

# 1 实验课题

常见平面图形的面积计算, 要求绘制出函数的图形, 计算图形封闭部分的面积.

1. 三叶玫瑰线  $r = a \sin 3\theta (a = 3)$ .
2. 四叶玫瑰线  $r = a \cos 2\theta (a = 4)$ .
3. 六叶玫瑰线  $r = a \cos^2 3\theta (a = 2)$ .
4. 双纽线  $r^2 = a^2 \cos 2\theta (a = 2)$ .
5. 笛卡尔叶形线  $x^3 + y^3 = 3axy (a = 2)$ .

## 2 三叶玫瑰线

首先, 在极坐标系下画出三叶玫瑰线的图像, 程序如下:

```
1 rho = 3 * sin(3*theta);  
2 polar(theta, rho);
```

图1是用MATLAB绘制出的三叶玫瑰线图形.

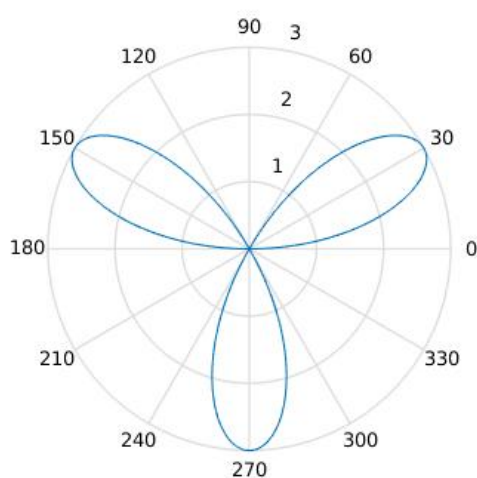


图1 三叶玫瑰线

接着, 求三叶玫瑰线闭合部分的面积, 该面积的表达式为

$$S_1 = 3 \int_0^{\pi/3} \int_0^{a \sin 3\theta} r dr d\theta.$$

计算面积的MATLAB程序如下, 最终得到的计算结果是  $\pi a^2/4$ .

```
1 S1 = 3 * int(int(r, r, 0, a*sin(3*s)), s, 0, pi/3);
```

### 3 四叶玫瑰线

首先, 在极坐标系下画出四叶玫瑰线的图像, 程序如下:

```
1 rho = 4 * cos(2*theta);  
2 polar(theta, rho);
```

图2是用MATLAB绘制出的四叶玫瑰线图形.

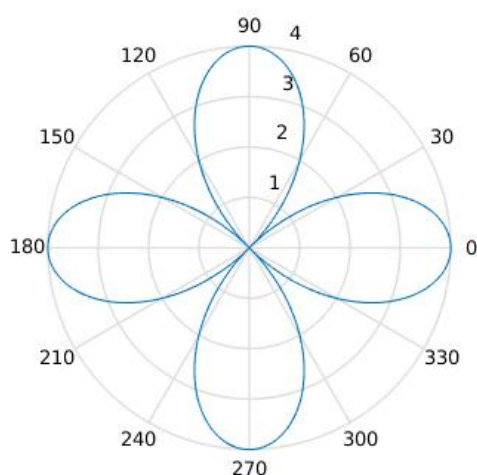


图2 四叶玫瑰线

接着, 求四叶玫瑰线闭合部分的面积, 该面积的表达式为

$$S_2 = 4 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{a \cos 2\theta} r dr d\theta.$$

计算面积的MATLAB程序如下, 最终得到的计算结果是 $\pi a^2/2$ .

```
1 S2 = 4 * int(int(r, r, 0, a*cos(2*s)), s, -pi/4, pi/4);
```

### 4 六叶玫瑰线

首先, 在极坐标系下画出六叶玫瑰线的图像, 程序如下:

```
1 rho = 2 * cos(3*theta).^2;  
2 polar(theta, rho);
```

图3是用MATLAB绘制出的六叶玫瑰线图形.

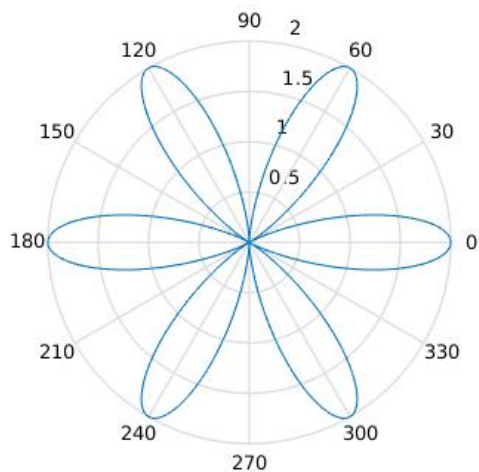


图3 六叶玫瑰线

接着, 求六叶玫瑰线闭合部分的面积, 该面积的表达式为

$$S_3 = 6 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \int_0^{a \cos^2 3\theta} r dr d\theta.$$

计算面积的MATLAB程序如下, 最后得到的计算结果是 $3\pi a^2/8$ .

```
1 S3 = 6 * int(int(r,r,0,a*cos(3*s)^2),s,-pi/6,pi/6);
```

## 5 双纽线

首先, 在极坐标系下画出双纽线的图像, 程序如下:

```
1 rho = 2 * sqrt(cos(2*theta));
2 polar(theta,rho);
```

图4是用MATLAB绘制出的双纽线图形.

