Control y programación de robots

TEMA 1. TRAYECTORIAS CARTESIANAS / ARTICULARES

Máster Universitario en Automática y Robótica

Grupo Human Robotics

HUMAN ROBOTICS

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

dfests.ua.es

TRAYECTORIAS CARTESIANAS / ARTICULARES

Introducción

Trayectorias Cartesianas vs trayectorias articulares

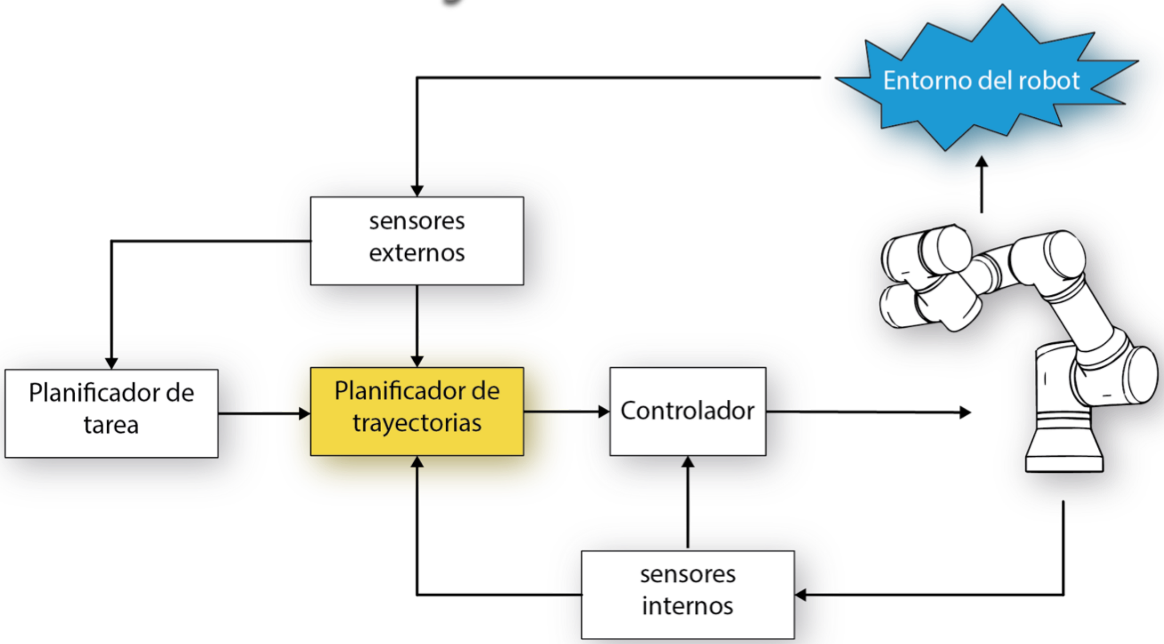
Trayectorias en el espacio articular

Trayectorias en el espacio Cartesiano

Escalado uniforme del tiempo

Conclusiones

El planificador de trayectorias



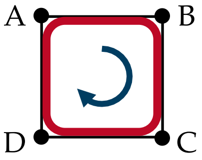
Acción del robot descrita como una secuencia de poses o configuraciones articulares (extensible a fuerzas de contacto) → **Planificador de trayectorias** → Valores / perfil de referencia (continuo o discreto) para el controlador del robot

Definición de trayectoria

1. Definir puntos de posición y orientación en el espacio Cartesiano utilizando la paleta de control o similar.
2. Programar una velocidad (media) entre estos puntos, como un porcentaje de 0 a 100% de un máximo valor del sistema (diferente para movimiento Cartesiano o para movimiento articular).
3. Interpolación lineal en el espacio articular entre los puntos muestreados de la trayectoria construida.

Ejemplos de características adicionales:

a) Pasar cerca del punto pero sin llegar a él



b) Parada basada en sensores

c) Trayectoria circular pasando por 3 puntos

- Principales desventajas:
  - Programación semi-manual (como en los lenguajes de programación de robots de "primera generación").
  - Visualización de movimiento limitada.

Se requiere una formalización matemática de las trayectorias

De la tarea a la trayectoria

TRAYECTORIA
- de movimiento $p_d(t)$
- de interacción $F_d(t)$

||

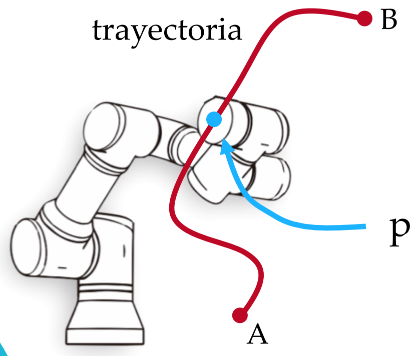
TRAYECTORIA GEOMÉTRICA: parametrizada con $s: p = p(s)$ (p.e., s puede ser la longitud del arco)

+

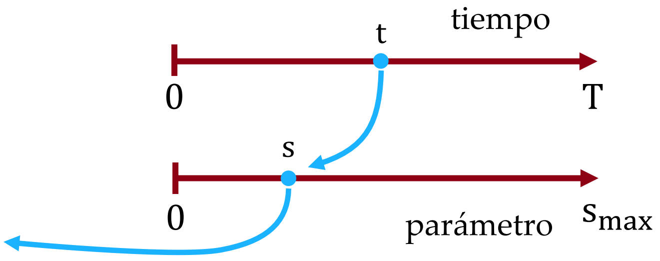
LEY TEMPORAL: describe la evolución temporal de $s = s(t)$

$\Rightarrow p(s(t))$

El planificador de tarea proporciona A, B
El planificador de trayectorias genera p(t)



$$p(s) = \begin{bmatrix} p_x(s) \\ p_y(s) \\ p_z(s) \end{bmatrix}$$



Planificación de trayectoria

Planificación de tarea → (1) Secuencia de puntos de pose en el espacio Cartesiano → Interpolación en el espacio Cartesiano

↓

Trayectoria geométrica Cartesiana (posición y orientación): $p = p(s)$ → Muestreo de trayectoria e inversión cinemática → (2) Secuencia de puntos en el espacio articular

↓

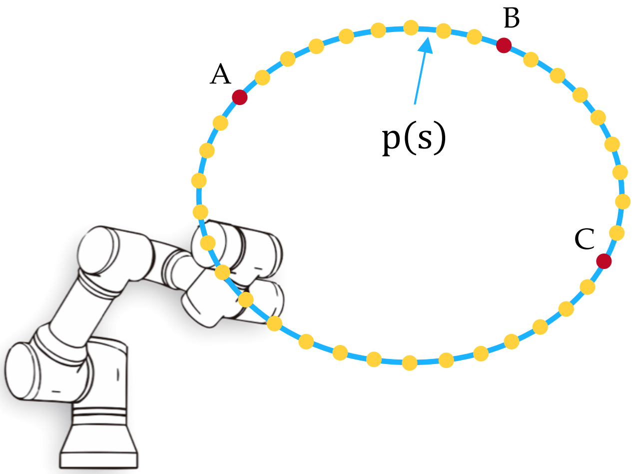
Interpolación en el espacio articular → Trayectoria geométrica en el espacio articular: $q = q(\lambda)$

inversión analítica

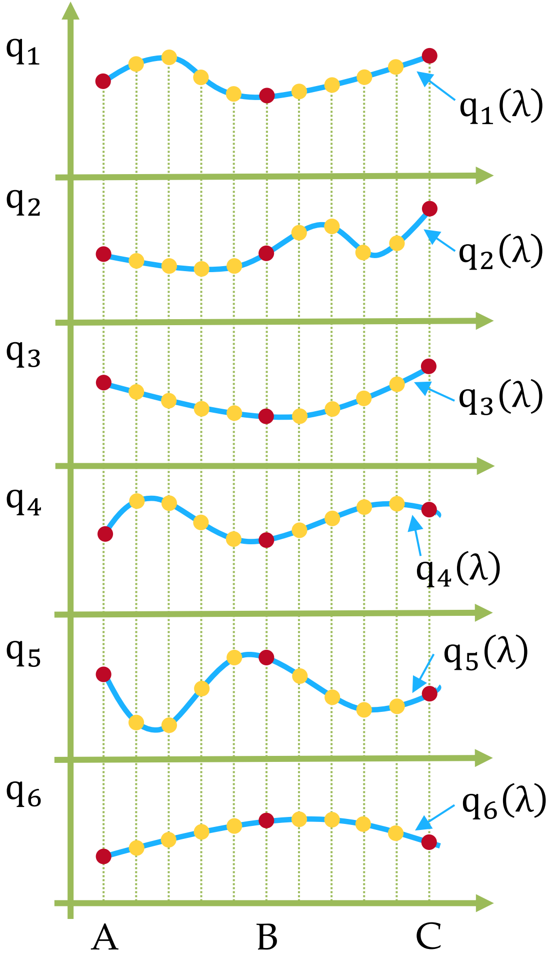
Consideraciones adicionales en el proceso de planificación:

- Evitación de obstáculos
- Carga computacional on-line/off-line
- La secuencia 2 es más "densa" que la 1

Ejemplo



Espacio Cartesiano



Espacio Articular

TRAYECTORIAS CARTESIANAS / ARTICULARES

Introducción

Trayectorias Cartesianas vs trayectorias articulares

Trayectorias en el espacio articular

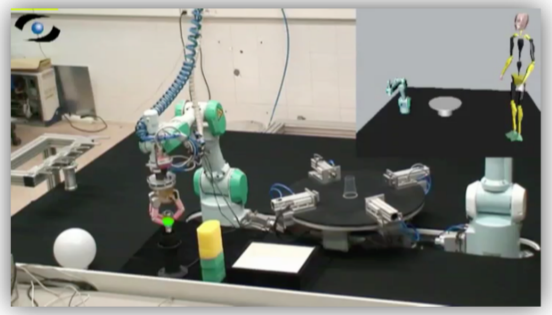
Trayectorias en el espacio Cartesiano

Escalado uniforme del tiempo

Conclusiones

Trayectorias Cartesianas vs trayectorias articulares

- Planificar en el espacio Cartesiano:
  - Permite una visualización más directa de la trayectoria generada.
  - Evitación de obstáculos, eliminación de movimiento oscilatorio indeseado.
- Planificar en el espacio articular:
  - No requiere realizar en tiempo de ejecución la inversión cinemática.
- Problemas que pueden aparecer en la inversión cinemática:
  - Se pueden necesitar también $\dot{q}$ y $\ddot{q}$ (o derivadas de orden superior).
  - Para robots redundantes, la elección entre ∞^{n-m} soluciones a la inversión, basadas en criterios de optimalidad o tareas auxiliares adicionales.
  - La planificación off-line previa no siempre es posible:
    - p.e., cuando exista interacción con del robot con su entorno o se requiera movimiento basado en sensores.



Trayectoria y ley temporal

- Tras elegir una trayectoria geométrica, la definición de la trayectoria se completa con la elección de una ley temporal:

$$p = p(s) \qquad \Longrightarrow s = s(t) \qquad \text{(espacio Cartesiano)}$$

$$q = q(\lambda) \qquad \Longrightarrow \lambda = \lambda(t) \qquad \text{(espacio articular)}$$

  - Si $s(t) = t$, la parametrización de la trayectoria es la natural proporcionada por el tiempo.

- La ley temporal:
  - Se elige en función de las especificaciones de la tarea (parada en un punto, movimiento a velocidad constante, etc.).
  - Debe considerar criterios de optimalidad (realización de la trayectoria en el menor tiempo posible, con el menor gasto de energía, etc.).
  - También existirán restricciones impuestas por la capacidad de los actuadores (par máximo, máxima velocidad, etc.) y/o por la tarea (p.e., máxima aceleración con carga).

Nota: en trayectorias parametrizadas, tiene lugar una descomposición espacio-tiempo

p.e., en el espacio Cartesiano

$$\dot{p}(t) = \frac{dp}{ds}\dot{s} \qquad \ddot{p}(t) = \frac{dp}{ds}\ddot{s} + \frac{d^2p}{ds^2}\dot{s}^2$$

Clasificación de las trayectorias

- Espacio en el que se define:
  - Cartesianas, articulares.
- Tipo de tarea:
  - Punto a punto (PTP), múltiples puntos, continuas, concatenadas.
- Geometría de la trayectoria:
  - Rectilínea, polinómica, exponencial, cicloide, etc.
- Ley temporal:
  - Todo/nada en aceleración, trapezoidal en velocidad, polinómica, etc.
- Coordinada o independiente:
  - Movimiento de todos los ejes (o de todas las componentes Cartesianas) empezando y acabando en el mismo instante. = ley temporal única para todos.
  - El movimiento es independiente (normalmente en el espacio articular), de acuerdo con el desplazamiento requerido y las capacidades del robot.

