1 实验课题

在调和级数$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots)$中,将分母的十进制表示中含有数字9的项去掉,由此得到的级数是收敛的还是发散呢?

1. 请用最小二乘法拟合猜测该技术的收敛性.
2. 从理论上研究该级数的收敛性.

2 级数拟合

2.1 实验思路

拟合该级数的步骤如下:

1. 首先,求出该级数在1到10^8的500个点;
2. 接着用500个点的前100个点进行拟合;
3. 最后画出级数和拟合曲线在1到10^8的图像;
4. 分析图像并进行分析和预测.

2.2 算法简介

从实验的目的来看本实验实质上不涉及算法内容,但实施实验需要计算大量的点.当点的数量级扩大到10^7乃至10^8时,一般的遍历算法很难达到速度要求.所以我们需要改进求点的算法来加快求散点的速度.下面给出的是最朴素的算法1,通过一个for循环遍历点并剔除含有数字9的项.

```
for i = 1:c
    if  isempty(regexp(num2str(i), '9','ONCE'))
        s = s + 1/i;
    end
    if ¬mod(i,step)
        Pts(:,i) = [i;s];
    end
end
```

通过MATLAB提供的tic和toc我们可以得到上述算法的运行时间.当我们取10^6作为输入时,上面的循环大约会花费60多秒.又因为这个算法的时间开销是随输入规模线性增长的,所以如果取10^8作为输入那至少需要花费6000多秒,也就是近2小时!

接下来我们要做的就是分析实验的目的,并根据实验的目的重新看待这个问题.事实上,我们只需要完成以下三件事:

1. 从一堆整数中去掉含有数字9的项;
2. 对余下的整数的导数进行求和;
3. 以一定的步长取出和,并用来绘制散点及预测.

算法2对输入数据规模做规定,只允许10^k的输入(由于计算机内存限制,k最多取8).它首先生成了一个元素从0到10^k-1的矩阵.

$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & \cdots & 9 & 10 & \cdots & 88 & 89 & \cdots & 99 \\
100 & 101 & \cdots & 109 & 110 & \cdots & 188 & 189 & \cdots & 199 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
8900 & 8901 & \cdots & 8909 & 8910 & \cdots & 8988 & 8989 & \cdots & 8999 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
9900 & 9901 & \cdots & 9909 & 9910 & \cdots & 9988 & 9989 & \cdots & 9999
\end{bmatrix}
$$

接下来以上面100×100的矩阵为例(对应输入数量级为10^4),记该矩阵为$\boldsymbol{A}$,并记$\boldsymbol{A}$的第i行第j列元素为$\boldsymbol{A}(i,j)$,那么我们有

1. 若$\boldsymbol{A}(1,j)$的个位或十位含9,那么$\boldsymbol{A}(k,j)$也含9.$(k=2,3,\cdots,100)$
2. 若$\boldsymbol{A}(i,1)$的百位或千位含9,那么$\boldsymbol{A}(i,k)$也含9.$(k=2,3,\cdots,100)$
3. 记P为所有使$\boldsymbol{A}(1,j)$的个位或十位含9的所有j的取值集合,Q为所有使$\boldsymbol{A}(i,1)$的百位或千位含9的所有i的取值集合,则$P=Q$.

事实上当$\boldsymbol{A}(1,j)$不为方阵时也有类似结论(由于行数和列数不同,需要调整第三条性质).一般的,对于10^k的数量级的输入,我们可以构造一个m行n列的矩阵$\boldsymbol{A}$,其中$m=\lfloor 10^{k/2}\rfloor$, $n=\lceil 10^{k/2}\rceil$.所以$\boldsymbol{A}$满足

1. 若$\boldsymbol{A}(1,j)$的个位或十位含9,那么$\boldsymbol{A}(k,j)$也含9.$(k=2,3,\cdots,n)$
2. 若$\boldsymbol{A}(i,1)$的百位或千位含9,那么$\boldsymbol{A}(i,k)$也含9.$(k=2,3,\cdots,m)$
3. 记P为所有使$\boldsymbol{A}(1,j)$的个位或十位含9的所有j的取值集合,Q为所有使$\boldsymbol{A}(i,1)$的百位或千位含9的所有i的取值集合,则$P\supseteq Q$.

因此,对于10^k的输入,我们只要生成对应矩阵,并对矩阵的第一行的$10^{\lceil k/2\rceil}$个元素做一次遍历,就能剔除所有包含9的数字.实现该算法比较关键的MATLAB代码如下:

首先生成矩阵,

```
cSize = 10^ceil(index/2);
rSize = 10^floor(index/2);
I = bsxfun(@plus, 0:cSize-1, cSize*(0:rSize-1)');
```

接着遍历矩阵第一行找到所有个位或十位含有数字9的列,

```
for i = 1:cSize
    if ¬isempty(regexp(num2str(I(1,i)), '9','ONCE'))
        C(i) = i;
    end
end
```

最后删除由含9的数字组成的行和列.

```
I(:,dCln) = [];
I(dRow,:) = [];
```

至此,我们已经把含有9的数字去掉了,接着我们直接在矩阵中按行求和(注意把0置为正无穷).

```
I(1,1) = inf;
for i = 1:step:rSize
    Pts(:,i) = [I(i,end);sum(sum(1./I(1:i,:)))];
end
```