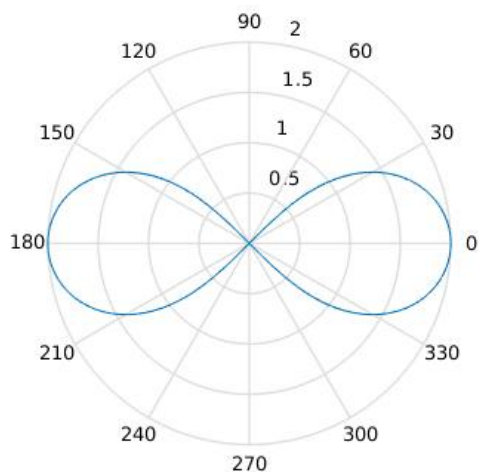


图4 双纽线

接着, 求双纽线闭合部分的面积, 该面积的表达式为

$$S_4 = 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r dr d\theta.$$

计算面积的MATLAB程序如下, 最后得到的计算结果是 $a^2$ .

```
1 S4 = 2 * int(int(r,r,0,a*sqrt(cos(2*s))),s,-pi/4,pi/4);
```

## 6 笛卡尔叶形线

首先, 我们先用参数方程表示 $x$ 和 $y$ , 参数方程如下:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

接着我们画出笛卡尔叶形线在第一象限的图像.

```
1 x = @(t) 6*t./(1+t.^3);
2 y = @(t) 6*t.^2./(1+t.^3);
3 t = 0:0.001:50;
4 plot(x(t),y(t));
```

图5是笛卡尔叶形线的图像.

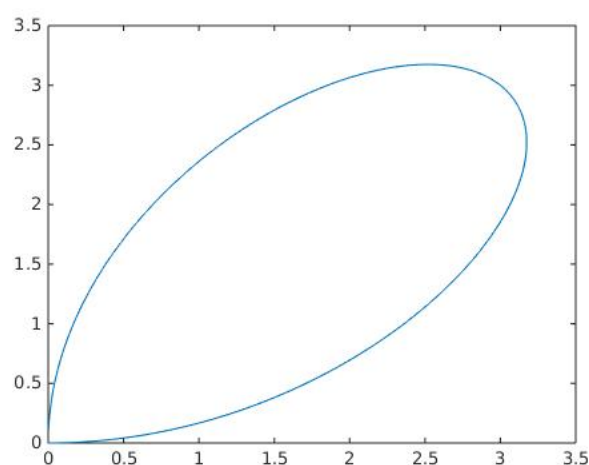


图5 笛卡尔叶形线

如果我们求 $x(t)$ 的驻点可以得到 $t = 1/\sqrt[3]{2}$ . 以这个点为分界点, 我们可以把闭合曲线分为两段处理. 所以闭合图形面积的表达式为

$$S_5 = \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{\infty} y(t)x'(t)dt - \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} y(t)x'(t)dt.$$

计算面积的MATLAB程序如下, 最后得到的计算结果是 $3a^2/2$ .

```
1 S5 = vpa(int(abs(3*a*r^2/(1+r^3))*diff(3*a*r/(1+r^3),r),r,...
2     (1/2)^(1/3),inf)-int(abs(3*a*r^2/(1+r^3))*diff(3*a*r/(1+r^3),...
3     r),r,0,(1/2)^(1/3)));
```

## 7 实验结论

本实验难度不大, 考察了几种曲线的图形绘制和用积分求闭合区域面积. 实验中涉及简单的坐标变换和参数替换思想, 略有趣味性.

## 8 附录

### Lab04.m 源代码

```
1 %Lab04.m
2 clear;clc;
3 syms a r s;
4 assume(a>0);
5 assume(r≥0);
6 theta = 0:0.001:2*pi;
7
8 figure('name','Three-leaf Rose Curve');
9 rho = 3 * sin(3*theta);
10 polar(theta,rho);
11 S1 = 3 * int(int(r,r,0,a*sin(3*s)),s,0,pi/3);
12 disp('the area of three-leaf rose curve:');disp(S1);
13
14 figure('name','Four-leaf Rose Curve');
15 rho = 4 * cos(2*theta);
16 polar(theta,rho);
17 S2 = 4 * int(int(r,r,0,a*cos(2*s)),s,-pi/4,pi/4);
18 disp('the area of four-leaf rose curve:');disp(S2);
19
20 figure('name','Six-leaf Rose Curve');
21 rho = 2 * cos(3*theta).^2;
22 polar(theta,rho);
23 S3 = 6 * int(int(r,r,0,a*cos(3*s)^2),s,-pi/6,pi/6);
24 disp('the area of six-leaf rose curve:');disp(S3);
25
26 figure('name','Lemniscate');
27 rho = 2 * sqrt(cos(2*theta));
28 polar(theta,rho);
29 S4 = 2 * int(int(r,r,0,a*sqrt(cos(2*s))),s,-pi/4,pi/4);
30 disp('the area of lemniscate:');disp(S4);
31
32 figure('name','Descartes Folium');
33 x = @(t) 6*t./(1+t.^3);
34 y = @(t) 6*t.^2./(1+t.^3);
35 t = 0:0.001:50;
36 plot(x(t),y(t));
37 S5 = vpa(int(abs(3*a*r^2/(1+r^3)*diff(3*a*r/(1+r^3),r)),r,...
38     (1/2)^(1/3),inf)-int(abs(3*a*r^2/(1+r^3)*diff(3*a*r/(1+r^3),...
39     r)),r,0,(1/2)^(1/3)));
40 disp('the area of descartes folium:');disp(S5);
```