Características relevantes

- Eficiencia computacional y espacio de memoria
  - p.e., almacenar únicamente los coeficientes de una función polinómica.
- Previsibilidad (vs. oscilación fuera de los puntos de paso) y precisión (vs. rebase en la posición final).
- Flexibilidad (permitiendo la concatenación, el paso cerca del punto sin pasar justo por el punto, etc.).
- Continuidad (en espacio y tiempo)

  (al menos C^1, pero también hasta la sobreaceleración = tercera derivada con respecto al tiempo).

TRAYECTORIAS CARTESIANAS / ARTICULARES

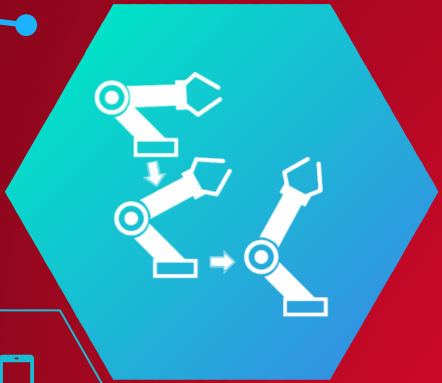
Introducción
Trayectorias Cartesianas vs trayectorias articulares
Trayectorias en el espacio articular
Trayectorias en el espacio Cartesiano
Escalado uniforme del tiempo
Conclusiones

Planificación de trayectorias articulares

- $q = q(t)$ en tiempo o $q = q(\lambda)$ en espacio (en este caso con $\lambda = \lambda(t)$).
- Es suficiente con trabajar componente a componente (q_i en el vector q).
- Definición implícita de la trayectoria, resolviendo un problema con condiciones de frontera especificadas en una clase dada de funciones.
- Clases de funciones típicas: polinómicas (cúbicas, quínticas, etc.), sinoidales, cicloides, etc.
- Condiciones impuestas:
  - Paso por puntos = interpolación.
  - Velocidad inicial, final, intermedia (o tangente geométrica para las trayectorias geométricas).
  - Aceleración inicial, final (o curvatura geométrica).
  - Continuidad hasta la derivada de orden k respecto al tiempo (o el espacio): clase $\mathbf{C}^k$.

Muchos de los siguientes métodos e indicaciones pueden aplicarse directamente también a la planificación de trayectorias Cartesianas (y viceversa)

TRAYECTORIAS EN EL ESPACIO ARTICULAR



Interpolación punto a punto

Interpolación en trayectorias con múltiples segmentos

Interpolación lineal en tiempo

$\boxed{q(0) = q_{in}}$ $\boxed{q(T) = q_{fin}}$ ← 2 condiciones

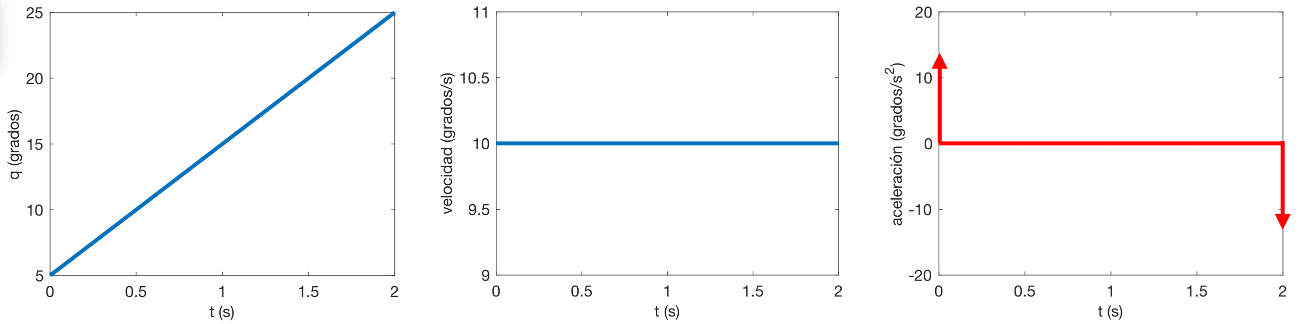
$$\boxed{q(t) = a + bt}$$

$$q(0) = a \Leftrightarrow \boxed{a = q_{in}}$$

$$q(T) = q_{in} + bT \Leftrightarrow q_{fin} = q_{in} + bT \Leftrightarrow \boxed{b = \frac{q_{fin} - q_{in}}{T}}$$

Una articulación de rotación girada 5 grados, y se desea que gire 20 grados en 2s

$$\boxed{q(t) = 5 + 10t}$$



Interpolación polinómica cúbica en tiempo

$\boxed{q(0) = q_{in}}$ $\boxed{q(T) = q_{fin}}$ $\boxed{q'(0) = v_{in}}$ $\boxed{q'(T) = v_{fin}}$ ⟵ 4 condiciones

$$q(\tau) = q_{in} + \Delta q\underbrace{[a\tau^3 + b\tau^2 + c\tau + d]}$$

4 coeficientes ⟶ Polinomio $q_N(\tau)$ "doblemente normalizado"

$$\Delta q = q_{fin} - q_{in}$$

$$\tau = \frac{t}{T}, \tau \in [0,1]$$

$$q_N(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{d = 0} \qquad q_N(1) = 1 \Leftrightarrow a + b + c = 1$$

$$q'(0) = \left.\frac{dq}{d\tau}\right|_{\tau=0} \Leftrightarrow c = v_{in}\frac{T}{\Delta q} \qquad q'(1) = \left.\frac{dq}{d\tau}\right|_{\tau=1} \Leftrightarrow 3a + 2b + c = v_{fin}\frac{T}{\Delta q}$$

Caso especial: $v_{in} = v_{fin} = 0$ (reposo a reposo)

$$q'(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{c = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} q_N(1) = 1 \Leftrightarrow a + b = 1 \\ q'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} a = -2 \\ b = 3 \end{array}}$$

Interpolación polinómica quíntica en tiempo

6 coeficientes → $q(\tau) = a\tau^5 + b\tau^4 + c\tau^3 + d\tau^2 + e\tau + f$

$\tau = \frac{t}{T}, \tau \in [0,1]$

Permite satisfacer **6 condiciones**, por ejemplo:

$q(0) = q_0$	$q(1) = q_1$	$q'(0) = v_0 T$	$q'(1) = v_1 T$	$q''(0) = a_0 T^2$	$q''(1) = a_1 T^2$

$$q(\tau) = (1-\tau)^3 \left[q_0 + (3q_0 + v_0 T)\tau + (a_0 T^2 + 6v_0 T + 12q_0)\frac{\tau^2}{2}\right] +$$
$$+\tau^3 \left[q_1 + (3q_1 - v_1 T)(1-\tau) + (a_1 T^2 - 6v_1 T + 12q_1)\frac{(1-\tau)^2}{2}\right]$$

Caso especial: $v_0 = v_1 = a_0 = a_1 = 0$

$q(\tau) = q_{in} + \Delta q[6\tau^5 - 15\tau^4 + 10\tau^3]$

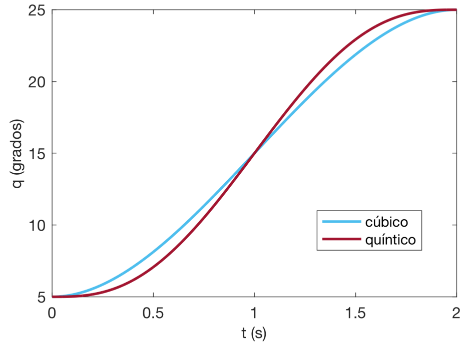
$\Delta q = q_1 - q_0$

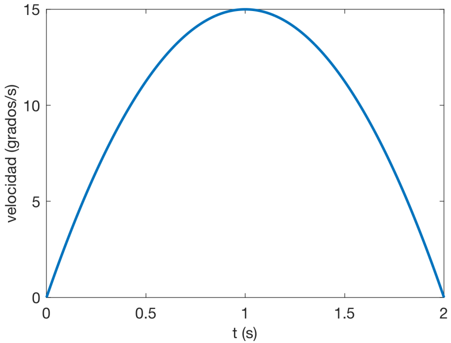
Ejercicio

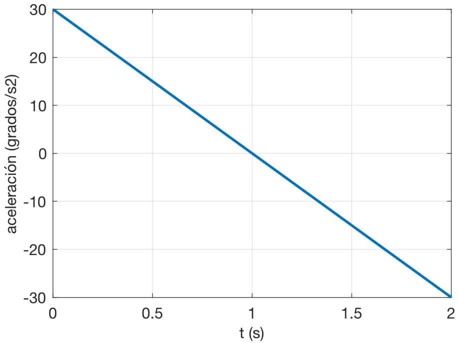
Una articulación de rotación girada 5 grados, y se desea que gire 20 grados en 2s

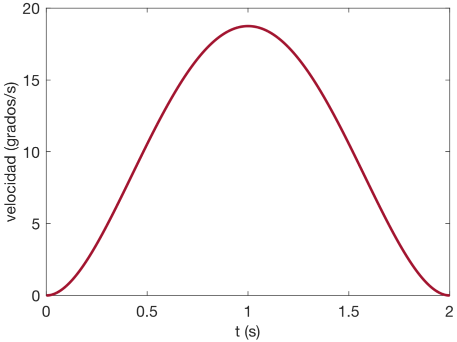
$$q(\tau) = q_{in} + \Delta q[-2\tau^3 + 3\tau^2]$$

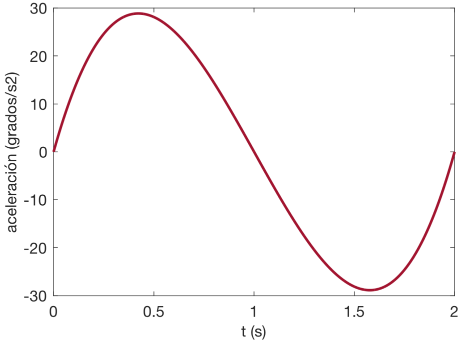
$$q(\tau) = q_{in} + \Delta q[6\tau^5 - 15\tau^4 + 10\tau^3]$$











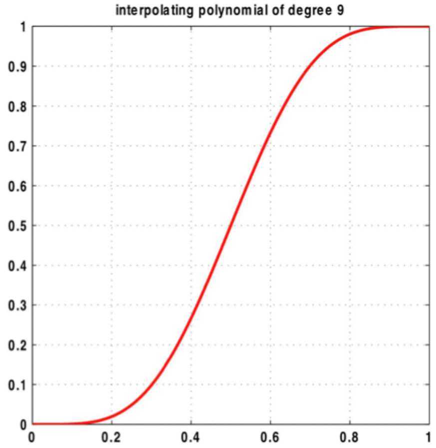
Polinomios de orden superior

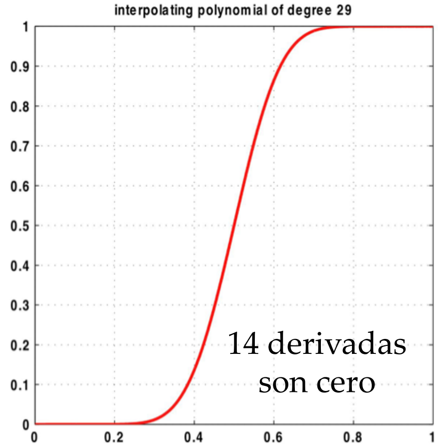
- Una función adecuada para satisfacer condiciones de contorno simétricas (en un movimiento punto a punto (PTP)) que imponen valores cero a las derivadas de orden uno o superior.
  - El polinomio de interpolación será siempre de grado impar.
  - Los coeficientes de esos polinomios (doblemente normalizados) son siempre enteros, alternados en el signo, suman la unidad, y son cero en todos los términos hasta la potencia = (grado-1)/2.
- En todos los otros casos (p.e., para interpolar un gran número N de puntos), su uso no está recomendado.
  - Los polinomios de orden N tienen N-1 puntos máximos y mínimos.
  - Se presentan oscilaciones entre los puntos de interpolación.

