ME210 - Probabilidade I - 2S 2017

Docente: Marina Vachkovskaia

Soluções para problemas selecionados do livro
Probabilidade: Um curso moderno com aplicações 8.ed. de Sheldon Ross

Plínio Santini Dester (`p103806@dac.unicamp.br`)

14 de outubro de 2017

Em caso de dúvidas, sugestões ou correções (inclusive erros de digitação), não hesite em mandar um e-mail.

4 Problemas

4.34. No Exemplo 4b, suponha que a loja de departamentos embuta um custo adicional c por cada unidade de demanda não atingida (esse tipo de custo é frequentemente chamado de custo *goodwill* porque a loja perde a boa vontade dos consumidores cuja demanda ela não foi capaz de suprir). Calcule o lucro esperado quando a loja armazena s unidades, e determine o valor de s que maximiza o lucro esperado.

Solução: Usando a mesma notação do Exemplo 4b e considerando o custo *goodwill*, temos que o lucro esperado é dado por

$$P(s) = \begin{cases} b\,X - (s - X)\,\ell, & \text{se } X \leq s, \\ b\,s - (X - s)\,c, & \text{se } X > s. \end{cases}$$

Logo, o valor esperado do lucro é dado por

$$\begin{aligned} E[P(s)] &= \sum_{i=0}^{s} (b\,i - (s-i)\,\ell)\,p(i) + \sum_{i=s+1}^{\infty} (b\,s - (i-s)\,c)\,p(i) \\ &= b\,s - (b+\ell) \sum_{i=0}^{s} (s-i)\,p(i) - c \sum_{i=s+1}^{\infty} (i-s)\,p(i). \end{aligned}$$

Para encontrar o máximo, vamos calcular

$$E[P(s+1)] - E[P(s)] = (b+c) - (b+c+\ell) \sum_{i=0}^{s} p(i).$$

É melhor estocar $s+1$ unidades do que s sempre que $E[P(s+1)] - E[P(s)] > 0$. Logo, seja s^* o maior valor inteiro positivo que satisfaça a seguinte relação:

$$E[P(s^*+1)] - E[P(s^*)] > 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{s^*} p(i) < \frac{b+c}{b+c+\ell},$$

então o número ótimo de unidades a serem estocadas é s^*+1.

4.35. Uma caixa contém 5 bolas de gude vermelhas e 5 azuis. Duas bolas de gude são retiradas aleatoriamente. Se elas tiverem a mesma cor, você ganha R$1,10; se elas tiverem cores diferentes, você ganha -R$1,00 (isto é, você perde R$1,00). Calcule

(a) o valor esperado da quantia que você ganha;

(b) a variância da quantia que você ganha.

Solução: Seja X a variável aleatória correspondente ao ganho obtido.

(a) $E[X] = 1{,}10 \cdot \frac{10}{10}\frac{4}{9} - 1{,}00 \cdot \frac{10}{10}\frac{5}{9} \approx 0{,}067$.

(b) $E[X^2] = 1{,}10^2 \cdot \frac{10}{10}\frac{4}{9} + 1{,}00^2 \cdot \frac{10}{10}\frac{5}{9} \approx 1{,}093$.
$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 \approx 1{,}089$.

4.38. Se $E[X] = 1$ e $\mathrm{Var}(X) = 5$, determine

(a) $E[2+X^2]$;

(b) $\mathrm{Var}(4+3X)$.

Solução: Sabemos que $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$, logo $E[X^2] = 6$.

(a) $E[2+X^2] = 2 + E[X^2] = 8$.

(b) $\mathrm{Var}(4+3X) = E[(4+3X)^2] - E[4+3X]^2$
$= 16 + 24E[X] + 9E[X^2] - (4+3E[X])^2 = 45$.

4.51. O número esperado de erros tipográficos em uma página de certa revista é igual a 0,2. Qual é a probabilidade de que a próxima página que você leia contenha (a) O e (b) 2 ou mais erros tipográficos? Explique o seu raciocínio!

Solução: Supondo que a probabilidade de ocorrer um erro tipográfico seja baixa e que o número de letras em uma página seja suficientemente grande, então podemos aproximar o número de erros em uma página por uma variável aleatória X com distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = 0{,}2$.

