

1 实验课题

在研究飞机的自动着陆系统时,技术人员需要分析飞机的降落曲线.根据经验,一架水平飞行的飞机,其降落曲线是一个三次多项式.设飞机飞行的高度为 h ,飞机着陆点为原点,且在整个着陆过程中,飞机始终保持水平飞行姿势,且水平速度保持为常数.出于安全考虑,飞机垂直加速度的最大绝对值不得超过 $g/10$,此处 g 是重力加速度,进行以下实验:

1. 若飞机从距降落点水平距离 l 处开始降落,确定飞机的降落曲线.假设飞机降落参数为:飞机的水平速度 $u = 540\text{km}$, $h = 10\text{km}$, $l = 80\text{km}$,绘出飞机降落曲线图形.
2. 求出飞机能够安全降落时水平距离所能允许的最小值.
3. 假设飞机跑道长度为 3.6km ,已知飞机着陆后匀减速在跑道上滑行,直到完全停下,应用上面给出的飞行参数模拟飞机降落的全过程.

2 问题一

2.1 参数和变量列表

表一 实验一参数变量表

符号	含义
l	飞机距降落点的水平距离
h	飞机的初始飞行高度
x	飞机位置的横坐标
$f(x), y$	飞机纵坐标关于横坐标 x 的函数
g	重力加速度

2.2 数学推导

设飞机的降落曲线为 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,以飞机着陆点为原点建立平面坐标系,则有

$$f(-l) = h, f(0) = 0. \quad (1)$$

又因为飞机在降落过程中始终保持水平飞行,故有

$$f'(-l) = 0, f'(0) = 0. \quad (2)$$

由(??)和(??)得 $a = 2h/l^3, b = 3h/l^2, c = 0, d = 0$.所以飞机的降落曲线为

$$f(x) = \frac{2h}{l^3}x^3 + \frac{3h}{l^2}x^2. \quad (3)$$

代入 u, h, l 的具体数值,我们得到 $f(x)$ 的数值表达式

$$f(x) = \frac{1}{25600}x^3 + \frac{3}{640}x^2.$$

2.3 算法实现

MATLAB提供了solve函数可以帮助我们完成方程的求解.

```
1 R = solve(A*(-l)^3+B*(-l)^2+C*(-l)+D==h,D==0,...
2          3*A*(-l)^2+2*B*(-l)+C==0,C==0,A,B,C,D);
3 r1 = double(subs(R.A,{l,h},{80,10}));
4 r2 = double(subs(R.B,{l,h},{80,10}));
5 r3 = double(subs(R.C,{l,h},{80,10}));
6 r4 = double(subs(R.D,{l,h},{80,10}));
7 F = [r1 r2 r3 r4]
```

其中 R 是一个表示计算结果的向量,其中每一个元素都是关于 l 和 h 的.此时我们把 $l = 80\text{km}$ 和 $h = 10\text{km}$ 代入 R 的四个分量就可以得到 F . F 是一个表示 $f(x)$ 的多项式系数的矩阵.

3 问题二

3.1 参数和变量列表

表二 实验二参数变量表

符号	含义
l	飞机距降落点的水平距离
u	飞机在水平方向上的速度
v	飞机在垂直方向上的速度
h	飞机的初始飞行高度
x	飞机位置的横坐标
$f(x), y$	飞机纵坐标关于横坐标 x 的函数
g	重力加速度
a_y	飞机在点 (x, y) 处的垂直加速度
l_{min}	飞机能够安全降落所允许的最小水平距离

3.2 数学推导

由题意我们知道飞机在平方向上的速度 $u = \frac{dx}{dt}$ 为常数.根据复合函数求导法则对(??)关于 t 求导,得飞机在垂直方向上的速度

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = u \frac{dy}{dx}. \quad (4)$$

对(??)关于 t 再求导,我们可以得到飞机在点 (x, y) 处的垂直加速度

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{ud(\frac{dy}{dx})}{dt} = u^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6hu^2}{l^3}(l+2x). \quad (5)$$

又飞机在降落过程中有 $x \leq 0$ 恒成立,由(??)易知当 $x = 0$ 时 a_y 取到最大值 $\frac{6hu^2}{l^2}$.又由题意,为使乘客感到舒适,降落全过程中,加速度 a_y 不能超过 $g/10$.所以有

$$\frac{6hu^2}{l^2} \leq \frac{g}{10}. \quad (6)$$

由(??)我们可以得到水平距离 l 可以取到的最小值

$$l_{min} = 2\sqrt{\frac{15h}{g}}u. \quad (7)$$

把 u, h, g 的值带入(??),我们得到飞机能够安全降落时水平距离的最小值

$$l_{min} = 37.1154\text{km}.$$

3.3 算法实现

由于MATLAB求解含待定系数和约束条件的不等式的能力不够完美,这里采用的是先把不等式转化成等式,再使用solve函数求解的方法.

```
1 l_min = solve(subs(6*h*u^2/l^2+12*h*u^2*x/l^3==g/10,x,0),l);
2 l_min = vpa(subs(l_min(1),{h,u,g},{10,540/3600,0.0098}))
```

按照上面的程序求得的 l_{min} 有两个,一正一负.由题意我们保留正根,舍去负根.