Ejemplos numéricos

Polinomio de
9º grado

4 derivadas
son cero



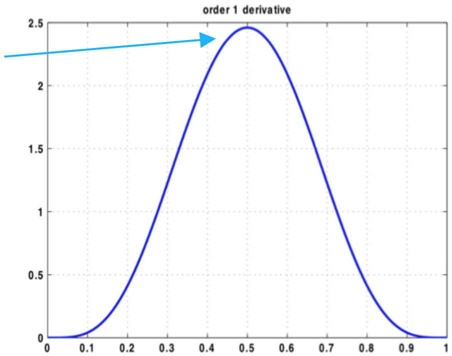


14 derivadas
son cero

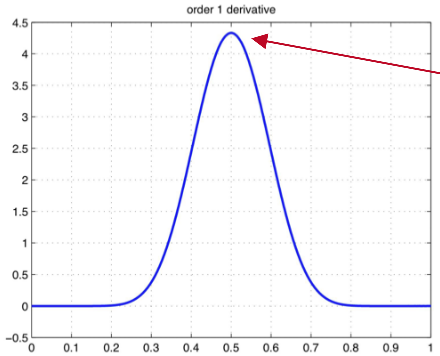
Polinomio de
29º grado

Sin sobre
oscilación ni
rebase

2.5



Primera
derivada
normalizada
(velocidad en
tiempo)

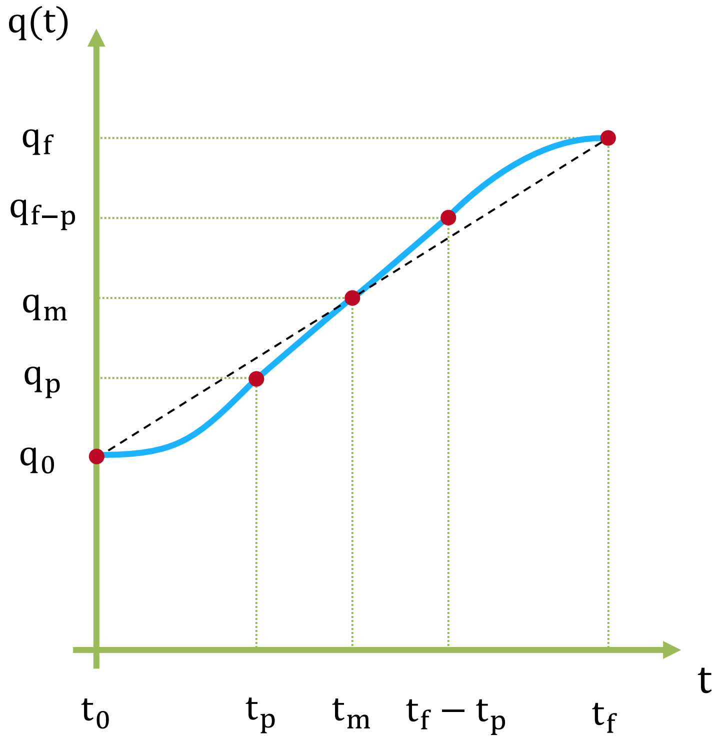


4.5

Máximo en el
punto medio

Interpolación lineal con ajuste parabólico

- Soslaya los problemas de la interpolación lineal. Trayectorias simétricas.
- Trayectoria en tres tramos:
  - Tramo parabólico:
    - Aplica una aceleración α.
  - Tramo lineal:
    - Mantiene la velocidad constante V.
  - Tramo parabólico:
    - Aplica una deceleración -α.



Interpolación lineal con ajuste parabólico

- Condiciones de contorno:

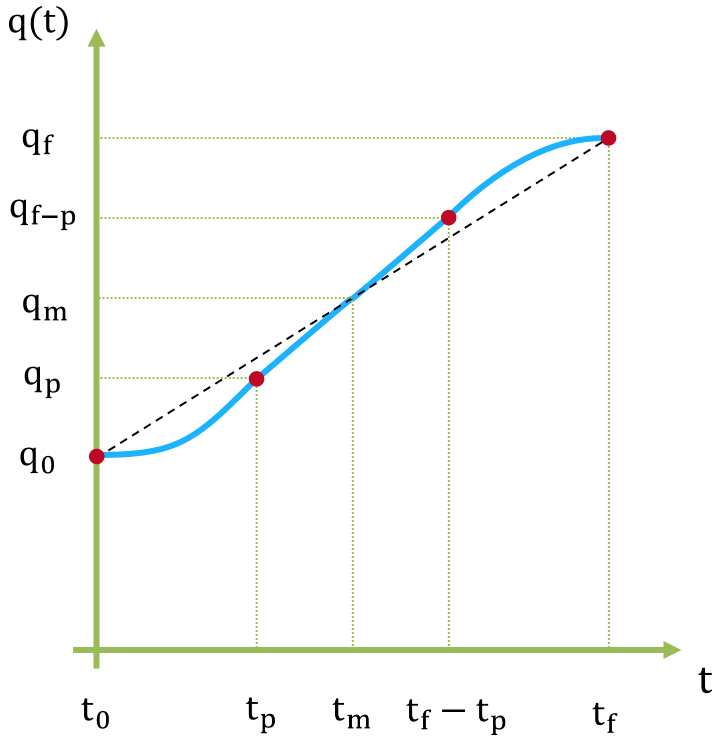
$$q(t_0) = q_0 \qquad q(t_p^-) = q(t_p^+)$$

$$q(t_f) = q_f \qquad q((t_f - t_p)^-) = q((t_f - t_p)^+)$$

$$\dot{q}(t_0) = 0 \qquad \dot{q}(t_f) = 0$$

$$\dot{q}(t_p^-) = \dot{q}\left((t_f - t_p)^+\right) = V$$

$$\dot{q}(t_p^+) = \dot{q}\left((t_f - t_p)^-\right) = V \text{ (cte)}$$



Interpolación lineal con ajuste parabólico

- Trayectoria primer tramo parabólico:

$$q(t) = q_0 + \frac{\alpha}{2}t^2$$

- Trayectoria tramo lineal:

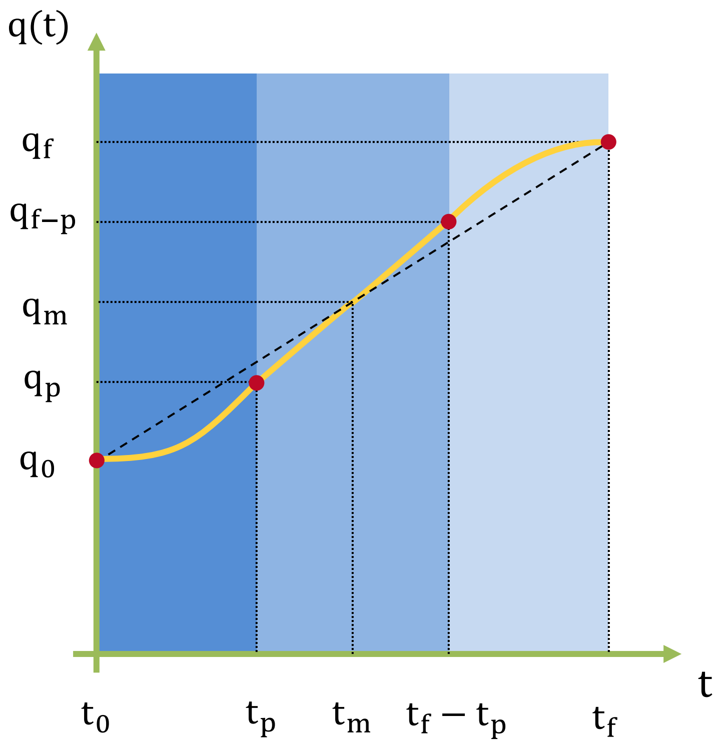
$$q(t) = \frac{q_f + q_0 - Vt_f}{2} + Vt$$

- Trayectoria segundo tramo parabólico:

$$q(t) = q_f - \frac{\alpha t_f^2}{2} + \alpha t_f t - \frac{\alpha}{2}t^2$$

$$V = \alpha\, t_p$$

$$t_p = \frac{q_0 - q_f + Vt_f}{V}$$



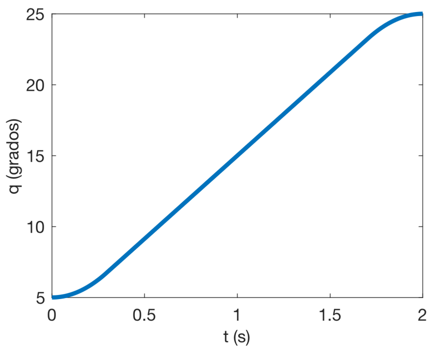
Ejercicio

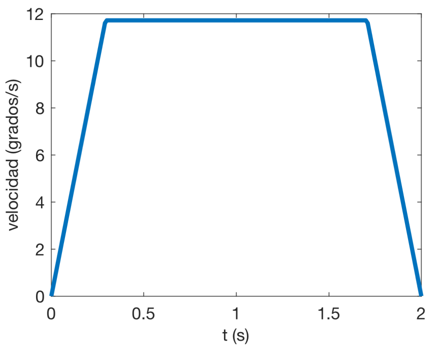
Una articulación de rotación girada 5 grados, y se desea que gire 20 grados en 2s, con una aceleración máxima de 40 grados/s^2

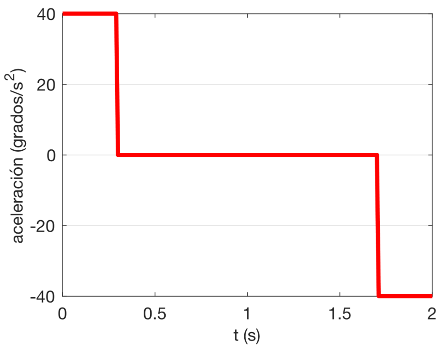
$q(t) = 5 + 20t^2$

$q(t) = 3.277 + 11.719t$

$q(t) = -55 + 80t - 20t^2$







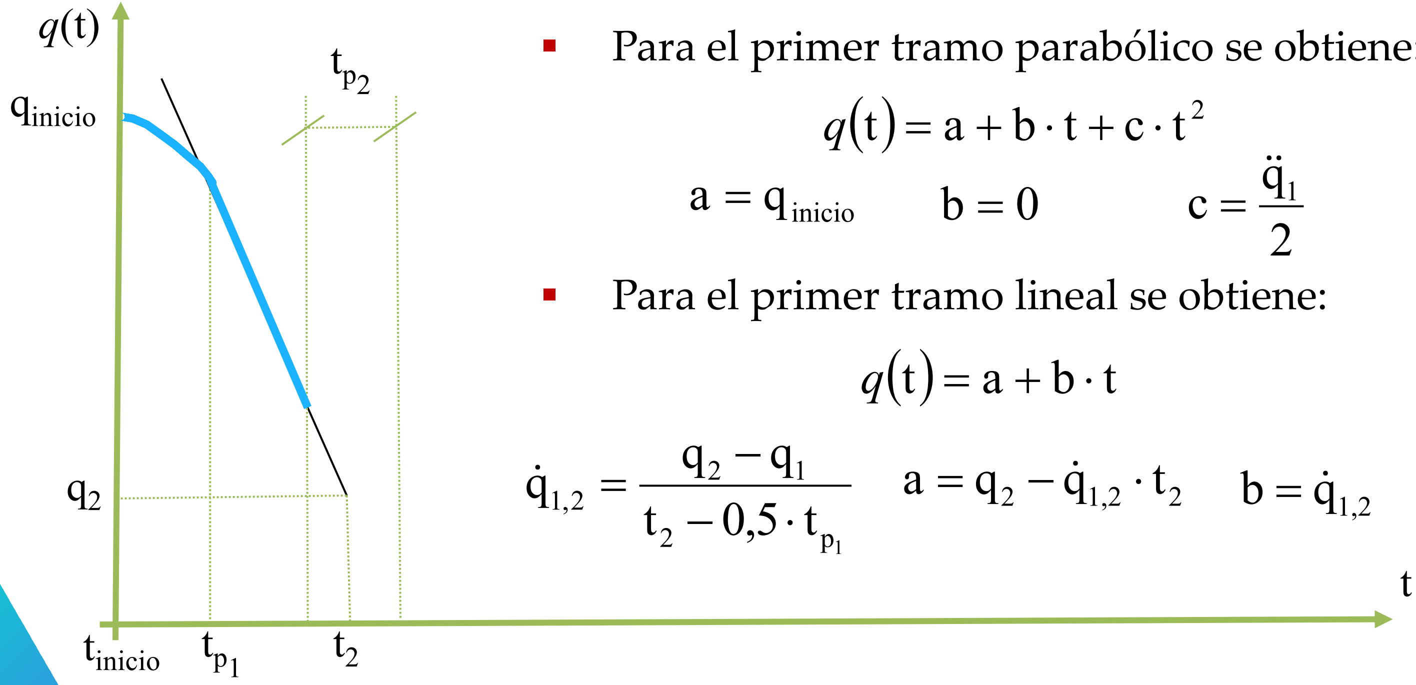
TRAYECTORIAS
EN EL ESPACIO ARTICULAR

Interpolación punto a punto

Interpolación en trayectorias con múltiples segmentos

Interpolación lineal con ajuste parabólico

- Se aproxima a los puntos intermedios sin pasar por ellos.
- Utiliza tramos parabólicos para ajustar las velocidades entre dos tramos lineales, permitiendo un margen en las especificaciones.