(a) $P(X = 0) = \mathrm{e}^{-0{,}2} \approx 0{,}8187$.

(b) $1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}2} - 0{,}2\,\mathrm{e}^{-0{,}2} \approx 0{,}0175$.

4.53. Aproximadamente 80.000 casamentos foram celebrados no estado de Nova York no ano passado. Estime a probabilidade de que, em pelo menos um desses casais,

(a) ambos os parceiros tenham nascido no dia 30 de abril?

(b) ambos os parceiros celebrem seu aniversário no mesmo dia do ano?

Solução: A probabilidade de ocorrer a coincidência é baixa e o número de casais é alto, então podemos aproximar o número de coincidências por uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro:

(a) $\lambda = \frac{1}{365^2} \cdot 80\,000 \approx 0{,}6$. Logo, a probabilidade desejada é $1 - \mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 0{,}45$.

(b) $\lambda = \frac{1}{365} \cdot 80\,000 \approx 219{,}2$. Logo, a probabilidade desejada é $1 - \mathrm{e}^{-219{,}2} \approx 1$.

4.57. Suponha que o número de acidentes que ocorrem em uma autoestrada em cada dia seja uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\lambda = 3$.

(a) Determine a probabilidade de que 3 ou mais acidentes ocorram hoje;

(b) Repita a letra (a) supondo que pelo menos 1 acidente ocorra hoje

Solução:

(a) $P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$
$= 1 - \mathrm{e}^{-3} - 3\mathrm{e}^{-3} - \frac{3^2}{2}\mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}5768$.

(b) $P(X \geq 3 \mid X \geq 1) = P(X \geq 3, X \geq 1)/P(X \geq 1) = P(X \geq 3)/P(X \geq 1)$
$= \dfrac{1 - \frac{17}{2}\mathrm{e}^{-3}}{1 - \mathrm{e}^{-3}} \approx 0{,}607$.

4.60. O número de vezes em que uma pessoa contrai um resfriado em um dado ano é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\lambda = 5$. Suponha que a propaganda de uma nova droga (baseada em grandes quantidades de vitamina C) diga que essa droga reduz os parâmetros da distribuição de Poisson para $\lambda = 3$ em 75% da população. Nos 25%

restantes, a droga não tem um efeito apreciável nos resfriados. Se um indivíduo experimentar a droga por um ano e tiver 2 resfriados naquele período, qual é a probabilidade de que a droga tenha trazido algum benefício para ele ou ela?

Solução: Seja X_λ uma variável aleatória que segue uma distribuição de Poisson de parâmetro λ, A o evento da droga fazer efeito em uma pessoa e Y o número de resfriados contraídos por uma pessoa que tomou o remédio. Queremos saber

$$\begin{aligned}
P(A \mid Y = 2) &= \frac{P(Y = 2 \mid A)P(A)}{P(Y = 2 \mid A)P(A) + P(Y = 2 \mid A^c)P(A^c)} \\
&= \frac{P(X_3 = 2)P(A)}{P(X_3 = 2)P(A) + P(X_5 = 2)P(A^c)} \\
&= \frac{(\frac{3^2}{2}\mathrm{e}^{-3})\frac{3}{4}}{(\frac{3^2}{2}\mathrm{e}^{-3})\frac{3}{4} + (\frac{5^2}{2}\mathrm{e}^{-5})\frac{1}{4}} \\
&\approx 0{,}8886.
\end{aligned}$$

4.65. Cada um dos 500 soldados de uma companhia do exército tem probabilidade de $1/10^3$ ter certa doença, independentemente uns dos outros. Essa doença é diagnosticada por meio de um exame de sangue, e para facilitar o procedimento, amostras de sangue de todos os 500 soldados são coletadas e testadas.

(a) Qual é a probabilidade (aproximada) de que o exame de sangue dê positivo (isto é, de que pelo menos uma pessoa tenha a doença).

(b) Suponha agora que o exame de sangue dê um resultado positivo. Qual é a probabilidade, nessa circunstância, de que mais de uma pessoa tenha a doença?

(c) Uma das 500 pessoas é João, que sabe que tem a doença. Qual é, na opinião de João, a probabilidade de que mais de uma pessoa tenha a doença?