最后,根据一定的步长取出数据点用于拟合.我们使用$f(x)=ae^{-22/\ln x+b}+c$作为拟合函数进行最小二乘拟合.其中-22这个系数是根据实现效果得到的.如果把这个常数作为参数进行拟合不能达到理想的实验效果(在这种情况下当数字变大时拟合函数不总是大于数据点).

```
F=inline('beta(1).*exp(-22./log(x)+beta(2))+beta(3)','beta','x');
beta = nlinfit(X(1:100),Y(1:100),F,[0 0 0])
a = beta(1);
b = beta(2);
c = beta(3);
```

2.3 实验结果

第一个算法较慢,但如果输入规模为10^7,那10多分钟的计算时间我们还是可以接受的.绘制出的散点图如图1.观察图1的散点我们发现该级数的增长越来越慢,似乎存在上界,所以我们可以使用一个别的函数曲线来拟合这些散点来加强猜想的可信度.

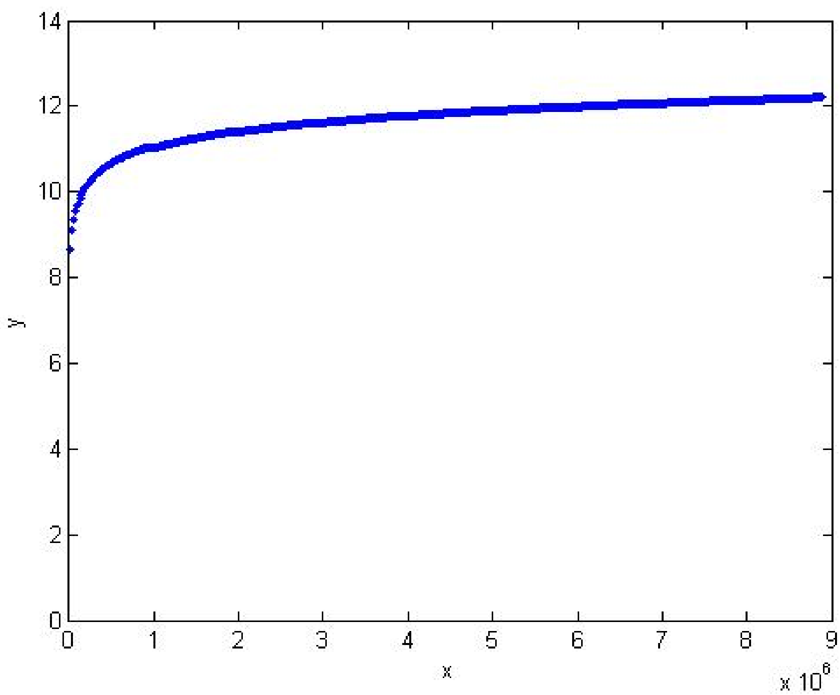

图1 算法1在输入规模为10^7时绘制的散点图

取出算法2计算的散点中小于10^7的部分，并对其进行最小二乘拟合,我们可以得到拟合曲线的表达式

$$f(x)=23.571620e^{-22/\ln x-0.012688}+6.291245.$$

接着我们画出0到10^8范围内的散点和$f(x)$曲线.

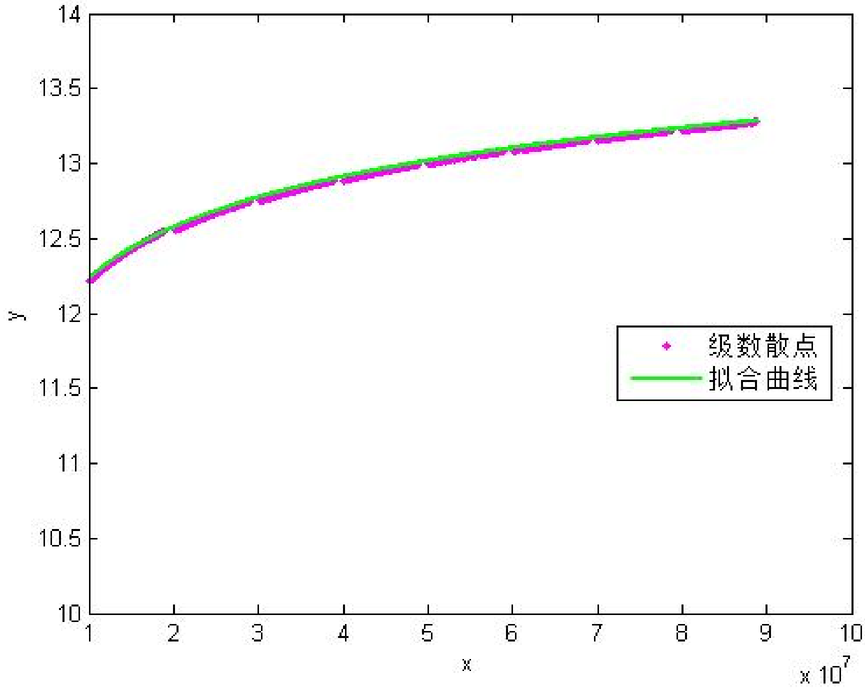

图2 算法2计算的散点和拟合曲线

从图像我们发现当x增大时,散点位置都在拟合曲线$f(x)$的下方.此外,当x趋于正无穷时我们有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 23.571620 + 6.291245 = 29.682825.$$

所以,我们可以猜测原级数收敛,且极限不大于$f(x)$的极限29.682825.