- Para el primer tramo parabólico se obtiene:

$$q(t) = a + b \cdot t + c \cdot t^2$$

$$a = q_{inicio} \qquad b = 0 \qquad c = \frac{\ddot{q}_1}{2}$$

- Para el primer tramo lineal se obtiene:

$$q(t) = a + b \cdot t$$

$$\dot{q}_{1,2} = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - 0{,}5 \cdot t_{p_1}} \qquad a = q_2 - \dot{q}_{1,2} \cdot t_2 \qquad b = \dot{q}_{1,2}$$

Interpolación lineal con ajuste parabólico

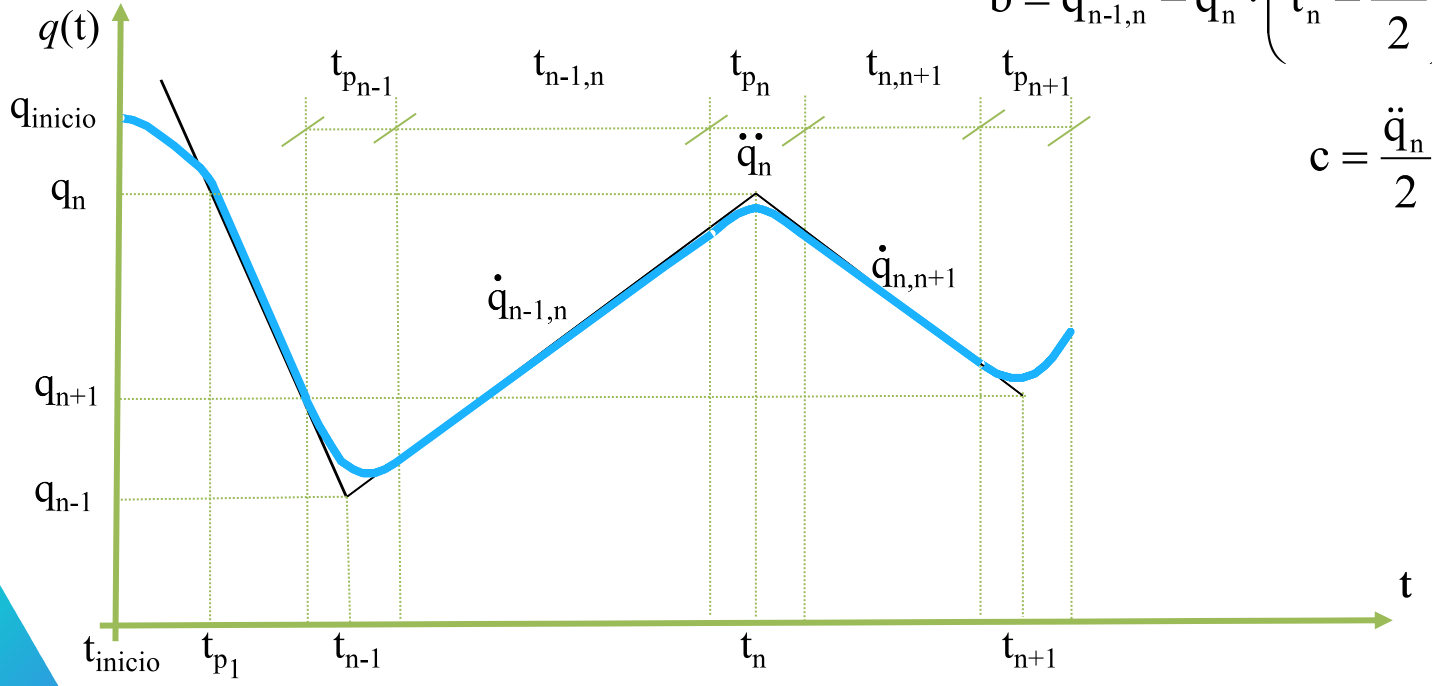
- Para un tramo parabólico intermedio:

$$q(t) = a + b \cdot t + c \cdot t^2$$

$$a = q_n - \dot{q}_{n-1,n} + \frac{\ddot{q}_n}{2} \cdot \left(t_n - \frac{t_{p_n}}{2} \right)$$

$$b = \dot{q}_{n-1,n} - \ddot{q}_n \cdot \left(t_n - \frac{t_{p_n}}{2} \right)$$

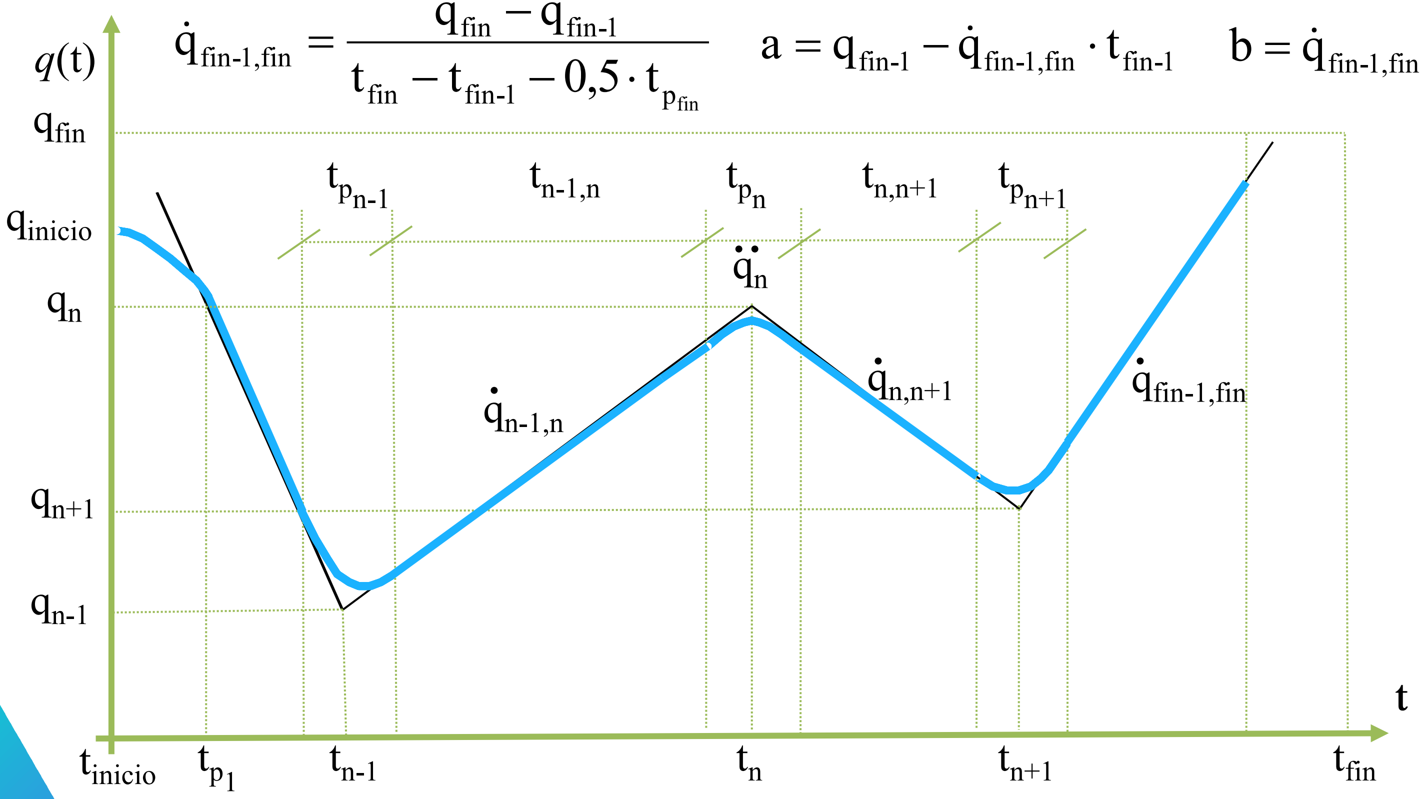
$$c = \frac{\ddot{q}_n}{2}$$



Interpolación lineal con ajuste parabólico

- Para el último tramo lineal: $q(t) = a + b \cdot t$

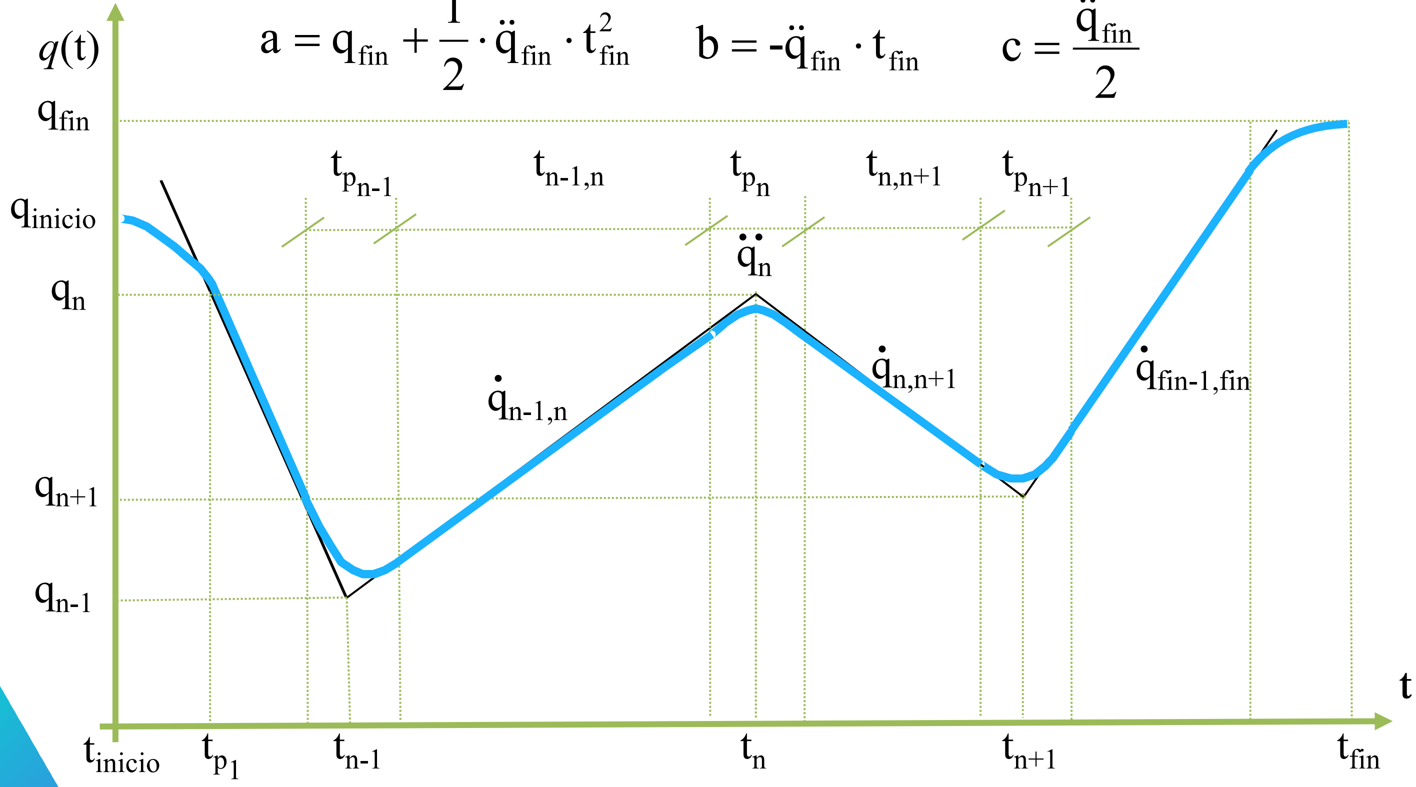
$$\dot{q}_{fin-1,fin} = \frac{q_{fin} - q_{fin-1}}{t_{fin} - t_{fin-1} - 0{,}5 \cdot t_{p_{fin}}} \qquad a = q_{fin-1} - \dot{q}_{fin-1,fin} \cdot t_{fin-1} \qquad b = \dot{q}_{fin-1,fin}$$



