实验报告一

飞机的降落曲线实验

浦岸峰　2013141463103
陈南骁　2013141463162
杨昕炜　2012141463015
石佳影　2013141463070
刘晓梅　2013141463211

1 实验课题

在研究飞机的自动着陆系统时,技术人员需要分析飞机的降落曲线.根据经验,一架水平飞行的飞机,其降落曲线是一个三次多项式.设飞机飞行的高度为h,飞机着陆点为原点,且在整个着陆过程中,飞机始终保持水平飞行姿势,且水平速度保持为常数.出于安全考虑,飞机垂直加速度的最大绝对值不得超过$g/10$,此处g是重力加速度,进行以下实验:

1. 若飞机从距降落点水平距离l处开始降落,确定飞机的降落曲线.假设飞机降落参数为:飞机的水平速度$u = 540\text{km}$,$h = 10\text{km}$,$l = 80\text{km}$,绘出飞机降落曲线图形.
2. 求出飞机能够安全降落时水平距离所能允许的最小值.
3. 假设飞机跑道长度为3.6km,已知飞机着陆后匀减速在跑道上滑行,直到完全停下,应用上面给出的飞行参数模拟飞机降落的全过程.

2 问题一

2.1 参数和变量列表

表一　实验一参数变量表

符号	含义
l	飞机距降落点的水平距离
h	飞机的初始飞行高度
x	飞机位置的横坐标
$f(x), y$	飞机纵坐标关于横坐标x的函数
g	重力加速度

2.2 数学推导

设飞机的降落曲线为$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,以飞机着陆点为原点建立平面坐标系,则有

$$f(-l) = h, f(0) = 0. \tag{1}$$

又因为飞机在降落过程中始终保持水平飞行,故有

$$f'(-l) = 0, f'(0) = 0. \tag{2}$$

由(1)和(2)得$a = 2h/l^3$,$b = 3h/l^2$,$c = 0$,$d = 0$.所以飞机的降落曲线为

$$f(x) = \frac{2h}{l^3}x^3 + \frac{3h}{l^2}x^2. \tag{3}$$

代入u,h,l的具体数值,我们得到$f(x)$的数值表达式

$$f(x) = \frac{1}{25600}x^3 + \frac{3}{640}x^2.$$

2.3 算法实现

MATLAB提供了solve函数可以帮助我们完成方程的求解.

```
R = solve(A*(-l)^3+B*(-l)^2+C*(-l)+D==h,D==0,...
    3*A*(-l)^2+2*B*(-l)+C==0,C==0,A,B,C,D);
r1 = double(subs(R.A,{l,h},{80,10}));
r2 = double(subs(R.B,{l,h},{80,10}));
r3 = double(subs(R.C,{l,h},{80,10}));
r4 = double(subs(R.D,{l,h},{80,10}));
F = [r1 r2 r3 r4]
```

其中R是一个表示计算结果的向量,其中每一个元素都是关于l和h的.此时我们把$l=80$km和$h=10$km代入R的四个分量就可以得到F.F是一个表示$f(x)$的多项式系数的矩阵.

3 问题二

3.1 参数和变量列表

表二 实验二参数变量表

符号	含义
l	飞机距降落点的水平距离
u	飞机在水平方向上的速度
v	飞机在垂直方向上的速度
h	飞机的初始飞行高度
x	飞机位置的横坐标
$f(x),y$	飞机纵坐标关于横坐标x的函数
g	重力加速度
a_y	飞机在点(x,y)处的垂直加速度
l_{min}	飞机能够安全降落所允许的最小水平距离

3.2 数学推导

由题意我们知道飞机在平方向上的速度$u=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$为常数.根据复合函数求导法则对(3)关于$t$求导，得飞机在垂直方向上的速度

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{4}$$

对(4)关于t再求导,我们可以得到飞机在点(x,y)处的垂直加速度

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{u\mathrm{d}(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}t}=u^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{6hu^2}{l^3}(l+2x). \tag{5}$$

