (a_y - b_y)/(a_x - b_x)$ e $m_{ac} = (a_y - c_y)/(a_x - c_x)$ são as inclinações das retas $\overline{ab}$ e $\overline{ac}$, respectivamente.

Para encontrar g, vide Problema 4.

Para encontrar k, basta resolver o sistema

$$\begin{cases} k_y - (a_y + b_y)/2 = -(1/m_{ab})(k_x - (a_x + b_x)/2), \\ k_y - (a_y + c_y)/2 = -(1/m_{ac})(k_x - (a_x + c_x)/2). \end{cases}$$

Para mostrar que h, g e k são colineares, basta verificar que a seguinte igualdade é verdadeira

$$\frac{h_y - g_y}{h_x - g_x} = \frac{g_y - k_y}{g_x - k_x}.$$

1.2. Considere o vetor $\vec{p} = (1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$. Encontre escalares a, b, c tais que

$$\vec{p} = a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 0).$$

Para qualquer vetor $\vec{p}$, sempre é possível encontrar escalares que validem a igualdade acima? Justifique em caso afirmativo ou encontre um contra-exemplo.

Solução: Os vetores são linearmente independentes. Portanto, a solução existe e é única para qualquer vetor do $\mathbb{R}^3$. Para o caso de $\vec{p}$, temos que $a = -1$, $b = 0$, $c = 2$.

1.3. Encontre dois vetores perpendiculares entre si que são ortogonais a $(1, 1, 0)$.

Solução: Dois possíveis vetores são $(0, 0, 1)$ e $(1, -1, 0)$.

1.4. Calcule a distância entre as retas $\vec{r} = (1, 0, 0) + \big[(1, 2, 0)\big]$ e $\vec{s} = (2, 3, 1) + \big[(1, 0, 1)\big]$.

Solução: Sejam as retas $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\,\vec{r}_d$, $t \in \mathbb{R}$ e $\vec{s}(w) = \vec{s}_0 + w\,\vec{r}_d$, $w \in \mathbb{R}$. Sabemos que a distância entre as retas é calculada através do segmento de reta perpendicular à ambas. Podemos encontrar um vetor perpendicular $\vec{n}$ às duas retas fazendo o produto vetorial entre os vetores diretores, ou seja, $\vec{n} = \vec{r}_d \times \vec{s}_d$ e o unitário $\hat{n} = \vec{n}/|\vec{n}|$.

Em seguida, basta encontrarmos o parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfaz a seguinte equação

$$\vec{r}(t) + \lambda\,\hat{n} = \vec{s}(w)$$

para algum valor de $t, w \in \mathbb{R}$. Podemos aplicar o produto interno com $\vec{n}$ em ambos lados da equação para obter

$$(\vec{r}_0 + t\,\vec{r}_d) \cdot \hat{n} + \lambda = (\vec{s}_0 + w\,\vec{s}_d) \cdot \hat{n}.$$

Lembrando que $\hat{n}$ é ortogonal à $\vec{r}_d$ e $\vec{s}_d$, temos que

$$\lambda = (\vec{s}_0 - \vec{r}_0) \cdot \hat{n}.$$

Dessa forma, a distância entre as retas $\vec{r}$ e $\vec{s}$ é dada por

$$\boxed{d(\vec{r}, \vec{s}) = \left| \frac{(\vec{r}_0 - \vec{s}_0) \cdot (\vec{r}_d \times \vec{s}_d)}{|\vec{r}_d \times \vec{s}_d|} \right|}.$$

Aplicando os valores do enunciado, temos que $d(\vec{r}, \vec{s}) = 1$.

1.6. Determine uma equação para o plano π que passa por $(1,2,1)$ e tem vetor normal $(0,1,1)$. Calcule a distância deste plano até a origem.

Solução: Seja $\vec{r}_0 = (1,2,1)$ e $\vec{n} = (0,1,1)$. Se $r \in \pi$, então

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0.$$

Logo,

$$\pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 3\right\}.$$

1.8. Se $\vec{r} = (x,y)$, $\vec{r}_1 = (x_1,y_1)$ e $\vec{r}_2 = (x_2,y_2)$, descreva o conjunto dos pontos (x,y) tais que

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| + |\vec{r} - \vec{r}_2| = k,$$

para alguma constante $k > |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$.

Solução: Todos os pontos de uma elipse têm a propriedade da soma da distância deles com os focos ser constante. Logo, trata-se de uma elipse com focos em $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$.

1.9. Um tetraedro $OPQR$ tem como arestas os vetores $\overrightarrow{OP} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$, $\overrightarrow{OQ} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ e $\overrightarrow{OR} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}$. Mostre que $\overrightarrow{OP}$ é ortogonal ao plano OQR. Use essa informação para calcular o volume do tetraedro.

Solução: O vetor $\overrightarrow{OP}$ é ortogonal ao plano OQR, pois $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ e $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} = 0$.

O volume do tetraedro é dado por

$$V_{OPQR} = \left|\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OR}\right) \cdot \overrightarrow{OP}\right| = \frac{5}{3}.$$

1.10. Calcule a área do triângulo com vértices $A = (1,4,6)$, $B = (-2,5,-1)$ e $C = (1,-1,1)$. Use o Problema 8.

Solução:

$$A_{ABC} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{1}{2}|(-40,-15,15)| = \frac{5}{2}\sqrt{82}.$$

1 Problemas

1.4. Mostre que, em um triângulo de vértices $a = (x_a, y_a)$, $b = (x_b, y_b)$ e $c = (x_c, y_c)$, o seu baricentro tem coordenadas

$$g = \left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}\, ,\; \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \right).$$

Solução: Basta substituir a solução proposta no seguinte sistema e verificar que é satisfeito.

$$\begin{cases} g_y - a_y = m_a(g_x - a_x), \\ g_y - b_y = m_b(g_x - b_x), \end{cases}$$

onde $m_a = [(b_y + c_y)/2 - a_y]/[(b_x + c_x)/2 - a_x]$ e $m_b = [(a_y + c_y)/2 - b_y]/[(a_x + c_x)/2 - b_x]$ são as inclinações das medianas que passam por a e b, respectivamente.

1.10. (**Cônicas e Excentricidade**) A seguinte equação em coordenadas polares

$$r = \frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

representa uma cônica com excentricidade e. Discrimine a curva em função de $e \geqslant 0$.

Solução: A ideia é tentar re-escrever a equação para coordenadas retangulares e deixar no formato padrão de cônicas $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, ou seja,

$$\begin{aligned} & r + er\cos\theta = 1 \\ \Rightarrow\; & r + ex = 1 \\ \Rightarrow\; & r^2 = (1 - ex)^2 \\ \Rightarrow\; & x^2 + y^2 = 1 - 2ex + e^2x^2 \\ \Rightarrow\; & \begin{cases} (1 - e^2)^2 \left(x + \frac{e}{1-e^2}\right)^2 + (1 - e^2)y^2 = 1, & \text{se } e \neq 1, \\ x = \frac{y^2 - 1}{2}, & \text{se } e = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Dessa forma,

- Se $e = 0$, trata-se de uma circunferência,
- Se $e < 1$, trata-se de uma elipse,
- Se $e = 1$, trata-se de uma parábola,
- Se $e > 1$, trata-se de uma hipérbole.