(d) Como o teste em grupo deu positivo, as autoridades decidiram testar cada indivíduo separadamente. Os primeiros $i - 1$ desses testes deram negativo, e o i-ésimo teste, que é o de João, deu positivo. Dado o cenário anterior, qual é a probabilidade, em função de i, de que qualquer uma das pessoas restantes tenham a doença?

Solução:

(a) Como a probabilidade de ter a doença é pequena e temos um número grande de soldados, então podemos aproximar o número de pessoas doentes pela variável aleatória X, que segue uma distribuição de Poisson de parâmtro $\lambda = 500 \cdot \frac{1}{10^3} = \frac{1}{2}$. Logo,
$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \mathrm{e}^{-1/2} \approx 0{,}393.$$

(b)

$$P(X > 1 \mid X > 0) = \frac{P(X > 1)}{P(X > 0)} = \frac{1 - P(X = 1) - P(X = 0)}{1 - P(X = 0)}$$
$$= \frac{1 - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-1/2}}{1 - \mathrm{e}^{-1/2}} \approx 0{,}229.$$

(c) O estado das outras pessoas é independente de João, logo a probabilidade continua sendo $P(X > 0)$, mas com parâmetro $\lambda = 499 \cdot \frac{1}{10^3}$.
Assim, $P(X > 0) = 1 - \mathrm{e}^{499/1000} \approx 0{,}393$.

(d) Nesse novo caso, $\lambda = (500 - i)\frac{1}{10^3}$. Logo, $P(X > 0) = 1 - \mathrm{e}^{\frac{500-i}{1000}}$. Entretanto, se i é próximo de 500 a aproximação pela Poisson não é razoável. Então, para podermos escolher qualquer i e obter a resposta correta, devemos fazer o cálculo da maneira convencional, isto é, a probabilidade de termos pelo menos uma das $500 - i$ pessoas com a doença é o complemento de nenhuma delas estar doente, ou seja, $1 - (1 - \frac{1}{10^3})^{500-i}$.

4.68. Em resposta ao ataque de 10 mísseis, 500 mísseis antiaéreos são lançados. Os alvos dos mísseis antiaéreos são independentes, e cada míssil antiaéreo pode ter, com igual probabilidade, qualquer um dos 10 mísseis como alvo. Se cada míssil antiaéreo atinge o seu alvo independentemente com probabilidade 0,1, use o paradigma de Poisson para obter um valor aproximado para a probabilidade de que todos os mísseis sejam atingidos.

Solução: Cada míssil de ataque tem probabilidade 1/10 de ser escolhido por um dado míssil antiaéreo e probabilidade 0,1 desse míssil antiaéreo funcionar. Como lançaremos 500 mísseis antiaéreos, podemos aproximar o evento do número de mísseis antiaéreos acertar um determinado míssil de ataque por uma Poisson de parâmetro $\lambda = 500 \cdot \frac{1}{10} \cdot 0{,}1 = 5$. Logo, a chance de um dado míssil de ataque ser derrubado, isto é, pelo menos um míssil antiaéreo o acertar é dado por $1 - \mathrm{e}^{-5}$. Como isso deve acontecer 10 vezes, pois temos 10 mísseis de ataque, então a probabilidade desejada pode ser aproximada por $(1 - \mathrm{e}^{-5})^{10} \approx 0{,}935$.

4.69. Uma moeda honesta é jogada 10 vezes. Determine a probabilidade de ocorrência de uma série de 4 caras consecutivas

(a) usando a fórmula deduzida no texto;

(b) usando as equações recursivas deduzidas no texto.

(c) Compare a sua resposta com aquela dada pela aproximação de Poisson.