又飞机在降落过程中有$x\leqslant 0$恒成立,由(5)易知当$x=0$时a_y取到最大值$\dfrac{6hu^2}{l^2}$.又由题意,为使乘客感到舒适,降落全过程中,加速度a_y不能超过$g/10$.所以有

$$\frac{6hu^2}{l^2}\leqslant\frac{g}{10}. \tag{6}$$

由(6)我们可以得到水平距离l可以取到的最小值

$$l_{min} = 2\sqrt{\frac{15h}{g}}u. \tag{7}$$

把u,h,g的值带入(7),我们得到飞机能够安全降落时水平距离的最小值

$$l_{min} = 37.1154\text{km}.$$

3.3 算法实现

由于MATLAB求解含待定系数和约束条件的不等式的能力不够完美,这里采用的是先把不等式转化成等式,再使用solve函数求解的方法.

```
l_min = solve(subs(6*h*u^2/l^2+12*h*u^2*x/l^3==g/10,x,0),l);
l_min = vpa(subs(l_min(1),{h,u,g},{10,540/3600,0.0098}))
```

按照上面的程序求得的l_{min}有两个,一正一负.由题意我们保留正根,舍去负根.

4 问题三

4.1 参数和变量列表

表三 实验三参数变量表

符号	含义
l	飞机距降落点的水平距离
u	飞机在水平方向上的速度
x	飞机位置的横坐标
$f(x), y$	飞机纵坐标关于横坐标x的函数
t	飞机在跑道上的滑行时间
$x(t)$	飞机横坐标坐标关于滑行时间t的函数
T_1	飞机的着陆时间（不包括在跑道上的滑行时间）
T_2	飞机的滑行总时间
d	飞机跑道的长度
a	飞机匀减速滑行的加速度

4.2 数学推导

飞机的整个降落过程包括两个阶段:降落阶段和滑行阶段.降落阶段的曲线已由前面的实验求出,并且易求得降落时间$T_1 = l/u$.现在求滑行阶段的曲线.由于在滑行阶段飞机没有竖直方向上的位移,我们只需要考虑飞机的水平位移x和时间t的关系,记为$x(t)$.根据物理学匀减速运行公式,我们设加速度为飞机加速度为a,所以有

$$x(t) = ut - \frac{1}{2}at^2. \tag{8}$$

设飞机滑行时间为T_2,由题设条件不难得到

$$x(T_2) = d, x'(T_2) = 0. \tag{9}$$

解(8)(9)得飞机的滑行方程

$$x(t) = ut - \frac{u^2}{4d}t^2. \tag{10}$$

把u,d的数值代入(10),所以我们有

$$x(t) = 540t - 20250t^2.$$

4.3 算法实现

首先使用solve解出飞机滑行时间和加速度.进而我们可以求出飞机的纵坐标和横坐标关于t的函数关系,为作图做准备.

```
Q = solve(u*T-a*T^2/2==d,u-a*T==0,a,T);
q1 = double(subs(Q.a,{d,u},{3.6,540}));
q2 = double(subs(Q.T,{d,u},{3.6,540}));

F_x_t = [540 -80];
F_y_t = sym2poly(subs(3*h*x^2/l^2+2*h*x^3/l^3,...
    {h,x,l},{10,540*t-80,80}));

G_x_t = [-540^2/(4*3.6) 540 0];
G_y_t = 0;
```

分两段画出$f(x)$的图像,第一段表示飞机的降落曲线,第二段表示飞机的滑行曲线.

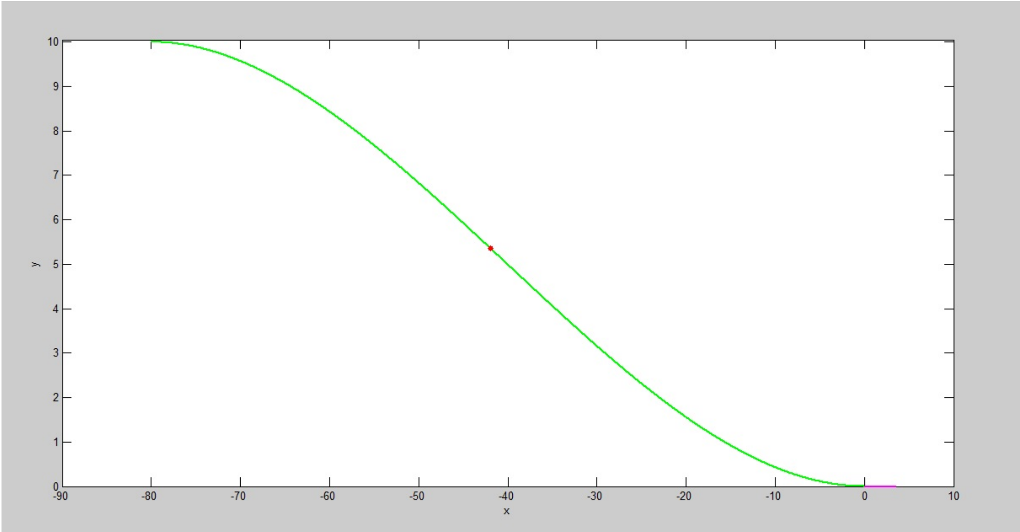
```
xx = linspace(-80,0,5000);
yy = polyval(F,xx);
g1 = plot(xx,yy);
hold on;

xx = linspace(0,3.6,300);
yy = polyval(G,xx);
g2 = plot(xx,yy);
hold on;
```

