Soluções para problemas selecionados da apostila
Otimização Matemática e Pesquisa Operacional
de André R. Fioravanti e Matheus Souza

– Capítulo 4 –

Plínio Santini Dester (`p103806@dac.unicamp.br`)

18 de janeiro de 2022

*Em caso de dúvidas, sugestões ou correções, não hesite em mandar um e-mail.

4 Problemas

4.1. Considere os problemas abaixo, que consistem em minimizar f_0 sujeita a $Ax = b$. Para cada um deles, formule as condições de otimalidade de primeira e de segunda ordens. Obtenha, também, um problema irrestrito equivalente e escreva as suas condições de otimalidade. Determine as soluções ótimas destes problemas usando as duas formulações.

(a) $\min f_0(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2$ s.a. $2x_1 + x_2 = 4$ e $5x_1 - x_3 = 8$;

(b) $\min f_0(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 2x_1x_2$ s.a. $2x_1 + x_2 = 1$.

Solução:

(a) Primeiramente, calculamos o gradiente e a Hessiana de f_0,

$$\nabla f_0(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ 2x_2 - 2x_1 \\ 2x_3 \end{bmatrix}, \qquad \nabla^2 f_0(x) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Em seguida identificamos as matrizes A e b correspondentes ao sistema linear que deve ser satisfeito,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

As condições de primeira ordem são

$$\begin{cases} \nabla f_0(x^*) + A^\top \lambda^* = 0 \\ Ax^* = b \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo esse sistema linear, obtemos

$$x^* = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 26 \\ 16 \\ -6 \end{bmatrix}, \qquad \lambda^* = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 20 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

As condições de segunda ordem são verificadas, pois a Hessiana $\nabla^2 f_0$ é definida positiva.

Para formular o problema irrestrito, devemos encontrar a matriz F formada pelos vetores que formam uma base para o $\mathscr{N}(A)$. De forma que se $Ax = b$, então $x = \bar{x} + Fz$, onde $\bar{x}$ é uma solução particular. Seja $x_1 = z$, então da primeira equação $x_2 = 4 - 2z$ e da segunda equação $x_3 = -8 + 5z$. Portanto,

$$\bar{x} = [0, 4, -8]^\top, \qquad F = [1, -2, 5]^\top.$$

Agora, seja $\phi(z) = f_0(\bar{x} + Fz)$, o novo problema de otimização é $\min\limits_{z \in \mathbb{R}} \phi(z)$. As condições de otimalidade de primeira ordem são dadas por

$$\begin{aligned} \nabla \phi(z^*) = 0 &\Leftrightarrow F^\top \nabla f_0(\bar{x} + Fz^*) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2z^* - 4(4 - 2z^*) + 10(5z^* - 8) - 2(4 - 2z^*) + 4z^* = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{z^* = 16/17}. \end{aligned}$$

Enfim, $x^* = \bar{x} + Fz^* = [26/17, 16/17, -6/17]^\top$.
As condições de otimalidade de segunda ordem são dadas por

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(z^*) \succeq 0 &\Leftrightarrow F^\top \nabla^2 f_0(x^*) F \succeq 0 \\ &\Leftrightarrow 68 \succeq 0. \end{aligned}$$

Logo, as condições de primeira e segunda ordem são satisfeitas para x^*.

(b) Repetindo o pocedimento do item anterior, calculamos o gradiente e a Hessiana de f_0,

$$\nabla f_0(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 2 \\ 4x_2 - 2x_1 \end{bmatrix}, \qquad \nabla^2 f_0(x) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Em seguida identificamos as matrizes A e b correspondentes ao sistema linear que deve ser satisfeito,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

As condições de primeira ordem são

$$\begin{cases} \nabla f_0(x^*) + A^\top \lambda^* = 0 \\ Ax^* = b \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo esse sistema linear, obtemos

$$x^* = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda^* = \frac{8}{13}.$$

As condições de segunda ordem são verificadas, pois a Hessiana $\nabla^2 f_0$ é definida positiva.