Interpolación lineal con ajuste parabólico

- Para el último tramo lineal: $q(t) = a + b \cdot t + c \cdot t^2$

$$a = q_{fin} + \frac{1}{2} \cdot \ddot{q}_{fin} \cdot t_{fin}^2 \qquad b = -\ddot{q}_{fin} \cdot t_{fin} \qquad c = \frac{\ddot{q}_{fin}}{2}$$

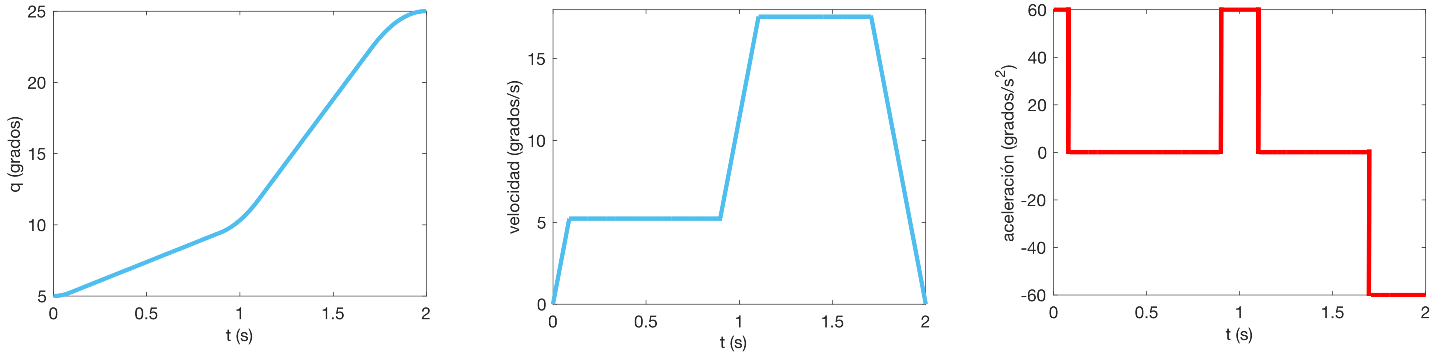


Ejercicio

Suponiendo igual que antes una articulación girada 5 grados y se desea que gire 20 grados más en 2s. Además se quiere que pase por 10 grados al cabo de 1s, y se permite una aceleración máxima de 60 grados/s^2

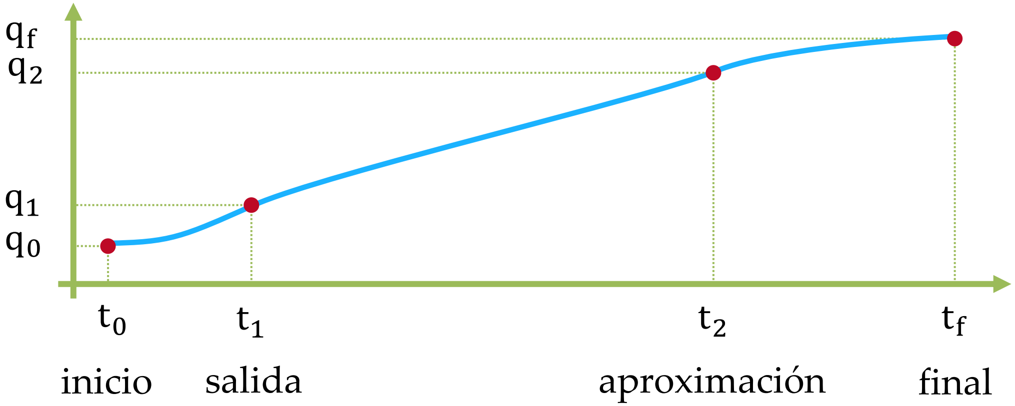
$q_1(t) = 5 + 30t^2$ $\quad$ $q_2(t) = 4.277 + 5.228t$ $\quad$ $q_3(t) = 28.917 - 48.599t + 30t^2$

$q_4(t) = -7.574 + 17.574t$ $\quad$ $q_5(t) = -95 + 120t - 30t^2$



Interpolación polinómica 4-3-4

- Tres fases (Subir, Viajar, Bajar) en una operación de pick-and-place en tiempo.



$q_S(t)$ = Polinomio de 4º orden

$q_V(t)$ = Polinomio de 3er orden

$q_B(t)$ = Polinomio de 4º orden

condiciones de contorno

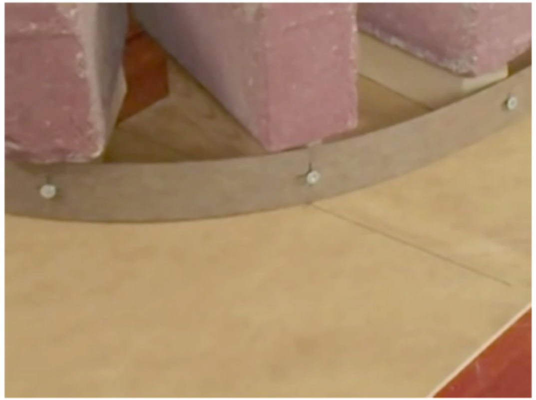
$q(t_0) = q_0$ | $q(t_1^-) = q(t_1^+) = q_1$ | $q(t_2^-) = q(t_2^+) = q_2$ | $q(t_f) = q_f$ ← 6 pasos

$\dot{q}(t_0) = \dot{q}(t_f) = 0$ | $\ddot{q}(t_0) = \ddot{q}(t_f) = 0$ ← 4 velocidades/aceleraciones inicial/final

$\dot{q}(t_i^-) = \dot{q}(t_i^+)$ | $\ddot{q}(t_i^-) = \ddot{q}(t_i^+)$ | $i = 1,2$ ← 4 continuidad

Interpolación usando splines

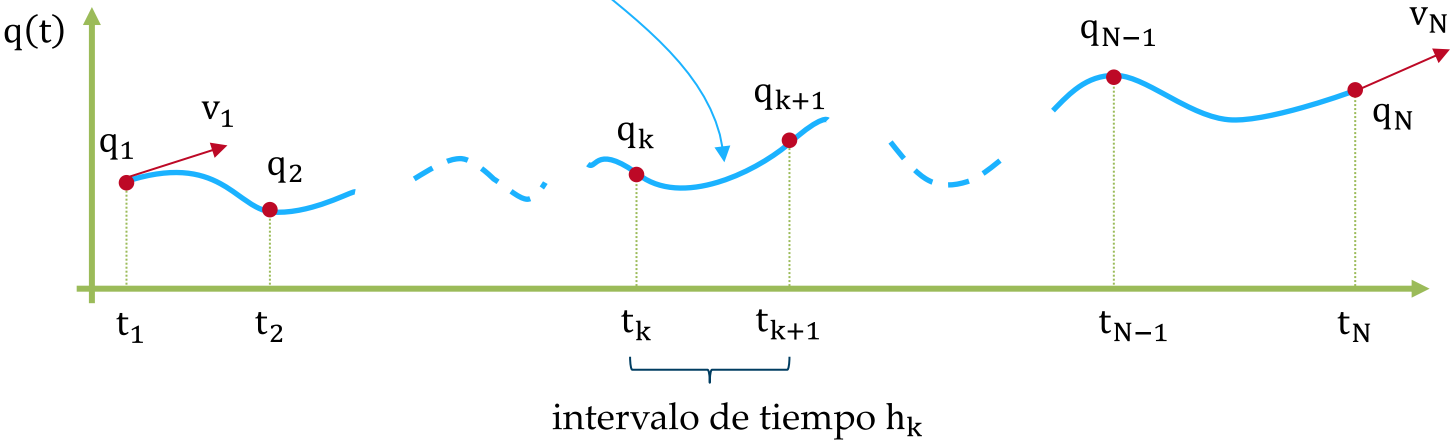
- Problema:
  - Interpolar N puntos, con continuidad hasta la segunda derivada.
- Solución:
  - Spline: N-1 polinomios cúbicos, concatenados de forma que pasen a través de N puntos y con continuidad hasta la segunda derivada en los N-2 puntos intermedios.
- 4(N-1) coeficientes.
- 4(N-1)-2 condiciones, o
  - 2(N-1) de paso (para cada polinómio cúbico, en los dos puntos de sus extremos).
  - N-2 de continuidad para la primera derivada (en los puntos intermedios).
  - N-2 de continuidad para la segunda derivada (en los puntos intermedios).
- Quedan libres todavía 2 parámetros:
  - Pueden usarse, p.ej., para establecer derivadas inicial y final, v_1 y v_N.



Fuente: Youtube
https://www.youtube.com/watch?v=PwGnyJJCPIg

Construyendo un spline cúbico

$$q = \theta(t) = \{\theta_k(t), t \in [t_k, t_k + h_k]\}$$



$$\theta_k(\tau) = a_{k0} + a_{k1}\tau + a_{k2}\tau^2 + a_{k3}\tau^3$$

$$\tau \in [0, h_k], \tau = t - t_k \ (k = 1, \dots, N-1)$$

Condiciones de continuidad para velocidad y aceleración

$$\dot{\theta}_k(h_k) = \dot{\theta}_{k+1}(0)$$

$$\ddot{\theta}_k(h_k) = \ddot{\theta}_{k+1}(0)$$

$$k = 1, \dots, N-2$$

Un algoritmo eficiente

1. Si se conocieran todas las velocidades v_k en los puntos intermedios, entonces cada polinomio cúbico del spline se determinaría de manera única mediante:

$$\theta_k(0) = q_k = a_{k0}$$

$$\dot{\theta}_k(0) = v_k = a_{k1}$$

$$\begin{pmatrix} h_k^{\,2} & h_k^{\,3} \\ 2h_k & 3h_k^{\,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k2} \\ a_{k3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{k+1} - q_k - v_k h_k \\ v_{k+1} - v_k \end{pmatrix} \quad (1)$$

2. Si se imponen las condiciones de continuidad para las aceleraciones (N-2 condiciones):

$$\ddot{\theta}_k(h_k) = 2a_{k2} + 6a_{k3}h_k = \ddot{\theta}_{k+1}(0) = 2a_{k+1,2}$$

3. Expresando los coeficientes a_{k2}, a_{k3}, $a_{k+1,2}$ en términos de las todavía desconocidas velocidades en los puntos intermedios (ver paso 1), permite obtener un sistema lineal de ecuaciones que es siempre (fácilmente) solucionable:

$$\begin{pmatrix} \\ A(h) \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(h, q, v_1, v_N) \end{pmatrix}$$

matriz tri-diagonal siempre invertible

desconocido

vector conocido

se sustituirá después en (1)

Estructura de A(h)

$$\begin{pmatrix} 2(h_1+h_2) & h_1 & & & \\ h_3 & 2(h_2+h_3) & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{N-2} & 2(h_{N-3}+h_{N-2}) & h_{N-3} \\ & & & h_{N-1} & 2(h_{N-2}+h_{N-1}) \end{pmatrix}$$

matriz diagonalmente dominante ($h_k > 0$)