使用如下的While循环可以画出动点模拟飞机的降落.

```
while 1
    if ¬ishandle(h),return,end
    if (t<T1)
        set(p1,'xdata',polyval(F_x_t,t),'ydata',polyval(F_y_t,t));
    elseif ( t≥T1 && t≤T2 )
        set(p1,'xdata',polyval(G_x_t,(t-T1)),'ydata',...
        polyval(G_y_t,(t-T1)));
    else
        t = 0;
    end
    t = t + dt;
    drawnow
end
```

最后我们可以得到飞机降落过程的模拟图.



图一 飞机降落曲线动态模拟截图

在图一中绿色的曲线表示飞机在空中的运动轨线,红色的曲线表示飞机在跑道上的运动轨线,红点表示飞机的位置.

5 实验总结

本实验主题是飞机降落曲线的求解和降落过程的模拟,并涉及多项式计算和微分方程求解,并考察了较多MATLAB操作,如解方程和作曲线图.

从数值计算和算法设计角度来看,本实验难度不高,但涉及了不少MATLAB基本操作,并不是毫无工作量的.

此外,在这次实验中,MATLAB也暴露出它较之于MATHEMATICA和MAPLE的一些不足,比如在求解待定系数不等式方面.

6 附录

Lab01.m 源代码

```
syms x;
syms A;
syms B;
syms C;
syms D;
syms l;
syms h;
syms u;
syms g;
syms T;
syms a;
syms d;
syms t;
format long;

R = solve(A*(-l)^3+B*(-l)^2+C*(-l)+D==h,D==0,...
     3*A*(-l)^2+2*B*(-l)+C==0,C==0,A,B,C,D);
r1 = double(subs(R.A,{l,h},{80,10}));
r2 = double(subs(R.B,{l,h},{80,10}));
```

```
r3 = double(subs(R.C,{l,h},{80,10}));
r4 = double(subs(R.D,{l,h},{80,10}));
F = [r1 r2 r3 r4]

l_min = solve(subs(6*h*u^2/l^2+12*h*u^2*x/l^3==g/10,x,0),l);
l_min = vpa(subs(l_min(1),{h,u,g},{10,540/3600,0.0098}))

Q = solve(u*T-a*T^2/2==d,u-a*T==0,a,T);
q1 = double(subs(Q.a,{d,u},{3.6,540}));
q2 = double(subs(Q.T,{d,u},{3.6,540}));
G = 0;
T1 = double(80/540);
T2 = T1+q2;

F_x_t = [540 -80];
F_y_t = sym2poly(subs(3*h*x^2/l^2+2*h*x^3/l^3,...
    {h,x,l},{10,540*t-80,80}));

G_x_t = [-540^2/(4*3.6) 540 0];
G_y_t = 0;

h=figure('numbertitle','off','name',' Lab01');

xx = linspace(-80,0,5000);
yy = polyval(F,xx);
g1 = plot(xx,yy);
hold on;

xx = linspace(0,3.6,300);
yy = polyval(G,xx);
g2 = plot(xx,yy);
hold on;

set(g1,'Linestyle','-','color','g','Linewidth',1.5);
set(g2,'Linestyle','-','color','m','Linewidth',1.5);
xlabel('x');
ylabel('y');
axis([-90,10,0,10.05]);

x0 = -80;
y0 = 10;
p1 = plot(x0,y0,'color','r','marker','.','markersize',15);
t = 0;
dt = double(80/540000);
while 1
    if ¬ishandle(h),return,end
    if (t<T1)
        set(p1,'xdata',polyval(F_x_t,t),'ydata',polyval(F_y_t,t));
    elseif ( t≥T1 && t≤T2 )
        set(p1,'xdata',polyval(G_x_t,(t-T1)),'ydata',...
        polyval(G_y_t,(t-T1)));
    else
        t = 0;
    end
    t = t + dt;
    drawnow
end
```