Para formular o problema irrestrito, devemos encontrar a matriz F formada pelos vetores que formam uma base para o $\mathcal{N}(A)$. De forma que se $Ax = b$, então $x = \bar{x} + Fz$, onde $\bar{x}$ é uma solução particular. Seja $x_1 = z$, então da equação $x_2 = 1 - 2z$. Portanto,

$$\bar{x} = [0, 1]^\top, \qquad F = [1, -2]^\top.$$

Agora, seja $\phi(z) = f_0(\bar{x} + Fz)$, o novo problema de otimização é $\min\limits_{z \in \mathbb{R}} \phi(z)$. As condições de otimalidade de primeira ordem são dadas por

$$\begin{aligned} \nabla \phi(z^*) = 0 &\Leftrightarrow F^\top \nabla f_0(\bar{x} + Fz^*) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2z^* - 8(1 - 2z^*) - 2 - 2(1 - 2z^*) + 4z^* = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{z^* = 6/13}. \end{aligned}$$

Enfim, $x^* = \bar{x} + Fz^* = [6/13, 1/13]^\top$.
As condições de otimalidade de segunda ordem são dadas por

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(z^*) \succeq 0 &\Leftrightarrow F^\top \nabla^2 f_0(x^*) F \succeq 0 \\ &\Leftrightarrow 26 \succeq 0. \end{aligned}$$

Logo, as condições de primeira e segunda ordem são satisfeitas para x^*.

4.2. Encontre o ponto sobre o plano $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$ cuja distância à origem seja mínima.

Solução: O problema de otimização equivalente é dado por

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} ||x||_2^2 \quad \text{s.a. } x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4.$$

Vamos transformar em um problema irrestrito. Note que a restrição tem 2 graus de liberdade, assim seja $x_2 = z_1$ e $x_3 = z_2$, então $x_1 = 4 - 2z_1 - 2z_2$. Portanto, temos o problema equivalente $\min_{z \in \mathbb{R}^2} \phi(z)$, onde $\phi(z) = (4 - 2z_1 - 2z_2)^2 + z_1^2 + z_2^2$. Aplicando a condição de primeira ordem, temos

$$\nabla\phi(z^*) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2(-8 + 5z_1^* + 4z_2^*) \\ 2(-8 + 4z_1^* + 5z_2^*) \end{bmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{z^* = \begin{bmatrix} 8/9 \\ 8/9 \end{bmatrix}}.$$

Voltando ao problema original, temos que $\boxed{x^* = [4/9, 8/9, 8/9]^\top}$.

4.3. Considere o problema de otimização

$$\begin{array}{rl} \min & f_0(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{sujeito a} & 2x_1 + x_2 = 2. \end{array}$$

(a) Qual é a solução ótima deste problema?

(b) Considere o problema penalizado

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} x_1^2 + x_2^2 + \rho(2 - 2x_1 - x_2)^2,$$

com $\rho > 0$. Para cada valor de ρ, obtenha a solução ótima do problema, $x^\star(\rho)$.

(c) O que acontece com $\rho \to 0^+$? O que acontece com $\rho \to \infty$? Interprete os resultados.

Solução:

(a) Pelas condições de otimalidade de primeira ordem devemos ter que

$$\begin{cases} \nabla f_0(x^*) + A^\top \lambda^* = 0 \\ Ax^* = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo esse sistema de equações, encontramos

$$x^* = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}, \qquad \lambda^* = -4/5.$$

Esse problema é convexo, então x^* é o ótimo global.

(b) Esse problema é irrestrito, então as condições de primeira ordem são

$$\nabla f_\rho(x^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (2+8\rho)x_1^* + 4\rho x_2^* - 8\rho \\ 4\rho x_1^* + (2+2\rho)x_2^* - 4\rho \end{bmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x^*(\rho) = \frac{2\rho}{1+5\rho}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Essa solução é ótimo global, pois o problema é convexo ($\rho > 0$).