La misma matriz para todas las articulaciones

Estructura de $b(h,q,v_1,v_N)$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{3}{h_1 h_2}\left[{h_1}^2(q_3-q_2)+{h_2}^2(q_2-q_1)\right]-h_2 v_1 \\ \dfrac{3}{h_2 h_3}\left[{h_2}^2(q_4-q_3)+{h_3}^2(q_3-q_2)\right] \\ \vdots \\ \dfrac{3}{h_{N-3} h_{N-2}}\left[{h_{N-3}}^2(q_{N-1}-q_{N-2})+{h_{N-2}}^2(q_{N-2}-q_{N-3})\right] \\ \dfrac{3}{h_{N-2} h_{N-1}}\left[{h_{N-2}}^2(q_N-q_{N-1})+{h_{N-1}}^2(q_{N-1}-q_{N-2})\right]-h_{N-2} v_N \end{pmatrix}$$

Propiedades de los splines

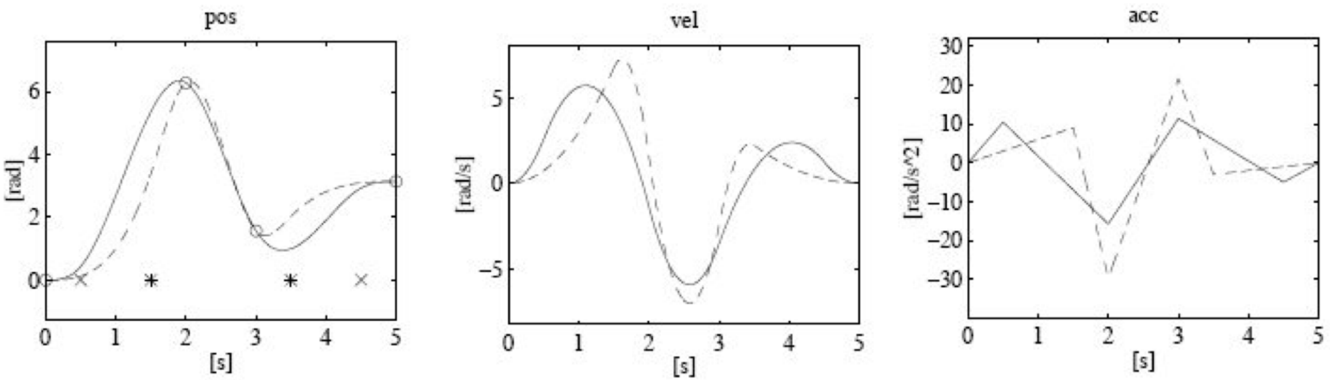
- Un spline (en el espacio) es la solución con mínima curvatura entre todas las funciones de interpolación con continuidad en la segunda derivada.
- Para tareas cíclicas ($q_1 = q_N$), es preferible simplemente imponer la continuidad de la primera y segunda derivadas (es decir, velocidad y aceleración en tiempo) en el primer y último punto como condiciones que cierren el sistema:
  - Elegir $v_1 = v_N = v$ (para una v dada) no garantiza en general la continuidad hasta la segunda derivada (en el tiempo, de la aceleración).
  - De esta forma, el primer y último punto (que ahora son el mismo) se tratará como otros puntos intermedios.
- El spline para un conjunto de datos $q_1, \ldots, q_N, h_1, \ldots, h_{N-1}, v_1, v_N$ es único.
- En el tiempo, el movimiento total se produce en $T = \sum_k h_k = t_N - t_1$.
- Los intervalos de tiempo h_k se pueden elegir de forma que se minimice T (función objetivo lineal) sobre límites (no lineales) en velocidad y aceleración en [0,T].
- En el tiempo, la construcción del spline se puede modificar adecuadamente cuando se requiera fijar la aceleración en los puntos inicial y final.

Modificación para aceleraciones inicial/final

- Se necesitan dos parámetros más para imponer también las aceleraciones inicial, α_1, y final, α_N.
- Se añaden dos puntos ficticios en el primer y último intervalos, incrementando el número de polinomios cúbicos de N-1 a N+1.
- En estos dos puntos sólo se imponen condiciones de continuidad en posición, velocidad y aceleración.
  - Con lo que quedan dos parámetros libres (uno en el primer polinomio y otro en el último), que se emplean para satisfacer las condiciones de contorno en aceleración.
- Dependiendo del (tiempo) posicionamiento de los dos puntos adicionales, el spline resultante cambia.

Un ejemplo numérico

- $N = 4$ puntos (3 polinomios cúbicos).
  - Valores articulares $q_1 = 0$, $q_2 = 2\pi$, $q_3 = \pi/2$, $q_4 = \pi$.
  - En $t_1 = 0$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$, $t_4 = 5$ (así, $h_1 = 2$, $h_2 = 1$, $h_3 = 2$).
  - Velocidades de los extremos $v_1 = v_4 = 0$.
- Se añaden dos puntos para imponer aceleraciones en los dos extremos (5 polinomios cúbicos).
  - Aceleraciones de los extremos $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$.
  - Dos posiciones: en $t_1' = 0.5$ y $t_4' = 4.5$ (x), o en $t_1'' = 1.5$ y $t_4' = 3.5$ (*)



TRAYECTORIAS CARTESIANAS / ARTICULARES

Introducción

Trayectorias Cartesianas vs trayectorias articulares

Trayectorias en el espacio articular

Trayectorias en el espacio Cartesiano

Escalado uniforme del tiempo

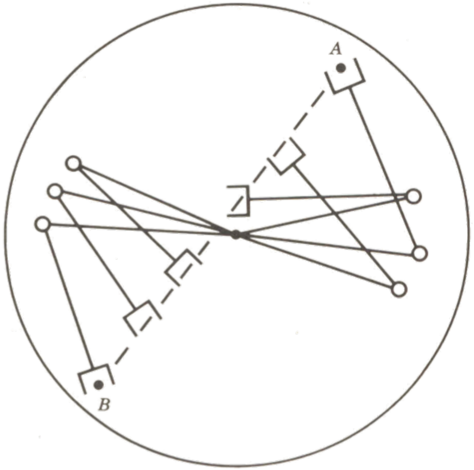
Conclusiones

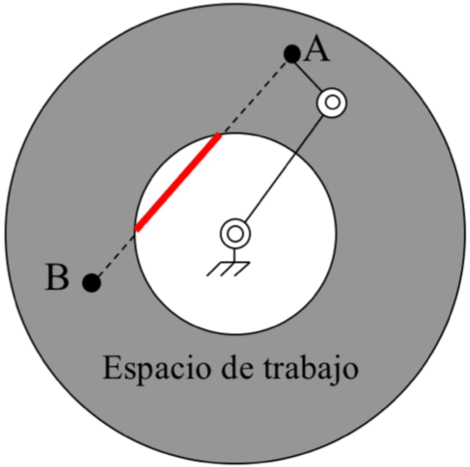
Trayectorias Cartesianas

- En general, los métodos de planificación de trayectoria propuestos en el espacio articular también se pueden aplicar en el espacio Cartesiano.
- Para ello, se considera independientemente cada componente del vector de tarea (es decir, una posición o un ángulo de una representación mínima de orientación).
- Sin embargo, cuando se planifica una trayectoria para los tres ángulos de Euler, el movimiento global resultante no se puede visualizar de manera intuitiva sin una simulación o prueba real.
- Si es posible, es preferible planificar las trayectorias Cartesianas por separado para la posición y la orientación.
- El número de puntos a interpolar en el espacio cartesiano es típicamente bajo (p. Ej., 2 puntos para un movimiento PTP, 3 si se agrega un punto de paso) $\Rightarrow$ se utiliza normalmente trayectorias de interpolación simples, como líneas rectas, arco de círculos, etc.

Trayectorias Cartesianas

- Las trayectorias en el espacio cartesiano están sometidas a problemas debido fundamentalmente a las singularidades en el espacio de trabajo:
  - Cuando el extremo del robot pasa por una configuración singular.
    - La velocidad de alguna de las articulaciones deberá ser idealmente infinita para poder llevar a cabo la trayectoria cartesiana.
  - Cuando el extremo del robot pasa fuera del área de trabajo.

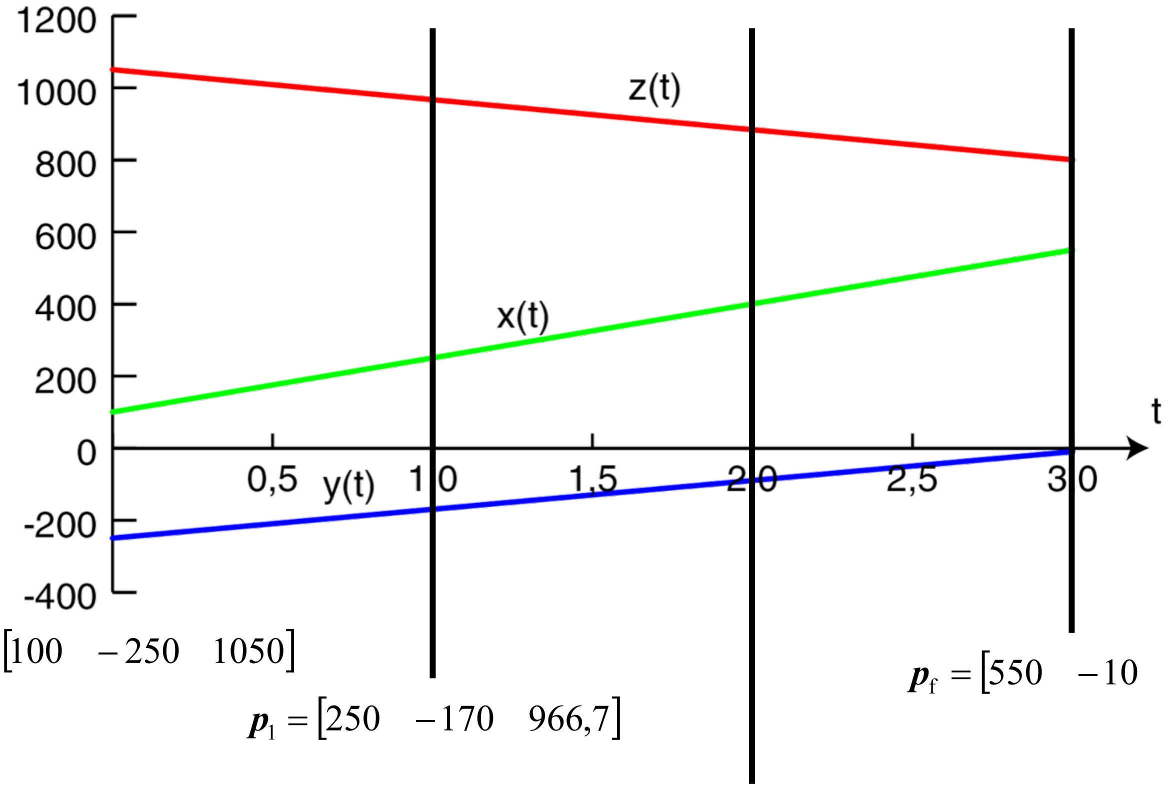




Trayectorias Cartesianas

- Se desea que el extremo del robot siga una línea recta entre dos puntos y que tarde 3s.
- Utilizando dos puntos intermedios equidistantes en el espacio cartesiano.
- Se conoce la aceleración máxima que se permite a cada articulación.