Solução:

(a) Do exemplo 7d, temos que

$$\begin{aligned}P(L_{10} \geq 4) &= \sum_{r=1}^{7} (-1)^{r+1} \left[\binom{10-4r}{r} + 2\binom{10-4r}{r-1} \right] \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &\approx 0{,}2451.\end{aligned}$$

(b) A equação recursiva é

$$\begin{aligned}P_n &= \sum_{j=1}^{4} P_{n-j}(1/2)^j + (1/2)^k \\ &= P_{n-1}/2 + P_{n-2}/4 + P_{n-3}/8 + (1 + P_{n-4})/16,\end{aligned}$$

com condições iniciais $P_j = 0$ se $j < 4$ e $P_4 = (1/2)^4$. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}P_5 &= 0{,}09375, \\ P_6 &= 0{,}125, \\ P_7 &= 0{,}15625, \\ P_8 &= 0{,}1875, \\ P_9 &= 0{,}216796875, \\ P_{10} &= 0{,}245117187.\end{aligned}$$

(c) Usando a aproximação pela Poisson temos $P(L_{10} < 4) \approx \exp(-10/2^5)$. Logo, $P(L_{10} \geq 4) \approx 1 - \exp(-10/2^5) \approx 0{,}268$.

4.72. Duas equipes de atletismo jogam uma série de partidas; a primeira a ganhar 4 partidas é declarada vencedora. Suponha que uma das equipes seja mais forte do que a outra e que vença cada partida com probabilidade 0,6, independentemente dos resultados das demais partidas. Determine a probabilidade, para $i = 4, 5, 6, 7$, de que a equipe mais forte vença a série em exatamente i partidas. Compare a probabilidade de vitória da equipe mais forte com a probabilidade dela vencer 2 partidas em uma série de 3.

Solução: Seja X_r a variável aleatória que representa o número de partidas até que a equipe mais forte ganhe r partidas, então X_4 segue uma distribuição binomial negativa de parâmetros $p = 0{,}6$ e $r = 4$. Logo,

$$P(X_4 = i) = \binom{i-1}{3} 0{,}6^4\, 0{,}4^{i-4}, \quad i = 4, 5, 6, 7.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
P(X_4 = 4) &= 0{,}1296,\\
P(X_4 = 5) &= 0{,}20736,\\
P(X_4 = 6) &= 0{,}20736,\\
P(X_4 = 7) &= 0{,}165888.
\end{aligned}$$

A probabilidade de vitória é dada por

$$\sum_{i=4}^{7} P(X_4 = i) = 0{,}710208.$$

Enquanto que para o caso da série de 3 a probabilidade de vitória é dada por

$$\sum_{i=2}^{3} P(X_2 = i) = 0{,}648.$$

4.79. Suponha que um conjunto de 100 itens contenha 6 itens defeituosos e 94 que funcionem normalmente. Se X é o número de itens defeituosos em uma amostra de 10 itens escolhidos aleatoriamente do conjunto, determine $P(X = 0)$ e $P(X > 2)$.

Solução: Note que X é uma variável aleatória que segue a distribuição hipergeométrica com parâmetros $N = 100$, $m = 6$ e $n = 10$. Logo,

$$P(X = i) = \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}.$$

Assim, $P(X = 0) \approx 0{,}5223$ e $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0{,}01255$.

4.83. Há três autoestradas em um país. O número de acidentes que ocorrem diariamente nessas autoestradas é uma variável aleatória de Poisson com respectivos parâmetros 0,3, 0,5 e 0,7 Determine o número esperado de acidentes que vão acontecer hoje em qualquer uma dessas autoestradas.

Solução: Sejam X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias que seguem a distribuição de Poisson com parâmetros $\lambda_1 = 0{,}3$, $\lambda_2 = 0{,}5$ e $\lambda_3 = 0{,}7$, respectivamente. Então, o número esperado de acidentes é dado por

$$E[X_1 + X_2 + X_3] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1{,}5.$$

4 Exercícios Teóricos

4.2. Se X tem função distribuição F_X, qual é a função distribuição de e^X?

Solução:

$$F_{e^X}(x) = P(e^X \leq x) = P(X \leq \ln(x)) = F_X(\ln(x)).$$

4.3. Se X tem função distribuição F_X, qual é a função distribuição da variável aleatória $\alpha X + \beta$, onde α e β são constantes, $\alpha \neq 0$.

Solução:

$$F_{\alpha X+\beta}(x) = P(\alpha X + \beta \leq x) = P\left(X \leq \frac{x-\beta}{\alpha}\right) = F_X\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right).$$

4.4. Para uma variável aleatória inteira não negativa N, mostre que

$$E[N] = \sum_{i=1}^{\infty} P(N \geq i).$$

Dica: $\sum_{i=1}^{\infty} P(N \geq i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} P(N = k)$. Agora troque a ordem da soma.