4 问题三

4.1 参数和变量列表

表三 实验三参数变量表

符号	含义
l	飞机距降落点的水平距离
u	飞机在水平方向上的速度
x	飞机位置的横坐标
$f(x), y$	飞机纵坐标关于横坐标 x 的函数
t	飞机在跑道上的滑行时间
$x(t)$	飞机横坐标坐标关于滑行时间 t 的函数
T_1	飞机的着陆时间 (不包括在跑道上的滑行时间)
T_2	飞机的滑行总时间
d	飞机跑道的长度
a	飞机匀减速滑行的加速度

4.2 数学推导

飞机的整个降落过程包括两个阶段:降落阶段和滑行阶段.降落阶段的曲线已由前面的实验求出,并且易求得降落时间 $T_1 = l/u$.现在求滑行阶段的曲线.由于在滑行阶段飞机没有竖直方向上的位移,我们只需要考虑飞机的水平位移 x 和时间 t 的关系,记为 $x(t)$.根据物理学匀减速运行公式,我们设加速度为飞机加速度为 a ,所以有

$$x(t) = ut - \frac{1}{2}at^2. \quad (8)$$

设飞机滑行时间为 T_2 ,由题设条件不难得到

$$x(T_2) = d, x'(T_2) = 0. \quad (9)$$

解(??)(??)得飞机的滑行方程

$$x(t) = ut - \frac{u^2}{4d}t^2. \quad (10)$$

把 u, d 的数值代入(??),所以我们有

$$x(t) = 540t - 20250t^2.$$

4.3 算法实现

首先使用solve解出飞机滑行时间和加速度.进而我们可以求出飞机的纵坐标和横坐标关于 t 的函数关系,为作图做准备.

```
1 Q = solve(u*T-a*T^2/2==d,u-a*T==0,a,T);
2 q1 = double(subs(Q.a,{d,u},{3.6,540}));
3 q2 = double(subs(Q.T,{d,u},{3.6,540}));
4
5 F_x_t = [540 -80];
6 F_y_t = sym2poly(subs(3*h*x^2/l^2+2*h*x^3/l^3,...
7     {h,x,l},{10,540*t-80,80}));
8
9 G_x_t = [-540^2/(4*3.6) 540 0];
10 G_y_t = 0;
```

分两段画出 $f(x)$ 的图像,第一段表示飞机的降落曲线,第二段表示飞机的滑行曲线.

```
1 xx = linspace(-80,0,5000);
2 yy = polyval(F,xx);
3 g1 = plot(xx,yy);
4 hold on;
5
6 xx = linspace(0,3.6,300);
7 yy = polyval(G,xx);
8 g2 = plot(xx,yy);
9 hold on;
```

使用如下的While循环可以画出动点模拟飞机的降落.

```
1 while 1
2     if ~ishandle(h), return, end
3     if (t<T1)
4         set(p1,'xdata',polyval(F_x_t,t),'ydata',polyval(F_y_t,t));
5     elseif ( t≥T1 && t≤T2 )
6         set(p1,'xdata',polyval(G_x_t,(t-T1)),'ydata',...
7             polyval(G_y_t,(t-T1)));
8     else
9         t = 0;
10    end
11    t = t + dt;
12    drawnow
13 end
```

最后我们可以得到飞机降落过程的模拟图.