Trayectorias Cartesianas



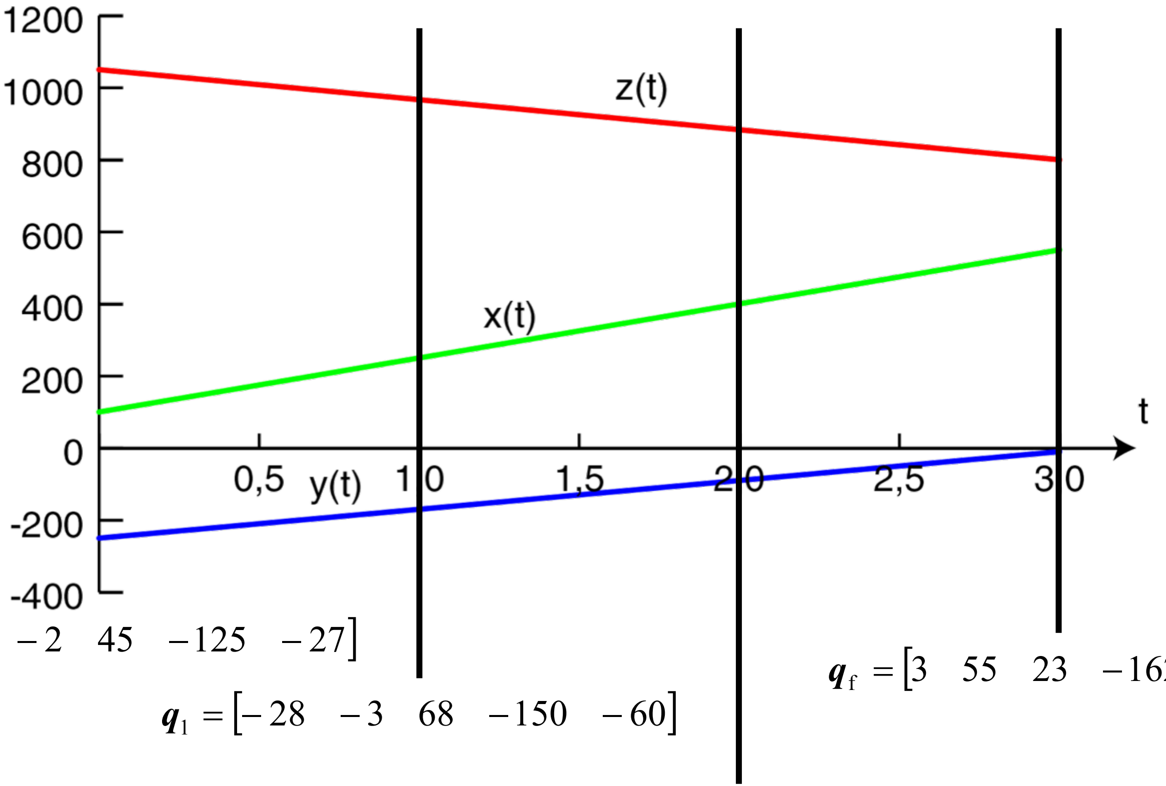
$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{i}} = [100 \quad -250 \quad 1050]$$

$$\boldsymbol{p}_1 = [250 \quad -170 \quad 966{,}7]$$

$$\boldsymbol{p}_2 = [400 \quad -90 \quad 883{,}3]$$

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{f}} = [550 \quad -10 \quad 800]$$

Trayectorias Cartesianas



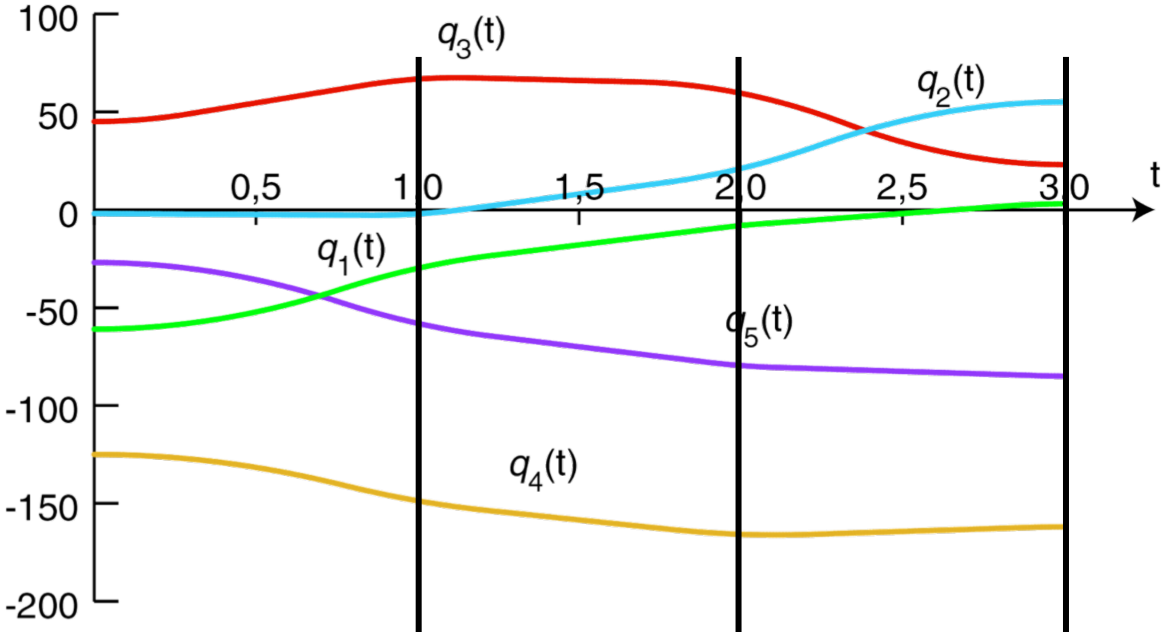
$$\boldsymbol{q}_i = [-61 \quad -2 \quad 45 \quad -125 \quad -27]$$

$$\boldsymbol{q}_1 = [-28 \quad -3 \quad 68 \quad -150 \quad -60]$$

$$\boldsymbol{q}_2 = [-8 \quad 19 \quad 64 \quad -167 \quad -80]$$

$$\boldsymbol{q}_f = [3 \quad 55 \quad 23 \quad -162 \quad -85]$$

Trayectorias Cartesianas



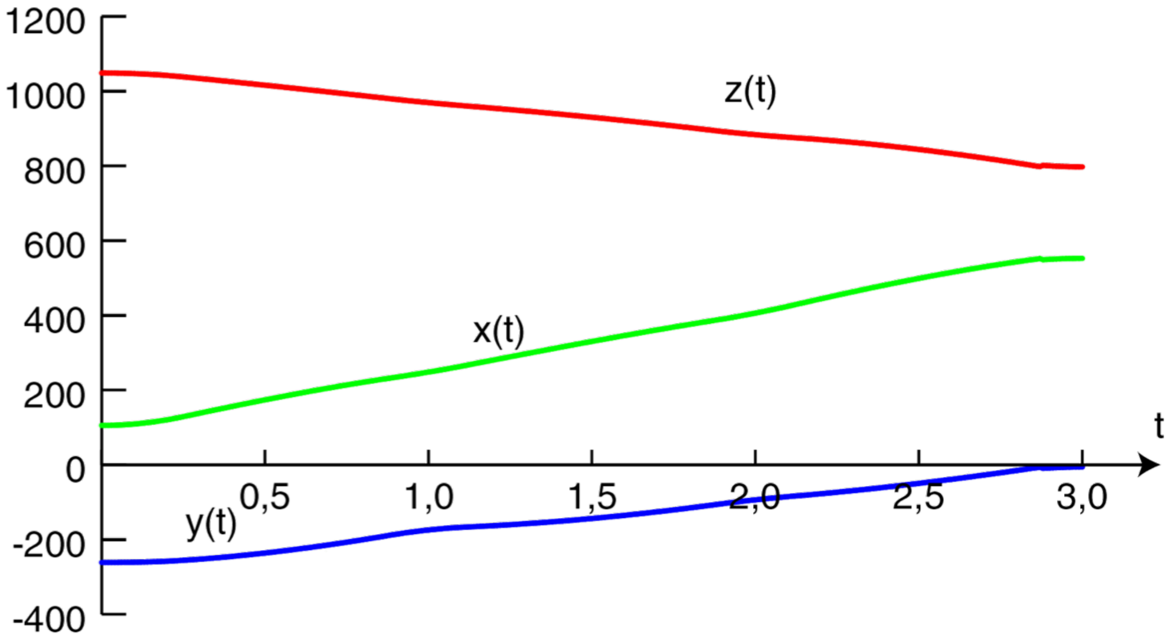
$$\boldsymbol{q}_\mathrm{i} = [-61 \quad -2 \quad 45 \quad -125 \quad -27]$$

$$\boldsymbol{q}_1 = [-28 \quad -3 \quad 68 \quad -150 \quad -60]$$

$$\boldsymbol{q}_2 = [-8 \quad 19 \quad 64 \quad -167 \quad -80]$$

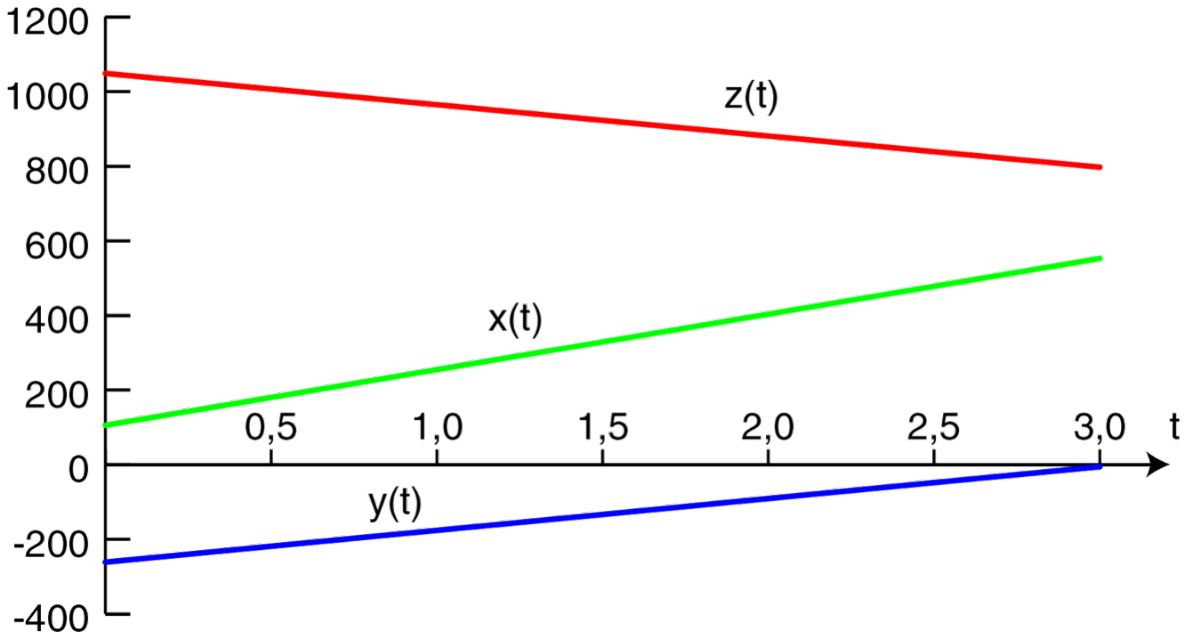
$$\boldsymbol{q}_\mathrm{f} = [3 \quad 55 \quad 23 \quad -162 \quad -85]$$

Trayectorias Cartesianas



Trayectorias Cartesianas

- Utilizando 15 puntos intermedios equidistantes en el espacio cartesiano.



TRAYECTORIAS CARTESIANAS / ARTICULARES

Introducción
Trayectorias Cartesianas vs trayectorias articulares
Trayectorias en el espacio articular
Trayectorias en el espacio Cartesiano
Escalado uniforme del tiempo
Conclusiones

Escalado uniforme del tiempo

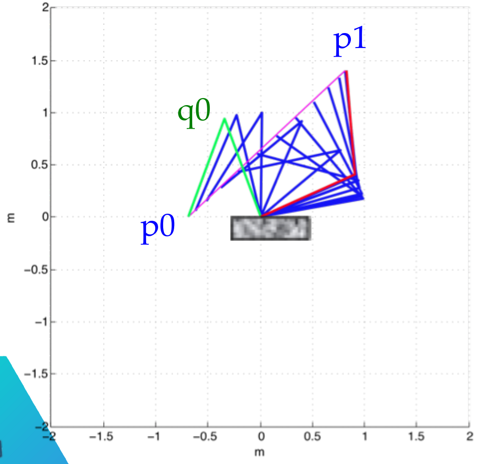
- Para una trayectoria dada p(s) (en espacio articular o cartesiano) y una ley de tiempo dada s(τ) ($\tau = \frac{t}{T}$, T = "tiempo del movimiento"), es necesario verificar si los límites existentes en la velocidad (articular), v_{max} , y / o la aceleración (articular), a_{max} son superadas o no.
  - a menos que tales restricciones ya se hayan tenido en cuenta durante la planificación de la trayectoria, por ejemplo, mediante el uso de una ley de tiempo con perfil trapezoidal de velocidad.
- La velocidad se escala linealmente con el tiempo de movimiento:
  - $\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{ds} \cdot \frac{ds}{d\tau} \cdot \frac{1}{T}$
- La aceleración se escala cuadráticamente con el tiempo de movimiento:
  - $\frac{d^2p}{dt^2} = \left(\frac{d^2p}{dt^2} \cdot \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 + \frac{dp}{ds} \cdot \frac{d^2s}{d\tau^2}\right) \cdot \frac{1}{T^2}$