Solução:

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} P(N \geq i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} P(N = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} P(N = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k P(N = k) \\
&= E[N].
\end{aligned}$$

■

4.6. Seja X tal que

$$P(X = 1) = p = 1 - P(X = -1),$$

determine $c \neq 1$ tal que $E[c^X] = 1$.

Solução: Sabemos que $c \neq 0$, pois $E[0^X] = 0$. Então, $E[c^X] = c^1 \cdot p + c^{-1} \cdot (1 - p)$. Queremos que $E[c^X] = 1$, multiplicando ambos lados dessa equação por c e rearranjando-a obtemos uma equação do segundo grau em c,

$$p\,c^2 - c + (1 - p) = 0,$$

cuja solução é

$$c = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1 - p)}}{2p} = \frac{1 \pm |1 - 2p|}{2p}.$$

Dessa forma, as soluções são $c = 1$, que não queremos e $c = \frac{1-p}{p}$.

4.8. Determine $\mathrm{Var}(X)$ se

$$P(X = a) = p = 1 - P(X = b).$$

Solução:

$$\begin{aligned}
E[X] &= a \cdot p + b \cdot (1 - p),\\
E[X^2] &= a^2 \cdot p + b^2 \cdot (1 - p),\\
\mathrm{Var}(X) &= E[X^2] - E[X]^2\\
&= a^2 p(1 - p) + b^2(1 - p)(1 - (1 - p)) - 2\,a\,b\,p(1 - p)\\
&= (a^2 - 2\,a\,b + b^2)\,p(1 - p)\\
&= (a - b)^2\,p(1 - p).
\end{aligned}$$

4.16. Seja X uma variável aleatória de Poisson com parâmetro λ. Mostre que $P(X = i)$ cresce monotonicamente e então decresce monotonicamente à medida que i cresce, atingindo o seu máximo quando i é o maior inteiro não excedendo λ.
Dica: Considere $P(X = i)/P(X = i - 1)$.

Solução:

$$\frac{P(X = i)}{P(X = i - 1)} = \frac{\frac{\lambda^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{i}$$

A sequência $\{\frac{\lambda}{i}\}$ é monótona decrescente em relação à i. Logo, enquanto $\frac{\lambda}{i} \geq 1$, $P(X = i) \geq P(X = i - 1)$ e a probabilidade cresce com i. Mas, quando $\frac{\lambda}{i} < 1$, $P(X = i) < P(X = i - 1)$ e a probabilidade descresce com i. Dessa forma, temos um máximo quando $i = \lfloor \lambda \rfloor$, onde $\lfloor \lambda \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual à λ.

4.18. Seja X uma variável aleatória de Poisson com parâmetro λ. Que valor de λ maximiza $P(X = k)$, $k \geq 0$?

Solução: Seja $\lambda > 0$. Sabemos que $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$. Para maximizar essa quantidade, que é função de λ, vamos achar o ponto crítico, isto é, quando a derivada dessa função em relação à λ se anula. A derivada é dada por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right) = \left(1 - \frac{\lambda}{k}\right)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

É fácil ver que essa função se anula quando $\lambda = k$. Para verificarmos que é um ponto de máximo, basta notar que essa função é maior que 0 quando $\lambda < k$ e é menor que 0 quando $\lambda > k$.

Desafio!

1. No dia do exame de Probabilidade I, o PED ficou responsável por distribuir as provas. Porém, ele se esqueceu que eram m tipos de provas diferentes e distribuiu-as ao acaso. Sabe-se que foram impressas n provas de cada tipo e todas as provas foram entregues aos nm alunos. Por simplicidade, assuma que os alunos foram arranjados em uma sequência linear. Calcule o número esperado de

   (a) alunos que possuam algum vizinho com o mesmo tipo de prova;

   (b) blocos de alunos com a mesma prova. Por exemplo, se a sequência linear de tipos de prova for 1112212, então temos os blocos 111, 22, 1 e 2, totalizando 4 blocos.