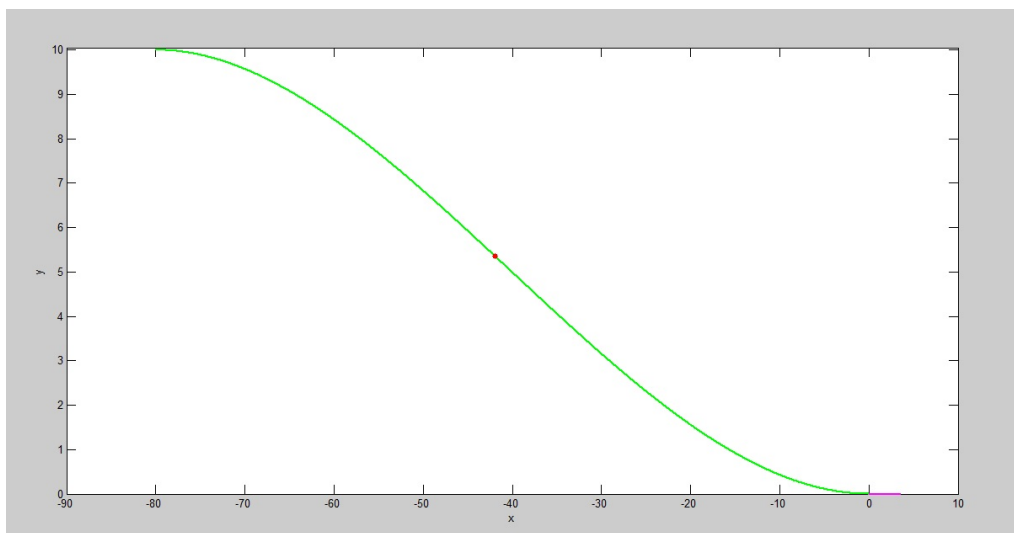


图1 飞机降落曲线动态模拟截图

在图1中绿色的曲线表示飞机在空中的运动轨线,红色的曲线表示飞机在跑道上的运动轨线,红点表示飞机的位置.

5 实验总结

本实验主题是飞机降落曲线的求解和降落过程的模拟,并涉及多项式计算和微分方程求解,并考察了较多MATLAB操作,如解方程和作曲线图.

从数值计算和算法设计角度来看,本实验难度不高,但涉及了不少MATLAB基本操作,并不是毫无工作量的.

此外,在这次实验中,MATLAB也暴露出它较之于MATHEMATICA和MAPLE的一些不足,比如在求解待定系数不等式方面.

6 附录

Lab01.m 源代码

```

1 syms x;
2 syms A;
3 syms B;
4 syms C;
5 syms D;
6 syms l;
7 syms h;
8 syms u;
9 syms g;
10 syms T;
11 syms a;
12 syms d;
13 syms t;
14 format long;
15
16 R = solve(A*(-l)^3+B*(-l)^2+C*(-l)+D==h,D==0,...
17          3*A*(-l)^2+2*B*(-l)+C==0,C==0,A,B,C,D);
18 r1 = double(subs(R.A,{1,h},{80,10}));
19 r2 = double(subs(R.B,{1,h},{80,10}));

```

```

20 r3 = double(subs(R.C,{l,h},{80,10}));
21 r4 = double(subs(R.D,{l,h},{80,10}));
22 F = [r1 r2 r3 r4]
23
24 l_min = solve(subs(6*h*u^2/l^2+12*h*u^2*x/l^3==g/10,x,0),l);
25 l_min = vpa(subs(l_min(1),{h,u,g},{10,540/3600,0.0098}))
26
27 Q = solve(u*T-a*T^2/2==d,u-a*T==0,a,T);
28 q1 = double(subs(Q.a,{d,u},{3.6,540}));
29 q2 = double(subs(Q.T,{d,u},{3.6,540}));
30 G = 0;
31 T1 = double(80/540);
32 T2 = T1+q2;
33
34 F_x_t = [540 -80];
35 F_y_t = sym2poly(subs(3*h*x^2/l^2+2*h*x^3/l^3,...
36     {h,x,l},{10,540*t-80,80}));
37
38 G_x_t = [-540^2/(4*3.6) 540 0];
39 G_y_t = 0;
40
41 h=figure('numbertitle','off','name',' Lab01');
42
43 xx = linspace(-80,0,5000);
44 yy = polyval(F,xx);
45 g1 = plot(xx,yy);
46 hold on;
47
48 xx = linspace(0,3.6,300);
49 yy = polyval(G,xx);
50 g2 = plot(xx,yy);
51 hold on;
52
53 set(g1,'LineStyle','-','color','g','Linewidth',1.5);
54 set(g2,'LineStyle','-','color','m','Linewidth',1.5);
55 xlabel('x');
56 ylabel('y');
57 axis([-90,10,0,10.05]);
58
59 x0 = -80;
60 y0 = 10;
61 p1 = plot(x0,y0,'color','r','marker','.', 'markersize',15);
62 t = 0;
63 dt = double(80/540000);
64 while 1
65     if ~ishandle(h), return, end
66     if (t<T1)
67         set(p1,'xdata',polyval(F_x_t,t),'ydata',polyval(F_y_t,t));
68     elseif ( t≥T1 && t≤T2 )
69         set(p1,'xdata',polyval(G_x_t, (t-T1)), 'ydata',...
70             polyval(G_y_t, (t-T1)));
71     else
72         t = 0;
73     end
74     t = t + dt;
75     drawnow
76 end

```