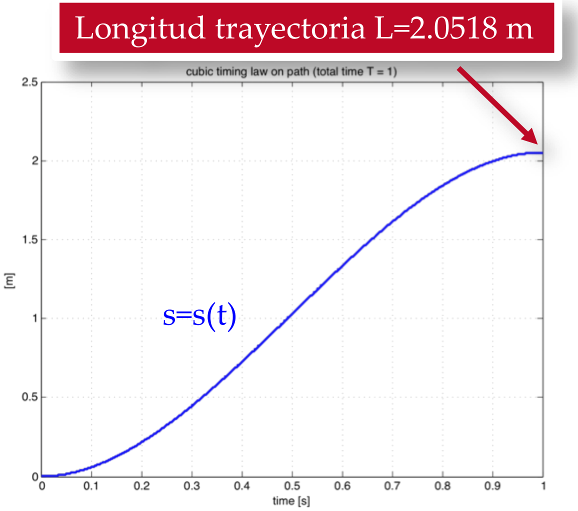
Escalado uniforme del tiempo

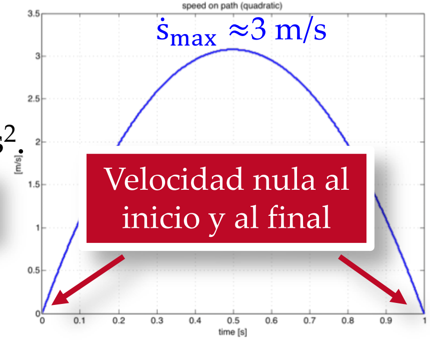
- Si el movimiento no es posible, se escala (incrementa) el tiempo de movimiento T→kT (k>1), tomando como referencia la restricción más superada (máximo de los ratios $\frac{|v|}{v_{max}}$ y $\frac{|a|}{a_{max}}$).
- Si el movimiento es "demasiado lento" con respecto a las capacidades del robot, se disminuye T (k <1).
  - En ambos casos, después de escalar, habrá (al menos) un instante de saturación (para al menos una de las dos variables de velocidad / aceleración).
  - No es necesario volver a calcular los perfiles de movimiento desde cero.

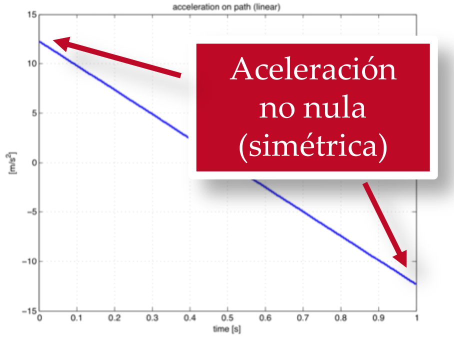
Escalado uniforme del tiempo

- Robot planar 2R con eslabones de longitud unitaria (1m).
  - Trayectoria Cartesiana lineal p(s) desde $q_0 = (110, 140)$ grados → $p_0 = f(q_0) = (-0.684, 0)$ m hasta $p_1 = (0.816, 1.4)$ m, con trayectoria cúbica en el tiempo s(t) (reposo a reposo), T = 1s.
- Límites articulares:
  - velocidad máxima (absoluta) $v_{max,1} = 2$ rad/s, $v_{max,2} = 2.5$ rad/s
  - aceleración máxima (absoluta) $a_{max,1} = 5$ rad/s^2, $a_{max,2} = 2.5$ rad/s^2.



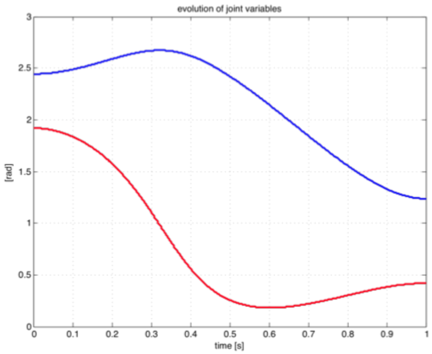


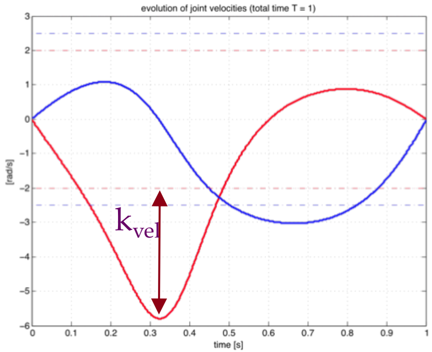


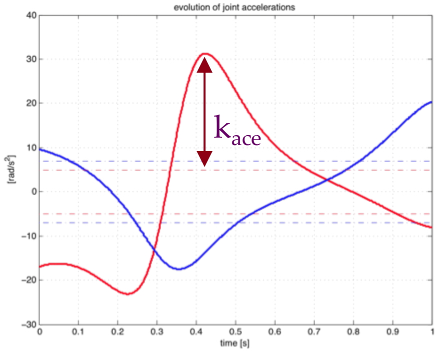


Escalado uniforme del tiempo

- Se superan tanto la velocidad máxima como la aceleración máxima con T=1s.
  - Relación máxima de velocidad superada: $k_{vel} = 2.898$
  - Relación máxima de aceleración superada: $k_{ace} = 6.2567$
- Escalado uniforme mínimo de tiempo de la trayectoria Cartesiana para recobrar la viabilidad:
  - $k = \max\{1, k_{vel}, \sqrt{k_{ace}}\} = 2.898 \rightarrow T_{escala} = kT = 2.898 > T$



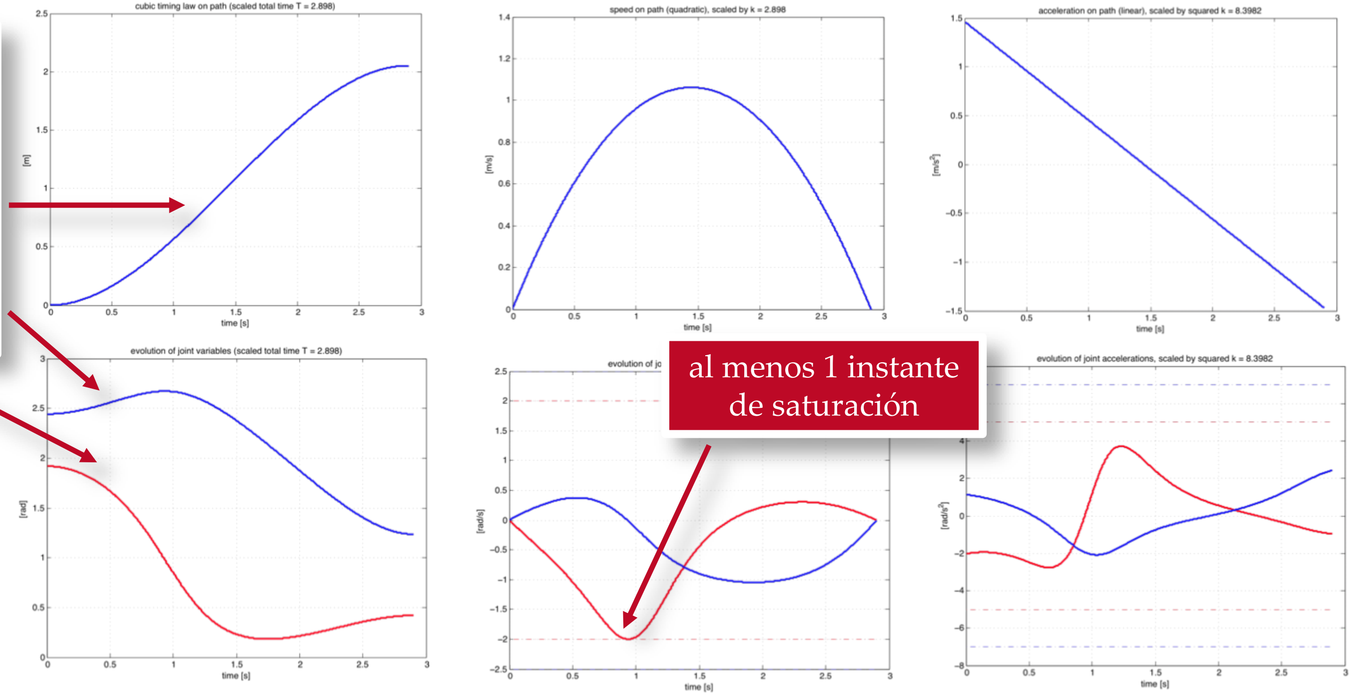




Escalado uniforme del tiempo

- Trayectoria escalada con Tescala = 2.898 s.
  - La velocidad [aceleración] en espacio Cartesiano y la velocidad de las articulaciones [aceleraciones] se escalan linealmente [cuadráticamente].

La trayectoria Cartesiana trazada y las trayectorias articulares asociadas siguen siendo las mismas



al menos 1 instante de saturación

TRAYECTORIAS CARTESIANAS / ARTICULARES

Introducción
Trayectorias Cartesianas vs trayectorias articulares
Trayectorias en el espacio articular
Trayectorias en el espacio Cartesiano
Escalado uniforme del tiempo
Conclusiones

Conclusiones

- Las trayectorias están compuestas por una trayectoria geométrica y una ley temporal.
- La trayectoria proporcionada por el planificador de trayectorias es mucho más densa que la proporcionada por el planificador de tareas.
- Planificar en el espacio Cartesiano permite visualizar y adaptarse mejor, pero requiere la inversión cinemática en tiempo de ejecución.
- La planificación de trayectorias articulares mediante polinomios funciona muy bien para interpolaciones punto a punto, pero introduce demasiada oscilación para los casos en los que hay muchos puntos intermedios.
- La técnica de doble normalización permite obtener polinomios de interpolación independientes del tiempo requerido para el movimiento y del desplazamiento que se deba realizar.

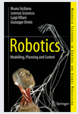
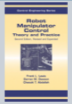
Conclusiones

- El perfil de velocidad trapezoidal proporciona una técnica para la interpolación de trayectorias que maximiza velocidad y aceleración articular.
- Para múltiples segmentos, se debe asegurar continuidad entre segmentos al menos en posición y velocidad.
- Un spline es la solución con mínima curvatura entre todas las funciones de interpolación con continuidad en la segunda derivada.
- Para trayectorias de pick-and-place se puede trabajar con esquemas de varios polinomios concatenados, como la 4-3-4 o la 3-5-3.
- En general, los métodos de planificación de trayectoria propuestos en el espacio articular también se pueden aplicar en el espacio Cartesiano.
- Las trayectorias en el espacio Cartesiano están sometidas a problemas debido fundamentalmente a las singularidades en el espacio de trabajo.

Conclusiones

- El número de puntos a interpolar en el espacio Cartesiano es típicamente bajo, se utiliza normalmente trayectorias de interpolación simples, como líneas rectas, arcos de círculo, etc.
- En aquellos esquemas en los que no se maximiza la velocidad y / o la aceleración articular, es posible que al terminar de planificar se deba recalcular el resultado para llevar las articulaciones a estos límites, reduciendo el tiempo de la tarea.
- La velocidad se escala linealmente con el tiempo de movimiento.
- La aceleración se escala cuadráticamente con el tiempo de movimiento.

Bibliografía

	Barrientos, A., Peñín, L. F., Balaguer, C., Aracil, R. “**Fundamentos de Robótica**”, McGraw-Hill, Madrid (2007) ISBN: 978-84-481-5636-7 .
	Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., Oriolo, G. “**Robotics: Modelling, Planning and Control**”, Springer-Verlag, London (2010) ISBN: 978-1-84628-641-4.
	Lewis, F. L., Dawson, D. M., Abdallah, C. T. “**Robot Manipulator Control: Theory and Practice**”, CRC Press, New York (2003) ISBN: 978-0824740726.
	Siciliano, B., Khatib, O. “**Handbook of Robotics**”, Springer-Verlag, Berlin (2008) ISBN: ISBN: 978-3-540-23957-4.
	Craig J. J. “**Introduction to Robotics: Mechanics and Control**”, Pearson (2017) ISBN: 978-0133489798.

Control y programación de robots

TEMA 1. TRAYECTORIAS CARTESIANAS / ARTICULARES

Máster Universitario en Automática y Robótica

Grupo **Hu**man **Ro**botics

HUMAN ROBOTICS

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

dfests.ua.es