(c)

$$\lim_{\rho \to 0^+} x^*(\rho) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\lim_{\rho \to \infty} x^*(\rho) = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}.$$

Quando $\rho \to 0^+$, o peso da restrição é nulo, ou seja, resolve-se o problema irrestrito de minimizar $||x||_2$, cuja solução é o vetor nulo. Por outro lado, quando o peso da restrição aumenta, ela deve ser satisfeita, então é de se esperar que a solução convirja para a do problema original quando $\rho \to \infty$.

4.5. Considere o problema de programação linear

$$\begin{array}{rl} \min & f_0(x) = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 \leq 8, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Escreva as condições KKT para este problema e, para cada ponto extremo, verifique se as condições de otimalidade são satisfeitas. Encontre a solução ótima.

Solução: Colocando no formato padrão do Teorema 4.1.5, temos que

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e as condições KKT são

$$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -1\end{bmatrix}\mu^* = 0,$$
$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} x^* \leq \begin{bmatrix}8\\4\\0\\0\end{bmatrix},$$
$$\mu^* \geq 0,$$
$$\mu_i^*(\tilde{c}_i^\top x_i^* - d_i) = 0, \quad i \in \{1,2,3,4\}.$$

Os pontos extremos são

$$\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}8\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Cada um dos pontos extremos tem duas restrições ativas.
Para o ponto $[4,4]^\top$ temos que

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1^*\\ \mu_2^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\mu_1^*\\ \mu_2^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7/3\\-1/3\end{bmatrix}.$$

Como μ^* não satisfaz a condição $\mu^* \geq 0$, então não é um ponto KKT.
Para o ponto $[0,2]^\top$ temos que

$$\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_2^*\\ \mu_3^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\mu_2^*\\ \mu_3^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7/2\\-3/2\end{bmatrix}.$$

Como μ^* não satisfaz a condição $\mu^* \geq 0$, então não é um ponto KKT.
Para o ponto $[8,0]^\top$ temos que

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1^*\\ \mu_4^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\mu_1^*\\ \mu_4^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}.$$

Como μ^* não satisfaz a condição $\mu^* \geq 0$, então não é um ponto KKT.
Para o ponto $[0,0]^\top$ temos que

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_3^*\\ \mu_4^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\mu_3^*\\ \mu_4^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}.$$

Como μ^* satisfaz a condição $\mu^* \geq 0$, então é um ponto KKT e é a solução ótima.

4.8. Considere o problema a seguir, sendo a_i, b e c_i, constantes positivas:

$$\begin{array}{rl} \min & f_0(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x_i} \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \cdots, n. \end{array}$$

Escreva as condições KKT para este problema e obtenha a sua solução ótima $x^\star$.

Solução: Primeiramente, vamos calcular o gradiente e a Hessiana de f_0,

$$\nabla f_0(x) = \begin{bmatrix} -\frac{c_1}{x_1^2} \\ \vdots \\ -\frac{c_n}{x_n^2} \end{bmatrix}, \qquad \nabla^2 f_0(x) = \begin{bmatrix} \frac{2c_1}{x_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{2c_n}{x_n^3} \end{bmatrix}.$$

Note que a Hessiana é definida positiva, pois $x \geq 0$. Dessa forma, o ponto KKT é solução global do problema. No formato padrão para aplicarmos o Teorema 4.1.5, reconhecemos as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos testar o ponto no qual todas as restrições de desigualdade estão **inativas**, pois a função objetivo não está definida quando alguma restrição está ativa. Dessa forma, sabemos que para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\frac{-c_k}{{x_k^*}^2} + \lambda^* a_k = 0 \Rightarrow \boxed{x_k^* = \sqrt{\frac{c_k}{\lambda^* a_k}}}.$$

Substituindo na restrição de igualdade, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sqrt{\frac{c_i}{\lambda^* a_i}} = b \Rightarrow \boxed{\lambda^* = \frac{1}{b^2} \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{c_i a_i} \right)^2}.$$

Por fim, juntando os dois resultados, temos que para $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned} x_k^* &= \frac{b\sqrt{c_k/a_k}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{c_i a_i}} \\ &= \frac{b\, c_k}{\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{c_i c_k} \sqrt{a_i a_k})}. \end{aligned}$$