3 理论研究

3.1 原命题的研究

现给出如下命题:

在调合级数$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots)$中,将分母的十进制表示中含有数字9的项去掉,由此得到的新级数收敛.

证明如下:

对一个m位的正整数,它的第1位可以从除0和9外的8个数中取,它的后$(m-1)$位可以从9外的9个数中取.因此,共有$8\times 9^{m-1}$个m位正整数.

此外,不难得到这样的m位正整数中最小的数是10^{m-1}.记所有不含9的m位正整数的倒数和为S_m,那么我们有

$$S_m \leqslant 8\times 9^{m-1}\times\frac{1}{10^{m-1}} = 8(\frac{9}{10})^{m-1}.$$

同时,我们可以把原级数表示为S_m在1到∞的累加,即

$$\sum_{m=1}^{\infty} S_m \leqslant 8\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{9}{10})^{m-1} = 80.$$

所以原级数单调递增,且有上界80,为收敛级数,原命题得证.

3.2 命题拓展一

现修改原命题如下:

在调合级数$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots)$中,将分母的十进制表示中含有数字$a$的项去掉,其中$a\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,由此得到的新级数收敛.

证明如下:

考虑所有不包含a的正m位数K:

1. 若$a=0$,K的第n位可以取1到9中的任意数,其中$n=1,2,\cdots,m$.所以符合条件的正m位数K的个数是9^m.
2. 若$a\neq 0$,K的第1位可以取1到9中不包含n的任意数,第n位可以取0到9中不包含a的任意数,其中$n=2,3,\cdots,m$.所以K的个数是$8\times 9^{m-1}$.

故K的个数不多于9^m.对所有这样的正整数K都有$K\geqslant 10^{m-1}$.记这些数的倒数和为S_m,那么有

$$S_m \leqslant 9^m \times \frac{1}{10^{m-1}} = 9(\frac{9}{10})^{m-1}.$$

把新级数表示为S_m在1到∞的累加,则有

$$\sum_{m=1}^{\infty} S_m \leqslant 9\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{9}{10})^{m-1} = 90.$$

所以新级数单调递增,且有上界90,为收敛级数,从而新命题结论正确.

3.3 命题拓展二

现考虑把原命题推广到p级数,并给出如下命题:

在p级数$(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots)$中,将分母的十进制表示中含有数字$a$的项去掉,其中$a\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.由此得到的新级数:

$$\text{收敛,当}p>\log_{10}9;\text{发散,当}p\leqslant\log_{10}9.$$

现给出证明如下:

若$p>1$,原p级数收敛.又新级数和p级数都为无穷正项级数,由比较审敛法易证新级数收敛.

若$p=1$,原p级数即为调合级数,由命题拓展一中结论知新级数收敛.

若$p<1$,由命题拓展一中结论,我们有m位正整数K的个数不少于$8\times 9^{m-1}$,且不多于9^m.

另外,我们还可以得到$10^{m-1} \leqslant K < 10^m$.现对所有这样的$m$位正整数$K$的$p$次方的倒数求和,记为$S_m$,那么有

$$S_m \leqslant 9^m \times \frac{1}{(10^{m-1})^p} = \frac{10^{m\log_{10}9}}{10^{p(m-1)}} = (\frac{1}{10})^{(p-\log_{10}9)m-p}.$$

当$p > \log_{10}9$时,在1到∞对S_m进行累加,则有

$$\sum_{m=1}^{\infty} S_m \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}(\frac{1}{10})^{(p-\log_{10}9)m-p} = 9(\frac{1}{10})^{-p}.$$

所以新级数单调递增,且有上界$9(1/10)^{-p}$,为收敛级数由此,命题的前半部分得证.下面我们继续证明命题的后半部分.事实上根据已知结论,我们还能找出有关S_m的类似不等关系

$$S_m > 8 \times 9^{m-1} \times \frac{1}{(10^m)^p} = \frac{8}{9} \times 10^{m\log_{10}9} \times \frac{1}{10^{mp}} = \frac{8}{9} \times 10^{(\log_{10}9-p)m}.$$

记$T_m = 8/9 \times 10^{(\log_{10}9-p)m}$,那么$T_m$为首项$T_1 = 8/9$,公比$q = 10^{(\log_{10}9-p)}$的等比数列.若$p \leqslant \log_{10}9$,我们有公比$q \geqslant 1$,故正项无穷级数$\sum_{m=1}^{\infty} T_m$发散,所以$\sum_{m=1}^{\infty} S_m$也发散.

因此,$p = \log_{10}9$时,新级数发散,命题的后半部分得证.

综上所述,命题成立.

4 实验结论

5 附录